UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PATRICIA BENETI DE OLIVEIRA

PROPOSTA DE AUTOESTUDO PARA NIVELAMENTO DE ESTUDANTES DE ENGENHARIAS

PONTA GROSSA
2024

PATRICIA BENETI DE OLIVEIRA

PROPOSTA DE AUTOESTUDO PARA NIVELAMENTO DE ESTUDANTES DE ENGENHARIAS

Produto apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciência e Tecnologia, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientador: André Luis Trevisan

PONTA GROSSA

2024

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O roteiro de autoestudo apresentado reflete a indicação do autor Imbernón (2011, p. 22) “o professor como um agente dinâmico cultural, social e curricular, capaz de tomar decisões educativas, éticas e morais, de desenvolver o currículo em um contexto determinado e de elaborar projetos e materiais curriculares”, fazendo uso do saber docente da autora em um contexto específico controlado pelo próprio coletivo, ou seja, o produto deste doutorado um Roteiro de Autoestudo dos conceitos iniciais da disciplina de Cálculo aplicado as Engenharias.

A importância de manter o equilíbrio, deixando o aluno imerso em um contexto prático ou mesmo profissional vinculado aos conceitos apresentados, demonstra a contribuição gerada pela autora na criação do produto, vinculando “saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais” (Tardif, 2014) docente.

A aproximação teoria e prática é o cenário que vem desenrolando nos últimos anos para a Engenharia, conforme previsão das Diretrizes Curriculares Nacionais dos cursos de Engenharia, com parecer do Conselho Nacional de Educação, em 2019, temos:

> Art. 3º O perfil do egresso do curso de graduação em Engenharia deve compreender, entre outras, as seguintes características: I - ter visão holística e humanista, ser crítico, reflexivo, criativo, cooperativo e ético e com forte formação técnica; II - estar apto a pesquisar, desenvolver, adaptar e utilizar novas tecnologias, com atuação inovadora e empreendedora; III - ser capaz de reconhecer as necessidades dos usuários, formular, analisar e resolver, de forma criativa, os problemas de Engenharia; IV - adotar perspectivas multidisciplinares e transdisciplinares em sua prática; V - considerar os aspectos globais, políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e de segurança e saúde no trabalho; VI - atuar com isenção e comprometimento com a responsabilidade social e com o desenvolvimento sustentável. (Brasil, 2019, p.1-2)

Nesse sentido, o autoestudo apresentado neste trabalho promove a mediação e o uso de metodologias ativas vinculando a “cultura docente em ação” (Tardif, 2014), permitindo ao discente “aprender, pensar, praticar, transformar ideias, habilidades assegurando a autonomia discente e a relação cognitiva com os conceitos” (Libâneo, 2011, p.70).

O presente documento propõe um material de autoestudo destinado ao nivelamento de estudantes de engenharias na disciplina de cálculo diferencial e integral. O objetivo é fornecer uma base sólida para os alunos que possam ter lacunas em seus conhecimentos prévios, permitindo-lhes acompanhar de forma mais eficiente o curso regular de cálculo. A importância do cálculo no currículo de engenharia não pode ser subestimada, pois ele é fundamental para a compreensão de fenômenos e problemas complexos nas diversas áreas da engenharia.

2 ELABORAÇÃO DA PROPOSTA

2.1 Objetivos

Os objetivos principais deste material de autoestudo são:

- Proporcionar uma revisão abrangente dos conceitos fundamentais de cálculo diferencial e integral.

- Oferecer recursos didáticos que facilitem a compreensão e a aplicação dos conceitos matemáticos.

- Desenvolver a autonomia dos alunos no estudo e na resolução de problemas matemáticos.

2.2 Metodologia

A metodologia adotada para a criação dos materiais de autoestudo inclui:

- Seleção dos conteúdos-chave de cálculo diferencial e integral com base nas dificuldades comuns dos alunos.

- Estruturação dos materiais em módulos, cada um abordando tópicos específicos.

- Desenvolvimento de vídeos explicativos, exercícios práticos e exemplos resolvidos.

- Utilização de ferramentas tecnológicas para criar recursos interativos e dinâmicos.

- Disponibilização de acesso em recurso Padlet, dos materiais teóricos, testes, vídeos, objetos interativos e revisão de conteúdos.

2.3 Ferramentas utilizadas

As seguintes ferramentas foram utilizadas no desenvolvimento dos materiais de autoestudo:

- Software de matemática para a criação de gráficos e visualizações.

- Plataformas de vídeo para a produção de tutoriais e aulas gravadas.

- Ambientes virtuais de aprendizagem para a disponibilização dos materiais e acompanhamento do progresso dos alunos.

- Ferramentas de feedback para coleta de sugestões e melhorias contínuas.

2.4 Estrutura dos Materiais

Os materiais de autoestudo foram organizados a seguir conforme a estrutura de um plano de aula, da seguinte forma:

Aula 1: Ideia de Função

Objetivos:

- Introduzir o conceito de função, destacando sua importância na matemática e nas engenharias.
- Apresentar exemplos práticos de funções no contexto cotidiano.

Metodologia:

- **Miniaula:** Vídeo introdutório explicando o conceito de função com exemplos práticos, como o consumo de combustível.
- **Material de Apoio:** Leitura complementar sobre a definição de função e exercícios resolvidos.
- **Atividade:** Resolução de problemas que envolvem a criação de funções a partir de situações do dia a dia.

Contextualização: A compreensão da ideia de função é fundamental para os futuros engenheiros, pois muitas vezes terão que modelar situações reais com funções matemáticas. Por exemplo, a função que relaciona o número de litros de combustível com o preço a pagar é um exemplo prático que ajuda a consolidar este conceito.

Melhorias e Estudos Futuros:

- Introduzir softwares como GeoGebra para visualização das funções.
- Aplicar o conceito em diferentes áreas da engenharia, como elétrica e mecânica, para mostrar a versatilidade das funções.

Aula 2: Representação dos Coeficientes da Função no Plano

Objetivos:

- Ensinar a representação gráfica dos coeficientes de uma função linear no plano cartesiano.
- Interpretar o significado dos coeficientes angular e linear.

Metodologia:

- **Miniaula:** Vídeo sobre a representação dos coeficientes no plano, mostrando como plotar pontos e traçar a reta.

- **Material de Apoio:** Slides detalhando a interpretação dos coeficientes angular (taxa de variação) e linear (valor inicial).
- **Atividade:** Exercícios de plotagem de funções lineares com diferentes coeficientes.

Contextualização: Compreender a representação gráfica dos coeficientes é crucial para a análise de dados e modelagem matemática em engenharia. Isso permite que os alunos visualizem como mudanças nos coeficientes afetam a inclinação e a posição da reta no gráfico.

Melhorias e Estudos Futuros:

- Utilizar dados reais para que os alunos representem graficamente e interpretem os resultados.
- Integrar ferramentas de software para facilitar a plotagem e análise gráfica.

Aula 3: Interpretação Gráfica

Objetivos:

- Desenvolver a habilidade de interpretar gráficos de funções.
- Identificar as características principais de gráficos, como interceptos e inclinação.

Metodologia:

- **Miniaula:** Vídeo sobre a interpretação de gráficos de funções lineares e não lineares.
- **Material de Apoio:** Exemplos de gráficos e suas interpretações.
- **Atividade:** Análise de gráficos fornecidos e identificação das principais características.

Contextualização: A interpretação gráfica é uma habilidade essencial para engenheiros, pois muitos problemas práticos exigem a análise de gráficos para tomar decisões informadas. Esta aula prepara os alunos para interpretar gráficos em contextos diversos, como circuitos elétricos e sistemas mecânicos.

Melhorias e Estudos Futuros:

- Incorporar estudos de casos reais onde a interpretação gráfica é crucial.
- Desenvolver exercícios com gráficos mais complexos, incluindo funções quadráticas e exponenciais.

Aula 4: Zero ou Raiz da Função

Objetivos:

- Definir e encontrar o zero ou raiz de uma função linear.

- Resolver equações que resultam na determinação das raízes.

Metodologia:

- **Miniaula:** Vídeo explicando o conceito de raiz de uma função e como encontrá-la.
- **Material de Apoio:** Passo a passo para resolver equações lineares e encontrar raízes.
- **Atividade:** Exercícios práticos para encontrar raízes de diferentes funções.

Contextualização: Encontrar as raízes de funções é uma habilidade prática indispensável na engenharia, onde muitas vezes é necessário determinar os pontos onde uma função atinge zero, como em análise de forças em equilíbrio.

Melhorias e Estudos Futuros:

- Explorar métodos numéricos para encontrar raízes de funções mais complexas.
- Aplicar o conceito de raízes em problemas de otimização e análise de sistemas.

Aula 5: Estudo do Vértice de Funções Quadráticas

Objetivos:

- Identificar e calcular o vértice de uma função quadrática.
- Interpretar o significado do vértice no contexto de problemas reais.

Metodologia:

- **Miniaula:** Vídeo sobre como determinar o vértice de uma parábola e sua importância.
- **Material de Apoio:** Fórmulas e exemplos detalhados de cálculo do vértice.
- **Atividade:** Exercícios para encontrar o vértice de diferentes funções quadráticas.

Contextualização: O estudo do vértice de funções quadráticas é particularmente relevante em engenharia para otimizar processos e sistemas, como maximizar a eficiência de um mecanismo ou minimizar custos.

Melhorias e Estudos Futuros:

- Introduzir software de modelagem para ajudar na visualização do vértice.
- Aplicar o conceito a problemas de engenharia civil e mecânica, como o cálculo de trajetórias e estruturas.

3 3. A CRIAÇÃO DA PROPOSTA DE AUTOESTUDO

A proposta do produto educacional iniciou-se com a análise das questões presentes nas Provas do ENEM, na intenção de verificar quais os conceitos, vinculados ao Cálculo Diferencial e Integral, que se encontravam presentes nas provas. Para organização da proposta, foram selecionadas trinta questões das Provas do ENEM dos anos de 2000, 2009, 2011, 2013, 2014, 2016, 2015, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022. Sendo realizada uma categorização dessas questões, com base nas competências e habilidades da BNCC em Matemática e suas Tecnologias (Brasil, 2018), para organizar, as questões foram agrupadas por temas que formam separados em dois grupos para a avaliação diagnóstica (Apêndice A) e a avaliação pós-autoestudo (Apêndice B).

As questões foram utilizadas em duas avaliações, cada avaliação composta por 15 questões. A primeira tem caráter diagnóstico, foi aplicada antes da realização das atividades dirigidas. Na sequência foi prepara uma programação de autoestudo, presente no Apêndice C, mediado pelas TIC organizadas em dois momentos:

1 – Um painel criado na página do padlet em que se tem acesso a miniaulas gravadas

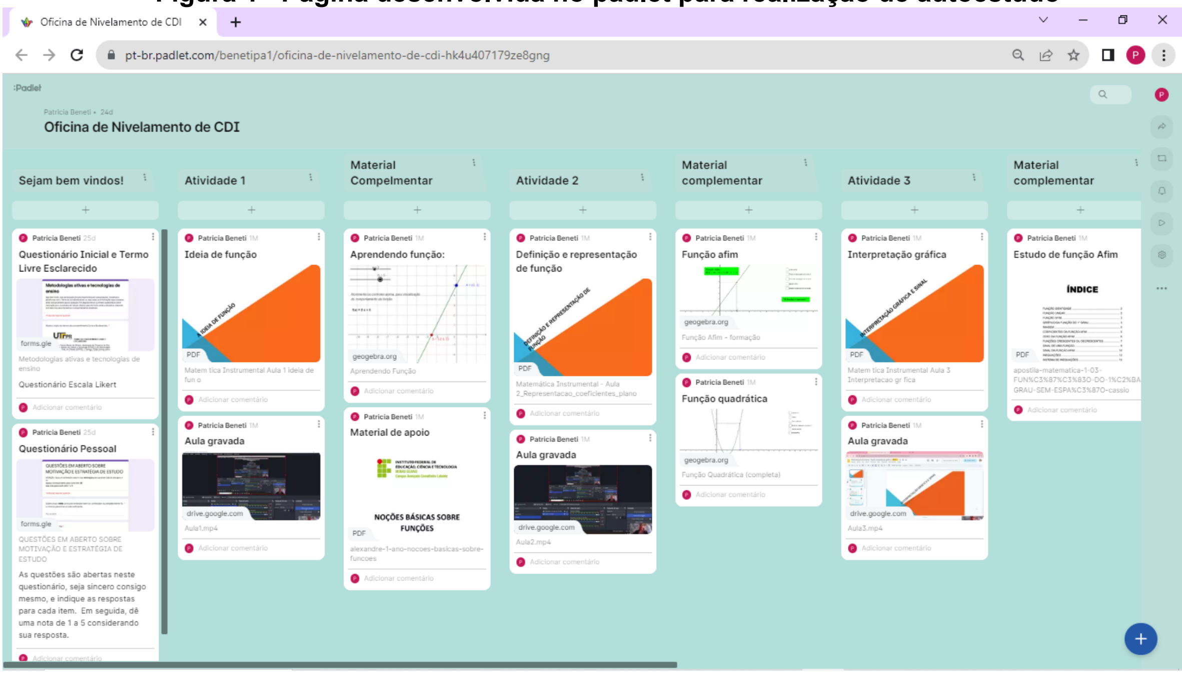
2 - Materiais de apoio como os slides, links de objetos didáticos, estudos dirigidos entre outros relevantes para o autoestudo no decorrer do período de uma semana.

Ambos os momentos foram disponibilizados on-line através do recurso Padlet. Após foi aplicada a segunda avaliação, presente no Apêndice B, com um caráter formativo na qual avaliamos o progresso dos estudantes por meio de uma análise comparativa.

Com relação à comunicação, os estudantes poderiam se comunicar com a pesquisadora de forma direta por mensagens pelo próprio padlet, ou ainda, por meio de um grupo de WhatsApp, no qual ele é convidado a participar para esclarecimentos de dúvidas no decorrer desse período de aplicação do instrumento de pesquisa. Destaca-se que por meio do desenvolvimento de materiais projetados foi dado suporte aos processos de ensino e de aprendizagem (Gravemeijer; Cobb, 2006).

Também foi elaborado um ambiente virtual de aprendizagem, utilizando como recurso tecnológico o padlet, que permite o compartilhamento de materiais, bem como a interação desses estudantes como meio de viabilizar a aplicação de atividades de autoestudo sobre o conteúdo de funções, conforme se pode verificar na ilustração da página desenvolvida disponibilizada via link e convite aos participantes, conforme indicado na Figura 1.

Figura 1– Página desenvolvida no padlet para realização de autoestudo



Fonte: Autoria própria (2024)

Na ambiente virtual de aprendizagem foi inserido uma página do *google forms* com o termo livre esclarecido e um questionário inicial para conhecermos o perfil dos estudantes, além de um questionário pessoal. Apresentamos a seguir o termo de consentimento livre esclarecido, na Figura 2.

Figura 2– Termo de consentimento livre esclarecido

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, Patricia Beneti de Oliveira, doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia (PPGECT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Campus Ponta Grossa estou realizando o projeto de pesquisa intitulado: **Metodologias ativas e tecnologias de ensino: uma proposta de auto estudo para nivelamento de estudantes de cursos de engenharias da disciplina de Cálculo diferencial e integral** mediante orientação do Professor André Trevisan

O objetivo deste trabalho é verificar a aprendizagem de conceitos iniciais da disciplina de Cálculo a partir da mediação de uma metodologia ativa com proposta de auto estudo.

Não haverá despesas pessoais para o participante em qualquer fase do estudo. Também não há compensação financeira relacionada à sua participação. Fica claro que através deste termo não há nenhum benefício direto para o participante, trata-se apenas de um levantamento.

Os dados obtidos nesta pesquisa serão utilizados na publicação de artigos científicos. Contudo, assumimos a total responsabilidade de não publicar qualquer dado que comprometa o sigilo da participação dos integrantes como nome, endereço e outras informações pessoais, bem como da identidade do Colégio.

Acredito (a) ter sido (a) suficientemente informado (a) a respeito das informações que li ou que foram lidas para mim e afirmo que aceitei participar de minha própria vontade com a finalidade de exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa.

Eu dou meu consentimento livre e esclarecido para participar como voluntário do projeto de pesquisa. Tenho ciência de que estou livre para interromper, a qualquer momento, minha participação na pesquisa sem sofrer nenhuma retaliação.

◉ Aceito participar voluntariamente da pesquisa.

○ Não aceito participar desta pesquisa

Fonte: Autoria própria (2024)

No quadro 1, a seguir, indicamos as questões inseridas no questionário sobre o perfil dos estudantes, que foi disponibilizado em formulário do *google forms.*

Quadro 1- Questionário sobre o perfil dos estudantes

	Questões
1	Quando se trata de estudar Introdução a Engenharia, sempre busco um jeito de deixar para mais tarde:
2	Eu me esforço bastante com o objetivo de tirar nota boa em Cálculo:
3	Sou capaz de me privar da TV, computador ou outras diversões para dar conta dos estudos de Cálculo:

4	Acho difícil seguir à risca um horário para estudar Cálculo:
5	Faço com capricho as tarefas de casa descritas pelo professor de Cálculo:
6	Nas aulas de Cálculo, tomo notas para usá-las quando for estudar depois:
7	Costumo deixar para estudar Cálculo apenas nas vésperas das provas:
8	Normalmente ando em dia com as tarefas escolares de Cálculo:
9	Mesmo quando os conteúdos de Cálculo são desinteressantes, eu me dedico a aprender tudo até dar conta:
10	Em Cálculo eu só quero ter desempenho de alta qualidade:
11	Quando não faço alguma tarefa de Cálculo prescrita, fico pensando em alguma desculpa:
12	Quando vejo que uma matéria de Cálculo é difícil, eu estudo só as partes mais fáceis:
13	Eu faço todas as leituras exigidas pelo professor de Cálculo:
14	Quase para cada prova de Cálculo eu acabo estudando afobado, por causa do curto tempo:
15	Para os estudos de Cálculo eu aproveito bem o tempo que tenho fora das aulas:
16	Quando decido estudar Cálculo, reservo um bom tempo para isso e não largo fácil:
17	Vou estudando a matéria, mesmo que a prova de Cálculo não esteja próxima.
18	Eu estudo mais Cálculo do que minha obrigação:
19	Venho para as aulas de Cálculo sem ter lido nada sobre a matéria a ser dada:
20	Costumo ficar tanto tempo com meus amigos que acabo prejudicando os estudos de Cálculo:

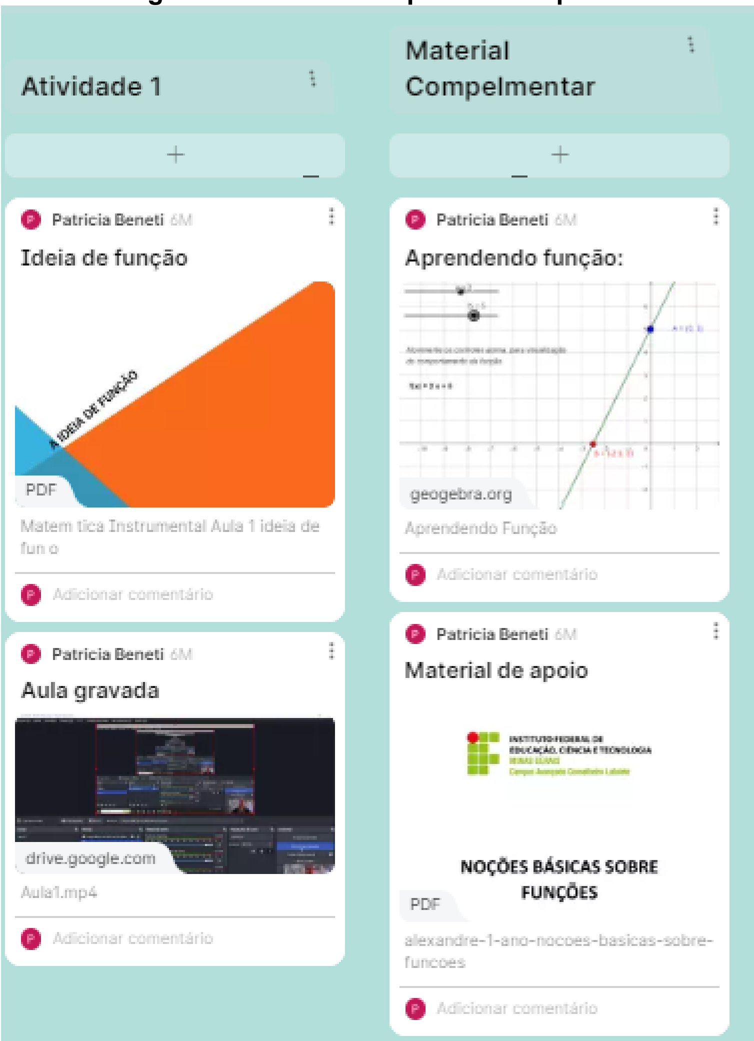
Fonte: Autoria própria (2024)

Para cada questão foi inserida cinco itens da escala Likert indicadas pelos termos: 1- Nada verdadeiro; 2 - Um pouco verdadeiro; 3 - Meio verdadeiro; 4 - Bastante verdadeiro; 5 - Totalmente verdadeiro.

Além disso, foram postadas as sequências de atividades e materiais complementares que descreveremos a seguir:

Atividade 1: nessa atividade foi elaborado um material em slides para conceituar sobre funções, posteriormente foi gravado uma vídeo aula com duração de 11’35” (disponibilizada no link https://drive.google.com/file/d/1SlGyBKmxV9WrV8YJID2vfyf6sESa9xhR/view), também foi inserido dois materiais complementares, sendo o primeiro uma integração com objeto didático disponibilizado no geogebra.org sobre função afim e o segundo um e-book sobre noções básicas de funções que traz os conceitos, exemplos e proposta de atividades complementares. Segue o print dessa postagem:

Figura 3 – Atividade 1 postada no padlet

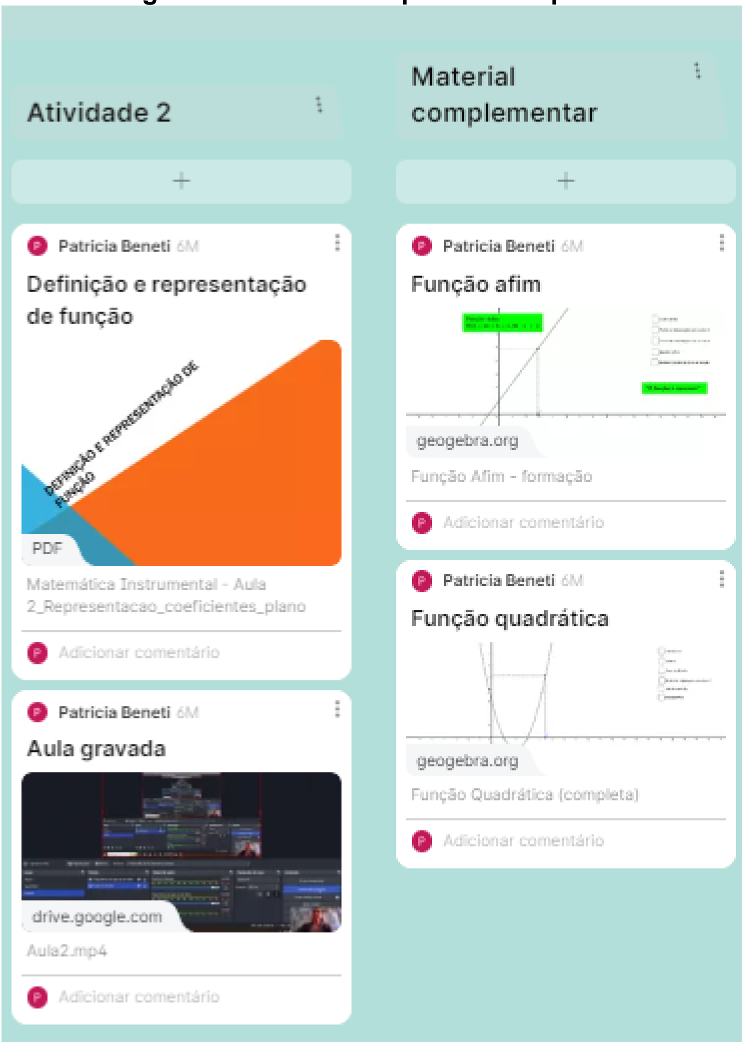


Fonte: Autoria própria (2024)

Esta primeira atividade tem como propósito recordar a relação de grandezas dependentes e independentes, identificar a grandeza vinculada a representatividade de x e a grandeza vinculada a representatividade de y.

Atividade 2: nessa atividade foi elaborado um material em slides para relacionar a definição e representação de função, posteriormente foi gravado um vídeo de 15'25" (disponibilizada no link https://drive.google.com/file/d/1T-uOJpFaQSrEOwhN4MdIEU3wKC4-0jz9/view) e inserido dois objetos didáticos do geogebra.org sobre função afim e função quadrática. Segue o print dessa postagem.

Figura 4 – Atividade 2 postada no padlet

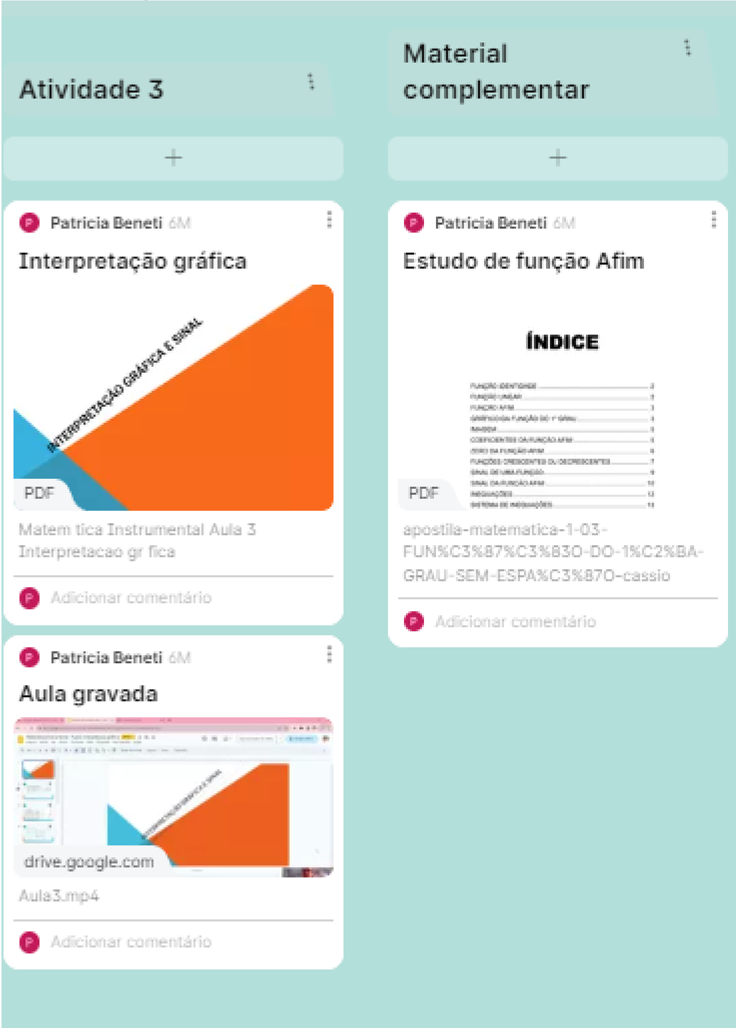


Fonte: Autoria própria (2024)

Este segundo momento tem como característica apresentar a definição de função, através da construção de sua lei de formação, identificando o par ordenado (x,y) que compõe sua solução, e sua representatividade no plano cartesiano. Sugerimos o trabalho com a função afim, e iniciamos a compreensão da função de segundo grau.

Atividade 3: nessa atividade foi elaborado um material em slides para realizar a interpretação gráfica de funções, posteriormente foi gravado um vídeo de 9’30” (disponibilizada no link https://drive.google.com/file/d/16z3AeEfwT8PHSuMwuAGjK2YlbRgbhrEm/view).. Além disso, foi disponibilizado um material complementar de um e-book sobre o estudo de função afim. Vejamos o print dessa postagem:

Figura 5 – Atividade 3 postada no padlet

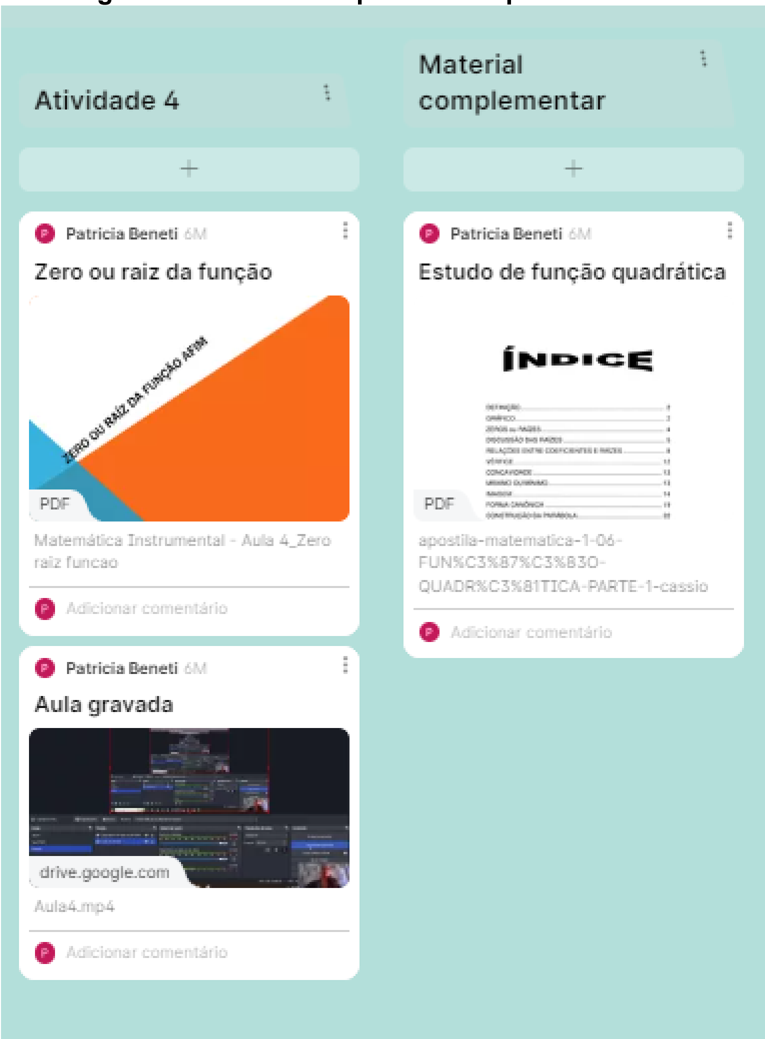


Fonte: Autoria própria (2024)

Neste momento, a intenção é verificar as possíveis representações da função afim, formando uma reta crescente e uma decrescente, o comportamento do coeficiente linear da reta (b) e o comportamento do coeficiente angular da reta (a). Bem como a resolução de uma questão do ENEM 2021, envolvendo a interpretação de informação, a construção de uma função de segundo grau e sua interpretação gráfica a partir do valor estipulado para x.

Atividade 4: nessa atividade foi elaborado um material em slides para conceituar o zero ou a raíz de uma função, posteriormente foi gravado um vídeo de 6’08” (disponibilizada no link https://drive.google.com/file/d/11aqvfZRfeL0SPCF6xcs9BAopne97r4wm/view) e inserido um material complementar de um e-book sobre o estudo de função quadrática. Vejamos o print:

Figura 6 – Atividade 4 postada no padlet

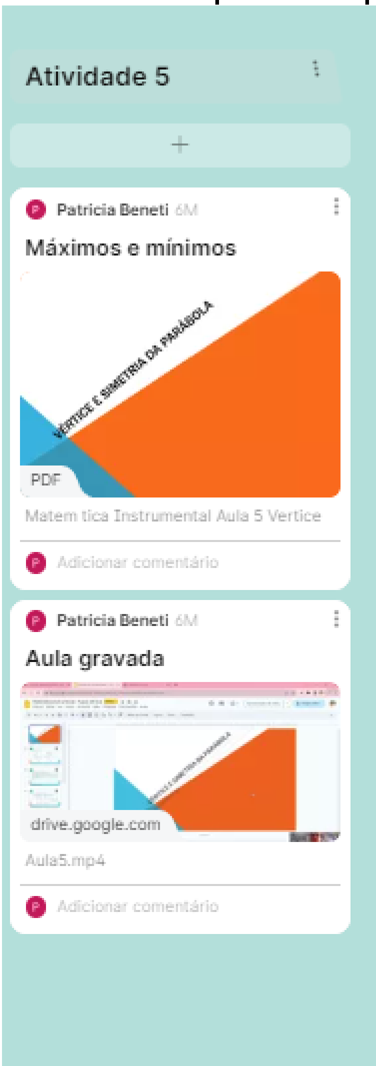


Fonte: Autoria própria (2024)

Outro conceito apresentado nas questões do ENEM, e utilizado na interpretação gráfica das questões selecionadas, é a raiz ou zero da função: quando um elemento x do domínio tem imagem igual a zero. Desta maneira, abordamos como calcular a raiz da função afim, e como retirar esta informação a partir da análise gráfica.

Atividade 5: nessa atividade foi elaborado um material em slides para conceituar máximo e mínimos de funções e gravado um vídeo de 9’16” (disponibilizada no link https://drive.google.com/file/d/1JyEmmU5sfmQpMC6o1TCHyNomrQi7sN4J/view). Foram conceituados as coordenadas do vértice x_v e y_v. O valor máximo (mínimo) de uma função qualquer é o maior (menor) valor de imagem que a função possui. No caso da função quadrática, o valor máximo (mínimo) é o y_v, pois o vértice é um extremo da função quando o domínio é o conjunto dos reais. Quando a função do 2º grau tem concavidade para cima, ocorre um valor mínimo e, quando a concavidade ocorre para baixo, temos um valor máximo.

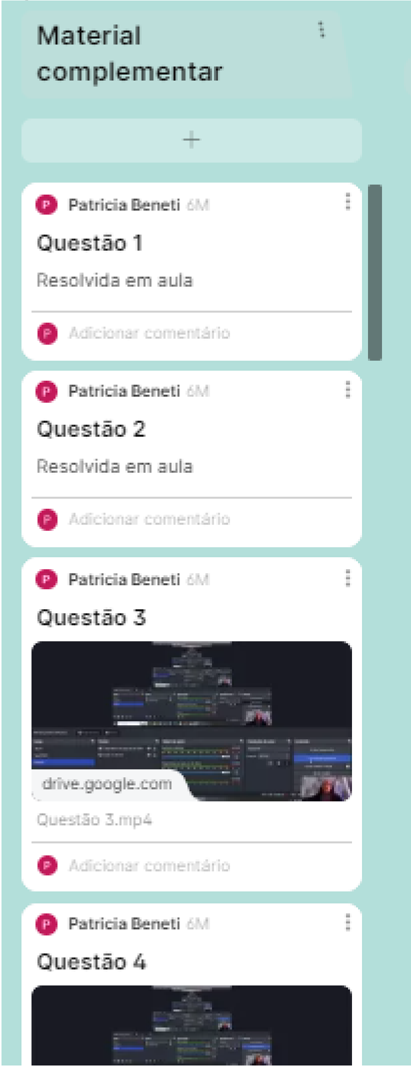
Figura 7– Atividade 5 postada no padlet



Fonte: Autoria própria (2024)

Nos materiais complementares realizamos a gravação de videoaulas com as resoluções das questões aplicadas na avaliação diagnóstica para que os estudantes sanassem as principais dúvidas referente as questões selecionadas. Vejamos um print dessa postagem.

Figura 8 – Material complementar



Fonte: Autoria própria (2024)

Também foi complementado um segundo questionário por meio do *google forms* para que o estudante realizasse uma autoavaliação sobre o seu desempenho com o uso do ambiente virtual, indicado no quadro 2 a seguir:

Quadro 2- Questionário para autoavaliação

Nota indicada em uma escala de 1 a 5	Questão dicursiva sobre o indicador
Nota para META	Sobre a sua meta: procurei entender bem os conteúdos ou simplesmente fiz o mínimo para tirar a nota suficiente
Nota para EMPENHO	Sobre o seu empenho: esforcei-me em ler a teoria e

	resolver os problemas indicados pelo professor de Cálculo ou esperei que ele passasse poucos exercícios e não pedisse nenhuma tarefa extra.
Nota para IMPORTÂNCIA	Sobre a importância dada: procurei aprender o máximo ou me contentei em aprender o mínimo para não ser reprovado.
Nota para SENTIDO	Sobre o sentido: Por que devo estudar Cálculo? Encontrei algum sentido, alguma justificativa para mim mesmo, para estudar Cálculo?
Nota para ESTRATÉGIA DE ESTUDO	Procurei ter uma estratégia de estudo para esta disciplina (fiz esquemas ou diagramas, dividi a matéria em tópicos, escrevi as ideias principais, destaquei os problemas principais, consegui localizar e resolver as minhas dúvidas) ou simplesmente utilizei os exemplos dados em aula de maneira aleatória, procurando memorizar e torcer para que caísse aquela questão na prova.
Nota para TRABALHO pedido pelo PROFESSOR	Quando fiz um trabalho pedido pelo professor, procurei fazer a relação entre o que estava fazendo com o que estava aprendendo nas aulas ou simplesmente procurei ver o que os meus colegas estavam escrevendo para que eu também pudesse escrever algo e o professor não me desse uma nota baixa.
Nota para CÁLCULO COM O DIA A DIA	Eu tentei relacionar o que estava aprendendo em Cálculo com o que vejo no dia a dia ou simplesmente só fiquei preocupado em memorizar bem o que o professor poderia pedir na prova.
Nota para PLANEJAMENTO	Faço um planejamento do meu tempo para estudar Cálculo bem antes das provas e consigo seguir o que planejei, leio algo sobre a matéria a ser dada antes das aulas?

Fonte: Autoria própria (2024)

4 CONCLUSÕES

Esta proposta de autoestudo foi elaborada com a intenção de fornecer uma base sólida em cálculo diferencial e integral, essencial para a formação de engenheiros. Cada aula foi projetada para ser prática e contextualizada, facilitando a aplicação dos conceitos matemáticos a problemas reais.

A integração de práticas pedagógicas refletidas e planejadas é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio matemático. A estruturação das aulas permite uma progressão lógica dos conceitos, desde a introdução de funções até a análise gráfica e interpretação de raízes e vértices de funções quadráticas. Essa abordagem gradual e bem definida ajuda os alunos a construir uma base sólida de conhecimento, essencial para resolver problemas complexos nas engenharias.

A motivação estudantil é um fator crítico para o sucesso acadêmico. A proposta de autoestudo busca aumentar o engajamento dos alunos através de materiais interativos e contextualizados. A utilização de exemplos práticos e a resolução de problemas reais tornam o aprendizado mais relevante e interessante. Além disso, a flexibilidade do autoestudo permite que os alunos gerenciem seu tempo de maneira eficiente, aumentando a autonomia e responsabilidade pelo próprio aprendizado.

O uso de tecnologia no ensino de cálculo diferencial e integral é um diferencial significativo desta proposta. Ferramentas tecnológicas, como softwares de matemática e plataformas de vídeo, são utilizadas para criar recursos interativos que facilitam a compreensão de conceitos complexos. Por exemplo, a visualização de gráficos e o uso de simulações podem tornar o aprendizado de limites e derivadas mais acessível e envolvente. A tecnologia também permite que os alunos explorem conceitos de maneira prática e dinâmica, reforçando o aprendizado.

As avaliações adaptativas proporcionam feedback imediato e personalizado, ajudando os alunos a identificar e corrigir suas dificuldades de forma mais eficiente. Este tipo de avaliação é essencial para o autoestudo, pois permite que os alunos recebam orientação constante, mesmo sem a presença física de um professor. A utilização de plataformas que oferecem quizzes e exercícios com correção automática facilita esse processo, promovendo um aprendizado contínuo e direcionado às necessidades individuais de cada aluno.

A proposta de autoestudo apresentada pode ser continuamente aprimorada com a incorporação de estudos de casos mais complexos e a integração de tecnologias avançadas. A utilização de realidade aumentada e virtual, por exemplo, pode proporcionar experiências de aprendizado imersivas, tornando conceitos abstratos mais tangíveis. Além disso, a inclusão de projetos interdisciplinares pode ajudar os alunos a verem a aplicação prática do cálculo em diferentes áreas da engenharia.

A metodologia adotada neste trabalho se baseia em estratégias educacionais contemporâneas que combinam ensino tradicional com ferramentas tecnológicas avançadas. Ao longo das aulas, foram utilizados vídeos explicativos, materiais de apoio detalhados e atividades práticas que promovem a autonomia do aluno. Este formato não só atende às necessidades dos estudantes, mas também permite uma flexibilidade maior no processo de aprendizagem, essencial para os alunos de engenharia que frequentemente têm horários acadêmicos e pessoais apertados.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 14 mar. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Parecer **CNE/CES Nº: 1/2019**. Brasília, 2019. Disponível em http://portal.mec.gov.br/docman/marco-2019-pdf/109871-pces001-19-1/file . Acesso em: 14 mar. 2022.

GRAVEMEIJER, K.P.E. ; COBB, P.**Design research from a learning design perspective**. Educational Design Research. . London : Taylor and Francis Ltd., 2006. pp. 45-85

IMBERNÓN, F. **Formação docente e professional: formar-se para a mudança e a incerteza.** 9. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

LIBÂNEO, J. C. **Adeus professor, adeus professor?: novas exigências educacionais e profissão docente**. 13. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

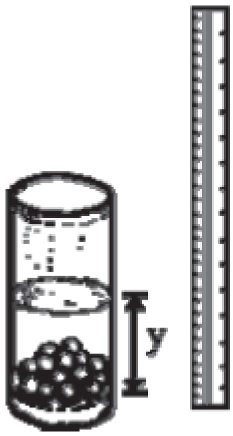
TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 17.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

APÊNDICE A -Avaliação diagnóstica

Aluno(a):____
E-mail: ____
Semestre: ___________________

Questões retiradas das Provas do ENEM – Classificação com competências e habilidades da BNCC em Matemática e suas Tecnologias

1) (ENEM 2009) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br.
Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) $y = 30x$
b) $y = 25x + 20,2$
c) $y = 1,27x$
d) $y = 0,7x$
e) $y = 0,07x + 6$

RESOLUÇÃO

São duas as formas de resolver o exercício exposto, analisando a tabela de dados e a partir das alternativas.
- Pela tabela de dados:
Olhando para as duas variáveis, temos que o nível da água (y) depende da quantidade de bolas (x) colocadas dentro do recipiente. Desta forma, analisando o número de bolas ocorre um aumento a cada 5 unidades, e o nível de água sobe a cada 0,35 cm ao inserirmos 5 bolas dentro do recipiente. Assim, vamos encontrar o valor desta relação para 1 bola.

$$5b = 0{,}35cm$$
$$1b = x$$

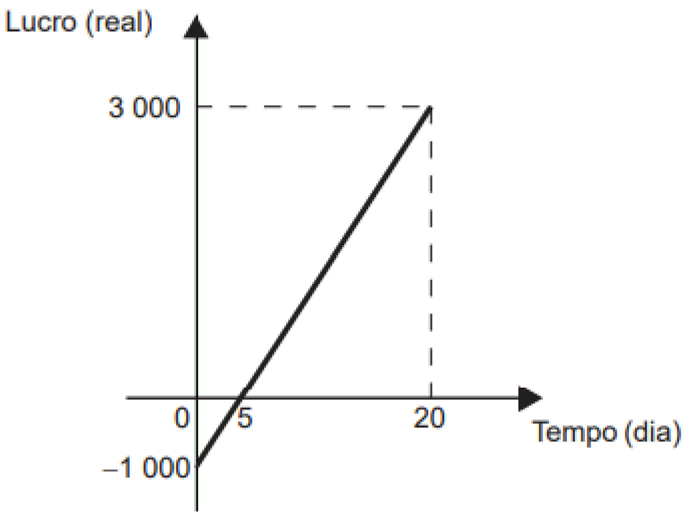
Dividindo a expressão inicial por 5, temos que

$$1b = 0{,}07x$$

Logo, qual é o nível de água ,y, sem nenhuma das bolas (x) dentro?
Seria quando x = 0, usando a estratégia menos 0,35cm, temos que a altura inicial da coluna de água é de 6 cm.
Assim, temos que $y = 6 + 0{,}07x$

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT404, EM13MAT302, EM13MAT501
Resposta	Letra E

2) (ENEM 2017) Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro *(L)* dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.



A representação algébrica do lucro *(L)* em função do tempo *(t)* é

a) $L(t) = 20t + 3\,000$

b) $L(t) = 20t + 4\,000$

c) $L(t) = 200t$

d) $L(t) = 200t - 1\,000$

e) $L(t) = 200t + 3\,000$

RESOLUÇÃO
Ao considerar o problema, devemos analisar o gráfico e retirar algumas informações fazendo uso do conceito de função afim, em que $y = ax + b$, sendo que x é a variável dependente, e b é o valor de deslocamento da função no eixo Y.
A partir da observação, temos o valor de b sendo -1000, devido a sua sobreposição no eixo y, e a partir do cálculo de zero da função onde $x = -\frac{b}{a}$, sendo o valor de b -1000, podemos encontrar o valor que representa a na função afim, sendo $a = -\frac{b}{x}$, sendo o valor de $x = 5$ para quando $y = 0$, logo

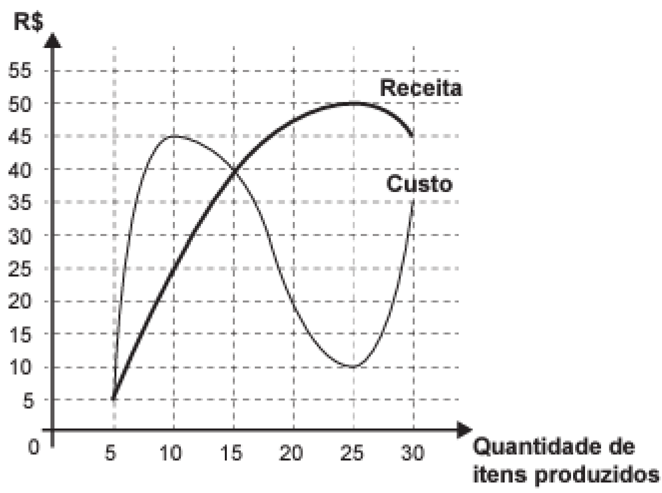
$$a = -\frac{1000}{5} = 200$$

Desta forma, a partir da lei de formação da função afim $y = ax + b$, temos $y = 200x - 1000$, como o gráfico traz o lucro em função do tempo, alteramos nossa variável x por t e reescrevemos a função

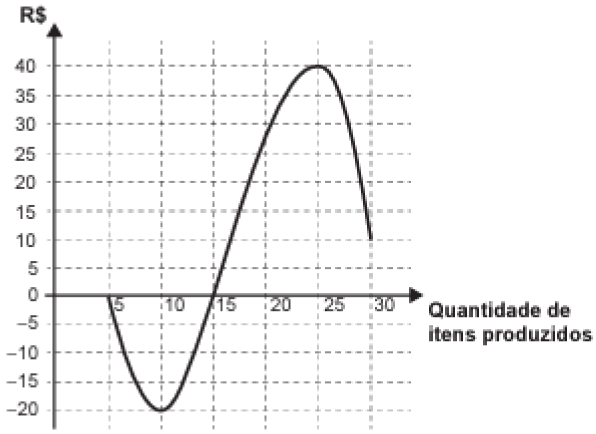
$$L(t) = 200t - 1000$$

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT501
Resposta	Letra D

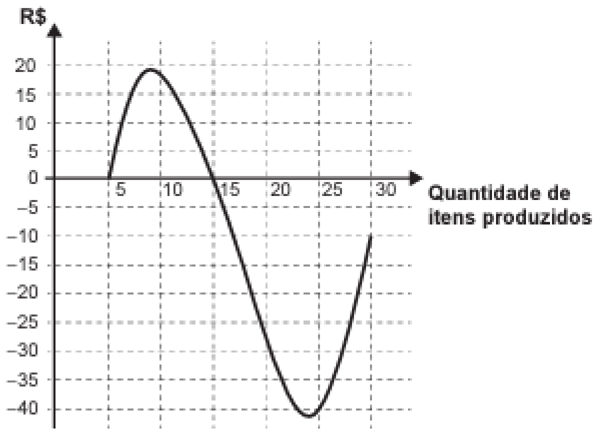
3) (ENEM 2020) Um administrador resolve estudar o lucro de sua empresa e, para isso, traça o gráfico da receita e do custo de produção de seus itens, em real, em função da quantidade de itens produzidos.



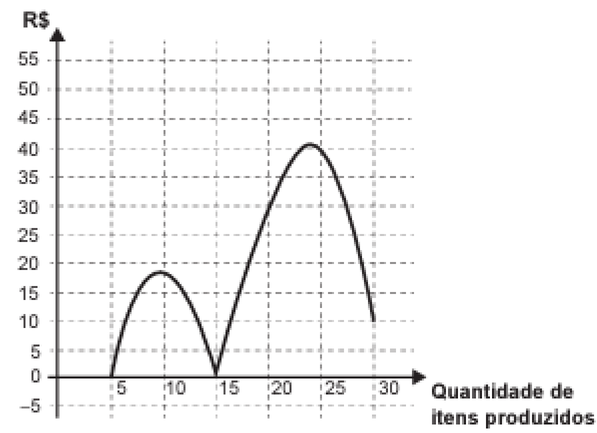
O lucro é determinado pela diferença: Receita – Custo. O gráfico que representa o lucro dessa empresa, em função da quantidade de itens produzidos, é a)


R$
40
35
30
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
5
10
15
20
25
30
Quantidade de itens produzidos

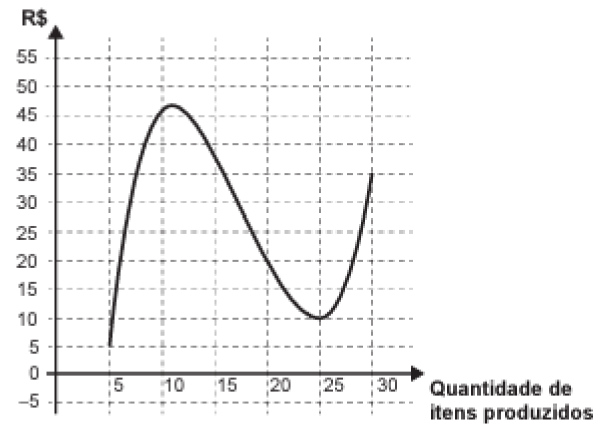
b)


R$
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
−30
−35
−40
5
10
15
20
25
30
Quantidade de itens produzidos

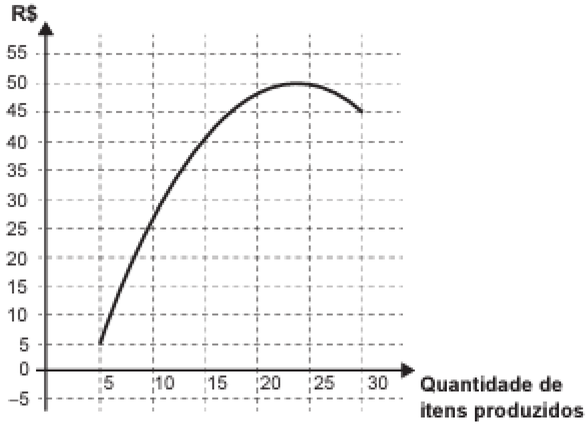
c)


R$
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
−5
5
10
15
20
25
30
Quantidade de itens produzidos

d)


R$
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
−5
5
10
15
20
25
30
Quantidade de itens produzidos

e)



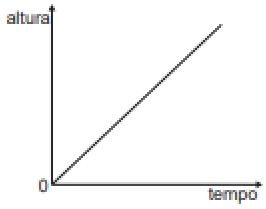
RESOLUÇÃO
É definido pelo gráfico que a representação do lucro é obtido por meio da diferença entre a receita e o custo. Alguns pontos importantes devem ser observados:
- Em até 5 peças produzidas a receita e os custos são iguais e o lucro é ZERO.
- Em até 15 peças produzidas a receita e os custos são iguais e o lucro é ZERO.
- Ponto de intersecção onde o lucro é zero quando atinge a produção de 15 peças
- Entre 5 e 15 peças a curva do custo está sempre acima da curva da receita, gerando um lucro negativo.
- Entre 15 e 30 peças, a curva da receita está acima do custo, gerando lucro positivo.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT101, EM13MAT302
Resposta	Letra A

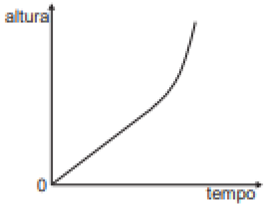
4) (ENEM 2021) O consumo de espumantes no Brasil tem aumentado nos últimos anos. Uma das etapas do seu processo de produção consiste no envasamento da bebida em garrafas semelhantes às da imagem. Nesse processo, a vazão do líquido no interior da garrafa é constante e cessa quando atinge o nível de envasamento.

Qual esboço de gráfico melhor representa a variação da altura do líquido em função do tempo, na garrafa indicada na imagem?

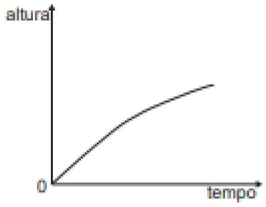
A



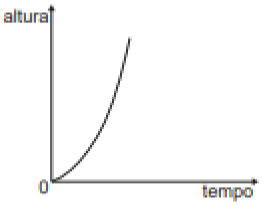
B



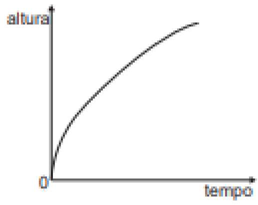
C



D

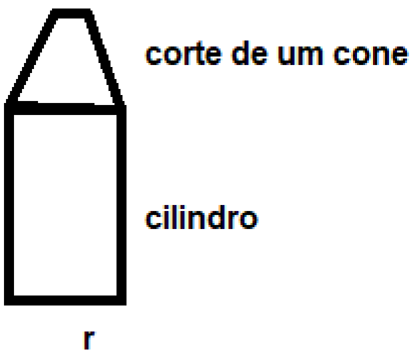


E



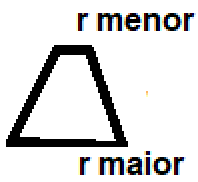
RESOLUÇÃO

Ao considerar o formato da garrafa, temos um cilindro até a parte que será preenchida com o líquido.



O cilindro é composto pelo raio, e deve se observar que o que irá variar é a altura, mantendo o mesmo tamanho do raio. Assim, como a área é constante, teremos um aumento linear do líquido.

Já na parte em que ocorre o corte de um cone, temos um raio maior na parte de baixo e um raio menor na parte de cima, neste sentido a área possui uma variação a depender do raio.

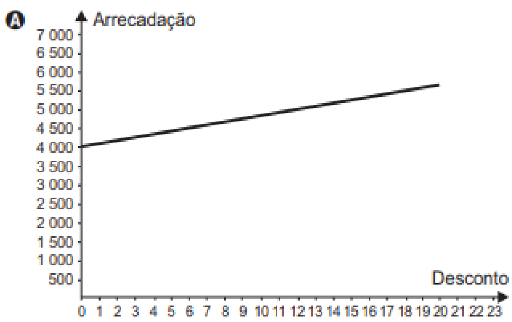


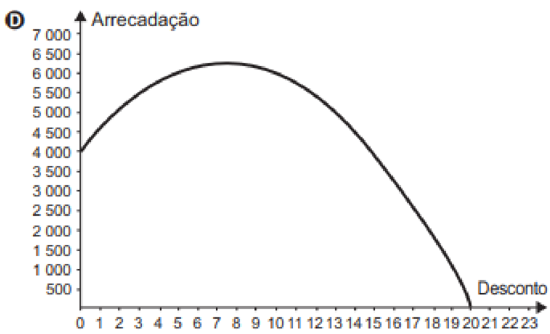
Conforme a área diminui, ao se aproximar do raio menor, temos uma curva ascendente na representação gráfica, por isso a letra B, melhor representa a variação da altura do líquido em função do tempo.

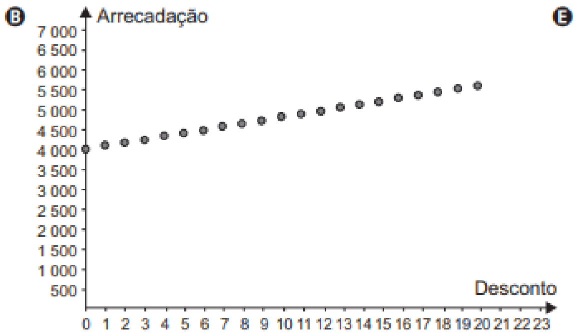
Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT101, EM13MAT506

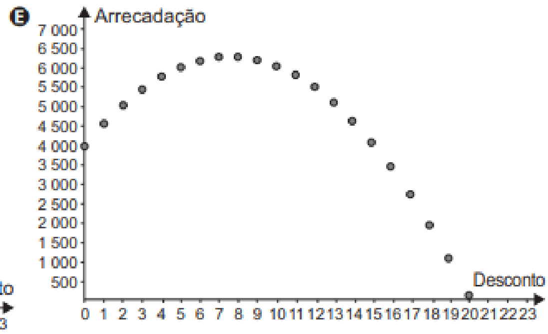
5) (ENEM 2021) O administrador de um teatro percebeu que, com o ingresso do evento a R$ 20,00, um show conseguia atrair 200 pessoas e que, a cada R$ 1,00 de redução no preço do ingresso, o número de pessoas aumentava em 40. Ele sabe que os donos do teatro só admitem trabalhar com valores inteiros para os ingressos, pela dificuldade de disponibilizar troco, e pretende convencê-los a diminuir o preço do ingresso. Assim, apresentará um gráfico da arrecadação em função do valor do desconto no preço atual do ingresso.

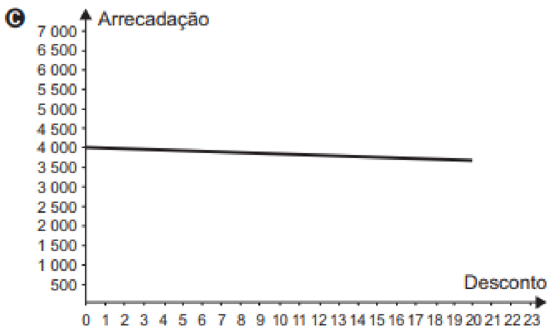
O gráfico que mais se assemelha ao que deve ser elaborado pelo administrador é











RESOLUÇÃO

As informações que podemos relacionar são: o valor do ingresso e a quantidade de pessoas, sendo o valor da arrecadação,

A = 20. 200 = 4000

O valor de 4 mil não auxilia de forma significativa, pois todos os gráficos apresentam o seu inicio em 4 mil. Devemos analisar a indicação do desconto, sendo:

(20-1).(200+40), a cada um real que é descontado do valor do ingresso, tem-se 40 pessoas a mais participando, assim:

(20-2).(200+80)

(20-3).(200+120)

Até um valor aleatório:

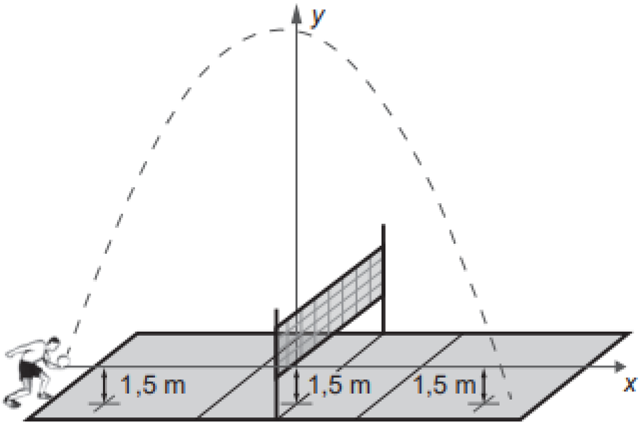
(20-x).(200+40.x) o que nos leva a uma equação de segundo grau, ou seja, uma parábola.

Outra informação relevante, é que os valores dos ingressos são inteiros, pela dificuldade de troco, desta forma não há possibilidade da parábola ser contínua pois teríamos o valor dos ingressos sendo 18,50; quando deveria ser número inteiro 18. Desta forma, a parábola com valores discretos representada do forma pontilhada é a melhor representação da venda dos ingressos em números inteiros.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT101,EM13MAT404, EM13MAT302
Resposta	Letra E

6) (ENEM 2022) Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a

trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio I: 17 m;
- ginásio II: 18 m;
- ginásio III: 19 m;
- ginásio IV: 21 m;
- ginásio V: 40 m.

O saque desse atleta foi invalidado:

a) apenas no ginásio I.

b) apenas nos ginásios I e II.

c) apenas nos ginásios I, II e III.

d) apenas nos ginásios I, II, III e IV.

e) em todos os ginásios.

RESOLUÇÃO

A questão apresenta a análise de uma parábola, onde o y do vértice demonstrará a altura máxima que a bola irá chegar, e precisa-se descobrir em quais ginásios isso irá ocorrer. O ponto de partida em X está a 1,5m do chão, desta forma é necessário somar ao y vértice este valor.

Calculando

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$y_v = -\frac{(b^2 - 4.a.c)}{4a}$$

$$y_v = -\frac{\left(\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 4.\left(-\frac{1}{6}\right).12\right)}{4.\left(-\frac{1}{6}\right)}$$

$$y_v = -\frac{\left(\frac{49}{9} - 4.\left(-\frac{1}{6}\right).12\right)}{4.\left(-\frac{1}{6}\right)}$$

$$y_v = -\frac{\left(\frac{49}{9} - 4.\left(-\frac{1}{\cancel{6}}\right).\overset{2}{\cancel{12}}\right)}{4.\left(-\frac{1}{6}\right)}$$

$$y_v = \frac{\frac{49}{9} + 8}{\frac{4}{6}}$$

$$y_v = \frac{\frac{49}{9} + 8}{\cancel{\frac{4}{6}}} \quad \frac{2}{3}$$

$$y_v = \frac{\frac{49 + 72}{9}}{\frac{2}{3}}$$

$$y_v = \frac{\frac{49 + 72}{\overset{3}{\cancel{9}}}}{\frac{2}{\cancel{3}}}$$

$$y_v = \frac{121}{3}.\frac{1}{2} = \frac{121}{6} = 20 + \frac{1}{6}$$

Considerando que o x inicia em 1,5 devemos somar ao resultado, ficando

$$y_v = 20 + \frac{1}{6} + 1{,}5 = 21{,}5 + \frac{1}{6}$$

Desta maneira, temos que o teto dos ginásios I, II, III, e IV serão atingidos seus tetos.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT101, EM13MAT404, EM13MAT302
Resposta	Letra D

7) (ENEM 2017) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

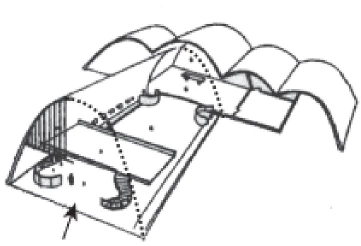


Figura 1

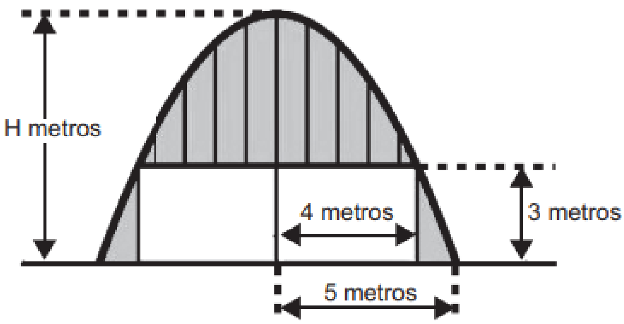


Figura 2

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

$a)\ \frac{16}{3}$

$b)\ \frac{31}{5}$

$c)\ \frac{25}{4}$

$d)\ \frac{25}{3}$

$e)\ \frac{75}{2}$

RESOLUÇÃO

Na representação gráfica, deve-se considerar a sobreposição do plano cartesiano e a demarcação das raízes, como é uma parábola temos dois momentos 5 e -5 em x. A curvatura máxima da parábola, será a maior altura que podemos atingir, e que deverá ser calculada.

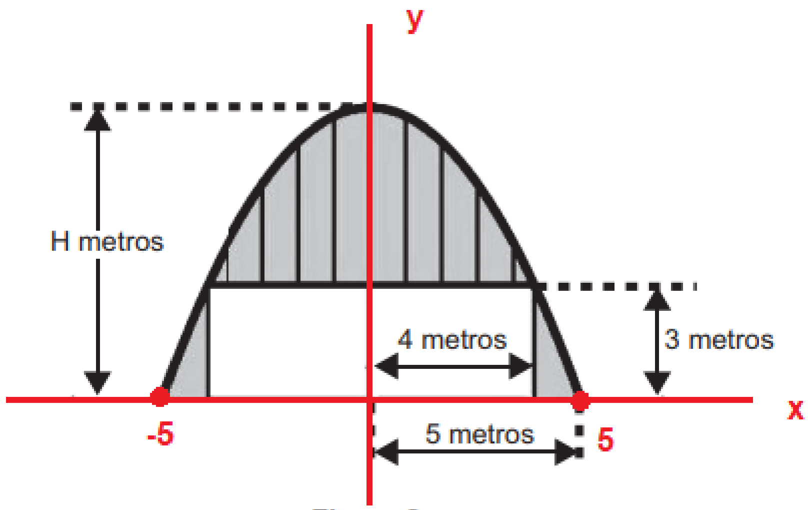


Figura 2

É preciso lembrar a forma fatorada à equação de segundo grau:

$$Y = a(x - x')(x - x'')$$

Aplicando as raízes

$$Y = a(x - 5)(x + 5)$$

Com as informações adicionais de um ponto demarcado na parábola, em que $x = 4$ e $y = 3$, vamos descobrir o valor de a

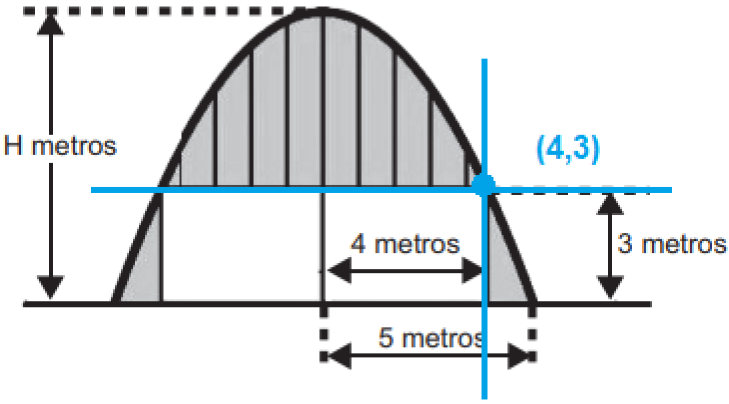


Figura 2

$$3 = a(4-5)(4+5)$$
$$3 = a(-9)$$
$$a = -\frac{3}{9}, simplificando -\frac{1}{3}$$
$$Substituindo\ na\ equação$$
$$Y = -\frac{1}{3}(x-5)(x+5)$$

Como a altura máxima está sob o eixo y e o valor para x no ponto mais alto é 0, substituimos na expressão, vamos calcular o y do vértice

$$y_v = -\frac{1}{3}(0-5)(0+5)$$
$$y_v = -\frac{1}{3}(-5)(5) = \frac{25}{3}$$

Assim, a altura máxima é de $\frac{25}{3}m$.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT101, EM13MAT404, EM13MAT302
Resposta	Letra D

8) (ENEM 2014) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas y = f(x), da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função y = f(x) a ser utilizada pelo professor é

$a)\ y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

$b)\ y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

$c)\ y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

$d)\ y = \frac{4}{5}x + 2$

$e)\ y = x$

RESOLUÇÃO

Temos que $f(x) = ax^2 + bx + c$ é a função que muda da nota *x* para a nota f(x). Assim, temos:

$$f(0) = a.0^2 + b.0 + c = 0, logo, c = 0$$

Desta forma, observa-se que sendo o c = 0, ele não irá aparecer na função.

Para a nota igual a 10

$$f(10) = a.10^2 + b.10 + c = 10$$

Simplificando todos por 10, temos

$$10.a + b = 1$$

Agora quando a nota for 5, deverá virar nota 6

$$f(5) = a.5^2 + b.5 + c = 6$$
$$25.a + 5.b = 6$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 10.a + b = 1 \\ 25a + 5b = 6 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 10.a + b = 1(x5) \\ 25a + 5b = 6 \end{cases}$$
$$-\begin{cases} 50.a + 5b = 5 \\ 25a + 5b = 6 \end{cases}$$
$$25a = -1$$
$$a = -\frac{1}{25}$$

Para encontrar o b, substituindo na primeira equação

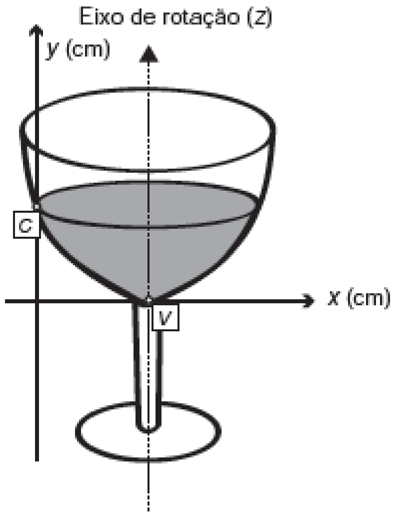
$$10\left(-\frac{1}{25}\right) + b = 1$$
$$b = 1 + \frac{2}{5}$$
$$b = \frac{7}{5}$$

Logo, a função f(x) é dada por:

$$a)\ y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$$

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT404, EM13MAT302, EM13MAT301
Resposta	Letra A

9) (ENEM 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}|x^2| - 6x + C$ onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.
Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

a) 1
b) 2
c) 4
d) 5
e) 6

RESOLUÇÃO
Temos as seguintes informações na imagem, C é a altura do líquido que desejamos descobrir, e V é o vértice da parábola sob o eixo x. Assim, podemos fazer uso do x do vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2.\frac{3}{2}} = 2$$

Com esta informação, tenho que o ponto V está em (2,0).
Com o valor de x, substituo na função

$$f(2) = \frac{3}{2}|2^2| - 6x + C = 0$$
$$6 - 12 + c = 0$$
$$C = 6$$

Altura é de 6 centímetros. Resposta Letra E.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT404, EM13MAT302

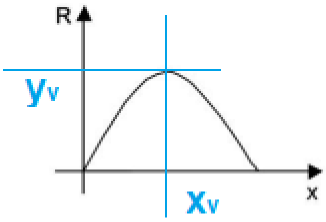
10) (ENEM 2000) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de prorrogação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:
$R(x) = k.x.(P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato.
Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44.000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a) 11.000.
b) 22.000.
c) 33.000.
d) 38.000.
e) 44.000.

RESOLUÇÃO
Já que o enunciado apresenta o público alvo de 44.000 pessoas, substituímos na expressão

$$R(x) = k.x.(P - x)$$
$$R(x) = 4000k.x.- kx^2$$

Precisamos identificar a quantidade de pessoas que conhecem o boato no momento em que ele está se propagando com a máxima rapidez



Assim, precisamos encontrar a coordenada em y vértice que nos dá a rapidez de propagação do boato, e a coordenada x indica a quantidade de pessoas que conhecia o boato nesse momento, sendo o que desejamos encontrar:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-44000k}{-2k} = 22.000$$

Resposta letra b.

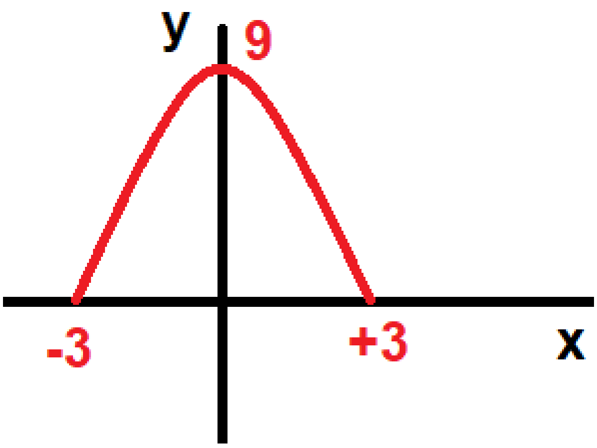
Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT502, EM13MAT404, EM13MAT302

11) (ENEM 2016) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão.

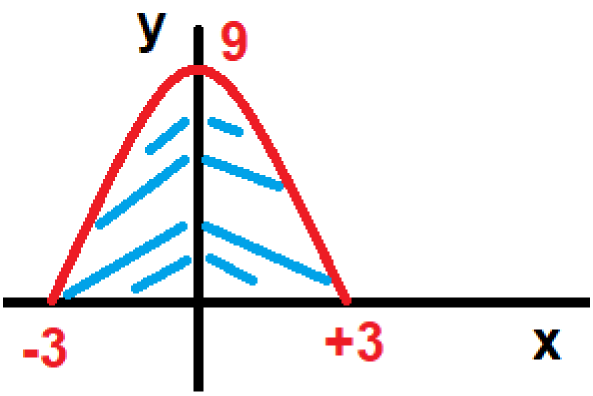
Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:
$y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros.
Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?
a) 18
b) 20
c) 36
d) 45
e) 54
RESOLUÇÃO
Como a equação de segundo grau apresentada está incompleta, sem o termo bx, podemos encontrar as raízes da função, igualando a zero:

$$0 = 9 - x^2$$
$$x = \sqrt{9} = \mp 3$$

Representando, para x=0, y=9 temos:



Calculando a área do retângulo, é $\frac{2}{3}(BxH),$ assim, temos a área sob a parábola



$$A = \frac{2}{3}(6x9) = 36m^2$$

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT506
Resposta	Letra C

12) (ENEM 2013) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a:
a) 4
b) 6
c) 9
d) 10
e) 14

RESOLUÇÃO

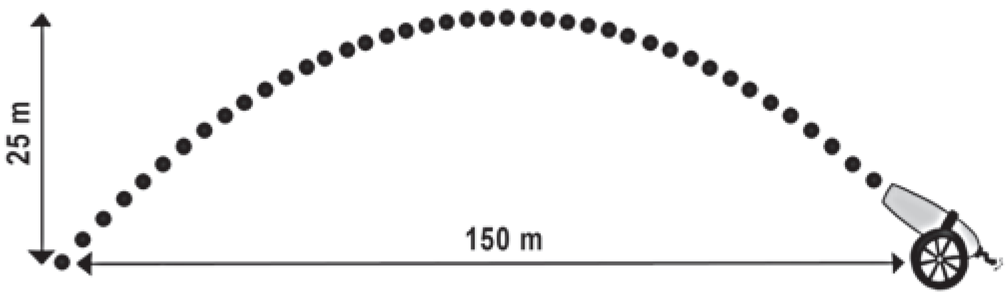
Como deseja-se o lucro máximo, e o x é a quantidade de bonés a ser vendido, temos o cálculo do x do vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2.(-1)} = 6$$

Cada pacote serão colocados 6 bonés. Letra B

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT503

13) (ENEM 2018) Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.



Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto (150; 0) e que o projétil atinge o solo no ponto (0; 0) do plano xy. A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é

$a)\ y = 150x - x^2$
$b)\ y = 3750x - 25x^2$
$c)\ 75\,y = 300x - 2x^2$
$d)\ 125\,y = 450x - 3x^2$
$e)\ 225\,y = 150x - x^2$

RESOLUÇÃO:

Como devemos considerar uma parábola, partimos da equação a partir de suas raízes:

$$y = a(x - x')(x - x'')$$

Para as duas raízes, x' = 0 e x'' = 150

$$y = a(x - 0)(x - 150)$$
$$y = ax\,(x - 150)$$

Dessa forma, na metade do percurso, ela atinge sua altura máxima, onde f(75) = 25, assim:

$$f(75) = a\,(75)^2 - 150.a.75$$
$$25 = 5625a - 11250a$$
$$a = -\left(\frac{25}{5625}\right) = -\frac{1}{225}$$

Substituindo o valor de a na equação, temos que:

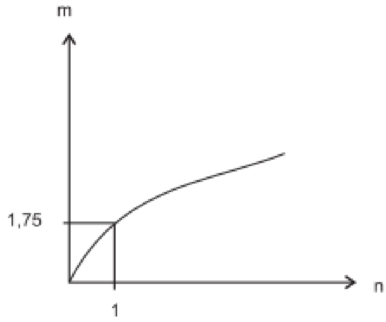
$$y = -\frac{x^2}{225} + \frac{150x}{225}$$

Multiplicando todos os itens por 225, temos: $225y = 150x - x^2$.

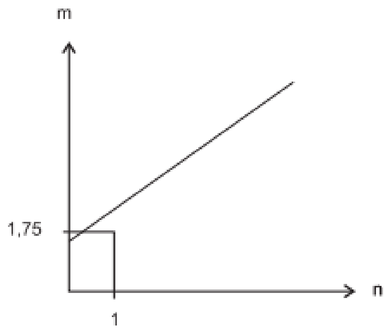
Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT502, EM13MAT302
Resposta	Letra E

14) (ENEM 2011) As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma. Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é

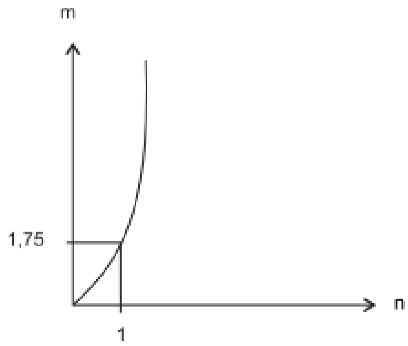
A



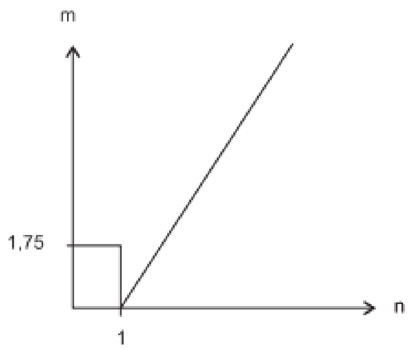
B



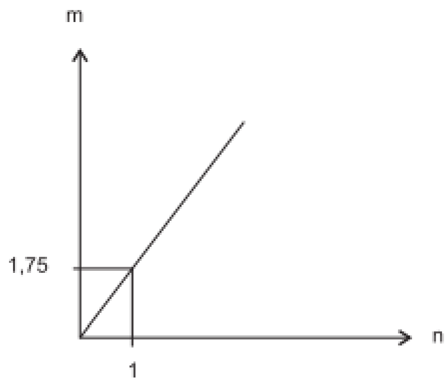
C



D



E



RESOLUÇÃO

Considerando que o valor por kilo é de 1,75, temos a indicação da função

$$f(n) = 1{,}75n.$$

Quando eu não comprar nenhuma fruta, ou seja, 0 kilos, não gasto nada, por isso minha função terá o ponto inicial em (0,0). Sendo o expoente em n igual a 1, a função é de primeiro grau, com indice crescente conforme aumenta a quantidade de kilos comprada. Assim, a melhor representação é a Letra E.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT510, EM13MAT404, EM13MAT302
Resposta	Letra E

15) (ENEM 2011) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada. Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) $100n + 350 = 120n + 150$
b) $100n + 150 = 120n + 350$
c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$
d) $100(n + 350\,000) = 120(n + 150\,000)$
e) $350(n + 100\,000) = 150(n + 120\,000)$

RESOLUÇÃO
Como temos duas empresas, teremos duas expressões:
Sobre o trabalho de cada empresa, teremos $T1(n) = 100.000n + 350.000$
Para a empresa 2, temos $T2(n) = 120.000n + 150.000$

Teremos valores indiferentes, quando houver a igualdade entre as empresas.

$$T1(n) = T2(n)$$
$$100.000n + 350.000 = 120.000n + 150.000$$

Simplificando a expressão por 1000, temos $100n + 350 = 120n + 150$.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT302
Resposta	Letra A

APÊNDICE B -Avaliação pós-autoestudo

Aluno(a): ____
Email: ____
Semestre: ________________

Questões retiradas das Provas do ENEM – Classificação com competências e habilidades da BNCC em Matemática e suas Tecnologias

1) (ENEM 2011) O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).
Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

a) $y = 4.300x$
b) $y = 884.905x$
c) $y = 872.005 + 4.300x$
d) $y = 876.305 + 4.300x$
e) $y = 880.605 + 4.300x$

RESOLUÇÃO
Ao ler o problema fica claro que o valor ao qual ocorrerá a variação de vagas é de 4300 vezes o mês, representado por x, ficando $4300.x$ para representar o total de trabalhadores com carteira assinada.
O número de trabalhadores disponibilizado 880605 corresponde ao mês de fevereiro, portanto quando o valor de x for igual a 2. Desta forma, devemos retirar duas vezes o incremento de 4300 trabalhadores do valor total de fevereiro, para encontrar o valor inicial sem os incrementos dos meses do ano.

$$2\,x\,4.300 \ = \ 8.600$$
$$880.605 - 8.600 = 872.005$$

Logo, a expressão algébrica que representa o saldo de contratações, mês a mês, durante o ano é:

$$y \ = \ 872.005 \ + \ 4300.x$$

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT404, EM13MAT302
Resposta	Letra C

2) (ENEM 2019) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas.

Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado. Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

a) $y = 80x + 920$
b) $y = 80x + 1000$
c) $y = 80x + 1080$
d) $y = 160x + 840$
e) $y = 160x + 1000$

RESOLUÇÃO
Primeiro ao analisar o enunciado não identificamos a quantidade de funcionários, mas um deles é gerente, ou seja, $x - 1$ são os funcionários que trabalham 2 dias por semana, ganhando R$ 80,00 cada dia. Da expressão inicial temos:

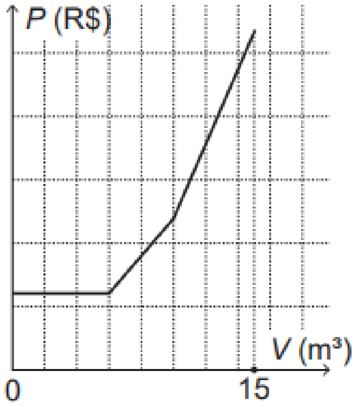
$$y = 1000 + 160(x - 1)$$
$$y = 1000 + 160x - 160$$
$$y = 160x + 840$$

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT302
Resposta	Letra D

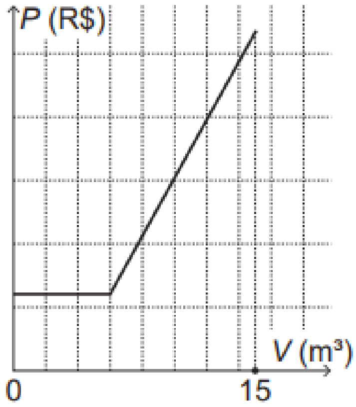
3) (ENEM 2019) Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

• Faixa 1: para consumo de até 6 m3, valor fixo de R$ 12,00;
• Faixa 2: para consumo superior a 6 m3 e até 10 m3, tarifa de R$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder a 6 m3;
• Faixa 3: para consumo superior a 10 m3, tarifa de R$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder a 10 m3. Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 15 m3 por mês.
O gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumido, em metro cúbico, é

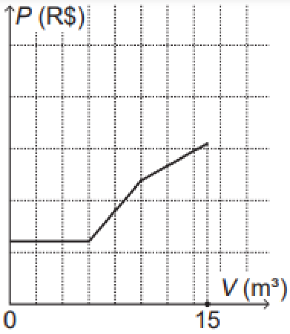
A



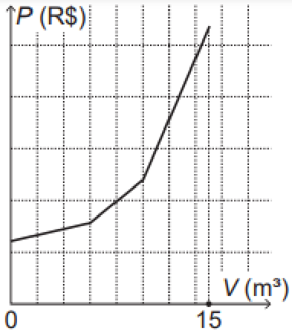
D



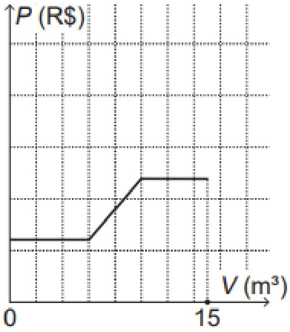
B



E



C



RESOLUÇÃO

Devemos considerar as faixas informadas no enunciado para a análise. A faixa 1 apresenta valor constante até 6 m^3, independente se consumir 1, 2, 3... sucessivamente até 6 metros cúbicos, o valor será de R$ 12,00 reais. Logo, temos um percurso constante em linha horizontal no gráfico.

Em análise das divisões gráficas temos demarcações inteiras até o meio para completar 15 m³ sendo o valor médio de consumo informado, assim para cada demarcação temos o consumo de 2 m^3, a imagem da letra A indica essa constante até o momento de 6 m^3, após a segunda faixa quando ultrapassar 6 m^3 até 10 m^3 a tarifa é de R$ 3,00 por metro que exceder o 6m^3, então tivemos um aumento do valor, sendo um valor crescente. Na terceira faixa 3, para um consumo superior de 10 m^3 até o limite de R$ 15,00, é o dobro de R$ 3,00 que estava cobrando antes, o gráfico ficará mais inclinado. O que atende essa condição é a Letra A.

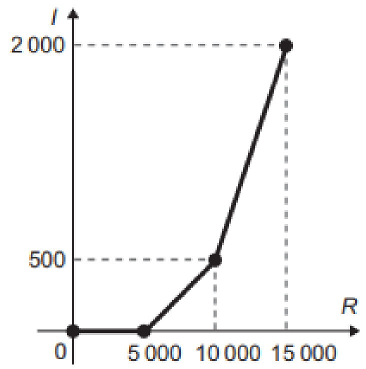
Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT101, EM13MAT503, EM13MAT501

4) (ENEM 2021) O quadro representa a relação entre o preço de um produto (R) e seu respectivo imposto devido (I).

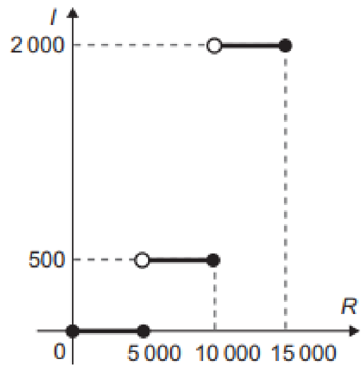
Preço do produto (R)	Imposto devido (I)
$R \leq 5\,000$	isento
$5\,000 < R \leq 10\,000$	10% de ($R - 5\,000$)
$10\,000 < R \leq 15\,000$	$500 + 30\%$ de ($R - 10\,000$)

O gráfico que melhor representa essa relação é

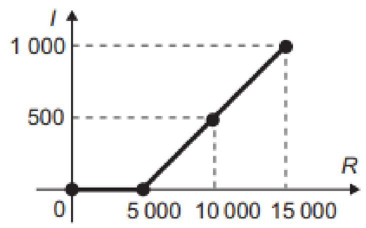
A



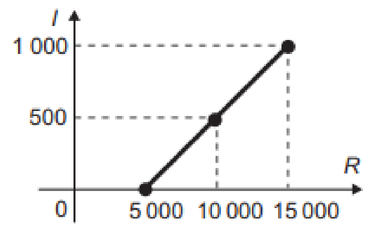
D



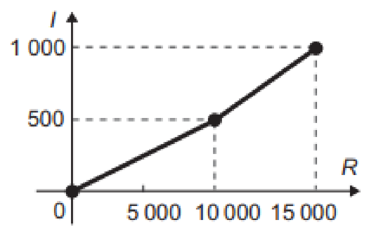
B



E



C



RESOLUÇÃO

A questão trabalha a compreensão em três níveis numéricos o imposto devido pelo produto. Desta forma, é preciso analisar cada um dos níveis até o seu valor máximo para representar graficamente a variação.

Na primeira faixa, até o valor de 5.000, o valor do imposto é isento, assim, não temos variação no eixo y, ficando a reta paralela constante sob o eixo x, até o limite de 5 mil.

A segunda faixa, que varia o valor do produto de 5 mil até 10 mil, o seu limite é 10 mil. Aplicando ao cálculo do imposto, temos:

$$10\%(R - 5000)$$

$$0{,}1.(10000 - 5000) = 500$$

Sendo assim, o valor total do imposto devido na segunda faixa passa a ser no máximo de 500, temos uma reta ascendente até este valor.
Para a terceira faixa, o valor máximo do produto é de R$ 15 mil. Aplicando ao cálculo do imposto:

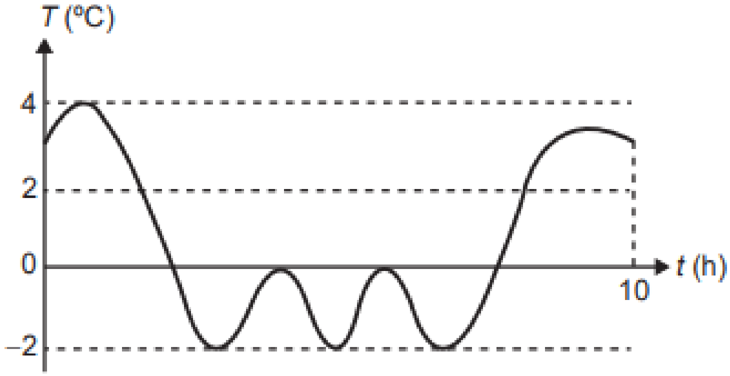
$$500 + 30\% (R - 10000)$$

$$500 + 0{,}3(15000 - 10000) = 500 + 1500 = 2000$$

Sendo assim, de 10 mil até o limite de 15 mil, o valor do imposto salta exponencialmente de 500 até 2000 mil reais, novamente uma reta ascendente.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT101, EM13MAT404, EM13MAT50, EM13MAT510,
Resposta	Letra A

5) (ENEM 2022) Uma máquina em operação tem sua temperatura T monitorada por meio de um registro gráfico, ao longo do tempo t. Essa máquina possui um pistão cuja velocidade V varia com a temperatura T da máquina, de acordo com a expressão V = T² − 4. Após a máquina funcionar durante o intervalo de tempo de 10 horas, o seu operador analisa o registro gráfico, apresentado na figura, para avaliar a necessidade de eventuais ajustes, sabendo que a máquina apresenta falhas de funcionamento quando a velocidade do pistão se anula.

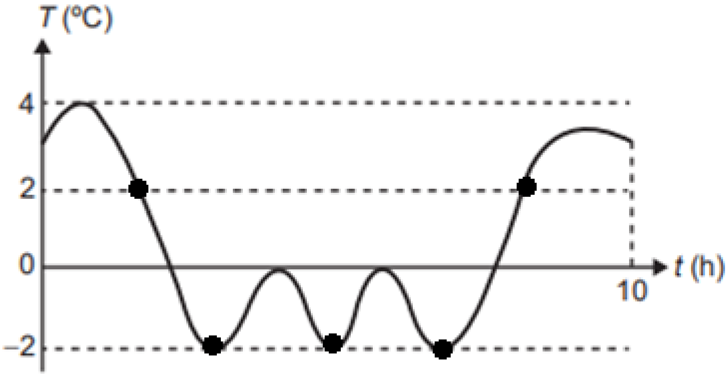


Quantas vezes a velocidade do pistão se anulou durante as 10 horas de funcionamento?
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5
RESOLUÇÃO
Espera-se que o aluno tenha a capacidade de interpretar o elemento gráfico, que demonstra a Temperatura em função do tempo, e que a expressão disponibilizada $V = T^2 - 4$ devem ser analisadas considerando a indicação de falhas de funcionamento quando a velocidade de anula. Assim, temos uma equação de segundo grau para descobrir suas raízes.

$$0 = T^2 - 4$$

$$T^2 = 4$$
$$T = \sqrt{4}$$
$$T = \mp 2$$

Nesse sentido, as falhas ocorrem quando a temperatura está em + 2 e – 2. Analisando o gráfico, temos as indicações da temperatura durante o funcionamento da máquina. Nos instantes de temperatura + 2 e -2, temos velocidade nula, assim são 5 momentos que a máquina apresenta velocidade nula em seu funcionamento.



Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT101, EM13MAT404, EM13MAT302
Resposta	Letra E

6) (ENEM 2022) Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e p(t) a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (I, II, III, IV e V), com diferentes períodos de intensificação das propagandas:

- I: $1 \leq t \leq 2$;
- II: $3 \leq t \leq 4$;
- III: $5 \leq t \leq 6$;
- IV: $7 \leq t \leq 9$;
- V: $10 \leq t \leq 12$.

A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A sugestão foi aceita. A proposta escolhida foi a

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V

RESOLUÇÃO

Após a leitura da questão, compreende-se que é preciso calcular o valor máximo de x em que a intensificação da propaganda ocorra no mês em que há maior quantidade de infectados.

Neste sentido, o valor máximo de x é trabalhando pelo x do vértice, onde $x_v = \frac{-b}{2a}$

$$x_v = \frac{-10}{2.(-1)} = 5$$

A opção III das propostas apresentadas, inclui o tempo do quinto mês, ou seja, a intensificação da propaganda deverá ocorrer entre os meses de maio e junho.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT503
Resposta	Letra C

7) (ENEM 2016) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e t = 0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no

A) 19° dia .
B) 20° dia.
C) 29° dia.
D) 30° dia.
E) 60° dia.

RESOLUÇÃO

A função que calcula o número f de infectados é dada por: $f(t) = -2 \cdot t^2 + 120 \cdot t$

Fazendo: $f(t) = 1600 \rightarrow -2 \cdot t^2 + 120 \cdot t = 1600$

Dividindo a expressão por -2, temos:

$$t^2 - 60 \cdot t + 800 = 0$$

Calculando por soma para b=60 e produto para c = 800, temos

T' = 20 ou t'' = 40

Quando ocorreu a segunda dedetização será no 20º dia, na qual o número de infectados chegou em 1600.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT404, EM13MAT302
Resposta	Letra B

8) (ENEM 2013) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$ com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39 ºC.

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) 19,0
b) 19,8
c) 20,0
d) 38,0
e) 39,0

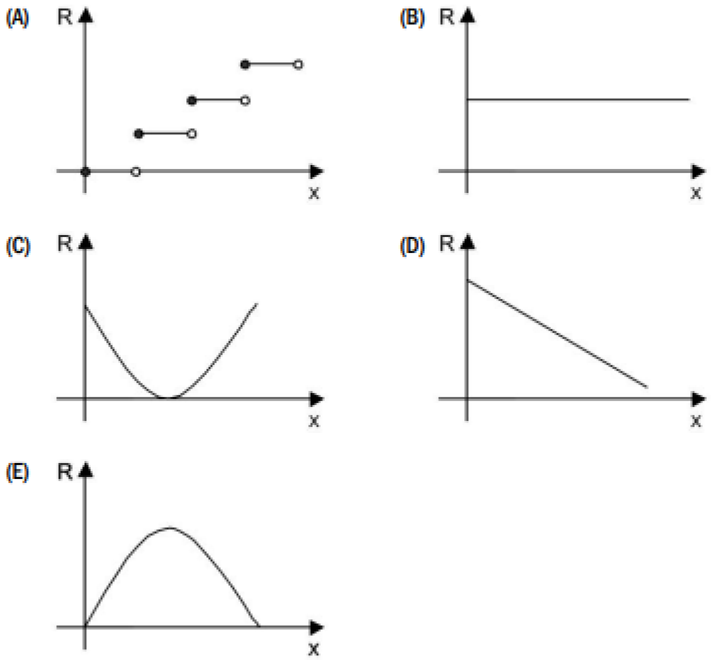
RESOLUÇÃO

O tempo mínimo de espera ocorre quando a temperatura chega à 39ºC, assim:

$$T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$$
$$39 = -\frac{t^2}{4} + 400$$
$$t^2 = (400 - 39).4$$
$$t = \sqrt{361.4}$$
$$t = 19.2 = 38min$$

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT404, EM13MAT302
Resposta	Letra D

9) (ENEM 2000) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de prorrogação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se: $R(x) = k.x.(P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato.
O gráfico cartesiano que melhor representa a função R(x), para x real, é:



RESOLUÇÃO

Considerando a expressão, e aplicando a distributiva temos:

$$R(x) = k.x.(P - x)$$
$$R(x) = k.x.P - kx^2$$

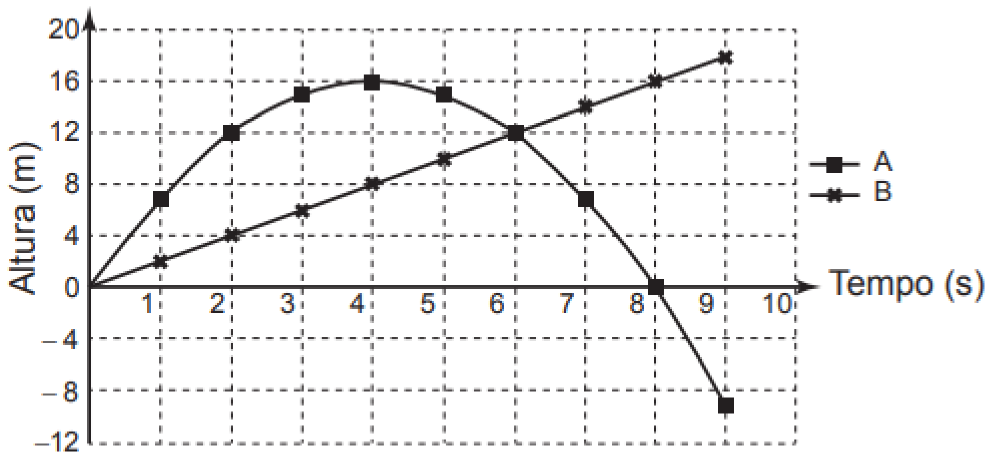
Temos para os coeficientes ($f(x) = ax^2 + bx + c$) a = -k e b = kx.

Como o coeficiente a é negativo, a representação é a parábola voltada para baixo.

Letra E a alternativa correta.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT502, EM13MAT404, EM13MAT302

10) (ENEM 2016) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que

a) diminuir em 2 unidades.
b) diminuir em 4 unidades.
c) aumentar em 2 unidades.
d) aumentar em 4 unidades.
e) aumentar em 8 unidades.

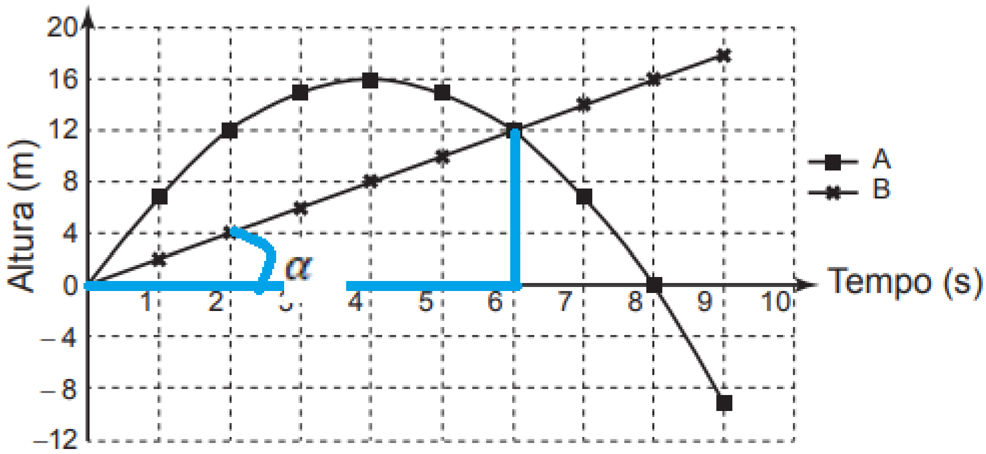
RESOLUÇÃO

O coeficiente angular da reta é calculado a partir da tangente, sendo:

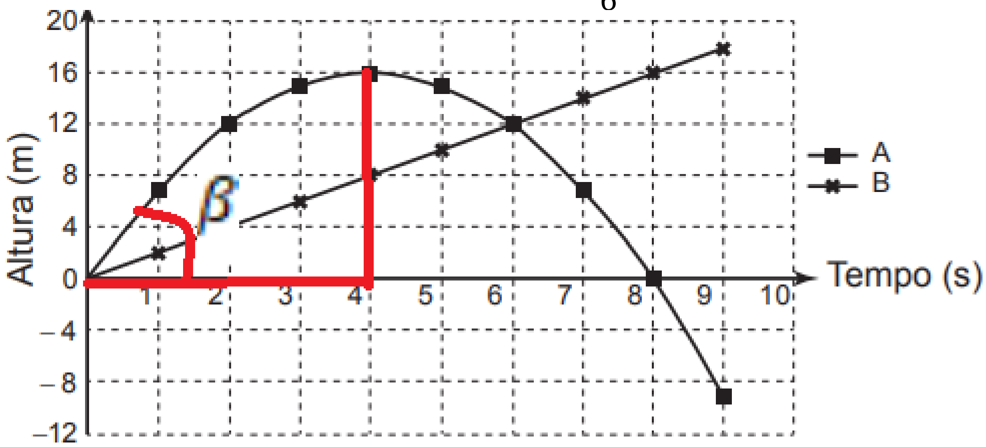
$$tg\theta = \frac{co}{ca}$$

Analiasando as trajetórias, o projétil B não alcança o projétil A no seu momento máximo que deveria em A ocorrer no momento 4s.

Desta forma, vamos calcular a tangente para os dois momentos que temos:



$$tg\alpha = \frac{12}{6} = 2$$



$$tg\beta = \frac{16}{4} = 4$$

De um momento angular para o outro, é preciso que o coeficiente da reta aumente duas unidades, letra C.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT308, EM13MAT101

11) (ENEM 2015) Um meio de transporte coletivo que vem ganhando espaço no Brasil é a van, pois realiza, com relativo conforto e preço acessível, quase todos os tipos de transportes: escolar e urbano, intermunicipal e excursões em geral. O dono de uma van, cuja capacidade máxima é de 15 passageiros, cobra para uma excursão até a capital de seu estado R$ 60,00 de cada passageiro. Se não atingir a capacidade máxima da van, cada passageiro pagará mais R$ 2,00 por lugar vago. Sendo x o número de lugares vagos, a expressão que representa o valor arrecadado $V(x)$, em reais, pelo dono da van, para uma viagem até a capital é:

a) $V(x) = 902x$

b) $V(x) = 930x$
c) $V(x) = 900 + 30x$
d) $V(x) = 60x + 2x^2$
e) $V(x) = 900 - 30x - 2x^2$
RESOLUÇÃO:

Seja x o número de pessoas que não compareceram, ou seja, os lugares vagos. Já os lugares ocupados correspondem a 15-x.
O pagamento pelo lugar ocupado é calculado por 60 · (15 – x).

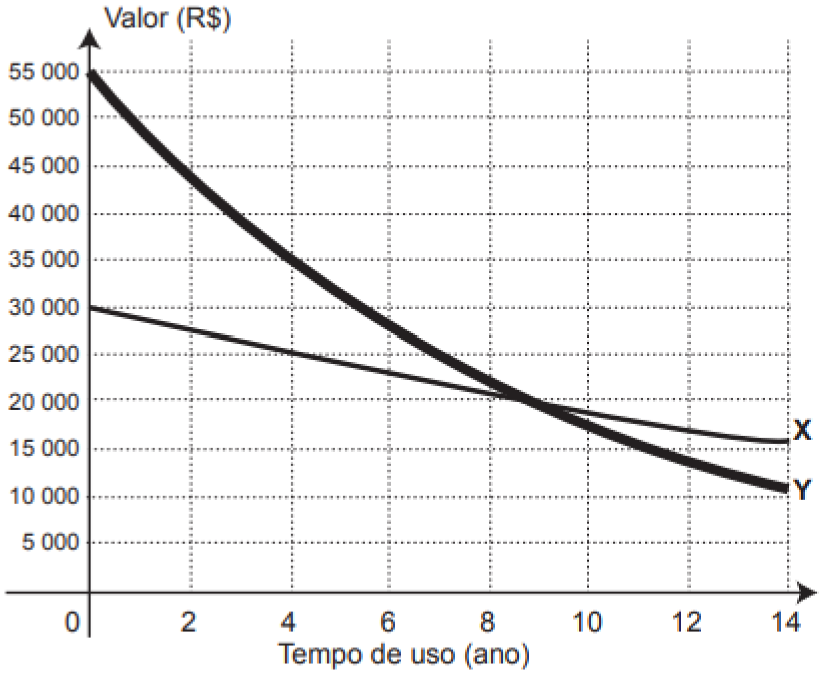
Além disso, cada um pagará 2 reais por vaga não ocupada, ou seja, 2x (15 – x), então, somando as duas expressões para ter o valor final:

$$V(x) = 60\,(15 - x) + 2x\,(15 - x)$$
$$V(x) = 900 - 60x + 30x - 2x^2$$
$$V(x) = 900 - 30x - 2x^2$$

EM13MAT302

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT404, EM13MAT302
Resposta	Letra E

12) (ENEM 2015) Alguns brasileiros têm o hábito de trocar de carro a cada um ou dois anos, mas essa prática nem sempre é um bom negócio, pois o veículo desvaloriza com o uso. Esse fator é chamado de depreciação, sendo maior nos primeiros anos de uso. Uma pessoa realizou uma pesquisa sobre o valor de mercado dos dois veículos (X e Y) que possui. Colocou os resultados obtidos em um mesmo gráfico, pois os veículos foram comprados juntos.

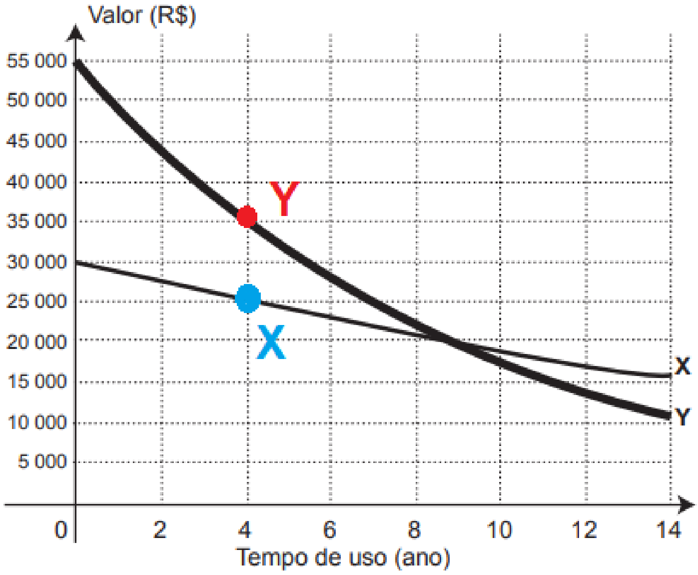


Após a pesquisa, ela decidiu vender os veículos no momento em que completarem quatro anos de uso. Disponível em: www.carrosnaweb.com.br. Acesso em: 3 ago. 2012 (adaptado). Considerando somente os valores de compra e de venda dos veículos por essa pessoa, qual a perda, em reais, que ela terá?

a) 10 000,00
b) 15 000,00
c) 25 000,00
d) 35 000,00
e) 45 000,00

RESOLUÇÃO

A partir da análise gráfica temos:



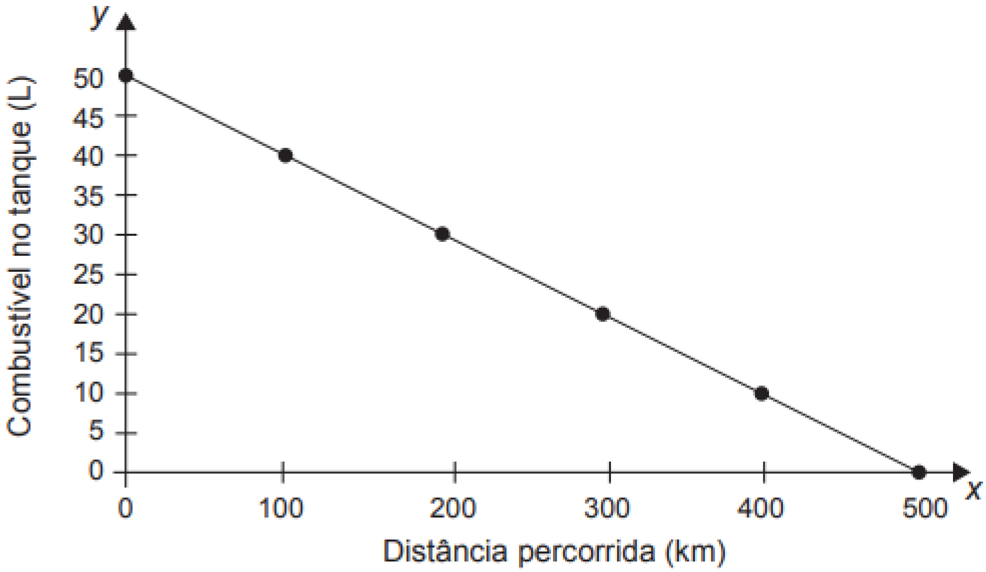
Para o carro Y: Comprou por R$55.000, vendeu por R$35.000. Logo, tem-se R$20.000 reais de prejuízo
Para o carro X: Comprou por R$30.000, vendeu por R$25.000. Logo, perdeu R$5.000 reais.

O prejuízo total é de R$25.000.

EM13MAT510

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT404, EM13MAT302
Resposta	Letra C

13) (ENEM 2018) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é

$a)\ y = -10x + 500$

$b)\ y = \frac{-x}{10} + 50$

$c)\ y = \frac{-x}{10} + 500$

$d)\ y = \frac{x}{10} + 50$

$e)\ y = \frac{x}{10} + 500$

RESOLUÇÃO

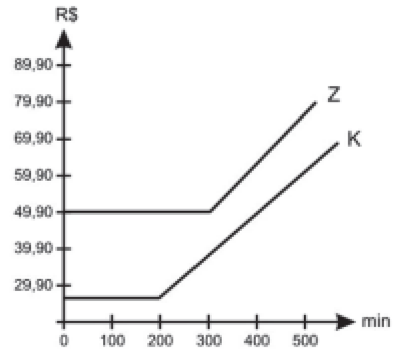
O Gráfico apresenta uma função afim decrescente, assim $f(x) = -ax + b$
Desta forma, eliminamos as alternativas D e E.

Analisando o gráfico, quando $x = 0, y = 50$
Substituindo na expressão $f(x) = -ax + b$, temos $f(0) = -a.0 + b = 50$, logo b = 50. Das alternativas, a que satisfaz a condição do gráfico ser decrescente e b = 50 é a letra B.

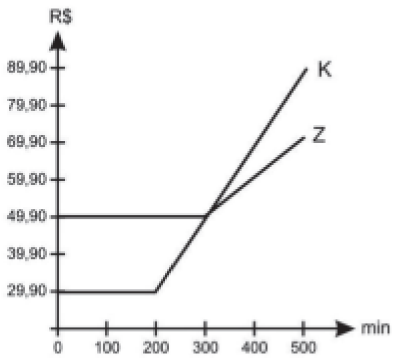
Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT404, EM13MAT302
Resposta	Letra B

14) (ENEM 2011) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente. O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é

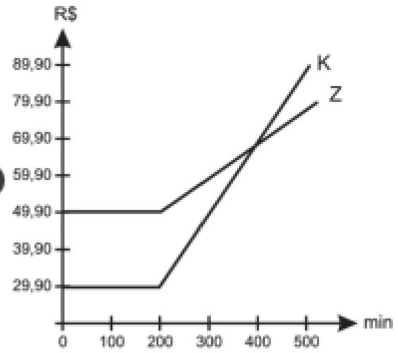
A



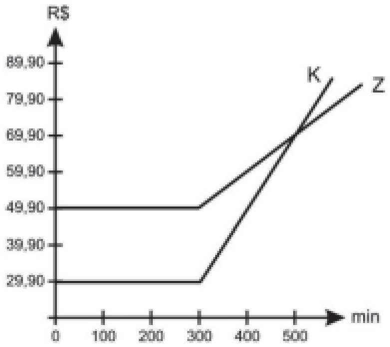
D



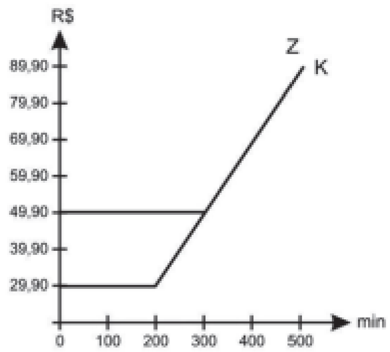
B



E



C



RESOLUÇÃO

Para o Plano K, até 200 min, o valor de R$ 29,90 será constante. Para o plano Z, até 300 min, temos R$ 49,90 sendo constante. Já nesta primeira análise, percebe-se na representação gráfica em A e B, que não seguem estas informações. Já a Letra C,o coeficiente angular (ou seja, a variação de valores em função dos minutos excedentes não é igual em K temos 0,20 e em Z 0,10 o minuto. O que nos retorna a Letra D como a alternativa correta. Pois K tem uma inclinação maior que Z.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT101,EM13MAT510

15) (ENEM 2015) Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação

$q = 400 - 100p$, na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais. A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto. O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

a) R$ 0,50 ≤ p < R$ 1,50
b) R$ 1,50 ≤ p < R$ 2,50
c) R$ 2,50 ≤ p < R$ 3,50
d) R$ 3,50 ≤ p < R$ 4,50
e) R$ 4,50 ≤ p < R$ 5,50

RESOLUÇÃO

Primeira informação relevante é que se deseja a maior arrecadação possível, mantendo a média de vendas em R$ 300,00. Podemos afirmas que a padaria vende cada pão a R$ 3, já que são 100 pães e tem R$ 300,00 de média de vendas.

Assim, temos a arrecadação sendo $a = p.q$; sendo $q = 400 - 100p$, substituindo

$$a = p(400 - 100p)$$
$$a = 400p - 100p^2$$

Mantendo a arrecadação em 300, temos

$$300 = 400p - 100p^2$$

Simplificando

$$3 = 4p - 1p^2$$

Igualando a zero temos:

$$p^2 - 4p + 3 = 0$$

Utilizando soma para 4 e produto para 3, temos

S = 4

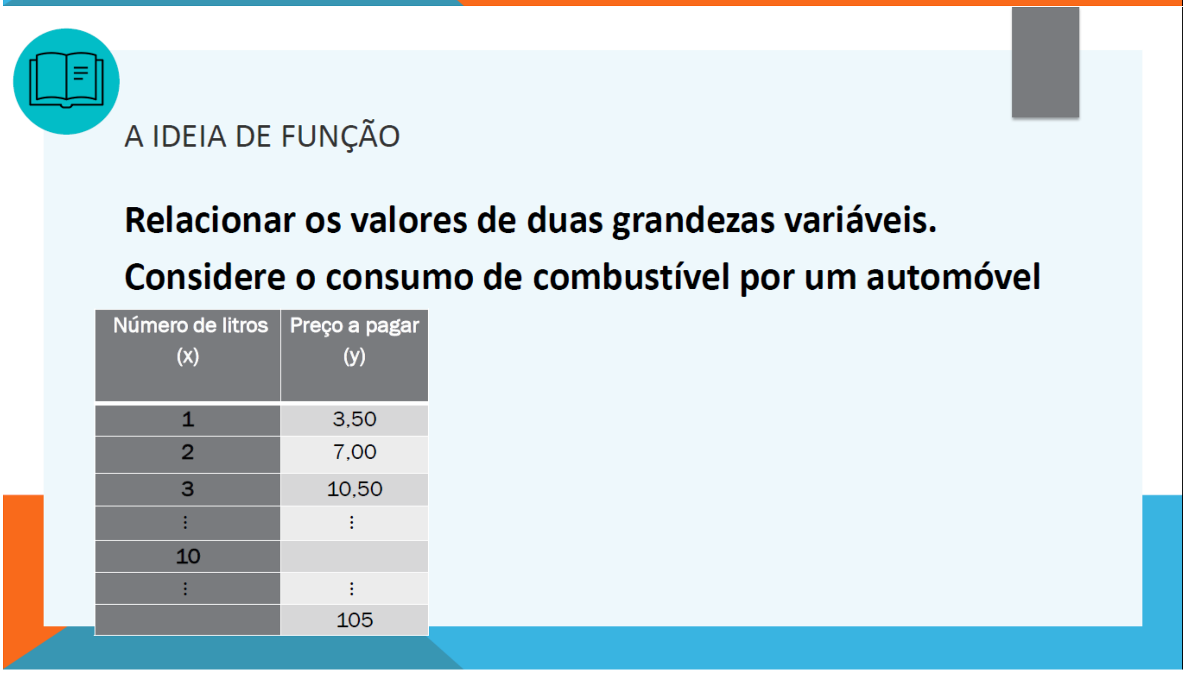
P = 3

P'= 1 ou p'' = 3, R$ 3 já tínhamos este valor. Se a padaria abaixar para R$ 1 o valor de cada pão na promoção, permanecerá com o valor de R$ 300 como média de vendas.

Dificuldade	Médio
Competência Específica	CEMAT04
Habilidade	EM13MAT302
Resposta	Letra A

APÊNDICE C - Slides das videoaulas gravadas para postagem no padlet

Videoaula 1: idéia de função



SITUAÇÃO PROBLEMA

Se o valor por litro é unitário, qual a fórmula que associa o preço a pagar (y) em função ao número de litros (x)?

Número de litros (x)	Preço a pagar (y)
1	1. 3,50=3,50
2	2. 3,50 = 7,00
3	3.3,50 = 10,50
⋮	⋮
l	l.3,50 = p

SITUAÇÃO PROBLEMA

Qual seria o preço de 10 litros de combustível?

Número de litros (x)	Preço a pagar (y)
1	1. 3,50=3,50
2	2. 3,50 = 7,00
3	3.3,50 = 10,50
⋮	⋮
x	x.3,50 = y

- $y(x) = 3{,}50.x$
- $y(10) = 3{,}50 * 10$
- $y = 35{,}00$

SITUAÇÃO PROBLEMA

Quantos litros de combustível poderiam ser comprados com R$ 105,00?

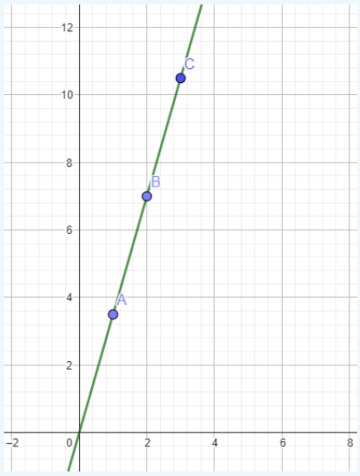
Número de litros (x)	Preço a pagar (y)
1	3,50
2	7,00
3	10,50
⋮	⋮
10	35
⋮	⋮
x	105

- $y(x) = 3{,}50.x$
- $105 = 3{,}50 * x$
- $x = \frac{105}{3{,}50} = 30$
- Portanto, foram comprados 30 litros.

SITUAÇÃO PROBLEMA

Representação no plano $y(x) = 3{,}50.x$

Número de litros (x)	Preço a pagar (R$ - y)
1	3,50
2	7,00
3	10,50
⋮	⋮
10	35
⋮	⋮
30	105



SITUAÇÃO PROBLEMA

Se houver um valor fixo a ser pago, devido a venda do produto, além do preço por litro. Por exemplo uma taxa de R$ 3 reais por venda, como ficaria a expressão?

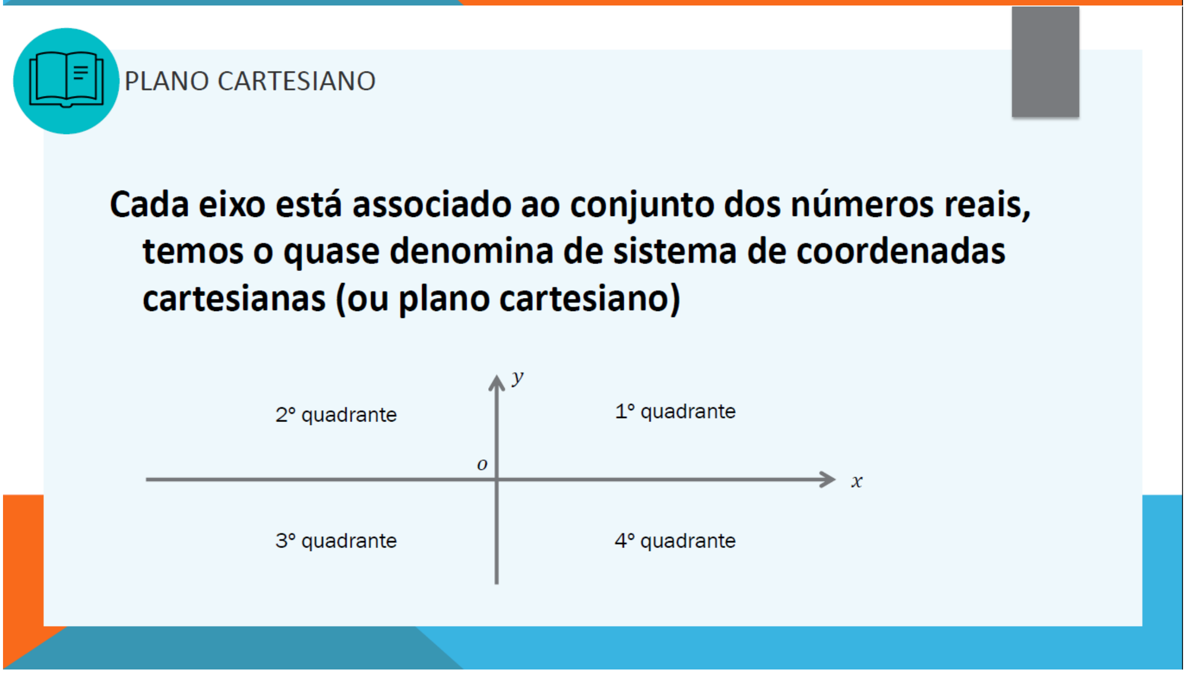
- y(x) = 3,50.x + 3
- y(x) = ax + b
- a = taxa de variação/coeficiente angular/declividade
- b = valor inicial/coeficiente linear

Demonstração no Geogebra

REFERENCIAS

- **DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contexto: função afim e função quadrática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020**
- **GIOVANNI, J. R. ; GIOVANNI JUNIOR, J. R.. Matemática: pensar & descobrir. São Paulo: FDT, 2005.**

Videoaula 2: representação de funções

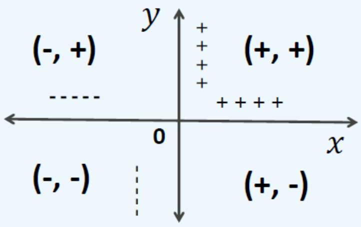


PAR ORDENADO

$$(x, y)$$

Eixo das abscissas

Eixo das ordenadas



NOTAÇÃO

A notação usual para indicar que uma variável y resulta de uma função sobre x é a notação de função de Euler indicada por:

$y = f(x)$ (lê-se: "y igual a f de x" ou " o valor de f em x")

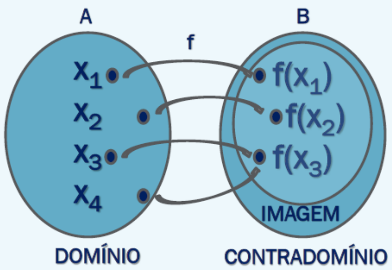
Onde x é a variável independente e $y = f(x)$ é a variável dependente.

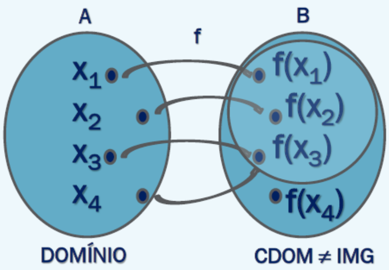
FUNÇÃO

Uma função de um conjunto A em um conjunto B é uma lei, ou ainda, uma regra de formação que associa todo elemento em A a um único elemento em B.

- **DOMÍNIO: o conjunto A é o domínio da função.**
- **IMAGEM: é o conjunto B, formado por todos os valores produzidos por essa lei de formação.**
- **CONTRADOMÍNIO: pode ser o conjunto B, ou um conjunto C, que contém outros elementos além dos pertencentes a B.**

EXEMPLOS





CONTRAEXEMPLO

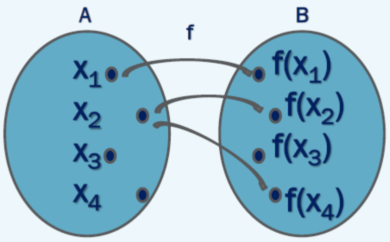
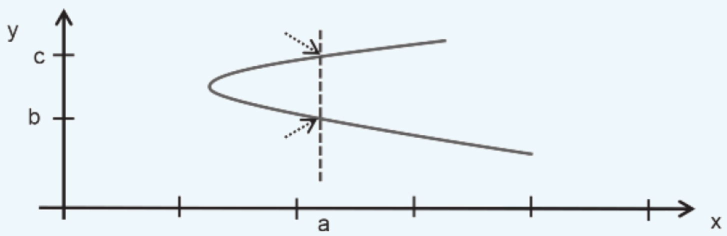


GRÁFICO DE UMA RELAÇÃO QUE NÃO É FUNÇÃO

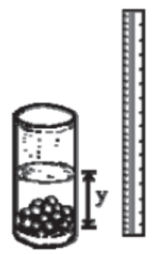


RESOLUÇÃO – QUESTÃO ENEM

(ENEM 2009) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.

RESOLUÇÃO – QUESTÃO ENEM

O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.



número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br.
Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Representando graficamente

Analisando o número de bolas ocorre um aumento a cada 5 unidades, e o nível de água sobe a cada 0,35 cm ao inserirmos 5 bolas dentro do recipiente. Assim, vamos encontrar o valor desta relação para 1 bola.

$$5b = 0{,}35cm$$
$$1b = x$$
$$\vdots$$
$$1b = 0{,}07x$$

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br.
Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Representando graficamente

Logo, qual é o nível de água ,y, sem nenhuma das bolas (x) dentro?

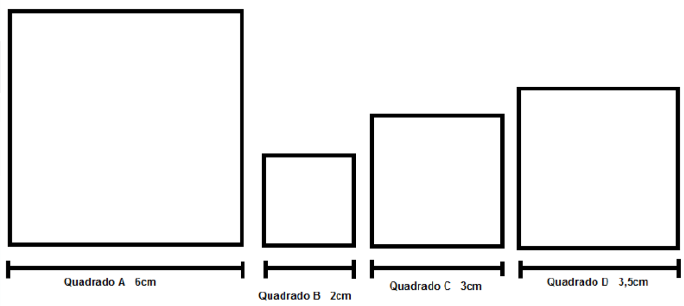
Seria quando x = 0, usando a estratégia menos 0,35cm, temos que a altura inicial da coluna de água é de 6 cm.

Assim, temos que $y = 6 + 0{,}07x$

FUNÇÃO QUADRÁTICA

Ao considerar o lado do quadrado, podemos propor a área

	Medida do lado (cm)	Área (cm²)
Quadrado A	6	36
Quadrado B	2	4
Quadrado C	3	9
Quadrado D	3,5	12,25



NOTAÇÃO

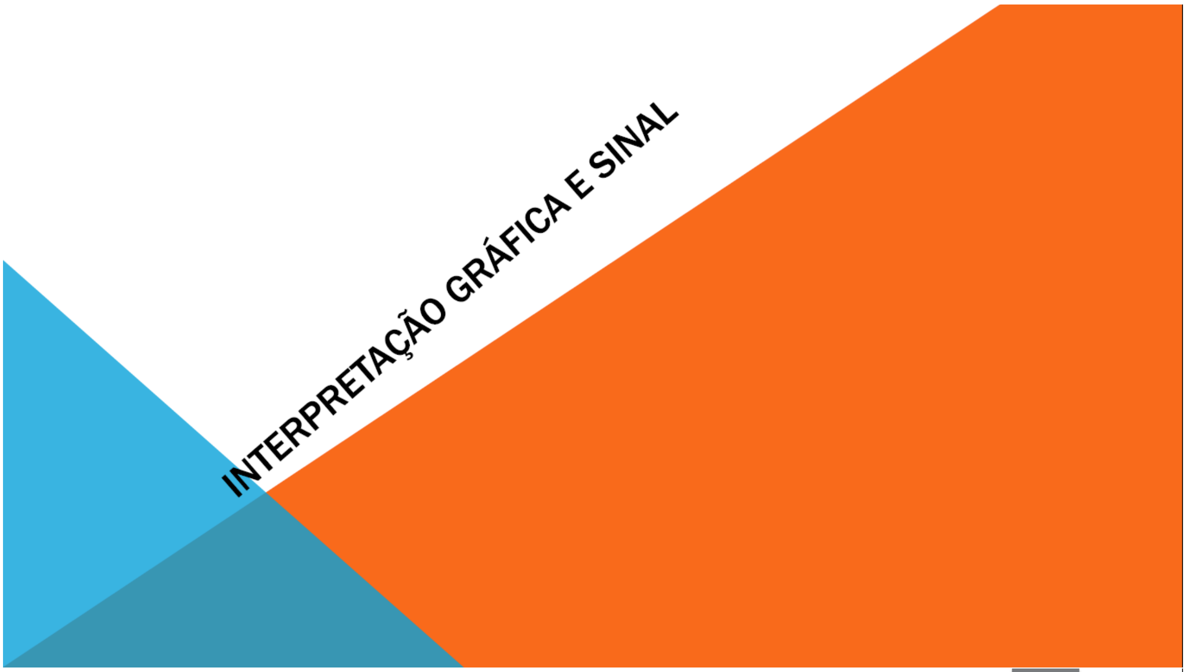
A área (y) do quadrado é função da medida (x) do lado.

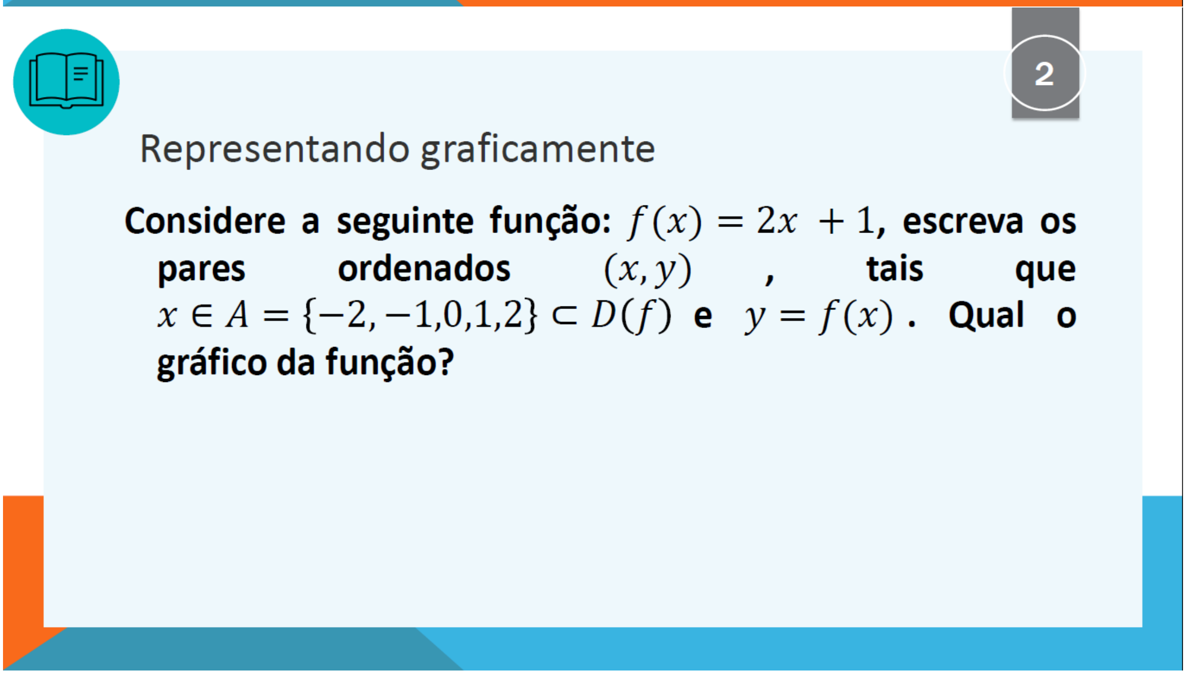
$y = f(x) = x^2$ → **relação de dependência ou lei de formação da função.**

REFERÊNCIAS

- **DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contexto: função afim e função quadrática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020**
- **GIOVANNI, J. R. ; GIOVANNI JUNIOR, J. R.. Matemática: pensar & descobrir. São Paulo: FDT, 2005.**

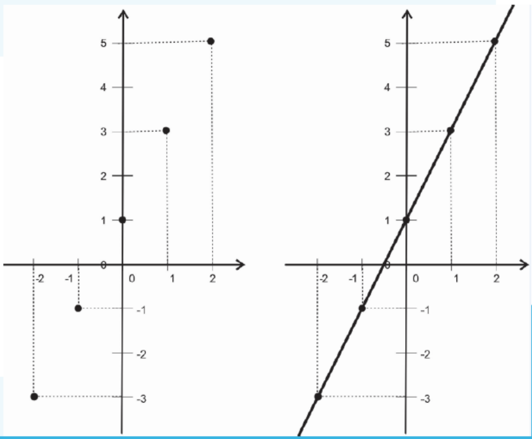
Videoaula 3 : interpretação gráfica de funções





Temos que:

x	y = f(x) = 2x+1	(x,y)
-2	y = f(-2) = 2 (-2) + 1 = 3	(-2, -3)
-1	y = f(-1) = 2(-1) + 1 = -1	(-1,1)
0	y = f(0) = 2.0 + 1 = 1	(0,1)
1	y = f(1) = 2.1 + 1 = 3	(1,3)
2	y = f(2) = 2.2 + 1 = 5	(2,5)



EXEMPLOS DE FUNÇÕES AFIM:

a) $f(x) = -5x + 3$ ➡ Função decrescente

b) $f(x) = 5x + 3$ ➡ Função crescente

c) $f(x) = -5x$ ➡ Função linear

d) $f(x) = 3$ ➡ Função constante

FUNÇÕES AFIM CRESCENTE E DECRESCENTE

Definição:

Seja f uma função definida em um intervalo I e sejam x_1 e x_2 dois pontos em I:

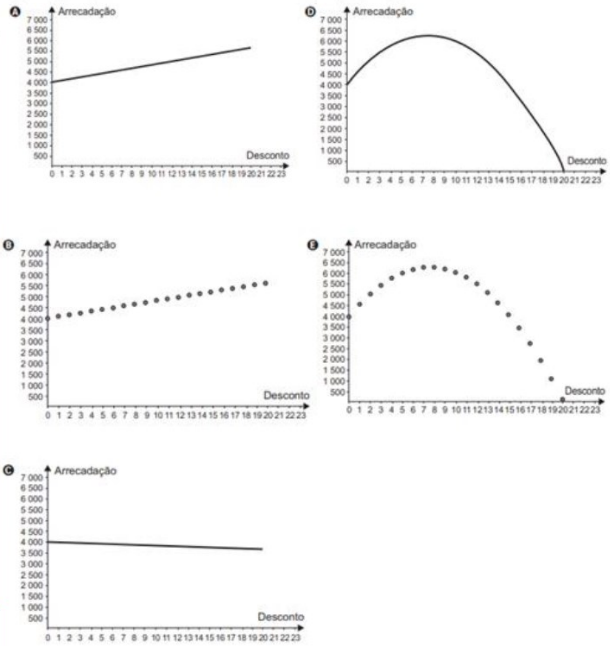
1) Se $f(x_2) > f(x_1)$ sempre que $x_1 < x_2$, então f é crescente em I.

2) Se $f(x_2) < f(x_1)$ sempre que $x_1 < x_2$, então f é decrescente em I.

SITUAÇÃO PROBLEMA

(ENEM 2021) O administrador de um teatro percebeu que, com o ingresso do evento a R$ 20,00, um show conseguia atrair 200 pessoas e que, a cada R$ 1,00 de redução no preço do ingresso, o número de pessoas aumentava em 40. Ele sabe que os donos do teatro só admitem trabalhar com valores inteiros para os ingressos, pela dificuldade de disponibilizar troco, e pretende convencê-los a diminuir o preço do ingresso. Assim, apresentará um gráfico da arrecadação em função do valor do desconto no preço atual do ingresso.

O gráfico que mais se assemelha ao que deve ser elaborado pelo administrador é



SITUAÇÃO PROBLEMA

A primeira informação que podemos trabalhar é o valor do ingresso e a quantidade de pessoas, sendo o valor da arrecadação:

A = 20. 200 = 4000

O valor de 4 mil não auxilia muito, pois todos os gráficos apresentam o seu inicio em 4 mil.

SITUAÇÃO PROBLEMA

Devemos analisar a indicação do desconto, sendo:

(20-1).(200+40), a cada um real que é descontado do valor do ingresso, tem-se 40 pessoas a mais participando, assim:

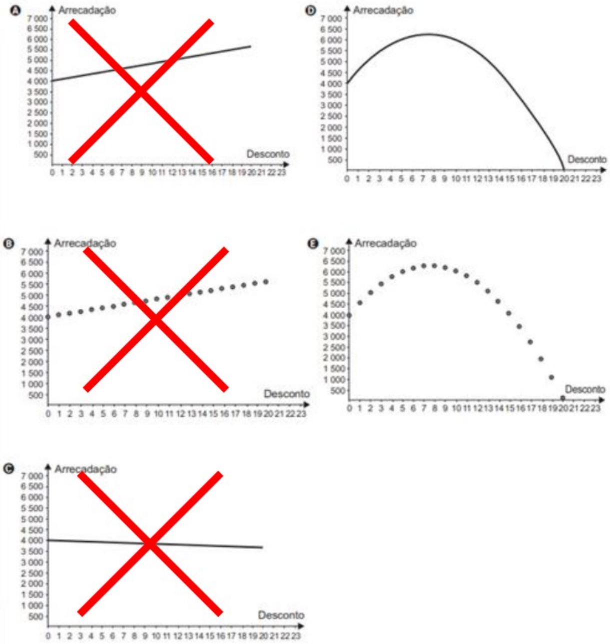
(20-2).(200+80)

(20-3).(200+120)

Até um valor aleatório: (20-x).(200+40.x)

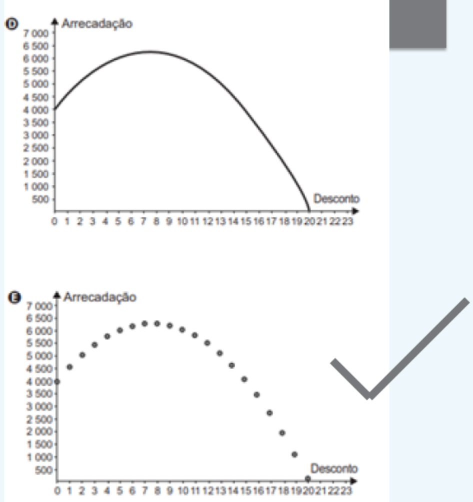
SITUAÇÃO PROBLEMA

$$(20 - x).(200 + 40.x)$$
$$4000 + 800x - 200x - 40x^2 \ (equação\ quadrática)$$



Dificuldade troco

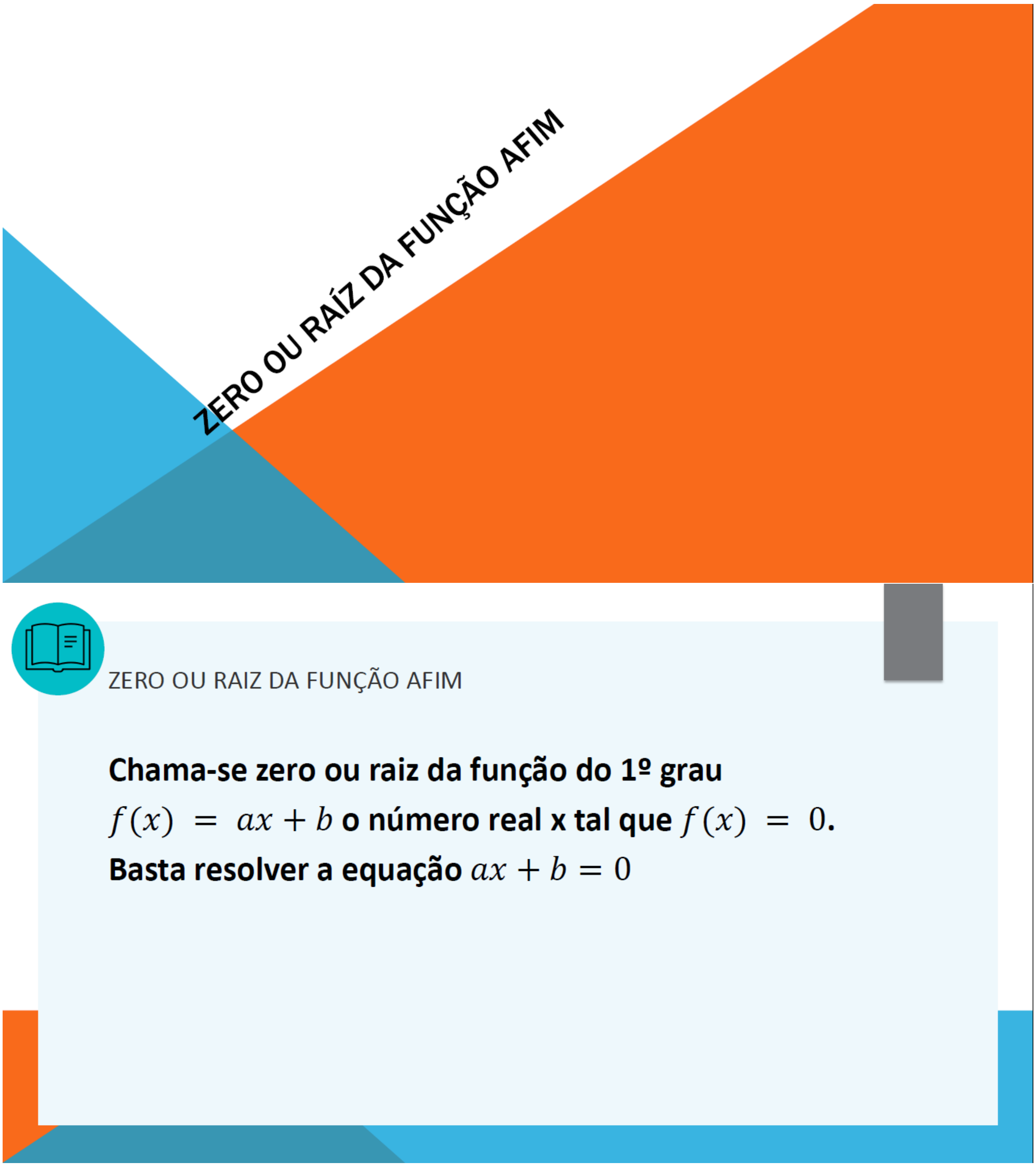
Valores inteiros



REFERENCIAS

- **DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contexto: função afim e função quadrática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020**
- **GIOVANNI, J. R. ; GIOVANNI JUNIOR, J. R.. Matemática: pensar & descobrir. São Paulo: FDT, 2005.**

Videoaula 4 : funções quadráticas



ZERO OU RAIZ DA FUNÇÃO AFIM

O zero da função $f(x) = 3x + 2$

$$0 = 3x + 2$$
$$3x = -2$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

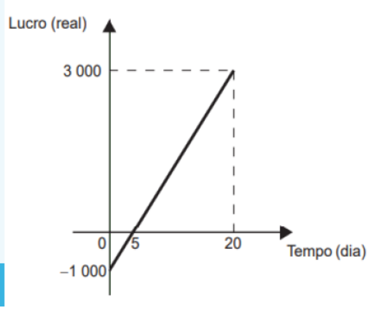
ZERO OU RAIZ DA FUNÇÃO AFIM

Sendo a = 3 e b = 2, afirmamos que o zero da função é descrito por:

$$x = \frac{-b}{a}$$

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO

(ENEM 2017) Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro *(L)* dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.



RESOLUÇÃO DA QUESTÃO

A representação algébrica do lucro *(L)* em função do tempo *(t)* é

a. $L(t) = 20t + 3\,000$

b. $L(t) = 20t + 4\,000$

c. $L(t) = 200t$

d. $L(t) = 200t - 1\,000$

e. $L(t) = 200t + 3\,000$

A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é

a. $L(t) = 20t + 3\,000$

b. $L(t) = 20t + 4\,000$

c. $L(t) = 200t$

d. $L(t) = 200t - 1\,000$

e. $L(t) = 200t + 3\,000$

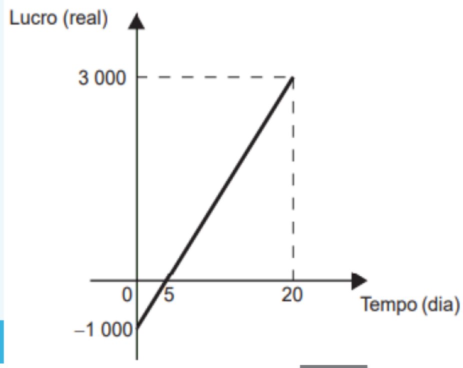
RESOLUÇÃO DA QUESTÃO

Para x = 0, temos y = -1000, como o valor inicial da função, ou mesmo o coeficiente linear da reta.

Para x = 5; y = 0,

Temos:

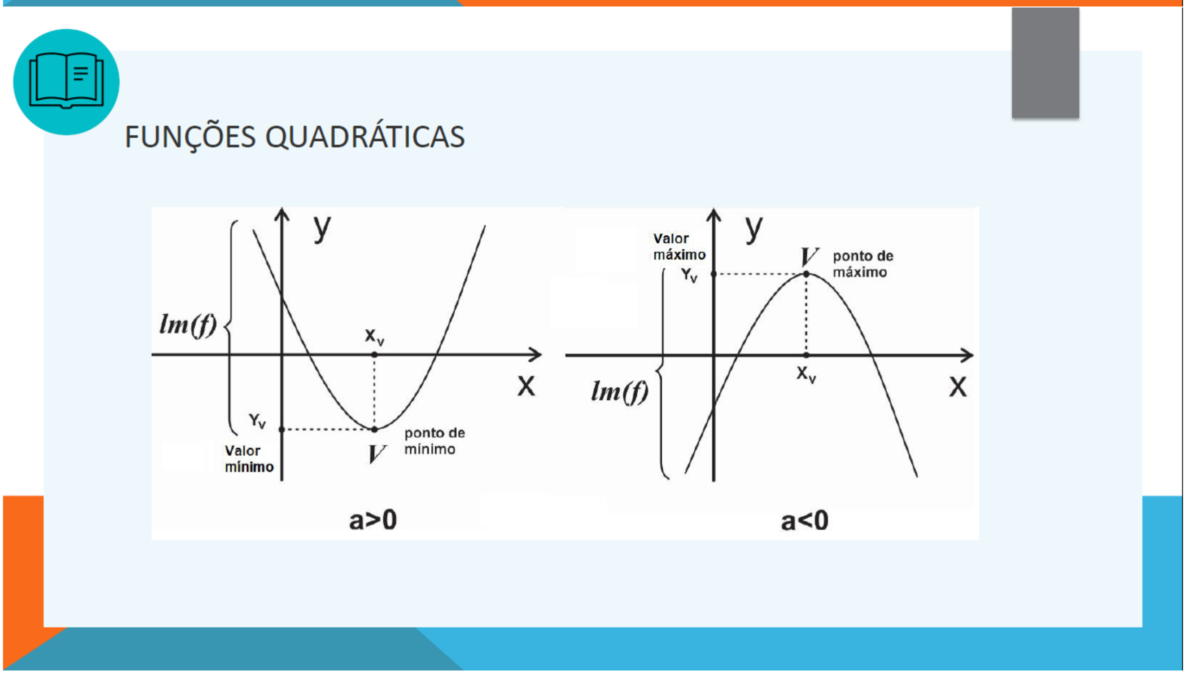
$$a = \frac{-b}{x} = \frac{-1000}{5} = 200$$



REFERENCIAS

- **DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contexto: função afim e função quadrática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020**
- **GIOVANNI, J. R. ; GIOVANNI JUNIOR, J. R.. Matemática: pensar & descobrir. São Paulo: FDT, 2005.**

Videoaula 5: estudo do vértice de funções quadráticas



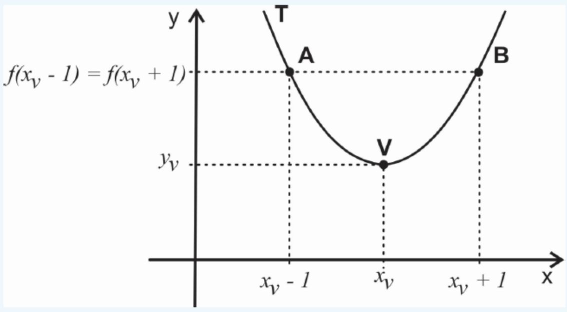
VÉRTICE E SIMETRIA DA PARÁBOLA

Em função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, se:

- $a > 0$, **o gráfico tem concavidade voltada para cima, e o vértice é seu ponto mais baixo;**
- $a < 0$, **o gráfico tem concavidade voltada para baixo, e o vértice é seu ponto mais alto.**

VÉRTICE E SIMETRIA DA PARÁBOLA

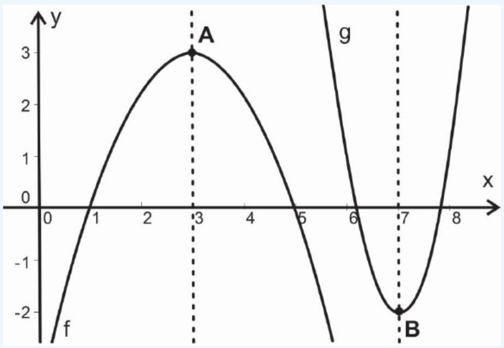
A parábola é simétrica em relação ao seu vértice



$$V = (x_v; y_v) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

VÉRTICE E SIMETRIA DA PARÁBOLA

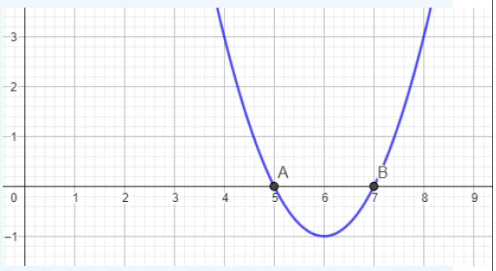
Dada $f(x) = -0{,}75\,x^2 + 4{,}5x - 3{,}75$ **, e**
$g(x) = 3x^2 - 42x + 145$ **, temos:**



x_v e y_v

Simetria parábola
$x^2 - 12x + 35$

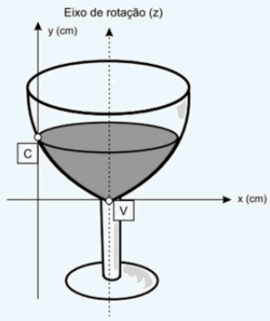
Raízes 5 e 7 $x_v = \dfrac{x' + x''}{2} = \dfrac{5+7}{2} = 6$



Substituindo x = 6 na lei de formação da função, para y_v
$6^2 - 12.6 + 35$ **= 36 – 72+35 = -1**

SITUAÇÃO PROBLEMA

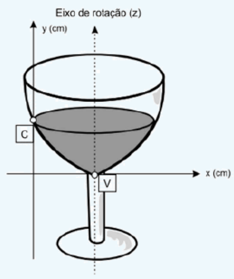
(Enem-2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



SITUAÇÃO PROBLEMA

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei :

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, **onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:**



a) 1 b) 2 c) 4 d)5 e) 6

RESOLVENDO A SITUAÇÃO PROBLEMA

Temos que terminar o $y_v = 0$ **, assim:**

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$ **,** $a = \frac{3}{2}, b = -6, c = C$:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y_v = -\frac{(-6)^2 - 4.\left(\frac{3}{2}\right).C}{4.\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{36 - 6C}{6} = 0$$

$36 - 6C = 0 \rightarrow -6C = -36 \rightarrow C = 6$

Portanto, a altura da taça é de 6 cm, alternativa a.

REFERENCIAS

- **DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contexto: função afim e função quadrática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020**
- **GIOVANNI, J. R. ; GIOVANNI JUNIOR, J. R.. Matemática: pensar & descobrir. São Paulo: FDT, 2005.**