UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA - PPGMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

WILLIAM JOSÉ GONÇALVES

RACIOCÍNIO COVARIACIONAL EM AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: POSSIBILIDADES DE DESENVOLVIMENTO A PARTIR DO USO DE TAREFAS

DISSERTAÇÃO

LONDRINA
2018

WILLIAM JOSÉ GONÇALVES

RACIOCÍNIO COVARIACIONAL EM AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: POSSIBILIDADES DE DESENVOLVIMENTO A PARTIR DO USO DE TAREFAS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

LONDRINA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

G635r Gonçalves, William José
Raciocínio covariacional em aulas de cálculo diferencial e integral: possibilidades de desenvolvimento a partir do uso de tarefas / William José Gonçalves. - Londrina : [s.n.], 2018.
100 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Londrina, 2018.
Bibliografia: f. 83-88.

1. Raciocínic. 2. Cálculo diferencial. 3. Cálculo integral. 4. Matemática - Estudo e ensino. 5. Matemática - Problemas, questões, exercícios. I. Trevisan, André Luis, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Cristina Benedeti Guilhem - CRB: 9/911

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina/Cornélio Procópio
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

TERMO DE APROVAÇÃO

RACIOCÍNIO COVARIACIONAL EM AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: POSSIBILIDADES DE DESENVOLVIMENTO A PARTIR DO USO DE TAREFAS

por

WILLIAM JOSÉ GONÇALVES

Esta dissertação foi apresentada às 14h30min do dia 23 de agosto de 2018 como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Londrina. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho APROVADO.

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Prof. Dr. André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

____
Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro
Universidade Federal do ABC

____
Profª. Drª. Claudete Cargnin
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Londrina, 23 agosto de 2018.

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática”.

A Miguel e Maria, meus filhos.

AGRADECIMENTOS

Primeiro a Deus, o maior de tudo e de todos.

Aos meus familiares que se fazem preocupados antes e durante toda a minha caminhada que tem sido intensa, e de muita aprendizagem; em especial, José e Maria, meu pai amado e minha mãe amada, dois gigantes que lutaram forte pelos seus filhos; A Bia e Cintia, irmãs queridas, amadas e sempre preocupadas comigo, isso é alimento para seguir em frente.

A Jaqueline, dos meus filhos ela é mãe, sempre cuidadosa e presente na vida deles.

Aos meus filhos, que desde pequenos, ouviram por vezes do papai, *agora não posso,* vai passar.

Ao professor Dr. André Luis Trevisan, por ser parceiro o tempo todo, pelos votos de confiança e por estar sempre disposto ao que precisei, exemplo de professor e de humano.

À professora Drª Claudete Cargnin e ao professor Dr Alessandro Jacques Ribeiro, por carinhosamente terem aceitado fazer parte da minha banca de defesa.

Ao estudante de Iniciação Científica Daniel Daré pelas inúmeras participações durante a coleta de dados e discussões.

Aos estudantes que passaram pelas minhas aulas e que de alguma forma contribuem nas minhas reflexões.

Aos meus amigos e docentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT, pelos momentos de discussões e trocas de experiências.

Ao projeto de edital Universal do CNPq - Processo 457765/2014-3.

Enfim, a todos que, de alguma forma, contribuíram em minha caminhada de pesquisa.

Vai, vai lá, não tenha medo do pior
Eu sei que tudo vai mudar
Você vai transformar o mundo ao seu redor
Mas não vacila, moleque de vila, moleque de vila, moleque de vila

(Letra da música Projota, autores: Jose Tiago Sabino Pereira / Pedro Luiz Garcia Caropreso)

RESUMO

GONÇALVES, William José. **Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: possibilidades de desenvolvimento a partir do uso de tarefas.** 2018. 99 fls. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2018.

Esta dissertação apresenta tarefas que abordam ideias do Raciocínio Covariacional (RC) organizadas por meio de episódios de resolução de tarefas. Foi implementada nas aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no Ensino Superior, em turmas regulares de um curso de Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) do campus Londrina. Elencou-se como objetivo geral da pesquisa desvelar ideias do RC que foram mobilizadas durante as discussões coletivas desencadeadas pelo trabalho com tarefas matemáticas. Para fins de análise, tomamos recortes da produção escrita e trechos de diálogos nos grupos. Buscamos identificar o potencial das tarefas em termos de fomentar discussões que envolviam ideias do RC, usando para tal um modelo analítico de sete fases interativas utilizado para estudar o desenvolvimento do pensamento matemático. Da análise realizada, inferimos que, em vários momentos, embora os alunos parecessem verbalizar compreensão da situação, reconhecendo a covariação entre as grandezas envolvidas, falhavam nas representações, ou não eram capazes de estabelecer relações explícitas entre ideias do RC e conceitos do CDI. Por se tratar de um mestrado no âmbito profissional, apresenta-se um caderno de tarefas (produto educacional) disponibilizado como resultado de nossa pesquisa.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas Matemáticas. Raciocínio Covariacional.

ABSTRACT

GONÇALVES, William José. **Covaritational reasoning in Differential and Integral Calculus classes: possibilities of development from the use of tasks**. 2018. 99 pgs. Dissertation (Professional Master in Teaching Mathematics) - Federal Technological University of Paraná. Londrina, 2018.

This dissertation presents tasks that address ideas of the Covariational Reasoning (CR) organized through episodes of task resolution. I was implemented in the classes of Differential and Integral Calculus (CIC) in Higher Education, in regular classes of a course of Engineering of the Federal Technological University of Paraná (UTFPR) of the Londrina campus. It was listed as a general objective of the research to analyze ideas of the CR that were mobilized during the collective discussions triggered by the work with mathematical tasks. For purposes of analysis, we took cuttings of written output and excerpts from dialogue in groups. We seek to illustrated the potential of the tasks in terms of instigating discussions involving CR ideas using an interactive seven-phase analytical model used to study thought mathematical development. From the analysis made, It was possible to infer that at several moments, although the students seemed to verbalize an understanding of the situation, recognizing the covariation between the quantities involved, they failed in the representations, or were not able to establish explicit relations between CR ideas and CIC concepts. For it is a master's degree in the professional field, it presents a workbook (educational product) made available as a result of our research proposal.

Keywords: Mathematics Teaching. Teaching Differential and Integral Calculus. Mathematical Tasks. Covariational Reasoning.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação para o estudo e agradecimentos[1]

Começar a escrever um texto de dissertação, nem sempre é tarefa fácil (de forma prefacial, o que é tarefa?), visto que grandes obras foram escritas em situações diversas, algumas delas frutos da alegria (aquilo que fica entre duas tristezas), da tristeza, oriunda de fontes diversas, amor, doença, perda; outras inspirações, como da esperança (alegrar-se por aquilo que ainda não aconteceu), ou até mesmo do temor (entristecer por aquilo que também não aconteceu). Em tela, posso dizer que o combustível para a escrita desta dissertação é um mesclado de Amor (penso que nas suas mais diversas concepções: Eros, Philia e Ágape) e de muitas reflexões, essas acerca de muitas indagações, hoje, por exemplo, por que pessoas partem desta vida, partem deste plano para outro, enfim, deixam de ser perceptíveis aos sentidos, e então passam a ser tangíveis somente ao que se trata de sinapse?

Gostaria de trazer à baila um breve relato dos caminhos percorridos até esse momento. Elenco aqui, como inicial, o segundo ano da graduação. O início da caminhada como professor deu-se como OFA (ocupante função atividade) em São Paulo. Seria equivalente ao que chamamos de PSS no Paraná. Nessa mesma época, estava cursando o segundo de três anos da graduação em Licenciatura em Matemática; ingressei no projeto de iniciação científica (IC) 2006/2007, na mesma IES, orientado pelo excelente professor Ruben Alekxander Pela, pessoa com quem muito aprendi.

A gênese do tema da IC era ao derredor dos questionamentos, quais fatos/fatores/motivos/circunstâncias levam aos baixos índices de resultados de avaliação em Matemática, nas mais diversas esferas que procuram mensurar e/ou avaliar (neste momento não tenho como objetivo discutir avaliação, para evitar tergiversar a ideia fulcral) os conhecimentos matemáticos dos alunos no Brasil. Talvez sejam os formatos tradicionais de ensino e as metodologias que se aplicam em sala de aula, na crença de que o modelo ideal é o que se tem na atualidade. Nesse viés, estudou-se uma geometria singular que se desenvolveu no Japão,

[1] Esta seção e parte da seguinte, que tratam das motivações pessoais do autor, serão escritas em primeira pessoa do singular. O restante do texto, em primeira pessoa do plural.

denominada Sangaku; com o objetivo de utilizar essa geometria como meio para um ensino diferenciado[2] da geometria na Educação Básica.

O acesso a um maior número de instrumentos e de técnicas intelectuais dá, quando devidamente contextualizado, maior capacidade de enfrentar situações e problemas novos, de modelar adequadamente uma situação real para, com esses instrumentos, chegar a uma possível solução ou curso de ação. A ideia supracitada objeto de percepção oriunda da IC, levou-me a pensar e a me aprofundar sobre ela, no período de mestrado; indo ao encontro da ideia apresentada por D'Ambrosio (2012, p.119): "aprender não é mero domínio de técnicas, habilidades e nem memorização de algumas explicações e teorias".

Após a graduação, ingressei em um curso de extensão ofertado pela Unicamp denominado MAT100[3]. No decorrer do curso, deparei-me com uma metodologia um tanto quanto diferente daquela a que estava acostumado até então e percebi que a abordagem, na sua grande maioria, dava-se a partir da pergunta, da dúvida, do problema (nesse átimo, gostaria de mencionar o nome de um amigo que a Unicamp me presenteou "Dema", pessoa amante da ciência, sempre ajudou nos momentos em que me via sem entender/compreender absolutamente nada daquilo que estava sendo apresentado pelos professores). Nesse instante, existiu um choque de realidades: será que a forma pela qual estou buscando conhecer o saber vai ao encontro daquilo que se pode chamar de ensino de excelência, de resultado, enfim de aprendizado? Nessa mesma ocasião, comecei a perceber que dissociar filosofia da matemática seria bastante arriscado. Trago comigo o estudo contínuo de filosofia, tendo-a como pano de fundo e instrumento de suma importância nessa busca por uma forma plausível de ensinar matemática.

Desde então, procuro olhar a ciência por um prisma um pouco diferente do que a grande maioria usa, algo na mesma direção da ideia de Schopenhauer (2010, p. 156-157):

> de modo geral, não é a observação de fenômenos raros e escondidos que só são apresentáveis por meio de experimentos que serve para a descoberta das *mais importantes* verdades, mas a observação daqueles fenômenos que são evidentes e acessíveis a todos***. Por isso a tarefa não é ver o que ninguém viu ainda, mas pensar aquilo que ninguém pensou a respeito daquilo que todo mundo vê*** (grifos do autor).

---

[2] Entende-se como ensino diferenciado a busca de alternativas de ensino que difiram daquelas usualmente vistas no contexto escolar.
[3] O curso de especialização MAT100 do IMECC/UNICAMP destina-se à formação de Professores de Matemática que atuam no Ensino Fundamental (sexto ao nono anos) e Médio.

Entender os elementos que compuseram a palavra Matemática (aqui no sentido lexicográfico), as etimologias das palavras presentes na ciência, as aulas brilhantes do professor Aguinaldo Prandini Ricieri no museu da Matemática em São Paulo, a sutileza do segurar o giz e o quão prazeroso (leia-se, os olhos dele sempre brilhavam) era ouvir o Ruben falar dessa ciência, o convencimento do professor Ricardo Borelli de que precisávamos gostar de matemática, a lembrança do professor Alberto Adame, que sempre respondia minhas perguntas trazidas de casa, todos esses ditos alhures, da época de graduação e os grandes mestres me fizeram trilhar caminhos nunca antes visitados.

Dantes, ainda na Unicamp, senti o desejo (leia-se *eros*) de saber um pouco mais sobre alguns tópicos da matemática e também da filosofia. O *start* maior deu-se quando me mudei para o Paraná em 2011 e conheci uma pessoa que hoje é um nobre amigo chamado Angelo Torres. A pauta das nossas conversas sempre gira em torno da filosofia e sobre a vida. Eis que percebo a necessidade de intensificar os estudos nessa área, iniciando então a leitura de alguns pensadores: Sócrates, Platão, Aristóteles, René Descartes, Kant, Nietzsche, Sartre, Cortella, Clóvis, Karnal. Nessa caminhada, li e conheci um pouco mais sobre Vygotsky, Piaget, Wallon e Rubem Alves. Como não lembrar Rubem Alves (2005, p.5), “ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais".

Nesse átimo, tendo em vista que logo mais devo iniciar a escrita da introdução da dissertação, gostaria de relatar um episódio do meu primeiro ano de graduação. O professor e então coordenador do curso Alessandro Jacques Ribeiro apresentava alguns conteúdos da sua disciplina. Não lembro com exatidão a sua frase, mas lembro do seu esforço em fazer o conceito de função ser entendido. A expressão que ficou gravada na memória foi: “variação entre duas grandezas”. Pois bem, no presente, inicio a escrita da minha dissertação com o tema girando em torno da temática, aqui um olhar em torno da discussão do conceito de funções “Raciocínio Covariacional nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral: possibilidades”. Cabe ressaltar que o professor Alessandro Jacques Ribeiro é membro da banca examinadora.

Como parágrafo final, gostaria de mencionar um grande ser humano e professor, André Luis Trevisan, amante da ciência, uma das poucas pessoas que possuo no vínculo de amizade e que se dispõe a falar sobre conhecimento a todo e qualquer momento; exemplo a ser seguido assim como todos os que aqui fiz questão de mencionar. Costumo dizer por onde passo: **HOJE PARTE DE MIM É A SOMA DOS MEUS PROFESSORES.**

Isso posto, sou grato.

1.2 A constituição do problema de pesquisa

Prefacialmente, a gênese do projeto surgiu de observações em sala de aula do ensino regular, em que a maioria dos estudantes não veem sentido em grande parte dos conceitos e termos matemáticos que lhes são “apresentados”.

Se aqui observarmos o contato que os estudantes tiveram nos anos que antecedem o ingresso nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral(CDI)[4], pouco ou nada tem a ver com as ideias vistas até então com o desenvolvimento dos cenários e ideias que serão apresentadas no curso de CDI. Nessa mesma linha, Bonomi (1999, p.5) apresenta que, “para a maioria dos alunos, o conhecimento matemático, desenvolvido anteriormente, na escola secundária, pouco ou nada tem a ver com o que lhe é apresentado no curso de Cálculo”.

Outrossim, Barufi (2002, p. 69) destaca:

> para a maioria dos alunos a Matemática da Escola no Ensino Médio pouco ou nada tem a ver com o que lhes é apresentado no Cálculo, e o caráter de análise com o qual passa a se defrontar parece se constituir em grande dificuldade.

Além disso, o modo como lhes são apresentados os conceitos, por meio de definições, seguidas de exemplos e resolução de “exercícios modelo”, contribui para que, muitas vezes, essa dificuldade na compreensão seja potencializada. Nesse sentido, podemos mencionar que os autores Trevisan e Mendes (2017, p. 4) destacam da fala de Freudenthal (1973) “que o CDI não seja tratado com um amontoado de definições que estão acima de qualquer suspeita”.

Enquanto professor (o pesquisador) do Ensino Médio, e tendo contato com o ensino de alguns tópicos do CDI nos cursos de Administração e Ciências Contábeis nos quais a disciplina “exigia” um pensamento mais no viés reflexivo de situações do que “puramente matemático”, é perceptível o entrave dos alunos no trabalho com as tarefas propostas. Se observarmos as literaturas que abordam a discussão em torno

---

[4] Chamaremos Cálculo Diferencial e Integral de CDI a partir daqui.

do ensino de CDI, veremos que há uma significativa preocupação nesse sentido, ou seja, as “matemáticas” parecem não ter nada em comum, ou mais que isso, são dissociadas.

Podemos trazer, por exemplo, a ideia apresentada por Trevisan e Mendes (2013, p. 137) quando destacam que

> Novos pontos de vista a respeito da disciplina de CDI pedem por tarefas que favoreçam ao estudante o desenvolvimento de competências de conexão e reflexão, para além da mera reprodução e memorização. Tais tarefas devem ter como pressuposto o fato de que o conhecimento matemático mostra-se dinâmico e construído a partir das relações, justificativas, análise e validações estabelecidas pelos envolvidos e não como algo pronto e acabado. Aos estudantes devem ser incentivados a justificarem seus pensamentos por meio da exploração de situações, questionamentos e conjecturas.

Durante praticamente os três anos do Ensino Médio, e ao ingressar no Ensino Superior, no curso de CDI, transitamos por um conceito “formal” de funções (que, em pouco – ou nada, “carrega” a essência desse conceito: o aspecto covariacional das grandezas envolvidas). Enquanto professor que atua nesses dois níveis de escolaridade desde 2011, sempre indagamos se a definição proposta pelos materiais didáticos era a mais adequada. Diga-se de passagem que quase todos abordam da mesma forma: iniciam com relações e relações binárias, após isso, diagramas de flechas e então classificação de relações em funções ou não, nesse momento já “impondo” as condições a serem atendidas para receber a denominação como tal. Quase sempre caímos naquele exemplo clássico do taxi que cobra uma taxa fixa denominada bandeira e um valor em reais por quilômetro rodado (o que chega a ser uma ironia em tempos de Uber...).

Uma função relaciona-se a um conceito matemático que descreve como duas ou mais quantidades variam uma em relação à outra (e é essa a ideia que pretendemos enfatizar neste trabalho). Tal relação pode ser descrita por palavras, símbolos matemáticos e representações, como gráficos ou tabelas. Smith (2008, *apud* MESTRE, 2014, p. 71) refere-se

> ao pensamento funcional como o pensamento representacional que se foca nas relações entre duas (ou mais) quantidades que variam, e mais especificamente, como o tipo de pensamento que conduz das relações específicas para a generalização dessas relações.

Para Mestre (2014, p. 71), a “gênese do pensamento funcional acontece quando o aluno se envolve numa atividade, escolhe prestar atenção às quantidades que variam e começa a focar-se na relação entre essas quantidades”. Abaixo

(Figura 1), apresentamos alguns *prints* de uma gravação registrada durante a aplicação de uma das tarefas[5] que serão apresentadas no decorrer do texto. Nas imagens, podemos destacar por meio de uma imagem essa "gênese", em que o estudante representa de uma maneira não usual (com o movimento de suas mãos) a relação entre duas grandezas.

Figura 1: Representação da relação entre duas grandezas utilizando as mãos.

Fonte: autor.

Conforme destacam Thompson e Carlson (2017), o chamado *raciocínio covariacional (RC)*[6], como uma construção teórica, aparece no final da década de 1980 e início dos anos 1990[7] e apresenta formulações bastante diversificadas. Pode ser caracterizado *em termos de coordenação[8] das imagens de duas variáveis à medida que elas mudam*, como proposto por Confrey, ou *em termos de conceituar*

---

[5] Adiante apresentaremos maiores detalhes relacionados às imagens, tais como o cenário de aplicação e a tarefa em desenvolvimento.
[6] Chamaremos, no decorrer do texto, Raciocínio Covariacional de RC.
[7] Inicialmente, nas obras de Thompson e Confrey, e mais tarde em colaboração com Smith, Carlson e outros autores citados na fundamentação teórica deste trabalho.
[8] A palavra *coordenar* é utilizada de forma livre pelos autores, sem que uma definição explícita seja apresentada. Porém, pelo contexto no qual são utilizadas, infere-se que assuma o significado de "combinação", e está associada ao conceito de *objeto multiplicativo*, explorado por Saldanha e Thompson (1998 *apud* THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 433, tradução nossa): "uma pessoa forma um objeto multiplicativo a partir de duas quantidades quando ela se une mentalmente seus atributos para fazer um novo objeto conceitual que é, simultaneamente, um e outro".

os valores das quantidades individuais como variáveis e então conceitualizando duas ou mais quantidades como variando simultaneamente. Para Carlson *et al* (2003, p. 124, grifos nossos) o raciocínio covariacional contempla "*as atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades que variam quando se presta atenção às formas como cada uma delas muda em relação à outra*".

Apesar das diferentes nuances nessas caracterizações[9], os autores supracitados argumentam que ideias de variação e covariação são epistemologicamente necessárias para que estudantes e professores desenvolvam conceitos úteis e robustos de funções, e servem como bases conceituais para elaboração de conceitos do CDI.

Nessa acepção, considerando a importância da temática, elencamos como problema de pesquisa a investigação das possibilidades do desenvolvimento de ideias do RC em estudantes de CDI 1[10], promovidas pelo trabalho com tarefas matemáticas. Nosso objetivo de pesquisa é desvelar ideias do RC que foram mobilizadas durante as discussões coletivas desencadeadas pelo trabalho com tarefas matemáticas. Mais especificamente pretendemos:

- Organizar tarefas para aulas de CDI 1 envolvendo RC;
- Elencar ideias do RC mobilizadas na discussão coletiva.

No intuito de responder ao primeiro objetivo, realizamos um estudo bibliográfico para caracterizar o RC, um estudo sobre tarefas matemáticas para respaldar teoricamente a organização de um ambiente de ensino e aprendizagem de CDI. Foram organizados cinco episódios de resolução de tarefas junto a uma turma de CDI de um curso de Engenharia, dos quais foram gerados dados para atender ao segundo objetivo.

Esta dissertação, resultado da pesquisa, está organizada do seguinte modo: além desta introdução, apresentamos a fundamentação teórica relacionada às temáticas RC e tarefas matemáticas; os procedimentos metodológicos da pesquisa; descrição e análise dos dados, organizadas a partir de algumas das tarefas que compuseram nosso ambiente de ensino e de aprendizagem de CDI 1.

---

[9] Caracterizações essas que, enquanto construtos teóricos, encontram-se ainda em fase de reformulação, como discutido por Thompson e Carlson (2017).

[10] Neste trabalho utilizamos a sigla CDI quando nos referimos ao Cálculo Diferencial e Integral enquanto área da matemática e CDI 1 para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que, em nosso contexto de pesquisa, contém sua ementa o estudo de funções de uma variável real e seus limites, derivadas e integrais.

Por fim, por se tratar de um mestrado em âmbito profissional, é entendido como parte integradora do processo de conclusão o texto final (dissertação) e um produto educacional, sendo assim, produzimos um caderno de tarefas que poderá ser utilizado por quem for de interesse, em especial poderíamos elencar professores que atuam com a disciplina de CDI. Tal caderno será constituído de uma introdução ao conceito de RC e de algumas tarefas, organizadas a partir de situações que possibilitam a exploração de ideias do RC em aulas de CDI 1.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo está organizado em três seções, que tratam das seguintes temáticas: (2.1) aspectos históricos do desenvolvimento do conceito de função; (2.2) a abordagem do conceito de função sob o viés covariacional; (2.3) o trabalho com tarefas matemáticas e o papel das discussões coletivas por elas desencadeadas em aulas de CDI.

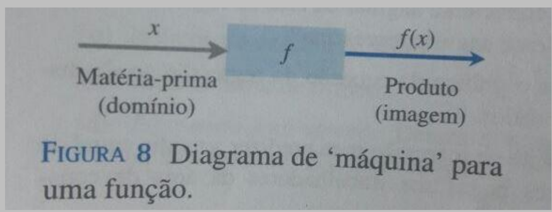
2.1 Aspectos históricos do desenvolvimento do conceito de função

Apresentamos aqui algumas reflexões em torno do conceito de função, em especial aspectos históricos que nos permitam compreender o modo como está presente no ensino de CDI. Em especial, buscamos enfatizar a ideia subjacente a tal conceito, ou seja, compreender como duas ou mais quantidades variam uma em relação à outra, tendo como pano de fundo o RC.

Função é um conceito importante e unificador para a matemática contemporânea, central em várias áreas, e essencial para que qualquer aluno compreenda o CDI. Carlson (1998) menciona a presença do objeto matemático "função" tanto nessa disciplina quanto em outras, para determinar, por exemplo, se dois conjuntos tem a mesma cardinalidade ou se dois espaços topológicos são homeomorfos, bem como enquanto elementos de estruturas matemáticas (espaços vetoriais, anéis, grupos). Além disso, são utilizadas em diversas ciências para modelar fenômenos.

Atualmente define-se função como um tipo particular de correspondência entre duas quantidades. Vale ressaltar que não temos a intenção neste momento de observar a evolução e/ou alteração em torno da definição de funções. Seguem abaixo (Quadro 1) escritas diferentes dessa mesma definição que colecionamos de quatro obras escolhidas de forma aleatória, sendo as duas primeiras de nível Ensino Médio e as duas últimas do Ensino Superior.

Quadro 1: Algumas definições de funções em livros didáticos.

Obras	Definição
MACHADO (1988)	Quando duas grandezas x e y estão relacionadas de tal modo que para cada valor de x fica determinado um único valor de y, dizemos que y é função de x.
FILHO (1998)	Considerando dois conjuntos, A e B, não-vazios e uma relação binária de A em B, dizemos que essa relação é função de A em B se, e somente se, a cada elemento x do conjunto A corresponder um único elemento y do conjunto B.
FINNEY (2002)	Antes da definição: Uma regra que associa a cada elemento de um conjunto um único elemento de outro conjunto é chamada de *função*. Os conjuntos podem ser de qualquer tipo e não precisam ser iguais. Uma função é como uma máquina que associa um único produto a cada matéria-prima disponível. A matéria-prima forma o **domínio** da função; os produtos formam a **imagem** (Figura 8).  Definição: Uma **função** de um conjunto D para um conjunto R é uma regra que associa um único elemento em R a cada elemento em D.
HUGHES-HALLET et al (2011)	Uma **função** é uma regra que recebe certos números como entradas e atribui a cada número de entrada exatamente um número de saída. O conjunto de todos os números de entrada é denominado o **domínio** da função, e o conjunto de saída resultantes é denominado a **imagem** da função.

Fonte: autor.

As quatro definições são bastante similares no que tange à apresentação do conceito de função como uma correspondência. Exceto pelo primeiro, os demais remetem ao objeto matemático conjunto. Filho (1998) trata a função como um caso particular de relação entre conjuntos (conceito definido anteriormente pelo autor em seu livro). Nota-se o uso de uma linguagem um pouco mais coloquial nas duas últimas definições, sendo o uso da palavra “regra” algo comum entre elas.

Historicamente, uma primeira definição mais sistematizada de funções é proposta por Bernoulli em 1718, como apresentado por Ponte (1990, p. 3): “uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes”. Mais tarde, é reformulada por Euler que troca o termo “quantidade” por “expressão analítica”. Esta definição vigorou entre os séculos XVIII e XIX sendo novamente reformulada por Dirichlet, baseado na ideia de correspondência entre conjuntos. Já no século XX, é estendida para incluir tudo que fosse correspondência arbitrária entre quaisquer conjuntos numéricos ou não. Com base no exposto, podemos dizer que o conceito passou pelas seguintes ideias, nesta ordem: quantidade → correspondência → relação.

Dizem Vallejo e Gómez (2014, p.10, tradução nossa):

> a análise da evolução do conceito histórico de função nos mostra que este é muito complexo, e que para alcançar a definição atual, teve que passar por um longo e laborioso processo no que matemáticos notáveis tiveram sérias dificuldades e problemas. [...] a definição de função, na sua forma atual, é um objeto muito sofisticado, consequência de numerosas generalizações feitas através de uma evolução de mais de 2000 anos, e ainda mais, considera-se que este conceito continua na evolução.

Oehrtman, Carlson e Thompson (2008) evidenciam que o uso da definição atual como introdução ao conceito de função no âmbito escolar é inadequada, por tratar-se de uma resposta a problemas que os estudantes sequer podem conceber, uma vez que foi motivada largamente por debates entre matemáticos na busca de respostas a questões internas da própria Matemática.

Nessa linha, Oehrtman, Carlson e Thompson (2008, p. 153, tradução nossa) fazem a seguinte recomendação:

> [...] que os currículos escolares e o ensino incluam um foco maior na compreensão de ideias de covariação e múltiplas representações de covariação (por exemplo, usando sistemas de coordenadas diferentes), e que sejam oferecidas mais oportunidades para estudantes experimentarem diversos tipos de funções enfatizando múltiplas representações das mesmas funções. Os currículos da faculdade poderiam então se basear nessa base. Isso seria promover uma visão mais flexível e robusta das funções - uma que não leva a inadvertidamente equiparar funções e fórmulas.

Esses autores sobreditos destacam que, embora há pelo menos mais de um século, tem-se reconhecido que os currículos escolares deveriam enfatizar o conceito de função como ideia unificadora da matemática, mas ainda hoje os estudantes continuam a sair do Ensino Médio e dos primeiros anos dos cursos universitários com uma compreensão empobrecida desse conceito. Argumentam que o conceito de função é complexo e se desenvolve lentamente, e sua aprendizagem envolve diferentes aspectos que, segundo Carlson (1998), haviam sido tratados separadamente em estudos anteriores, mas que ela busca apresentar de forma articulada no seu trabalho. Esses aspectos são relacionados à habilidade dos estudantes em:

- caracterizar relações funcionais do “mundo real” utilizando a notação de função;
- operar com um tipo particular de função, como uma fórmula, uma tabela ou um gráfico;
- transitar entre diferentes representações de uma mesma função;
- representar e interpretar aspectos covariantes de uma situação funcional (isto é, reconhecer e caracterizar como a variação de uma variável afeta a variação da outra);
- interpretar informações funcionais “estatísticas” e “dinâmicas” (isto é, interpretar gráficos, representando posição e taxa de variação);
- interpretar e descrever propriedades locais e globais da função: inclinação, continuidade e diferenciabilidade;
- construir funções utilizando fórmulas e outras funções;
- reconhecer funções, não-funções e tipos de função;
- conceitualizar uma função tanto como processo quanto como objeto;
- interpretar e compreender a linguagem da função; e
- caracterizar a relação entre uma função e uma equação (CARLSON, 1998, p. 117, tradução nossa).

Os termos *função como processo* e *função como objeto*, além de *função como ação*, são utilizados em referência aos tipos de visão conceitual de função que um estudante pode apresentar. Respaldados nos conceitos propostos por Dubinsky e Harel (1992), Thompson (1994b) e Oehrtman, Carlson e Thompson (2008) discorrem a respeito dessas diferentes visões conceituais. Denotam que a ideia de *função como processo* implica reconhecê-la como processo generalizado que define uma transformação de um conjunto de valores de entrada para um conjunto de valores de saída, ou seja, o aluno é capaz de imaginar o processo como um todo sem precisar executar ações individuais. Por sua vez, a concepção de *função como objeto* implica em reconhecê-la como passível de executar ações que as transformem (por exemplo, por meio do cálculo de sua derivada). Uma visão de *função como ação* implica em, frente a uma situação, buscar “calcular algo” e/ou encontrar um resultado/resposta. Por exemplo, conforme exemplificado por Thompson (1994b, p. 5, tradução nossa), “os alunos [que concebem função como ação] muitas vezes pensam, digamos $x(12-(x+5))$ como um representante de um comando para calcular”, dessa forma não há uma reflexão no sentido de buscar quais elementos estão envolvidos na situação e se eles se correlacionam. Com a intenção de promover o desenvolvimento em torno da visão de função como processo, Oehrtman, Carlson e Thompson (2008, p. 11-12, tradução nossa) apresentam algumas recomendações didáticas:

- peça aos alunos para explicar os fatos básicos da função em termos de entrada e saída;
- pergunte sobre o comportamento das funções em intervalos inteiros, além de pontos únicos;

- peça aos alunos para fazer e comparar julgamentos sobre funções em várias representações;
- com base na visão de função como processo, aplicar o raciocínio covariacional.

Elencamos neste momento a recomendação apresentada pelos autores citados acima, com o intuito de abordar as ideias disponíveis nas literaturas a que tivemos acesso no período desta pesquisa. No processo de elaboração das tarefas, as ideias aqui apresentadas serão utilizadas como pano de fundo.

2.2 A abordagem do conceito de função sob o viés covariacional

Nesta seção faremos considerações com a intenção de buscar elementos que contribuam para o delineamento de tarefas que promovam habilidades relacionadas ao RC. Nosso intuito não é, neste átimo, realizar um estudo essencialmente histórico, mas sintetizar, a partir dos textos de Thompson, Carlson e colaboradores publicados a partir década de 1990, ideias que circunscrevem o conceito de RC. Destacamos que a nomenclatura raciocínio covariacional pode apresentar-se nas literaturas de forma variada, tais como, pensamento covariacional, função como covariação, aspectos covariantes de uma situação covariacional etc.

Reconhecemos que, nas obras de Thompson na década em tela, existe uma ideia prefacial de RC apresentada com as temáticas “quantidade” e “raciocínio quantitativo”, no intuito de caracterizar o conceito de taxa, aspecto central quando se pensa em uma função sob o viés covariacional. Thompson (1990, 1992, 1994b) apresenta um modelo teórico organizado sobre estágios para a caracterização do raciocínio quantitativo, sustentado na ideia de abstração reflexiva de Piaget em pesquisas a respeito de campos conceituais aditivo e multiplicativo.

Nesse modelo, uma *quantidade* é definida como uma qualidade de algo passível de mensuração. *Quantificação* é o processo pelo qual se atribuem valores numéricos às qualidades de um objeto. Uma *operação quantitativa* é uma ação mental por meio do qual se reconhece uma quantidade como aquela cujo valor varia (ou pode variar) e se concebe uma nova quantidade em relação a uma ou mais quantidades já conhecidas. Uma operação quantitativa não é, necessariamente, numérica, pois tem a ver com a compreensão de uma situação (reconhecer que uma quantidade cresce/decresce, ou que o “modo” como cresce/decresce pode mudar, ou ainda que duas quantidades crescem – ou não, na mesma direção). Uma operação numérica, por sua vez, pode ser usada para quantificar/mensurar essas mudanças.

Thompson (1994b) destaca que o desenvolvimento do conceito de *taxa* passa inicialmente pelo reconhecimento de mudança em alguma quantidade, progride para uma imagem vagamente coordenada entre duas quantidades e se consolida em uma imagem da covariação de duas quantidades cujas medidas permanecem em proporção constante.

Uma definição de covariação encontrada de maneira mais sistematizada em Saldanha e Thompson (1998, p. 299, tradução nossa) é a seguinte “nossa noção de covariação é de alguém que tenha em mente uma imagem sustentada [sustained, no original] dos valores de duas quantidades [que variam] simultaneamente.”

Nesse viés,

> No desenvolvimento inicial, coordenam-se [mentalmente] valores de duas quantidades – pense em um, depois o outro, depois o primeiro, depois o segundo, e assim por diante. Imagens posteriores de covariação implicam a compreensão do tempo como uma quantidade contínua, de modo que, na sua imagem, os dois valores de quantidades persistem (SALDANHA; THOMPSON, 1998, p.289).

Carlson *et al.* (2002) propõem um quadro teórico (Tabela 1) para descrever habilidades do RC incluindo cinco categorias de ações mentais observadas em estudantes ao aplicá-lo no contexto de representação e interpretação de um modelo gráfico para um evento dinâmico (Na situação, deu-se uma garrafa, de formato esférico, vazia a ser preenchida com água a fluxo contínuo de derrame; o objetivo era observar a relação entre a altura e o volume do líquido interno durante seu preenchimento). Carlson, Larsen e Jacobs (2002, p.3), ao discutirem conceitos de taxa média de variação e taxa de variação instantânea destacam que, à época de sua pesquisa, pouco se conhecia sobre a importância do RC na compreensão dessas ideias. Para eles, o RC envolve a “coordenação de imagens de duas quantidades que variam e o modo como uma varia em relação à outra”.

Tabela 1: Ações mentais associadas ao RC.

Ação mental	Descrição da ação mental	Comportamentos associados
AM1	Coordenação do valor de uma variável com mudanças na outra.	• Designação dos eixos com indicações verbais de coordenação de duas variáveis (por exemplo: *y* varia com as mudanças de *x*).
AM2	Coordenação do sentido [11]da mudança de uma variável com mudanças na outra.	• Construção de uma linha reta com coeficiente angular positivo. • Verbalização da consciência do sentido de mudança de uma variável quando é considerada uma mudança no valor de entrada.
AM3	Coordenação da variação absoluta de uma variável com mudanças na outra.	• Marcação de pontos e construção de linhas retas secantes. • Verbalização da consciência da variação absoluta da variável dependente considerando mudanças na variável independente.
AM4	Coordenação da taxa de variação média de uma função com incrementos uniformes na variável independente.	• Construção de linhas retas secantes contíguas em todo o domínio da função. • Verbalização da consciência das mudanças na taxa de variação de uma função considerando incrementos uniformes da variável independente.
AM5	Coordenação da taxa de variação instantânea de uma função com variações contínuas da variável independente em todo o domínio da função.	• Construção de uma curva suave, com indicações claras de mudanças de concavidade. • Verbalização da consciência das mudanças na taxa de variação para todo o domínio da função (indicação correta das concavidades e pontos de inflexão).

Fonte: Carlson *et al* (2002) apud Orfali[12] (2017, p. 137).

Tendo analisado as ações mentais descritas acima, é possível então determinar o nível de raciocínio covariacional (Tabela 2) envolvido na tarefa observada. Nessa linha, Orfali (2017, p. 137) destaca “que a habilidade de raciocínio covariacional de uma pessoa em uma tarefa alcança um certo nível de desenvolvimento quando sustenta as ações mentais daquele nível e dos anteriores”.

[11] As grandezas envolvidas crescem/decrescem conjuntamente, ou uma delas cresce e a outra decresce ou vice-versa.

[12] Embora tenhamos consultado os textos originais de Carlson e colaboradores durante a elaboração desta revisão de literatura, optamos por apresentar a versão traduzida por Orfali (2017), nessa tabela e na seguinte, por a considerarmos já validada.

Tabela 2: Níveis de raciocínio covariacional.

Nível	Nome	Descrição
N1	**Coordenação**	No nível de coordenação, as imagens da covariação podem sustentar a ação mental de coordenar mudanças em uma variável com as variações de outra (AM1).
N2	**Sentido**	No nível do sentido, as imagens da covariação podem sustentar as ações mentais de coordenar o sentido da variação de uma variável (crescente ou decrescente) com as variações da outra. As ações mentais AM1 e AM2 são ambas sustentadas por imagens de N2.
N3	**Coordenação quantitativa**	No nível da coordenação quantitativa, as imagens da covariação podem sustentar as ações mentais de coordenar a variação absoluta de uma variável com as variações da outra. As ações mentais AM1, AM2 e AM3 são sustentadas por imagens de N3.
N4	**Taxa de variação média**	No nível da taxa de variação média, as imagens da covariação podem sustentar as ações mentais de coordenar a taxa de variação média de uma função com variações uniformes da variável independente. Também podem sustentar o uso da taxa de variação média para coordenar a variação absoluta de uma variável com as variações da outra. As ações mentais de AM1 até AM4 são sustentadas por imagens de N4.
N5	**Taxa de variação instantânea**	No nível da taxa de variação instantânea, as imagens da covariação podem sustentar as ações mentais de coordenar continuamente a taxa de variação instantânea de uma função com variações da variável independente ao longo de um intervalo. Este nível inclui a consciência de que a taxa de variação instantânea resulta de refinamentos da taxa de variação média em intervalos cada vez menores. Também inclui a consciência de que, no ponto de inflexão, a taxa de variação passa de crescente para decrescente, ou o contrário. As ações mentais de AM1 até AM5 são sustentadas por imagens de N5.

Fonte: Carlson *et al* (2002) apud Orfali[13] (2017, p. 137).

Mais recentemente, Thompson e Carlson (2017) revisaram as estruturas covariacionais anteriores de duas maneiras: (i) analisando o raciocínio variacional dos alunos separadamente do seu raciocínio covariacional; (ii) analisando como os alunos coordenam suas imagens de valores de quantidades variando. Propuseram seis significados para a *variação*, sendo eles: a variável é uma letra, não há variação, variação discreta grosseira [chunky], variação contínua grosseira e variação contínua suave.

[13] Embora tenhamos consultado os textos originais de Carlson e colaboradores durante a elaboração desta revisão de literatura, optamos por apresentar a versão traduzida por Orfali (2017), nessa tabela e na seguinte, por a considerarmos já validada.

Frank (2017) exemplifica esses seis significados considerando a seguinte situação: um carro viajando ao longo de uma rodovia, sendo a quantidade variável o número de milhas viajado (suponha que d represente os valores variáveis que essa quantidade assume).

- Um aluno da educação infantil que está aprendendo o alfabeto possivelmente imagine d como uma *letra*, sem associá-la como representação de uma quantidade que muda;
- Um aluno que conceitua essa situação *sem uma imagem de variação* pode entender $d = 4$ como o número de milhas que um carro A viajou, e $d = 5$ o número de milhas viajado por um carro B (cada valor de d é associado a um carro diferente);
- Um aluno que conceitua essa situação com uma *imagem discreta grosseira de variação* pode imaginar que o marcador do carro muda "magicamente" de 4 para 5 milhas;
- Uma *variação contínua grosseira* refere-se ao aluno que, embora reconheça que enquanto o marcador muda de 4 para 5 milhas a quantidade d assume os valores no intervalo [4,5], não entende como essa quantidade varia;
- Por fim, se o estudante conceitua a situação com uma variação contínua suave, ele está imaginando uma "mudança em andamento".

Como apoiar o pensamento dos alunos no intuito de ajudá-los a imaginar relacionamentos entre quantidades que mudam continuamente, visto que, em geral, estão "condicionados" a conectar pontos para formar um gráfico? Uma abordagem possível seria levar os alunos a pensarem em pequenas mudanças nas quantidades como forma de promover seu raciocínio com variação contínua. Porém, para Thompson e Carlson (2017), apoiados em trabalhos de Castillo-Garsow, isso não é suficiente: "pensar em variação contínua envolve, necessariamente, pensar em movimento" (em analogia ao conceito de *fluentes* de Newton – a raiz do CDI).

Um conceito presente nessa discussão é o de movimento fictivo: "aquele em que o objeto, apesar de estático, pode ser mais bem compreendido pelo movimento dinâmico que sugere" (FRANT; SILVA; POWELL, 2013, p. 36). Assim, por exemplo, ao dizermos que uma estrada "vai" de um extremo ao outro do país, nada realmente se move, ainda que falemos como se algo estivesse se movendo (em função do uso de um verbo de movimento: "vai"). Assim, "quando se desenvolve uma imagem refletida de algo se movendo fictivamente, a imagem permanece presente, mas tácita, como uma varredura de atenção que está envolvida ao pensar em todos os elementos de um conjunto” (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 431, tradução nossa). As concepções de tempo implicam e se baseiam no movimento fictício. Assim, as concepções de “variação contínua dos alunos podem ser afetadas por sua capacidade de conceber tempo como uma quantidade e, quando eles estão pensando em medidas específicas de tempo quantificado, pelo seu conceito de número” (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 431, tradução nossa).

Baseados nas distinções entre o contínuo discreto e grosseiro, e pensamento contínuo e suave sobre como o valor de uma quantidade varia e as concepções de tempo como quantidade, os autores supracitados propõe uma revisão de quadros teóricos de covariação (Tabela 2). A Tabela 3 apresenta a visão atual de Carlson e Thompson (2017, p. 441, tradução nossa) do raciocínio covariacional como uma construção teórica:

> Ele mantém ênfase no raciocínio quantitativo e em objetos multiplicativos (Thompson) e na coordenação de mudanças nos valores das quantidades (Confrey, Carlson), e acrescenta formas pelas quais um indivíduo concebe como quantidades podem variar (Castillo-Garsow). Ele também remove a taxa de mudança como parte de uma estrutura covariacional. Para que os alunos conceituem a taxa de mudança, eles precisam pensar covariacionalmente, mas também requer conceitualizações que vão além do raciocínio covariacional, como conceituações de razão, quociente, acumulação e proporcionalidade.

Os autores destacam que os pesquisadores podem utilizar esses quadros teóricos sob duas perspectivas: para descrever uma classe de comportamentos, ou para analisar a capacidade de uma pessoa raciocinar de forma variacional ou covariacional.

Gostaríamos de destacar que temos interesse em utilizar tais quadros teóricos como respaldo para pensar tarefas que ofereçam possibilidades para o desenvolvimento de ideias do RC, uma vez que essa forma de pensar é fundamental na compreensão de fenômenos que envolvem quantidades que se relacionam, e que servem de base para a elaboração de conceitos do CDI (derivadas, integrais, além do próprio conceito de função). Não foi nosso objetivo, assim, categorizar os indivíduos segundo o nível de raciocínio covariacional, mas identificar ideias do RC, oferecidas pelas tarefas que propusemos.

Tabela 3: Níveis de raciocínio covariacional (versão atual)

Nível	Descrição
Covariação Contínua Uniforme [Smooth continuous covariation]	A pessoa prevê aumento ou diminuição (mudança) no valor de uma quantidade (variável) que ocorre simultaneamente com mudanças no valor de outra variável, e a pessoa considera que ambas as variáveis variam uniforme e continuamente.
Covariação Contínua em partes (grosseira) [Chunky continuous covariation]	A pessoa prevê mudanças no valor de uma variável como acontecendo simultaneamente com mudanças no valor de outra variável, e prevê ambas variáveis variando com a variação contínua em partes (grosseira).
Coordenação de valores [Coordination of values]	A pessoa coordena os valores de uma variável (x) com valores de outra variável (y) com a antecipação da criação de uma coleção discreta de pares (x, y).
Coordenação Grosseira de Valores [Gross covariation of values]	A pessoa forma uma imagem grosseira de valores de quantidades que variam em conjunto, como “esta quantidade aumenta enquanto essa quantidade diminui”. A pessoa não prevê que valores individuais de quantidades se juntem. Em vez disso, a pessoa prevê um vínculo solto e não múltiplo entre os intervalos globais em valores de duas quantidades.
Pré-coordenação de Valores [Precoordination of values]	A pessoa considera que os valores de duas variáveis variam, mas de forma assíncrona - uma variável muda, então a segunda variável muda, então a primeira e assim por diante. A pessoa não antecipa a criação de pares de valores como objetos multiplicativos.
Nenhuma coordenação [No coordination]	A pessoa não possui nenhuma imagem de variáveis variando juntas. A pessoa se concentra em uma ou outra variável sem coordenação de valores.

Fonte: Carlson e Thompson (2017, p. 441, tradução nossa).

Em síntese, entendemos raciocínio covariacional quando podemos relacionar variações entre grandezas. A título de exemplo, uma grandeza x altera (podemos entender altera no sentido de crescimento ou decrescimento) com o passar do tempo e uma grandeza y altera também com o passar do tempo (tempo passando igual para ambas). Se, por via de alguma relação e/ou representação, conseguirmos relacionar essas duas variações, dizemos então que na situação as grandezas estão covariando.

2.3 O trabalho com tarefas matemáticas e o papel das discussões coletivas por elas desencadeadas em aulas de CDI.

No sentido proposto por Ponte (2014, p.14), tarefas são “elementos organizadores de quem aprende, sendo em sua maioria propostas por professores e, uma vez propostas, devem ser interpretadas pelos alunos podendo originar atividades diversas”. São “ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática”, podendo ou não ter “potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar” (PONTE, 2014, p. 16).

Para esse autor,

> nem sempre é muito nítida a linha de demarcação entre os diferentes tipos de tarefa. Por exemplo, uma certa tarefa pode ser uma exploração ou um exercício, conforme os conhecimentos prévios dos alunos. Contrariando a ideia que os alunos não podem realizar uma tarefa se não tiverem sido ensinados diretamente a resolvê-la, indica que estes aprendem fora da escola muitos conhecimentos que podem mobilizar na aula de Matemática – e é isso que se procura potenciar na abordagem exploratória. Valoriza assim a (re)descoberta pelos alunos de métodos próprios para resolver uma questão, sublinhando que essa é muitas vezes a melhor forma de aprender (PONTE, 2014, p. 21).

Visto que “não é tanto a partir das actividades práticas que os alunos aprendem, mas a partir da reflexão que realizam sobre o que fizeram durante essas actividades práticas” (PONTE, 2005, p. 15), é importante destacar o papel das discussões coletivas no trabalho com tarefas matemáticas. Para Ponte (2017, p.34), “tanto a investigação como a prática profissional mostram como momentos de discussão são essenciais para a compreensão matemática por parte dos alunos”.

São

> momentos de trabalho na sala de aula com grandes potencialidades para a aprendizagem dos alunos, ao favorecerem o seu envolvimento na apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados para os seus raciocínios quando trabalham com tarefas matematicamente significativas (RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2018, p. 399).

Nessa linha e com base nas ideias presentes nos trabalhos de Couto, Fonseca e Trevisan (2017), Couto e Trevisan (2017) e Trevisan e Mendes (2017), temos defendido a organização de ambientes de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas. *Ambiente de aprendizagem* refere-se ao contexto em que ao indivíduo são oferecidas oportunidades para aprender. Os *episódios* (momentos) são organizados a partir da proposição de tarefas elaboradas e/ou adaptadas de materiais curriculares, que não sejam precedidas da apresentação de definições ou exemplos similares, e que seu desenvolver em grupos em sala de aula contribua para a exploração intuitiva de ideias matemáticas e posterior sistematização.

Conforme Trevisan e Mendes (2017), tal dinâmica de trabalho tem como objetivo convidar os estudantes a explorarem alguns conceitos intuitivamente, ou seja, não há uma explicação prévia de conceitos anteriores à tarefa que será proposta (a preocupação central nesse momento não é trazer a definição formal do conceito em tela). Nesse cenário, é possível os estudantes elaborarem suas próprias conjecturas e, dessa forma, apresentar aos colegas da turma suas conclusões. Vale destacar que, após essas discussões, o professor pode intervir visando “refinar” os conceitos que são subjacentes ao conteúdo que se pretende explorar.

Com base nas ideias explicitadas, entendemos tarefa como um conjunto de situações que permitam aos alunos explorarem intuitivamente ideias matemáticas, de forma que possíveis respostas sejam embasadas em conhecimentos prévios e elementos presentes na própria situação, sem que a apresentação de alguma definição seja necessária. Nesse sentido, vale destacar que procuramos escolher, no trabalho com o RC, tarefas que não trouxessem de forma explícita o conteúdo matemático envolvido que poderia ser utilizado como suporte para obtenção de uma resposta ou solução.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 Caracterização da Pesquisa

Esta é uma investigação qualitativa de cunho interpretativo (BOGDAN, BIKLEN, 1994). Pela dimensão da amostra e pelas opções metodológicas adotadas, não intenta uma generalização dos resultados, mas realizar uma reflexão tendo por referência o quadro teórico apresentado.

Trata-se de um recorte de um trabalho desenvolvido no âmbito de um projeto maior, intitulado “Investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino” (Processo 457765/2014-3 CNPq), sob coordenação do orientador deste trabalho, e contando com a participação de outros quatro docentes pertencentes ao quadro permanente do Programa de Mestrado no qual o trabalho é desenvolvido, alunos de iniciação científica da UTFPR dos cursos de Engenharia e Licenciatura em Química, e outros mestrandos do PPGMAT - Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, câmpus Londrina/Cornélio Procópio.

O objetivo geral do projeto é investigar os processos envolvidos na caracterização, na implementação e na avaliação de um ambiente de ensino e aprendizagem para a disciplina de CDI, considerando as condições reais às quais estamos sujeitos. Para tal, desdobram-se vários objetivos específicos, dentre os quais, organizar tarefas matemáticas que compõem esse ambiente.

Assim, tem-se trabalhado com a criação de tarefas (e, intrinsecamente associado a isso, investigado formas de utilizá-las em sala de aula, bem como aprendizagens por ela propiciadas) que oportunizem aos estudantes reinventar CDI, que permitam a criação de conceitos e teoremas fundamentais utilizados intuitivamente antes que sejam descritos com precisão ou provadas (TREVISAN; MENDES, 2017). O trabalho desenvolvido nesta dissertação, bem como de outras duas que a precedem (FONSECA, 2017; RAMOS, 2017), tem esse foco.

3.2 Cenário de investigação

Com o intuito de responder ao objetivo de pesquisa, foram organizados cinco episódios de resolução de tarefas junto a uma turma[14] de Engenharia de Materiais (período integral) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) Câmpus Londrina, ingressantes no curso no 2º semestre de 2017 e matriculados na disciplina de CDI 1 (1º semestre), cujo professor responsável foi o orientador deste trabalho. Em alguns momentos (que caracterizaram o Estágio de Docência do curso de mestrado (PPGMAT)), estivemos responsável pela condução do trabalho em sala de aula; em outros, acompanhamos a condução realizada pelo orientador do trabalho (enquanto professor regente das turmas).

Para essa turma, as seis aulas semanais de CDI aconteceram às terças e quintas-feiras, no horário das 7h30min às 10h, totalizando uma carga de 102 aulas de 50 minutos cada uma. Essa turma iniciou com 44 alunos, além de outros 6 na condição de dependentes, porem, ao longo do semestre, muitos desistiram da disciplina e/ou do curso, permanecendo com cerca de 30 alunos até o final do semestre letivo.

Cada episódio consistiu em um encontro de 3 aulas de 50 minutos cada uma. E foi organizado buscando atender pressupostos descritos na fundamentação teórica: aos alunos, organizados em grupos de 3 a 5 integrantes, foram propostas sequências de tarefas (ver apêndice 1) sem que houvesse alguma explicação prévia de conteúdos. Tais episódios não ocorreram em uma sequência comum de datas, ou seja, os episódios ocorreram em média um a cada mês, à medida que os conceitos “formais” próprios da disciplina (limite, derivada e integral) eram explorados e sistematizados.

O curso foi planejado seguindo a estrutura curricular “não usual” proposta por Trevisan e Mendes (2017, p. 265):

> iniciamos o trabalho a partir do conceito intuitivo de sequência (apesar de não estar na ementa da disciplina). O propósito é que uma abordagem de conjuntos discretos anteceda o estudo de derivadas de funções reais, na qual o conceito de taxa média é desenvolvido a partir da discussão de diferentes sequências de diferença e quocientes de diferenças e o conceito de integral emerge do trabalho com sequências de somas parciais, sem que o conceito de limite seja apresentado formalmente nesse momento [...] Destacamos que a exploração inicial desses conceitos é restrita às funções polinomiais. Por meio delas, lidamos com diferentes contextos dos quais

[14] Uma descrição detalhada do perfil de turmas desse curso foi realizada por Ramos, Fonseca e Trevisan (2016), e apenas alguns elementos são destacados neste texto.

> emergem e nos quais se aplicam os conceitos de integral definida e derivada, “aproximados” por meio do Teorema Fundamental do Cálculo. O trabalho com funções racionais associa-se com o estudo do seu comportamento infinito, bem como do comportamento próximo a um ponto. Explora-se então o conceito de limite de uma função em um ponto, e associado a ele o conceito de continuidade e diferenciabilidade. A partir da definição “formal” de derivada como um limite, expandem-se as regras de derivação (e integração, consequentemente). Por fim, o estudo de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas finaliza a disciplina.

3.3 Tarefas Organizadas

Para a organização das tarefas, levamos em consideração um conjunto de ideias do RC que poderiam ser mobilizadas nas tarefas propostas. Vale lembrar que pretendemos observar em quais delas foi possível desvelar as seguintes ideias:

- (i) Constituir quantidades envolvidas na situação (reconhecer atributos de uma situação passíveis de medição);
- (ii) Raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades;
- (iii) Imaginar medidas de quantidades variando continuamente;
- (iv) Coordenar duas quantidades que variam juntas:
    - (a) reconhecer que as quantidades se relacionam;
    - (b) reconhecer direção de crescimento - ambas crescem/decrescem, por exemplo;
    - (c) reconhecer a existência de taxas de variação - cresce mais rápido/mais lento, ou cresce a uma taxa crescente ou decrescente;
    - (d) identificar eventuais mudanças na taxa de crescimento.

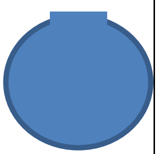
Visto que esses estudantes já haviam tido contato com uma definição formal de função em seu Ensino Médio, nosso intuito, por meio da realização dessas tarefas, era que (re)significassem esse conceito. Em todas elas, buscou-se mobilizar a articulação entre múltiplas representações (linguagem natural, tabela, gráfico), no intuito de coordenar a variação das quantidades envolvidas, reconhecendo a existência de taxas de variação e eventuais mudanças nessas taxas.

Com base nos referenciais citados no capitulo 2 e em livros de CDI (HUGHES-HALLET et al, 2011; STEWART, 2009; THOMAS 2009) , constituímos um banco de questões a partir do qual elencamos itens a fim de compor nosso conjunto de tarefas. Durante cada processo de aplicação tínhamos um esboço inicial previsto de tarefas, que poderiam ou não ser alteradas a partir das observações dos resultados de aplicação, sejam nas produções escritas, áudios coletados, observações tanto por parte do pesquisador quanto do professor, e também via diário de campo.

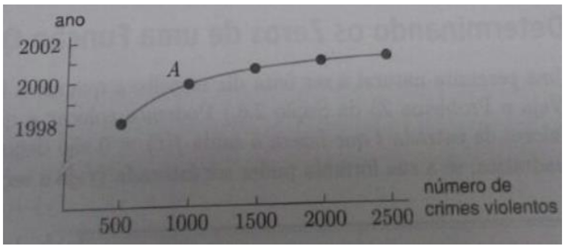
O conjunto de tarefas elaborado e proposto encontra-se no Apêndice. A seguir (Quadro 3) apresentamos aquelas que foram selecionadas para análise nesta dissertação (detalhes dessa escolha serão apresentados na continuidade deste texto) e, para cada uma delas, listamos as ideias do RC que tínhamos como objetivo desvelar com cada questão.

Vale aqui destacar que o modo como as tarefas foram organizadas tinha a intenção de que os estudantes lidassem com as situações sem a necessidade de tomar/adotar valores específicos para as grandezas envolvidas, ou seja, imaginassem medidas de quantidades variando continuamente (item iii).

Quadro 3: Tarefas selecionadas para análise.

<table>
<tr><th>Tarefas Selecionadas</th><th>Ideias do RC que podem ser exploradas</th></tr>
<tr><td>Tarefa da Garrafa[15] (episódio 2)
Água é derramada em uma garrafa/vaso a uma taxa constante. Use esta informação e a forma do vaso (figura ao lado) para responder às perguntas a seguir.

a) O que você entende por taxa constante de derrame de água nesta situação?
b) Imagine a cena do vaso sendo enchido e escreva o que você acha que pode ser medido nesta situação.
c) Esboce um gráfico que relacione a altura da água na garrafa com o passar do tempo. Explique o raciocínio que levou ao seu esboço.
d) Construa gráficos que relacionem as diferentes grandezas envolvidas nessa situação.</td><td>i - volume, altura, tempo de enchimento da garrafa.
iv(a) – relacionar tempo e altura; tempo e volume; altura e volume.
iv(b) – observar o comportamento crescente nas várias relações acima listadas.
iv(c) – tempo e volume se relacionam a uma taxa constante, enquanto tempo e altura, e altura e volume, relacionam-se a taxas variáveis.
iv(d) – no caso do tempo e altura (e altura e volume) reconhecer que há uma mudança na taxa de variação (representando um gráfico com mudança de concavidade – existência de ponto de inflexão).</td></tr>
<tr><td>Tarefa das Tabelas (episódio 4)
Como você descreveria a uma pessoa que não esteja vendo o gráfico de cada uma das funções descritas por meio das tabelas abaixo?
<table><tr><td>x</td><td>12</td><td>15</td><td>18</td><td>21</td></tr><tr><td>h(x)</td><td>21,40</td><td>21,53</td><td>21,75</td><td>22,02</td></tr></table></td><td>iv(b) – reconhecer que as relações expressas pelos valores em ambas as tabelas são crescentes.
iv(c) – identificar que ambas são não-lineares (taxa não constante), sendo que a relação expressa na primeira tabela envolve uma taxa decrescente (gráfico côncavo para baixo), e a segunda uma taxa crescente</td></tr>
</table>

[15] Em alguns momentos, referimo-nos a essa tarefa como tarefa do vaso, uma vez que as expressões também aparece nos diálogos dos estudantes.

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>1</td><td>1,3</td><td>1,7</td><td>2,2</td></tr>
</table>
</td>
<td>(gráfico côncavo para cima).</td>
</tr>
<tr>
<td>Tarefa do Político (episódio 4)
Um político concorrendo à reeleição declarou que o número de crimes violentos não está mais crescendo e que, atualmente, está sob controle. O gráfico apresentado na figura abaixo confirma esta afirmação? Por que sim ou por que não?

</td>
<td>iv(c) – reconhecer que o número de crimes está crescendo a uma taxa crescente ao longo do tempo (o que implica analisar o gráfico dado considerando uma inversão dos eixos apresentados, identificando que ao pensar no número de crimes como função do tempo, obtemos um gráfico côncavo para cima).</td>
</tr>
<tr>
<td>Depósito Bancário (episódio 4)
Quando se faz um depósito bancário, a quantia depositada na conta cresce lentamente no início. À medida que o saldo vai aumentando, a quantia de dinheiro cresce mais rapidamente, visto que a conta vai recebendo os juros sobre os novos juros e também sobre a quantia original. Faça uma representação dessa situação.</td>
<td>i - tempo e montante
ii - reconhecer o acúmulo de capital por um processo de juros compostos.
iv(a) - relacionar tempo e montante.
iv(b) – reconhecer que o capital aumenta com o tempo.
iv(c) – reconhecer que o montante cresce a uma taxa crescente (o gráfico montante em função do tempo é côncavo para cima).</td>
</tr>
<tr>
<td>Medicamento Injetado (episódio 4)
Quando um medicamento é injetado na circulação sanguínea de uma pessoa, a quantidade da droga presente no corpo começa por crescer rapidamente. Se a pessoa toma injeções diárias, o corpo metaboliza a droga, de modo que a quantidade de droga presente no corpo continua crescendo, mas a uma taxa decrescente. Por fim, a quantidade se torna constante em um nível de saturação. Construa um gráfico que represente essa situação.</td>
<td>i – quantidade de droga no organismo e tempo.
iv(a) – reconhecer que a quantidade de droga depende do tempo.
iv(b) – reconhecer que a quantidade de droga aumenta com o passar do tempo.
iv(c) – compreender que a expressão “continua crescendo, mas a uma taxa decrescente” implica em um gráfico côncavo para baixo; e que “a quantidade se torna constante em um nível de saturação” implica na existência de uma assíntota horizontal no gráfico.</td>
</tr>
<tr>
<td>Relação entre Perímetro e Área das Praças (episódio 5)
Construir um gráfico que relacione o perímetro e a área de uma praça supondo que ela tenha formato:
a) Circular
b) Quadrado</td>
<td>ii – reconhecer que a representação da medida do perímetro e da área depende do lado para a praça quadrada e do raio para a praça circular.
iv(a) – reconhecer que o perímetro e área podem se relacionar.
iv(b) – reconhecer que o perímetro e a área crescem conforme o aumenta o lado/raio.
iv(c) – reconhecer que em ambas as situações o perímetro cresce mais rápido que área até certo momento e que depois isso se altera.</td>
</tr>
</table>

Fonte: Autor

3.4 Coleta de Dados

Para o trabalho com as tarefas, os estudantes eram convidados a se organizarem em grupos de escolha livre, constituídos entre 3 e 5 integrantes (Figura 2), podendo a configuração do grupo modificar a cada tarefa proposta.

Figura 2: Ilustrações do trabalho em sala de aula.

Fonte: autor.

Para coleta de dados, fizemos uso da produção escrita e do áudio dos grupos enquanto trabalhavam com as tarefas, bem como das anotações feitas pelo pesquisador em seu diário de campo. De modo similar ao ocorrido no trabalho de Fonseca (2017) e Ramos (2017)[16], nossa opção pelo trabalho em condições reais de ensino buscou manter a dinâmica usual da sala de aula. Assim,

> não havia uma mudança no contrato didático estabelecido com a turma de modo que se distinguissem as aulas ‘usuais’ daquelas na qual o pesquisador (autor deste trabalho) estivesse presente (seja acompanhando a aplicação das tarefas, seja conduzindo o trabalho como parte de seu Estágio de Docência) (FONSECA, 2017, p. 36).

[16] Dissertações desenvolvidas no mesmo grupo de pesquisa e em contexto similar (turmas de CDI 1 de cursos de Engenharias). A primeira teve por objetivo a proposição de tarefas que oportunizem aos estudantes a exploração de ideias necessárias à compreensão do conceito de derivadas, em especial tarefas a serem aplicadas em momentos que antecedam seu estudo formal. A segunda resulta do processo de elaboração de um conjunto de tarefas para o estudo inicial de sequências numéricas e critérios de convergência em episódios de resolução de tarefas, como desencadeadoras do ensino de limite.

Como consequência, surgem algumas limitações no âmbito da coleta (sem, no entanto, comprometer os resultados obtidos), como apontado pelos autores supracitados:

- em função do tempo disponível para a realização da tarefa, nem sempre foi possível permitir que as equipes explorassem por completo a tarefa;
- nem sempre a coleta de dados ocorreu como planejado: às vezes a gravação ficou inaudível; outras, o gravador ou a câmera falharam; algumas equipes não entregaram a produção escrita e, quando solicitado na aula seguinte, essa não foi encontrada.

3.5 Organização e modo de análise dos dados

Para fins de análise, organizamos recortes da produção escrita e trechos de diálogo nos grupos que ilustrem o potencial das tarefas em termos de fomentar discussões que envolvem ideias do RC. Tal escolha foi realizada com base nos registros feitos pelo pesquisador em seu diário de campo a partir do acompanhamento do trabalho nos grupos em sala de aula, tomando por critério um maior envolvimento dos estudantes na “apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados” (RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2018, p. 399) enquanto trabalhavam com as tarefas. Houve intervenção do pesquisador junto aos grupos em alguns momentos da discussão no intuito de compreender como estavam pensando, e trazer novos elementos que possibilitassem aprofundar a discussão, ou colocar “em xeque” hipóteses incorretas.

Selecionamos protocolos de três grupos de estudantes (indicados como grupo 1, 2 e 3) no trabalho com seis tarefas (Quadro 3). Para cada uma das tarefas, foi selecionado o áudio de um desses grupos, cujos integrantes são indicados com o código (A1, A2, A3) referente ao grupo 1, (B1, B2, B3) referente ao grupo 2, e assim por diante. A escolha dos grupos se deu mediante seu envolvimento com a proposta, com o teor das discussões e a presença da diversidade de ideias entre os integrantes que perpassavam essas discussões. É importante ressaltar que as reticências que aparecem nas transcrições dos áudios indicam um tempo de silêncio entre os integrantes e/ou discussões externas à tarefa.

A seguir apresentamos (Quadro 4) as tarefas selecionadas e os grupos analisados.

Quadro 4: Tarefas e grupos selecionados para análise.

Tarefas Selecionadas	Grupos e alunos
- Tarefa da Garrafa	Grupo 1 (A1, A2 e A3)
- Tarefa das Tabelas; - Tarefa do Político; - Depósito Bancário; - Medicamento Injetado.	Grupo 2 (B1, B2 e B3)
- Relação entre Perímetro e Área das Praças	Grupo 3 (C1, C2, C3 e C4)

Fonte: autor.

Selecionados os grupos, procedeu-se à análise dos dados. Para tal, baseamo-nos em algumas etapas presentes no modelo proposto por Powell, Francisco e Maher (2004) para a análise de dados de vídeo no contexto de investigações sobre o trabalho matemático e o desenvolvimento do pensamento de estudantes engajados em investigações matemáticas (no caso de nosso trabalho, o modelo foi adaptado para a análise de áudios).

O modelo analítico proposto pelos autores para estudar o desenvolvimento do pensamento matemático emprega uma sequência de sete fases interativas e não lineares: 1. observar atentamente aos dados; 2. descrever os dados; 3. identificar eventos críticos; 4. Transcrever; 5. Codificar; 6. Construir o enredo; 7. Compor a narrativa.

Assim, para nos familiarizarmos com o conteúdo dos dados de vídeo, ouvimos integralmente os áudios das equipes selecionadas (mantendo-se ao nosso lado os protocolos escritos e o diário de campo), “sem impor intencionalmente uma lente analítica específica” sobre o que ouvia (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 19).

A partir daí, selecionamos e tomamos nota de trechos específicos (com intervalos de 2 a 5 minutos) do diálogo para ouvi-los novamente, elaborando breves descrições do conteúdo de cada trecho. Com base na observação e na descrição dos dados, adquirimos “um conhecimento profundo suficiente de seu conteúdo”, prosseguindo para a próxima fase: rever os áudios e identificar momentos significativos ou, como denominam os autores supracitados, *eventos críticos* – “sequências conectadas de expressões e ações que, dentro do contexto de nossas – a priori ou a posteriori – questões de pesquisa, requerem explicação por nós, pelos estudantes ou por todos” (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 22).

No caso, nosso foco estava em reconhecer momentos da discussão no grupo em análise na qual emergiam ideias do RC em cada tarefa selecionada. Assim, para cada uma delas, identificamos eventos críticos, e procedeu-se à transcrição dos trechos de diálogo com o

> propósito transferir para o papel o som e o posicionamento seqüencial da conversa. Uma tal transcrição de discurso é feita sob a perspectiva do ouvinte e apresenta seqüências ligadas de expressões que constituem os momentos dos interlocutores na fala e no pedido da palavra (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 28).

Para fins de transcrição, utilizamos marcas gráficas cujo significado é mostrado no Quadro 5.

Quadro 5: Símbolos que utilizamos nas análises.

Símbolos	**Significados**
[...]	Indica que os estudantes deram uma pausa para pensar sobre a situação em análise/discussão.
[--]	Indica que os estudantes cometeram um desvio temático, ou seja, trataram de ideias que não faziam parte da análise/discussão.
[hipótese]	Para indicar hipótese ou explicação do que se ouviu.

Fonte: Autor

De posse das transcrições, focamos nossa atenção no conteúdo dos eventos críticos, identificamos temas que nos ajudassem a interpretar os dados coletados (codificação). Como apontam Powell, Francisco e Maher (2004, p. 29-30), “da mesma forma que a identificação de eventos críticos, a codificação é dirigida pela perspectiva teórica dos pesquisadores e pelas questões de pesquisa”. Assim, buscamos desvelar ideias do RC que foram mobilizadas durante as discussões coletivas desencadeadas pelo trabalho com tarefas matemáticas. Segundo os autores supracitados, o modelo proposto é compatível com a implementação de códigos definidos *a priori*, o que ocorre em nosso caso.

Com o objetivo de facilitar tal identificação e posteriores interpretações, destacamos na cor azul[17] trechos transcritos dentro de cada evento crítico que, em nossa compreensão, evidenciam as ideias mobilizadas, sendo essas organizadas conforme Quadro 6.

[17] Tal inspiração deveu-se aos trabalhos desenvolvidos por Alves, Aguiar e Ribeiro (2018) e Oliveira e Cyrino (2015) na apresentação e análise de dados de suas pesquisas.

Quadro 6: Simbologias utilizadas nas análises.

Simbologias Utilizadas	Ideias Mobilizadas/Desveladas
i	Constituir quantidades envolvidas na situação;
ii	Raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades;
iii	Imaginar medidas de quantidades variando continuamente;
iv(a)	Coordenar duas quantidades que variam juntas: reconhecer que as quantidades se relacionam;
iv(b)	Coordenar duas quantidades que variam juntas: reconhecer direção de crescimento - ambas crescem/decrescem;
iv(c)	Coordenar duas quantidades que variam juntas: reconhecer a existência de taxas de variação - cresce mais rápido/mais lento, ou cresce a uma taxa crescente ou decrescente;
iv(d)	Coordenar duas quantidades que variam juntas: identificar eventuais mudanças na taxa de crescimento.

Fonte: Autor.

Então, examinamos “com atenção e intensivamente códigos identificados e seus respectivos eventos críticos, tentando discernir uma narrativa emergente e evolvente sobre os dados” (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 33). Nessa fase analítica (a composição do enredo) – cujo resultado é apresentado nos dois próximos capítulos a interpretação dos dados e as inferências assumiram papéis importantes.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados deste capítulo e do próximo são organizados no intuito de responder à intenção de pesquisa já anunciada. Para tal, apresentamos aqui a composição do enredo contendo os episódios selecionados em cada uma das tarefas analisadas. Para cada um dos trechos de discussão transcritos, procuramos explicitar as ideias do RC que elencamos previamente, durante a elaboração das tarefas. Tal marcação é feita ao lado direito dos trechos transcritos.

4.1 Tarefa da Garrafa

Evento 1 – apresentando a situação da garrafa

O pesquisador inicia a tarefa fazendo a leitura dos itens para a sala inteira. Ao final da leitura, lança uma pergunta: Vocês acreditam que a altura dentro da garrafa vai ser constante? A intenção era permitir que eles iniciassem a situação tendo em mente a questão central da tarefa. Um dos integrantes do grupo 1 inicia respondendo à pergunta, como na transcrição a seguir.

[1] A1: Nãããão	
[2] A2: Não?	
[3] A1: Não porque o raio começa pequeno [...] depois aumenta e depois diminui.	i, iii, iv(b)

Nesse evento, os entendimentos iniciais entre os membros foram diferentes e A1 tenta justificar sua opinião com seu comentário. Podemos destacar que a justificativa traz consigo a identificação da grandeza (raio) e seu comportamento no decorrer da situação; bem como o fato de essa grandeza interferir na altura.

Evento 2 – derrame para dentro ou para fora?

O grupo inicia a discussão dos itens da tarefa. Inicialmente leem o item (a).

[1] A1: Taxa constante de derrame [...] O que você entende por taxa constante de derrame? Vou colocar assim: Volume que entra “dentro” do recipiente, a taxa de entrada do [--].	i
[2] A2: A quantidade de água que entra é a mesma que sai, de encher, não é?	
[3] A1: Não, não, “to” falando só de entrada da situação. Taxa constante quer dizer que vai entrar mesma quantidade de água por unidade de tempo.	i,iii, iv(a), iv(b) e iv(c)
[4] A2: “Uhum” [...] é que eu entendi derrame de saída do vaso.	
[5] A1: É de derrame de derramar dentro do vaso. [...] Escrevi assim: taxa constante de derrame é que será derramado a mesma quantidade de água.	
[6] A2: Por unidade de tempo.	
[7] A1: Por unidade de tempo [enfatizando]	

A expressão “derrame” veio a gerar dúvidas entre os membros do grupo, sendo que fora entendido sob duas perspectivas: estando o vaso vazio, esse seria preenchido com água; vaso cheio, seria esvaziado.

Com base no comentário de A1 em [1], dizendo “volume”, podemos perceber que o aluno constituiu que a grandeza que será observada está relacionada ao volume, enquanto no texto apresentamos a expressão “água é derramada em um vaso a uma taxa constante”, ou seja, não mencionamos de forma explícita que estaríamos interessados no volume de água dentro do vaso.

A expressão “taxa constante” nos desvela que, para o aluno será derramada a mesma quantidade de água em todo o período observado (o aluno chamou esse fato de “por unidade de tempo”).

Evento 3 – identificando mais grandezas envolvidas

Grupo pensando no item (b) da tarefa:

[1] A1: Imagine a cena do vaso sendo enchido...	
[2] A2: Volume, raio, diâmetro.	i
[3] A1: Volume? “quantiii” (aqui A1 parece duvidar desse fato)	
[4] A2: É, volume [...] diâmetro do vaso também dá pra gente ver.	
[5] A1: Quando está sendo “enchido” que da pra medir?	
[6] A2: O volume, porque dependendo da quantidade de água da pra medir o volume.	iv(a)

[7] A3: Da pra calcular a massa, imagina ele amarrado numa corda e derramando água.	i e iv(a)
[8] A2: O que mais?	
[9] A1: Volume, diâmetro [...]	
[10] A2: Massa	
[11] A1: [...] o que mais? [...] velocidade de enchimento.	i
[12] A2: Acho que não tem mais.	
[13] A1: É "tá" bom, é bastante já(risos).	

Observando o evento 3, podemos notar que antes mesmo de A1 [1] terminar a leitura A2 [2] já responde o enunciado. Um terceiro membro (A3), que não havia feito comentário algum anteriormente, entra comentando sobre a situação em [7]. Isso sugere que o contexto da situação, juntamente com o item anterior, já tenha mobilizado nesses estudantes ideias sobre possíveis relações entre quantidades na tarefa, ou seja, propiciou que "imaginassem" o que estava acontecendo.

Evento 4 – o que vai ser relacionado com o que? Vai ser uma reta?

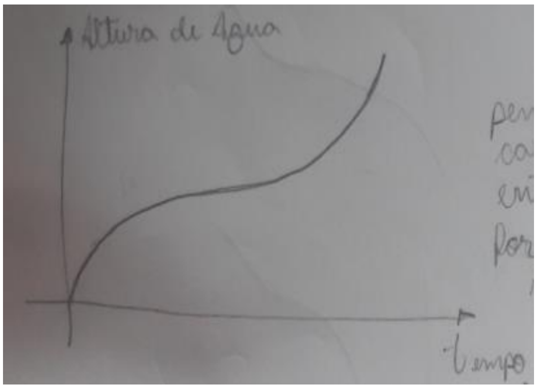
O grupo começa lendo o enunciado do item (c).

[1] A1: Esboce um gráfico que relacione a altura da garrafa de [...] altura de água na garrafa com o passar de tempo.	
[2] A2: No começo é um pouco "mais maior".	iv(c) e iv(d)
[3] A1: Rápido	
[4] A2: "Mais maior" ... depois vai ficando menorzinho.	iv(c) e iv(d)
[5] A1: Sim	
[6] A2: Eu acho que ela faz assim "ó"... assim. [nesse momento a aluna tenta riscar uma possível representação numa folha de rascunho]	iii
[7] A3: A e? Depende muito o que você está olhando no gráfico, se for por...por raio e volume, tem que ver como "cê ta" montando o gráfico... se for por raio... se for por volume...	iv(a)
[8] A1: Então, mas daí o gráfico vai ficar assim [indica um possível gráfico num rascunho], não vai?	
[9] A2: É, então, porque ela cresce no começo rápido, depois ela diminui e depois volta mais rápido, por causa daqui, tipo...	iv(c) e iv(d)
[10] A3: Então, mas daí se for medir a altura do "*coiso*" pelo diâmetro por unidade de tempo "a e" é uma reta.	

[11] A2: Não, não porque tipo assim, ó! o raio daqui é menor que o daqui [nesse momento eles estão olhando para o formato da garrafa apresentada na tarefa] então a quantidade de água que for colocar aqui ela já vai aparecer aqui, a e na hora que ele começar a encher esse tanto de; esse diâmetro, ele vai demorar pra estar crescendo e aqui ele vai crescer mais rápido [continua olhando para os diâmetros da garrafa conforme vai sendo preenchida com água]	ii,iv(b), iv(c) e iv(d)
[12] A3: É então, mas estou falando em relação a diâmetro.	iv(a)
[13] A2: Eu acho que ficaria mais ou menos assim [novamente aponta para um rascunho] [...] Seria uma reta?	
[14] A3: Não então depende, o que vamos relacionar? Volume ou.	iv(a)
[15] A2: relacionando com altura	iv(a)
[16] A3: altura.	
[17] A2: aqui (no texto da tarefa) altura de água na garrafa, tá vendo?	
[18] A3: ah sim.	
[19] A2: dae eu acho que seria esse gráfico assim(apontando para o gráfico do rascunho) é esse gráfico ae(gráfico apresentado abaixo como figura "?").	
[20] A2: Porque tipo quando começa colocar água aqui ela vai crescer rápido (A2 está observando nesse momento água no inicio do enchimento da garrafa) porque vai dar uma diminuída na rapidez, olha o tamanho disso aqui (olhando mais ao centro da garrafa), daí a hora que começar afunilar aqui ele vai crescer mais rápido.	ii, iv(c) e iv(d)
[21] A1: Altura de água, esse gráfico aqui (o gráfico apresentado na figura) seria de altura de água. O volume vai ser constante, vai "tá sempre enchendo" na mesma quantidade independente de.	iv(b), iv(c)
[22] A2: Mas ele não pede volume.	
[23] A3: É ele pede altura.	
[24] A1: Ah então, vai ser assim mesmo.	
[25] A2: Sim, o volume "ia" ser constante.	

O gráfico apresentado pelo grupo segue abaixo na Figura 3.

Figura 3: Esboço proposto pelo grupo.



Fonte: arquivo do autor.

Em [6], temos que A2 apresenta ao grupo o esboço daquilo que entende ser o gráfico que relaciona a altura de água na garrafa com o passar do tempo, baseada nas ideias que formulou anteriormente (trechos [2] e [4]). Pelo modo como faz os traços no papel, inferimos que a aluna compreende que, nessa situação as quantidades envolvidas variam continuamente, uma vez que, ao invés de marcar pontos e uni-los, constrói uma curva contínua.

Se observarmos as falas de A2, ele gradativamente refina suas colocações. No item [2] e posteriormente em [9], podemos perceber uma busca por acréscimo de ideias que tendem a somar aos elementos observados, levando à construção do gráfico apresentado. Não obstante nos itens [2] e [9], a ideia recebe novamente uma nova interpretação conforme [20], para dar ênfase às discussões levantadas anteriormente, ou seja, mostrar como seria a covariação entre as grandezas altura e tempo. Vale ressaltar que, em [20] o estudante argumenta realizando secções em alturas diferentes da garrafa, buscando convencer os demais integrantes, e a sua sugestão de representação vai ao encontro dos seus argumentos.

No item (c), há uma segunda parte do enunciado pedindo para os alunos explicarem o raciocínio que levou ao seu esboço. Os alunos iniciam a leitura desse item:

[1] A1: Explique o raciocínio que levou. [...] Eu vou colocar assim: como a altura de água depende do formato do vaso, ou seja, proporcional ao raio e como raio tende a aumentar e depois diminuir, o gráfico vai variar de acordo com isso.	iii, iv(a), iv(b) e iv(d)
[2] A3: Sei lá, para mim tem a ver, tipo, "cê" colocar um eixo e coordenadas, sabe?	

Em [1], A1 acredita que o gráfico apresentado é condizente com a ideia apresentada por ele. Sendo assim, o grupo decide deixar a representação que haviam apresentado (Figura 3). A ideia é fechada com a explicação de A1. Em [2], A3 faz um comentário que, de certa forma, não somou muito à ideia, visto que, após seu comentário, o grupo não se pronunciou.

Evento 5 – relacionando outras grandezas

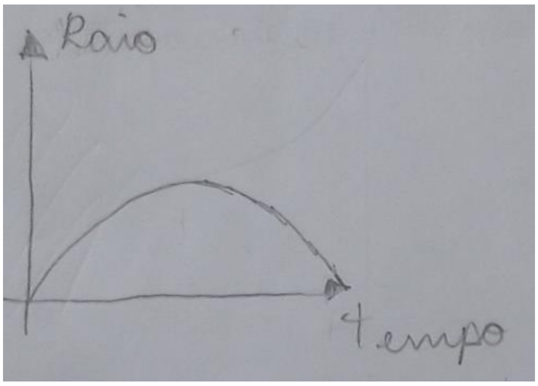
O grupo inicia as discussões a partir do item (d)

[1] A2: Construa gráficos que relacionem as diferentes grandezas envolvidas nessa situação.	
[2] A1: Raio e [...]	i
[3] A2: Raio e grafff, raio é constante.	
[4] A1: Raio não é constante.	ii
[5] A2: Raio é sim, ele não faz assim ó. (não foi possível identificar para onde aponta).	
[6] A1: É mesmo.	
[7] A2: Diâmetro que não é constante	
[8] A1: Diâmetro é só quando é dois raios.	
[9] A2: Então os dois são constantes. [...] Não precisa calcular, só pensar.	iv(a)
[10] A1: Mas é, o raio, quando seccionar esse vaso em partes horizontais, infinitas partes horizontais, esses raios das partes seccionadas vão mudar, só que eu não sei escrever isso não.	
[11] A2: Vai fazer assim ó [aponta para o gráfico da figura 4].	

Observando as falas de A2 em [3], [5] e [7], em todo o tempo a ideia era que o raio era constante e o diâmetro não, porém, com o comentário de A1 em [8], a ideia de A2 muda, basta observarmos [9]. A representação gráfica da situação acima foi simbolizada por uma parábola com concavidade voltada para baixo. Tal ideia é fruto das discussões de A1, principalmente em [10].

Abaixo segue o gráfico apresentado pelo grupo, Figura 4.

Figura 4: Esboço proposto pelo grupo.



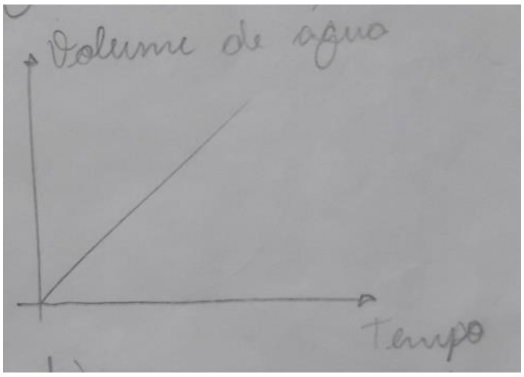
Fonte: arquivo do autor.

O grupo continua a discutir o item (d) da tarefa, agora pensando na representação gráfica que relaciona o volume de água em função do tempo.

[1] A2: Volume é constante também né?	ii, iii
[2] A1: Volume do recipiente é constante.	
[3] A2: É então, dá pra fazer no gráfico tempo e volume.	iii, iv(a)
[4] A1: Pera ai então, é o volume de água.	
[5] A2: Daí pra fazer no gráfico [...] é uma reta, o volume é o mesmo. Altura que é daquele jeito. [Está mencionando para o gráfico do item c]. O volume é constante.	

O grupo parece não ter dúvidas em afirmar que o gráfico da situação será uma reta, visto que as duas grandezas observadas são constantes, conforme [1], e apresenta o gráfico da Figura 5 como resultado da breve conversa.

Figura 5: Esboço proposto pelo grupo.



Fonte: arquivo do autor.

Após pensarem quais grandezas poderiam ser medidas na situação da garrafa, eles se depararam com duas grandezas diferentes daquelas que haviam sido previstas no planejamento. O grupo, então, inicia uma interessante e intrigante discussão.

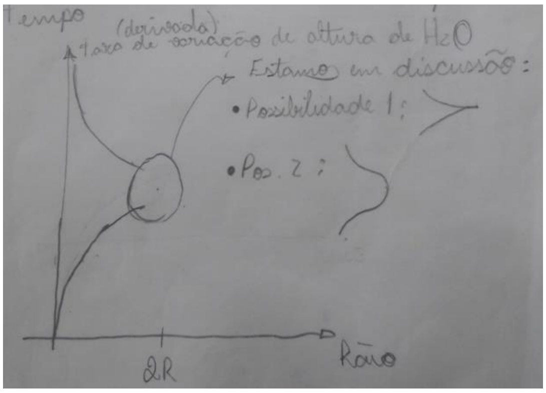
[1] A1: Se o raio aumenta... o cresci...mento	i
[2] A2: Eu acho que essa relação que a gente fez desse raio vai complicar a vida.	ii
[3] A1: Não, vai ser o mesmo aqui. Ó, se o raio aumenta... velocidade de crescimento... Não é só a altura, é velocidade de crescimento.	iv(a)
[4] A2: Se o raio aumenta, o crescimento diminui.	
[5] A3: O volume em função do tempo?	
[6] A2: Não, volume é constante...o raio... tipo, se você pegar a cada pontinho.	
[7] A3: Tem que multiplicar o volume pelo tempo. Porque eu acho que para você esboçar o gráfico vai ter que fazer as contas.	

[8] A1: Não é só esse gráfico que tem que esboçar, são vários!	
[9] A3: Não, sim! Mas então é só a ideia deles? Só esboço?	
[10] A1: É só esboçar... Não precisa dar valores.	
[11] A2: Só tipo como que vai se comportar o gráfico.	
[12] A1: A velocidade aumenta ou diminui?	
[13] A2: Velocidade? A altura, você fala?	
[14] A1: Velocidade de crescimento de altura.	
[15] A2: Diminui... Quando o raio é maior, ela demora mais pra encher.	iv(a) e iv(b)
[16] A1: Então vai ser tipo um gráfico assim? [não dá pra saber a qual gráfico ele está mencionando]	
[17] A2: É.	
[18] A1: Vai ser um gráfico assim [novamente, não sabemos qual gráfico está observando].	

Se observarmos, em [2] temos que A2 percebe que correlacionar as grandezas em tela irá dar trabalho, talvez porque o raio cresce e decresce depois de um certo momento (quando alcançar o maior círculo da secção transversal). Mas A1 está convicto da ideia da situação, conforme [3], [14] e [16].

A fala de A3 em [7] mostra que, na concepção dele, não é possível relacionar grandezas sem conhecer valores. Cabe ressaltar que, mais à frente, A1 tentará convencer os demais utilizando o pensamento discreto. A2 de certa forma, inicia essa ideia de A1 em [6]. Apresentamos a Figura 6 para ilustrar o comentário [16].

Figura 6: Esboço proposto pelo grupo.



Fonte: arquivo do autor

Seguem as discussões no grupo, agora com a presença do pesquisador:

[1] Pesquisador: E daí, o primeiro gráfico como ficou? [o grupo continua focado na questão do gráfico em discussão, visto que não responderam a pergunta do pesquisador]	
[2] A1: A gente tá tentando relacionar... a velocidade de crescimento da altura de acordo com o raio dessa secção. Só que aí gente tá pensando se vai ser no eixo X.	iv(a) e iv(c)
[3] Pesquisador: Será que existe via de regra? Aqui tem que ser o eixo x lá tem que ser o eixo y?	
[4] A1: Não, mas depende.	
[5] A2: Qual que é a grandeza que você tá mexendo ali?	
[6] A1: Então, o raio é vai ser uma grandeza que vai aumentar constantemente, mas a velocidade.	iii
[7] Pesquisador: o tempo todo ele(raio) cresce?	
[8] A1: É então até metade aqui. O raio só vai até um ponto, ele tem um limite,	iv(d)
[9] A2: Ele cresce depois volta a diminuir.	iv(b)
[10] A1: O já "tamo" usando "oo", o raio tem limite. Só que a velocidade.	
[11] A2: A velocidade ela é rápida, tipo, no começo na primeira secção ela aumenta rápido é mais alta e depois quando chega mais "pro" diâmetro ela diminui, ela vai ficando menor, depois aumenta de novo.	iv(b)
[12] Pesquisador: A gente tá olhando para altura ou para o raio?	
[13] A2: Altura.	
[14] Pesquisador: Tá, vocês estão inventando uma situação, né?	
[15] A2: É, a gente inventou assim, desses cortes, o raio de cada corte assim.	
[16] Pesquisador: Legal.	
[17] A1: Só que eu não to, to.	
[18] A2: Eu acho que seria assim A1 [não sabemos para onde ela apontou]	
[19] A1: O porquê o raio aumenta e depois ele diminui, então o raio vem e depois volta.	
[20] Pesquisador: Na verdade o raio cresce, isso é importante, só que a taxa de crescimento é diferente, então tem um momento que ele cresce lentamente ou não?	
[21] A2: eu acho que seria assim, na primeira ele vai crescendo, depois quando chega mais "pro" diâmetro ele fica menor e depois ele diminui, não, ele cresce de novo.	iv(b), iv(c) e iv(d)
[22] A1: Sempre que for raio, ele continua crescendo de qualquer jeito, tem que diminuir. Voltada sobre o raio a parábola. [ele se refere ao gráfico da Figura 4]	
[23] A2: Vai ser então, né.	
[24] A1: Não "pera", onde que é o raio? Se você está vendo essa curva [não conseguimos indicar qual gráfico] ele está sempre aumentando.	

[25] A2: Então, é o que estou falando, aqui ele aumenta o raio, certo? Depois, quando ele chega mais perto do diâmetro, ele continua aumentando, mas é menor a taxa de variação, daí depois na hora de subir, ele não volta, ele só cresce de novo.	
[26] A1: Na verdade ele volta, mas eu entendi o que você quer dizer, mas se colocar o raio aqui, aqui o raio é zero. [Ele aponta para o início das secções do recipiente]. Tem um ponto aqui, aqui é zero, ae vamos aumentar, até aqui tá certo, depois daqui o raio ainda está crescendo no seu gráfico. [A1 refere-se ao gráfico riscado por A2 – não sabemos qual é esse gráfico].	
[27] A2: Assim entendi, eu "tava" vendo o raio assim.	

Em observação aos diálogos, podemos perceber que A1 está convencido de que é possível relacionar as grandezas. Na concepção dele, quanto mais próximo do diâmetro forem as secções menores serão as taxas de crescimento da altura de água dentro do recipiente. Podemos observar que ele tem como entrave a questão de o raio aumentar e diminuir no decorrer do tempo, o que podemos ver em [2], [6], [8], [19], [22] e [26]. O grupo tenta apresentar as ideias usando de três possíveis gráficos, conforme apresentamos na Figura 6.

Evento 6 – Ainda falando sobre os gráficos

O grupo continua a discussão em torno da situação anterior.

[1] A1: Oh, ela vai diminuir com o aumento do raio, ela vai chegar num ponto depois ela vai voltar a subir, então vai ser assim, oh. Agora você é a tradutora. [A1 acredita que A2 consegue explicar melhor a situação]. Fala pra ele que a taxa de variação, ou seja, se aqui tá subindo duas unidades de altura, vai diminuir com o aumento do raio.	
[2] A2: E ai, o que acontece?	
[3] A1: Eu acho [...].	
[4] A2: Por que taxa de variação?	
[5] A1: Taxa de variação, sei lá, eu só pensei, em duas grandezas. [...] O que você acha? É a taxa de variação, não é a variação.	
[6] A3: Colocou o tempo em função do raio?	
[7] A2: Não é taxa de variação.	
[8] A1: É a taxa de variação, ou seja, porque ali cresce mais rápido, diminui e depois volta a crescer de novo, então eu acho.	iv(c), iv(d) e iv(e)
[9] A3: Esse gráfico tem que fazer a derivada dele.	
[10] A2: mas eu acho... o difícil é achar equação pra isso.	

[11] A1: É só, olha ali, porque assim, ele tá diminuindo a taxa de variação. Por exemplo subiu 2, subiu 1, o gráfico, vocês acham que seria assim? [não deu pra identificar para onde A1 aponta].	
[12] A2: Eu acho que faz sentido [--].	
[13] A2: Vamos colocar mais duas possibilidades [Eles estão passando para a folha que entregaram os gráficos riscados nos rascunhos] [--]	
[14] A2: Não tá errado a gente ter essas duas possibilidades. [...] Pra saber se é bico de verdade [Figura 6] precisa fazer conta.	
[15] A2: Vamos esperar o pesquisador para perguntar.	
[16] A1: Perguntar sobre essas? Estão corretas.	

Nessas discussões, o grupo ainda continua com o entrave que eles chamam de “bico” no gráfico. Eles não se sentem certos em relação ao formato do gráfico sem ter uma função algébrica para então calcular o “bico”, conforme [9], [10] e [14].

Sem nenhuma certeza, eles decidem chamar o pesquisador na expectativa de que ele dê um *feedback* no sentido de afirmar estar correta ou não a discussão do grupo. Nesse momento, A1 chama o pesquisador para explicar suas representações:

[1] A1: Aqui a gente tá em dúvida, estamos em discussão sobre a ponta, a possibilidade 1 é assim (aponta para o desenho com esse nome) a possibilidade 2 que a gente pensou é assim, é a taxa de variação de altura de água sobre o raio, então o raio vem até um ponto depois volta né, ele cresce depois volta, então ele vai crescer e a taxa de variação...	
[2] Pesquisador: Entendi, você está querendo saber se a ponta é assim (apontando para alguma das possibilidades, não foi possível saber qual) ou se a ponta é daquele jeito.	
[3] A1: É, espera, na verdade eu acho que tá furado esse negócio [...] na verdade é o contrário aqui, é pra cá.	
[4] Pesquisador: É de quem essa discussão?	
[5] A1: Na verdade é do grupo inteiro.	
[6] A2: Essa parte do bico ainda?	
[7] A1: Eu pensei assim [apontando para um dos desenhos], mas depois eu voltei, mas o grupo não sabe.	
[8] A2: É que pra gente saber se realmente tem o bico, a gente teria que fazer a equação, pra saber, ai vai complicar muito pra saber a equação, ele vai a taxa de altura e o raio, não dá pra saber, a gente colocou as duas possibilidades porque é o que a gente pensou.	
[9] Pesquisador: Entendi.	
[10] A1: Mas espera o, não é pra cá que ele volta, ele não vai ter uma taxa de variação negativa, ele vai voltar pra cima, ele vai continuar crescendo, tipo ele	

aumenta, vai diminuindo.	
[11] A2: Ele vem aqui de baixo e sobe, vem pra cima, eu não estava lendo de cima pra baixo, entendeu?	
[12] A1: Aham.	
[13] A2: Ele não chega ser negativo igual você está fazendo, porque não tem como a taxa de altura ser negativa, é só alterar esse eixo aqui, ó.	
[14] Pesquisador: Legal esse bico, diferente.	
[15] A2: Você (pesquisador) entendeu? Tá meio certo?	
[16] A1: Você (pesquisador) sabe a resposta? A gente não vai colocar aqui, mas qual seria a resposta certa? Seria um bico?	
[17] Pesquisador: O que você colocou no eixo horizontal?	
[18] A1: Raio	
[19] Pesquisador: O raio vai	
[20] A1: Ele aumenta até um pedaço e a taxa de variação tende a continuar sendo uma constante. Ela vai ter um limite aqui, vai ser no diâmetro, dois raios. Ela vai ter uma ponta, só que a gente não sabe se vai ser assim ou vai ser assim.	
[21] Pesquisador: Você está pensando em taxa de variação de água.	
[22] A1: De altura, por exemplo, no começo ela cresce 2, depois ela vai diminuindo certo? Depois volta a aumentar, então, por exemplo, cresceu 2, a variação foi 2, depois ele foi para 1,5, a variação foi 1,5, depois 1, 0,5 e 0. Depois volta a crescer de novo, ela não vai ser negativa,	
[23] Pesquisador: Entendi o que vocês estão falando, estão falando da taxa de variação...	
[24] A1: Do crescimento de altura	
[25] A2: Ae entra na derivada mesmo	
[26] Pesquisador: Taxa de variação.	
[27] A1: De altura de água	
[28] A2: Pesquisador, o raciocínio tá ok?	
[29] Pesquisador: Está legal.	
[30] A1: Você entendeu, o gráfico é o de menos.	
[31] Pesquisador: Em momento nenhum eu tinha olhado pro raio, mas é legal, uma situação nova. Não tinha pensado nisso.	

O grupo tinha a esperança de ter um *feedback* do pesquisador [15], [16] e [28], mas não o teve, uma vez que nosso objetivo com a tarefa é fazer a interpretação das ideias que eles desenvolveram durante a realização dos itens, quando então eles entendem a ideia central da tarefa [30]. O grupo continua acreditando que, para saber qual dos três gráficos de fato representa a situação que eles desejam correlacionar é necessário conhecer a forma algébrica da situação [8].

O grupo apresenta uma discussão bastante interessante em torno da ideia de taxas, como evidenciado nos trechos descritos em [1], [10], [11], [13], [20] e [22]. O grupo mostra reconhecer que há uma mudança na taxa de variação da altura de água em relação ao raio. Identifica essa taxa como sendo positiva, mas diminuindo a medida que o raio da secção se aproxima do meio da garrafa. Após, a altura continua a crescer, porém o raio passa a diminuir a uma taxa crescente.

4.2 Tarefa das Tabelas

Evento 1 – e no 2 como fica?

A ideia da tarefa era apresentar as tabelas com alguns valores e observar como eles pensariam em torno da seguinte situação: como descrever o gráfico que representa o conjunto de valores para alguém que não o estivesse vendo. Nossa expectativa era que, na análise das tabelas, emergiriam ideias relacionadas à taxa de variação e concavidade dos gráficos.

Após receberem impresso o enunciado da tarefa, o grupo começa a analisar os dados apresentados na tabela, como ilustrado no início do diálogo transcrito a seguir:

[1] B1: Quando x vale 0 o y vale 1. 1,3...	
[2] B2: Depois 3, 1.7.	
[3] B1: E cresce, tendendo a um limite, agora a gente vai ter que descobrir.	iv (b)
[4] B2: Vai ter que descobrir. Vai ter que achar a função, né?	
[5] B1: Quando é um limite, agora a gente descobre. Eu acho que vou fazer isso pelo GeoGebra.	
[6] B2: Também acho bom.	
[7] B1: Só que eu não sei colocar.	
[8] B2: Função?	
[9] B1: Então eu não sei colocar pontos certinho no GeoGebra no celular, até sei mais, vamos fazer na marra "*memo*"...daqui pra *cá* cresceu 3. [B1 está dizendo 3 mas na verdade está olhando a mudança de f(x) que de 1 foi para 1,3]. Aqui pode ter sido 0,4 [continua olhando para as mudanças de valores de f(x)], ele passa pelo 2 também né?...uma hora passa pelo 2.	
[10] B2: Daqui pra cá, foi 0,3, desse pra esse foi 0,4, desse pra esse 0,5... não tem como saber como é o 2.	
[11] B1: Não tem como saber como será no 2, né? Ele tá aumentando.	
[12] B2: Vai ser 1.5 no 2.	

[13] B1: Aqui eu acho que fiz errado [aponta para um dos rascunhos do grupo].	

De início, os alunos acreditam que, para esboçar a curva, é necessário conhecer uma função que relacione os valores apresentados, como evidenciado em [4].

Os alunos B1 e B2 tentam buscar recursos para esboçar a curva que representa a primeira tabela, com o Geogebra – trecho em [5], mas logo decidem seguir sem o recurso [9]. As falas de B2 em [10] e [12] mostram que ele não percebeu que as taxas de variação estão mudando quando são observados os valores. Tal fato é corroborado pela fala [12], que mostra um pensamento linear.

Evento 2 – o gráfico tem um limite horizontal

A discussão continua em torno dos valores da primeira tabela:

[1] B1: Vê aí como é que faz como faz, para achar uma função por pontos. Pesquisa no Google.	iv(a)
[2] B2: Será que Precisa?	
[3] B1: Eu vou escrever tendendo um limite só.	
[4] B2: Tá bom.	
[4] B1: Há um limite horizontal. Vamos pro próximo então.	

.

Eles decidem seguir para o próximo e retomar posteriormente, porém trocam 5 frases em relação à segunda tabela e já retomam a situação. Abaixo apresentamos a conversa em torno da Tabela 1.

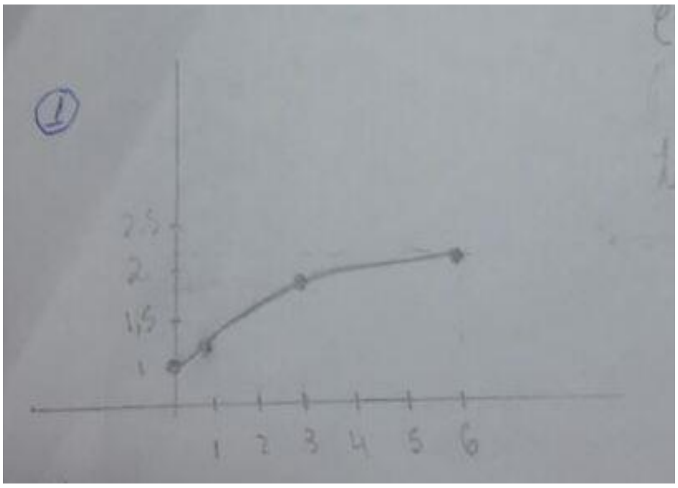
[5] B1: Vou mudar o texto aqui...Vou colocar que é uma curva crescente que se estabiliza em um limite horizontal. Acho melhor...Que aqui ficou meio tipo. [...] Fica melhor [...]	iv(b), iv(c) e iv(d)
[6] B2: Ah, sei lá. Você colocou onde começa.	
[7] B1: Aqui vou colocar que é o limite horizontal... Ou vertical?	
[8] B2: Como é que é?	
[9] B1: É uma curva crescente que estabiliza, dai eu coloquei: tem limite, e tem um valor de y.	
[10] B2: Em um valor de y.	
[11] B2: Mas você falou de outro jeito que é horizontal.	
[12] B1: É, esse limite não ficou bom. Em um valor de y. Ou seja, Limite horizontal. Melhorou, né? [A1 está escrevendo na folha que entregaram após realizarem as tarefas].	
[13] B2: Ficou melhor.	
[14] B1: Uma curva crescente.	iv(b)
[15] B2: Aqui você fala a mesma coisa, só que no lugar do Y se coloca X.	iv(a)

[16] B1: O x vai tá sempre aumentando.	i, iv(b)
[17] B2: Então... não, o y vai tá sempre aumentando, o x vai parar..	iv(d)
[18] B1: É que a gente não conhece essa fórmula, então tem que falar que y tende ao infinito com x tendendo a infinito também.	
[19] B2: Ah ele vai parar uma hora.	
[20] B1: Porque a gente não sabe o que vai acontecer.	
[21] B2: Pra frente.	
[22] B1: Depois ela vai continuar e uma hora vai se estabilizar, vai ficar paralela.	

Observando as discussões, notamos que o grupo acredita que com base nos valores apresentados o gráfico será uma reta paralela ao eixo x [22].

O grupo de certa forma não se garantiu quanto ao formato do gráfico, pois os valores apresentados e com base na leitura que fizeram deles, não foram suficientes para dar segurança à ideia que tomaram como hipótese. Talvez, se tivessem tido um olhar em torno das taxas de crescimento, isso teria lhes dado maior segurança nas afirmações. O gráfico apresentado pelo grupo segue abaixo, na Figura 7.

Figura 7: Representação criada pelo grupo 2 para Tabela 1.



Fonte: autor.

Parte 3 - podemos falar somente sobre os dados apresentados

Como dito alhures, o grupo estava fazendo a primeira tabela e decidem ir para a segunda e então retomar a discussão posteriormente, Mencionamos, no texto supracitado, que eles trocaram 5 frases e já retornaram à discussão. Abaixo apresentamos as cinco frases para dar continuidade à discussão do grupo em relação, agora, à tabela 2.

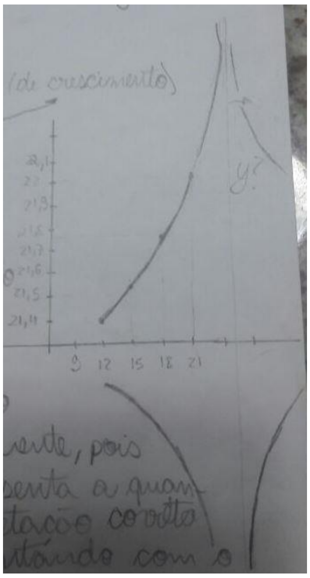
[1] B3: Mais para baixo depois se quiser completar.	
[2] B1: 12, 15, 18, 21... está aumentando de três.	iv(a)
[3] B1: Aqui aumenta 0,13. Aqui aumenta 0,12	
[4] B2: 22, não é?.	
[5] B1: 27. Aqui aumenta 9 e aqui 5...	

O grupo enquanto discutia a Tabela 1, passava os olhos na Tabela 2 e em seus respectivos valores, conforme [15], [16] e [17] da parte B. As próximas discussões têm essas ideias como pano de fundo.

[6] B1: Então ela não se estabiliza.	iv(b)
[7] B2: Coloca só que ela vai crescer nos valores tabelados, só.	iv(b)
[8] B1: Ela cresce?	
[9] B2: Só pela parte tabelada. Só na parte que você viu.	
[10] B1: Crescente.	
[11] B2: No intervalo de 12 a 21 [--]	
[12] B1: Se tivesse no computador: você liga os pontos e ele já dá a função.	
[13] B2: Verdade.	
[14] B1: Tenta fazer aí...	
[15] B2: No geogebra.	

O grupo finaliza a discussão nessas últimas falas. A ideia e as dúvidas seguem as mesmas da Tabela 1, porém, na segunda tabela, os valores parecem dizer menos ainda em relação aos comportamentos dos valores (trechos [7] e [9]); e, consequentemente, do formato do gráfico, conforme [12] e [13]. Abaixo, na Figura 8, apresentamos o gráfico da equipe.

Figura 8: Representação apresentada pelo grupo 2 para a Tabela 2.



Fonte: autor.

No decorrer da aplicação o pesquisador, que acompanhava o desenvolvimento da tarefa, transitava entre os grupos, fazendo alguns questionamentos e/ou provocações com o intuito de somar as ideias por eles discutidas ou até mesmo tomar conhecimento da forma como eles pensaram nas situações. Vale aqui ressaltar que, de modo geral, nossas análises não visam julgar as situações como certas ou erradas, uma vez que o objetivo maior é analisar qual foi o potencial desenvolvido numa dada tarefa em torno de ideias do RC. A seguir trazemos alguns diálogos a fim de fechar a ideia em torno das Tabelas 1 e 2.

[1] Pesquisador: E aí?	
[2] B1: A número 1, a gente tá fazendo... Aliás, já terminamos. Aqui é uma curva crescente que se estabiliza em um valor de y, ou seja, limite horizontal, ele vai ter um valor aqui que vai se estabilizar. Aí, no segundo gráfico, a gente colocou que é uma curva crescente dentro dos valores tabelados. É desconhecido como a função se comporta quando X tende a infinito porque a gente não sabe se ela vai continuar assim, se vai ser infinito mesmo ou se vai... Assim, quando ela continua crescendo sem ser pra finito, né!? Mas daí não sabe se vai para o infinito, se é um pico aqui... Tipo quando se tem uma assíntota vertical e depois desse valor ela começa, sabe? Aí a gente escreveu.	
[3] Pesquisador: Entendi.	
[4] B1: Então vamos pra dois.	

Se observarmos, a fala de B1 está de acordo com a representação gráfica. Essa ideia é discutida na literatura por Carlson (1998), que denomina como uma habilidade o fato de os alunos conseguirem representar e interpretar aspectos covariantes de uma situação funcional.

4.3 Tarefa do Político

Evento 1 – cuidados com os eixos...

O grupo inicia lendo o enunciado da questão, cujo objetivo era analisar a frase do político.

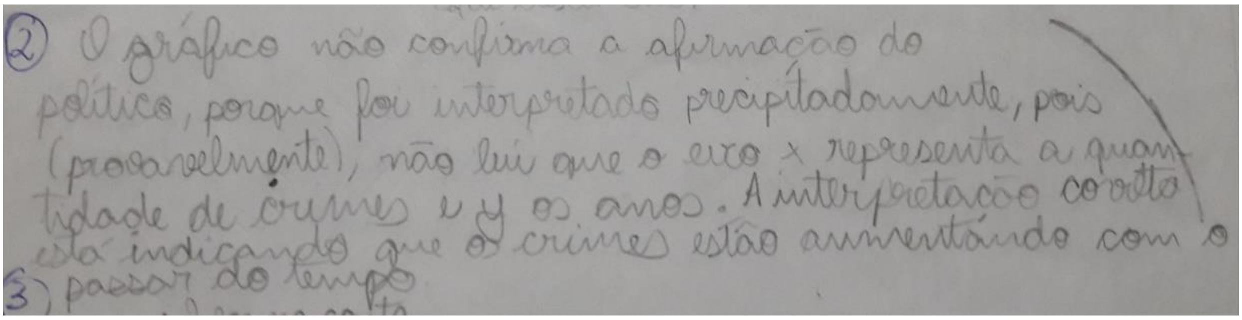
[1] B1: O gráfico apresenta... confirma essa afirmação: não está mais crescendo... Eu acho que sim, né, porque ele é o que estava aumentando. Tipo, em dois anos.	iv(b)
[2] B2: É que aqui, ele aumenta assim... esse aqui é o ano.	Ii e iv(b)
[3] B3: Ele não tá parando de crescer?	iv(d)
[4] B1: Eu acho que em dois anos cresceu 500, vamos supor. Ae aqui, não tipo.	
[5] B2: Porque ele cresce assim [apontando para o formato da curva do enunciado], não cresce pra cima, assim, ae cresceu 500, 2000, 2500.	iv(b)
[6] B1: Está aumentando.	
[7] B3: Está mesmo.	
[8] B2: Normalmente é o inverso, o ano embaixo.	
[9] B1: Se estivesse diminuindo, ele iria ser pra cima, iria ser tipo assim [hipótese] (risca em uma folha um gráfico com a concavidade voltada para cima).	iv(b)
[10] B3: Verdade.	
[11] B1: O número de crimes está embaixo e não em cima, quando normalmente, então se ele [o gráfico] está indo pra cá [sentido horizontal] quer dizer que está aumentando os crimes em pouco tempo. [...] Na verdade é por que não? É por que não?	iv(c)
[12] B3: Tá certo é o que ele (B2) está falando.	
[13] B1: Eu escrevi [hipótese] (folha de rascunho) aqui por sim.	
[14] B3: Porque não, porque está crescendo. Ah não, espera ae.	
[15] B1: Contrário. [...] Porque foi interpretado corriqueiramente?	
[16] B2: Corriqueiro é de todo dia.	
[17] B1: Não, é tipo apressado,	
[18] B3: Precipitado?	
[19] B1: Foi interpretado precipitadamente. [...] Oh, eu escrevi assim, o gráfico não confirma do político, que foi interpretado precipitadamente, pois não ler que o eixo x representa as quantidades de crimes e o y os anos. A interpretação, escreve a interpretação correta?	
[20] B3: Coloca assim e...	
[21] B1: Portanto, a interpretação correta.	
[22] B3: Sendo assim, o gráfico mostra que a taxa de crime só aumenta.	iv(c)
[23] B1: Interpretação correta está indicando que os crimes estão aumentando com o passar do tempo.	

Em sua análise inicial, B1 parte da ideia de que o gráfico parece “deixar de crescer” em [1]; então, B2 em [8] observa com atenção a legenda dos eixos e coloca em “xeque” a afirmação, levando-os a refletir com maior atenção acerca da situação. De certa forma, eles estão constituindo as quantidades envolvidas na situação e estão coordenando-as para validar ou não a ideia inicial.

É importante destacar a fala de B1 em [11] em que ele comenta que os crimes estão aumentando em pouco tempo. Outro ponto importante foi a discussão do grupo de como seria o gráfico se os eixos fossem trocados de posição [11]. Na mesma linha de pensamento de B1 em [11], o aluno B3 em [22] aborda uma leitura que vai ao encontro da ideia apresentada, porém com utilização de termos diferentes.

Em seguida na Figura 9 apresentamos o texto que o grupo entregou na folha de resposta.

Figura 9: Resposta por escrito do grupo 2 para a situação 2


(2) O gráfico não confirma a afirmação do político, porque foi interpretado precipitadamente, pois (provavelmente), não leu que o eixo x representa a quantidade de crimes e y os anos. A interpretação correta está indicando que os crimes estão aumentando com o passar do tempo
(3)

Fonte: Autor.

4.4 Tarefa Depósito na Poupança

Evento 1 – iniciando o trabalho com a situação proposta

O grupo em análise inicia a discussão inferindo ser solicitada a representação gráfica da situação, e o diálogo prossegue em torno da nomeação dos eixos, conforme transcrição a seguir.

[1] B1: Faça uma representação da situação...	
[2] B2: vai ter que construir um gráfico. Você coloca o valor que vai ter na Conta. Ou contrário tanto faz e você coloca o tanto que ele ganha de imposto.	i e iii
[3] B1: Não, aqui você coloca o valor na conta e aqui o tempo.	Ii
[4] B2: Tanto faz, mas eu acho que ele não quer o tempo.	
[5] B1: Ele quer o quê?	
[6] B2: Ele quer o juros sobre os novos juros.	
[7] B1: É. Ele quer juros sobre juros... vamos colocar no eixo Y a quantia, né, de dinheiro.	
[8] B2: Tanto faz, só vai mudar o...	

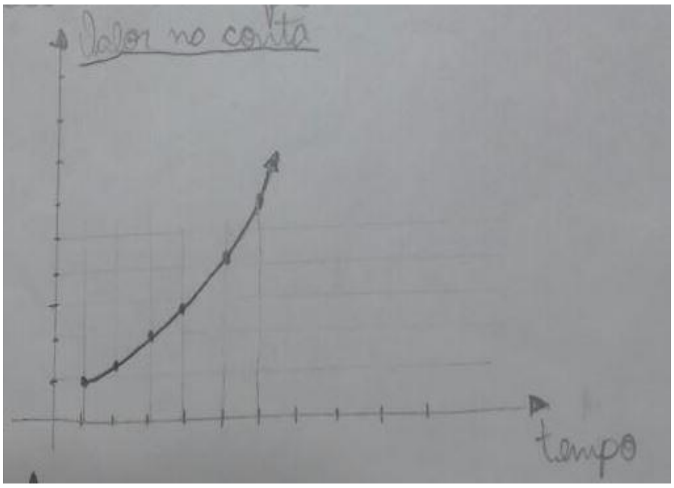
Parte importante das discussões é a busca de definir os eixos para então observar o comportamento do gráfico. Nesse átimo, a tarefa desperta a questão das legendas nos eixos.

[9] B1: Mas se é o tempo é juros sobre juros.	i, ii
[10] B2: Mas é que eu tenho, porém seriam meses. Né? Teria que ser tipo	Ii

regular certinho... Aí se você colocar juros você vai colocar o quanto vai render, nunca vai ser um tanto certo, entendeu? Por exemplo, você tem. R$ 100, daí você tem 110, daí você não vai ganhar R$ 10, você vai ganhar R$11.	
[11] B1: 10 mais um pouco, o valor na conta então por tempo.	
[12] B2: Por quê? ... Por que por tempo?	
[13] B1: Ou pode ser quanto, dá para fazer um gráfico de três. Tipo de três coisas assim com duas linhas. Tipo de clima tempo.	iii
[14] B2: De colunas você fala?	
[15] B1: Tipo assim ó...	
[16] B2: Ah, tá, já entendi, já entendi, mas eu acho que não precisa fazer tudo isso daí, não! É meio trabalhoso!	
[17] B1: Tá, então vai ser tipo um valor na conta... Mas se você quer juros sobre juros, para ter juros você precisa de mês, de tempo, de dia...	
[18] B2: Mas e se você colocar o... [...]	
[19] B1: Tem que ser tempo.	
[20] B2: concordo.	
[21] B3: Coloca quantidade e tempo.	
[22] B2: Dá pra achar os juros, concordo. Tá certo, da por tempo mesmo. [...] Isso mesmo está certo [...]	
[23] B1: É só isso? [B1 está apontando para o desenho do gráfico que fez na folha de resposta que irá entregar]	
[24] B2: é só isso, faça uma representação da situação.	

A dúvida quanto à legenda continua. Vale aqui destacar elementos importantes que fizeram presentes nas discussões: o fato de constituir quantidades envolvidas na situação e raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades [9] e [10], o que fica evidenciado pelo uso de expressões do tipo "vai ter que construir um gráfico. Você coloca o valor que vai ter na ponta. Ou contrário tanto faz e você coloca o tanto que ele ganha de imposto" Após as discussões, o grupo apresenta o gráfico da situação (Figura 10).

Figura 10: Representação criada na situação dos juros.



Fonte: autor.

Evento 2 – recebendo “interferência” da tarefa seguinte

Após todo esse cenário, percebemos que as discussões giraram mais em torno das legendas e da sobreposição de juros com o passar do tempo, ou seja, conseguiram raciocinar sobre os processos de medição, porém, a discussão após a representação gráfica, não existiu, talvez, se a tivesse feito, elementos em torno das ideias de taxa de variação poderiam ter se feito presentes. Porém, ao iniciarem a discussão em torno da tarefa seguinte (medicamento injetado), como, por exemplo, a frase do enunciado “de modo que a quantidade de droga presente no corpo continua crescendo, mas a uma taxa decrescente”, conseguem perceber elementos antes não discutidos. Vejamos essa discussão que mencionamos há pouco.

[1] B1: Agora 4 [referindo-se à tarefa do medicamento]	
[2] B2: A quatro é parecido só que decresce e tem um limite.	iv(b)
[...]	
[3] B1: Isso daqui ó, dá para colocar um “plus” na primeira, aqui é com uma taxa decrescente, uma curva crescente que se estabiliza em valor de y, u seja, um limite horizontal, aí a gente coloca aqui [na próxima situação, tarefa do medicamento] curva crescente só que taxa decrescente.	iv(c)
[4] B3: Vai dar o mesmo gráfico esse daí né!? [não conseguimos identificar para onde eles apontaram no comparativo de gráficos].	
[...]	
[5] B1: É. Isso aqui [apontando para o gráfico da situação anterior dos juros] é uma curva crescente com taxa crescente. [...] Crescimento na taxa do quê? É decrescente de crescimento [risos]	iv(b) e iv(c)
[6] B2: Você viu aí o gráfico da 4 [tarefa do medicamento injetado]? Vai ficar parecido com o da 3 [tarefa dos juros] só que ele.	
[7] B1: Só que ele falou que ia.	
[8] B2: Ali é decrescente, não é crescente. Ele [estão se referindo agora ao gráfico da situação do medicamento injetado] vai decrescer até um limite.	
[9] B1: Cresce rapidamente.	

Conforme comentamos, se essa tarefa fosse proposta separadamente da situação do medicamento injetado, alguns comentários [3] que surgiram neste episódio possivelmente não se fariam presentes, pois os comentários surgiram após a leitura da tarefa do medicamento, conforme [5] e [8].

Cabe ressaltar que, após os comentários e, de certa forma, terem refinado seus diálogos em torno da situação dos juros, o grupo manteve a mesma representação gráfica apresentada anteriormente. Por final é importantíssimo destacarmos que, no texto do enunciado pedimos para os alunos fazerem uma representação dessa situação, ou seja, deixamos em aberto qual representação utilizar.

4.5 Tarefa Medicamento Injetado

E*vento 1 - o gráfico é esse ou aquele?*

Embalados pela situação dos juros e pela leitura do enunciado da situação do medicamento injetado e com algumas discussões da representação gráfica da situação do medicamento, seguem os diálogos:

[1] B1: Oh, injeto, ela vai crescer.	iv(b)
[2] B2: Ela vai crescer, depois decresce até parar, estabilizar.	iv(d)
[3] B1: É, vai ser igual mesmo. ... Eu vou fazer um gráfico de “dois giros”.	
[4] B3: É que no caso ela vai começar alta, não vai?	iv(d)
[5] B1: Não, se, vamos supor que vai injetar a primeira vez. Então oh, tem 0. Aí ela faz assim, né? [não conseguimos identificar qual desenho ele realizou]... Ela vai crescer. E vai começar a diminuir. O corpo vai metabolizar e vai começar a descer. Vamos dizer que aqui... primeiro dia....Então, é isso que eu quero saber: se ela terminar.... ela não vai terminar assim?	
[6] B3: Não, ela continua aqui depois ó, vai continuar assim... Vai terminar assim. Porque o corpo [...], ela diminui, ,depois vai ficar constante...	
[7] B1: Não fica constante, ela sempre vai diminuir.	
[8] B3: Vê até o final...	
[9] B1: Não, mas não pode ser constante, o corpo tem que metabolizar.	
[10] B3: Aqui. Oh!	
[11] B1: Eu acho que vai ser assim... Aqui é a soma de 1. E aqui 0.	
[12] B3: Aqui, oh... Se torna uma constante no nível de circulação.	
[13] B1: Mas aí é quando toma muito.	
[14] B3: Mas aqui tá falando que ele toma muito. Doses diárias até que o metabolismo entenda que é pra manter naquele nível.	i
[15] B1: Entendi.	
[16] B3: Começa a crescer rapidamente. Ah tá. Pera aí. Continua crescendo, vai ficar no gráfico assim ó [não sabemos identificar qual gráfico ele aponta]. Ela vai estabilizar crescendo.	iv(c)
[17] B1: Ah, “De modo que a quantidade de remédio continue crescendo”. Ou seja, ele vai continuar injetando mais.	iii
[18] B3: Até que ela vai estabilizar.	
[19] B1: Vai ser igual a essa [hipótese](refere-se ao gráfico da situação dos juros). Não tem nada no corpo, ou seja, 0 droga, ou seja, começa aqui. [...] Quantidade de droga ela continua crescendo, mas a uma taxa decrescente, ou seja, ela vai diminuir, a gente podia pensar numa função de terceiro grau, né?.... Deslocada.	iv(c)
[20] B2: Será?	

[21] B1: Não, não é de terceiro grau, é uma função mista, assim ó! Curva assim que depois se estabilizarão.	
[22] B3: Pode ser.	
[23] B1: Pesquisa no Google aí, para ver tipo real... Não. Melhor, não. Vamos decidir depois a gente pesquisa... Eu acho que é essa, sim.	
[24] B3: Eu acho que é assim.	

Os integrantes do grupo parecem entender a situação, porém as possibilidades de gráficos que representam a situação são mais de uma [3], [16], [19] e [21]. Nas discussões apresentam ideias de crescimento e decrescimento e, a todo momento, destacam a questão da estabilidade do medicamento no organismo. Essas dúvidas dificultam a ideia de como será representado tal fato graficamente [2], [3], [5], [7], [16], [18] e [19].

O aluno B1 tenta refinar a ideia dizendo que a quantidade de droga continua crescendo a uma taxa decrescente [19], mas, mesmo assim, o grupo continua com dúvidas na representação gráfica.

Evento 2: e a curvinha?

Ainda continuam as dúvidas, no que tange à ideia de crescer/decrescer e ser constante, entre os membros do grupo, mas eis que surge a ideia de usar uma "curvinha" para tentar suprir a lacuna encontrada.

[25] B1: [...], será que não é assim? Tipo, se ela vai continuar crescendo ou será que não pode ser daquele jeito lá depois faz uma curvinha e estabiliza. Eu acho que já vi isso.	iv(c)
[26] B2: É, porque fala que chega no nível de saturação.	
[27] B1: É preciso de uma curvinha não precisa ser assim. É preciso ser assim. (não conseguimos identificar o desenho referido).	
[28] B3: E aqui ainda tá falando cresce rapidamente.	
[29] B1: Cresce rapidamente... Então tem que ser assim. (não conseguimos identificar o desenho).	
[30] B3: Ela poderia ser assim, também...	
[31] B1: Ela devia ser mais assim.	

Após as discussões e com a ideia da "curvinha", o grupo ainda continua sem uma ideia final da situação.

Evento 3: concentração? Ideia do CDI?

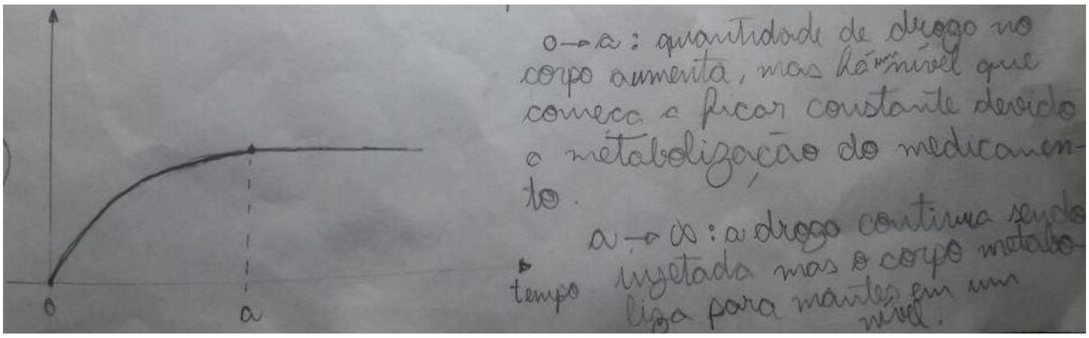
Após as discussões em torno de tudo que foi exposto até aqui, o grupo começa a se questionar sobre assuntos relacionados à concentração [41] e a algumas ideias do CDI [42], mas é a ideia de desenho de B1 [44] que convence a maioria. Vejamos os diálogos.

[32] B3: Oh, A1 eu acho que você tá certo, velho.	
[33] B1: Eu tô certo?	
[34] B3: Pode ser assim.	
[35] B1: Mas aqui ela tá crescendo rápido.	
[36] B3: Só que assim ela cresce mais rápido, né!?	
[37] B1: Sabe, porque não? Tipo, quando você injeta, vamos supor que não tem nada... quando você injeta	
[38] B3: Mas eu não tô falando a quantidade, tô falando a velocidade que ela cresce.	
[39] B1: Sim, mas ó, você vai injetar, pouco, você injetou, sei lá, 50 unidades de concentração, tipo corpo tem um monte... Tipo começa muito rápido. Daí ele vai metabolizando, daí com o tempo ele vai tipo...	
[40] B3: Então, mas. É que às vezes ela faz assim...	
[41] B1: Sabe onde eu vi? A [...] postou um “bagulho” de concentração...	
[42] B3: Mas que eu tô falando é que tem diferença: uma cresce lentamente outra cresce rápido. Daí você lembra? A gente viu em cálculo mesmo... Que um cresce mais rápido que o outro... Assim.	
[...]	
[43] B2: Ah, mas sei lá se não se vai ficar assim, porque ele não fala que ele diminui depois.	
[44] B1: Porque, tipo, se ele está crescendo mais rapidamente, assim ó, tipo, tem um gráfico aqui... a gente está em dúvida tipo: o ponto é de concentração que ele vai se estabilizar, oh! Assim, ele tá crescendo lentamente... tá passando o tempo, tá passando o tempo, do nada cresce! Aqui ele vai crescer muito rápido depois vai se estabilizando.	
[45] B3: concordo.	

Após observarmos a transcrição da situação do medicamento injetado, elementos importantes se fizeram presentes, crescimento/decrescimento, taxa crescente/decrescente de crescimento ou decrescimento e a ideia de estabilização da quantidade de droga no organismo (trechos das falas foram destacados na parte 2 da tarefa do medicamento injetado). Todos esses elementos são plausíveis dentro das ideias do RC que pretendíamos desvelar com as tarefas.

Abaixo, segue representação gráfica (Figura 11) realizada pelos grupos após a discussão.

Figura 11: Representação apresentada pelo grupo 2 para a situação do medicamento injetado



Fonte: autor.

4.6 Tarefa Relação Perímetro e Área

Evento 1: situação da praça circular

O grupo inicia sua discussão analisando o caso da praça circular (item a), conforme transcrição abaixo:

[1] C1: O perímetro de um círculo é $2\pi r$.	i e ii
[2] C2: O comprimento.	
[3] C1: E a área é $2\pi r^2$,	ii
[4] C2: Não, é πr^2.	ii
[5] C1: Só a fórmula pra gente pensar na fórmula. Se aumenta o raio, a área vai aumenta muito mais do que aumenta o perímetro, então, se a gente for construir uma relação entre a área e o perímetro; conforme o perímetro está crescendo, a área está crescendo muito mais. Então é como se fosse assim, ó! [apontando para o gráfico do rascunho, que, por sua vez, é o mesmo desenho apresentado na folha de respostas]. Porque o raio aumenta *pros* dois. Vamos supor, aumenta 5 *pros* dois. Esse aqui vai ser 5 ao quadrado, 25, esse aqui vai ser 10, não é dobro, mas esse aqui aumenta mais depressa que esse...faz sentido?	iii, iv(a) e iv(b)
[6] C2: Faz. E quanto mais o raio vai aumentando mais a área vai aumentando.	
[7] C1: Os dois aumentam juntos. E a área aumenta pra cima, aumenta aumentando. Aumenta crescendo.	iv(c)

Em seu diálogo, mostram reconhecer que a taxa de crescimento da área em relação ao raio é maior que a do perímetro. Nesse caso, utilizam o “raio” implicitamente para analisar como área e perímetro se relacionam. Nesse viés, demonstram perceber que existe uma covariação entre as grandezas observadas.

Os gráficos apresentados pelo grupo, após discussão, tinham formas diferentes, conforme Figuras 12 e 13 a seguir. Na primeira, podemos observar que o gráfico (Figura 12) cresce a uma taxa crescente. Na segunda o gráfico (Figura 13) cresce também, porém a uma taxa decrescente.

Embora eles tenham pensado de forma corretamente, os elementos discutidos não foram o suficiente para embasar de forma "precisa" a representação gráfica da situação em tela. Cabe nesse átimo, lembrar que nosso objetivo maior era observarem elementos presentes no RC; principalmente em torno do crescimento a uma taxa crescente/decrescente.

Figura 12: Gráfico apresentado pelo grupo 3, relacionando área e perímetro.

Fonte: autor.

Figura 13: Gráfico apresentado pelo grupo 3 relacionando perímetro e área.

Fonte: autor.

Evento 2 - quem cresce mais rápido?

[1] C2: E se for um quadrado?	
[2] C3: Agora, nesse caso, o perímetro cresce mais que a área.	i, iii, iv(a) e iv(b)
[3] C2: A área do quadrado é base vezes altura. E o perímetro é a soma de todos os lados.	ii
[4] C3: É, porque ó! A área é lado ao quadrado e o perímetro é quatro l.	
[5] C2: Não importa o valor. Mesmo que l seja 20. 20² é 400.	
[6] C3: Não... Não sempre. Põe área igual a 2, por exemplo, tipo fica 4. O perímetro fica 8.... É como se no início o perímetro fosse maior do que a área e no final, mais para frente, a área fosse maior que o perímetro.	
[7] C2: A gente vai encontrar esse maior? Tipo o ponto máximo?	iv(c) e iv(d)
[8] C3: Hã?	
[9] C2: A gente vai encontrar esse ponto?	
[10] C3: Ah, tinha que encontrar...	
[11] C2: Derivar.	
[12] C3: Eu acho que não precisa é só, tipo, um esboço, sabe? É só a gente imaginar assim ó.	

O grupo conseguiu nesse início de conversa que o perímetro cresce mais rapidamente que a área até certo momento [2] e [6], aqui ainda não identificado por eles. Chegam a transitar por ideias do CDI, como mostrado em [7] e [11] tendo lembranças que algum item do CDI encontro os pontos de máximos, chegam a mencionar derivada.

Evento 3 - no 4 então?

[13] C3: Então a área tipo vai... Não sei, no começo ela vai bem baixinha.	iv(c) e iv(d)
[14] C2: A gente faz tipo, esse crescimento aumenta.	iv(c) e iv(d)
[15] C3: e começa pequeno.	
[16] C2: *Dae* quando l é 3 o perímetro 12, a área é 9. Quando é 4, o perímetro é 16 e a área é 16.	
[17] C4: Depois que ela começa...	
[18] C2: No 4.	
[19] C2: Daí quando é 4 as duas são iguais... E daí depois a área aumenta.	

[20] C4: Não pode ser esse aqui. [hipótese] (estão olhando para o desenho que fizeram no rascunho)	
[21] C2: Será que pode ser ao contrário?	
[22] C3: Então, eu tinha desenhado o contrário, só que ao contrário eu desenhei assim só. Só que... Aqui está dizendo que a área ela vai aumentar... Conforme o perímetro aumenta ela vai aumentar menos e não é verdade. Não pode ser isso aqui.	
[23] C2: Mas também não pode ser esse aqui. Se não seria uma derivada, não pode ter bico.	
[24] C1: Se a gente colocar...	
[25] C2: Valores? Até da pra colocar.	

Observando as falas do grupo, aquilo que era dúvida no momento 1 da conversa parece ser resolvido no diálogo do momento 2 [18] e [19]. O grupo reconhece que a relação perímetro em função de área começa pequena e depois aumenta, ou seja, identificam que existiu uma mudança de taxa crescente no crescimento das relações [13], [14] e [15].

Evento 4 – cresce menos?

[26] C1: Se a gente fizer o contrário, tem que ser por área e tempo?	
[27] C2: Sim. Tem.	
[28] C3: Pode ser área por perímetro.	
[29] C2: É mais fácil.	
[30] C1: Pode ser perímetro por área. A gente coloca, o perímetro cresce mais quando passa do quatro e o perímetro cresce quando passa do 4, fica mais bonito.	
[31] C2: Tá ótimo.	
[32] C1: Esse aqui se a gente quiser fazer perímetro por área, a área cresce mais que o perímetro, então o perímetro cresce menos conforme a área aumenta.	
[33] C1: Fechou o 2 então.	

O grupo coloca em discussão como irá denominar os eixos [26], [28] e [30], mas logo decidem como será representado o gráfico [32]. O grupo apresentou na folha de resposta à ideia que fecharam em [32] conforme segue a Figura 14.

Figura 14: Representação refeita por G3, relacionando perímetro e área.

Fonte: autor.

Em linhas gerais, destacamos que eles desenvolveram o processo de medição dessas quantidades e também identificaram uma mudança na taxa de crescimento entre as grandezas que covariam, como evidenciados nos trechos [2], [3], [13], [14] e [19]. Desse diálogo, inferimos que os alunos reconhecem a covariação entre as grandezas de forma que ambas possuem a mesma direção de crescimento, porém a taxa de crescimento do perímetro e a da área alteram conforme se aumenta o lado do quadrado.

Podemos observar que, mesmo não trazendo à baila questões “refinadas” de CDI, como, por exemplo, ponto de inflexão, eles apresentam um gráfico em que ocorre uma mudança de concavidade, ou seja, o gráfico cresce inicialmente a uma taxa crescente e, num dado momento (não explicitam no gráfico) continua a crescer, porém a uma taxa decrescente. Poderíamos dizer que a representação foi mais por via da ideia intuitiva da situação do que propriamente dito das ideias discutidas na disciplina de CDI.

5 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentamos interpretações dos resultados embasados em inferências realizadas a partir dos eventos nos quais os dados foram organizados. Para tal, procuramos, para cada uma das tarefas, sintetizar as ideias que foram desveladas nas discussões dos grupos analisados, de forma articulada com o referencial teórico proposto. No próximo e último capítulo, tecemos considerações gerais tomando as tarefas em conjunto e, por fim, trazemos elementos relacionados à própria formulação da tarefa, no intuito de identificar eventuais ajustes em seus enunciados para a organização do produto educacional que acompanha esta dissertação.

Embora na **Tarefa da Garrafa** haja itens que envolvam explicitamente a variável tempo, seu objetivo maior era possibilitar a exploração da relação entre a altura e o volume da garrafa. Assim, ao invés de solicitar que se construísse um gráfico que relacionasse essas duas variáveis (como proposto em trabalhos de Carlson e Thompson, 2017), a tarefa foi organizada por meio de itens que mobilizam elementos necessários a essa construção. Inicialmente, solicitou-se uma explicação sobre o conceito de taxa constante de derrame; em seguida, a identificação de grandezas que pudessem ser medidas na situação; a construção de um gráfico que relacionasse a altura da água com o tempo e, por fim, a construção de gráficos que relacionassem as grandezas envolvidas, identificadas pelo próprio grupo de alunos.

Para o grupo em análise, reconhecemos que a tarefa possibilitou a exploração das ideias esperadas. O grupo reconhece que o raio pode ser pensado como uma quantidade que varia com o tempo, o mesmo ocorrendo com o volume (ideia de *movimento fictivo, Frant; Silva; Powell, 2013)*. Por fim, estabelece uma relação entre a altura e o volume, construindo uma representação na qual a inversão na concavidade do gráfico demonstrou compreensão da existência de uma mudança na taxa de variação nessa situação.

A “liberdade” em identificar quantidades que pudessem ser medidas na situação, bem como de relacioná-las representando nos eixos cartesianos ortogonais a grandezas que assim desejarem, mostrou-se um elemento promissor na elaboração do RC.

Por exemplo, quando um dos alunos menciona que “ela [a altura] cresce no começo rápido, depois ela diminui e depois volta mais rápido”, sendo essa fala o “detonador” de uma discussão coletiva (PONTE, 2005, 2017) entre alguns integrantes do grupo, observamos que eles reconhecem que as grandezas tempo e altura covariam e que existe uma mudança de crescimento da altura com o passar do tempo. Se for observada a representação gráfica e consideradas as observações feitas, entendemos que eles conseguiram representar graficamente a situação sem pensar de forma discreta, conforme um fato necessário à elaboração do RC, o que já foi apontado por autores Carlson (2002) e Thompson (2016).

A ideia de covariação entre as quantidades altura e raio das sessões transversais (aspecto não previsto ao elaborarmos a tarefa) se fez presente nas discussões do grupo. Enquanto a altura é uma quantidade sempre crescente, o raio ora aumenta, ora diminui ao longo do tempo. Assim, por um intervalo de tempo as grandezas possuem a mesma direção de crescimento e, num dado instante, isso se altera para o raio.

Para a **Tarefa das Tabelas**, o grupo em análise ficou focado em encontrar uma expressão algébrica para a função cujos valores são dados na tabela. Para eles, essa é uma ação que precede a representação gráfica, muito possivelmente influenciados pelo modo como essa abordagem é proposta no estudo de função: constrói-se uma tabela e, a partir dela, plotam-se os pontos do gráfico. A variação entre as grandezas envolvidas, e a taxa de variação entre elas, ideia essencial para a “visualização” do gráfico sem a necessidade de marcar pontos, não foi explorada pelo grupo de forma satisfatória. O grupo parece acreditar que para resolver a situação é necessário fazer algum tipo de cálculo ou realizar algum procedimento, aproximando da ideia de *função como ação* (DUBINSKY; HAREL, 1992).

Assim, embora o grupo tenha observado as variações individuais das variáveis envolvidas em cada tabela, não determinou as taxas de variação entre elas. Em algum momento da discussão, o grupo foca, para a primeira tabela, sua atenção em um suposto valor de abscissa 2, buscando com isso encontrar algum padrão linear para a situação.

Um dos elementos que se fez presente durante a discussão, quando A2 menciona que “aqui você fala a mesma coisa só que no lugar do Y se coloca X”, diz respeito à possibilidade de utilizar diferentes sistemas de coordenadas para representar a relação de covariação de dois conjuntos de variáveis, como destacado por Oehrtman, Carlson e Thompson (2008). Na fala do grupo, podemos destacar o reconhecimento da direção de crescimento entre as variáveis envolvidas, e o reconhecimento de eventuais mudanças na taxa de crescimento sem, porém relacionar tais mudanças com as concavidades dos gráficos.

No processo de construção dos gráficos, o grupo marcou no plano cartesiano os pontos dados na tabela, indo ao encontro da ideia apresentada por Carlson e Thompson (2017) de covariação contínua em partes (grosseira). Há uma ideia (não explicitada) de taxa de crescimento decrescente em sua representação, o que é sugerido por um gráfico que "parece tender" a um valor constante, e na descrição do gráfico pela frase "curva crescente côncava para baixo que se estabiliza em um valor de y, ou seja, limite horizontal".

De modo geral, embora os alunos tenham conseguido lidar com a situação e construído representações gráficas adequadas, a concavidade dos gráficos foi uma consequência de uma marcação de pontos, e não uma inferência a partir do conjunto de dados. Talvez o fato de os valores serem "discretos" tenha dificultado o desenvolvimento de um pensamento contínuo. Ainda que sua representação evidencie que as grandezas crescem a uma taxa decrescente no caso da tabela 1, no caso da tabela 2 houve dúvidas na identificação dessa taxa, já que se mostraram confusos em termos de "para onde os valores estão indo".

Na **Tarefa do Político**, embora inicialmente o grupo tenha concordado com a afirmação de que o número de crimes não está mais crescendo, após a discussão perceberam que os eixos estavam "invertidos". Assim, a tarefa possibilitou a identificação de uma taxa de crescimento crescente, quando consideramos o número de crimes como uma função do tempo. Uma reflexão importante realizada pelo grupo diz respeito à importância de refletir acerca da escolha de quais variáveis representar em cada um dos eixos em um gráfico cartesiano, o que contribuiria para a elaboração de ideias de RC. Trata-se de um comportamento associado à coordenação do valor de uma variável em relação a outra, sem necessidade de reconhecer se uma é dependente e a outra dependente (ação mental 1, CARLSON *et al*, 2002) Por outro lado, tarefas usualmente presentes em livros didáticos que "insistem" em apenas explorar a ideia de nomear os eixos em variáveis dependentes e independentes, sem discutir o que elas significam, podem levar os estudantes a interpretações equivocadas.

Para a **Tarefa do Depósito Bancário,** inicialmente o grupo analisado reconhece que as grandezas envolvidas (tempo e montante) crescem com o tempo, verbalizando uma consciência do sentido de mudança de uma variável quando é considerada uma mudança no valor da outra (ação mental 2, CARLSON *et al*, 2002). Elementos importantes que se fizeram presentes nas discussões dizem respeito à constituição das quantidades envolvidas na situação e ao raciocínio sobre o processo de medição dessas quantidades, o que fica evidenciado pelo uso de expressões do tipo "vai ter que construir um gráfico. Você coloca o valor que vai ter na ponta. Ou contrário tanto faz e você coloca o tanto que ele ganha de imposto".

Entretanto, tais discussões giraram mais em torno das legendas e da sobreposição de juros com o passar do tempo, o que sugere uma limitação quanto as potencialidades dos conceitos que ela poderia mobilizar (PONTE, 2014).

Dessa forma, conseguiram raciocinar sobre os processos de medição, mostrando coordenar o sentido de mudança de uma das variáveis com a mudança da outra (ação mental 2, CARLSON *et al*, 2002). Porém, nenhuma discussão sobre o conceito de taxa esteve presente nos diálogos. No entanto, ao iniciarem a discussão da tarefa seguinte (Tarefa do Medicamento Injetado), conseguem perceber elementos antes não discutidos, como, mostra este enunciado: "de modo que a quantidade de droga presente no corpo continua crescendo, mas a uma taxa decrescente". Assim, retomam a situação do depósito e, embora não alterem sua representação, conseguem reconhecer que a concavidade para cima (consequência de sua representação por meio da marcação de pontos) refere-se a uma situação na qual a grandeza cresce a uma taxa crescente.

Para a **Tarefa do Medicamento Injetado**, ideias relacionadas ao RC fizeram-se presentes, tais como constituir quantidades envolvidas (no caso, reconhecer a quantidade de medicamento no corpo como dependendo do tempo). Identificam e imaginam mudanças em andamento com o exposto no trecho: "Não, ela continua aqui depois ó, vai continuar assim... Vai terminar assim... porque o corpo [...], ela diminui, *dae* depois vai ficar constante...". Coordenam quantidades que variam juntas e reconhecem a existência de taxas de variação no viés de crescer mais rápido ou mais lento, ou cresce a uma taxa crescente ou decrescente. Este trecho evidencia tais ideias: "Quantidade de droga, ela continua crescendo, mas a uma taxa decrescente, ou seja, ela vai diminuir...". Embasado nessa última frase, podemos destacar que identificam eventuais mudanças na taxa de crescimento, um comportamento que pode ser associado a ação mental 4 (CARLSON *et al*, 2002).

Por fim, na **Tarefa Perímetro e Área**, utilizam o "raio" implicitamente para analisar como área e perímetro se relacionam, no caso da praça circular. Nesse viés, demonstram aqui perceber que existe uma covariação entre as grandezas observadas. Para ilustrar, gostaríamos à guisa de ilustração que a forma de pensar é similar àquela utilizada para relacionar variáveis, na qual o tempo aparece implicitamente. Por exemplo, no problema da garrafa, antes de relacionar diretamente volume com altura, tem-se em mente que o volume e a altura variam com o tempo. Trata-se do que a literatura denomina *movimento fictivo (*FRANT; SILVA; POWELL)*,* aquele em que o objeto (no caso, o perímetro e a área), apesar de estático, pode ser mais bem compreendido pelo movimento dinâmico que sugere (ambos modificam-se com o tempo).

Para a praça quadrada, inferimos que os alunos reconhecem a covariação entre as grandezas de forma que ambas possuem a mesma direção de crescimento, porém, a taxa de crescimento do perímetro e da área altera-se conforme se aumenta o lado do quadrado ("É como se no início o perímetro fosse maior do que a área e no final, mais para frente, a área fosse maior que o perímetro."). Chegam a tratar de taxa de crescimento para ambos os casos de forma "intuitiva" e também percebem que as taxas envolvidas se alteram.

Em suas discussões, os estudantes utilizam de forma superficial algumas ideias do CDI associadas a conceitos que já se havia se sistematizado durante as aulas. Se observarmos, são listados alguns termos próprios do CDI, como, por exemplo, "ponto máximo" e "derivar"; em especial, ao reconhecerem de forma implícita a existência de uma taxa de variação que está se modificando. Chegam a "brincar" dizendo ("derivar"), não parece ser claro o que significa numa situação como essa o conceito de derivada, e como se relaciona com a representação gráfica. Na fala mencionam ser importante achar esse ponto onde o perímetro deixa de crescer mais rápido que a área ("Ah, tinha que encontrar...), embora optem por busca-lo com base em tentativa e erro.

Ou seja, para realizar a representação gráfica, não é necessário pensar em outras formas e maneiras de refinar o conceito utilizando representações além da proposta na tarefa. Nessa linha pensamento, alguns elementos discutidos dentro dos conceitos do CDI não se mostram como ferramentas plausíveis no sentido de "refinar" a discussão a fim de "melhorar" em detalhes a representação proposta.

Podemos observar que, mesmo não trazendo à baila questões "refinadas" de CDI, como, por exemplo, ponto de inflexão, eles apresentam um gráfico em que ocorre uma mudança de concavidade. Reconhecem que o gráfico cresce inicialmente a uma taxa crescente e num dado momento (não explicitam no gráfico) ele continua a crescer, porém a uma taxa decrescente. Poderíamos dizer que a representação foi mais por via da ideia intuitiva da situação do que propriamente dito por ideias discutidas na disciplina de CDI.

Para o grupo, o momento chamado por eles de “4” representa a mudança da “velocidade” de crescimento entre as grandezas. Em sua argumentação, porém, podemos observar um pensamento discreto, apresentado por Thompson (2017) como coordenação de valores. O olhar foi voltado inteiramente para a área e, assim, mais no sentido variacional que propriamente covariacional (“Então vai saltando bastante. 4 para 9 foi 5. De 9 para 16 foi 7. Então cresce muito mais”).

Em sua discussão, cogitam a possibilidade de inverter os eixos. Tal fato é interessante e importante enquanto reconhecimento de um olhar covariacional de situações, afinal parece que se desprendem da obrigatoriedade de sempre nomear os eixos, a grandeza tal “deve” ser representada no eixo horizontal e vice-versa. Nesse átimo, viram a possibilidade de representar a área em função do perímetro e também ao contrário.

De modo geral, o grupo analisado mobilizou ideias relacionadas ao RC que havíamos planejado para esta tarefa: constituir quantidades envolvidas na situação, por exemplo: “Agora, nesse caso, o perímetro cresce mais que a área”; raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades, como exposto em “A área do quadrado é base vezes altura. E o perímetro é a soma de todos os lados”; imaginaram mudanças em andamento na linha de reconhecer direção de crescimento e identificar mudanças de taxas de crescimento, conforme fragmento de fala: “É como se no início o perímetro fosse maior do que a área e no final, mais para frente, a área fosse maior que o perímetro”.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capitulo é organizado em duas seções, sendo que na primeira teremos um olhar retrospectivo em relação a questão de pesquisa e tece uma articulação com base nas análises das tarefas. Já na seção seguinte o pesquisador reflexões sobre seu próprio processo de formação durante a pesquisa.

6.1 Um olhar retrospectivo

Iniciamos os estudos que resultaram nesta dissertação “movido” pela intenção de pensar uma abordagem para o ensino de funções, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, que vá ao encontro, não de uma simples apresentação de definição formal (Dados dois conjuntos A e B, define-se função como...), mas da compreensão da ideia essencial desse conceito: o aspecto covariacional das grandezas envolvidas.

Um contato inicial com a temática raciocínio covariacional (RC), por meio da leitura de textos que tratavam da temática citados no capitulo 2, aliado ao fato de que ideias de variação e covariação são fundamentais para a compreensão do conceito de função, servindo também como bases conceituais para a elaboração de conceitos do CDI, motivou-nos a aprofundar os estudados dessa temática.

Elencamos, então, como problemática para nossa pesquisa, a investigação das possibilidades do desenvolvimento de ideias do RC com estudantes de CDI 1, promovidas pelo trabalho com tarefas matemáticas. Para isso, organizamos tarefas envolvendo RC. Para cada uma delas, foram escolhidas ideias do RC que poderiam ser mobilizadas pela discussão coletiva dos estudantes enquanto trabalhavam em grupos, em diferentes episódios implementados em uma turma regular da disciplina em tela. De posse dos dados provenientes dessa intervenção, procuramos, em nossa análise, quais dessas ideias previamente elencadas foram desveladas no trabalho com as tarefas. Esse capítulo final é organizado a fim de apresentar, de forma sucinta, o modo como essas ideias estiveram (ou não) presentes nas discussões. Assim, identificamos algumas limitações na proposta, que são, aqui, apresentadas no intuito de realizar uma análise crítica dela e de subsidiar a organização do produto educacional oriundo desta dissertação. Também explicitamos algumas questões que ainda permanecem em aberto.

Acerca das ideias desveladas no trabalho com as tarefas (Quadro 6), a análise dos dados mostrou que, em menor ou maior profundidade, todas aquelas que foram previamente elencadas estiveram presentes nas discussões dos grupos selecionados. Dessas, a *constituição de quantidades* envolvidas na situação e o *raciocinar acerca do processo de medição* dessas quantidades foram ideias que se fizeram presentes, de forma mais contundente, nas discussões dos grupos ao lidar com a **Tarefa da Garrafa**. Nela, foram reconhecidas como atributos da situação, passíveis de medição, a quantidade (volume) e a altura de água na garrafa como variáveis explícitas e que covariam com o tempo. O reconhecimento da variação do raio das seções transversais da garrafa ao longo do tempo, por sua vez, foi fundamental para a investigação da representação gráfica da relação entre essas variáveis, bem como a investigação da concavidade desses gráficos. Além disso, mobilizaram a compreensão das taxas de variação envolvidas no contexto proposto.

A constituição de quantidades também foi evidenciada nas tarefas **Depósito Bancário**, **Medicamento Injetado** e **Relação Entre Perímetro e Área**, porém de uma maneira mais “automatizada”, possivelmente pela presença de termos indutores presentes nos enunciados, como “quantia depositada”, “quantidade de droga” e as próprias palavras área e perímetro. No caso dessas últimas, a constituição das variáveis “auxiliares”, lado do quadrado e raio do círculo, estiveram presentes como auxiliares de um *movimento fictivo* envolvendo área e perímetro. Assim, o grupo analisado conseguiu, por exemplo, pensar em uma relação entre a área e o perímetro das praças e representá-la graficamente fazendo uso dessas variáveis auxiliares. Fomentar um “modo de pensar” nessa relação sem fazer uso dessas variáveis auxiliares (seja reorganizando a tarefa, ou planejando a intervenção do professor nas discussões) é uma questão que foi suscitada pela análise dos dados e que ainda permanece em aberto.

Reconhecer que os grupos em análise foram capazes de *imaginar medidas de quantidades variando continuamente* foi um aspecto com o qual tivemos alguma dificuldade em lidar, em especial pelo modo como os dados foram coletados (uso de áudio). Tal inferência ocorreu porque, em diversos momentos e nas várias tarefas, os grupos esboçaram curvas contínuas (Figuras 3 a 6, e 11 a 14) representando a relação entre as variáveis envolvidas, evidenciando o reconhecimento de uma variação. Os grupos lançavam mão de marcação de valores discretos no plano cartesiano, que eram “ligados” de forma intuitiva, sem demonstrar uma clareza de por que estavam sendo ligados aqueles pontos (mais um ato mecânico, resultante de um processo de ensino vivenciado durante sua escolarização). Assim, por exemplo, um mesmo grupo oscila entre representações construídas “sem tirar o lápis do papel” e representações elaboradas a partir da marcação de pontos discretos.

Em sua totalidade, as tarefas permitiram aos estudantes transitar entre vários registros de representação, potencializando assim a exploração de ideias relacionadas à *coordenação entre as quantidades envolvidas*, em especial o reconhecimento de que havia quantidades envolvidas na situação que poderiam ser relacionadas. A importância das múltiplas representações de um conceito, destacada por Oehrtman, Carlson e Thompson (2008) e Ponte (2005) esteve presente, mais especificamente: no caso da **Tarefa da Garrafa** e do **Medicamento Injetado**, o uso da linguagem natural e da representação gráfica; no caso da **Tarefa das Tabelas**, e a articulação entre as representações numéricas e gráficas (porém, sem muito sucesso em termos do objetivo que se tinha nessa tarefa, no caso do grupo analisado). Nas demais, estiveram presentes representações envolvendo linguagem numérica e linguagem natural. No caso da **Tarefa Relação entre Perímetro e Área das Praças**, também a linguagem algébrica. Reconhecemos que esse aspecto ressalta as potencialidades das tarefas propostas para uma ressignificação do conceito de função, visto que ampliam a abordagem usualmente presente em livros tanto do Ensino Médio quanto de CDI que tratam desse conceito, uma vez que, em geral, privilegiam em demasiado a linguagem algébrica.

O reconhecimento da direção de crescimento e da existência de taxas de variação (ou eventuais mudanças nessa taxa, como no caso da **Tarefa da Garrafa** e **Tarefa do Medicamento Injetado**) fez-se presentes nas discussões. Assim, por exemplo, reflexões a partir de expressões presentes no enunciado, como por exemplo, “continua crescendo, mas a uma taxa decrescente” foram importantes para a mobilização dessas ideias.

Entretanto, em vários momentos, embora os alunos parecessem verbalizar compreender a situação, falhavam ou “travavam” nas representações. O comentário “Eu acho que essa relação que a gente fez desse raio vai complicar a vida” surge quando tentam riscar um possível gráfico que parece não ilustrar uma situação passível de representação. Em vários momentos durante a realização das tarefas, de modo geral, vários grupos deparavam com situações que, para eles, pareciam não ser passíveis de representação gráfica. De um modo informal, parece que, embora em suas falas parecessem reconhecer a covariação entre as grandezas envolvidas, “faltava mão” para organizar uma representação gráfica. Para a tarefa em tela, isso ocorreu no momento em que o grupo buscava representar a relação entre o raio das seções transversais e o tempo, relação que não se classifica como uma função (sempre há dois “instantes” simétricos em relação ao meio da garrafa na qual os raios coincidem). Assim, a concavidade dos gráficos “surgia” mais como consequência de ligar pontos marcados no plano cartesiano, ou pela inferência da relação de crescimento entre as variáveis envolvidas, e não pela análise do modo como essas variáveis cresciam.

Se observarmos diversas representações gráficas, inferimos que, embora na análise tenham mostrado compreender elementos relacionados ao RC, não souberam como representar graficamente a relação entre as grandezas enredadas. Esse “faltar mão” é uma questão que emergiu de nossos dados e que permanece em aberto, demandando maior aprofundamento teórico, tanto na busca de compreendê-la, quanto para subsidiar reformulações nos enunciados ou no sequenciamento das tarefas.

Por fim, chamou-nos a atenção, nas discussões dos grupos, a falta de articulação das tarefas com ideias do CDI que estavam sendo estudadas naquele semestre. Vários conceitos já “vistos” em aula não foram utilizados como ferramentas que pudessem auxiliar a “refinar” a ideia a ponto de dar um nome a uma mudança nas taxas de variação (ponto de inflexão) e suas implicações no que tange aos conceitos do CDI, tais como crescimento a uma taxa crescente ou decrescente (derivada positiva ou negativa naquele intervalo). Esse foi um aspecto que nos deixou, de algum modo, “frustrados” com o trabalho em andamento na turma. As tarefas aqui analisadas e a dinâmica de aula proposta (episódios de resolução de tarefas) não foi algo pontual, mas, ao contrário, bastante frequente ao longo do semestre.

Ajustes no enunciado de algumas tarefas e no modo de condução do trabalho mostraram-se, assim, necessários. Nessa linha, concluímos que algumas tarefas poderiam ser alteradas no sentido de fazer alguns questionamentos mais explícitos tais como: após algum período o crescimento se torna mais ou menos acelerado? A taxa de crescimento é maior no começo ou mais ao final da situação? Para as situações que envolvem mudança na taxa de variação, inicialmente, a concavidade é voltada para baixo ou para cima? E, posteriormente, se inverte? A que se deve esse comportamento? Em que momento da situação as concavidades se alteram? Na situação, o que podemos destacar em relação a crescimento a taxas crescentes e decrescentes?

6.2 Um olhar introspectivo[18]

Alguns dias atrás iniciava a escrita deste texto, na memória um leque de caminhos e possibilidades “martelavam” meus pensamentos, o desejo de aproximar-se de um bom ou até mesmo de um excelente texto de dissertação era a meta maior. Dispor de ideias e materiais, que eram muitos, de forma organizada e clara a fim de que algumas destas laudas pudessem servir de, algum modo, a somar conhecimentos aos saberes de outros.

Neste átimo, não somente olhando para elaboração da dissertação, mas para o mestrado como um todo, percorri caminhos por disciplinas que me permitiram reflexionar sobre práticas de ensino adotadas até então. Nestes tive contato com algumas metodologias de ensino que somaram a minha didática, elenco aqui algumas delas: Etnomatemática, Matemática Realística e Modelagem Matemática.

Das experiências vividas, das pessoas que conheci, dos autores que li, dos eventos que participei, do estágio de docência, das disciplinas cursadas, dos grupos de estudos, dos resumos/resenhas/artigos produzidos, dos estudantes que participaram do cenário de pesquisa, todos estes, com certeza trouxeram aprendizado, meu coração se alegrou, tinha comigo uma frase já antiga: “valeu a pena ter vindo hoje”, pois, percebia que naquele momento havia aprendido algo de novo, e assim me transformado, acredito que para melhor. Aos meus olhos, ser melhor é ser um humano mais humano, é ser entendido pelos estudantes (transitar por bons exemplos, que some ao conhecimento em tela), é permitir as pessoas conhecerem um lado da ciência nem sempre apresentado por alguns livros didáticos, é ser ponte entre o ódio e o amor pelo saber.

Por final, dias atrás assisti um vídeo que resumo brevemente: em um quarto de hospital estava dois homens, um que não estava enxergando e outro a espera de um procedimento cirúrgico. Aquele que não enxergava com frequência perguntava ao seu parceiro como estava lá fora, em uma das respostas relatava que na praça

[18] Esta seção será escrita em primeira pessoa do singular.

estava um casal de namorados trocando flores, mas que naquele momento não terminaram com um beijo. Num próximo dia, novamente a mesma pergunta, como está la fora? O seu amigo então simula levantar a cabeça e relata, lá está alguém sentado à espera do seu par, quando então chega segurando um buquê de flores e um anel, e dessa vez se beijam após a entrega. O ouvinte se alegra com a situação narrada. No outro dia, pela manhã a enfermaria vem buscar o relator para a cirurgia. Após algumas horas a enfermeira retorna ao quarto para arrumar a cama, quando então o colega de quarto pergunta, quem está ai? A enfermeira responde: ele não resistiu. Bastante triste, o homem que não enxergava, pede um favor para ela: poderia me contar o que você vê lá fora? Ela abre a cortina e responde: não tem nada lá fora, apenas uma parede.

Tendo como pano de fundo esse vídeo, tenho um desejo forte comigo enquanto humano e professor, que eu possa transformar paredes em histórias que alegrem os corações daqueles que me ouvem. Nesse viés, hoje tenho, por exemplo, uma ferramenta que tende a somar a este desejo, chama-se Raciocínio Covariacional, é lindo!

REFERÊNCIAS

ALVES, K. A.; AGUIAR, M.; RIBEIRO, A. J. As Dimensões do Conhecimento do Professor que Ensina Matemática: O Knowledge Quartet como Ferramenta de Análise da Prática Docente. **ACTA SCIENTIAE** (ULBRA), v. 20, p. 22-42, 2018.

ALVES, R. **A arte de ensinar.** Rio de Janeiro: Editora Papirus, 2005.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2002.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora,1994.

BONOMI, M. C. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1999.

CARLSON, M. A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *In*: DUBINSKY, E.; SCHOENFELD, A.H.; KAPUT, J.J. (Eds.). **Research in collegiate mathematics education III**. Providence: American Mathematical Society, 1998, p. 114-162.

CARLSON, M.; JACOBS, S.; COE, E.; LARSEN, S.; HSU, E. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study**. Journal for Research in Mathematics Education**, v. 33, n. 5, p. 352-378, 2002.

CARLSON, M., JACOBS, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. Razonamiento cova-riacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: una marco conceptual y un estudio. **EMA**, p. 121-156. 2003.

CARLSON, M., OEHRTMAN, M.,; ENGELKE, N. The precalculus concept assessment (PCA) instrument: a tool for assessing reasoning patterns, understandings and knowledge of precalculus level students**. Cognition and Instruction**, v. 28. N. 2, p. 113–145, 2010.

CONNALLY, E. A. *et al.* **Funções para modelar variações: uma preparação para o cálculo.** 3.ed. Tradução de VARRIALE, M.C.; ROQUE, W.L. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

COUTO, A. F.,; TREVISAN, A. L. Cálculo interativo: um ambiente virtual de suporte às aulas de cálculo diferencial e integral**. Hipátia** v. 2, n.1, p. 16-25, 2017.

COUTO, A. F.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Aulas de cálculo diferencial e integral, organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. **REnCiMa**, v. 8, n. 4, p. 50-61, 2017.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática**.** 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

DUBINSKY, E.; HAREL, G.,The nature of the process conception of function. In: DUBINSKY e HAREL (Ed.) **The concept of function - aspects of epistemology and pedagogy. Washington, D.C.: Mathematical Association of America,** 1992, p.85-106.

FILHO, B. B., SILVA, C. X. **Matemática: aula por aula**. Volume único. São Paulo: FTD. 1998.

FINNEY, R. L., **Cálculo.** volume 1 / Ross L. Finney, Maurice D. Weir. Frank R. Giordano; tradução Paulo Boschcov; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. – São Paulo: Addison Wesley, 2002.

FRANK, K. M. **Examining the Development of Students' Covariational Reasoning in the Context of Graphing.** Dissertation (Doctor of Philosophy). Arizona State University, 2017.

FONSECA, M. O. S. **Proposta de tarefas para um estudo inicial de derivadas.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

FRANT, J. B.; SILVA, W. Q.; POWELL A. B. Explorando tarefas com tecnologias digitais para o ensino de fenômenos periódicos: quando o movimento fictivo se torna factível. **Revista Educação e Cultura Contemporânea**, v. 10, n. 20, p. 29-49, 2013.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht, The Net herlands: Reidel, 1973.

GRUESO, R. A.; GONZÁLES, G. **El concepto de función como covariación en la escuela.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidad Del Valle, Colômbia, 2016.

HUGHES-HALLETT, D. *et al.* **Cálculo e aplicações.** São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

MACHADO, A. S., 1948 – Matemática: conjuntos e funções. **Matemática: temas e metas.** - 2 ed. – São Paulo: Atual, 1988.

MESTRE, C. M. M. V. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino. 2014.** Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa. Lisboa, 2014.

MIRANDA, G. A. de. Um Livro de Cálculo Intuitivo para Engenheiros. **Bolema**, Rio Claro, v. 23, n. 35B, p. 435 – 452, 2010.

OEHRTMAN, M. C.; CARLSON, M. P.; THOMPSON, P. W**.** Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In: CARLSON, M. P.; RASMUSSEN, C. (Eds.). **Making the connection**: Research and practice in undergraduate mathematics Washington, DC: Mathematical Association of America, 2008, p. 27-42.

OLIVEIRA, L. M. C. P. de, CYRINO, M. C de C. T. Aprendizagem a Respeito do Raciocínio Proporcional em uma Comunidade de Prática de Professores de Matemática. In: **Atas do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, VI, Pirenópolis, p. 1-12. SBEM: Brasil. 2015.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de Matemática. **Revista Educação e Matemática**, APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990.

_________Gestão curricular em Matemática. *In* GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, 2005.

_________(Ed.) **Práticas profissionais dos professores de Matemática.** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014.

_________ Discussões Coletivas no Ensino-Aprendizagem de Matemática. In: GTI (Ed.). **A Prática dos Professores**: planificação e discussão coletiva na sala de aula. Lisboa: APM, p. 33-56, 2017.

RAMOS, N. S. **Sequência Numéricas como Desencadeadoras do Conceito de Convergência: Episódios de Resolução de Tarefas.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

RAMOS, N. S.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Ambiente de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautado sem episódios de resolução de tarefas. In: Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, SINECT, 5, 2016, Ponta Grossa. **Anais...** Ponta Grossa: Editora da UTFPR, p. 1-11, 2016.

SALDANHA, L.; THOMPSON, P. W. Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. *In:* BERENSAH, S. B.; COULOMBE, W. N. (Eds.). **Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education**. Raleigh, NC: North Carolina State University, 1998.

SCHOPENHAUER, A. **Sobre a filosofia e seu método.** São Paulo: Hedra, 2010.

STEWART, J. **Cálculo.** São Paulo, SP: Cengage Learning, 2009. V. 1.

THOMAS, G. B. **Cálculo.** 11. ed. São Paulo, SP: Pearson Addison-Wesley, 2009.

THOMPSON, P. W. **A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic.** Center for Research in Mathematics & Science Education: San Diego State University. (1990).

THOMPSON, P. W., THOMPSON, A. G. **Images of rate. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association**, San Francisco, CA. (1992, April).

THOMPSON, P. W. Images of rate and operational understanding of the fundamental the Teorem of calculus**. Educational Studies in Mathematics**, v. 26, p. 229–274, 1994.

THOMPSON, P. W. Students, functions, and the undergraduate mathematics curriculum. In DUBINSKY, E.; SCHOENFELD, A. H.; KAPUT, J. J. (Eds.). **Research in collegiate mathematics education I**. Providence: American Mathematical Society, 1994, p.21–44.

THOMPSON, P. W. Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education**.** *In:* FIGUERAS, O.; CORTINA, J. L.; ALATORRE, S.; ROJANO, T.; SÉPULVEDA, A. (Eds.), **Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v.1**. Morélia, Mexico: PME, 2008, p. 31–49.

THOMPSON, P. W.; CARLSON, M. P. Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically**.** In CAI, J. (Ed.), **Compendium for research in mathematics education**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2017, p. 421-456.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Possibilidades para matematizar em aulas de Cálculo. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 6, p. 129-138, 2013.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T**.** Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 3, p. 353-373, 2017.

VALLEJO, C. A. C.; GÓMEZ J. L. D. La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función. **El cálculo y su Enseñanza 5**, C Cuevas, JL Díaz. pp. 165-179, 2014.

APÊNDICE – Tarefas aplicadas durante o processo de coleta de dados e a escrita do texto da dissertação

Durante a realização desta pesquisa, dividimos as tarefas em um conjunto de 5 tarefas, A, B, C, D e E, na mesma ordem de aplicação, ou seja, o conjunto A foi o primeiro grupo a ser aplicado e assim por diante.

A) Tarefas aplicadas: **Construção de Uma Praça**;

B) Tarefas aplicadas: **Tarefa da Garrafa**;

C) Tarefas aplicadas: **Tarefa Dynagraphs**;

D) Tarefas aplicadas: **Tarefa das Tabelas, Tarefas do Político, Depósito Bancário, Medicamento Injetado, Tarefa do Boato, Tarefa Descreva a Situação e Tarefa Escuro ou Frio;**

E) Tarefas aplicadas: **Tarefa da Bola no Lago, Tarefa Relação Entre Perímetro e Área, Tarefa Variação da Temperatura e Tarefa da Garrafa.**

Durante o processo de elaboração e/ou escolha dessas tarefas, tínhamos em mente que elas permitiriam aos envolvidos pensar de forma covariacional. As situações foram escolhidas tendo como pano de fundo as múltiplas representações dos estudantes enquanto lidavam com as situações. Vale ressaltar que, durante as realizações, objetivando os registros, utilizamos áudios, filmagens, produções escritas e diário de campo (o autor). Ao derredor, a título de exemplo, da situação apresentada na tarefa D (tarefa 1) realizamos uma filmagem[19] dos estudantes enquanto pensavam na situação a fim de corroborar a ideia apresentada por Frank (2017).

Em suma, tivemos os referenciais listados no texto de dissertação como norteadores na escolha das tarefas aqui apresentadas. Isso posto apresentamos as tarefas aplicadas durante a pesquisa e a escrita do texto de dissertação.

A) Construção de Uma Praça

Esta tarefa teve sua gênese em contato com a apresentação da professora Ligia Amparo numa *Taller* (oficina) no CIBEM 2017 (Madrid), intitulada EL

---

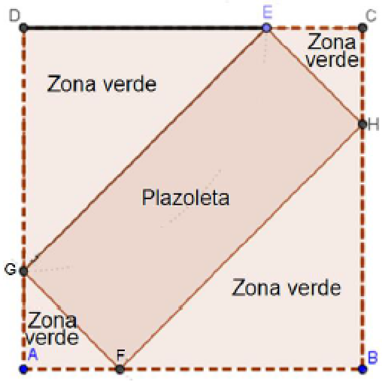
[19] Na dissertação (p.26) apresentamos alguns *prints* da gravação.

CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO COVARIACIÓN EN LA ESCUELA SECUNDARIA (Universidad del Valle, Colombia).

Em estudos posteriores, identificamos que essa oficina é fruto de um texto de Magíster (mestrado) dos autores Grueso e González intitulado **EL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO COVARIACIÓN EN LA ESCUELA** em Santiago de Cali, *octubre* (outubro) de 2016. Abaixo (Figura 15) apresentamos o texto original. No trabalho, o autor apresenta outras situações, mas, aqui não é de nosso interesse apresentá-las integralmente.

Figura 15.

CONSTRUCCIÓN DE UNA PLAZOLETA



SITUACIÓN 1: Introduciendo la covariación mediante las medidas de la plazoleta

Se desea construir una plazoleta en forma rectangular dentro de un terreno cuadrado de 80m de largo. La condición es que cada vértice de la plazoleta debe quedar sobre uno de los lados del terreno, una vez construida la plazoleta, las zonas restantes se reservarán para sembrar árboles, es decir serán zonas verdes (ver grafica).

¿Qué tan largo debe ser el segmento $\overline{DE}$, para que el área de la plazoleta sea máxima?

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa Construção da Praça**: Deseja-se construir uma praça em forma retangular dentro de um terreno quadrado de 80 m de largura. A condição é que cada vértice da praça deve estar sobre um dos lados do terreno. As partes restantes serão utilizadas como área verde.

A) Faça algumas representações do formato que a praça pode ter (mínimo 3 representações).

B) Nessa situação, o que se pode medir?

C) As grandezas listadas acima se relacionam?

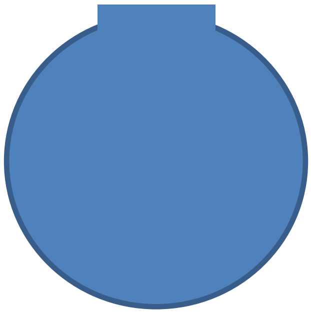
D) Representar graficamente algumas das relações apresentadas.

B) Tarefa da Garrafa

Esta tarefa é uma situação clássica dentro das discussões ao derredor do Raciocínio Covariacional, por exemplo, Carlson (1998), Carlson *et al*. (2002), Carlson, Oerhrtman e Engelke (2010) e Thompson e Carlson (2017).

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa da Garrafa**:

Água é derramada em um vaso a uma taxa constante. Use essa informação e a forma do vaso para responder às perguntas a seguir.



a) O que você entende por taxa constante de derrame de água nessa situação?

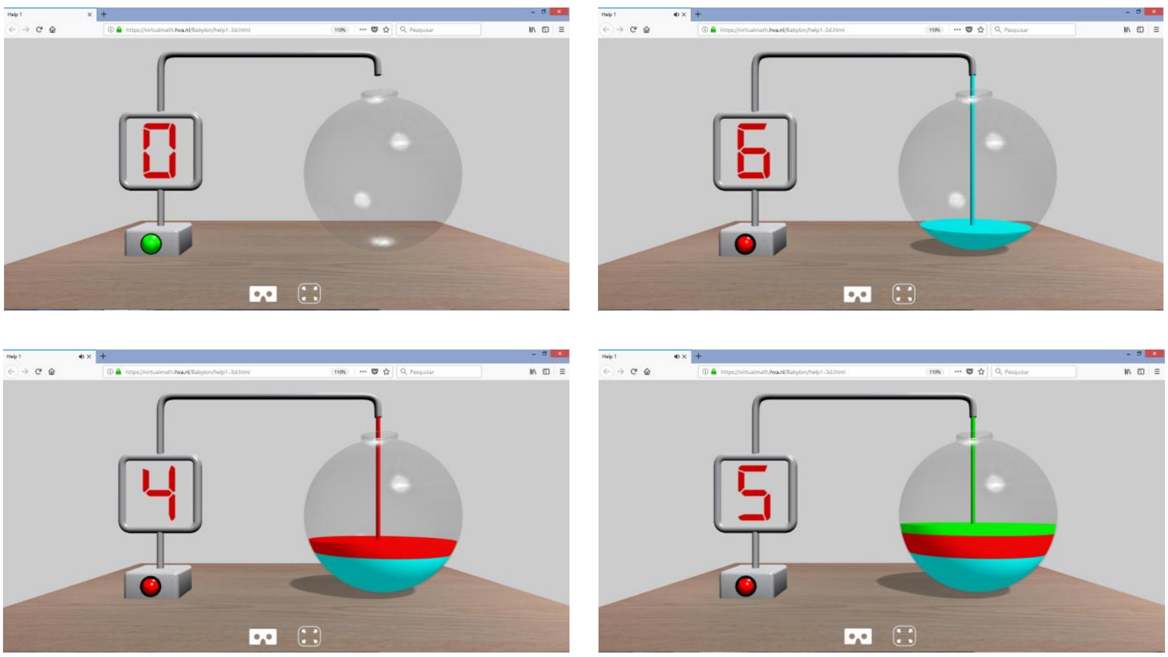
b) Imagine a cena do vaso sendo enchido e escreva o que você acha que pode ser medido nessa situação.

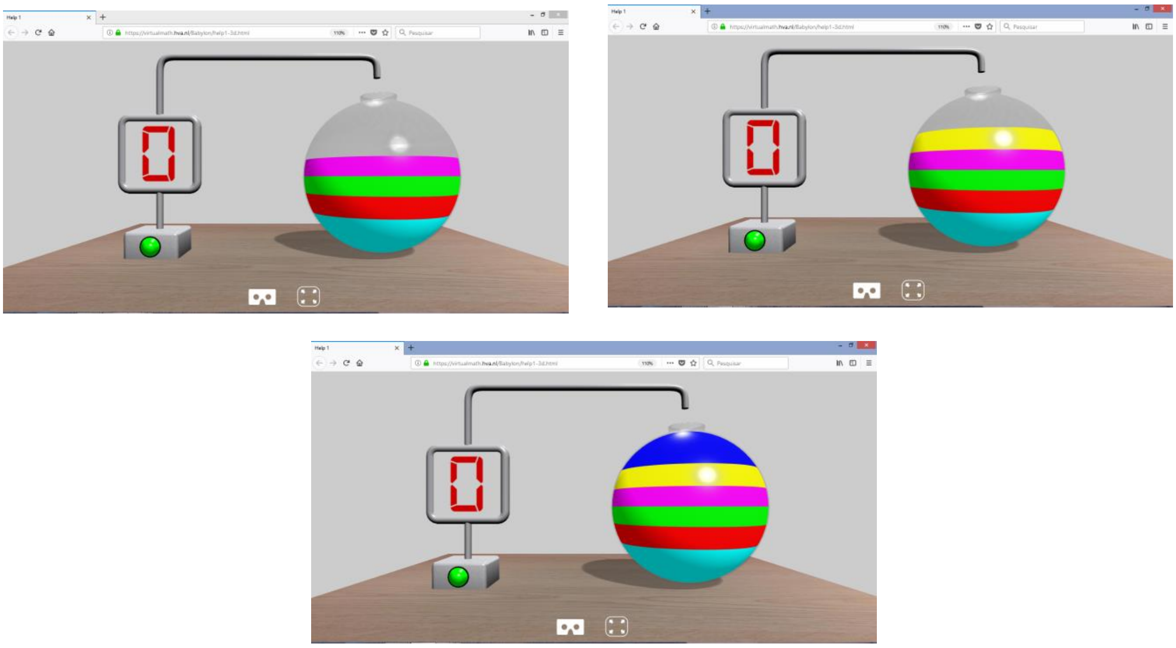
c) Esboce um gráfico que relacione a altura de água na garrafa com o passar do tempo. Explique o raciocínio que levou ao seu esboço.

Abra o aplicativo 1 de ajuda (https://virtualmath.hva.nl/Babylon/help1-3d.html) e acione o enchimento do vaso. Perceba os intervalos de tempo, a variação da altura e a queda da água. Nesse aplicativo, o usuário clica em um bota com temporizador (inicia em 10 segundos até zerar) e assim vai preenchendo o vaso com "água".

A partir disso, você acha que alguma de suas respostas, a), b) e c), estão incorretas? Se sim, responda-a novamente e explique o quê e o porquê você acha que está incorreto. Se não, vá para a próxima questão.

Segue alguns *prints* do aplicativo mencionado.



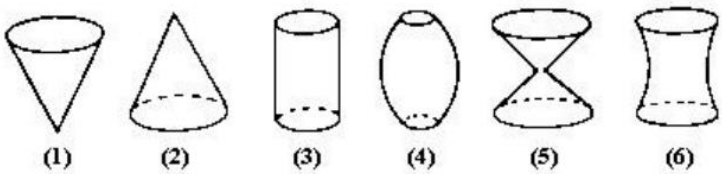


Fonte: https://virtualmath.hva.nl/Babylon/help1-3d.html data de acesso 08/09/2017

d) Construa gráficos que relacionem as diferentes grandezas envolvidas nessa situação.

As tarefas que seguem, a partir do item d, foram selecionadas para aplicação, porém não foram utilizadas. As situações foram elaboradas pelos autores, com contribuição do estudante de iniciação científica[20] Daniel Daré.

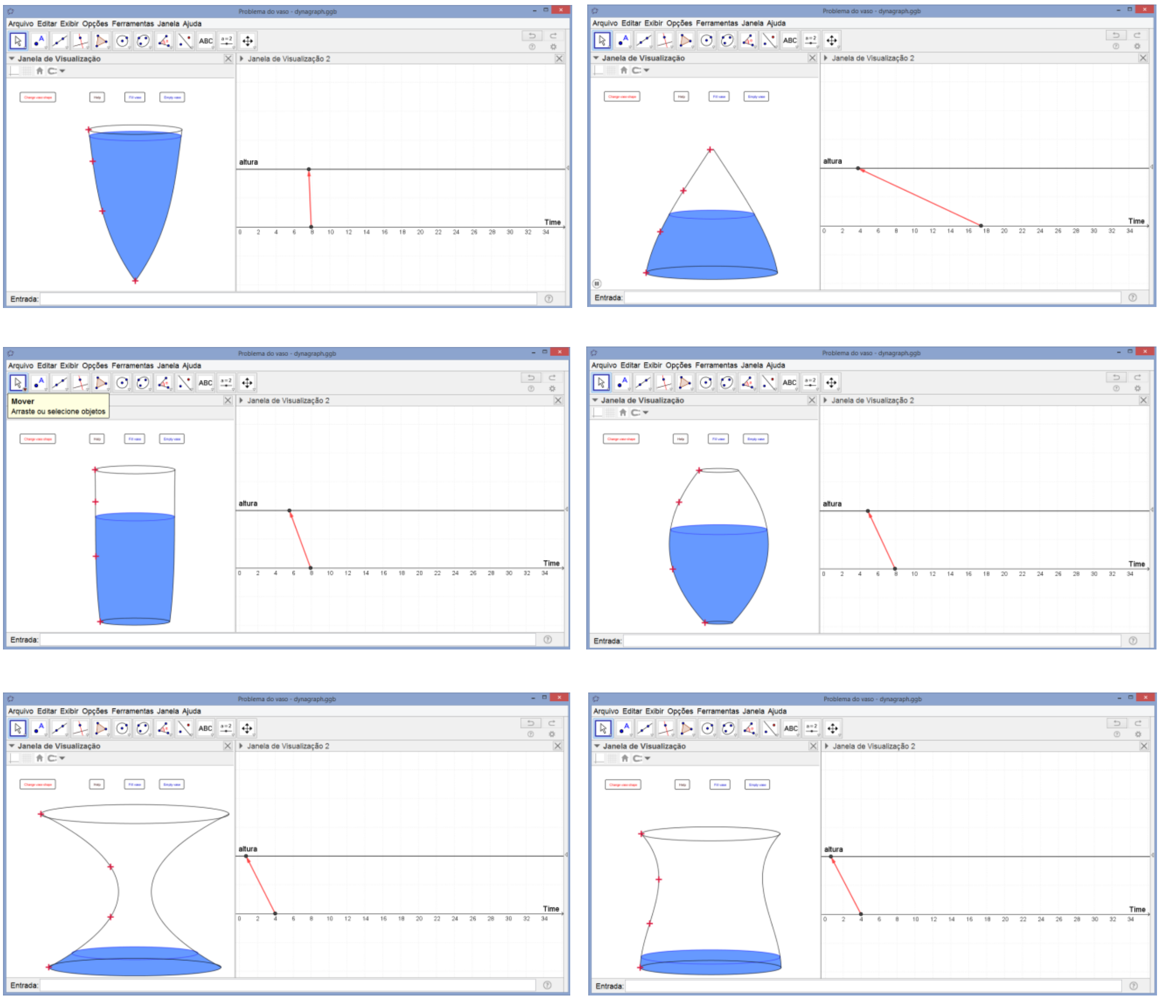
e) Agora, considerando que todos os vasos seguintes têm a mesma altura, esboce gráficos da altura em função do volume.



Para auxiliar, utilize-se do aplicativo de ajuda 2 (Problema do vaso – Dynagraph). É possível mudar as formas do vaso clicando em “Change vase chape”. A janela de visualização 2 traz um Dynagraph, uma relação entre a altura e o tempo, para auxiliar a visualização da situação. Nesse aplicativo o usuário pode movimentar os x vermelhos dando o formato desejado ao vaso.

[20] Apresentamos mais detalhes no texto da dissertação (página 46).

Abaixo alguns *prints* do aplicativo supracitado.



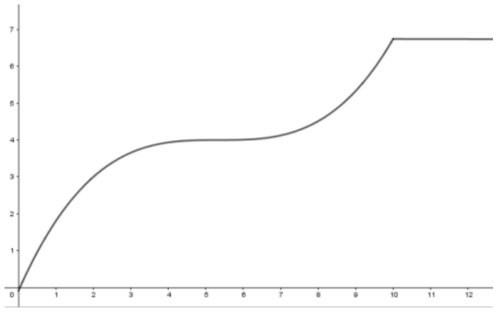
Fonte: Os autores e Daniel Daré.

Esboce o gráfico do recipiente

f) O que mudaria nos gráficos se partíssemos de vasos cheios e assumíssemos que estivessem furados na parte inferior, esvaziando-se ao longo do tempo a taxa constante?

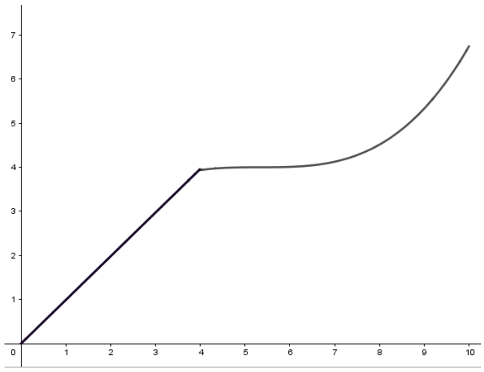
g) A partir dos esboços de gráficos a seguir, represente os possíveis vasos que podem tê-los originado.

(altura)



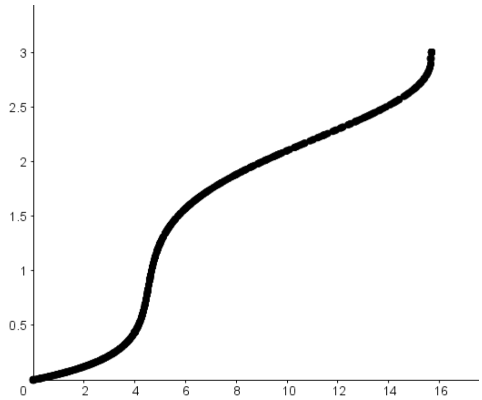
(tempo)

(Volume)



(altura)

(altura)



(volume)

C) Tarefa Dynagraphs

Tarefa embasada nos autores Goldenberg, Lewis e O'keefe, os quais discutem representações dinâmicas em torno do conceito de função. Os autores denominam a ideia em *Dynagraphs*. Podemos entender a ideia como duas linhas horizontais paralelas e ao mover o ponto sobre a linha localizada na parte inferior (somente nessa linha há valores explícitos), dinamicamente move-se a linha superior. Vale ressaltar que utilizamos o software GeoGebra como ferramenta para a realização desta tarefa.

Observação: Essa ideia é apresentada na obra ***The Concept of Function – Aspects of Epistemology and Pedagogy.*** *Dos editores:* HAREL, Guershon; DUBINSKY (1992, p. 235).

Texto que apresentamos como proposta da **tarefa *Dynagraphs***:

1 – O que é possível observar nessa tela? (a seguir apresentamos as imagens *Dyna 1, 2, 3 e 4*)

2 - Se você fosse fazer uma ligação para alguém descrevendo o que está representado na tela, como seria sua descrição? (escreva como falaria)

3 – Existe alguma coisa que muda e a outra não? Pode-se afirmar que há relação entre as partes que aparecem na tela?

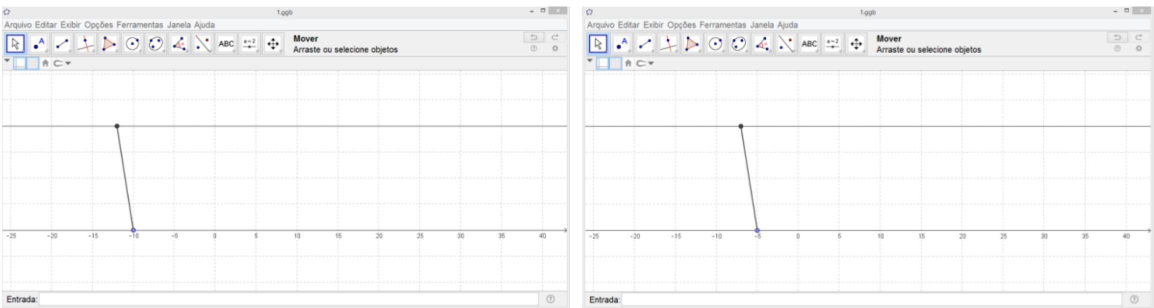
4 – Se fosse criar algo que mostrasse a forma como as partes estão se relacionando, como seria sua representação? É possível um modelo algébrico? E que tal tentar representar graficamente a situação?

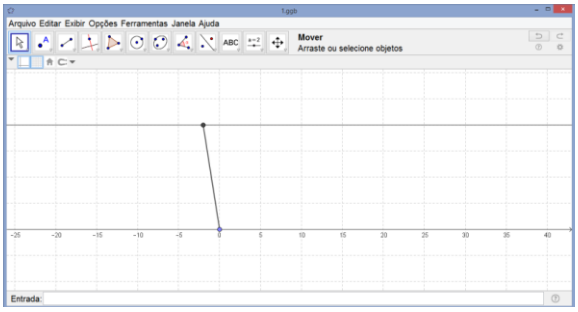
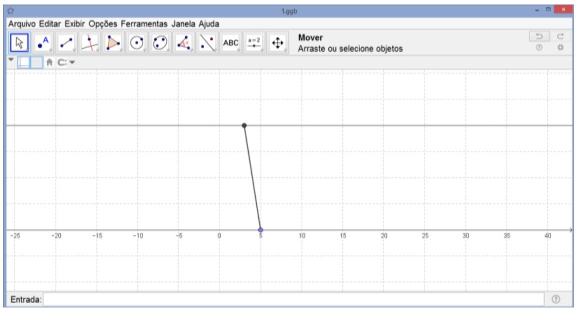
5 – Utilize seus dedos como recurso para explicar para seu amigo a forma como estão variando as grandezas envolvidas.

6 – As variações existentes são iguais para os dois pontos em movimento observados em cada situação, ou seja, a variação do ponto deslizante é também a do ponto que se move de acordo com o deslizante?

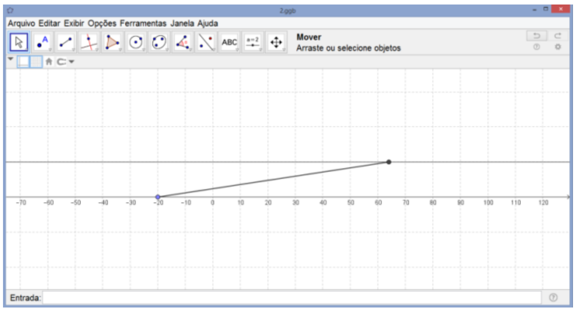
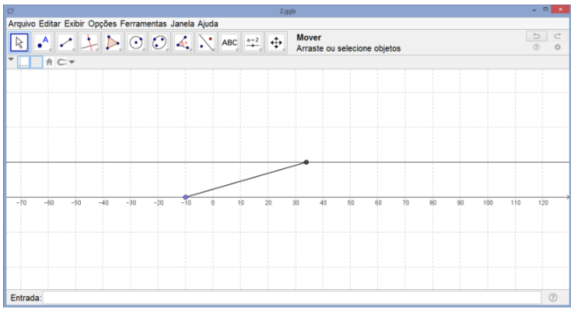
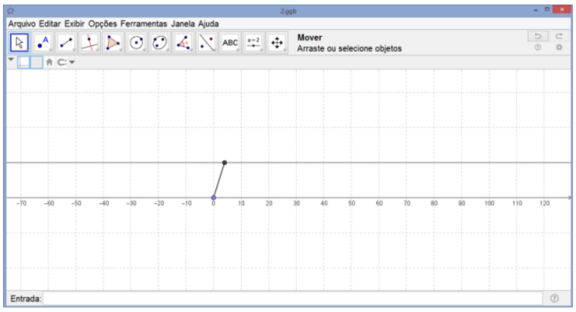
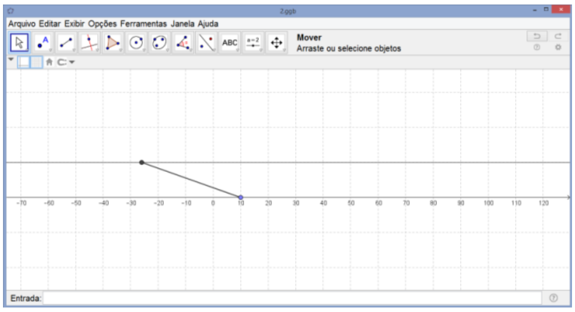
Abaixo trazemos alguns *prints* da tarefa que apresentamos como proposta da tarefa (chamaremos de Dyna 1, 2, 3 e 4):

Dyna1:

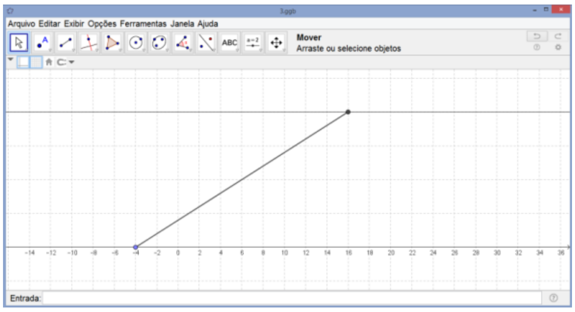
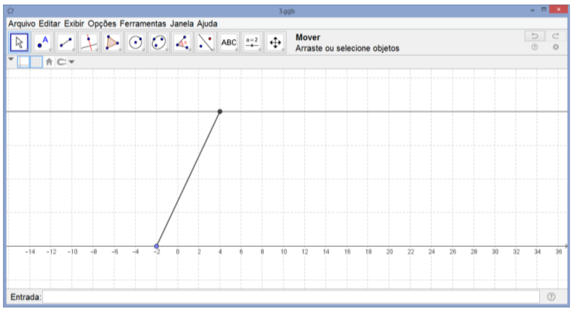
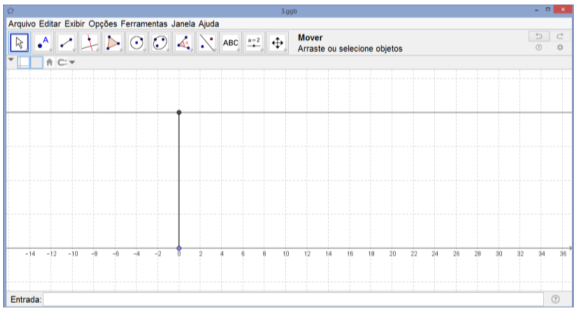
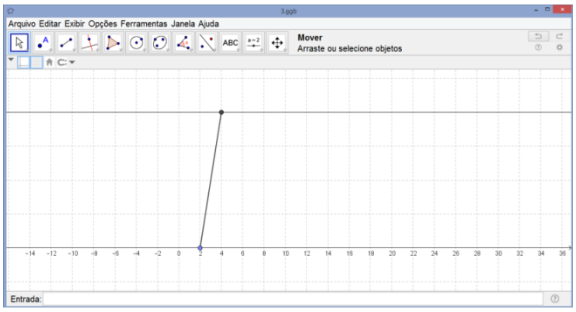


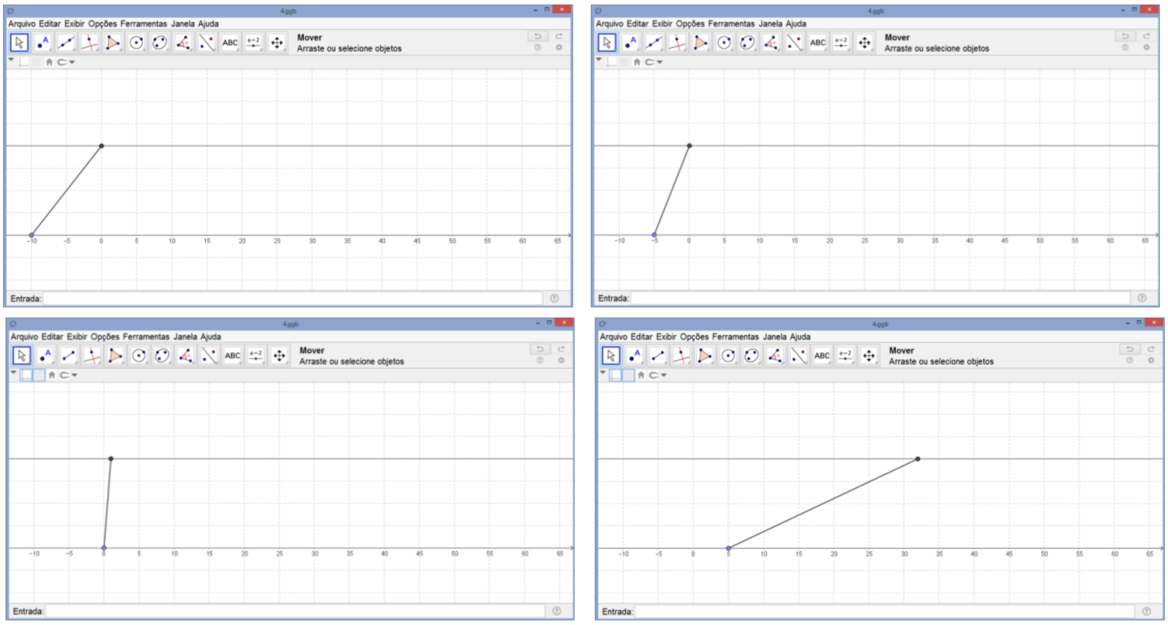
Dyna 2:

Dyna 3:

Dyna 4:



D) Esta aplicação foi composta pelas 7 tarefas abaixo denominadas:

Tarefa das Tabelas

Esta tarefa foi adaptada da literatura: **Funções para modelar variações: uma preparação para o cálculo**. Connally, Varriale e Roque(2009). A adaptação foi em torno da ideia “descrever para uma pessoa que não esteja vendo o gráfico”.

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa das Tabelas:**

Como você descreveria, para uma pessoa que não esteja vendo o gráfico, cada uma das funções descritas por meio das tabelas abaixo.

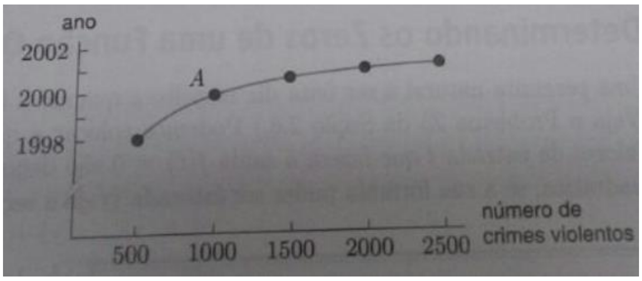
X	0	1	3	6
f(x)	1	1,3	1,7	2,2

X	12	15	18	21
h(x)	21,40	21,53	21,75	22,02

As **Tarefas do Político, Depósito Bancário, Medicamento Injetado** e **Tarefa do Boato** tiveram como referência a literatura: **Funções para modelar variações**: uma preparação para o cálculo. Connally, Varriale e Roque (2009).

Tarefa do Político

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa do Político:**
Um político concorrendo à reeleição declarou que o número de crimes violentos não está mais crescendo e que, atualmente, está sob controle. O gráfico apresentado na figura abaixo confirma essa afirmação? Por que sim ou por que não?



Tarefa do Depósito Bancário

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa Depósito Bancário:**
Quando se faz um depósito bancário, a quantia depositada na conta cresce lentamente no início. À medida que o saldo vai aumentando, a quantia de dinheiro cresce mais rapidamente, visto que a conta vai recebendo os juros sobre os novos juros e também sobre a quantia original. Faça uma representação dessa situação.

Tarefa Medicamento Injetado

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa Medicamento Injetado:**
Quando um medicamento é injetado na circulação sanguínea de uma pessoa, a quantidade da droga presente no corpo começa a crescer rapidamente. Se a pessoa toma injeções diárias, o corpo metaboliza a droga, de modo que a quantidade de droga presente no corpo continua crescendo, mas a uma taxa decrescente. Por fim, a quantidade se torna constante em um nível de saturação. Construa um gráfico que represente essa situação.

Tarefa do Boato

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa do Boato:**
Quando surge um boato, o número de pessoas que o ouviram começa crescendo lentamente. À medida que o boato se espalha, a taxa de crescimento torna-se maior (à medida que mais pessoas continuam a contar o boato aos seus amigos), em

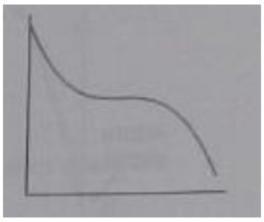
seguida, diminui novamente (quando quase todos já ouviram). Como se poderia representar essa situação?

Tarefa Descreva a Situação

A **Tarefa Descreva a Situação** é de autoria do Professor e Pesquisador desta pesquisa.

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa Descreva a Situação:**

Descreva uma situação (de modo análogo ao apresentado nas questões anteriores) cuja representação corresponda ao gráfico ao lado. Em seguida, construa uma tabela que possa representar esse gráfico.



Tarefa Escuro ou Frio

A **Tarefa Escuro ou Frio** foi adaptado da literatura: **Cálculo e aplicações**. HUGHES-HALLETT *et al*.(1999).

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa Escuro ou Frio:**

Você está sozinho em seu quarto mal iluminado e mal aquecido e acende uma única vela, de forma a “espantar a amaldiçoada escuridão”. Deprimido com a situação, você caminha, afastando-se da vela, suspirando (mas sem apagá-la). A temperatura (em ºC) e a iluminação (em % da capacidade da vela) decrescem à medida que sua distância (em metros) da vela aumenta. Na verdade, você tem tabelas mostrando a situação. Suponha que você sente frio quando a temperatura está abaixo de 4,5º C e que você estará no escuro quando a iluminação é no máximo 50%. Você estará no escuro antes de sentir frio ou vice-versa? Explique.

Distância(m)	Temp(º C)	Ilum(%)
0	13,0	100
0,30	12,4	84
0,55	12,0	75
0,90	10,9	67
1,30	10,0	60
1,70	8,3	56
2,00	6,4	53

E) Esta aplicação foi composta por 4 tarefas abaixo denominadas:

As próximas 4 tarefas, são embasas na proposta apresentada por Carlson, Oehrtman e Engelke (2010) na obra; **The Precalculus Concept Assessment: A Tool for Assessing Students' Abilities and Understandings.**

Tarefa da Bola no Lago

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa da Bola no Lago:**
Uma bola é lançada em um lago, criando uma onda circular que aumenta a uma velocidade de 5 cm por segundo. Representar, de duas maneiras diferentes, uma relação entre a área A da onda e o tempo.

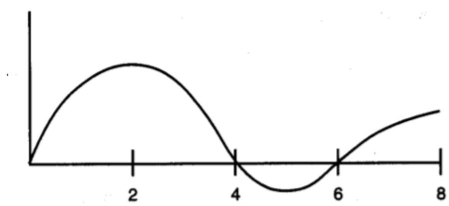
Tarefa Relação Entre Perímetro e Área

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa Relação Entre Perímetro e Área:**
Construir um gráfico que relacione o perímetro e a área de uma praça supondo que ela tenha formato:

a) Circular b) Quadrado

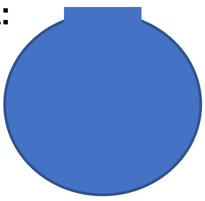
Tarefa Variação da Temperatura

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa Variação da Temperatura:**
O gráfico abaixo fornece a taxa de variação da temperatura de certo material ao longo do tempo. Esboce o gráfico da temperatura nesse mesmo intervalo de tempo. Assuma que a temperatura no tempo t = 0 é 0º C.



Tarefa da Garrafa

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa da Garrafa:**
Imagine que estejamos enchendo a garrafa representada na figura ao lado com água a uma taxa de derrame constante. Construir dois possíveis gráficos que relacionem a altura com a quantidade de água na garrafa.



ANEXO – Produto Educacional