

ppgmat

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ELISÂNGELA UDELIZA TOGINHO

ENSINO EXPLORATÓRIO E O TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA ANÁLISE DAS
MANIFESTAÇÕES DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

LONDRINA

2024

ELISÂNGELA UDELIZA TOGINHO

**ENSINO EXPLORATÓRIO E O TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA ANÁLISE DAS
MANIFESTAÇÕES DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO**

**EXPLORATORY TEACHING AND THE PYTHAGOREAN THEOREM: AN
ANALYSIS OF THE MANIFESTATIONS OF GEOMETRIC THINKING**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Rizek Elias

LONDRINA

2024



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuem o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



ELISANGELA UDELIZA TOGINHO

**ENSINO EXPLORATÓRIO E O TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA ANÁLISE DAS MANIFESTAÇÕES DO
PENSAMENTO GEOMÉTRICO**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 18 de Setembro de 2024

Dr. Henrique Rizek Elias, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Diego Fogaca Carvalho, Doutorado - Universidade Norte do Paraná (Unopar)

Dra. Zenaide De Fatima Dante Correia Rocha, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 18/09/2024.

Dedico esse trabalho a Deus, razão da minha existência e das minhas forças nessa jornada, presente nas minhas orações e que me sustenta em todos os momentos de precisão.

AGRADECIMENTOS

A Deus por atender as minhas orações e caminhar sempre comigo, permitindo-me chegar ao final desta jornada.

A Nossa Senhora da Aparecida e São José por cuidarem e intercederem por mim, forças divinas que tornaram a conquista desse objetivo possível.

Ao meu marido Francisco, meu amor, amigo, companheiro, confidente, que desde que entrou na minha vida tem sido uma benção, o meu anjo protetor aqui na terra. Obrigada pelo incentivo e motivação. Esse trabalho é um pouquinho seu também.

À minha linda filha Isabelly que é o bem mais precioso que Deus me deu, por entender minha ausência durante essa jornada. Filha, essa conquista é por você e para você, te amo incondicionalmente.

À minha mãe Maria José, sempre me estimulando e apoiando nos momentos mais difíceis, por suas orações e seus ensinamentos.

Ao meu querido pai Odair pelos ensinamentos que nortearam o caminho correto a seguir e por suas orações e incentivo.

Aos meus irmãos Celso, Rosângela, Rosenilda e Maria Eduarda que entenderam as vezes que não pude participar de almoços e churrascos em família e pelo incentivo e estímulos nos momentos mais difíceis. Obrigada por sempre me desejarem o melhor e pelo amor imenso que tendes por mim.

À minha irmã Rosângela que mesmo não estando fisicamente aqui na terra conosco, permanece em meus pensamentos e em meu coração. Essa conquista também é para você.

Ao meu orientador Professor Dr. Henrique Rizek Elias que dedicou seu tempo, conhecimentos e orientações, proporcionando direcionamentos valiosos para a realização desse trabalho, incentivando-me a continuar até o final desta jornada.

Ao Professor Dr. Diego Fogaça Carvalho e à Professora Dra. Zenaide De Fátima Dante Correia Rocha cujas contribuições enriqueceram esse trabalho.

A todos os professores e professoras do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná por seus ensinamentos e incentivos.

“Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais.”

Rubem Alves

TOGINHO, Elisângela Udeliza. **Ensino Exploratório e o Teorema de Pitágoras: uma análise das manifestações do Pensamento Geométrico.** 2024. 149 páginas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo identificar e caracterizar manifestações do pensamento geométrico de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental ao trabalharem com tarefas matemáticas que visavam introduzir o Teorema de Pitágoras. Foi utilizada a teoria de van Hiele para caracterizar o pensamento geométrico dos estudantes e a abordagem do Ensino Exploratório para resolver as tarefas matemáticas ao longo das aulas. Foram conduzidas seis aulas, cada uma com duração de 50 minutos, junto a uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, em uma instituição pública de ensino do Estado do Paraná, na qual a pesquisadora era a professora regente. Os dados analisados foram produzidos a partir das gravações em áudio das discussões realizadas em sala de aula. Na primeira tarefa, os alunos, ao manipularem os palitos, frequentemente manifestaram o nível 0 de *visualização* ou *reconhecimento*. Indícios de progressão para o nível 1 de *análise* surgiram, sobretudo, nas interações com a professora, que incentivava a discussão. Contudo, os alunos do grupo analisado não chegaram, de forma autônoma, a enunciar a condição de existência de um triângulo, cabendo à professora formalizar essa ideia, após contribuições de outros grupos. Na Tarefa 2, os alunos apresentaram progresso significativo no pensamento geométrico, passando do nível 0 de *visualização* ou *reconhecimento* para os níveis 1 de *análise* e 2 de *dedução informal* ou *ordenação*, com alguns indícios do nível 3 de *dedução formal*, especialmente nas fases de discussão e sistematização conduzidas pela professora. A Tarefa 3, embora reduzida e desenvolvida de forma apressada, também revelou evidências do avanço dos alunos pelos níveis da teoria de van Hiele, com a maioria consolidando suas compreensões no nível 2 de *dedução informal* ou *ordenação* e apenas alguns demonstrando indícios do nível 3 de *dedução formal*, ao aprofundarem sua compreensão sobre o Teorema de Pitágoras. Pode-se, por fim, afirmar que a professora, em um ambiente de Ensino Exploratório, criou condições para que os estudantes avançassem gradualmente pelos níveis do pensamento geométrico. No entanto, reflexões e ponderações a respeito do Ensino Exploratório podem ser feitas, como o cuidado que o professor deve ter ao fazer comentários durante o trabalho autônomo dos alunos, de modo a não lhes indicar a estratégia a seguir, reduzindo, assim, o desafio intelectual das tarefas; e a gestão do tempo, evitando iniciar uma tarefa em um dia e finalizar somente em outro dia de aula. Por se tratar da primeira experiência da professora com a abordagem do Ensino Exploratório, as reflexões sobre os desafios de se incorporar tal abordagem de ensino em sua própria prática têm potencial para trazer aprendizagens profissionais que possivelmente terão impactos em sua prática no futuro.

Palavras-chave: Anos Finais do Ensino Fundamental. Pensamento Geométrico. Teoria de van Hiele. Teorema de Pitágoras. Ensino Exploratório.

TOGINHO, Elisângela Udeliza. **Exploratory Teaching and the Pythagorean Theorem: an analysis of the manifestations of Geometric Thinking**. 2024. 149 pages. Dissertation (Master's in Mathematics Teaching) – Federal Technological University of Paraná, Londrina, 2024.

ABSTRACT

This research aims to identify and characterize manifestations of geometric thinking in students in the 9th grade (students aged 14-15) when working with mathematical tasks that aim to introduce the Pythagorean Theorem. van Hiele's theory was used to characterize students' geometric thinking, and the Exploratory Teaching approach was used to solve mathematical tasks throughout classes. Six classes were conducted, each lasting 50 minutes, with a 9th grade class, in a public educational institution in the State of Paraná, in which the researcher was the leading teacher. The data analyzed were produced from audio recordings of discussions held in the classroom. In the first task, students, when manipulating the sticks, often demonstrated level 0 of *visualization* or *recognition*. Evidence of progression to level 1 of *analysis* emerged, above all, in interactions with the teacher, who encouraged discussion. However, the students in the group analyzed did not independently state the condition for the existence of a triangle, leaving the teacher to formalize this idea, after contributions from other groups. In Task 2, students showed significant progress in geometric thinking, moving from level 0 of *visualization* or *recognition* to levels 1 of *analysis* and 2 of *informal deduction* or *ordering*, with some signs of level 3 of *formal deduction*, especially in the discussion phases and systematization led by the teacher. Task 3, although reduced and developed in a hurried manner, also revealed evidence of student's advancement through the levels of van Hiele's theory, with the majority consolidating their understanding at level 2 of *informal deduction* or *ordering* and only a few demonstrating evidence of level 3 of *formal deduction*, as they deepen their understanding of the Pythagorean Theorem. Finally, it can be said that the teacher, in an Exploratory Teaching environment, created conditions for students to gradually advance through the levels of geometric thinking. However, reflections and considerations regarding Exploratory Teaching can be made, such as the care that the teacher must take when making comments during the students' autonomous work, so as not to indicate to them the strategy to follow, thus reducing the challenge of intellectual tasks; and time management, avoiding starting a task on one day and finishing it only on another class day. As this is the teacher's first experience with the Exploratory Teaching approach, reflections on the challenges of incorporating such a teaching approach into her own practice have the potential to bring professional learning that will possibly have an impact on her practice in the future.

Keywords: Geometric Thinking. van Hiele's theory. Pythagorean theorem. Exploratory Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ações intencionais do professor na prática de Ensino Exploratório.....	24
Figura 2 – Jogos de três palitos de madeira com diferentes comprimentos	32
Figura 3 – Malha quadriculada colorida.....	34
Figura 4 – Diferentes triângulos com a mesma base e a mesma altura	53

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Tarefa 1: reconhecendo um triângulo.....	30
Quadro 2 – Tarefa 2: identificando a relação entre os lados de um triângulo retângulo	33
Quadro 3 – Tarefa 3: reconhecendo um triângulo retângulo	35
Quadro 4 – Planejamento das aulas do dia 05 de dezembro de 2022	37
Quadro 5 – Planejamento das aulas do dia 06 de dezembro de 2022	40
Quadro 6 – Planejamento das aulas do dia 7 de dezembro de 2022.	42

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	15
2.1 A TRAJETÓRIA DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL	16
2.2 O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ACORDO COM A TEORIA DE VAN HIELE	20
2.3 ENSINO EXPLORATÓRIO NAS AULAS DE MATEMÁTICA	22
3 METODOLOGIA.....	28
3.1 CONTEXTO DA PESQUISA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	29
3.2 PRODUTO EDUCACIONAL	44
4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS.....	47
4.1 PRIMEIRO DIA - TAREFA 1: RECONHECENDO UM TRIÂNGULO.....	47
4.2 SEGUNDO DIA – TAREFAS 1 E 2: O TEOREMA DE PITÁGORAS.....	61
4.3 TERCEIRO DIA – TAREFAS 2 E 3: FORMALIZAÇÃO E SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS	69
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	78
REFERÊNCIAS.....	82
APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL	85
ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO EDUCACIONAL	146

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa faz parte dos trabalhos realizados pelo Grupo *Matemática Escolar: Práticas, Pesquisas e Estudos* (MEPPE), vinculado à Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *campus* Londrina, que se dedica a investigar e analisar os processos de ensino e de aprendizagem de diferentes temas matemáticos ensinados na Educação Básica. Entre esses temas, destaca-se o Teorema de Pitágoras¹, objeto de estudo nesta pesquisa.

A escolha por investigar sobre geometria, em particular sobre o Teorema de Pitágoras, foi da própria pesquisadora, autora deste trabalho, a partir de sua prática docente e da percepção de que muitos de seus alunos apresentam dificuldades na aprendizagem desse tema.

Desse interesse pessoal e considerando que o mestrado profissional busca “[...] formar docentes capazes de elaborar perguntas de pesquisa que emergem de sua prática, apreendendo referenciais teórico-metodológicos capazes de auxiliá-los a problematizá-la” (Rizzatti *et al.* 2020, p.3), surge, então, a necessidade de buscar compreender (teórica e metodologicamente) formas de investigar a própria prática da docente.

Ao longo do ano de 2021, durante os encontros do Grupo MEPPE e leituras realizadas, como, por exemplo, Leivas (2012), Cargnin, Guerra e Leivas (2019) e Braga e Dorneles (2011), surgiu o interesse em conhecer e explorar características do chamado pensamento geométrico na perspectiva de van Hiele. A teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele é uma abordagem importante para o ensino de Geometria, pois busca entender como os alunos constroem o pensamento geométrico em diferentes níveis de desenvolvimento cognitivo. De acordo com Van de Valle (2009, p. 439, destaque do autor),

Nem todas as pessoas pensam sobre as ideias geométricas da mesma maneira. Certamente, nós não somos todos iguais, mas somos todos capazes de crescer e desenvolver nossa habilidade de pensar e raciocinar em contextos geométricos. A pesquisa de dois educadores holandeses, Pierre van Hiele e Dina van Hiele- Geldof, tem fornecido *insights* quanto às diferenças no pensamento geométrico e como essas diferenças são estabelecidas.

¹ Nesta pesquisa, utilizamos o termo “Teorema de Pitágoras”, mas reconhecemos, conforme aponta Roque (2012, p. 78), que a “escassez das fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático de nome Pitágoras”. De acordo com a autora, não se sabe ao certo se a Matemática atribuída a Pitágoras é uma criação de um matemático chamado Pitágoras, de integrantes de uma escola antiga chamada pitagórica (mas não de Pitágoras), ou dos neoplatônicos e neopitagóricos da Antiguidade (Roque, 2012). Para mais informações sobre esse debate, sugere-se a leitura do livro “História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas”, da autora Tatiana Roque.

Segundo van Hiele, os alunos passam por cinco níveis distintos² de pensamento geométrico, cada um caracterizado por diferentes formas de pensar sobre as figuras e propriedades geométricas (Kallef *et al.*, 1994). Essa teoria enfatiza a necessidade de se considerar o nível de pensamento do aluno ao planejar tarefas e abordagens de ensino em Geometria.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a Geometria é uma das cinco unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística) que compõem o currículo de Matemática para o Ensino Fundamental. De acordo com a BNCC, “A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (Brasil, 2018, p. 271).

A BNCC também indica a necessidade de se desenvolver o pensamento geométrico nos estudantes. Conforme o documento, “Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes” (Brasil, 2018, p. 271). Tem-se, portanto, a necessidade de se investigar formas de promover o desenvolvimento do pensamento geométrico em estudantes nos diferentes níveis de ensino.

Uma abordagem de ensino apropriada para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico é a do Ensino Exploratório, pois visa criar um ambiente de aprendizagem interativo, em que os alunos são incentivados a explorar, investigar e discutir conceitos matemáticos de forma ativa e autônoma (Canavarro, 2011). Nessa abordagem, os estudantes são colocados no centro do processo de aprendizagem, sendo desafiados a construir suas próprias ideias e soluções, o que promove um entendimento mais profundo e significativo dos conceitos abordados.

A teoria de van Hiele foi empregada como uma ferramenta para a compreensão das complexidades inerentes ao pensamento geométrico. Essa compreensão foi instrumental na concepção e adaptação de tarefas matemáticas específicas relacionadas ao Teorema de Pitágoras, as quais foram projetadas para serem integradas às aulas de Matemática seguindo a abordagem do Ensino Exploratório. O enfoque primordial dessa abordagem foi direcionado ao aprimoramento do pensamento geométrico dos alunos participantes. Com o intuito de atingir esse propósito, foram conduzidas seis aulas, cada uma com a extensão de 50 minutos, junto a uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, em uma instituição de ensino estadual no Estado do Paraná. Essas aulas foram realizadas no mês de dezembro de 2022. O corpus de

² Mais detalhes sobre este referencial teórico serão dados no Capítulo 2.

dados subjacente a esta pesquisa foi obtido através das gravações em áudio das discussões coletivas entre os alunos e a docente durante o transcorrer das aulas, proporcionando uma base rica e substancial para a análise crítica das manifestações do pensamento geométrico durante esse processo educacional.

Considerando a implementação de tarefas matemáticas centradas no Teorema de Pitágoras, adaptadas à teoria de van Hiele e incorporadas à abordagem do Ensino Exploratório, surge a seguinte indagação: como se manifestam e quais são as características do pensamento geométrico dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental durante a execução dessas tarefas?

O objetivo desta pesquisa é identificar e caracterizar manifestações do pensamento geométrico de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental ao trabalharem com tarefas matemáticas que visavam introduzir o Teorema de Pitágoras.

Assim, a pesquisa se deu por meio da análise das interações e abordagens ao lidarem com tarefas matemáticas específicas elaboradas com o propósito de introduzir o Teorema de Pitágoras. A ênfase está em desvelar os diferentes aspectos do pensamento geométrico manifestados durante esse processo, contribuindo assim para um entendimento do desenvolvimento desses alunos no contexto específico das aulas de Matemática sob a abordagem do Ensino Exploratório.

Por ser realizado no contexto de um Mestrado Profissional no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *multicampi* Londrina e Cornélio Procopio, foi produzido um Produto Educacional (PE) com foco no pensamento geométrico manifestado pelos estudantes ao trabalharem com tarefas exploratórias visando a introdução do Teorema de Pitágoras. Como apontam Rôcas e Bomfim (2018, p. 4), a “ideia é que, a partir do desenvolvimento de um produto, o professor que buscou a modalidade profissional [...] possa compreender a sua prática de maneira mais reflexiva”. Nesse sentido, o PE de título “*Tarefas matemáticas para o desenvolvimento do pensamento geométrico: explorando o Teorema de Pitágoras*” traz aspectos do planejamento das tarefas, do seu desenvolvimento em sala de aula e de reflexões sobre a própria prática da professora/pesquisadora.

A presente pesquisa está assim organizada: no segundo capítulo, apresentamos a *Fundamentação Teórica* da pesquisa, dividida em três seções: (i) inicialmente, tecemos algumas discussões a respeito do tema matemático em questão, a geometria; (ii) depois, trazemos algumas caracterizações para o pensamento geométrico, dando destaque para o desenvolvimento do raciocínio espacial e a compreensão de propriedades como aspectos

centrais desse pensamento; (iii) para finalizar o capítulo, apresentamos o Ensino Exploratório, a abordagem de ensino adotada na pesquisa. No terceiro capítulo, apresentamos a *Metodologia* da pesquisa dividida em duas seções: na primeira seção, detalhamos o contexto da pesquisa e os procedimentos metodológicos adotados, explicitando como os dados foram produzidos em uma turma de 9º ano e como foram analisados; na segunda seção, descrevemos brevemente como o PE foi construído. No quarto capítulo, realizamos a descrição e a análise dos dados, dando atenção a aspectos do pensamento geométrico manifestados pelos alunos. Por fim, no quinto capítulo, tecemos algumas considerações finais, trazendo nossas conclusões e reflexões sobre a pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo dedica-se a apresentar a base teórica que sustenta a pesquisa em questão. Foca-se, especificamente, no ensino da Geometria no Ensino Fundamental, levando em consideração duas perspectivas fundamentais: a abordagem da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento de referência para a educação no Brasil, e o desenvolvimento do pensamento geométrico conforme a teoria de van Hiele. Além disso, nossa fundamentação também se sustenta no enfoque do Ensino Exploratório, buscando explorar ativamente os conceitos geométricos por meio de tarefas práticas e investigativas.

Observa-se que, na área da Educação Matemática, surgem questionamentos que buscam compreender a Matemática de forma relevante e contextualizada, especialmente no contexto do ensino. Esses questionamentos refletem a preocupação em tornar o ensino da matemática mais atrativo aos estudantes, considerando sua aplicabilidade no mundo real e suas conexões com outras áreas do conhecimento.

Assim, busca-se incentivar a compreensão profunda dos conceitos matemáticos, proporcionando aos alunos a capacidade de aplicá-los em situações reais. O objetivo é ir além da simples memorização de fórmulas e algoritmos, incentivando uma compreensão sólida e a habilidade de resolver problemas de forma criativa.

A diversidade de conhecimentos e experiências dos estudantes também é um ponto importante a ser considerado. Como abordar essas diferenças e adaptar o ensino para atender às diferentes formas de aprender e se relacionar com a matemática? Esse questionamento implica uma busca por estratégias e abordagens pedagógicas que atendam às necessidades individuais dos alunos, promovendo uma educação inclusiva e equitativa.

Nessa vertente, a utilização de recursos e tecnologias educacionais é um aspecto em destaque no ensino da matemática. Como aproveitar essas ferramentas de maneira eficaz para ampliar as possibilidades de exploração e compreensão dos conceitos matemáticos? A incorporação de softwares, aplicativos e outras tecnologias pode enriquecer o processo de ensino e aprendizagem, permitindo uma abordagem mais interativa da matemática.

Por fim, a avaliação do processo de aprendizagem em matemática também é objeto de questionamento. Como ir além da simples memorização de procedimentos e avaliar a compreensão dos conceitos, a capacidade de resolver problemas e a aplicação criativa do conhecimento matemático? Essas reflexões buscam formas mais abrangentes de avaliação, que valorizem o pensamento crítico, a resolução de problemas e a capacidade dos estudantes de aplicar os conhecimentos matemáticos em diferentes contextos.

Em resumo, os questionamentos na área da Educação Matemática evidenciam a busca por um ensino mais relevante para os alunos e contextualizado. Eles refletem a importância de despertar o interesse e a compreensão dos estudantes em relação à matemática, considerando sua aplicação prática, suas conexões interdisciplinares e as necessidades individuais dos alunos.

Nesse contexto, a pesquisa em questão surge da percepção da importância de trazer significado para o ensino escolar da Matemática, abordando tanto seus conceitos fundamentais como sua trajetória histórica. Com base nessa motivação, a pesquisa inicia explorando o contexto histórico do pensamento geométrico, situando o objeto de investigação em sua evolução ao longo do tempo.

Sendo assim, no primeiro capítulo desta pesquisa, busca-se facilitar a compreensão do objeto de estudo ao leitor. Inicia-se com uma breve contextualização histórica da Geometria, abordando sua estruturação como disciplina escolar e destacando sua estrutura na BNCC, além de abordar a pertinência do Ensino Exploratório para a aprendizagem de conceitos geométricos.

2.1 A TRAJETÓRIA DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

A Geometria, palavra de origem grega que significa "geo" (terra) e "metria" (medir), é uma ciência que estuda as medidas das formas de figuras planas ou espaciais, bem como a posição relativa das figuras no espaço e suas propriedades. Calabria (2013) destaca que a Geometria é uma das áreas mais antigas da Matemática e era utilizada pelas primeiras civilizações para resolver problemas relacionados à medição de áreas de terras.

A Geometria desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de conceitos matemáticos e contribui para a resolução de problemas. Santos e Oliveira (2018) destacam que a compreensão dos conceitos geométricos é essencial para os estudantes, e enfatizam a importância de criar momentos de troca de ideias durante as aulas, tanto entre os alunos quanto com o professor, para promover a construção do conhecimento e tornar a aprendizagem mais prazerosa.

No entanto, a Geometria nem sempre recebeu a devida valorização nas escolas. Caldato e Pavanello (2015) apresentam momentos históricos da formação do ensino de Geometria no Brasil.

O primeiro momento histórico, apresentado por Caldato e Pavanello (2015), é o de que durante o período inicial da colonização portuguesa no Brasil, o foco principal era a

extração do pau-brasil, e a educação limitava-se à catequização e aculturação dos indígenas pelos Jesuítas. Somente com a vinda de membros da nobreza portuguesa e o início de atividades econômicas no país é que a educação começou a se direcionar também aos filhos dos colonos. No entanto, os indícios históricos apontam para uma precarização do ensino de matemática, que se restringia principalmente à aritmética, sem abordar áreas como geometria e álgebra. Isso pode ser atribuído ao formato de colonização adotado por Portugal, à concepção jesuíta da matemática e à falta de professores qualificados nessa área. Após a expulsão dos Jesuítas do Brasil, o sistema de ensino foi substituído pelas Aulas Régias, introduzindo disciplinas como aritmética, álgebra e geometria. Essa mudança ocorreu devido à preocupação em capacitar os colonos para proteger a terra e suas riquezas, visando à segurança e preservação da colônia.

Após a independência de Portugal do domínio espanhol, o governo português se empenhou em reestruturar diversos setores do país, incluindo o militar. No Brasil, conforme aponta Caldato e Pavanello (2015), essa reestruturação visava proteger a colônia de ataques externos, e foram contratados especialistas estrangeiros para capacitar os colonos em assuntos militares. A geometria desempenhou um papel fundamental nesse contexto, sendo a base matemática do curso de formação de engenheiros militares, cartógrafos, matemáticos, artilheiros e arquitetos. Livros como o "Exame de Artilheiros" e o "Exame de Bombeiros" foram elaborados para atender às necessidades práticas dessas atividades, abordando conceitos geométricos de forma pragmática. Além disso, Caldato e Pavanello (2015) argumentam que a introdução da geometria no currículo militar no Brasil representou um marco na educação matemática do país, delineando os currículos de matemática e geometria até o século XIX.

Já no Século XX, Caldato e Pavanello (2015, p. 118) afirmam que,

Desde que foi instituído um sistema de ensino regular no Brasil até a década de 60 do século XX, os temas geométricos sempre estiveram inseridos entre os conteúdos da Matemática a serem trabalhados na escola básica, situação que foi alterada com a adoção do ideário do Movimento de Matemática Moderna (MMM) no país [...] Deste modo, um dos principais legados da Matemática Moderna para o processo educacional no Brasil foi o abandono da geometria na escola básica que perdura até meados da década de 2010.

No final do século XX, autores como Pavanello (1993) discutem em profundidade as causas e consequências desse abandono. Já Lorenzato (1995) destaca que a ausência da geometria nas salas de aula pode ser atribuída a fatores como a falta de conhecimento dos professores nessa área e a ênfase excessiva dada ao livro didático. Esforços recentes têm sido feitos por educadores e propostas curriculares para recuperar o ensino da Geometria, mas

ainda enfrentam dificuldades, como a falta de formação adequada dos professores e a resistência em romper com métodos tradicionais de ensino.

Lorenzato (1995) alertou que se fazia necessário o ensino da Geometria na escola, pois, sem as habilidades provenientes destes conhecimentos, os estudantes não poderão desenvolver o pensamento geométrico e, sem essas habilidades, “[...] não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano” (Lorenzato, 1995, p. 5). Conclui, também, que o conhecimento da Geometria possibilita inúmeras interpretações do mundo, permitindo, assim, compartilhar ideias, instigar o raciocínio e resolver problemas.

Citações de Caldato e Pavanello (2015) e Gazire (2000) estão interligadas no contexto do ensino da Geometria e dos desafios enfrentados pelos educadores matemáticos. Caldato e Pavanello (2015) destacam os esforços contínuos dos educadores para recuperar o ensino da Geometria, ressaltando a importância dessas iniciativas na contemporaneidade, especialmente no que diz respeito ao trabalho e à formação do professor.

Por outro lado, Gazire (2000) complementa essa perspectiva ao mencionar obstáculos que dificultam o resgate do ensino da Geometria. Ele aponta para o que denomina de "ciclo vicioso", no qual a falta de aprendizado da Geometria por parte dos professores impacta diretamente na sua capacidade de ensiná-la. Esse ciclo cria uma barreira, pois professores que não dominam o conteúdo têm dificuldade em transmiti-lo de maneira eficaz aos alunos.

Além disso, Gazire (2000) destaca as dificuldades em romper com os procedimentos tradicionais da aula expositiva. Ele ressalta que os professores, ao terem sido ensinados de maneira tradicional, têm a tendência de reproduzir esse método em suas práticas pedagógicas, criando uma perpetuação de abordagens menos eficazes.

Portanto, a conexão entre as duas situações reside na persistência dos esforços para melhorar o ensino da Geometria, conforme apontado por Caldato e Pavanello (2015), e nos desafios identificados por Gazire (2000), que destacam as barreiras que ainda existem, como o ciclo vicioso e a resistência à mudança de métodos de ensino. Essa interligação evidencia a complexidade do cenário educacional e a necessidade de abordagens inovadoras e eficazes para superar tais desafios.

Em avanço, Leivas (2012) aborda a geometrização do currículo da Licenciatura em Matemática, ele o conceitua como sendo:

[...] um método de utilização das abordagens geométricas, como sendo um processo na busca da compreensão e representação, mentalizando os conceitos das diversas áreas do conhecimento matemático, bem como de outras ciências, por meio de

imaginação, intuição e visualização, fazendo com que a Geometria possa conduzir à geometrização. (LEIVAS, 2012, p. 186).

A esse processo, Leivas (2012) caracteriza como o pensamento geométrico avançado que envolve a formulação de conceitos por meio de um processo mental que combina experiências vivenciadas, conhecimentos intuitivos, imaginativos e visuais. Essa abordagem busca estabelecer relações entre essas experiências, permitindo a construção de ideias esquematizadas e a obtenção de abstração do conteúdo geométrico. Assim, faz-se necessário que o professor tenha domínio dos conteúdos a serem ensinados, pois, conforme Menezes *et al.* (2013, p. 244) é “pouco provável que os professores consigam que os seus alunos compreendam os conceitos matemáticos se eles próprios não os compreenderam”.

Na questão curricular, a BNCC tem como objetivo principal definir os conhecimentos, competências e habilidades que todos os estudantes brasileiros devem adquirir, no mínimo, ao longo da Educação Básica. No âmbito da Geometria, a BNCC estabelece os conteúdos e as habilidades que devem ser desenvolvidos pelos estudantes em cada etapa da Educação Básica. O documento enfatiza a importância de promover o raciocínio espacial, a capacidade de análise e interpretação de formas e a compreensão de propriedades geométricas, visando formar cidadãos capazes de se relacionar com o espaço e resolver problemas de natureza geométrica (Brasil, 2018).

De acordo com a BNCC, nos anos finais do Ensino Fundamental, “o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas” (Brasil, 2018, p. 272) nos anos iniciais do Ensino Fundamental. O Teorema de Pitágoras aparece, explicitamente, na Unidade Temática Geometria apenas para o 9º ano do Ensino Fundamental, no Objeto de Conhecimento *Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração* e com as seguintes habilidades previstas:

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

(Brasil, 2018, p. 319)

Além disso, a BNCC enfatiza que “a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas” (BRASIL, 2018, p. 272), como o Teorema de Pitágoras. Estudar formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais devem promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos (Brasil, 2018).

O pensamento geométrico é fundamental para investigar propriedades, formular conjecturas e apresentar argumentos geométricos convincentes para os que a estudam. Além disso, é importante considerar o aspecto funcional presente no estudo da Geometria, especialmente as transformações geométricas, incluindo as simetrias.

Ao estudar Geometria, os alunos são incentivados a desenvolver habilidades de construir e representar figuras geométricas, além de compreender a relação entre diferentes elementos e propriedades geométricas. Isso contribui para o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda dos conceitos geométricos e sua aplicação em diversos contextos.

2.2 O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ACORDO COM A TEORIA DE VAN HIELE

Ter clareza a respeito dos processos que envolvem o desenvolvimento do pensamento geométrico faz parte dessa busca por um ensino de Geometria de qualidade. Diversas pesquisas (Leivas, 2012; Leivas 2017; Cargnin; Guerra; Leivas, 2016) têm sido produzidas na direção de ampliar as compreensões a respeito do pensamento geométrico envolvido na aprendizagem de diferentes conceitos da Geometria.

Uma teoria bastante difundida a respeito do pensamento geométrico é a teoria de van Hiele, proposta pelos “professores holandeses Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof, que investigaram o desenvolvimento do pensamento em geometria e cujos resultados começaram a ser publicados em 1959” (Kaleff *et al.*, 1994, p. 3).

A origem da teoria de van Hiele se deu nas teses de doutorado de Dina van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. Mas, infelizmente, Dina morreu logo após concluir sua tese e Pierre foi quem, mais tarde, desenvolveu e difundiu a teoria em posteriores publicações.

Em sua tese, Pierre tentava explicar o motivo de os alunos terem problemas ao aprender geometria de maneira mais explicativa e descritiva, já a tese de Dina considerava o experimento educacional de maneira mais prescritiva em relação à classificação dos conteúdos de Geometria e atividades aplicadas aos alunos (Villiers, 2010).

Como apontam Cargnin, Guerra e Leivas (2016, p. 107), no Brasil, a teoria de van Hiele “[...] teve como principal divulgadora a professora Lilian Nasser, do Projeto ‘Fundão’ da Universidade Federal do Rio de Janeiro.”

De acordo com Kaleff *et al.* (1994, p. 3), “O Modelo de van Hiele do pensamento geométrico se coloca como guia para aprendizagem e para avaliação das habilidades dos

alunos em geometria”. Segundo os autores, esse modelo descreve as características do pensamento geométrico a partir de cinco níveis de compreensão: visualização (ou reconhecimento), análise, dedução informal (ou ordenação), dedução formal e rigor. Para descrever esses níveis, nos fundamentamos em Kaleff *et al.* (1994, p. 4-5):

NÍVEL 0 - VISUALIZAÇÃO ou RECONHECIMENTO. Neste estágio inicial, os alunos raciocinam basicamente por meio de considerações visuais. Conceitos geométricos são levados em conta como um todo, sem considerações explícitas das propriedades dos seus componentes [...].

NÍVEL 1 – ANÁLISE. Neste nível, os alunos raciocinam sobre conceitos geométricos, por meio de uma análise informal de suas partes e atributos mediante observação e experimentação. Os estudantes começam a discernir características das figuras geométricas, estabelecendo propriedades, que são então usadas para conceituarem classes e formas. Porém, eles ainda não explicitam inter-relações entre figuras ou propriedades.

NÍVEL 2 - DEDUÇÃO INFORMAL ou ORDENAÇÃO. Neste nível, os alunos formam definições abstratas, podendo estabelecer inter-relações das propriedades nas figuras (por exemplo, um quadrilátero com lados opostos paralelos necessariamente possui ângulos opostos iguais) e entre figuras (por exemplo, um quadrado é um retângulo porque ele possui todas as propriedades do retângulo).

NÍVEL 3 - DEDUÇÃO FORMAL. Neste nível, os alunos desenvolvem seqüências de afirmações deduzindo uma afirmação a partir de uma ou de outras. A relevância de tais deduções é entendida como um caminho para estabelecer uma teoria geométrica. Os alunos raciocinam formalmente no contexto de um sistema matemático completo, com termos indefinidos, com axiomas, com um sistema lógico subjacente, com definições e teoremas.

NÍVEL 4 – RIGOR. Neste nível, os alunos avaliam vários sistemas dedutivos com um alto grau de rigor. Comparam sistemas baseados em diferentes axiomas e estudam várias geometrias na ausência de modelos concretos.

A teoria de van Hiele destaca a importância do desenvolvimento progressivo do pensamento geométrico, passando pelos diferentes níveis de compreensão. Ressalta que os alunos precisam ser expostos a experiências práticas, desafios e tarefas que os levem a refletir e construir seu pensamento geométrico de maneira gradual. Ao compreender essa progressão, os educadores podem planejar estratégias de ensino que sejam adequadas ao nível de pensamento dos alunos, promovendo uma aprendizagem significativa e duradoura da Geometria.

Segundo Leivas (2017, p. 520), “o modelo é progressivo desde o nível inicial até o final, acreditando-se não ser possível que um estudante avance de um nível a outro sem ter adquirido as habilidades ou compreensões próprias do precedente”. No que se refere ao papel do professor, para van Hiele,

[...] o professor pode, por uma seleção adequada de tarefas, criar a situação ideal para o aluno alcançar um nível mais elevado de pensamento. Pode-se, também, afirmar que alcançar um nível mais elevado aumenta consideravelmente o potencial do aluno, ao mesmo tempo que torna muito difícil que um estudante volte a cair a um nível inferior de pensamento (VAN HIELE, 1990, p. 88 *apud* LEIVAS, 2017, p. 520).

O trecho citado reforça a visão de Leivas (2017) sobre o modelo progressivo da teoria de van Hiele em relação ao desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Essa progressão implica que um estudante não pode avançar para um nível mais alto sem ter adquirido as habilidades e compreensões próprias do nível precedente. Isso sugere que o desenvolvimento do pensamento geométrico requer uma base sólida e uma compreensão prévia dos conceitos geométricos mais básicos.

É importante ressaltar que alcançar um nível mais elevado de pensamento geométrico aumenta significativamente o potencial do aluno. Isso implica que o aluno desenvolva habilidades mais avançadas de resolução de problemas, justificação e argumentação geométrica. Além disso, uma vez que o aluno tenha atingido um nível mais elevado, dificulta-se retroceder para um nível inferior de pensamento geométrico.

Essa abordagem evidencia a importância de uma progressão gradual no ensino da Geometria, em que os estudantes são guiados a construir seu conhecimento de forma sólida e consistente. O professor desempenha um papel crucial na criação de um ambiente propício para o desenvolvimento do pensamento geométrico, oferecendo tarefas matemáticas apropriadas e um ambiente propício para reflexão e construção de conhecimento em sala de aula.

2.3 ENSINO EXPLORATÓRIO NAS AULAS DE MATEMÁTICA

O Ensino Exploratório nas aulas de Matemática é uma abordagem que busca tornar o aprendizado mais ativo e interessante para os alunos. Essa abordagem estimula os estudantes a explorarem, investigarem e descobrirem por conta própria. Nesta seção, estudam-se os princípios e benefícios do Ensino Exploratório na disciplina de Matemática.

De acordo com Canavarro, Oliveira e Menezes (2012), tanto em Portugal como em outros países, as diretrizes curriculares para o ensino de Matemática estabelecem metas desafiadoras para a aprendizagem dos estudantes. Essas metas exigem dos professores muito mais do que um ensino tradicional, em que o professor é frequentemente visto como alguém que apenas reproduz conteúdos e o aluno como um receptor passivo.

As orientações curriculares instigam os docentes a adotarem abordagens de ensino diversificadas, possibilitando aos estudantes uma compreensão significativa da Matemática. Isso envolve não apenas o entendimento dos significados matemáticos, como conceitos, definições e notações, mas também suas aplicações práticas. Em vez de apenas transmitir conhecimentos prontos, os professores são encorajados a promover a exploração ativa por

parte dos alunos, envolvendo-os em atividades que estimulem o pensamento crítico, a resolução de problemas e a descoberta de novos conceitos matemáticos.

Em relação à abordagem de ensino, para criar situações ideais para o aluno alcançar um nível mais elevado de pensamento, esta pesquisa fundamenta-se no Ensino Exploratório (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013; Canavarro; Oliveira; Menezes, 2014) enquanto uma prática para professores organizarem e gerirem discussões matemáticas coletivas em sala de aula. No Ensino Exploratório, a aula organiza-se em quatro fases: lançamento (introdução) de uma tarefa matemática, exploração (realização) da tarefa pelos estudantes, discussão da tarefa e sintetização das aprendizagens matemáticas (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013; Canavarro; Oliveira; Menezes, 2014). A Figura 1 abaixo mostra as ações intencionais do professor, na prática de Ensino Exploratório da Matemática.

Figura 1 – Ações intencionais do professor na prática de Ensino Exploratório

	Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
INTRODUÇÃO DA TAREFA	<i>Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos:</i> — Familiarizar com o contexto da tarefa — Esclarecer a interpretação da tarefa — Estabelecer objetivos <i>Promover a adesão dos alunos à tarefa:</i> — Estabelecer conexões com experiência anterior — Desafiar para o trabalho	<i>Organizar o trabalho dos alunos:</i> — Estipular tempos para o trabalho a desenvolver em cada uma das fases da aula — Definir formas de organização do trabalho (individual, pares, pequenos grupos, ...) — Organizar materiais da aula
REALIZAÇÃO DA TAREFA	<i>Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:</i> — Colocar questões e dar pistas — Sugerir representações — Focar ideias produtivas — Pedir clarificações e justificações <i>Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:</i> — Cuidar de promover o raciocínio dos alunos — Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos alunos	<i>Promover o trabalho de pares/grupos:</i> — Regular as interações entre alunos — Providenciar materiais para o grupo <i>Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:</i> — Pedir registros escritos — Fornecer materiais a usar — Dar tempo para preparar a apresentação <i>Organizar a discussão a fazer:</i> — Identificar e selecionar resoluções variadas (com erro a explorar, menos ou mais completas, com representações relevantes) — Sequenciar as resoluções selecionadas
DISCUSSÃO DA TAREFA	<i>Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos:</i> — Pedir explicações claras das resoluções — Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas — Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas <i>Regular as interações entre os alunos na discussão:</i> — Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas — Incentivar análise, confronto e comparação entre resoluções — Identificar e colocar à discussão erros matemáticos das resoluções	<i>Criar ambiente propício à apresentação e discussão:</i> — Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos — Providenciar a reorganização dos lugares/ espaço para a discussão — Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados <i>Gerir relações entre os alunos:</i> — Definir a ordem das apresentações — Cuidar de justificar as razões da não apresentação de algumas resoluções — Promover e gerir as participações dos alunos na discussão
SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS MATEMÁTICAS	<i>Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa:</i> — Identificar conceito(s) matemático(s), clarificar a sua definição e explorar representações múltiplas — Identificar procedimento(s) matemático(s), clarificar as condições da sua aplicação e rever a sua utilização — Reconhecer o valor de uma regra com letras <i>Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a capacidades transversais suscitadas pela exploração da tarefa:</i> — Identificar e relacionar dimensões da(s) capacidade(s) transversal(ais) presentes — Reforçar aspetos-chave para o seu desenvolvimento <i>Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores:</i> — Evidenciar ligações com conceitos matemáticos, procedimentos ou capacidades transversais anteriormente trabalhados	<i>Criar ambiente adequado à sistematização:</i> — Focar os alunos no momento de sistematização coletiva — Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada <i>Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização:</i> — Fazer registo em suporte físico ou informático (quadro, QI, acetato, cartaz ...) por aluno ou professor — Pedir registo escrito nos cadernos dos alunos

Fonte: Oliveira, Menezes e Canavarro (2013, p. 5)

A partir da Figura 1, pode-se perceber que o Ensino Exploratório se distingue do chamado ensino direto quando olhamos para os “[...] papéis desempenhados pelo professor e pelos alunos, pelas tarefas que são propostas e como são geridas, e pela comunicação originada na aula” (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013, p. 3). O ensino direto, na perspectiva de Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), é aquele em que a aula é centrada no professor e o conhecimento é transmitido aos alunos (características do ensino tradicional da Matemática),

e o Ensino Exploratório difere dessas características. Sobre as 4 fases, de acordo com Stein *et al.* (2008), elas acontecem da seguinte forma:

Lançamento (Introdução) da Tarefa Matemática: nesta fase, o professor apresenta aos alunos uma tarefa matemática desafiadora. Pode ser um problema, uma situação-problema, um desafio ou uma investigação matemática. O objetivo é despertar a curiosidade e a motivação dos estudantes, fornecendo um contexto que estimule a exploração e a busca por soluções.

Exploração (Realização) da Tarefa pelos Estudantes: nessa etapa, os alunos são convidados a explorar a tarefa de forma autônoma (individualmente ou em grupos). Eles são encorajados a experimentar diferentes estratégias, testar hipóteses, utilizar materiais manipulativos e tecnologias, e realizar investigações para resolver o problema proposto. O papel do professor é de facilitador, fornecendo orientações e apoio conforme necessário, mas permitindo que os alunos assumam a liderança de sua própria aprendizagem.

Discussão da Tarefa: após a fase de exploração, é hora de promover a discussão coletiva da tarefa. Os alunos têm a oportunidade de compartilhar suas descobertas, apresentar suas estratégias, explicar seu raciocínio e discutir diferentes abordagens para resolver a tarefa. O professor desempenha o papel de mediador, conduzindo as discussões e estimulando a participação ativa de todos os estudantes. Essa troca de ideias e argumentações matemáticas contribui para o aprofundamento do entendimento dos conceitos e para a construção coletiva do conhecimento.

Sintetização das Aprendizagens Matemáticas: na última fase, ocorre a síntese das aprendizagens matemáticas alcançadas. O professor recapitula os principais conceitos, estratégias e conclusões discutidos durante a aula, destacando as ideias essenciais e as relações matemáticas envolvidas na tarefa. Os alunos têm a oportunidade de refletir sobre o que aprenderam, consolidar seu conhecimento e fazer conexões com outros conceitos e situações. Essa síntese ajuda a reforçar a compreensão dos estudantes e a fixação dos aprendizados realizados durante a aula.

Nesse tipo de abordagem, os estudantes são encorajados a resolver problemas, formular hipóteses, experimentar diferentes estratégias e comunicar suas descobertas. O professor desempenha um papel de facilitador, guiando os alunos durante a exploração, fazendo perguntas e incentivando a reflexão sobre os resultados obtidos. Para favorecer esse trabalho do professor, Stein *et al.* (2008) apresentam cinco práticas para orquestrar discussões matemáticas produtivas em torno de tarefas matemáticas ricas. Essas práticas são: *antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões.*

A prática de *antecipar* realiza-se durante o trabalho de planejamento da aula. Segundo Canavarro (2011), a antecipação corresponde a uma previsão, por parte do professor, de como seus alunos poderão abordar as tarefas propostas. Ao antecipar, o professor busca prever as formas de interpretar e o envolvimento dos alunos na tarefa; elencar uma diversidade de estratégias, corretas e incorretas, que os alunos poderão lançar mão, considerando os diferentes graus de sofisticação; relacionar essas estratégias com os conceitos, representações, ou procedimentos que o professor deseja que os alunos aprendam e/ou com as capacidades que quer que desenvolvam (Canavarro, 2011).

A prática de *monitorar* realiza-se, de acordo com Canavarro (2011), já em sala de aula e é apoiada pelo trabalho realizado pelo professor na antecipação. Essa prática envolve observar e ouvir os alunos durante o desenvolvimento da tarefa, avaliando a validade matemática das ideias e respostas manifestadas e interpretando o pensamento matemático dos alunos (Stein *et al.*, 2008). Neste momento, o professor apropria-se das estratégias e resoluções que os alunos apresentam durante o trabalho autônomo com a tarefa (Canavarro, 2011).

A prática de *selecionar* também ocorre em sala de aula, nos minutos finais do trabalho autônomo dos alunos, e é facilitada pelo trabalho realizado pelo professor durante a prática de monitorar (Canavarro, 2011). Essa prática envolve identificar e selecionar os alunos/grupos cujas respostas são relevantes para partilhar com toda a turma na fase de discussão da tarefa, de modo a proporcionar uma diversidade de ideias matemáticas adequadas ao propósito da aula (Stein *et al.*, 2008).

A prática de *sequenciar* ocorre quase que simultaneamente com a prática de *selecionar* (Canavarro, 2011). Essa prática é “orientada pelo percurso de exploração das ideias matemáticas que o professor entende ser mais adequado para os seus alunos tendo em vista atingir o propósito matemático da aula” (Canavarro, 2011, p. 15). Refere-se à ordem das apresentações das resoluções dos alunos para toda a turma e dos objetivos visados pelo professor. Os critérios para sequenciar são definidos pelo professor (Stein *et al.*, 2008).

A prática de *estabelecer conexões* ocorre imediatamente após a discussão das diferentes resoluções dos alunos ou, até mesmo, durante (Canavarro, 2011). Essa prática envolve comparar e confrontar as diferenças e semelhanças apresentadas nas resoluções, estabelecendo conexões matemáticas entre elas (Stein *et al.*, 2008). Canavarro (2011, p. 16) destaca que:

[...] o propósito das discussões não é realizar um desfile de apresentações separadas de diferentes respostas ou estratégias de resolver uma dada tarefa; o propósito das discussões é relacionar as apresentações com vista ao desenvolvimento colectivo de

ideias matemáticas poderosas que sintetizam as aprendizagens matemáticas dos alunos.

Essa abordagem valoriza a participação ativa dos alunos no processo de construção do conhecimento, incentivando-os a explorar, questionar e refletir sobre os conceitos e procedimentos matemáticos. A partir de tarefas matemáticas desafiadoras, os alunos são incentivados a utilizar suas habilidades de pensamento crítico e criativo, formulando hipóteses e testando suas ideias.

Ao promover a interação entre os alunos e entre esses e o professor, o Ensino Exploratório cria um ambiente propício para a troca de ideias, discussões e debates matemáticos. Esse diálogo constante contribui para o aprofundamento da compreensão dos conceitos, bem como para o desenvolvimento das habilidades de comunicação matemática dos alunos.

Assim, considerando os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e a abordagem do Ensino Exploratório, realiza-se a presente pesquisa, cuja descrição dos procedimentos metodológicos encontra-se no próximo capítulo.

3 METODOLOGIA

A natureza da presente pesquisa caracteriza-se como qualitativa, pois, fundamenta-se na premissa de que o pesquisador estabelece contato direto e prolongado com o ambiente e a situação que está sendo investigada (Lüdke; André, 2013). Neste tipo de abordagem, a compreensão e interpretação dos fenômenos são enfatizadas buscando captar a riqueza e complexidade das experiências dos participantes envolvidos. As informações coletadas são descritivas e detalhadas, permitindo uma análise aprofundada dos contextos e das percepções dos sujeitos, o que contribui para o entendimento das nuances e das múltiplas perspectivas envolvidas no objeto de estudo. Ao adotar uma abordagem qualitativa, busca-se explorar e compreender os significados, as interações e os processos subjacentes, de modo a enriquecer a compreensão do fenômeno estudado de forma mais holística e contextualizada.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa se concentra na exploração dos fenômenos em seu ambiente natural como a principal fonte de dados. Essa abordagem tem um caráter descritivo, buscando compreender e retratar minuciosamente os eventos, comportamentos e experiências dos participantes. Ao conduzir esse tipo de pesquisa, o processo desempenha um papel fundamental, sendo valorizado em relação ao produto final. O enfoque está na compreensão aprofundada dos eventos e das interações ao longo do tempo, em vez de se limitar a respostas ou resultados específicos.

Além disso, na análise dos dados, os pesquisadores adotam uma abordagem indutiva, ou seja, partem das informações coletadas para identificar padrões, temas e significados emergentes (Lüdke; André, 2013). Isso implica em valorizar os pontos de vista e perspectivas dos participantes, dando importância às interpretações subjetivas que eles atribuem aos acontecimentos estudados.

Esta pesquisa é concebida como uma trajetória singular, vivenciada e analisada pela pesquisadora em um contexto cultural e temporal específico. É importante ressaltar que os resultados obtidos não devem ser considerados como verdades absolutas, mas, sim, como indicativos que buscam contribuir com estudos em Educação Matemática, especialmente no que diz respeito ao ensino de Geometria com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Por meio dessa investigação, pretende-se fornecer percepções e informações que possam enriquecer a compreensão desse campo de estudo, trazendo novas perspectivas e abordagens para a prática pedagógica. A ênfase está centrada no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, identificando desafios e explorando possíveis soluções para aprimorar o ensino e a aprendizagem nessa área específica da matemática. Este esforço

visa contribuir significativamente para a compreensão do tema, sendo que o foco mais específico desta pesquisa é identificar e caracterizar as manifestações do pensamento geométrico de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental ao abordarem tarefas matemáticas destinadas a introduzir o Teorema de Pitágoras.

Sobre a análise dos dados nesta pesquisa, utilizamos áudios de interações da professora/pesquisadora com a turma inteira durante atividades como o lançamento, discussão e sistematização de tarefas, além de áudios de um grupo específico composto por quatro integrantes durante a execução das tarefas ao longo de três dias de aula. Devido à limitação de tempo para o tratamento dos dados, optamos por concentrar nossa análise em apenas um grupo ao longo desse período. A escolha desse grupo foi feita pela própria professora/pesquisadora, que identificou interações positivas e manifestações promissoras do pensamento geométrico nesse grupo.

As análises concentraram-se no pensamento geométrico demonstrado pelos alunos de um grupo específico, contudo, em alguns momentos, foram consideradas também as falas de alunos de outros grupos para esclarecer os eventos ocorridos durante as aulas.

3.1 CONTEXTO DA PESQUISA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Retoma-se o objetivo da pesquisa, a saber: identificar e caracterizar manifestações do pensamento geométrico de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental ao trabalharem com tarefas matemáticas que visavam introduzir o Teorema de Pitágoras. Para tanto, foram planejadas três tarefas matemáticas. Inicialmente, essas tarefas foram pensadas coletivamente em reuniões do grupo MEPPE, a partir de discussões e contribuições dos professores, aproveitando as diferentes experiências³ dos membros do grupo. Após esse momento coletivo, as tarefas foram refinadas e os planejamentos das aulas foram concluídos pela pesquisadora juntamente com seu orientador.

³ Durante o segundo semestre de 2022, período em que foi realizado o planejamento das aulas para a presente pesquisa, o grupo era composto por 9 pessoas com atuações em diferentes contextos: professores do Ensino Superior, professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental e professores dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Três integrantes com doutorado em Educação Matemática, um com mestrado profissional em Ensino de Matemática (pelo PPGMAT) e cinco estavam cursando o mestrado profissional em Ensino de Matemática (pelo PPGMAT).

² De acordo com Larrosa Bondía (2019, p. 26-27), “O saber da experiência se dá na relação entre o conhecimento e a vida humana. De fato, a experiência é uma espécie de mediação entre ambos. É importante, porém, ter presente que, do ponto de vista da experiência, nem ‘conhecimento’ nem ‘vida’ significam o que significam habitualmente”.

O planejamento foi feito considerando seis aulas a serem realizadas em uma turma, composta por 22 alunos, do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado do Paraná. A pesquisadora, docente efetiva do Estado do Paraná, era a própria professora regente da turma.

A pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisas envolvendo seres humanos da UTFPR, sob o número do CAAE: 59064522.0.0000.5547. Alguns dias antes do início das aulas que seriam dedicadas à pesquisa, a professora conversou com os alunos em sala de aula, explicou a pesquisa e como seriam as aulas, apresentou a pesquisa e forneceu o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para os pais e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) para os alunos. Essa abordagem contou com o apoio e a colaboração da direção da escola e coordenação.

A coleta de dados ocorreu ao longo de três dias, totalizando seis aulas de cinquenta minutos cada. No primeiro dia (05 de dezembro de 2022), foram realizadas duas aulas, no segundo dia (06 de dezembro de 2022), duas aulas, e no terceiro dia (07 de dezembro de 2022), mais duas aulas. Entre cada dia de aula, a pesquisadora e seu orientador conversavam para realizar possíveis adaptações no planejamento da próxima aula, levando em consideração a aula anterior.

O objetivo geral das aulas foi introduzir o Teorema de Pitágoras por meio de tarefas matemáticas. Para tanto, esperava-se que as tarefas permitissem que os alunos: (i) resgatassem conhecimentos prévios que pudessem contribuir, posteriormente, para a compreensão do Teorema de Pitágoras; (ii) explorassem características e propriedades de um triângulo e, em particular, de triângulo retângulo⁴; e (iii) percebessem, por eles próprios, que, no triângulo retângulo, a medida da hipotenusa⁵ ao quadrado é igual à soma das medidas de cada cateto ao quadrado. As aulas foram desenvolvidas seguindo as quatro fases do Ensino Exploratório.

A tarefa 1 está apresentada no Quadro 1.

Quadro 1 – Tarefa 1: reconhecendo um triângulo

(Primeiro momento)

- 1- Como você explicaria ao seu colega ao lado o que é um triângulo? Descreva com suas palavras em seu caderno.
- 2- Faça a representação geométrica de um triângulo. Utilizando a régua, meça e anote a

⁴ Definição: Um triângulo é retângulo se contém um ângulo reto.

⁵ Definição: Em um triângulo retângulo o maior lado é chamado “hipotenusa” e os outros dois são chamados “catetos”.

medida de cada lado.

- 3- Com três segmentos de reta é sempre possível formar um triângulo?
- 4- Como você explicaria para seu colega o que é um triângulo retângulo? Faça a representação geométrica de um triângulo retângulo no seu caderno.

(Segundo momento)

Com os palitos que receberam, montem um Triângulo Retângulo utilizando o molde abaixo.



- 1- O que vocês perceberam de diferente na construção desse triângulo em relação aos anteriores?
- 2- Será que é possível construir um triângulo retângulo, com os mesmos segmentos de reta que já foram construídos os outros triângulos anteriores?
- 3- Com o ângulo de 90° fixado, será que é possível construir esse triângulo retângulo com qualquer outra medida de segmento de reta?
- 4- Há necessidade de uma medida específica para completar o lado que está faltando?
- 5- E agora, após encontrarem o segmento de reta que completa o triângulo retângulo, o que perceberam de diferente na construção?

Escreva o que você concluiu com a realização dessa tarefa.

Fonte: dados da pesquisa (2024)

A Tarefa 1 tem como objetivo resgatar o conhecimento que os alunos já possuem a respeito do que é um triângulo, da condição de existência⁶ de um triângulo e, em particular, do que é um triângulo retângulo. Os estudantes devem reconhecer quando três segmentos de reta podem ou não representar um triângulo e perceber que, mesmo que três segmentos de reta formem um triângulo, nem todos os triângulos serão retângulos. Para tanto, jogos com três

⁶ Condição de existência de um triângulo: em qualquer triângulo, a medida de qualquer lado é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

palitos de madeira com diferentes comprimentos, conforme Figura 2, seriam disponibilizados aos alunos.

Figura 2 – Jogos de três palitos de madeira com diferentes comprimentos



Fonte: dados da pesquisa (2024)

A Tarefa 1 permite que os alunos manifestem, principalmente, os níveis 0, 1 e 2 da teoria de van Hiele em relação ao conceito de triângulo e triângulo retângulo.

Nível 0 (Visualização): os alunos são desafiados a fazer uma representação geométrica de um triângulo e a medir seus lados usando uma régua. Isso envolve a visualização de formas geométricas e o reconhecimento básico de suas características.

Nível 1 (Análise): os alunos são incentivados a pensar sobre e experimentar, por meio do trabalho com palitos, a condição de existência de um triângulo, ou seja, se é possível formar um triângulo com três segmentos de reta dados. Eles também são solicitados a explicar o que é um triângulo retângulo, fazendo uma representação geométrica dele. Isso requer análise das propriedades dos triângulos e do triângulo retângulo em particular.

Nível 2 (Dedução Informal): os alunos formam definições abstratas, como, por exemplo, a ideia de condição de existência de um triângulo, mesmo que de maneira informal. Além disso, podem estabelecer inter-relações das propriedades nas figuras, por exemplo, perceber que em um triângulo retângulo, o lado de maior medida é oposto ao ângulo de 90° .

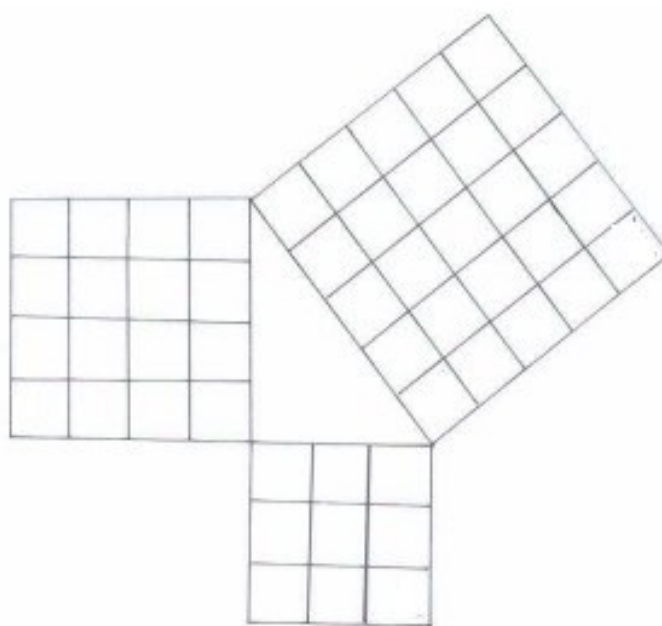
Embora a tarefa não vise diretamente os níveis mais avançados da teoria de van Hiele, como dedução formal e rigor, ela fornece uma base sólida para a compreensão inicial dos conceitos geométricos relacionados a triângulos e triângulos retângulos, e isso pode levar a acontecer momentos que estas etapas podem ocorrer nesta tarefa. Os alunos são desafiados a

pensar criticamente sobre as condições que permitem formar um triângulo e a reconhecer as características específicas de um triângulo retângulo, o que é fundamental para seu desenvolvimento posterior em Geometria.

A Tarefa 2 está apresentada no Quadros 2.

Quadro 2 – Tarefa 2: identificando a relação entre os lados de um triângulo retângulo

- 1- Com base no triângulo retângulo que você montou com os palitos, complete o triângulo impresso na folha de sulfite e meça seus lados. Desenhe um quadrado em cada lado do triângulo que você completou.
- 2- Depois de desenhado os quadrados a partir dos lados do triângulo, recorte e cole quadradinhos da malha quadriculada colorida preenchendo as áreas dos quadrados.

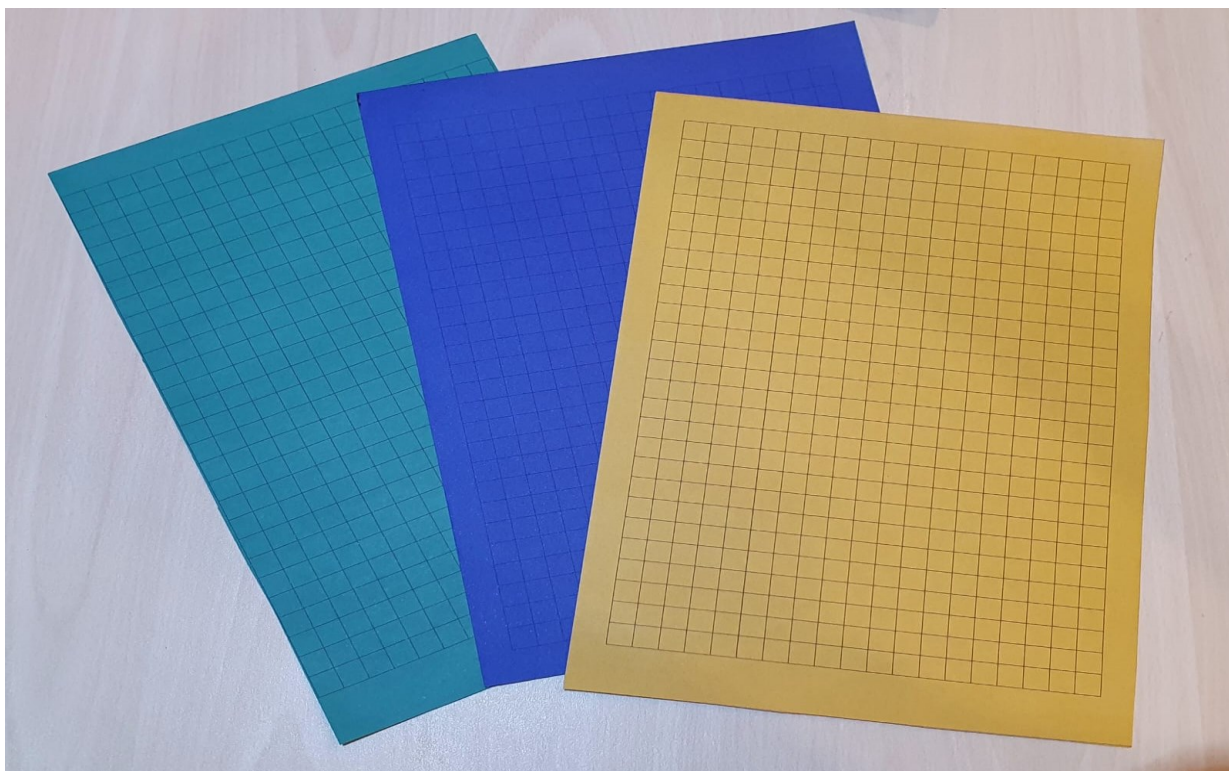


- a) Calcule a área dos dois quadrados menores.
- b) Some a área desses dois quadrados.
- c) Calcule a área do quadrado maior.
- d) O que conseguiu observar a partir das áreas dos quadrados que você calculou.

Fonte: dados da pesquisa (2024)

A Tarefa 2 tem como objetivo permitir que os alunos percebam, por eles próprios, que no triângulo retângulo a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma das medidas de cada cateto ao quadrado. Para isso, malhas quadradas coloridas, conforme Figura 3, seriam disponibilizadas aos alunos.

Figura 3 – Malha quadriculada colorida



Fonte: dados da pesquisa (2024)

A Tarefa 2 permitirá que os alunos manifestem os níveis 0 (Visualização), 1 (Análise), 2 (dedução informal ou ordenação) e 3 (dedução formal) da teoria de van Hiele em relação ao conceito de triângulo retângulo e à relação entre os lados desse triângulo.

Nível 0 (*Visualização*): os alunos são desafiados a fazer uma representação geométrica dos quadrados formados pelos lados dos triângulos e a calcular a medida de suas áreas por meio de pequenos quadradinhos coloridos. Isso envolve a visualização de formas geométricas e o reconhecimento básico de suas características.

Nível 1 (*Análise*): os alunos serão convidados a completar um triângulo retângulo com base no modelo montado com palitos e, em seguida, desenhar quadrados em cada lado desse triângulo. Isso exigirá que os alunos analisem informações geométricas e visualizem a relação entre os lados do triângulo retângulo e os quadrados adicionados. Eles também serão solicitados a calcular as áreas dos quadrados e somá-las, envolvendo a manipulação de informações e o uso de fórmulas geométricas.

Nível 2 (*dedução informal ou ordenação*): após manipular com diferentes triângulos e calcular a área dos quadrados formados a partir dos lados dos triângulos, os alunos poderão

deduzir, ainda de maneira informal, que, no caso dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo, a medida da área do quadrado maior será igual à soma das medidas das áreas dos dois quadrados menores; e que isso não é válido para outros triângulos.

Nível 3 (*dedução formal*): ao perceber que, no caso dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo, a medida da área do quadrado maior será igual à soma das medidas das áreas dos dois quadrados menores, os alunos poderão organizar e formalizar as afirmações: o triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto; o lado de maior medida de um triângulo retângulo é o lado oposto ao ângulo reto e é chamado de hipotenusa; no triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma das medidas de cada cateto ao quadrado.

Assim, a Tarefa 2 incentiva os alunos a explorarem as propriedades dos triângulos retângulos por meio da construção e análise de modelos, bem como pelo cálculo das áreas dos quadrados associados. Isso os levam a descobrirem por si mesmos a relação fundamental entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, que é o Teorema de Pitágoras.

A tarefa 3 está apresentada no Quadro 3.

Quadro 3 – Tarefa 3: reconhecendo um triângulo retângulo

Quais dos triângulos abaixo parecem ser um triângulo retângulo?

The image shows 16 triangles labeled a) through p) arranged in a 4x4 grid. The triangles are as follows:

- a) Right-angled triangle with the right angle at the bottom-left vertex.
- b) Acute triangle.
- c) Acute triangle.
- d) Obtuse triangle.
- e) Right-angled triangle with the right angle at the bottom-left vertex.
- f) Acute triangle.
- g) Obtuse triangle.
- h) Right-angled triangle with the right angle at the bottom-right vertex.
- i) Acute triangle.
- j) Obtuse triangle.
- k) Acute triangle.
- l) Right-angled triangle with the right angle at the bottom-right vertex.
- m) Right-angled triangle with the right angle at the bottom-left vertex.
- n) Obtuse triangle.
- o) Obtuse triangle.
- p) Obtuse triangle.

Fonte: dados da pesquisa (2024)

A Tarefa 3 envolve a identificação de triângulos retângulos em um conjunto de triângulos diversos. O objetivo principal é que os alunos reconheçam as características específicas de um triângulo retângulo, principalmente a presença de um ângulo reto (90 graus). Além disso, a tarefa visa aprofundar a compreensão dos alunos sobre a relação entre os lados de um triângulo retângulo, em particular, o Teorema de Pitágoras.

A tarefa começa com uma introdução em sala de aula, onde os alunos são lembrados das características de um triângulo retângulo e da importância do ângulo reto. Eles também são informados sobre o Teorema de Pitágoras, que estabelece a relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

Os alunos recebem uma folha com vários triângulos desenhados, variando em tamanho e forma. Alguns deles são triângulos retângulos, enquanto outros não têm essa característica. A tarefa dos alunos é examinar cada triângulo e identificar aqueles que são triângulos retângulos, marcando o ângulo reto em cada um deles.

Após identificar os triângulos retângulos, os alunos participam de uma discussão em grupo, compartilhando suas descobertas e explicando por que escolheram esses triângulos como triângulos retângulos. Isso estimula a comunicação e a argumentação matemática entre os alunos.

Além da identificação, os alunos são desafiados a aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular as medidas dos lados restantes dos triângulos retângulos, se necessário. Isso ajuda a reforçar a relação entre os lados de um triângulo retângulo e a aplicação prática do teorema.

No contexto da teoria de van Hiele, a Tarefa 3 permite que os alunos manifestem principalmente os níveis 1 e 2. Eles analisam as características dos triângulos para identificar triângulos retângulos (nível 1) e começam a compreender a relação entre os lados desses triângulos, especialmente o Teorema de Pitágoras (nível 2).

A ordem das tarefas foi cuidadosamente planejada visando facilitar a progressão lógica no processo de aprendizagem dos alunos em relação aos triângulos e triângulos retângulos. A Tarefa 1 foi concebida como ponto de partida, destinada a introduzir conceitos fundamentais relacionados a triângulos, incluindo a definição de triângulos e a viabilidade de formar um triângulo com três segmentos de reta. Ela também abordou o conceito de triângulo retângulo, fornecendo uma introdução prática à sua construção com um ângulo de 90 graus.

Em seguida, a Tarefa 2 foi projetada para ampliar a compreensão dos alunos sobre triângulos retângulos, concentrando-se nas relações entre os lados e na área dos quadrados

derivados dos lados do triângulo. Isso permitiu que os alunos explorassem o Teorema de Pitágoras, uma propriedade fundamental dos triângulos retângulos.

A Tarefa 3, colocada por último no planejamento, desafiou os alunos a aplicar o conhecimento adquirido nas tarefas anteriores. Eles foram solicitados a identificar quais dos triângulos apresentados eram triângulos retângulos, constituindo um exercício prático de avaliação. Esta ordem foi adotada para que os alunos pudessem usar a base de conhecimento construída nas tarefas anteriores ao enfrentar a Tarefa 3, promovendo assim, uma compreensão sólida e a aplicação prática de conceitos geométricos.

No Quadro 4, apresentamos o planejamento do primeiro dia de aula.

Quadro 4 – Planejamento das aulas do dia 05 de dezembro de 2022

Materiais utilizados: nessa aula será utilizado quadro de giz para apresentação das questões a serem discutidas entre os grupos; régua para a construção do triângulo; palitos cortados com diferentes medidas (três jogos com diferentes medidas, sendo que dois jogos não formam um triângulo e um jogo forma um triângulo (diferente de um triângulo retângulo); imagem impressa com dois segmentos de reta perpendiculares; jogos com três palitos com medidas que formam um triângulo retângulo.

Início da aula: recolhimento dos termos (TCLE e TALE); divisão dos alunos em grupos de 4 a 5 integrantes; distribuição dos gravadores ligados sobre as mesas dos grupos (um gravador permanecerá com a professora pesquisadora).

(Tempo estimado para essa etapa: 15 minutos)

Lançamento (Introdução) da Tarefa Matemática: as questões referentes à 1ª Tarefa serão escritas no quadro de giz. Em seguida, a professora lerá o enunciado buscando garantir que os alunos compreendam o que é para ser feito.

(Tempo estimado para essa etapa: 15 minutos)

Exploração (Realização) da Tarefa pelos estudantes: os alunos irão copiar e discutir enquanto realizam cada questão, registrando suas respostas. Durante a discussão, a professora irá circular pela sala, passando pelos grupos, monitorando, indagando-os quanto ao desenvolvimento da tarefa, estimulando o pensamento geométrico e promovendo diferentes formas de pensar, por meio de questionamentos para haver uma interação entre

os integrantes do grupo. A professora não deve validar respostas dos alunos ou dar respostas que diminuam o nível cognitivo da tarefa.

Enquanto circula, a professora deve observar as diferentes formas de resolver dos alunos e *selecionar* (mentalmente) quais formas deverão ser levadas para plenária. Essas resoluções selecionadas podem conter formas corretas ou incorretas de resolver a tarefa. Além disso, após selecionar as resoluções, a professora deverá estabelecer uma ordem (*sequenciar*) em que elas serão apresentadas. O critério para a ordem de apresentação poderá ser definido pela professora, por exemplo: primeiro convidar um grupo que fez uma resolução incorreta, em seguida aquele que fez uma resolução usando figuras, depois convidar um grupo que fez uma resolução numérica, depois convidar um grupo que fez uma resolução que chegou a uma generalização.

(Tempo estimado para essa etapa: 20 - 25 minutos)

Discussão da tarefa: após os grupos finalizarem a realização da tarefa, a professora convidará os grupos para apresentarem uma maneira de resolver. Não há necessidade de chamar todos os grupos e nem precisa colocar estratégias de resolução repetidas na lousa, pois a intenção é apresentar estratégias (corretas ou incorretas) distintas e estabelecer conexões matemáticas entre elas: como que uma resolução correta pode ajudar a compreender uma resolução incorreta? Como que o grupo que resolveu por meio de figuras pode passar a compreender como o grupo resolveu de maneira puramente numérica? Como que a maneira do grupo que generalizou pode auxiliar os alunos a perceberem a generalização? A discussão entre os alunos sobre a formação de triângulos com três segmentos de reta de tamanhos quaisquer revela uma progressão no pensamento matemático. Inicialmente, os alunos estão abordando o problema de maneira puramente numérica, considerando as medidas específicas dos segmentos de reta em questão. Eles questionam a possibilidade de formar um triângulo em cenários em que os segmentos de reta podem ser de diferentes tamanhos.

No entanto, à medida que a discussão avança, os alunos começam a perceber a importância da condição de existência do triângulo. Isso indica um movimento em direção à generalização, em que podem começar a extrair um princípio geral que se aplica a uma variedade de situações. Eles podem progredir de uma abordagem puramente numérica, que se concentra em casos específicos, para uma compreensão mais abstrata e generalizada da condição de existência de um triângulo.

A generalização completa desse conceito envolveria a compreensão da condição de existência como uma regra geral que se aplica a todos os triângulos, independentemente das medidas específicas dos lados. Portanto, essa discussão reflete o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, passando do nível de consideração numérica para um nível mais abstrato, onde eles começam a identificar princípios geométricos fundamentais que se aplicam a uma ampla gama de situações. É uma demonstração de como a compreensão matemática evolui à medida que os alunos exploram e discutem conceitos em sala de aula. Toda essa etapa de discussão, por meio da plenária, é extremamente importante para o Ensino Exploratório.

A professora precisa envolver os estudantes na discussão (não é um momento para a professora dizer o que é certo ou errado e fazer correções), incentivar a análise e a comparação entre resoluções, além de identificar e discutir os erros matemáticos. Se a professora perceber que os alunos chegaram a uma generalização, estimulá-los a pensar sobre a necessidade de uma regra/condição para existirem medidas adequadas para que os segmentos de reta se completem e formem um triângulo.

(Tempo estimado para essa etapa: 25 minutos)

Sistematização das aprendizagens matemáticas: nessa tarefa, o objetivo é que os alunos conheçam e/ou reconheçam a construção de um triângulo; que eles percebam que, para se completar um triângulo, um dos lados deve ser menor que a soma dos outros dois e que somente com essa regra é possível a construção de qualquer triângulo. A partir daí, avançar para a construção do triângulo retângulo, que se diferencia dos demais pelo fato de possuir um ângulo reto de 90° . Assim, se completa o triângulo de um triângulo retângulo.

A sistematização do conteúdo deixando bem clara que toda exploração do trabalho com materiais manipuláveis (palitos/malha quadriculada) foi para que percebessem que existe uma condição de existência para um triângulo qualquer e que a soma dos seus dois lados menores é sempre maior que a medida do seu terceiro lado.

(Tempo estimado para essa etapa: 20 minutos)

Fonte: dados da pesquisa (2024)

Conforme o Quadro 4, a pretensão era iniciar e finalizar a Tarefa 1, desenvolvendo todas as quatro fases do Ensino Exploratório durante os 100 minutos de aula. Entretanto, não foi assim que ocorreu e a fase de sistematização da Tarefa 1 ficou para o início do segundo dia de aula, cujo planejamento está apresentado no Quadro 5.

Quadro 5 – Planejamento das aulas do dia 06 de dezembro de 2022

Materiais utilizados: para essa aula, poderá ser utilizado o quadro para apresentação das questões a serem discutidas. Imagens impressas de três triângulos retângulos incompletos (Figura abaixo), os quais os alunos terão que completá-los e anotar as medidas dos lados e escolher um dentre os três triângulos. Com a régua terão que formar quadrados com cada lado desse triângulo. Serão entregues malhas quadriculadas para completar esses quadrados. Em seguida será entregue imagens de triângulos não retângulos.

Início da aula: formação dos mesmos grupos de alunos da aula anterior. Retomada da Tarefa 1, discutir com os alunos a importância da condição de existência para a construção de um triângulo.

(Tempo estimado para essa etapa: 15 minutos)

Lançamento (Introdução) da Tarefa Matemática: as questões referentes à Tarefa 2 podem ser escritas no quadro de giz. Em seguida, a professora lerá o enunciado buscando garantir que os alunos compreendam o que é para ser feito.

(Tempo estimado para essa etapa: 15 minutos)

Exploração (Realização) da Tarefa pelos Estudantes: na Tarefa 2, os alunos deverão completar o triângulo impresso que será entregue para eles, medir os lados e, em seguida, desenhar um quadrado para cada lado desse triângulo. Após desenhado, deverão preencher as áreas desses quadrados, recortando e colando os quadradinhos das malhas quadriculadas coloridas, um quadrado para cada lado do triângulo. Durante a realização dessa tarefa, os alunos devem fazer várias tentativas montando triângulos retângulos, calculando a área dos quadrados, fazendo a comparação entre o triângulo retângulo e outros triângulos que não são retângulos.

Após o preenchimento desses quadrados, os alunos devem responder a questões a serem escritas no quadro de giz. Em cada questão discutida, eles devem registrar suas respostas. A professora deve circular pela sala, passando pelos grupos, monitorando, indagando-os quanto ao desenvolvimento da tarefa, estimulando o pensamento geométrico e promovendo diferentes formas de pensar, mediante questionamentos para haver uma interação entre os integrantes do grupo. Além disso, a professora deve selecionar (mentalmente), sequenciar e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas

apresentadas pelos estudantes para que, na próxima fase do Ensino Exploratório, possa estimular a discussão da tarefa.

(Tempo estimado para essa etapa: 20 - 25 minutos)

Discussão da tarefa: os alunos devem ser envolvidos na discussão, incentivados a analisar e a comparar as resoluções, além de identificar e discutir os erros matemáticos e explorar os lados do triângulo e calcular as áreas dos quadrados.

É interessante conectar os conceitos explorados nessa tarefa com outros tópicos matemáticos, estimulando uma compreensão mais ampla e integrada. Pode-se, por exemplo, discutir como esses princípios se relacionam com o Teorema de Pitágoras, proporções ou até mesmo investigar a interseção entre Geometria e Álgebra. Na generalização, os alunos devem ser estimulados a pensar sobre a necessidade de perceber que a característica comum aos triângulos retângulos é o fato de a soma das medidas áreas dos quadrados menores ser igual à medida da área do quadrado maior, e que isso só ocorre nos triângulos retângulos. Dessa forma, podemos chegar ao Teorema de Pitágoras, por meio da demonstração geométrica dessa relação.

(Tempo estimado para essa etapa: 20 minutos)

Sistematização das aprendizagens matemáticas: na Tarefa 2, o objetivo é que os alunos percebam um padrão em relação às áreas dos quadrados menores com a área do quadrado maior, que façam combinações e percebam que nem sempre isso é possível, somente com os triângulos retângulos. A característica comum aos triângulos retângulos é a de que a soma das áreas dos quadrados cujas medidas dos lados são iguais aos catetos do triângulo retângulo é igual à área do quadrado cujo lado é igual à medida da hipotenusa do triângulo retângulo.

(Tempo estimado para essa etapa: 20 minutos)

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Por conta do atraso no primeiro dia de aula e da finalização da Tarefa 1 somente no segundo dia, a finalização da Tarefa 2 também não ocorreu no segundo dia e ficou para o início do terceiro dia de aula, cujo planejamento está apresentado no Quadro 6.

Quadro 6 – Planejamento das aulas do dia 7 de dezembro de 2022.

Materiais utilizados: Nessa aula será entregue imagem impressa com vários tipos de triângulos, variando em tamanho e forma.

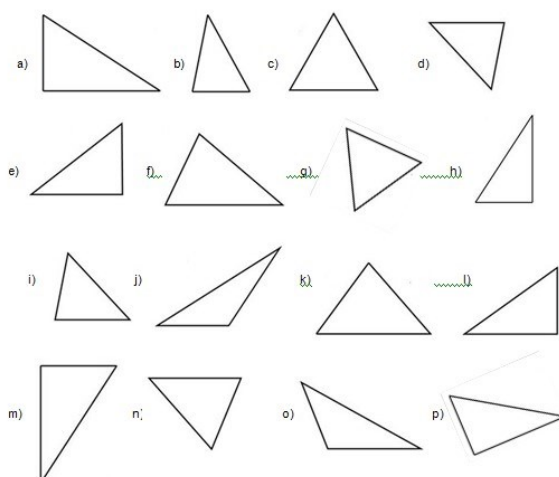
Início da aula: formação dos mesmos grupos de alunos das aulas anteriores. Retomada da Tarefa 2 para término das questões. Os alunos deverão calcular as áreas dos quadrados partindo do lado de cada triângulo e perceber a característica do triângulo retângulo em relação à medida dos seus lados. Sistematizar a tarefa 2 organizando as falas dos alunos sobre a conclusão da tarefa, de maneira que eles possam entender que, somente no triângulo retângulo, a soma das áreas dos quadrados cujas medidas dos lados são iguais aos catetos, é igual à área do quadrado cujo lado é igual à medida da hipotenusa do triângulo retângulo.

(Tempo estimado para essa etapa: 25 minutos)

Lançamento (Introdução) da Tarefa Matemática: na Tarefa 3 será entregue uma folha para cada aluno. Em seguida, a professora lerá o enunciado buscando garantir que os alunos compreendam o que é para ser feito.

(Tempo estimado para essa etapa: 10 minutos)

Quais dos triângulos abaixo parece ser triângulo retângulo?



Exploração (Realização) da Tarefa pelos Estudantes: na 3ª tarefa, após as demais tarefas realizadas pelos alunos, eles deverão reconhecer e assinalar os triângulos retângulos em uma lista com vários triângulos. Já para o triângulo retângulo, o objetivo é que os alunos tenham a ideia geométrica e desenvolvam o pensamento geométrico,

partindo de sua característica que é ter um ângulo reto de 90° e que o lado maior desse triângulo fica do lado oposto ao ângulo reto.

(Tempo estimado para essa etapa: 20 minutos)

Discussão da tarefa: a tarefa 3 desenvolve nos alunos a habilidade de reconhecer as propriedades do triângulo retângulo, identificando-os em situações cotidianas. Após os grupos finalizarem a realização da tarefa, será feita a discussão em plenária. A professora buscará envolver os alunos na discussão (não é um momento para a professora dizer o que é certo ou errado e fazer correções), incentivar a análise e a comparação entre resoluções, além de identificar e discutir os erros matemáticos. Esse é o momento em que os alunos devem ser estimulados a organizarem o pensamento geométrico, partindo da generalização sobre a característica do triângulo retângulo, que é ter um ângulo reto de 90° , e que o lado maior fica do lado oposto ao ângulo reto.

(Tempo estimado para essa etapa: 25 minutos)

Sistematização das aprendizagens matemáticas: a sistematização deve envolver as Tarefas 2 e 3. No caso da Tarefa 2, deve-se buscar uma relação entre as áreas dos quadrados menores e a área do quadrado maior. Que eles entendam a utilização do Teorema de Pitágoras para encontrar a medida do lado de um triângulo retângulo, sabendo apenas as medidas de dois de seus lados.

A releitura das aulas anteriores deverá ser feita com a sistematização do conteúdo Teorema de Pitágoras, com uma breve fala sobre quem foi o matemático. Em seguida demonstrar a relação métrica entre os lados dos triângulos retângulos de maneira que os alunos entendam a formação dos quadrados a partir dos lados desse triângulo retângulo e que Pitágoras relaciona esses lados ao quadrado, assim temos os lados a , b e c relacionados à área de cada quadrado, portanto o lado do triângulo a é a^2 , que para o lado do triângulo b , teremos b^2 e que para o lado do triângulo c , teremos c^2 .

Finalmente, que os alunos compreendam a utilização do Teorema de Pitágoras, onde o “quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”.

No qual utilizamos a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$.

(Tempo estimado para essa etapa: 20 - 25 minutos)

Fonte: dados da pesquisa (2024)

Ao final do terceiro dia, a professora/pesquisadora conseguiu concluir o planejamento e realizar a formalização do conteúdo Teorema de Pitágoras e a sistematização das aprendizagens pelos alunos. Essa sistematização final teve como objetivo que os alunos compreendessem a utilização do Teorema de Pitágoras, em que “a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma das medidas de cada cateto ao quadrado”, expresso na fórmula $a^2 = b^2 + c^2$.

Para o tratamento dos dados, consideramos áudios de momentos em que a professora/pesquisadora conversa com a turma toda (durante o lançamento das tarefas, a discussão e a sistematização) e áudios de um grupo (formado por quatro integrantes) durante a realização das tarefas ao longo dos três dias de aula. Optamos por focar a análise em apenas um grupo ao longo dos três dias, e o grupo selecionado para análise foi escolhido pela própria professora/pesquisadora que identificou, neste grupo, boas interações e possibilidades de manifestações do pensamento geométrico.

Assim, em alguns momentos das análises dos dados, trazem-se as discussões realizadas em um mesmo grupo, mas, por vezes, trazem-se falas de estudantes de outros grupos durante a plenária (discussão coletiva envolvendo toda a turma). Visando manter o anonimato dos participantes da pesquisa, usamos nomes fictícios para todos os alunos que aparecem nos dados. Para auxiliar nas análises, enumera-se cada fala transcrita, pois se usam esses números durante as análises. Os trechos transcritos estão apresentados considerando a ordem temporal das falas.

As análises são acompanhadas da descrição dos dados durante os três dias de aula, detalhando como foi a dinâmica das aulas conduzidas pela professora/pesquisadora, como os alunos lidaram com as tarefas e como a professora/pesquisadora sistematizou a aprendizagem dos estudantes a respeito do conteúdo Teorema de Pitágoras. As análises foram feitas buscando identificar qual a estratégia assumida pelo grupo para resolver as tarefas e identificar a manifestação do pensamento geométrico desses alunos, segundo a teoria de van Hiele.

Antes de seguirmos para as análises dos dados, na próxima seção, apresentamos mais detalhes sobre o Produto Educacional.

3.2 PRODUTO EDUCACIONAL

Como mencionado na Introdução deste trabalho, em um curso de Mestrado Profissional (MP), diferentemente da modalidade Acadêmica, os discentes precisam desenvolver um Produto/Processo Educacional (Rizzatti *et al.*, 2020).

Nesta pesquisa, foi desenvolvido o Produto Educacional (Apêndice A) intitulado “*Tarefas matemáticas para o desenvolvimento do pensamento geométrico: explorando o Teorema de Pitágoras*”, um material destinado a professores dos anos finais do Ensino Fundamental, com o objetivo de promover o pensamento geométrico de seus estudantes. Esse material busca oferecer uma abordagem para introduzir o Teorema de Pitágoras de modo a proporcionar discussões matemáticas produtivas em sala de aula.

O Produto Educacional (PE) conta com seis seções (excluindo as Referências). Na primeira seção, fazemos uma apresentação do PE ao leitor, informando a quem se destina e qual o propósito daquele material. A segunda seção, aborda uma breve discussão teórica sobre os referenciais que fundamentam a proposta, a saber: a abordagem do Ensino Exploratório e a teoria de van Hiele. Na terceira seção, apresentamos o contexto em que o PE foi elaborado, descrevendo como as tarefas foram planejadas e o local em que foram desenvolvidas. E na quarta seção, trazemos os enunciados das Tarefas 1 e 2, seguidos pelas descrições detalhadas do planejamento de cada tarefa e de trechos de diálogos entre professora e estudantes. Na quinta seção, por fim, fazemos as considerações finais, tecendo algumas reflexões sobre o PE e suas potencialidades e desafios.

Na quarta seção, chamamos de “*Dialogando com Estudantes*” o momento em que trazemos trechos de diálogos entre a professora e seus estudantes. A apresentação desses diálogos é o ponto central do PE, por ser o momento em que o leitor poderá compreender como se deu o desenvolvimento das aulas e, também, compreender como se deram as manifestações dos níveis de pensamento geométrico, segundo a teoria de van Hiele. Entender como se deu o desenvolvimento das duas tarefas em um ambiente real de sala de aula é fundamental para que o professor interessado em utilizar o PE possa fazer adaptações e planejar a condução das aulas em sua própria sala de aula. Conforme afirmam Rôças e Bomfim (2018, p. 4, destaque dos autores):

[...] a principal *meta* de um MP é o professor e não o produto educacional (PE) que é elaborado durante o desenvolvimento da dissertação. Tal entendimento deve-se ao fato de que os PE não devem ser encarados como receitas prescritivas, para que outros professores baixem e reproduzam, mas sim possam criar redes de espelhamento e de interlocução. É essencial, portanto, a difusão destes materiais, a partir da ótica das licenças creative commons (CC), que possibilita que um PE possa ser descarregado, distribuído, aplicado e alterado, conforme as múltiplas necessidades / realidades e resultados obtidos.

Afirmamos, portanto, que nem as tarefas propostas, nem a maneira como foram planejadas e desenvolvidas são imutáveis; ao contrário, esperamos que a experiência compartilhada no PE sirva como um estímulo para a criatividade dos professores, permitindo adaptações conforme a prática pedagógica e o contexto escolar. Como afirmam Rizzatti *et al.* (2020, p. 2), “a função de um PE desenvolvido em determinado contexto sócio-histórico é servir de produto interlocutivo a professores e professoras que se encontram nos mais diferentes contextos do nosso país”.

Os diálogos entre professora e estudantes utilizados no PE são os mesmos que aparecem no próximo capítulo desta dissertação, quando apresentamos as análises dos dados. Ou seja, o PE foi construído durante o processo de desenvolvimento da pesquisa de mestrado.

Importante dizer que no PE utilizou-se apenas as Tarefas 1 e 2, não incluída a Tarefa 3. Em razão da escassez de tempo, a Tarefa 3 não foi tão bem explorada durante as aulas realizadas pela professora, como está detalhado no próximo capítulo (Descrição e Análise dos Dados). Por conta disso, aliado ao fato de que a Tarefa 3 era aprofundamento do trabalho realizado nas Tarefas 1 e 2, optou-se por não incluí-la.

No próximo capítulo, apresentamos as análises dos dados.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Este capítulo aborda a análise das aulas, focando em um grupo específico e sua jornada na construção da compreensão de triângulos, triângulos retângulos e o Teorema de Pitágoras. A perspectiva exploratória de ensino e a aplicação da teoria de van Hiele são consideradas ao examinar o desenvolvimento desses conceitos durante as aulas.

4.1 PRIMEIRO DIA - TAREFA 1: RECONHECENDO UM TRIÂNGULO

No dia 05 de dezembro, a turma teve duas aulas geminadas para iniciar o trabalho com a Tarefa 1. A professora/pesquisadora formou os grupos, buscando deixar um aluno com mais facilidade de aprendizagem e comunicação para liderar cada grupo no intuito de facilitar o desenvolvimento da tarefa e a aprendizagem de cada etapa por todos os integrantes. O grupo analisado contava com a participação dos alunos: Ana, Caio, Carlos e Bruna.

Esse primeiro dia de aula visava conhecer os conhecimentos prévios dos alunos sobre triângulos, percebendo se eles sabiam reconhecer quando três segmentos de reta formam ou não um triângulo. Em particular, compreender que níveis do pensamento geométrico os estudantes manifestam ao lidar com uma tarefa matemática, a condição de existência de um triângulo e, em particular, um triângulo retângulo.

Os enunciados foram escritos um a um na lousa, lido e explicado pela professora/pesquisadora, promovendo a discussão entre os grupos, mas as imagens foram entregues impressas juntamente com os jogos de palitos recortados individualmente para cada aluno integrante do grupo.

A professora/pesquisadora introduz a tarefa (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013) dizendo:

[1] Professora: *O objetivo aqui da minha primeira tarefa é que vocês conheçam e reconheçam os triângulos! Como você explicaria para seu colega ao lado, o que é triângulo?*

Logo em seguida, os alunos iniciam a etapa de realização da tarefa (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013) e começaram a dialogar entre os grupos.

[2] Professora: *Então, agora vocês vão explicar para o colega o que é um triângulo.*

[3] Ana: *Triângulo é uma forma geométrica que tem três lados.*

[4] Bruna: *Não é isso, triângulo é forma geométrica que tem...*

[5] Caio: *3 lados.*

Os estudantes começam a externalizar o conceito de triângulos, apresentando inicialmente que eles possuem 3 lados e que se trata de uma forma geométrica. Neste momento de diálogo inicial, os alunos estão no nível 0 de *visualização* ou *reconhecimento* (Kaleff *et al.*, 1994), no qual estão considerando os aspectos do triângulo como um todo, no espaço da Geometria. A professora volta a atenção ao grupo e acontece o seguinte diálogo:

[6] Professora: *O que é um triângulo?*

[7] Ana: *Uma forma geométrica? Com três pontos.*

[8] Professora: *Hum?*

[9] Ana: *Com uma base?*

[10] Carlos: *Então, uma base reta. Como uma forma de pirâmide?*

[11] Professora: *Por que você pensou assim? Por onde começa um triângulo?*

[12] Ana: *Da base reta?*

[13] Carlos: *Eu que falei sobre a base.*

[14] Professora: *Da base e o que mais? O que mais precisamos ter para construir um triângulo?*

Em [7], Ana traz um novo elemento na descrição do triângulo, ao dizer que possui três pontos, possivelmente referindo-se aos vértices. Agora, além de considerar que triângulos são formas geométricas (em [3 e 7]) com três lados (em [3 e 5]), os alunos passam a incluir o fato de que possuem três pontos (em [7]).

Os alunos também começam a fazer relações com classes e formas geométricas, mas ainda “sem considerações explícitas das propriedades dos seus componentes” (Kaleff *et al.* 1994, p. 4-5). Em [10], Carlos está relacionando um triângulo a uma pirâmide, sem comentar a característica de cada figura geométrica, o que pode gerar erros conceituais. Os triângulos são figuras geométricas planas, enquanto as pirâmides são figuras geométricas espaciais. Por mais que algumas relações possam ser estabelecidas (por exemplo, as faces laterais das pirâmides são sempre triangulares), é preciso ter cautela com essa comparação entre as figuras.

Em [10 e 13], Carlos fala da base como se fosse uma característica que define um triângulo quando, na verdade, a base é um elemento que define as pirâmides. Qualquer um dos três lados de um triângulo pode ser tomado como base e sua altura relativa à base. Assim, entendemos que os “alunos raciocinam sobre conceitos geométricos, por meio de uma análise informal de suas partes e atributos por meio de observação e experimentação. [...] Porém, eles ainda não explicitam inter-relações entre figuras ou propriedades” (Kaleff *et al.* 1994, p. 4-5), característica do nível 1 de *análise*.

Para garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos, a professora retorna ao grupo para pedir clarificações e justificações sobre o motivo daquele conceito de triângulo apresentado pelo grupo.

[15] Professora: *Será que é só isso que eu preciso? Para construir um triângulo? Ter o triângulo?*

Após alguns sussurros, o grupo apresenta o seguinte diálogo:

[16] Carlos: *Na parte de baixo, a face.*

[17] Ana: *É.*

[18] Carlos: *Os lados são as laterais.*

[19] Ana: *Dá para se pôr assim.*

[20] Carlos: *É, a sei lá.*

[21] Ana: *Lateral, bases, laterais, face.*

[22] Carlos: *Laterais.*

[23] Bruna: *É, laterais acima.*

[24] Ana: *É, isso é um triângulo.*

É possível notar que os estudantes chegaram à ideia de que as laterais do triângulo são lados, como pode ser visto em [18], mesmo que ainda possuam inferências à ideia de face. Em [21], há indícios de que Ana estabeleceu uma diferença entre uma lateral, chamada de base, e as outras laterais, chamada de face. Em decorrência, os alunos apresentam similaridade em relação à noção relativa às pirâmides, a de face.

Em seguida, a professora pediu para os grupos conversarem entre si e registrarem uma conclusão sobre o que é um triângulo.

[25] Professora: *Após essa discussão entre o grupo, vocês irão descrever/escrever o que falaram sobre o que é um triângulo.*

[26] Ana: *Para vocês escreverem, tipo, o que é um triângulo.*

[27] Carlos: *O triângulo é uma forma geométrica.*

[28] Ana: *Então, quantas bases?*

[29] Carlos: *Uma base, 3 lados.*

[30] Ana: *Então, escreva isso, eu vou escrever isso.*

[31] Bruna: *Eu vou escrever também.*

[32] Professora: *Vão conversando e escrevendo. Se surgir outra ideia sobre o que é um triângulo, diferente dessa que vocês já comentaram, registrem.*

[33] Ana: *É, não tem muito o que falar sobre ele.*

[34] Professora: *Todos aqui já viram o que é triângulo?*

[35] Bruna: *Começa com uma base, aí tem as laterais.*

[36] Ana: *Parecida com uma pirâmide.*

[37] Carlos: *Tem uma base e três lados.*

[38] Ana: *Coloquei lados.*

[39] Bruna: *O triângulo é uma forma geométrica?*

[40] Ana: *Sim, uma base e 3 lados.*

[41] Carlos: *Faces é mais bonito. Um triângulo composto por uma base e 3 faces.*

Alguns aspectos sobre a compreensão que os alunos têm acerca dos triângulos ficam mais evidentes no trecho acima. Em [28, 29, 35 e 37], os alunos consideram a ideia de base como algo que define um triângulo, como se existisse, previamente definido, um lado a ser chamado de base. Em [41], Carlos manifesta considerar a nomenclatura face mais bonita do que lado, sem se preocupar com o uso não convencional do termo face no caso de triângulos. Além disso, em [36], Ana menciona que um triângulo é parecido com uma pirâmide, o que nos leva a perceber que, na visão dela, pirâmide e triângulo não são exatamente as mesmas coisas.

Vale destacar que, neste momento, nenhum aluno do grupo mencionou a ideia de ângulo, apenas as noções de lado e de vértice foram utilizadas pelos alunos para descreverem um triângulo.

Após essa primeira etapa, a professora partiu para a segunda etapa com a seguinte apresentação:

[42] Professora: *Na questão 2, vocês irão representar geometricamente um triângulo.*

Nesse novo item (que a professora chamou de questão 2), a professora argumentou o que seria necessário para resolver o que foi perguntado:

[43] Professora: *Só que durante a representação geométrica de um triângulo, preciso que vocês utilizem a régua, meçam e anotem as medidas de cada lado!*

O grupo iniciou a discussão:

[44] Carlos: *De fazer com um...*

[45] Bruna: *Com uma base.*

[46] Ana: *Dá pra fazer com 3.*

[47] Carlos: *Pra ficar bom, a base faz com 3 e os lados com 2,5.*

- [48] Ana: *Eu vou fazer com 2 pra ver se fica bom.*
- [49] Carlos: *Faz 2,5.*
- [50] Ana: *Um, acho que tem que ser 3 de altura.*
- [51] Carlos: *Da fazer com 3.*
- [52] Professora: *Representar geometricamente, utilizando a régua.*
- [53] Ana: *Faz 2,5 de altura, ... não, faz 2,5 na base e 3 de altura.*
- [54] Ana: *É 2 ... 2,5 de base e 3 altura, fica bom.*
- [55] Carlos: *Fica bom?*
- [56] Ana: *Aham.*
- [57] Carlos: *É 2,5 por 3, agora tem que fazer 2,5 por 3 de altura.*
- [58] Ana: *É.*

No excerto acima, é possível perceber que a ideia de base do triângulo continua sendo central para os alunos. Para construir um triângulo, os alunos consideraram importante atribuir um valor à medida da base (por exemplo, em [45 e 47]). Carlos, em [47 e 49], e Ana, em [48], sugerem medidas para os lados, mas logo essa ideia é substituída pela medida da altura, em [50] e [53]. Nesse momento, os alunos parecem relacionar a estratégia para responder à tarefa à ideia da área de um triângulo, que é dada por

$$\text{Área} = \frac{(\text{comprimento da base} \times \text{comprimento da altura})}{2}.$$

A relação com a área do triângulo fica mais evidente quando, em [57], Carlos diz que “*agora tem que fazer 2,5 por 3 de altura*”, referindo-se possivelmente a uma multiplicação de 2,5 por 3.

Além disso, é importante destacar que os alunos estão sugerindo medidas não inteiras, como o 2,5. Nesse momento, os alunos ainda não haviam recebido os palitos e, portanto, estavam propondo valores quaisquer. No trecho abaixo podemos compreender o motivo da escolha por 2,5.

- [59] Professora: *Ana, essas medidas que você anotou aí. Constrói, exatamente, um triângulo?*
- [60] Ana: *Sim, acho que sim.*
- [61] Professora: *Todos pensam igual? Dá para construir um triângulo? Então, falem o que se precisa para construir um triângulo diante do que vocês anotaram aí!*

[62] Ana: *Uma base em metros... tanto faz, eu acho. E a altura, que também acho que tanto faz* [referindo-se à unidade de medida em metros], *que depende da base para ter a altura, se não fica um triângulo “desformado”*.

[63] Professora: *Fica um triângulo, o quê?*

[64] Carlos: *Desformado.*

[65] Professora: *Desformado?*

[66] Ana: *É tipo, por exemplo, se colocar uma base... a gente colocou aqui uma base de 2,5, se colocar uma altura de 1,5 vai ficar torto.*

[67] Carlos: *Ou é 2,5, ou é 3.*

[68] Ana: *Porque, aqui, colocar a base de 3, para o tamanho ficar legal, 2,5 [de altura]. Eu acho que a altura tem que ser sempre um pouco menos que a base. Será que a base igual à altura fica certo?*

[69] Carlos: *Fica, bate certinho.*

[70] Ana: *Vou tentar fazer.*

[...]

[71] Ana: *Eu cheguei na... a base sempre tem que ser maior e a altura igual ou menor do que a base. Porque se a altura for, tipo, do mesmo tamanho que a base, vai ficar desformado.*

[72] Professora: *Por que você chama esse triângulo de “desformado”?*

[73] Ana: *Porque um triângulo tem que ser, como diz, ah, triângulo é assim, né?* [apontando para um triângulo] *e aqui fica torto, porque... fica torto.*

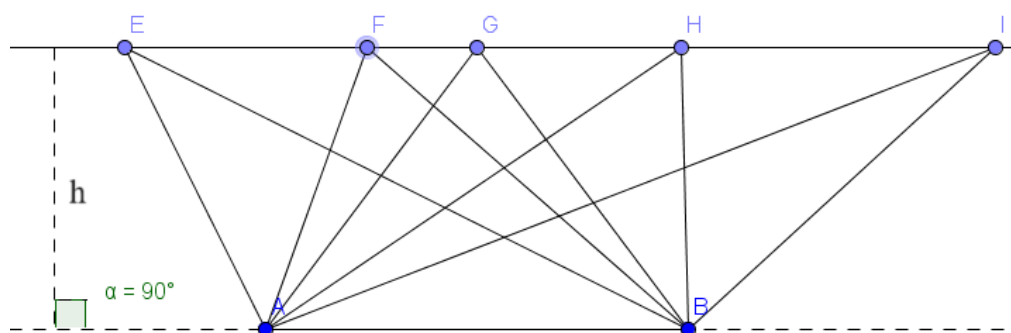
Em [62] e [64], os alunos falam que o triângulo ficaria “desformado” dependendo da escolha das medidas da altura e da base do triângulo. Isso significa que, para Carlos e Ana, a escolha dos valores das medidas da base e da altura do triângulo é feita considerando o formato que o triângulo terá, talvez por terem construído em suas mentes uma imagem de um determinado triângulo em uma determinada posição (por exemplo, o triângulo do item “c” da tarefa 3 apresentada no Quadro 3). Em [62], Ana diz que “*depende da base para ter a altura, se não fica um triângulo desformado*”, indicando que a escolha da medida da altura do triângulo vai depender da medida da base para que o triângulo não fique “desformado”, sugerindo que existe uma forma correta para um triângulo.

Em [68], Ana comenta que, para ficar legal, se a base medir 3, a altura tem que ter 2,5. Na sequência, apresenta uma justificativa: “*Eu acho que a altura tem que ser sempre um pouco menos que a base*”. Em seguida, levanta uma conjectura “*Será que a base igual à*

altura fica certo? ” e tenta avaliá-la, concluindo, em [71], que “a base sempre tem que ser maior e a altura igual ou menor do que a base”, caso contrário o triângulo fica “desformado”. Nesse momento, entendemos que Ana e Carlos estão no nível 1 de *análise*, uma vez que “os alunos raciocinam sobre conceitos geométricos, por meio de uma análise informal de suas partes e atributos mediante observação e experimentação” (Kaleff *et al.*, 1994, p. 4-5).

Os alunos estão buscando estabelecer características dos triângulos, mas fazem isso de uma maneira conceitualmente problemática. Ao construir um triângulo partindo das ideias de base e de altura em relação a essa base, os alunos não percebem que diferentes triângulos podem ser formados, conforme Figura 4.

Figura 4 – Diferentes triângulos com a mesma base e a mesma altura



Fonte: dados da pesquisa (2024)

Na Figura 4, vemos que diferentes triângulos podem ser construídos a partir de uma mesma base $\overline{AB}$ e uma altura h . Todos esses triângulos têm a mesma área, mas podem ser distintos, isto é, podem ter as medidas dos lados e dos ângulos internos diferentes. Se os alunos utilizassem as medidas dos lados (ao invés da base e da altura) para construir seus triângulos, duas ideias matemáticas poderiam emergir: a de rigidez dos triângulos e a de triângulos congruentes. A rigidez dos triângulos significa que (diferentemente dos quadriláteros, por exemplo) não é possível alterar seus ângulos internos mantendo as medidas dos seus lados fixas. A congruência de triângulos significa que dois triângulos são congruentes quando as medidas dos lados e dos ângulos de um deles são, respectivamente, iguais às medidas dos lados e dos ângulos do outro.

Durante o diálogo com os alunos, é possível notar que a professora faz questionamentos (por exemplo, em [59], [61], [63] e [72]) aos alunos, mas procura não os corrigir ou diminuir a demanda cognitiva da tarefa. Por esse motivo, no próximo item da tarefa, os alunos do grupo analisado seguem na mesma linha de raciocínio, isto é, pensando

nos triângulos a partir de uma base e sua altura relativa. A professora escreve o terceiro item da tarefa na lousa e comenta com os alunos.

[74] Professora: *Com três segmentos de reta, é sempre possível formar um triângulo? E aí? Diante da discussão que vocês fizeram com os colegas sobre o que é um triângulo, utilizando a ideia que vocês tiveram para a construção desse triângulo, agora a professora vai distribuir um material para vocês, com segmentos de retas onde vocês vão formar um triângulo. Certo? Eu vou entregar para cada grupo, vocês vão abrir e formar o triângulo.*

As primeiras impressões dos alunos do grupo nessa nova tarefa foram observadas no seguinte diálogo:

[75] Ana: *Tamanhos diferentes. A gente vai ter que fazer um triângulo com isso aqui [palitinhos] com tamanhos diferentes. [...] Aí, acho que já entendi. Os “mais pequenos” são a base, né?*

[76] Carlos: *Não sei.*

[77] Ana: *Não do pequeno, desse tamanho aqui, olha? E esse mais ou menos desse tamanho aqui... a altura. Será?*

Ao observar o diálogo dos alunos do grupo durante o novo item, percebemos a interação entre eles enquanto tentam compreender a tarefa. Ana, em [75] e em [77], segue na linha de definir uma base e a altura. Nesse caso, ela sugere palitinhos menores para serem a base. No entanto, Carlos expressa incerteza em relação ao procedimento.

Após alguns segundos de sussurros entre os alunos, Ana diz:

[78] Ana: *Eu não entendi.*

[79] Aluno não identificado: *Eu também não.*

Os alunos continuam conversando e comentam sobre como outras pessoas (de outros grupos) estão fazendo. Foi assim que Ana comentou:

[80] Ana: *Ah, acho que entendi. Se a gente consegue fazer um triângulo com o tamanho das peças que a gente pegou. É, acho que é isso mesmo.*

A partir deste momento, os alunos do grupo, sempre liderados por Ana, passam a tentar construir um triângulo considerando seus lados.

[81] Ana: *Só se cortar um pedaço aqui, aí dá um triângulo sim.*

[82] Carlos: *Cortar essa pontinha.*

[83] Alunos do grupo: *Verdade.*

Utilizando um jogo de palitinhos, dado intencionalmente pela professora, que não forma um triângulo, os alunos percebem que seria necessário cortar um pedaço de um dos

palitos para conseguir formar o triângulo (em [81] e em [82]). Na sequência, a professora retorna ao grupo e, após ouvir os alunos, sugere o uso de outro conjunto de palitinhos.

[84] Ana: *Aqui deu um triângulo. Aqui não deu um triângulo [...] Não dá, tipo... esse daqui a é pequeno. Se esses dois fossem do mesmo tamanho...*

[85] Carlos: *Não daria.*

[86] Ana: *É verdade [risos]. Porque a base é muito grande.*

[87] Carlos: *Só se fosse esse [indicando um palitinho] e maior ou igual a esse [indicando outro palitinho], mesmo tamanho ou um pouquinho maior. Esse daqui oh [indicando um palitinho].*

[88] Ana: *Isso aqui não é um triângulo.*

[89] Caio: *É sim.*

[90] Carlos: *É, mas não é o que a dona quer.*

[91] Ana: *É um triângulo?*

[92] Carlos: *Sim. Tem vários triângulos. Tem o normal, que é o que estamos fazendo aqui agora, e tem esse.*

[93] Ana: *Entendi. Gostei. Então isso daqui também é um triângulo, olha.*

No trecho acima, percebemos que os alunos do grupo começam a compreender a proposta da tarefa, utilizando os palitinhos para verificar a possibilidade ou não de se formar um triângulo. Em [84], Ana levanta uma conjectura: “*Se esses dois fossem do mesmo tamanho*”, daria para formar um triângulo. Argumento que logo foi refutado por Carlos em [85] e confirmado por Ana em [86]. Nesse momento, os alunos passam a perceber que há uma relação entre os lados e a possibilidade de existência de um triângulo.

É importante notar, também, que na discussão coletiva entre os alunos, por conta da fala de Carlos (em [92]), Ana passou a aceitar a existência de outros triângulos, como pode ser visto em [93]. Esse aspecto é central, pois a discussão proporcionada pela dinâmica de sala de aula (tarefa matemática conduzida por meio do Ensino Exploratório) permitiu que Ana, até então preocupada em não “desformar” o triângulo, passa a aceitar e reconhecer outros formatos de triângulos. Reconhecer triângulos diferentes daqueles, nas palavras de Carlos em [92], “normais” ou daqueles que, em [90], “*a dona quer*”, indica que os alunos caminham para abstrair a ideia de um triângulo por meio de suas características.

A continuação da aula é dada com a entrega de mais um saquinho com palitos com outras medidas para uma nova composição, momento em que a professora introduz o seguinte diálogo:

[94] Professora: *Agora, tentem pensar no que foi feito naquela outra formação/composição que distribui para vocês e com essa agora, fez diferença por que com aquela vocês não conseguiram e com essa conseguiram? Conversem entre grupo.*

Neste momento, o grupo se depara com o desafio, e começam a dialogar entre os pares.

[95] Ana: *Mas são bases iguais, essas são bases iguais.*

[96] Bruna: *São mais iguais.*

[97] Ana: *Só que aqui deu um triângulo perfeito, e aquela lá era muito menor e a outra muito maior.*

[98] Bruna: *E esse deu certinho.*

[99] Ana: *Isso, esse lado é menor que o outro. Um triângulo “desformado”, mas deu certo. Para ter um triângulo perfeito, as bases têm que ser iguais à altura, e aquele ou a base era muito maior ou muito menor, é isso.*

Nesta conversa entre Ana e Bruna, elas estão discutindo diferentes triângulos e as características que definem um triângulo como “perfeito” em comparação com os outros. Ana menciona inicialmente, em [95], que as bases são iguais, indicando que isso é uma característica importante de um triângulo. Bruna responde, em [96], concordando e sugerindo serem “mais iguais”, possivelmente se referindo à “perfeição” do triângulo em questão.

Ana observa [97] que um dos triângulos é considerado “perfeito”, enquanto outro era “muito menor” e o terceiro era “muito maior”. Ela enfatiza a importância da relação entre as bases e a altura para a perfeição de um triângulo. Bruna concorda com Ana, destacando que o triângulo atual “deu certo”.

Ana resume a conversa, enfatizando que, para um triângulo ser considerado “perfeito”, as bases devem ser iguais à altura. Ela também menciona [99] que um dos triângulos era “desformado”, mas ainda assim deu certo, indicando que a perfeição não é uma necessidade na geometria dos triângulos. Essa conversa reflete a compreensão das duas sobre as características que definem um triângulo “perfeito”. Elas estão discutindo a relação entre as bases e a altura como um critério importante para essa perfeição, mas também reconhecem a possibilidade de existir triângulos com diferentes proporções, mesmo que não sejam “perfeitos”.

Após essa primeira análise dos alunos aos palitos que têm uma nova composição, a professora perguntou o que foi possível observar com a construção de triângulos utilizando esses palitos.

[100] Ana: *Então, não importa qual o tamanho da base, o que importa é o tamanho da altura [...]. Então, a base não importa o tamanho. Cadê aquele pequenininho? Aqui, por exemplo, esse aqui é a base, tipo, se esses 2 fossem iguais, dariam o triângulo perfeito.*

[101] Carlos: *Será?*

[102] Ana: *Coloca os 2 aqui, os “mais pequenos”, aí viu? Não importa o tamanho da base. Por exemplo, se a altura for igual, não importa o tamanho, vai dar um triângulo perfeito, e se a base for o grande, vai dar o triângulo perfeito, o que importa é altura. Chegamos à conclusão.*

Neste trecho, após a primeira análise dos alunos sobre as construções de triângulos utilizando os palitos com diferentes composições, a professora os incentiva a compartilhar suas observações e conclusões.

Em [100] e [102], Ana continua explorando suas ideias utilizando os termos base e altura. Conclui que “*não importa o tamanho da base [...] o que importa é a altura*”. Nesse momento, é possível perceber que Ana pode estar usando o termo altura de forma inadequada. A aluna parece estar definindo um lado como sendo a base e os dois outros lados como sendo a altura, o que fica evidente quando, em [100], diz que “*o que importa é altura*” e “*esse aqui é a base, tipo, se esses 2 fossem iguais, dariam o triângulo perfeito*” e, em [102], diz que “*se a altura for igual, não importa o tamanho, vai dar um triângulo perfeito*”.

Esse uso inadequado dos termos base e altura fica mais evidente nos trechos seguintes. A professora caminha para o encerramento da aula, uma vez que o tempo estava acabando. Ela tenta estimular os alunos a pensarem e falarem sobre a possibilidade de formar um triângulo com três segmentos de reta de qualquer medida, abordando a condição de existência de um triângulo.

[103] Professora: *Será que com esses 3 segmentos de reta que vocês receberam, de um tamanho qualquer, sempre será possível construir um triângulo?*

[104] Alunos: *Não.*

[105] Professora: *Por quê?*

[106] Representante de outro grupo: *Os segmentos podem não favorecer a construção.*

[107] Professora: *Todos concordam ou tem alguém que discorda?*

A professora [103] inicia o questionamento, indagando se é viável construir um triângulo com três segmentos de reta de tamanhos arbitrários. Os alunos [104] respondem negativamente, indicando que nem sempre é possível construir um triângulo com quaisquer medidas de segmentos de reta. A professora [105] continua a investigação, questionando por que eles chegaram a essa conclusão. Um representante de outro grupo [106] contribui com a

discussão, explicando que os segmentos podem não ser adequados para a construção de um triângulo. Isso sugere que os alunos da sala estão começando a considerar a condição de existência de um triângulo, o que poderia indicar que os alunos estão progredindo do nível 0 de *visualização*, em que apenas reconhecem figuras geométricas, para o nível 1 de *análise*, em que começam a entender as propriedades e as relações entre essas figuras.

No entanto, no grupo que está sendo analisado, algumas confusões permanecem.

[108] Professora: *Então, com 3 segmentos de reta de qualquer tamanho, sempre é possível construir um triângulo?*

[109] Todos: *Não, não.*

[110] Professora: *Não! Diante da construção que deu certo e as outras que não deram, seria possível existir alguma regra? Uma condição ou uma regrinha para que possamos construir um triângulo? Agora conversem entre si e vamos analisar se é possível e qual seria essa regra!*

[111] Ana: *A gente já achou essa regra aí?*

[112] Carlos: *Não.*

[113] Ana: *Ah tá. A gente já conversou.*

[114] Professora (para toda a turma): *Quando é possível formar um triângulo? Conversem com os colegas.*

O grupo volta a debater e Ana deixa mais clara sua compreensão para a noção de altura:

[115] Ana: *Acho que é isso, porque a base, não importava o tamanho dela se as alturas fossem iguais. Se a base for pequena e os outros foram iguais, vai dar certo, a menos que a base seja muito pequena. [...] Como se diz, aqui os 3 segmentos, 2 segmentos têm que ser iguais. Concorda?*

[116] Aluno do grupo: *sim.*

Percebendo que algum integrante do grupo não entendeu, Ana continua:

[117] Ana: *Vou te explicar. O nome desse aqui é segmento, né? E os 3 segmentos são iguais, por isso deu um triângulo perfeito, né? Então, a regra é clara, para dar um triângulo perfeito 2 segmentos têm que ser iguais, a base não importa o tamanho dela, sendo os 2 segmentos iguais terá um triângulo perfeito, entendeu agora?*

Em [115], Ana afirma que não importa o comprimento da base, desde que suas “alturas” sejam iguais. Na mesma fala, Ana ainda diz que se “os outros [segmentos] forem iguais, vai dar certo”. Isso fica reforçado com o trecho “aqui os 3 segmentos, 2 segmentos têm que ser iguais” e com a explicação dada em [117].

Ana vinha falando que a altura precisava ser igual (em [102], [115]), mas nas falas [115] e [117] fica evidente que, ao falar de altura (ou alturas, no plural), Ana está se referindo a dois outros segmentos que não são a base. A aluna está definindo um lado como sendo a base do triângulo (ideia incorreta, pois, como já foi afirmado, qualquer um dos três lados de um triângulo pode ser tomado como base e sua altura relativa à base) e os outros dois lados (segmentos) como sendo a altura.

É possível compreender o pensamento geométrico de Ana, pois, assumindo um lado como base, a altura relativa a essa base *pode* variar de acordo com o comprimento dos dois outros lados. No entanto, como mostra a Figura 4, isso não necessariamente ocorre.

Apesar de, em [91] e [93], Ana indicar que entendeu a possibilidade de ter outros triângulos, diferente daqueles que estava considerando inicialmente, em [117] a aluna volta a insistir na ideia de que “*para dar um triângulo perfeito, 2 segmentos têm que ser iguais*”. Cabe destacar que ter dois segmentos iguais não é condição necessária para se construir um triângulo.

No grupo analisado, a professora faz novamente a pergunta sobre a possibilidade de construir um triângulo com três segmentos de reta de qualquer tamanho. O grupo responde unânime que não é possível.

A professora, então, estimula o grupo a pensar sobre a existência de uma regra ou condição que permita a construção do triângulo com os três segmentos de reta. Ela os encoraja a discutirem entre si e sugere que já tiveram alguma conversa anterior sobre esse assunto.

A conclusão desta etapa foi a seguinte:

[118] Professora: *O que vocês estão me dizendo é que existe, então, uma regrinha para construir esse triângulo. Ficou bem claro para o grupo qual seria essa regrinha? Vocês disseram que só ter três segmentos não é condição suficiente para formar um triângulo!*

[119] Ana: *Depende, esse aqui tem três e deu certo. [...] variam os tamanhos e limites.*

O horário de término da aula estava chegando e ainda havia outras partes da Tarefa 1 (Quadro 1) a serem exploradas. A professora tenta acelerar as discussões. Ela pergunta aos alunos se chegaram a uma conclusão sobre a “regrinha” para fazer essa construção. A resposta dos alunos é variada, mas eles destacam que apenas ter três segmentos não é uma condição suficiente para formar um triângulo. Ana e seu grupo apresentam exemplos de casos em que a construção foi possível com três segmentos, sugerindo que a regra pode variar de acordo com os tamanhos dos segmentos (em [119]).

No entanto, apesar de Ana perceber que ter três segmentos não é condição suficiente para formar um triângulo, os diálogos no grupo (por exemplo, em [117]) ainda não evidenciam a compreensão adequada sobre a condição de existência do triângulo. O grupo apresentou uma regra, mas inadequada. Pode-se dizer que os alunos estão raciocinando sobre conceitos geométricos, por meio de uma análise informal de suas partes e atributos mediante observação e experimentação, conforme indica o nível 1 de análise do pensamento geométrico.

Ao fim da aula, com pressa, a professora pediu para que os alunos desenhassem o que, para eles, seria um triângulo retângulo.

[120] Professora: *Ficou bem claro para vocês a formação desses triângulos, né? O que não deu certo e o que deu certo e o porquê? Entre o grupo, ficou bem claro? [...] vamos lá, então, na quarta pergunta, como você explicaria para o seu colega o que é um triângulo retângulo?*

O grupo começou a debater e Ana, novamente, liderou a discussão.

[121] Ana: *Um retângulo tem que ter duas laterais menores iguais e duas maiores iguais. O triângulo de três tem que ter, é... acho que um menor e dois maiores iguais.*

Em [120], percebe-se que a professora passou para a quarta pergunta acreditando que os alunos tinham compreendido a condição de existência dos triângulos, fato que não ocorreu. Mas os alunos tinham condições de explorar melhor essa questão por meio da quarta pergunta, ao discutirem o que é um triângulo retângulo.

Em [121], Ana parece tratar triângulo retângulo de maneira separada: triângulo e retângulo. Para as duas figuras geométricas, Ana utiliza a mesma ideia de medida dos lados: no caso do retângulo, “*laterais menores iguais e duas maiores iguais*”, no caso dos triângulos, “*um menor e dois maiores iguais*”.

A professora retoma para a turma toda.

[122] Professora: *Bora lá, então, galerinha. Diante do que vocês escreveram e conversaram com os colegas sobre o que é o triângulo retângulo, fizeram a representação geométrica de um triângulo retângulo? Preciso que vocês analisem o que desenharam.*

[123] Carlos: *Um quadrado.*

[124] Ana: *Não.*

[125] Professora: *Analistem, detalhadamente.*

[126] Carlos: *Um ângulo de 90°.*

Em [126], Carlos apresentou a característica do triângulo retângulo: possui um ângulo de 90° . No entanto, a aula terminou e a professora pediu que os alunos guardassem os palitos no saquinho, pois iriam utilizar na próxima aula.

Ao longo do primeiro dia de aula, a professora introduziu a Tarefa 1 (fase 1 do Ensino Exploratório), os alunos realizaram a tarefa (fase 2 do Ensino Exploratório) nos pequenos grupos. A discussão (fase 3 do Ensino Exploratório) e a sistematização das aprendizagens (fase 4 do Ensino Exploratório), no que se refere à Tarefa 1, ficaram para a próxima aula.

Alguns aspectos podem ser destacados nesse primeiro dia de aula analisado. O trabalho em grupo e as discussões coletivas oportunizaram a manifestação do pensamento geométrico dos estudantes. Isso pode ser percebido a partir das interações entre os alunos ou das interações entre alunos e professora.

No entanto, um desafio que se percebe diz respeito à liderança de Ana ao longo das discussões. Fica evidente, principalmente pelo fato de suas opiniões prevalecerem no grupo, que suas ideias matemáticas, nem sempre adequadas e pouco rebatidas pelos outros membros, conduziram o grupo a conclusões limitadas sobre a condição de existência de um triângulo. A discussão ficou centrada nas ideias de triângulos “desformados” ou “perfeitos”, mostrando que os alunos continuam restritos à visualização (nível 0) e, em poucos momentos, dando indícios de *análise* (nível 1).

Esse desafio se coloca à professora, que precisa lidar com todos os grupos enquanto circula pela sala, fomentando uma discussão produtiva entre os alunos e, também, controlando o tempo da aula. A proposta do Ensino Exploratório exige do professor habilidade para manter o controle do tempo. Como afirma Canavarro (2011, p. 17), é necessário “Gerir sem desperdícios todos os minutos para que na mesma aula se complete o trabalho em torno de uma tarefa, evitando ao máximo adiar para a aula seguinte a discussão e/ou a síntese dos conhecimentos produzidos pelos alunos em resposta à tarefa”. Como pode ser observado, não foi possível concluir a Tarefa 1, ficando a discussão sobre o triângulo retângulo para o próximo dia de aula.

4.2 SEGUNDO DIA – TAREFAS 1 E 2: O TEOREMA DE PITÁGORAS

No dia 6 de dezembro, a turma teve aulas geminadas e as formações dos grupos foram as mesmas do dia anterior, com a participação no grupo analisado dos alunos: Ana, Caio, Carlos e Bruna.

No início da aula, a professora aprofundou o entendimento dos alunos sobre triângulos, especialmente na identificação de sua existência. O objetivo era explorar os diferentes níveis de pensamento geométrico manifestados pelos estudantes ao abordar a condição de existência de um triângulo, destacando, em particular, o triângulo retângulo. O enunciado da Tarefa 2 foi apresentado no quadro, proporcionando aos alunos a oportunidade de descobrir por si próprios que, em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas de cada cateto.

Antes, porém, a professora retomou a Tarefa 1, em que os alunos deveriam construir triângulos usando palitos e um molde.

[127] Professora: *Com aquelas outras formações que vocês tinham, conseguiram montar aqueles outros triângulos?*

[128] Todos: *Não, não.*

[129] Professora: *Ah, tá, por quê? O que aconteceu que vocês não conseguiram?*

[130] Integrante de outro grupo: *Porque os tamanhos são muito diferentes.*

[131] Professora: *Com os tamanhos, não conseguiram formar triângulo?*

[132] Todos: *Não, não.*

[133] Professora: *Então, hoje, eu vou dar essa combinação para vocês e vocês vão fazer o mesmo processo. Lembrando que o que está aí é um molde, tá? Então, os palitos nem sempre vão ser do tamanho que está aí, podem ser maiores, podem ser menores, tá? Agora vocês vão montar aí em cima desse molde e conversar aí entre vocês.*

O molde a que a professora se refere é a figura que consta na Tarefa 1 (Quadro 1). A dificuldade enfrentada na construção de triângulos com tamanhos diferentes direciona a aula e a professora questiona sobre possíveis regras ou condições para a formação de triângulo. A resposta dos alunos, destacando a diferença de tamanhos como um obstáculo, fazia parte do planejamento. A intenção era que os alunos percebessem que não basta ter três segmentos para formar um triângulo, é preciso mais alguma característica.

A professora, em [133], introduz uma nova etapa da tarefa. Anuncia que fornecerá uma nova combinação de palitos para os alunos. A instrução é clara que o que está presente é um molde, mas os palitos podem variar em tamanho, podendo ser maiores ou menores do que o molde. A professora, então, orienta os alunos a realizarem o mesmo processo que fizeram anteriormente, reforçando a importância da comunicação entre eles durante a montagem. Essa etapa da tarefa visa à experimentação prática e à observação atenta por parte dos alunos para compreenderem as relações geométricas envolvidas.

[134] Ana: *Deu certinho.*

[135] Carlos: *Meu também.*

[136] Ana: *Aham, todos deram certo.*

[137] Caio: *O meu passou um pouco, é o meu.*

[138] Carlos: *Passou um pouquinho aqui, ó.*

[139] Professora: *Não, mas passou do molde.*

[140] Carlos: *É.*

[141] Professora: *Não, do molde não tem problema. Por que vocês acham que tem esse molde? Que quer demonstrar aí, com esse molde?*

[142] Ana: *É um triângulo com ângulo de 90° .*

[143] Carlos: *É o quê?*

[144] Ana: *Um triângulo com ângulo de 90° . É, não é bom. Um triângulo com ângulo de 90° .*

[145] Professora: *Um triângulo com um ângulo de 90° , e que triângulo é esse?*

[146] Ana: *Retângulo?*

[147] Carlos: *Triângulo Retângulo.*

A introdução de um novo molde e a instrução para os alunos repetirem o processo estimulam a experimentação e a reflexão. Ao serem estimulados pela professora, os alunos identificam que o molde induz à construção de um triângulo com ângulo de 90° (em [142]), o que significa que se trata de um triângulo retângulo (em [146] e [147]).

[148] Professora: *Então, galerinha, presta atenção aqui um pouquinho. Vocês já conversaram aí entre os grupos, agora vamos analisar a formação que vocês fizeram. O que vocês perceberam de diferente da construção desse triângulo em relação aos anteriores que fizeram ontem? O que tem de diferente desse triângulo em relação àqueles que vocês fizeram ontem?*

[149] Ana: *O que a gente fez ontem era de pé.*

[150] Caio: *E esse aí está deitado.*

[151] Carlos: *E esse daí está com sono. (Risos)*

[...]

[152] Professora: *Será que é possível construir um triângulo retângulo com os mesmos segmentos de reta que já foram construídos os outros triângulos ontem? Vocês conseguiram construir? Ontem, vocês pegaram as folhinhas com aquela formação de palitinho. Vocês conseguiram montar um triângulo retângulo com aquela formação?*

[153] Todos: *Não.*

Neste trecho, inicialmente, os alunos expressam observações práticas e externas sobre a orientação dos triângulos, sugerindo um pensamento predominantemente no nível 0 de visualização ou reconhecimento. As respostas de Ana [149], Caio [150] e Carlos [151] sugerem que o foco está na posição do triângulo (“de pé”, feito na aula do dia anterior, e “deitado”, feito naquele dia), algo que não contribui para abstrair informações, ideias sobre os triângulos. A professora, então, ao questionar a possibilidade de construir um triângulo retângulo com os mesmos segmentos de reta da formação anterior, recebe como resposta “Não” [153].

Na continuação, a professora volta a questionar os alunos.

[154] Professora: *Então, vamos organizar essas ideias que vocês falaram! Com essa tarefa da formação dos triângulos de ontem de um triângulo qualquer, pois ontem vocês puderam montar triângulos quaisquer, né? E hoje vocês fizeram aí?*

[155] Ana: *Um triângulo com ângulo de 90°.*

[156] Professora: *E como se chama esse triângulo?*

[157] Todos: *Triângulo retângulo.*

[158] Professora: *Triângulo retângulo. Então vocês puderam concluir se existe sim, uma condição, uma regrinha para que esse triângulo exista?*

[159] Todos: *Sim.*

[160] Professora: *E vocês sabem me dizer qual é essa regrinha para montar triângulo qualquer?*

A professora busca “organizar as ideias” dos alunos. Em [153], os alunos reconheceram que não é qualquer combinação de três segmentos que permite construir um triângulo; já em [159], os alunos manifestam reconhecer que, nas palavras da professora em [158], existe “uma condição, uma regrinha para que esse triângulo exista”. Nesse momento, a professora conversa com toda a turma, não apenas com o grupo analisado. Em [160], ela tenta compreender se os alunos chegaram à condição de existência.

Alunos de outro grupo, diferente do que está sendo analisado aqui, apresentaram a condição de existência. Nesse momento, a professora, então, avança para a fase de sistematização das aprendizagens matemáticas (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013), visando concluir a Tarefa 1.

[161] Professora: *Vamos pegar esse daqui. Um lado que mede 12, um lado que mede 19 e um lado que mede 23. Vamos falar aqui unidades, porque triângulo pode ser medido em centímetros, em metros. Então tem aqui um triângulo que tem essas medidas, certo? Qual*

seria a condição para eu conseguir construir esse triângulo? Porque ontem vocês pegaram o que tinha palitinhos que faltavam, não dava para chegar lá [fechar os lados do triângulo]. Qual é a condição aqui para que eu consiga construir esse triângulo? Manuseando todos aqueles palitinhos ontem, vocês conseguiram? Encontraram uma condição para que eu consiga construir esse triângulo?

[162] Ana: *As medidas?*

[163] Professora: *As medidas? E o que tem as medidas?*

[164] Ana: *Diferentes.*

[165] Professora: *É, são diferentes! Mas por que existem? Não existem triângulos diferentes?*

Em [161], a professora busca conduzir a formalização da condição de existência, uma vez que outro grupo já a apresentou. No entanto, o grupo aqui analisado, principalmente a aluna Ana, mantém-se no estágio inicial (nível 0 – *visualização*), pois apresentam raciocínios, basicamente, por meio de considerações visuais (Kaleff *et al.*, 1994). O foco dos alunos foi na medida dos segmentos que são diferentes (em [162] e [164]), não na abstração da condição de existência do triângulo. A professora prossegue.

[166] Professora: *Então, o que a gente pode deixar aqui como condição de existência? Se nós pegarmos aqui esse lado, mais esse lado, são $12 + 19$. Dá quanto?*

[167] Todos: *31.*

[168] Professora: *Somando esses dois lados, ele é maior ou menor que esse terceiro lado?*

[169] Todos: *Maior.*

[170] Professora: *Maior, maior que 23. Vamos pegar outros dois lados. Quanto que dá 19 mais 23?*

[171] Todos: *42.*

[172] Professora: *42 é maior, menor que 12?*

[173] Todos: *Maior.*

[174] Professora: *Maior que 12! Uma outra formação que nós não fizemos, 23 mais 12. Dá quanto?*

Após apresentar diferentes exemplos, com triângulos de diferentes medidas de lados, a professora questiona os alunos.

[175] Professora: *O que nós podemos concluir?*

[176] Um aluno: *Que qualquer soma que tiver, vai ser maior do que o lado que sobrou.*

[177] Professora: *Como é que é, então?*

[178] Um aluno: *A soma de dois sempre vai ser maior do que o que sobrou.*

[179] Professora: *Então essa é uma condição de existência para um triângulo. A soma das medidas de dois lados. Eu pego dois lados qualquer do meu triângulo, de um triângulo qualquer. As medidas dos dois lados, somando, tem que ser?*

[180] Todos: *Maior, maior do que o que sobrou.*

[181] Aluno: *A soma de dois lados sempre vai ser maior do que o que sobrou.*

Em [166], [168], [170], [172] e [174], a professora faz uma série de questionamentos muito direcionados, por meio de casos específicos, buscando que toda a turma perceba e reconheça a condição de existência do triângulo, enunciada por ela posteriormente (em [179]). Em [178], um aluno apresenta, de maneira informal, a condição procurada. Esse aluno manifesta estar no nível 2 – dedução informal do pensamento geométrico, pois produz uma definição abstrata, estabelecendo uma propriedade dos triângulos. No entanto, tal aluno não é integrante do grupo analisado nesta pesquisa. Por meio dos dados obtidos pela gravação, a conclusão é que, até esse momento em que a professora conduz a discussão e enuncia a condição de existência, o grupo aqui analisado não havia chegado a tal dedução informal.

Assim, as discussões coletivas em sala de aula, proporcionadas pela abordagem do Ensino Exploratório, oportunizaram aos alunos do grupo analisado um ambiente favorável para saírem do nível 0 - *visualização* e do nível 1 – *Análise* e avançassem para o nível 2 – *dedução informal*. Essa oportunidade se deu na medida em que alunos de outros grupos enunciaram, ainda que de maneira informal, a condição de existência do triângulo e, em seguida, a professora sistematizou a aprendizagem dos estudantes.

No entanto, ainda era necessário promover a sistematização considerando o caso do triângulo retângulo. Então, a professora retoma a discussão sobre o triângulo retângulo possuir um ângulo de noventa graus e conduz os alunos a reconhecerem o fato de que o lado de maior comprimento é oposto ao ângulo de noventa graus.

[182] Professora: *E triângulo retângulo? Nós sabemos que o triângulo retângulo tem o quê? [...] para terminar de formar esse triângulo retângulo, o que temos ali de diferente?*

[183] Outra Aluna: *A descidinha dele?*

[184] Ana: *Face?*

[185] Outra Aluna: *Ele é sempre o lado maior, não é?*

[186] Professora: *E esse lado maior, ele sempre está o quê? Oposto a?*

[187] Outra Aluna: *Ao ângulo reto?*

[188] Professora: *Então, galerinha, [...] o lado maior sempre fica oposto a esse ângulo reto, a esse ângulo de 90°. Certo? Entenderam? Conseguir visualizar isso?*

[189] Todos: *Sim.*

Em [182], a professora questiona os alunos e logo obtém a resposta esperada, apresentada em [185] por uma aluna de outro grupo. As respostas [185] e [187] permitem à professora sistematizar uma característica importante dos triângulos retângulos: o lado oposto ao ângulo reto é o lado de maior comprimento do triângulo. Apesar de ainda não mencionar o nome nesse momento da aula, a professora está se referindo à hipotenusa.

Em [184], é possível notar que Ana ainda utiliza o termo *face*. Ao longo dos diálogos, foi possível perceber que ela utiliza o termo *face* para se referir ao lado do triângulo retângulo que não é, segundo ela, nem base e nem altura.

Em seguida, a professora finaliza a Tarefa 1 e propõe a Tarefa 2. O propósito, nessa nova etapa, é que os alunos manipulem triângulos retângulos com diferentes medidas para os lados, de modo que percebam, por si, o Teorema de Pitágoras.

[190] Professora: *“Bora”, então, para nossa próxima tarefa. Guardem os palitinhos, por favor. Agora vocês vão pegar o molde de três triângulos. Com base no triângulo retângulo que vocês montaram com os palitinhos, agora vocês vão completar esse triângulo aí nessa folha de sulfite, só que preciso que vocês meçam os lados e anotem as medidas.*

A partir do comentário da professora, os alunos começaram a medir os lados dos triângulos. Ana e Carlos comentam sobre suas medidas.

[191] Ana: *Isso, aqui deu 6, aqui deu 5, aqui deu 8, aqui deu 12, aqui deu 13 e aqui deu 10, cara.*

[192] Carlos: *Então, 5, 12, 13.*

[193] Professora: *Desse triângulo aqui, eu gostaria que vocês desenhassem quadrados, a partir de cada lado do triângulo [...] Vocês vão montar, vão desenhar um quadrado, a partir de cada lado desse triângulo.*

Em [191], Ana apresenta seis medidas. Já Carlos, em [192], apresenta três medidas que representam um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 13 unidades de comprimento.

Em seguida, a professora apresentou algumas instruções aos estudantes, enfocando a montagem dos quadrados a partir dos lados do triângulo. Após desenhado os quadrados em cada lado do triângulo, os alunos deveriam preencher as áreas desses quadrados, recortando e colando os quadradinhos das malhas quadriculadas coloridas, um quadrado para cada lado do triângulo, conforme consta no planejamento. Essa etapa preparatória visou estabelecer uma

base sólida para a subsequente tarefa de recorte da malha quadriculada, otimizando a compreensão e a execução da tarefa proposta.

[194] Professora: *De acordo com os lados que vocês têm aí, desse quadrado, vocês vão recortar quadradinhos na malha quadriculada e montar/encaixar a área desse quadrado. Vou deixar uma folha de cada cor, porque vocês vão fazer cada quadrado de uma cor.*

[195] Carlos: *Dona é para cortar dos tamanhos desses quadradinhos aqui?*

[196] Professora: *Do tamanho das áreas dos quadrados aí.*

[197] Ana: *Vai cortar do tamanho dos desenhos?*

[198] Carlos: *Você vai cortar os quadrados separados.*

No trecho acima, os alunos apresentam suas dúvidas sobre como proceder e a professora esclarece, destacando a necessidade de cortar conforme o tamanho das áreas dos quadrados. Após os alunos terem compreendido o que era para ser feito, o diálogo no grupo continua.

[199] Ana: *Cada quadradinho tem 1 cm, se o lado tem 4 cm, 4 quadradinhos. Não, não vai dar certo.*

[200] Carlos: *Faltou.*

[201] Ana: *Faltou um pouquinho.*

[202] Carlos: *Faltou um chorinho só.*

[203] Professora: *Fizeram aí?*

[204] Ana: *Não deu certo, não.*

[205] Professora: *A área de um quadrado de cada cor. Vocês viram o porquê da professora dizer que iríamos trabalhar com unidade e não centímetros, porque a malha está em unidade e não centímetros, senão, não dá certo.*

Esse trecho destaca a tentativa dos alunos em calcular as áreas dos quadrados, mas enfrentam dificuldades. A professora intervém para corrigir possíveis erros e reforçar a necessidade de entender os quadradinhos menores como unidades de medida. Ana, em [199], tenta associar cada lado do quadradinho a 1 cm, sugerindo que seriam necessários quatro quadradinhos para cobrir cada lado de 4 cm. No entanto, Ana percebe que “não vai dar certo”. Carlos e Ana concordam que “vai faltar um chorinho”. Esse momento faz parte da compreensão dos alunos sobre a Tarefa 2.

A professora intervém em [205], questionando se conseguiram concluir a tarefa e tenta torná-la mais clara aos alunos, orientando a fazer “área de um quadrado de cada cor” e complementa dizendo que era para usar os lados dos quadrados da malha quadriculada como unidade e não para usar centímetros.

Os alunos continuam interagindo durante a prática de construção de quadrados.

[206] Ana: *Tem que ter 5 quadradinhos.*

[207] Carlos: *Então, esse aqui está certo.*

[208] Bruna: *Só cortar a beiradinha que sobrou.*

[209] Bruna: *Um, dois, três, quatro, cinco.*

[210] Ana: *Cinco! Um, dois, três, quatro, cinco. Corta essa parte do verde aí.*

[211] Ana: *Você está com desenho, né, amiga?*

[212] Bruna: *Tô, dois roxos.*

[213] Ana: *É porque, tipo, tem 5 cada um, então não importa os centímetros, tem que ter 5 quadrados, é unidade, não centímetros.*

No trecho de diálogo acima, percebe-se que os alunos do grupo estão manipulando os quadradinhos para formar as áreas dos quadrados gerados a partir de cada lado do triângulo retângulo. Nesse momento, os alunos estão na fase de entender o que deve ser feito na Tarefa 2, isto é, compreender como colar os quadradinhos para depois fazer as análises matemáticas requeridas. No entanto, o segundo dia de aula terminou e o restante da Tarefa 2 teve que ser deixado para o terceiro dia.

Nesse segundo dia de aula, a professora conseguiu finalizar a Tarefa 1, realizando a discussão com toda a turma (fase 3 do Ensino Exploratório) e sistematizando a aprendizagem dos alunos (fase 4 do Ensino Exploratório) no que diz respeito à condição de existência do triângulo. Já com relação à Tarefa 2, introduziu a tarefa (fase 1 do Ensino Exploratório) e os alunos iniciaram sua realização nos pequenos grupos (fase 2 do Ensino Exploratório). Nessa fase 2, os alunos mediram os lados dos triângulos, recortaram os quadradinhos e colaram, formando quadrados em cada lado do triângulo. Foi um momento de manipulação e compreensão da Tarefa 2, não sendo evidenciados níveis do pensamento geométrico até o momento, pois ainda não discutiram com profundidade as ideias que envolvem o Teorema de Pitágoras. Essa análise ficou mais evidente no terceiro e último dia.

4.3 TERCEIRO DIA – TAREFAS 2 E 3: FORMALIZAÇÃO E SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS

No dia 7 de dezembro, a turma teve aulas geminadas e as formações dos grupos foram as mesmas do dia anterior, participando do grupo analisado os alunos: Ana, Caio, Carlos e Bruna.

Nesse último dia de aula, os esforços estavam voltados para a sistematização das aprendizagens dos estudantes, especialmente sobre as Tarefas 2 e 3. Na Tarefa 2, a professora buscou estabelecer uma relação entre as áreas dos quadrados menores e a área do quadrado maior, com o intuito de introduzir e aprofundar a compreensão sobre o Teorema de Pitágoras.

Na Tarefa 3, a professora retomou o conteúdo do Teorema de Pitágoras, de maneira que os alunos pudessem compreender a formação dos quadrados a partir desses lados. Foi destacada a correlação entre os lados a , b e c e as áreas dos quadrados correspondentes: a^2 , b^2 e c^2 , ressaltando que “o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”, representado pela fórmula $a^2 = b^2 + c^2$.

A Professora iniciando a tarefa do último dia:

[214] Professora: *Bom dia, galerinha, nosso último dia! Vamos dar continuidade à nossa tarefa de ontem. [...] vocês receberam uma impressão que tinha alguns triângulos que vocês deveriam completar e fazer o que mais? Medir os lados!*

[215] Ana: *Para descobrir a área.*

[216] Professora: *O que vocês fizeram até agora aí?*

[217] Ana: *Somamos a área.*

[218] Professora: *Então, vocês já fizeram em quantos? Em quantos modelinhos aí? Em quantos triângulos?*

[219] Ana: *3.*

[220] Carlos: *3.*

[221] Professora: *Vocês já calcularam a área?*

[222] Carlos: *Aham.*

Nesse momento da Tarefa 2, os alunos fizeram várias tentativas montando triângulos retângulos e calculando a área dos quadrados cujos lados têm a mesma medida dos lados do triângulo. No diálogo acima, o grupo manipulou três modelos com diferentes triângulos, todos eles eram triângulos retângulos. Em um momento posterior da aula, os alunos também fizeram as comparações entre essas áreas dos quadrados, considerando um triângulo que não é retângulo.

No diálogo acima, Ana e Carlos respondem à professora, mostrando que compreenderam o que era para ser feito e que, inclusive, já tinham calculado as áreas dos quadrados e somado para o caso de três triângulos diferentes, como é possível ver nas falas [217], [219], [220] e [222].

A professora, então, prossegue.

[223] Professora: *Vocês fizeram então a representação geométrica através do quê?*

[224] Aluno de outro grupo: *Da malha quadriculada.*

[225] Professora: *Da malha quadriculada, muito bem. [...] vocês observaram alguma diferença ou alguma semelhança entre esses triângulos? Agora eu gostaria que vocês explicassem no grupo, um para o outro: Qual é essa semelhança ou qual é essa diferença que vocês viram?*

Após confirmar com os alunos o que eles já haviam feito (em [223] e [224]), a professora começa a questioná-los [225] em busca do reconhecimento de alguma característica comum que os alunos pudessem abstrair dos triângulos já conhecidos por eles. A professora fala em “semelhança”, mas esse termo não é adequado para o momento, uma vez que não se está discutindo semelhanças de triângulos.

No trecho abaixo, os alunos estão debatendo quando a professora se aproxima e faz questionamentos.

[226] Ana: *Você viu diferença/semelhança?*

[227] Carlos: *Tamanho.*

[228] Ana: *É, tamanho. Você viu diferença, Caio?*

[229] Caio: *Acho que não. No tamanho.*

[230] Professora: *E aqui [no grupo], o que vocês viram de semelhança? Ou tem alguma diferença?*

[231] Carlos: *A diferença é no tamanho, no tamanho, nas medidas.*

[232] Ana: *É que esses 2 triângulos retângulos deram, como diz? Exatos.*

[233] Carlos: *É, deu exato.*

[234] Ana: *Tipo, a gente soma aqui, 16 mais 9 deu 25. E aqui 64 mais 36 deu 100. [...] Não sei como é que fala, mas acho que deu exato. E esse aqui faltou um pouco para dar 169.*

[235] Professora: *Por que faltou um pouco?*

[236] Carlos: *Porque deu a menos, porque deu...*

[237] Ana: *134 mais 25...*

[238] Professora: *Quanto tem esse lado?*

[239] Ana: *12*

[240] Professora: *12, e o que você fez para dar esse número?*

[241] Ana: *Eu multipliquei 12, lado vezes lado e obtive 134.*

[242] Professora: *Calcule essa área novamente.*

Em [227], [228], [229] e [231], enquanto discutiam sobre as características comuns ou diferentes extraídas dos triângulos, os alunos se mantinham no nível 0 – *visualização* ou

reconhecimento, uma vez que estão raciocinando basicamente por meio de considerações visuais (Kaleff *et al.*, 1994). No entanto, em [232], [233] e [234], os alunos parecem avançar para o nível 1 – *análise*, pois, por meio da observação e experimentação, percebem que dois dos três triângulos possuem uma característica em comum. Em [234], Ana menciona que, no caso do triângulo de lados com medidas três, quatro e cinco unidades, a soma das áreas dos quadrados de lado quatro unidades e três unidades é igual à área do quadrado de lado cinco unidades. O mesmo aconteceu com o triângulo de lado seis, oito e dez. Em [232] e [233], os alunos Ana e Carlos utilizam o termo “exato” para dizer que a soma das áreas de dois quadrados era igual à área do terceiro quadrado.

O grupo apenas não percebeu essa mesma característica para o terceiro triângulo porque os alunos erraram nas contas. Como pode ser observado em [236], [237] e [241], os alunos calcularam 12×12 e chegaram em 134 ao invés de 144. Por esse motivo, a soma $134 + 25$ “*faltou um pouco para dar 169*”. Em [242], a professora pede para o grupo pensar e o erro foi logo percebido e corrigido.

No trecho abaixo, a professora solicita que verifiquem se a mesma característica pode ser observada para novos triângulos. Primeiro, um triângulo equilátero cujos lados medem 7 unidades de comprimento. Depois, um triângulo escaleno cujos lados medem 5, 7 e 8.

[243] Professora: *Agora, as mesmas coisas que vocês fizeram com esses [três] triângulos, vocês farão com esse que vou entregar.*

[244] Caio: *Vamos medir. Esse lado aqui é 7.*

[245] Ana: *7. Aqui também vai dar 7.*

[246] Caio: *Vai tudo ser igual. Então, é tudo igual.*

[247] Carlos: *O de [triângulo] baixo tem um lado maior e um lado menor. E esse aqui?*

[248] Ana: *Esse aqui é um triângulo perfeito. Esse aqui [referindo-se ao outro triângulo] é o... Como é que eu falei aquele dia?*

[249] Carlos: *Triângulo desformado!*

[250] Caio: *7, 5 e? E 8 em baixo.*

[251] Carlos: *Esse aqui, vai dar tudo 49.*

[252] Ana: *Porque é o triângulo perfeito.*

[...]

[253] Ana: *Quantos que deu 8?*

[254] Caio/Carlos: *64*

[255] Carlos: *Agora são 25 mais 49*

[256] Carlos: *74*

[257] Ana: *Passou.*

[258] Carlos: *Passou.*

Os alunos do grupo percebem que os dois novos triângulos não possuem a mesma característica dos três triângulos discutidos anteriormente. Em [251], Carlos comenta que “*vai dar tudo 49*”, referindo-se ao fato de que todos os lados do triângulo medem 7 unidades e 7×7 é 49. Em [248] e [252], Ana retoma o termo “triângulo perfeito” para se referir ao triângulo equilátero. Em [248] e [249], Ana e Carlos voltam a falar em “triângulo desformado” para se referir ao triângulo escaleno de medidas 5, 7 e 8.

O uso de termos informais, criados pelos próprios alunos, pode ajudá-los, inicialmente, na construção de ideias matemáticas. No entanto, considerando que a professora, durante a aula anterior, havia discutido com os alunos a classificação dos triângulos a partir da medida dos lados (equilátero, isósceles e escaleno), os alunos poderiam estar utilizando os termos adequados neste momento da aula. Tal evidência indica que os alunos ainda não estão discernindo características das figuras geométricas para além daquelas básicas percebidas visualmente. Novamente, os alunos indicam características do nível 0 – *visualização* ou *reconhecimento* do pensamento geométrico.

A professora inicia, então, a discussão da Tarefa 2 com toda a turma e caminha para a sistematização da aprendizagem dos estudantes.

[259] Professora: *Encerrando essa tarefa, organizando as falas de vocês, sobre o que cada grupo falou um pouquinho. Como podemos expressar verbalmente a relação entre as medidas das áreas desses quadrados? Como podemos falar sobre a comparação? Somaram as duas áreas desses quadrados e fizeram uma comparação com a área desse quadrado maior. O que nós descobrimos?*

[260] Ana: *Que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior.*

[261] Professora: *Que a soma?*

[262] Todos: *Das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior.*

[263] Professora: *Então nessa explicação verbal do que vocês fizeram, onde calcularam a área de cada quadrado que se forma a partir de cada lado desse triângulo aí, fizeram o cálculo da área do quadrado menor, do médio e do maior, porque são 3 quadrados, certo? Então vocês somaram a área dos quadrados menores e verificaram que as áreas desses dois cabem certinho dentro do?*

[264] Ana: *Quadrado maior.*

[265] Professora: *Do quadrado maior! Então será que existe um padrão ou uma regrinha para a área do quadrado, partindo dos lados de um triângulo, será que consigo estabelecer uma regrinha?*

[266] Ana: *Eu acho que todo triângulo... tem que ter ângulo de 90° .*

[267] Carlos: *Triângulo retângulo, no caso daí.*

[268] Ana: *Para as duas áreas menores caberem dentro da área maior.*

[269] Professora: *E isso só é possível?*

[270] Carlos: *No triângulo retângulo.*

[271] Ana: *Com ângulo de 90° .*

[272] Professora: *Ou seja, no triângulo?*

[273]: Todos: *Retângulo.*

A partir dos questionamentos da professora em [259], [261], [263], [265] e [269], Ana e seu grupo, não só mostram discernir características de figuras geométricas (Kaleff *et al.*, 1994), característica do nível 1 – *análise*, mas, vão um pouco além, pois começam a estabelecer inter-relações das propriedades dos triângulos, característica do nível 2 – *dedução informal*. Em [260], Ana enuncia, de maneira informal, a ideia de que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior. Em [266], [267], [270], [271] e [273], o grupo estabeleceu a inter-relação entre o fato de o triângulo ser um triângulo retângulo e o fato de que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior.

Para reforçar essa percepção, no trecho a seguir, a professora pergunta sobre os outros dois triângulos (não retângulos).

[274] Professora: *Exatamente, nesse ponto que eu queria chegar, que somente no triângulo retângulo, a soma das medidas das áreas dos quadrados menores é igual à medida da área do quadrado maior. Vocês conseguiram fazer isso nos outros dois triângulos?*

[275] Todos: *Não.*

[276] Professora: *O que aconteceu lá?*

[277] Ana: *Deu maior.*

Em [277], quando Ana afirma que “*deu maior*”, refere-se ao fato de que, no caso dos dois outros triângulos trabalhados pelos alunos, a soma das áreas dos quadrados formados pelas medidas de lados do triângulo era maior do que a área do quadrado formado pelo terceiro lado do triângulo. Portanto, para esses dois triângulos, a relação percebida em [260] não era válida.

Considerando o conjunto de afirmações feitas pelo grupo, reconhecendo, a partir da experimentação com diferentes triângulos, que a soma das medidas das áreas dos quadrados menores é igual à medida do quadrado maior sempre que o triângulo for retângulo e o mesmo não ocorre para triângulos não retângulos, pode-se inferir que os alunos manifestam características do nível 3 – *dedução formal*. Como afirmam Kaleff *et al.* (1994), nesse nível, os alunos desenvolvem sequências de afirmações deduzindo uma afirmação a partir de uma outra ou de outras, sendo que tais deduções são entendidas como um caminho para o estabelecimento de uma teoria geométrica.

Para finalizar a terceira aula e, com isso, finalizar o conjunto de aulas planejadas para introduzir e formalizar o Teorema de Pitágoras, a professora apresenta aos alunos a Tarefa 3. Por conta do pouco tempo para desenvolvê-la, a professora apressa a discussão e foca na formalização e na sistematização das aprendizagens dos estudantes no que diz respeito ao Teorema de Pitágoras.

[278] Professora: *Então “bora” lá. Nessa outra tarefa, eu preciso que vocês marquem um x onde visualizam um [possível] triângulo retângulo. E o que precisa ter um triângulo retângulo?*

[279] Outro Grupo: *Um ângulo de 90° .*

[280] Professora: *Então, eu preciso que vocês tentem marcar esse ângulo aí também. O triângulo retângulo precisa estar só na posição “em pé” para ter ângulo reto?*

[281] Ana: *Precisa de um ângulo reto.*

[282] Professora: *Isso. Independente da posição, ele só precisa de quê?*

[283] Ana: *De um ângulo reto!*

Conforme Quadro 3, a Tarefa 3 apresenta diversos triângulos, sendo que alguns deles parecem ser triângulos retângulos. É importante dizer que parecem ser, pois sem a identificação de um ângulo reto, não há como afirmar com certeza. No trecho acima, em [281] e [283], nota-se que os alunos do grupo compreenderam essa característica. Além disso, é possível perceber que os alunos, em particular, Ana, manifestaram abstrair a ideia de que o triângulo retângulo não precisa estar “em pé”, nas palavras da professora [280]. Tal constatação é relevante, pois pode levar os alunos a se desprenderem de algumas ideias equivocadas apresentadas no primeiro dia de aula, quando estabeleciam uma base e uma altura para o triângulo. Reconhecer um triângulo em posições diversas pode levá-los a pensarem que qualquer um dos três lados de um triângulo pode ser tomado como base e sua altura relativa à base.

Em seguida, a professora avança para a formalização do Teorema de Pitágoras.

[284] Professora: *O lado oposto ao ângulo reto é o lado maior. Então, essas são as características do triângulo retângulo. Com toda essa verificação, essas características, nós podemos demonstrar o Teorema de Pitágoras. Sabiam? Com toda essa demonstração que vocês fizeram aí dos quadrados, das áreas dos quadrados menores. A soma das medidas das áreas dos quadrados menores é igual à medida da área do quadrado maior. [...] vocês pegaram um triângulo retângulo, mediram os lados. Recortaram as malhas quadriculadas. Não foi isso que vocês fizeram?*

[285] Ana: *Sim.*

[286] Professora: *Recortaram as malhas quadriculadas. Então, dado esse triângulo retângulo, nós vamos marcar o quê? Vamos marcar, o “a”, o “b” e o “c”. Certo? O “a” sempre vai ser o que mesmo?*

[287] Outro aluno: *O lado maior.*

[288] Ana: *A hipotenusa.*

[289] Professora: *O lado maior é chamado de?*

[290] Ana: *Hipotenusa.*

[291] Professora: *Que sempre vai ser o lado maior. E fica sempre do lado oposto... A hipotenusa sempre vai ficar do lado oposto?*

[292] Ana: *Do ângulo de 90° .*

[293] Professora: *Do ângulo reto, que é o ângulo de 90° . Os outros 2 lados como se chamam?*

[294] Outro Aluno: *Cateto.*

[295] Professora: *Então, o Teorema de Pitágoras é demonstrado da seguinte maneira: O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Nesse momento da formalização e sistematização da aprendizagem, a professora retoma algumas ideias centrais, mas que os alunos já estavam utilizando durante as aulas: o triângulo retângulo possui um ângulo de 90° , o lado de maior medida é chamado de hipotenusa e os outros dois são chamados de cateto. A própria enunciação do Teorema de Pitágoras, feita em [295] pela professora, já havia sido construída pelos alunos em momentos anteriores.

Por isso, considera-se que a professora conseguiu introduzir o Teorema de Pitágoras de maneira que os próximos alunos chegassem à equação matemática, sem a necessidade de apenas introduzir a fórmula para ser decorada.

Nesse terceiro dia de aula, a professora conseguiu finalizar a Tarefa 2, realizando a discussão com toda a turma (fase 3 do Ensino Exploratório) e sistematizando a aprendizagem dos alunos (fase 4 do Ensino Exploratório) no que diz respeito ao Teorema de Pitágoras. Já com relação à Tarefa 3, introduziu a tarefa (fase 1 do Ensino Exploratório) e, de maneira apressada por conta do tempo, avançou para a discussão com toda a turma (fase 3 do Ensino Exploratório) e para a sistematização da aprendizagem dos alunos (fase 4 do Ensino Exploratório).

Principalmente nas fases 3 e 4 do Ensino Exploratório, realizadas durante o desenvolvimento da Tarefa 2, foi possível perceber que os alunos manifestaram avançar do nível 0, passando pelos níveis 1 e 2, progredindo até o nível 3 do pensamento geométrico.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como objetivo identificar e caracterizar manifestações do pensamento geométrico de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental ao trabalharem com tarefas matemáticas que visavam introduzir o Teorema de Pitágoras. Para caracterizar o pensamento geométrico dos estudantes de uma turma de 9º ano de uma escola estadual no Estado do Paraná, foram utilizados os níveis segundo a teoria de van Hiele. Para trabalhar com as tarefas matemáticas, foram desenvolvidas seis aulas ministradas seguindo a abordagem do Ensino Exploratório.

Sobre os níveis de pensamento geométrico identificados e caracterizados, percebeu-se que, durante a Tarefa 1 (dois primeiros dias de aula), os alunos, por diversas vezes, manifestaram o nível 0 de *visualização* ou *reconhecimento* enquanto manipulavam os palitos. A progressão para o nível 1 de *análise* ocorreu, principalmente, quando a professora estimulava a discussão. Os alunos do grupo analisado não enunciaram, de maneira autônoma, a condição de existência de um triângulo, ficando a cargo da professora promover essa formalização, após manifestação de alunos de outros grupos.

Na Tarefa 2, os alunos também manifestaram o nível 0 de *visualização* ou *reconhecimento* e progrediram para o nível 1 – *análise*, mas de maneira mais autônoma do que na Tarefa 1. Isso pode ter contribuído para o fato que também manifestaram algumas características do nível 2 de *dedução informal* ou *ordenação* e do nível 3 de *dedução formal* na Tarefa 2.

Esta pesquisa reforça o fato destacado por Leivas (2017) de que o desenvolvimento pensamento geométrico é progressivo e os alunos precisam ser expostos a experiências práticas, desafios e tarefas que os levem a refletir e construir seu pensamento geométrico de maneira gradual. De acordo com Leivas (2017), os estudantes avançam de um nível a outro somente quando adquirem habilidades ou compreensões próprias do precedente. No entanto, é preciso que o professor crie condições para isso.

Podemos dizer que a professora criou condições para os estudantes avançarem gradualmente para níveis posteriores, como ficou evidente na passagem do nível 0 para o nível 1. É preciso ressaltar, entretanto, que, para os alunos do grupo analisado manifestarem características dos níveis 2 e 3, a professora interveio de forma considerável (não apenas na Tarefa 2, mas, também, na Tarefa 1).

Por um lado, essa intervenção contribuiu para que os alunos do grupo manifestassem indícios de tais níveis; por outro, é possível dizer que, por vezes, as intervenções da

professora restringiram a discussão ao direcionar demasiadamente as ações dos alunos. Exemplos dessas intervenções da professora podem ser vistos nas falas [166], [168], [179], [263] e [265]. Por esse motivo, consideramos que, no específico contexto investigado, os níveis 2 e 3 ainda não estão consolidados pelos estudantes e só foram manifestos por eles por conta da condução e do ambiente propiciado pelas discussões matemáticas coletivas oferecidas pelo Ensino Exploratório. Para compreender melhor se os alunos do grupo analisado possuem o nível 2 bem consolidado, a ponto de poderem progredir, de forma autônoma, para o nível 3, seriam necessários mais dados e, talvez, novas conversas com esses alunos.

Também é necessário tecer reflexões a respeito do Ensino Exploratório e seus desafios. Segundo Canavarro (2011), um dos desafios do Ensino Exploratório é controlar as questões e comentários que se oferecem aos alunos durante o trabalho autônomo, de modo a não lhes indicar a estratégia a seguir, reduzindo o desafio intelectual das tarefas, diminuindo o potencial da discussão matemática. Esse aspecto ficou evidente ao longo dos diálogos entre professora e alunos, como mencionamos nos parágrafos acima.

Outro desafio do Ensino Exploratório que merece destaque diz respeito à gestão do tempo. As seis aulas ocorreram ao longo de três dias, sendo duas aulas por dia. O planejamento inicial era abordar uma tarefa matemática em cada dia, promovendo as quatro fases do Ensino Exploratório em um único dia (duas aulas). No entanto, a realidade da sala de aula foi outra e o tempo planejado não funcionou. A Tarefa 1 começou no primeiro dia e finalizou no segundo dia de aula. A Tarefa 2 começou no segundo dia e finalizou no terceiro dia de aula. A Tarefa 3 precisou ser reduzida para ser possível iniciar e finalizar no terceiro dia de aula, juntamente com a Tarefa 2.

Apesar de a Tarefa 3 ser parte importante no planejamento, ela tinha a função de aprofundar a compreensão dos alunos sobre a relação entre os lados de um triângulo retângulo, em particular, o Teorema de Pitágoras. Por isso, como a Tarefa 3 visava retomar algumas ideias trabalhadas nas Tarefas 1 e 2, optou-se por priorizar essas duas tarefas em detrimento da Tarefa 3, que foi desenvolvida apressadamente.

De acordo com Canavarro (2011), para cada tarefa, deve-se evitando adiar para a aula seguinte a discussão ou a síntese dos conhecimentos produzidos pelos alunos. Tal fato, segundo a autora, pode gerar a perda de envolvimento dos alunos e o seu distanciamento das produções matemáticas realizadas.

Por se tratar da primeira experiência da professora com a abordagem do Ensino Exploratório, as reflexões sobre os desafios de se incorporar tal abordagem em sua própria

prática tem potencial para trazer aprendizagens profissionais que possivelmente terão impactos no futuro. Nesse sentido, a pesquisadora retoma a primeira pessoa do singular para tecer algumas dessas reflexões e impactos que a pesquisa na e sobre a própria prática trouxe.

Motivada por desafios observados na aprendizagem dos alunos, tive em vista compreender teórica e metodologicamente minha prática docente na perspectiva da teoria de van Hiele, com seus níveis de pensamento geométrico, e o Ensino Exploratório, centrado no aluno. A integração da Teoria de van Hiele e do Ensino Exploratório não beneficia apenas os alunos, mas também proporciona uma compreensão profunda e reflexiva por parte dos professores sobre a dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem. Essa abordagem vai além da mera transmissão de conteúdo, buscando promover uma compreensão ampla e significativa da Geometria. Isso prepara os alunos não apenas para os desafios da sala de aula, mas, também, para aplicar esses conhecimentos em contextos reais, tornando a aprendizagem mais contextualizada e efetiva.

Através da aplicação prática dessas teorias, observei a compreensão por parte dos alunos em relação a conceitos geométricos complexos, como o Teorema de Pitágoras. A análise das interações em sala de aula evidenciou que a teoria de van Hiele proporcionou a manifestação de diferentes níveis de pensamento geométrico dos alunos, subsidiando a criação de tarefas alinhadas ao estágio de desenvolvimento cognitivo de cada estudante.

A abordagem do Ensino Exploratório, por sua vez, revelou-se fundamental na criação de um ambiente interativo e participativo e permitiu que os alunos se engajassem na realização das tarefas, discutissem coletivamente e deduzissem resultados matemáticos relevantes sobre o Teorema de Pitágoras, o que contribuiu para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A combinação da teoria de van Hiele e do Ensino Exploratório contribuiu para a construção, por parte dos próprios alunos, do Teorema de Pitágoras e enriqueceu a compreensão do pensamento geométrico de modo abrangente. Além disso, a discussão ativa entre os alunos foi um indicativo positivo do potencial do Ensino Exploratório em estimular o pensamento geométrico.

Como resultado desta pesquisa, foi elaborado o Produto Educacional *Tarefas matemáticas para o desenvolvimento do pensamento geométrico: explorando o Teorema de Pitágoras*, que visa contribuir para o ensino do Teorema de Pitágoras em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental. Apesar de ser elaborado com dados produzidos em um contexto específico, o material tem potencial para ser replicado em diferentes salas de aula,

por diferentes professores, gerando outras interações e, possivelmente, outras manifestações de níveis de pensamento geométrico.

Sua importância reside na oferta de uma ferramenta prática e estruturada para a implementação da abordagem do Ensino Exploratório, aliada à teoria de van Hiele. Esse material proporciona uma orientação sistemática para professores e alunos, promovendo uma aprendizagem ativa e a construção autônoma do conhecimento geométrico.

O caderno de tarefas atua como um guia didático, fornecendo sequências de tarefas que podem estimular a exploração e a compreensão dos conceitos, dependendo da condução realizada pelo professor. Além disso, ele se destaca por sua adaptabilidade, podendo ser ajustado conforme as características específicas de cada contexto educacional. Dessa forma, visa contribuir para a aplicação eficaz da metodologia proposta e para a promoção da autonomia do estudante na construção do pensamento geométrico.

Além de seu valor pedagógico, o caderno de tarefas também pode servir como um recurso de desenvolvimento profissional para os professores. Ele oferece um modelo de como integrar teoria e prática de maneira eficaz, fornecendo exemplos concretos de como aplicar os princípios do Ensino Exploratório e da teoria de van Hiele na sala de aula. Isso, por sua vez, contribui para o enriquecimento das práticas docentes e para a formação contínua dos educadores.

Finalmente, o caderno de tarefas, ao propor uma abordagem via Ensino Exploratório, busca fortalecer a relação entre professores e alunos, criando um ambiente colaborativo e de apoio mútuo. O Produto Educacional, portanto, não apenas facilita a compreensão do Teorema de Pitágoras, mas também enriquece a experiência educacional de forma ampla, preparando os estudantes para enfrentar desafios futuros com confiança e competência.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. E. D. A. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional**. Brasília: Liberlivro, 2005.

ÁVILA, G. Euclides, Geometria e Fundamentos. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 45, 2001.

BATTISTA, M. T. Highlights of research on learning school geometry. In CRAINE, T. V.; RUBENSTEIN, R. **Understanding geometry for a changing world**. Reston, VA: NCTM. 2009, p. 91-108.

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Por que a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática? **Perspectivas em Educação Matemática**, v. 8, número temático, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994.

CALABRIA, A. R. A geometria fora da Grécia. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, n. 81, p. 5–9, 2013.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, Vol. XXIV, N.º 1, 2015.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório: ações e intenções de uma professora. In: PONTE, J. P. (Org.), **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p. 217-233.

CARGNIN, R. M.; GUERRA, S. H.; LEIVAS, J. C. P. Teoria de van Hiele e investigação matemática: implicações para o ensino de Geometria. **Revista Práxis**, Volta redonda, Ano VIII, n. 15, 2016.

COBB, P. et al. Designing experiments in educational research. **Educational Researcher**, v. 32, n. 1, p. 9-13, 2003.

COLLINS, A. Towards a design science of education. In SCANLON, E.; O'SHEA, T. (Eds.), **New directions in educational technology**. Berlin: Springer, 1992, p. 15-22.

FONSECA, M. C. F. R., et al. **O ensino da geometria na escola fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias**. 2000. 217 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2000.

GRAVEMEIJER, K.; VAN EERDE, D. Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. **The Elementary School Journal**, v. 109, n. 5, p. 510-524, 2009.

KALEFF, A. M. et al. Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 9, n. 10, 1994.

LARROSA, J. **Tremores: escritos sobre experiência**. Trad. Cristina Antunes, João Wanderley Geraldi. 1ª ed. 4.reimp. Belo Horizonte, Autêntica Editora, 2019.

LEIVAS, J. C. P. Pitágoras e Van Hiele: uma possibilidade de conexão. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 18, n. 3, p. 643-655, 2012.

LEIVAS, J. C. P. Geometria com tecnologia na formação inicial e continuada do professor de matemática. In: **Formação do Professor de Matemática: reflexões e propostas**. Editora IPR, Santa Cruz do Sul, 2012.

LEIVAS, J. C. P. Investigando o último nível da teoria de van Hiele com alunos de pós-graduação: a generalização do teorema de Pitágoras. **Vidya**, v. 37, n. 2, p. 515-531, 2017.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**. SBM, ano 3, nº. 4, p. 3-13, 1ºsem. 1995.

LORENZATO, S. Como aprendemos e ensinamos geometria. In: LORENZATO, S. **Aprender e ensinar geometria**. Campinas. SP: Mercado das Letras, 2015. Série Educação Matemática.

LÜDKE, M. ANDRE, M. E.D.A. **A Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2 ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013.

MATTA, A. E. R.; DA SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século xxi. **Revista da FAEEBA - Educação e Contemporaneidade**, v. 23, n. 42, 2014.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 781-801, 2018.

MENEZES, L. M; et al.. In. Martinho, M. H., et al. (Eds.) **Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Braga: APM, p. 243–26, 2014.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, Vol. XXII, Nº 2, 2013.

PAVANELLO, R. M. **O abandono da geometria no Brasil: causas e conseqüências.** Zetetiké, v. 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PIASESKI, C. M. **A Geometria no Ensino Fundamental.** Erechim, RS: Departamento de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI, 2010.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.), **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p. 13-27.

PONTE, J. P. et al. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, v. 25, n. 2, p. 77-98, 2016.

RAMOS, N. S. **Sequências numéricas como desencadeadoras do conceito de convergência: episódios de resolução de tarefas.** 2017. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – UTFPR, Londrina, 2017.

RIZZATTI, I. M. et al. Os produtos e processos educacionais dos programas de pósgraduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **Actio**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020.

RÔÇAS, G.; BOMFIM, A. M. Do embate à construção do conhecimento: a importância do debate científico. **Ciência & Educação.** Bauru, v. 24, n. 1, p. 3-7, 2018.

ROQUE, T. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Editora Zahar, 2012.

SANTOS, A. O.; OLIVEIRA, G. S. A prática pedagógica em Geometria nos primeiros anos do Ensino Fundamental: construindo significados. **Revista Valore**, Volta Redonda, v. 3, n. 1, p. 388-407, 2018.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Helping Teachers learn to better incorporate student thinking. **Matemathical Thinking and Learning**, v.10, n.4, p.313-340, 2008.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.3, p. 400-431, 2010.

APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL



*Tarefas matemáticas para o
desenvolvimento do pensamento geométrico*

explorando o Teorema de Pitágoras

ELISÂNGELA UDELIZA TOGINHO
HENRIQUE RIZEK ELIAS

**TAREFAS MATEMÁTICAS PARA O
DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO
GEOMÉTRICO: EXPLORANDO O TEOREMA DE
PITÁGORAS**

***MATHEMATICAL TASKS FOR DEVELOPING
GEOMETRIC THINKING: EXPLORING THE
PYTHAGOREAN THEOREM***

ppgmat

PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENSINO
DE MATEMÁTICA

UTFPR

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ELISÂNGELA UDELIZA TOGINHO

HENRIQUE RIZEK ELIAS

2024



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



TAREFAS MATEMÁTICAS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: EXPLORANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS

Produto Educacional desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT – *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina) como um dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Título da dissertação: Ensino Exploratório e o Teorema de Pitágoras: uma análise das manifestações do Pensamento Geométrico

Data de Aprovação: 18 de setembro de 2024.

Dr. Henrique Rizek Elias – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Dr. Diego Fogaça Carvalho – Universidade Norte do Paraná (UNOPAR) / UVA - Universidade Estadual do Vale do Acaraú

Dra. Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)



Resumo

O Produto Educacional "*Tarefas Matemáticas para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: Explorando o Teorema de Pitágoras*" foi desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), com o objetivo de oferecer aos professores ferramentas para estimular o pensamento geométrico dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. O material proposto inclui duas tarefas matemáticas focadas no Teorema de Pitágoras e utiliza a abordagem do Ensino Exploratório, visando a promover discussões produtivas e o desenvolvimento dos níveis do pensamento geométrico, com base na teoria de van Hiele. As tarefas incentivam os alunos a resgatarem conhecimentos prévios sobre triângulos, explorar suas propriedades e descobrir, de forma autônoma, a relação entre a hipotenusa e os catetos em um triângulo retângulo. O material também apresenta diálogos reais entre a professora e os alunos, destacando as diferentes manifestações dos níveis do pensamento geométrico durante as tarefas. Apesar dos desafios do Ensino Exploratório, como a gestão do tempo e a necessidade de intervenções apropriadas por parte do professor, o estudo conclui que essa abordagem é eficaz para promover a abstração e a dedução, afastando-se do ensino mecânico de fórmulas e exercícios. O Produto Educacional oferece uma alternativa para o ensino do Teorema de Pitágoras que foca no desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, mostrando-se uma ferramenta valiosa para os professores que buscam uma metodologia mais interativa e construtiva durante as aulas de matemática.

Palavras-chave: Pensamento Geométrico, Tarefas Matemáticas, Ensino Fundamental, Ensino Exploratório.

Sumário

APRESENTAÇÃO	5
ENSINO EXPLORATÓRIO	7
TEORIA DE VAN HIELE	12
O CONTEXTO	15
AS TAREFAS	17
CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
REFERÊNCIAS	59

APRESENTAÇÃO

Olá, amigo(a) professor(a)!

Neste Produto Educacional, apresentamos um material destinado a professores que queiram desenvolver o pensamento geométrico de seus estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. O objetivo é oferecer a você, professor(a), a possibilidade compreender uma maneira, talvez diferente daquela que já conhece, de abordar o Teorema de Pitágoras em sala de aula e de conduzir discussões matemáticas produtivas.

Esse material é o resultado da pesquisa de mestrado profissional de título “*Ensino Exploratório e o Teorema de Pitágoras: uma análise das manifestações do pensamento geométrico*”, realizada pela professora/pesquisadora Elisângela Udeliza Toginho sob a orientação do professor Henrique Rizek Elias. Também contou com a colaboração de professores e pesquisadores do grupo de pesquisa *Matemática Escolar: Práticas, Pesquisas e Estudos* (MEPPE), aproveitando as diferentes experiências de cada integrante do grupo para aperfeiçoar e refinar a proposta.

O curso mestrado profissional foi realizado no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *multicampi* Cornélio Proκόpio e Londrina.

Neste material, o leitor encontrará o planejamento de duas tarefas matemáticas e trechos de diálogos entre estudantes e a professora durante o desenvolvimento dessas tarefas em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública no Estado do Paraná. O foco está nas manifestações do pensamento geométrico desencadeadas por meio do Teorema de Pitágoras.



As tarefas aqui sugeridas não devem ser compreendidas como algo inalterável, como se fosse uma receita pronta e acabada. Pelo contrário! Espera-se que o Produto Educacional sirva para estimular a criatividade de professores, a fim de que realizem possíveis alterações de acordo com sua prática pedagógica, adequando-o de acordo com o contexto escolar em que está inserido.

Estamos empolgados com a ideia de que este Caderno de Tarefas se torne uma ferramenta útil para favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, por meio do trabalho com o Teorema de Pitágoras, promovido pela abordagem do Ensino Exploratório.

Os autores



ENSINO EXPLORATÓRIO

O Ensino Exploratório é uma abordagem que visa promover a dinamização e a gestão das discussões matemáticas coletivas nas aulas de Matemática. Uma característica do Ensino Exploratório é a natureza interativa do ensino, envolvendo professor e alunos (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013).

De acordo com Oliveira; Menezes; Canavarro (2013), o Ensino Exploratório distingue-se do chamado ensino direto pelos papéis desempenhados pelo professor e pelos estudantes, pelas tarefas matemáticas propostas e a forma como são geridas, e pela maneira como a comunicação é originada na aula. No ensino direto, associado a uma aula tradicional de Matemática, o processo está centrado no professor, uma vez que cabe a ele transmitir o conteúdo aos estudantes. No Ensino Exploratório, por outro lado, a ênfase desloca-se da atividade “ensino”, centrada exclusivamente na ação do professor, para a atividade mais complexa “ensino-aprendizagem”, pautada na interação e na partilha entre estudantes e o professor, decorrendo a aprendizagem dos alunos da possibilidade de trabalharem com tarefas matemáticas ricas (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013).

Mas, como realizar aulas pautadas no Ensino Exploratório? Na perspectiva de Oliveira; Menezes; Canavarro (2013), uma aula pautada no Ensino Exploratório é estruturada em quatro fases: (i) introdução de uma tarefa matemática, (ii) realização da tarefa pelos estudantes, (iii) discussão da tarefa e (iv) sistematização das aprendizagens matemáticas.

(i) Introdução da Tarefa Matemática: nesta fase, o professor apresenta aos alunos uma tarefa matemática desafiadora, como um problema, situação-problema, desafio ou investigação matemática. O objetivo é despertar a curiosidade e motivação

dos estudantes, proporcionando um contexto que estimule a exploração e busca por soluções.

(ii) Realização da Tarefa pelos Estudantes: nesta fase, os alunos são convidados a explorar a tarefa de forma autônoma, seja individualmente ou em grupos. Eles são encorajados a experimentar diferentes estratégias, testar hipóteses, utilizar materiais manipulativos e tecnologias, e realizar investigações para resolver o problema proposto. O professor atua como facilitador, fornecendo orientações e apoio conforme necessário, permitindo que os alunos assumam a liderança de sua própria aprendizagem.

(iii) Discussão da Tarefa: nesta fase, após a fase anterior de exploração, é o momento de promover a discussão coletiva da tarefa. Os alunos têm a oportunidade de compartilhar descobertas, apresentar estratégias, explicar raciocínios e discutir diferentes abordagens para resolver a tarefa. O professor age como mediador, conduzindo as discussões e estimulando a participação ativa de todos os estudantes. Essa troca de ideias e argumentações contribui para o aprofundamento do entendimento dos conceitos e a construção coletiva do conhecimento.

(iv) Sistematização das Aprendizagens Matemáticas: nesta última fase, ocorre a sistematização das aprendizagens matemáticas alcançadas. O professor recapitula os principais conceitos, estratégias e conclusões discutidos durante a aula, destacando as ideias essenciais e as relações matemáticas envolvidas na tarefa. Os alunos têm a oportunidade de refletir sobre o que aprenderam, consolidar conhecimento e fazer conexões com outros conceitos e situações. Essa síntese ajuda a reforçar a compreensão dos estudantes e a fixar os aprendizados da aula.

No que se refere à promoção das aprendizagens dos estudantes e à gestão em sala de aula, a Figura 1 apresenta as ações intencionais do professor em cada uma das quatro fases do Ensino Exploratório.

Figura 1 - Ações intencionais do professor no Ensino Exploratório

	Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
INTRODUÇÃO DA TAREFA	<i>Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos:</i> — Familiarizar com o contexto da tarefa — Esclarecer a interpretação da tarefa — Estabelecer objetivos <i>Promover a adesão dos alunos à tarefa:</i> — Estabelecer conexões com experiência anterior — Desafiar para o trabalho	<i>Organizar o trabalho dos alunos:</i> — Estipular tempos para o trabalho a desenvolver em cada uma das fases da aula — Definir formas de organização do trabalho (individual, pares, pequenos grupos, ...) — Organizar materiais da aula
REALIZAÇÃO DA TAREFA	<i>Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:</i> — Colocar questões e dar pistas — Sugerir representações — Focar ideias produtivas — Pedir clarificações e justificações <i>Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:</i> — Cuidar de promover o raciocínio dos alunos — Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos alunos	<i>Promover o trabalho de pares/grupos:</i> — Regular as interações entre alunos — Providenciar materiais para o grupo <i>Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:</i> — Pedir registros escritos — Fornecer materiais a usar — Dar tempo para preparar a apresentação <i>Organizar a discussão a fazer:</i> — Identificar e selecionar resoluções variadas (com erro a explorar, menos ou mais completas, com representações relevantes) — Sequenciar as resoluções selecionadas
DISCUSSÃO DA TAREFA	<i>Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos:</i> — Pedir explicações claras das resoluções — Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas — Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas <i>Regular as interações entre os alunos na discussão:</i> — Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas — Incentivar análise, confronto e comparação entre resoluções — Identificar e colocar à discussão erros matemáticos das resoluções	<i>Criar ambiente propício à apresentação e discussão:</i> — Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos — Providenciar a reorganização dos lugares/ espaço para a discussão — Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados <i>Gerir relações entre os alunos:</i> — Definir a ordem das apresentações — Cuidar de justificar as razões da não apresentação de algumas resoluções — Promover e gerir as participações dos alunos na discussão
SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS MATEMÁTICAS	<i>Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa:</i> — Identificar conceito(s) matemático(s), clarificar a sua definição e explorar representações múltiplas — Identificar procedimento(s) matemático(s), clarificar as condições da sua aplicação e rever a sua utilização — Reconhecer o valor de uma regra com letras <i>Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a capacidades transversais suscitadas pela exploração da tarefa:</i> — Identificar e relacionar dimensões da(s) capacidade(s) transversal(ais) presentes — Reforçar aspetos-chave para o seu desenvolvimento <i>Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores:</i> — Evidenciar ligações com conceitos matemáticos, procedimentos ou capacidades transversais anteriormente trabalhados	<i>Criar ambiente adequado à sistematização:</i> — Focar os alunos no momento de sistematização coletiva — Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada <i>Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização:</i> — Fazer registo em suporte físico ou informático (quadro, QI, acetato, cartaz ...) por aluno ou professor — Pedir registo escrito nos cadernos dos alunos

Fonte: Oliveira, Menezes e Canavarro (2013, p. 5)

Nessa abordagem, os estudantes são encorajados a resolver problemas, formular hipóteses, experimentar diferentes estratégias e comunicar descobertas. O professor atua como facilitador, orientando os alunos durante a exploração, fazendo perguntas e estimulando a reflexão sobre os resultados obtidos. Para favorecer esse trabalho do professor, Stein et al. (2008) apresentam cinco práticas para orquestrar discussões matemáticas produtivas em torno de tarefas matemáticas ricas. Essas práticas são: antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões.

Antecipar: realiza-se antes da aula, durante seu planejamento, prevendo como os alunos abordarão a tarefa proposta. Busca-se prever formas de interpretação e envolvimento dos alunos na tarefa, elencar uma diversidade de estratégias (corretas e incorretas), relacioná-las com conceitos desejados, e considerar diferentes graus de sofisticação.

Monitorar: realiza-se em sala de aula, apoiada pelo trabalho de antecipação. Envolve observar e ouvir os alunos durante o desenvolvimento da tarefa, avaliando a validade matemática das ideias e respostas manifestadas. É importante, nesse momento, registrar diferentes formas de pensar dos estudantes durante a realização da tarefa.

Selecionar: realiza-se em sala de aula, nos minutos finais do trabalho autônomo dos alunos, facilitada pelo trabalho anterior de monitor. Envolve identificar e escolher alunos/grupos cujas respostas são relevantes para compartilhar com toda a turma na fase de discussão da tarefa.

Sequenciar: realiza-se quase simultaneamente com a fase anterior de selecionar. É orientada pelo percurso de exploração das ideias matemáticas considerado mais adequado para os alunos atingirem o propósito matemático da aula. Ao selecionar ideias e respostas relevantes a serem compartilhadas, o professor deve estabelecer uma ordem de apresentação das resoluções dos alunos, de acordo com os objetivos visados pelo professor.



Estabelecer Conexões: realiza-se imediatamente após ou durante a discussão das diferentes resoluções dos alunos. Envolve comparar e confrontar diferenças e semelhanças nas resoluções, estabelecendo conexões matemáticas entre elas.

Essa abordagem valoriza a participação ativa dos alunos na construção do conhecimento, incentivando-os a explorar, questionar e refletir sobre conceitos e procedimentos matemáticos. A partir de tarefas matemáticas desafiadoras, os alunos são incentivados a utilizar suas habilidades de pensamento crítico e criativo, formulando hipóteses e testando suas ideias.



TEORIA DE VAN HIELE

Entender os processos envolvidos no desenvolvimento do pensamento geométrico é crucial para proporcionar um ensino de Geometria de qualidade. Diversas pesquisas (Leivas, 2012; Leivas 2017; Cargnin; Guerra; Leivas, 2016) têm contribuído para ampliar as compreensões sobre o pensamento geométrico na aprendizagem de diversos conceitos da Geometria.

Uma teoria amplamente difundida sobre o pensamento geométrico é a teoria de van Hiele, proposta pelos professores holandeses Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof, cujas pesquisas começaram a ser publicadas em 1959 (Kaleff *et al.*, 1994). A origem dessa teoria remonta às teses de doutorado de Dina van Hiele-Geldof e de Pierre van Hiele, defendidas na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. Após a conclusão da tese de Dina, Pierre continuou o desenvolvimento e a divulgação da teoria em publicações subsequentes.

A tese de Pierre buscava explicar as dificuldades dos alunos em aprender Geometria de maneira explanatória e descritiva, enquanto a tese de Dina considerava a experimentação educacional de maneira mais prescritiva em relação à classificação dos conteúdos de Geometria e atividades aplicadas aos alunos (Villiers, 2010).

No Brasil, a professora Lilian Nasser do Projeto 'Fundão' da Universidade Federal do Rio de Janeiro foi uma das principais divulgadoras da teoria de van Hiele (Cargnin, Guerra, Leivas, 2016).

O Modelo de van Hiele do pensamento geométrico se apresenta como um guia para a aprendizagem e avaliação das habilidades dos alunos em Geometria, descrevendo as características do pensamento geométrico em cinco níveis de compreensão:

visualização (ou reconhecimento), análise, dedução informal (ou ordenação), dedução formal e rigor (Kaleff *et al.*, 1994).

Nível 0 - Visualização ou Reconhecimento: neste estágio inicial, os alunos raciocinam principalmente por meio de considerações visuais. Conceitos geométricos são tratados como um todo, sem exploração explícita das propriedades de seus componentes.

Nível 1 - Análise: neste nível, os alunos raciocinam sobre conceitos geométricos através de uma análise informal de suas partes e atributos por meio de observação e experimentação. Eles começam a discernir características das figuras geométricas, estabelecendo propriedades que são usadas para conceituar classes e formas.

Nível 2 - Dedução Informal ou Ordenação: neste nível, os alunos formam definições abstratas, conseguindo estabelecer inter-relações de propriedades em figuras e entre figuras. Por exemplo, reconhecem que um quadrilátero com lados opostos paralelos necessariamente possui ângulos opostos iguais.

Nível 3 - Dedução Formal: neste nível, os alunos desenvolvem sequências de afirmações deduzindo uma afirmação a partir de outra. O raciocínio é formalizado no contexto de um sistema matemático completo, com termos indefinidos, axiomas, um sistema lógico subjacente, definições e teoremas.

Nível 4 - Rigor: neste nível, os alunos avaliam vários sistemas dedutivos com um alto grau de rigor. Eles comparam sistemas baseados em diferentes axiomas e estudam várias geometrias na ausência de modelos concretos.

A teoria de van Hiele destaca a importância do desenvolvimento progressivo do pensamento geométrico, passando por esses diferentes níveis de compreensão. É

essencial que os alunos sejam expostos a experiências práticas, desafios e tarefas que os levem a refletir e construir seu pensamento geométrico de maneira gradual.

Segundo Leivas (2017, p. 520), “o modelo é progressivo desde o nível inicial até o final, acreditando-se não ser possível que um estudante avance de um nível a outro sem ter adquirido as habilidades ou compreensões próprias do precedente”. O papel do professor, de acordo com van Hiele, é criar a situação ideal para o aluno alcançar um nível mais elevado de pensamento, selecionando tarefas apropriadas.

Esse modelo progressivo sugere que o desenvolvimento do pensamento geométrico requer uma base sólida e uma compreensão prévia dos conceitos geométricos mais básicos. Alcançar um nível mais elevado aumenta o potencial do aluno, tornando difícil retroceder para um nível inferior de pensamento geométrico.

Essa abordagem destaca a importância de uma progressão gradual no ensino da Geometria, em que os estudantes são guiados a construir seu conhecimento de maneira sólida e consistente. O professor desempenha um papel crucial na criação de um ambiente propício para o desenvolvimento do pensamento geométrico, oferecendo tarefas matemáticas adequadas e um ambiente propício para reflexão e construção de conhecimento em sala de aula.

O CONTEXTO

Como mencionado na Apresentação deste Produto Educacional, as tarefas apresentadas aqui foram produzidas no contexto de uma pesquisa de mestrado profissional, que teve como objetivo *identificar e caracterizar as manifestações do pensamento geométrico de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental ao abordarem tarefas matemáticas relacionadas ao Teorema de Pitágoras*. Para tanto, foram planejadas três tarefas matemáticas em colaboração com o grupo MEPPE, refinadas após discussões e contribuições dos professores e pesquisadores do grupo. No entanto, neste Produto Educacional, apresentamos e discutimos somente duas dessas tarefas.

O planejamento dessas duas tarefas foi realizado considerando quatro aulas de 50 minutos cada. Elas foram desenvolvidas em uma turma, composta por 22 alunos, de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado do Paraná. A primeira autora deste Produto Educacional, docente efetiva do Estado do Paraná, era a própria professora regente da turma. Isso significa que a pesquisa foi realizada na própria prática profissional da professora e este Produto Educacional foi elaborado e aprimorado com dados do contexto real da sala de aula da professora/pesquisadora.

A pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisas envolvendo seres humanos da UTFPR, sob o número do CAAE: 59064522.0.0000.5547. Os nomes utilizados são todos fictícios, visando garantir o anonimato dos estudantes participantes. As aulas foram gravadas e os áudios foram transcritos para serem utilizados nas análises e na apresentação, neste material, das discussões (diálogos) entre estudantes e professora ocorridas em sala de aula. A apresentação desses trechos de diálogos é

acompanhada de discussões acerca da manifestação do pensamento geométrico, segundo a teoria de van Hiele.

A proposta das aulas foi introduzir o Teorema de Pitágoras por meio das quatro fases do Ensino Exploratório. Para tanto, esperava-se que as tarefas permitissem que os alunos: (i) resgassem conhecimentos prévios que pudessem contribuir, posteriormente, para a compreensão do Teorema de Pitágoras; (ii) explorassem características e propriedades de um triângulo e, em particular, de triângulo retângulo; e (iii) percebessem, por eles próprios, o fato de que, no triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma das medidas de cada cateto ao quadrado.

É importante dizer que, neste material, utilizamos o termo “Teorema de Pitágoras”, mas reconhecemos, conforme aponta Roque (2012, p. 78), que a “escassez das fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático de nome Pitágoras”. De acordo com a autora, não se sabe ao certo se a Matemática atribuída a Pitágoras é uma criação de um matemático chamado Pitágoras, de integrantes de uma escola antiga chamada pitagórica (mas não de Pitágoras), ou dos neoplatônicos e neopitagóricos da Antiguidade (Roque, 2012). Para mais informações sobre esse debate, sugerimos a leitura do livro “História da matemática Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas”, da autora Tatiana Roque.

A próxima seção está dividida em duas subseções, cada uma dedicada a uma das tarefas. Em cada subseção, compartilhamos: o enunciado da Tarefa, uma proposta de planejamento de aulas para uso da Tarefa e, por último, diálogos entre professora e estudantes da turma de 9º ano do Ensino Fundamental. Os recortes de diálogos apresentados envolvem a professora e um grupo de estudantes analisado na pesquisa. O propósito de apresentar esses diálogos é indicar ao leitor como os níveis do pensamento geométrico foram manifestados pelos estudantes durante a execução das tarefas em um contexto real de sala de aula.

AS TAREFAS

Tarefa 1

A Tarefa 1 tem como objetivo resgatar o conhecimento que os alunos têm a respeito do que é um triângulo, da condição de existência de um triângulo¹ e, em particular, do que é um triângulo retângulo. Os estudantes devem reconhecer quando três segmentos de reta podem ou não representar um triângulo e perceber que, mesmo que três segmentos de reta formem um triângulo, nem todos os triângulos são retângulos. Para tanto, jogos com três palitos de madeira com diferentes comprimentos, conforme Figura 2, podem ser disponibilizados aos alunos. O Quadro 1 apresenta a Tarefa 1.

Figura 2 - Jogos de três palitos de madeira com diferentes comprimentos



Fonte: os autores (2024)

¹ Condição de existência de um triângulo: em qualquer triângulo, a medida de qualquer lado é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Quadro 1 - Tarefa 1

(Primeiro momento)

- 1- Como você explicaria ao seu colega ao lado o que é um triângulo? Descreva com suas palavras em seu caderno.
- 2- Faça a representação geométrica de um triângulo. Utilizando a régua, meça e anote a medida de cada lado.
- 3- Com três segmentos de reta é sempre possível formar um triângulo?
- 4- Como você explicaria para seu colega o que é um triângulo retângulo? Faça a representação geométrica de um triângulo retângulo no seu caderno.

(Segundo momento)

Com os palitos que receberam, montem um Triângulo Retângulo utilizando o molde abaixo.



- 1- O que vocês perceberam de diferente na construção desse triângulo em relação aos anteriores?
- 2- Será que é possível construir um triângulo retângulo, com os mesmos segmentos de reta que já foram construídos os outros triângulos anteriores?
- 3- Com o ângulo de 90° fixado, será que é possível construir esse triângulo retângulo com qualquer outra medida de segmento de reta?
- 4- Há necessidade de uma medida específica para completar o lado que está faltando?
- 5- E agora, após encontrarem o segmento de reta que completa o triângulo retângulo, o que perceberam de diferente na construção?

Escreva o que você concluiu com a realização dessa tarefa.

Fonte: os autores (2024)

A Tarefa 1 permite que os alunos manifestem, principalmente, os níveis 0, 1 e 2 da Taxonomia de van Hiele em relação ao conceito de triângulo e triângulo retângulo.

Nível 0 (Visualização): os alunos são desafiados a fazer uma representação geométrica de um triângulo e a medir seus lados usando uma régua. Isso envolve a visualização de formas geométricas e o reconhecimento básico de suas características.

Nível 1 (Análise): os alunos são incentivados a pensar sobre e experimentar, por meio do trabalho com palitos, a condição de existência de um triângulo, ou seja, se é possível formar um triângulo com três segmentos de reta dados. Eles também são solicitados a explicar o que é um triângulo retângulo, fazendo uma representação geométrica dele. Isso requer análise das propriedades dos triângulos e do triângulo retângulo em particular.

Nível 2 (Dedução Informal): os alunos formam definições abstratas, como, por exemplo, a ideia de condição de existência de um triângulo, mesmo que de maneira informal. Além disso, podem estabelecer inter-relações das propriedades nas figuras, por exemplo, perceber que em um triângulo retângulo, o lado de maior medida é oposto ao ângulo de 90° .

Embora a Tarefa 1 não vise diretamente os níveis mais avançados da teoria de van Hiele, como dedução formal e rigor, ela fornecerá uma base sólida para a compreensão inicial dos conceitos geométricos relacionados a triângulos e triângulos retângulos. Os alunos são desafiados a pensar criticamente sobre as condições que permitem formar um triângulo e a reconhecer as características específicas de um triângulo retângulo, o que será fundamental para seu desenvolvimento posterior em Geometria.

O planejamento de uma aula (100 minutos) para desenvolvimento da Tarefa 1 está descrito no Quadro 2.

Quadro 2 - Planejamento de aula para o desenvolvimento da Tarefa 1

Materiais utilizados: nessa aula, poderá ser utilizado quadro de giz para apresentação das questões a serem discutidas entre os grupos; régua para a construção do triângulo; palitos cortados com diferentes medidas (três jogos com diferentes medidas, sendo que dois jogos não formam um triângulo e um jogo forma um triângulo (diferente de um triângulo retângulo)); imagem impressa com dois segmentos de reta perpendiculares; jogos com três palitos com medidas que formam um triângulo retângulo.

Início da aula: divisão dos alunos em grupos de 5 integrantes;
(*Tempo estimado para essa etapa: 10 minutos*)

Lançamento (Introdução) da Tarefa Matemática: as questões referentes à 1ª Tarefa serão escritas no quadro de giz. Em seguida, a professora lerá o enunciado buscando garantir que os alunos compreendam o que é para ser feito.
(*Tempo estimado para essa etapa: 15 minutos*)

Exploração (Realização) da Tarefa pelos Estudantes: os alunos irão copiar e discutir enquanto realizam cada questão, registrando suas respostas. Durante a discussão, a professora irá circular pela sala, passando pelos grupos, *monitorando*, indagando-os quanto ao desenvolvimento da tarefa, estimulando o pensamento geométrico e promovendo diferentes formas de pensar, através de questionamentos para que haja uma interação entre os integrantes do grupo. A professora não deve validar respostas dos alunos ou dar respostas que diminuam o nível cognitivo da tarefa.

Enquanto circula, a professora deve observar as diferentes formas de resolver dos alunos e *selecionar* (mentalmente) quais formas deverão ser levadas para plenária. Essas resoluções selecionadas podem conter formas corretas ou incorretas de resolver a tarefa. Além disso, após selecionar as resoluções, a professora deverá estabelecer uma ordem (*sequenciar*) em que elas serão apresentadas. O critério para a ordem de apresentação poderá ser definido pela professora, por exemplo: primeiro convidar um grupo que fez uma resolução incorreta, em seguida aquele que fez uma resolução usando figuras, depois convidar um grupo que fez uma resolução numérica, depois convidar um grupo que fez uma resolução que chegou a uma generalização.

(*Tempo estimado para essa etapa: 25 - 30 minutos*)

Discussão da tarefa: após os grupos finalizarem a realização da tarefa, a professora convidará os grupos para apresentarem maneira de resolver. Não há necessidade de chamar todos os grupos. Não precisa colocar estratégias de resolução repetidas na lousa, pois a intenção é apresentar estratégias (corretas ou incorretas) distintas e *estabelecer conexões* matemáticas entre elas: como que uma resolução correta pode ajudar a compreender uma resolução incorreta? Como que o grupo que resolveu por meio de figuras pode passar a compreender a forma como o grupo resolveu de maneira puramente numérica? Como que a maneira do grupo que generalizou pode auxiliar os alunos a

perceberem a generalização? A discussão entre os alunos sobre a formação de triângulos com três segmentos de reta de tamanhos quaisquer revela uma progressão no pensamento matemático. Inicialmente, os alunos estão abordando o problema de maneira puramente numérica, considerando as medidas específicas dos segmentos de reta em questão. Eles questionam a possibilidade de formar um triângulo em cenários em que os segmentos de reta podem ser de diferentes tamanhos.

No entanto, à medida que a discussão avança, os alunos começam a perceber a importância da condição de existência do triângulo. Isso indica um movimento em direção à generalização, em que podem começar a extrair um princípio geral que se aplica a uma variedade de situações. Eles podem progredir de uma abordagem puramente numérica, que se concentra em casos específicos, para uma compreensão mais abstrata e generalizada da condição de existência de um triângulo.

A generalização completa desse conceito envolveria a compreensão da condição de existência como uma regra geral que se aplica a todos os triângulos, independentemente das medidas específicas dos lados. Portanto, essa discussão reflete o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, passando do nível de consideração numérica para um nível mais abstrato, onde eles começam a identificar princípios geométricos fundamentais que se aplicam a uma ampla gama de situações. É uma demonstração de como a compreensão matemática evolui à medida que os alunos exploram e discutem conceitos em sala de aula. Toda essa etapa de discussão, por meio da plenária é extremamente importante para o Ensino Exploratório.

A professora precisa envolver os estudantes na discussão (não é um momento para a professora dizer o que é certo ou errado e fazer correções), incentivar a análise e a comparação entre resoluções, além de identificar e discutir os erros matemáticos. Se a professora perceber que os alunos chegaram a uma generalização, estimulá-los a pensar sobre a necessidade de uma regra/condição para que existam medidas adequadas para que os segmentos de reta se completem e formem um triângulo.

(Tempo estimado para essa etapa: 25 minutos)

Sistematização das aprendizagens matemáticas: nessa tarefa, o objetivo é que os alunos conheçam e/ou reconheçam a construção de um triângulo; que eles percebam que, para se completar um triângulo, um dos lados deve ser menor que a soma dos outros dois e que somente com essa regra é possível a construção de qualquer triângulo. A partir daí, avançar para a construção do triângulo retângulo, que se diferencia dos demais pelo fato de possuir um ângulo reto de 90° . Assim se completa o triângulo de um triângulo retângulo.

A sistematização do conteúdo deixando bem clara que toda exploração do trabalho com materiais manipuláveis (palitos/malha quadriculada) foi para que percebessem que existe uma condição de existência para um triângulo qualquer e que a soma dos seus dois lados menores é sempre maior que a medida do seu terceiro lado.

(Tempo estimado para essa etapa: 20 minutos)

Fonte: os autores (2024)

DIALOGANDO COM ESTUDANTES

A professora/pesquisadora introduz a tarefa (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013) dizendo:

[1] Professora: *O objetivo aqui da minha primeira tarefa é que vocês conheçam e reconheçam os triângulos! Como você explicaria para seu colega ao lado, o que é triângulo?*

Logo em seguida, os alunos iniciam a etapa de realização da tarefa (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013) e começaram a dialogar entre os grupos.

[2] Professora: *Então, agora vocês vão explicar para o colega o que é um triângulo.*

[3] Ana: *Triângulo é uma forma geométrica que tem três lados.*

[4] Bruna: *Não é isso, triângulo é forma geométrica que tem...*

[5] Caio: *3 lados.*

Os estudantes começam a externalizar o conceito de triângulos, apresentando inicialmente que eles possuem 3 lados e que se trata de uma forma geométrica. Neste momento de diálogo inicial, os alunos estão no nível 0 de *visualização* ou *reconhecimento* (Kaleff *et al.*, 1994), no qual estão considerando os aspectos do triângulo como um todo, no espaço da Geometria. A professora volta a atenção ao grupo e acontece o seguinte diálogo:

[6] Professora: *O que é um triângulo?*

[7] Ana: *Uma forma geométrica? Com três pontos.*

[8] Professora: *Hum?*

[9] Ana: *Com uma base?*

[10] Carlos: *Então, uma base reta. Como uma forma de pirâmide?*

[11] Professora: *Por que você pensou assim? Por onde começa um triângulo?*

[12] Ana: *Da base reta?*

[13] Carlos: *Eu que falei sobre a base.*

[14] Professora: *Da base e o que mais? O que mais precisamos ter para construir um triângulo?*

Em [7], Ana traz um novo elemento na descrição do triângulo, ao dizer que possui três pontos, possivelmente referindo-se aos vértices. Agora, além de considerar que triângulos são formas geométricas (em [3 e 7]) com três lados (em [3 e 5]), os alunos passam a incluir o fato de que possui três pontos (em [7]).

Os alunos também começam a fazer relações com classes e formas geométricas, mas ainda “sem considerações explícitas das propriedades dos seus componentes” (Kaleff *et al.* 1994, p. 4-5). Em [10], Carlos está relacionando um triângulo a uma pirâmide, sem comentar característica de cada figura geométrica, o que pode gerar erros conceituais. Os triângulos são figuras geométricas planas, enquanto as pirâmides são figuras geométricas espaciais. Por mais que algumas relações possam ser estabelecidas (por exemplo, as faces laterais das pirâmides são sempre triangulares), é preciso ter cautela com essa comparação entre as figuras.

Em [10 e 13], Carlos fala da base como se fosse uma característica que define um triângulo quando, na verdade, a base é um elemento que define as pirâmides. Qualquer um dos três lados de um triângulo pode ser tomado como base e sua altura relativa à base. Assim, entendemos que os “alunos raciocinam sobre conceitos geométricos, por meio de uma análise informal de suas partes e atributos através de observação e experimentação. [...] Porém eles ainda não explicitam inter-relações entre figuras ou propriedades” (Kaleff *et al.* 1994, p. 4-5), característica do nível 1 de *análise*.

Como forma de garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos, a professora retorna ao grupo para pedir clarificações e justificações sobre o motivo daquele conceito de triângulo apresentado pelo grupo.

[15] Professora: *Será que é só isso que eu preciso? Para construir um triângulo? Ter o triângulo?*

Após alguns sussurros, o grupo apresenta o seguinte diálogo:

[16] Carlos: *Na parte de baixo, a face.*

[17] Ana: *É.*

- [18] Carlos: *Os lados são as laterais.*
[19] Ana: *Dá para se pôr assim.*
[20] Carlos: *É, a sei lá.*
[21] Ana: *Lateral, bases, laterais, face.*
[22] Carlos: *Laterais.*
[23] Bruna: *É, laterais acima.*
[24] Ana: *É, isso é um triângulo.*

É possível notar que os estudantes chegaram à ideia de que as laterais do triângulo são lados, como pode ser visto em [18], mesmo que ainda possuam inferências à ideia de face. Em [21], há indícios de que Ana estabeleceu uma diferença entre uma lateral, chamada de base, e as outras laterais, chamada de face. Em decorrência, os alunos apresentam similaridade em relação à noção relativa às pirâmides, a de face.

Em seguida, a professora pediu para que os grupos conversassem entre os integrantes e registrassem uma conclusão sobre o que é um triângulo.

- [25] Professora: *Após essa discussão entre o grupo, vocês irão descrever/escrever o que falaram sobre o que é um triângulo.*
[26] Ana: *Para vocês escreverem, tipo, o que é um triângulo.*
[27] Carlos: *O triângulo é uma forma geométrica.*
[28] Ana: *Então, quantas bases?*
[29] Carlos: *Uma base, 3 lados.*
[30] Ana: *Então, escreva isso, eu vou escrever isso.*
[31] Bruna: *Eu vou escrever também.*
[32] Professora: *Vão conversando e escrevendo. Se surgir outra ideia sobre o que é um triângulo, diferente dessa que vocês já comentaram, registrem.*
[33] Ana: *É, não tem muito o que falar sobre ele.*
[34] Professora: *Todos aqui já viram o que é triângulo?*
[35] Bruna: *Começa com uma base, aí tem as laterais.*
[36] Ana: *Parecida com uma pirâmide.*
[37] Carlos: *Tem uma base e três lados.*
[38] Ana: *Coloquei lados.*
[39] Bruna: *O triângulo é uma forma geométrica?*
[40] Ana: *Sim, uma base e 3 lados.*
[41] Carlos: *Faces é mais bonito. Um triângulo composto por uma base e 3 faces.*

Alguns aspectos sobre a compreensão que os alunos têm acerca dos triângulos ficam mais evidentes no trecho acima. Em [28, 29, 35 e 37], os alunos consideram a ideia de base como algo que define um triângulo, como se existisse, previamente definido, um lado a ser chamado de base. Em [41], Carlos manifesta considerar a nomenclatura face mais bonita do que lado, sem se preocupar com o uso não convencional do termo face no caso de triângulos. Além disso, em [36], Ana menciona que um triângulo é parecido com uma pirâmide, o que nos leva a perceber que, na visão dela, pirâmide e triângulo não são exatamente as mesmas coisas.

Vale destacar que, neste momento, nenhum aluno do grupo mencionou a ideia de ângulo, apenas as noções de lado e de vértice foram utilizadas pelos alunos para descreverem um triângulo.

Após essa primeira etapa, a professora partiu para a segunda etapa com a seguinte apresentação:

[42] Professora: *Na questão 2, vocês irão representar geometricamente um triângulo.*

Nesse novo item (que a professora chamou de questão 2), a professora argumentou o que seria necessário para resolver o que foi perguntado:

[43] Professora: *Só que durante a representação geométrica de um triângulo, preciso que vocês utilizem a régua, meçam e anotem as medidas de cada lado!*

O grupo iniciou a discussão:

[44] Carlos: *De fazer com um...*

[45] Bruna: *Com uma base.*

[46] Ana: *Dá pra fazer com 3.*

[47] Carlos: *Pra ficar bom, a base faz com 3 e os lados com 2,5.*

[48] Ana: *Eu vou fazer com 2 pra ver se fica bom.*

[49] Carlos: *Faz 2,5.*

[50] Ana: *Um, acho que tem que ser 3 de altura.*

[51] Carlos: *Da fazer com 3.*

[52] Professora: *Representar geometricamente, utilizando a régua.*

[53] Ana: *Faz 2,5 de altura, ... não, faz 2,5 na base e 3 de altura.*

[54] Ana: *É 2 ... 2,5 de base e 3 altura, fica bom.*

[55] Carlos: *Fica bom?*

[56] Ana: *Aham.*

[57] Carlos: *É 2,5 por 3, agora tem que fazer 2,5 por 3 de altura.*

[58] Ana: *É.*

No excerto acima, é possível perceber que a ideia de base do triângulo continua sendo central para os alunos. Para construir um triângulo, os alunos consideraram importante atribuir um valor à medida da base (por exemplo, em [45 e 47]). Carlos, em [47 e 49], e Ana, em [48], sugerem medidas para os lados, mas, logo essa ideia é substituída pela medida da altura, em [50] e [53]. Nesse momento, os alunos parecem relacionar a estratégia para responder a tarefa à ideia da área de um triângulo, que é dada por $\text{Área} = \frac{(\text{comprimento da base} \times \text{comprimento da altura})}{2}$.

A relação com a área do triângulo fica mais evidente quando, em [57], Carlos diz que “*agora tem que fazer 2,5 por 3 de altura*”, possivelmente referindo-se a uma multiplicação de 2,5 por 3.

Além disso, é importante destacar que os alunos estão sugerindo medidas não inteiras, como o 2,5. Neste momento, os alunos ainda não tinham recebido os palitos e, portanto, estavam propondo valores quaisquer. No trecho abaixo podemos compreender o motivo da escolha por 2,5.

[59] Professora: *Ana, essas medidas que você anotou aí. Constrói, exatamente, um triângulo?*

[60] Ana: *Sim, acho que sim.*

[61] Professora: *Todos pensam igual? Dá para construir um triângulo? Então, falem o que se precisa para construir um triângulo diante do que vocês anotaram aí!*

[62] Ana: *Uma base em metros... tanto faz, eu acho. E a altura, que também acho que tanto faz [referindo-se à unidade de medida em metros], que depende da base para ter a altura, se não fica um triângulo “desformado”.*

[63] Professora: *Fica um triângulo o quê?*

[64] Carlos: *Desformado.*

[65] Professora: *Desformado?*

[66] Ana: *É tipo, por exemplo, se colocar uma base... a gente colocou aqui uma base de 2,5, se colocar uma altura de 1,5 vai ficar torto.*

[67] Carlos: *Ou é 2,5 ou é 3.*

[68] Ana: *Porque, aqui, colocar a base de 3, para o tamanho ficar legal, 2,5 [de altura]. Eu acho que a altura tem que ser sempre um pouco menos que a base. Será que a base igual à altura fica certo?*

[69] Carlos: *Fica, bate certinho.*

[70] Ana: *Vou tentar fazer.*

[...]

[71] Ana: *Eu cheguei na... a base sempre tem que ser maior e a altura igual ou menor do que a base. Porque se a altura for tipo do mesmo tamanho que a base vai ficar desformado.*

[72] Professora: *Por que você chama esse triângulo de “desformado”?*

[73] Ana: *Porque um triângulo tem que ser, como diz, ah triângulo é assim, né? [apontando para um triângulo] e aqui fica torto, porque... fica torto.*

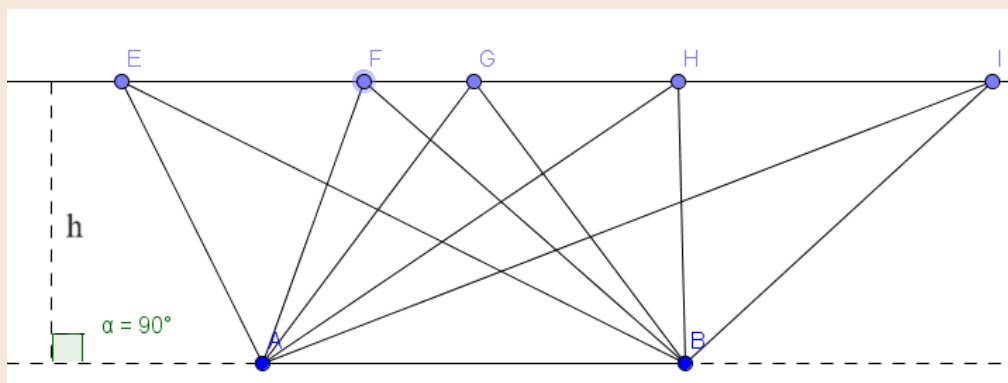
Em [62] e [64], os alunos falam que o triângulo ficaria “desformado” dependendo da escolha das medidas da altura e da base do triângulo. Isso significa que, para Carlos e Ana, a escolha dos valores das medidas da base e da altura do triângulo é feita considerando o formato que o triângulo terá, talvez por terem construído em suas mentes uma imagem de um determinado triângulo em uma determinada posição. Em [62] Ana diz que “*depende da base para ter a altura, se não fica um triângulo desformado*”, indicando que a escolha da medida da altura do triângulo vai depender da medida da base para que o triângulo não fique “desformado”, sugerindo que existe uma forma correta para um triângulo.

Em [68], Ana comenta que, para ficar legal, se a base medir 3, a altura tem que ter 2,5. Na sequência, apresenta uma justificativa “*Eu acho que a altura tem que ser sempre um pouco menos que a base*”. Em seguida, levanta uma conjectura “*Será que a base igual à altura, fica certo?*” e tenta avaliá-la, concluindo, em [71], que “*a base sempre tem que ser maior e a altura igual ou menor do que a base*”, caso contrário o

triângulo fica “desformado”. Neste momento, entendemos que Ana e Carlos estão no nível 1 de *análise*, uma vez que “os alunos raciocinam sobre conceitos geométricos, por meio de uma análise informal de suas partes e atributos através de observação e experimentação” (Kaleff *et al.*, 1994, p. 4-5).

Os alunos estão buscando estabelecer características dos triângulos, mas fazem isso de uma maneira conceitualmente problemática. Ao construir um triângulo partindo das ideias de base e de altura em relação a essa base, os alunos não percebem que diferentes triângulos podem ser formados, conforme Figura 3.

Figura 3 - Diferentes triângulos com a mesma base e a mesma altura



Fonte: os autores (2024)

Na Figura 3, vemos que diferentes triângulos podem ser construídos a partir de uma mesma base $\overline{AB}$ e uma altura h . Todos esses triângulos têm a mesma área, mas podem ser distintos, isto é, podem ter as medidas dos lados e dos ângulos internos diferentes. Se os alunos utilizassem as medidas dos lados (ao invés da base e da altura) para construir seus triângulos, duas ideias matemáticas poderiam emergir: a de rigidez dos triângulos e a de triângulos congruentes. A rigidez dos triângulos significa que (diferentemente dos quadriláteros, por exemplo) não é possível alterar seus ângulos internos mantendo as medidas dos seus lados fixas. A congruência de triângulos

significa que dois triângulos são congruentes quando as medidas dos lados e dos ângulos de um deles são, respectivamente, iguais às medidas dos lados e dos ângulos do outro.

Durante o diálogo com os alunos, é possível notar que a professora faz questionamentos (por exemplo, em [59], [61], [63] e [72]) aos alunos, mas procura não os corrigir ou diminuir a demanda cognitiva da tarefa. Por esse motivo, no próximo item da tarefa, os alunos do grupo analisado seguem na mesma linha de raciocínio, isto é, pensando os triângulos a partir de uma base e sua altura relativa. A professora escreve o terceiro item da tarefa na lousa e comenta com os alunos.

[74] Professora: *Com três segmentos de reta, é sempre possível formar um triângulo? E aí? Diante da discussão que vocês fizeram com os colegas sobre o que é um triângulo, utilizando a ideia que vocês tiveram para a construção desse triângulo. Agora a professora vai distribuir um material para vocês, com segmentos de retas onde vocês vão formar um triângulo. Certo? Eu vou entregar para cada grupo, vocês vão abrir, e formar o triângulo.*

As primeiras impressões dos alunos do grupo nessa nova tarefa foram observadas no seguinte diálogo:

[75] Ana: *Tamanhos diferentes. A gente vai ter que fazer um triângulo com isso aqui [palitinhos] com tamanhos diferentes. [...] Aí, acho que já entendi. Os “mais pequenos” são a base, né?*

[76] Carlos: *Não sei.*

[77] Ana: *Não do pequeno, desse tamanho aqui, olha? E esse mais ou menos desse tamanho aqui... a altura. Será?*

Ao observar o diálogo dos alunos do grupo durante o novo item, percebemos a interação entre eles enquanto tentam compreender a tarefa. Ana, em [75] e em [77], segue na linha de definir uma base e a altura. Nesse caso, ela sugere palitinhos “mais pequenos” para serem a base. No entanto, Carlos expressa incerteza em relação ao procedimento.

Após alguns segundos de sussurros entre os alunos, Ana diz:

[78] Ana: *Eu não entendi.*

[79] Aluno não identificado: *Eu também não.*

Os alunos continuam conversando e comentam sobre como outras pessoas (de outros grupos) estão fazendo. Foi assim que Ana comentou:

[80] Ana: *Ah, acho que entendi. Se a gente consegue fazer um triângulo com o tamanho das peças que a gente pegou. É, acho que é isso mesmo.*

A partir deste momento, os alunos do grupo, sempre liderados por Ana, passam a tentar construir um triângulo considerando seus lados.

[81] Ana: *Só se cortar um pedaço aqui, aí dá um triângulo sim.*

[82] Carlos: *Cortar essa pontinha.*

[83] Alunos do grupo: *Verdade.*

Utilizando um jogo de palitinhos, dado intencionalmente pela professora, que não forma um triângulo, os alunos percebem que seria necessário cortar um pedaço de um dos palitos para conseguir formar o triângulo (em [81] e em [82]). Na sequência, a professora retorna ao grupo e, após ouvir os alunos, sugere o uso de outro conjunto de palitinhos.

[84] Ana: *Aqui deu um triângulo. Aqui não deu um triângulo [...] Não dá, tipo... esse daqui a é pequeno. Se esses dois fossem do mesmo tamanho...*

[85] Carlos: *Não daria.*

[86] Ana: *É verdade [risos]. Porque a base é muito grande.*

[87] Carlos: *Só se fosse esse [indicando um palitinho] e maior ou igual a esse [indicando outro palitinho], mesmo tamanho ou um pouquinho maior. Esse daqui oh [indicando um palitinho].*

[88] Ana: *Isso aqui não é um triângulo.*

[89] Caio: *É sim.*

[90] Carlos: *É, mas não é o que a dona quer.*

[91] Ana: *É um triângulo?*

[92] Carlos: *Sim. Tem vários triângulos. Tem o normal, que é o que estamos fazendo aqui agora, e tem esse.*

[93] Ana: *Entendi. Gostei. Então isso daqui também é um triângulo, olha.*

No trecho acima, percebemos que os alunos do grupo começam a compreender a proposta da tarefa, utilizando os palitinhos para verificar a possibilidade ou não de se formar um triângulo. Em [84], Ana levanta uma conjectura “*Se esses dois fossem do mesmo tamanho*”, daria para formar um triângulo. Argumento que logo foi refutado por Carlos em [85] e confirmada por Ana em [86]. Nesse momento, os alunos passam a perceber que há uma relação entre os lados e a possibilidade de existência de um triângulo.

É importante notar, também, que na discussão coletiva entre os alunos, por conta da fala de Carlos (em [92]), Ana passou a aceitar a existência de outros triângulos, como pode ser visto em [93]. Esse aspecto é central, pois a discussão proporcionada pela dinâmica de sala de aula (tarefa matemática conduzida por meio do Ensino Exploratório) permitiu que Ana, até então preocupada em não “desformar” o triângulo, passa a aceitar e reconhecer outros formatos de triângulos. Reconhecer triângulos diferentes daqueles, nas palavras de Carlos em [92], “normais” ou daqueles que, em [90], “*a dona quer*”, indica que os alunos caminham para abstrair a ideia de um triângulo por meio de suas características.

A continuação da aula é dada com a entrega de mais um saquinho com palitos com outras medidas para uma nova composição. Neste momento, a professora introduz com o seguinte diálogo:

[94] Professora: *Agora, tentem pensar no que foi feito naquela outra formação/composição que distribui para vocês e com essa agora, fez diferença por que com aquela vocês não conseguiram e com essa conseguiram? Conversem entre grupo.*

Neste momento, o grupo se depara com o desafio, e começam a dialogar entre os pares.

[95] Ana: *Mas são bases iguais, essas são bases iguais.*

[96] Bruna: *São mais iguais.*

[97] Ana: *Só que aqui deu um triângulo perfeito, e aquela lá era muito menor e a outra muito maior.*

[98] Bruna: *E esse deu certinho.*

[99] Ana: *Isso, esse lado é menor que o outro. Um triângulo “desformado”, mas deu certo. Para ter um triângulo perfeito, as bases têm que ser iguais à altura, e aquele ou a base era muito maior ou muito menor, é isso.*

Nesta conversa entre Ana e Bruna, elas estão discutindo diferentes triângulos e as características que definem um triângulo como "perfeito" em comparação com os outros. Ana menciona inicialmente, em [95], que as bases são iguais, indicando que isso é uma característica importante de um triângulo. Bruna responde, em [96], concordando e sugerindo que são "mais iguais", possivelmente se referindo à “perfeição” do triângulo em questão.

Ana observa [97] que um dos triângulos é considerado "perfeito", enquanto outro era "muito menor" e o terceiro era "muito maior". Ela enfatiza a importância da relação entre as bases e a altura para a perfeição de um triângulo. Bruna concorda com Ana, destacando que o triângulo atual "deu certo".

Ana resume a conversa, enfatizando que, para um triângulo ser considerado "perfeito", as bases devem ser iguais à altura. Ela também menciona [99] que um dos triângulos era "desformado", mas ainda assim deu certo, indicando que a perfeição não é uma necessidade na geometria dos triângulos. Essa conversa reflete a compreensão das duas sobre as características que definem um triângulo “perfeito”. Elas estão discutindo a relação entre as bases e a altura como um critério importante para essa perfeição, mas também reconhecem a possibilidade de existir triângulos com diferentes proporções, mesmo que não sejam "perfeitos".

Após essa primeira análise dos alunos aos palitos que tem uma nova composição, a professora perguntou o que foi possível observar com a construção de triângulos utilizando esses palitos.

[100] Ana: *Então não importa qual o tamanho da base o que importa é o tamanho da altura [...]. Então, a base não importa o tamanho. Cadê aquele pequenininho? Aqui, por exemplo, esse aqui é a base, tipo, se esses 2 fossem iguais, dariam o triângulo perfeito.*

[101] Carlos: *Será?*

[102] Ana: *Coloca os 2 aqui, os mais pequenos, aí viu? Não importa o tamanho da base. Por exemplo, se a altura for igual, não importa o tamanho, vai dar um triângulo perfeito, e se a base for o grande vai dar o triângulo perfeito, o que importa é altura, chegamos à conclusão.*

Neste trecho, após a primeira análise dos alunos sobre as construções de triângulos utilizando os palitos com diferentes composições, a professora os incentiva a compartilhar suas observações e conclusões.

Em [100] e [102], Ana continua explorando suas ideias utilizando os termos base e altura. Conclui que “*não importa o tamanho da base [...] o que importa é a altura*”. Nesse momento, é possível perceber que Ana pode estar usando o termo altura de forma inadequada. A aluna parece estar definindo um lado como sendo a base e os dois outros lados como sendo a altura, o que fica evidente quando, em [100], diz que “*o que importa é altura*” e “*esse aqui é a base, tipo, se esses 2 fossem iguais, dariam o triângulo perfeito*” e, em [102], diz que “*se a altura for igual, não importa o tamanho, vai dar um triângulo perfeito*”.

Esse uso inadequado dos termos base e altura fica mais evidente nos trechos seguintes. A professora caminha para o encerramento da aula, uma vez que o tempo estava acabando. Ela tenta estimular os alunos a pensarem e falarem sobre a possibilidade de formar um triângulo com três segmentos de reta de qualquer medida, abordando a condição de existência de um triângulo.

[103] Professora: *Será que com esses 3 segmentos de reta que vocês receberam, de um tamanho qualquer, sempre será possível construir um triângulo?*

[104] Alunos: *Não.*

[105] Professora: *Por quê?*

[106] Representante de outro grupo: *Os segmentos podem não favorecer a construção.*

[107] Professora: *Todos concordam ou tem alguém que discorda?*

A professora [103] inicia o questionamento, indagando se é viável construir um triângulo com três segmentos de reta de tamanhos arbitrários. Os alunos [104] respondem negativamente, indicando que nem sempre é possível construir um triângulo com quaisquer medidas de segmentos de reta. A professora [105] continua a investigação, questionando por que eles chegaram a essa conclusão. Um representante de outro grupo [106] contribui com a discussão, explicando que os segmentos podem não ser adequados para a construção de um triângulo. Isso sugere que os alunos da sala estão começando a considerar a condição de existência de um triângulo, o que poderia indicar que os alunos estão progredindo do nível 0 de *visualização*, em que apenas reconhecem figuras geométricas, para o nível 1 de *análise*, em que começam a entender as propriedades e as relações entre essas figuras.

No entanto, no grupo que está sendo analisado, algumas confusões permanecem.

[108] Professora: *Então, com 3 segmentos de reta de qualquer tamanho, sempre é possível construir um triângulo?*

[109] Todos: *Não, não.*

[110] Professora: *Não! Diante da construção que deu certo e as outras que não deram, seria possível existir alguma regra? Uma condição ou uma regrinha para que possamos construir um triângulo? Agora conversem entre si e vamos analisar se é possível e qual seria essa regra!*

[111] Ana: *A gente já achou essa regra aí?*

[112] Carlos: *Não.*

[113] Ana: *Ah tá. A gente já conversou.*

[114] Professora (para toda a turma): *Quando é possível formar um triângulo? Conversa com os colegas.*

O grupo volta a debater e Ana deixa mais clara sua compreensão para a noção de altura:

[115] Ana: *Acho que é isso, porque a base, não importava o tamanho dela se as alturas fossem iguais. Se a base for pequena e os outros foram iguais, vai dar certo, a menos que a base seja muito pequena. [...] Como se diz, aqui os 3 segmentos, 2 segmentos têm que ser iguais. Concorda?*

[116] Aluno do grupo: *sim.*

Percebendo que algum integrante do grupo não entendeu, Ana continua:

[117] Ana: *Vou te explicar. O nome desse aqui é segmento, né? E os 3 segmentos são iguais, por isso deu um triângulo perfeito, né? Então, a regra é clara, para dar um triângulo perfeito 2 segmentos têm que ser iguais, a base não importa o tamanho dela, sendo os 2 segmentos iguais terá um triângulo perfeito, entendeu agora?*

Em [115], Ana afirma que não importa o comprimento da base, desde que suas “alturas” sejam iguais. Na mesma fala, Ana ainda diz que se “os outros [segmentos] forem iguais, vai dar certo”. Isso fica reforçado com o trecho “aqui os 3 segmentos, 2 segmentos têm que ser iguais” e com a explicação dada em [117].

Ana vinha falando que a altura precisava ser igual (em [102], [115]), mas nas falas [115] e [117] fica evidente que, ao falar de altura (ou alturas, no plural), Ana está se referindo aos dois outros segmentos que não são a base. A aluna está definindo um lado como sendo a base do triângulo (ideia incorreta, pois, como já foi afirmado, qualquer um dos três lados de um triângulo pode ser tomado como base e sua altura relativa à base) e os outros dois lados (segmentos) como sendo a altura.

É possível compreender o pensamento geométrico de Ana, pois, assumindo um lado como base, a altura relativa a essa base *pode* variar de acordo com comprimento dos dois outros lados. No entanto, como mostra a Figura 3, isso não necessariamente ocorre.

Apesar de, em [91] e [93], Ana indicar que entendeu a possibilidade de ter outros triângulos, diferente daqueles que estava considerando inicialmente, em [117] a aluna volta a insistir na ideia de que “para dar um triângulo perfeito 2 segmentos têm

que ser iguais”. Cabe destacar que ter dois segmentos iguais não é condição necessária para se construir um triângulo.

No grupo analisado, a professora faz novamente a pergunta sobre a possibilidade de construir um triângulo com três segmentos de reta de qualquer tamanho. O grupo responde unânime que não é possível.

A professora, então, estimula o grupo a pensar sobre a existência de uma regra ou condição que permita a construção do triângulo com os três segmentos de reta. Ela os encoraja a discutirem entre si e sugere que já tiveram alguma conversa anterior sobre esse assunto.

[118] Professora: *Ficou bem claro para vocês a formação desses triângulos, né? O que não deu certo e o que deu certo e o por quê? Entre o grupo, ficou bem claro? [...] Vamos lá, então, na quarta pergunta, como você explicaria para o seu colega o que é um triângulo retângulo?*

O grupo começou a debater e Ana, novamente, liderou a discussão.

[119] Ana: *Um retângulo tem que ter duas laterais menores iguais e duas maiores iguais. O triângulo de 3 tem que ter, é... acho que um menor e dois maiores iguais.*

Em [118], percebe-se que a professora passou para a quarta pergunta acreditando que os alunos tinham compreendido a condição de existência dos triângulos, fato que não ocorreu. Mas, os alunos tinham condições de explorar melhor essa questão por meio da quarta pergunta, ao discutirem o que é um triângulo retângulo.

Em [119], Ana parece tratar triângulo retângulo de maneira separada: triângulo e retângulo. Para as duas figuras geométricas, Ana utiliza a mesma ideia de medida dos lados: no caso do retângulo, “*laterais menores iguais e duas maiores iguais*”, no caso dos triângulos, “*um menor e dois maiores iguais*”.

A professora retoma para a turma toda.

[120] Professora: *Bora lá então galerinha. Diante do que vocês escreveram e conversaram com os colegas sobre o que é o triângulo retângulo, fizeram a representação geométrica de um triângulo retângulo? Preciso que vocês analisem o que desenharam.*

[121] Carlos: *Um quadrado.*

[122] Ana: *Não.*

[123] Professora: *Analise, detalhadamente.*

[124] Carlos: *Um ângulo de 90°.*

Em [124], Carlos apresentou a característica do triângulo retângulo: possui um ângulo de 90°.

Em um momento posterior, a professora orienta novamente os alunos.

[125] Professora: *Então, galerinha, presta atenção aqui um pouquinho. Vocês já conversaram aí entre os grupos, agora vamos analisar a formação que vocês fizeram. O que vocês perceberam de diferente da construção desse triângulo em relação aos anteriores que fizeram [antes]? O que tem de diferente desse triângulo em relação àqueles que vocês fizeram [antes]?*

[126] Ana: *O que a gente fez ontem era de pé.*

[127] Caio: *E esse aí está deitado.*

[128] Carlos: *E esse daí está com sono. (Risos)*

[...]

[129] Professora: *Será que é possível construir um triângulo retângulo com os mesmos segmentos de reta que já foram construídos os outros triângulos ontem? Vocês conseguiram construir? Ontem, vocês pegaram as folhinhas com aquela formação de palitinho. Vocês conseguiram montar um retângulo com aquela formação?*

[130] Todos: *Não.*

Neste trecho, inicialmente, os alunos expressam observações práticas e externas sobre a orientação dos triângulos, sugerindo um pensamento predominantemente no nível 0 de *visualização* ou *reconhecimento*. As respostas de Ana [126], Caio [127] e Carlos [128] sugerem que o foco está na posição do triângulo ("de pé", feito na aula do dia anterior, e "deitado", feito naquele dia), algo que não contribui para abstrair

informações, ideias sobre os triângulos. A professora, então, ao questionar a possibilidade de construir um triângulo retângulo com os mesmos segmentos de reta da formação anterior, recebe como resposta "Não" [130].

Na continuação, a professora volta a questionar os alunos.

[131] Professora: *Então, vamos organizar essas ideias que vocês falaram! Com essa tarefa da formação dos triângulos de ontem de um triângulo qualquer, pois ontem vocês puderam montar triângulos quaisquer, né? E hoje vocês fizeram aí?*

[132] Ana: *Um triângulo com ângulo de 90° .*

[133] Professora: *E como se chama esse triângulo?*

[134] Todos: *Triângulo retângulo.*

[135] Professora: *Triângulo retângulo. Então vocês puderam concluir se existe sim, uma condição, uma regrinha para que esse triângulo exista?*

[136] Todos: *Sim.*

[137] Professora: *E vocês sabem me dizer qual é essa regrinha para montar triângulo qualquer?*

A professora busca “organizar as ideias” dos alunos. Em [130], os alunos reconheceram que não é qualquer combinação de três segmentos que permite construir um triângulo; já em [136], os alunos manifestam reconhecer que, nas palavras da professora em [135], existe “uma condição, uma regrinha para que esse triângulo exista”. Nesse momento, a professora conversa com toda a turma, não apenas com o grupo analisado. Em [137], ela tenta compreender se os alunos chegaram à condição de existência.

Alunos de outro grupo, diferente do que está sendo discutido aqui, apresentaram a condição de existência. Neste momento, a professora, então, avança para a fase de sistematização das aprendizagens matemáticas (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013), visando concluir a Tarefa 1.

[138] Professora: *Vamos pegar esse daqui. Um lado que mede 12, um lado que mede 19 e um lado que mede 23. Vamos falar aqui unidades, porque triângulo pode ser medido em centímetros, em metros. Então tem aqui um triângulo que tem essas medidas, certo? Qual seria a condição para eu conseguir construir*

esse triângulo? Porque ontem vocês pegaram o que tinha palitinhos que faltavam, não dava para chegar lá [fechar os lados do triângulo]. Qual é a condição aqui para que eu consiga construir esse triângulo? Manuseando todos aqueles palitinhos ontem, vocês conseguiram? Encontraram uma condição para que eu consiga construir esse triângulo?

[139] Ana: *As medidas?*

[140] Professora: *As medidas? E o que tem as medidas?*

[141] Ana: *Diferentes.*

[142] Professora: *É, são diferentes! Mas e porque existem, não existem triângulos diferentes?*

Em [138], a professora busca conduzir a formalização da condição de existência, uma vez que outro grupo já a apresentou. No entanto, o grupo aqui analisado, principalmente a aluna Ana, mantém-se no estágio inicial (nível 0 – *visualização*), pois apresentam raciocínios, basicamente, por meio de considerações visuais (Kaleff *et al.*, 1994). O foco dos alunos foi na medida dos segmentos que são diferentes (em [139] e [141]), não na abstração da condição de existência do triângulo. A professora prossegue.

[143] Professora: *Então, o que a gente pode deixar aqui como condição de existência? Se nós pegarmos aqui esse lado mais esse lado são $12 + 19$ dá quanto?*

[144] Todos: *31.*

[145] Professora: *Somando esses dois lados, ele é maior ou menor que esse terceiro lado?*

[146] Todos: *Maior.*

[147] Professora: *Maior, maior que 23. Vamos pegar outros dois lados. Quanto que dá 19 mais 23?*

[148] Todos: *42.*

[149] Professora: *42 é maior, menor que 12?*

[150] Todos: *Maior.*

[151] Professora: *Maior que 12! Uma outra formação que nós não fizemos, 23 mais 12. Dá quanto?*

Após apresentar diferentes exemplos, com triângulos com diferentes medidas para seus lados, a professora questiona os alunos.

[152] Professora: *O que nós podemos concluir?*

[153] Um aluno: *Que qualquer soma que tiver, vai ser maior do que o lado que sobrou.*

[154] Professora: *Como é que é, então?*

[155] Um aluno: *A soma de dois sempre vai ser maior do que o que sobrou.*

[156] Professora: *Então essa é uma condição de existência para um triângulo. A soma das medidas de dois lados, eu pego dois lados qualquer do meu triângulo, de um triângulo qualquer, as medidas dos dois lados, somando tem que ser?*

[157] Todos: *Maior, maior do que o que sobrou.*

[158] Aluno: *A soma de dois lados sempre vai ser maior do que o que sobrou.*

Em [143], [145], [147], [149] e [151], a professora faz uma série de questionamentos muito direcionados, por meio de casos específicos, buscando com que toda a turma perceba e reconheça a condição de existência do triângulo, enunciada por ela posteriormente (em [156]). Em [155], um aluno apresenta, de maneira informal, a condição procurada. Esse aluno manifesta estar no nível 2 – *dedução informal* do pensamento geométrico, pois produz uma definição abstrata, estabelecendo uma propriedade dos triângulos. No entanto, tal aluno não é integrante do grupo analisado nesta pesquisa. Por meio dos dados obtidos pela gravação, a conclusão é que, até esse momento em que a professora conduz a discussão e enuncia a condição de existência, o grupo aqui analisado não havia chegado a tal dedução informal.

Assim, as discussões coletivas em sala de aula, proporcionadas pela abordagem do Ensino Exploratório, oportunizaram aos alunos do grupo analisado um ambiente favorável para saírem no nível 0 - *visualização* e do nível 1 – *Análise* e avançassem para o nível 2 – *dedução informal*. Essa oportunidade se deu na medida em que alunos de outros grupos enunciaram, ainda que de maneira informal, a condição de existência do triângulo e, em seguida, a professora sistematizou a aprendizagem dos estudantes (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013).

No entanto, ainda era necessário promover a sistematização considerando o caso do triângulo retângulo. A professora retoma a discussão sobre o triângulo retângulo possuir um ângulo de noventa graus e conduz os alunos a reconhecerem o fato de que o lado de maior comprimento é oposto ao ângulo de noventa graus.

[159] Professora: *E triângulo retângulo? Nós sabemos que o triângulo retângulo tem o quê? [...] Para terminar de formar esse triângulo retângulo, o que nós temos ali de diferente?*

[160] Outra Aluna: *A descidinha dele?*

[161] Ana: *Face?*

[162] Outra Aluna: *Ele é sempre o lado maior, não é?*

[163] Professora: *E esse lado maior, ele sempre está o quê? Oposto a?*

[164] Outra Aluna: *Ao ângulo reto?*

[165] Professora: *Então, galerinha, [...] o lado maior sempre vai ficar oposto a esse ângulo reto, a esse ângulo de 90°. Certo? Entenderam? Conseguir visualizar isso?*

[166] Todos: *Sim.*

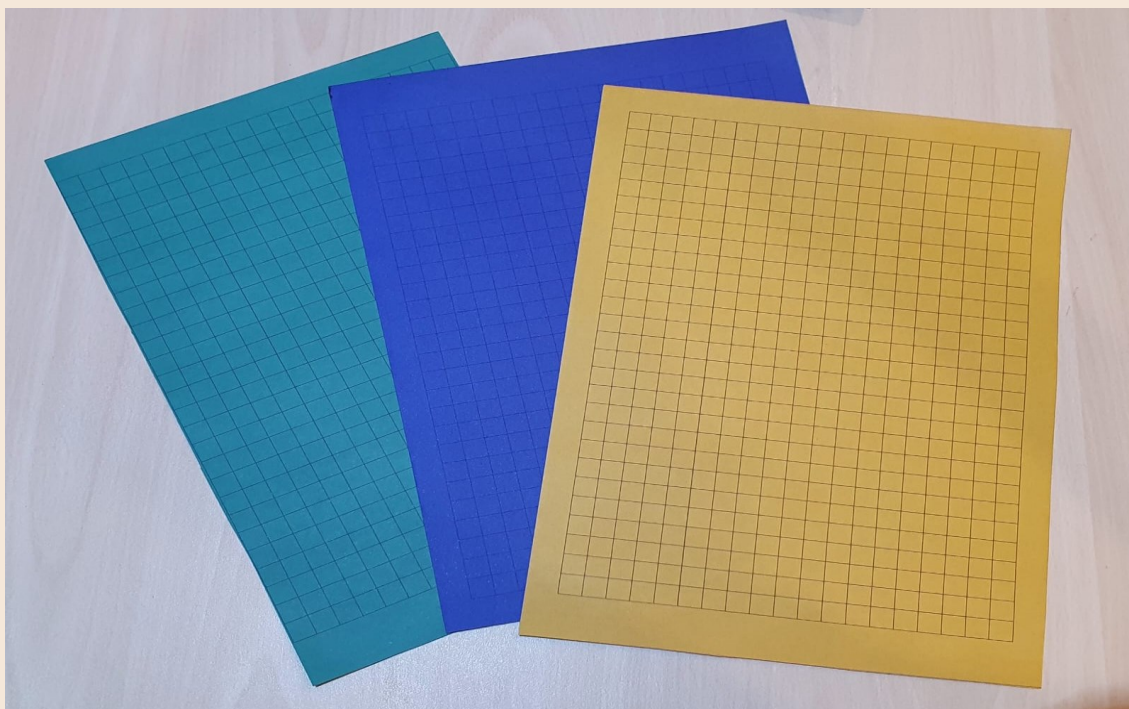
Em [159], a professora questiona os alunos e logo obtém a resposta esperada, apresentada em [162] por uma aluna de outro grupo. As respostas [162] e [164] permitem à professora sistematizar uma característica importante dos triângulos retângulos: o lado oposto ao ângulo reto é o lado de maior comprimento do triângulo. Apesar de ainda não mencionar o nome nesse momento da aula, a professora está se referindo à hipotenusa.

Em [161], é possível notar que Ana ainda utiliza o termo face. Ao longo dos diálogos, foi possível perceber que ela utiliza o termo face para se referir ao lado do triângulo retângulo que não é, segundo ela, nem base e nem altura.

Tarefa 2

A Tarefa 2 tem como objetivo possibilitar que os alunos percebam, por si próprios, o fato de que, no triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado será igual à soma das medidas de cada cateto ao quadrado. Para auxiliar nesse trabalho, malhas quadradas coloridas, conforme Figura 4, podem ser disponibilizados aos alunos. O Quadro 3 apresenta a Tarefa 2.

Figura 4 - Malha quadriculada colorida

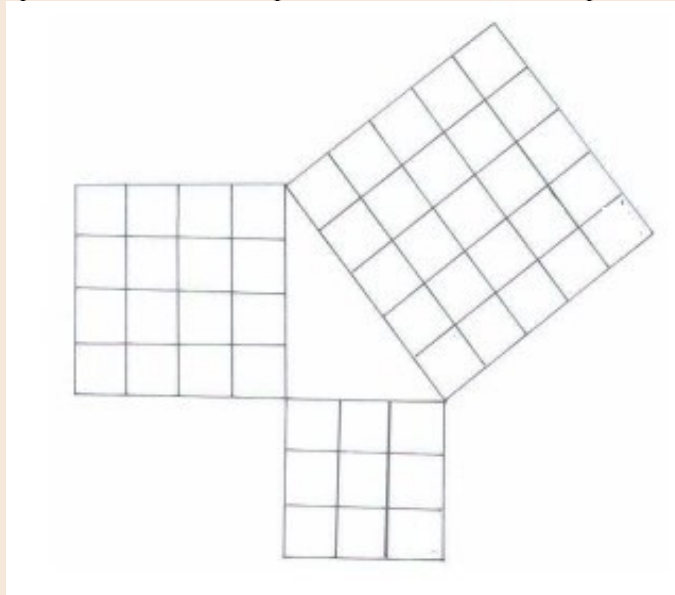


Fonte: dados da pesquisa (2024)

Quadro 3: Enunciado da Tarefa 2

1- Com base no triângulo retângulo que você montou com os palitos, complete o triângulo impresso na folha de sulfite e meça seus lados. Desenhe um quadrado em cada lado do triângulo que você completou.

2- Depois de desenhado os quadrados a partir dos lados do triângulo, recorte e cole quadradinhos da malha quadriculada colorida preenchendo as áreas dos quadrados.



- a) Calcule a área dos dois quadrados menores.
- b) Some a área desses dois quadrados.
- c) Calcule a área do quadrado maior.
- d) O que conseguiu observar a partir das áreas dos quadrados que você calculou.

Fonte: os autores (2024)

A Tarefa 2 permitirá que os alunos manifestem, especialmente, os níveis 0 (*Visualização*), 1 (*Análise*), 2 (*dedução informal* ou *ordenação*) e 3 (*dedução formal*) da teoria de van Hiele em relação ao conceito de triângulo retângulo e à relação entre os lados desse triângulo.

Nível 0 (Visualização): os alunos são desafiados a fazer uma representação geométrica dos quadrados formados pelos lados dos triângulos e a calcular a medida de suas áreas por meio de pequenos quadradinhos coloridos. Isso envolve a visualização de formas geométricas e o reconhecimento básico de suas características.

Nível 1 (Análise): os alunos serão convidados a completar um triângulo retângulo com base no modelo montado com palitos e, em seguida, desenhar quadrados em cada lado desse triângulo. Isso exigirá que os alunos analisem informações geométricas e visualizem a relação entre os lados do triângulo retângulo e os quadrados adicionados. Eles também serão solicitados a calcular as áreas dos quadrados e somá-las, envolvendo a manipulação de informações e o uso de fórmulas geométricas.

Nível 2 (dedução informal ou ordenação): após manipular com diferentes triângulos e calcular a área dos quadrados formados a partir dos lados dos triângulos, os alunos poderão deduzir, ainda de maneira informal, que, no caso dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo, a medida da área do quadrado maior será igual à soma das medidas das áreas dos dois quadrados menores; e que isso não é válido para outros triângulos.

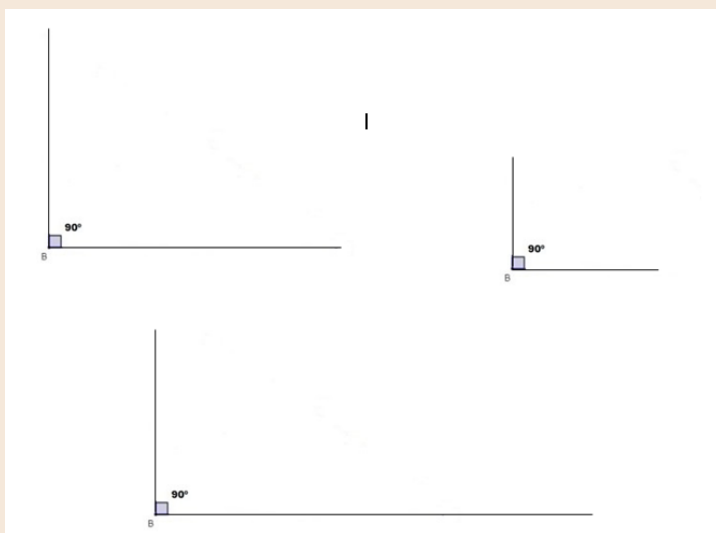
Nível 3 (dedução formal): ao perceber que, no caso dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo, a medida da área do quadrado maior será igual à soma das medidas das áreas dos dois quadrados menores, os alunos organizar e formalizar as afirmações: o triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto; o lado de maior medida de um triângulo retângulo é o lado oposto ao ângulo reto e é chamado de hipotenusa; no triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma das medidas de cada cateto ao quadrado.

Assim, a Tarefa 2 incentivará os alunos a explorarem as propriedades dos triângulos retângulos por meio da construção e análise de modelos, bem como pelo cálculo das áreas dos quadrados associados. Isso os levará a descobrir, por si mesmos, a relação fundamental entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, que é o Teorema de Pitágoras.

O planejamento de uma aula (100 minutos) para desenvolvimento da Tarefa 2 está descrito no Quadro 4.

Quadro 4 - Planejamento de aula para o desenvolvimento da Tarefa 2

Materiais utilizados: para essa aula, poderá ser utilizado o quadro para apresentação das questões a serem discutidas. Imagens impressas de três triângulos retângulos incompletos (Figura abaixo), os quais os alunos terão que completá-los e anotar as medidas dos lados e escolher um dentre os três triângulos. Com a régua terão que formar quadrados com cada lado desse triângulo. Serão entregues malhas quadriculadas para completar esses quadrados. Em seguida será entregue imagens de triângulos não retângulos.



Início da aula: formação dos mesmos grupos de alunos da aula anterior. Retomada da Tarefa 1, discutir com os alunos a importância da condição de existência para a construção de um triângulo.
(Tempo estimado para essa etapa: 15 minutos)

Lançamento (Introdução) da Tarefa Matemática: as questões referentes à Tarefa 2 podem ser escritas no quadro de giz. Em seguida, a professora lerá o enunciado buscando garantir que os alunos compreendam o que é para ser feito.
(Tempo estimado para essa etapa: 15 minutos)

Exploração (Realização) da Tarefa pelos Estudantes: na Tarefa 2, os alunos deverão completar o triângulo impresso que será entregue para eles, medir os lados e, em seguida, desenhar um quadrado para cada lado desse triângulo. Depois de desenhado, deverão preencher as áreas desses quadrados, recortando e colando os quadradinhos das malhas quadriculadas coloridas, um quadrado para cada lado do triângulo. Durante a realização dessa tarefa, os alunos devem fazer

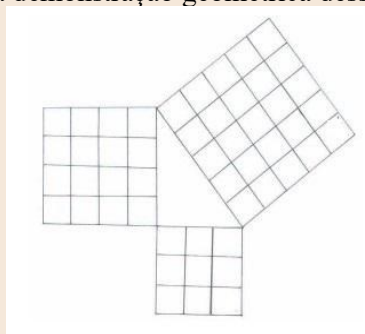
várias tentativas montando triângulos retângulos, calculando a área dos quadrados, fazendo a comparação entre o triângulo retângulo e outros triângulos que não são retângulos.

Após o preenchimento desses quadrados, os alunos devem responder a questões a serem escritas no quadro de giz. Em cada questão discutida, eles devem registrar suas respostas. A professora deve circular pela sala, passando pelos grupos, *monitorando*, indagando-os quanto ao desenvolvimento da tarefa, estimulando o pensamento geométrico e promovendo diferentes formas de pensar, através de questionamentos para que haja uma interação entre os integrantes do grupo. Além disso, a professora deve *selecionar* (mentalmente), *sequenciar* e *estabelecer conexões* entre as ideias matemáticas apresentadas pelos estudantes para que, na próxima fase do Ensino Exploratório, possa estimular a discussão da tarefa.

(Tempo estimado para essa etapa: 20 - 25 minutos)

Discussão da tarefa: os alunos devem ser envolvidos na discussão, incentivados a analisar e a comparar as resoluções, além de identificar e discutir os erros matemáticos e explorar os lados do triângulo e calcular as áreas dos quadrados.

É interessante conectar os conceitos explorados nessa tarefa com outros tópicos matemáticos, estimulando uma compreensão mais ampla e integrada. Pode-se, por exemplo, discutir como esses princípios se relacionam com o Teorema de Pitágoras, proporções ou até mesmo investigar a interseção entre Geometria e Álgebra. Na generalização, os alunos devem ser estimulados a pensar sobre a necessidade de perceber que a característica comum aos triângulos retângulos é o fato de a soma das medidas áreas dos quadrados menores ser igual à medida da área do quadrado maior, e que isso só ocorre nos triângulos retângulos. Dessa forma, podemos chegar ao Teorema de Pitágoras, por meio da demonstração geométrica dessa relação.



(Tempo estimado para essa etapa: 20 minutos)

Sistematização das aprendizagens matemáticas: na Tarefa 2, o objetivo é que os alunos percebam um padrão em relação às áreas dos quadrados menores com a área do quadrado maior, que façam combinações e percebam que nem sempre isso é possível, somente com os triângulos retângulos. A característica comum aos triângulos retângulos é a de que a soma das áreas dos quadrados cujas medidas dos lados são iguais aos catetos do triângulo retângulo é igual à área do quadrado cujo lado é igual à medida da hipotenusa do triângulo retângulo.

(Tempo estimado para essa etapa: 20 minutos)

Fonte: os autores (2024)

DIALOGANDO COM ESTUDANTES

A professora/pesquisadora introduz a tarefa (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013) dizendo:

[1] Professora: *“Borá” então para nossa próxima tarefa. Guardem os palitinhos, por favor. Agora vocês vão pegar o molde de três triângulos. Com base no triângulo retângulo que vocês montaram com os palitinhos, agora vocês vão completar esse triângulo aí nessa folha de sulfite, só que eu preciso que vocês meçam os lados e anotem as medidas.*

Logo em seguida, os alunos iniciam a etapa de realização da tarefa (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013) e começaram a dialogar entre os grupos, medindo os lados dos triângulos. Ana e Carlos comentam sobre suas medidas.

[2] Ana: *Isso, aqui deu 6, aqui deu 5, aqui deu 8, aqui deu 12, aqui deu 13 e aqui deu 10, cara.*

[3] Carlos: *Então, 5, 12, 13.*

[4] Professora: *Desse triângulo aqui, eu gostaria que vocês desenhassem quadrados, a partir de cada lado do triângulo [...] Vocês vão montar, vão desenhar um quadrado, a partir de cada lado desse triângulo.*

Em [2], Ana apresenta seis medidas. Já Carlos, em [3], apresenta três medidas que representam um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 13 unidades de comprimento.

Em seguida, a professora apresentou algumas instruções aos estudantes, enfocando a montagem dos quadrados a partir dos lados do triângulo. Depois de desenhado os quadrados em cada lado do triângulo, os alunos deveriam preencher as áreas desses quadrados, recortando e colando os quadradinhos das malhas quadriculadas coloridas, um quadrado para cada lado do triângulo, conforme consta no planejamento. Essa etapa preparatória visou estabelecer uma base sólida para a subsequente tarefa de

recorte da malha quadriculada, otimizando a compreensão e a execução da tarefa proposta.

[5] Professora: *De acordo com os lados que vocês têm aí, desse, quadrado. Vocês vão recortar quadradinhos na malha quadriculada e montar/encaixar a área desse quadrado. Vou deixar uma folha de cada cor, porque vocês vão fazer cada quadrado de uma cor.*

[6] Carlos: *é pra cortar dos tamanhos desses quadradinhos aqui?*

[7] Professora: *Do tamanho das áreas dos quadrados aí.*

[8] Ana: *Vai cortar do tamanho dos desenhos?*

[9] Carlos: *Você vai cortar os quadrados separados.*

No trecho acima, os alunos apresentam suas dúvidas sobre como proceder e a professora esclarece, destacando a necessidade de cortar de acordo com o tamanho das áreas dos quadrados. Após os alunos terem compreendido o que era para ser feito, o diálogo no grupo continua.

[10] Ana: *Cada quadradinho tem 1 cm, se o lado tem 4 cm, 4 quadradinhos. Não, não vai dar certo.*

[11] Carlos: *Faltou.*

[12] Ana: *Faltou um pouquinho.*

[13] Carlos: *Faltou um chorinho só.*

[14] Professora: *Fizeram aí?*

[15] Ana: *Não deu certo, não.*

[16] Professora: *A área de um quadrado de cada cor. Vocês viram o porquê a professora disse que iríamos trabalhar com unidade e não centímetros, porque a malha está em unidade e não centímetros, senão, não dá certo.*

Esse trecho destaca a tentativa dos alunos em calcular as áreas dos quadrados, mas enfrentam dificuldades. A professora intervém para corrigir possíveis erros e reforçar a necessidade de entender os quadradinhos menores como unidades de medida. Ana, em [10], tenta associar cada lado do quadradinho a 1 cm, sugerindo que seriam necessários quatro quadradinhos para cobrir cada lado de 4 cm. No entanto, Ana, percebe que "não vai dar certo". Carlos e Ana concordam que *"vai faltar um chorinho"*. Esse momento faz parte da compreensão dos alunos sobre a Tarefa 2.

A professora intervém, em [16], questionando se conseguiram concluir a tarefa e tenta tornar a tarefa mais clara aos alunos, informando que era para fazer "*área de um quadrado de cada cor*" e complementa dizendo que era para usar os lados dos quadrados da malha quadriculada como unidade, não era para usar centímetros.

Os alunos continuam interagindo durante a prática de construção de quadrados.

[17] Ana: *Tem que ter 5 quadradinhos.*

[18] Carlos: *Então, esse aqui está certo.*

[19] Bruna: *Só cortar a beiradinha que sobrou.*

[20] Bruna: *Um, dois, três, quatro, cinco.*

[21] Ana: *Cinco! Um, dois, três, quatro, cinco. Corta essa parte do verde aí.*

[22] Ana: *Você está com desenho, né, amiga?*

[23] Bruna: *Tô, dois roxos.*

[24] Ana: *É porque, tipo, tem 5 cada um, então não importa os centímetros, tem que ter 5 quadrados, é unidade, não centímetros.*

No trecho de diálogo acima, percebe-se que os alunos do grupo estão manipulando os quadradinhos para formar as áreas dos quadrados gerados a partir de cada lado do triângulo retângulo. Nesse momento, os alunos estão na fase de entender o que deve ser feito na Tarefa 2, isto é, compreender como colar os quadradinhos para depois fazer as análises matemáticas requeridas, comparando e somando as áreas dos quadrados formados a partir dos lados dos triângulos. Os alunos fizeram isso para os três primeiros modelos dos triângulos dados pela professora, todos eles eram triângulos retângulos.

A professora, então, prossegue.

[25] Professora: *Vocês fizeram então a representação geométrica através do quê?*

[26] Aluno de outro grupo: *Da malha quadriculada.*

[27] Professora: *Da malha quadriculada, muito bem. [...] Vocês observaram alguma diferença ou alguma semelhança entre esses triângulos aí? Agora eu gostaria que vocês explicassem dentro do grupo, aí um para o outro: Qual é essa semelhança ou qual é essa diferença que vocês viram aí?*

Após confirmar com os alunos o que eles já haviam feito (em [25] e [26]), a professora começa a questioná-los [27] em busca do reconhecimento de alguma característica comum que os alunos pudessem abstrair dos triângulos já conhecidos por eles. A professora fala em “semelhança”, mas esse termo não é adequado para o momento, uma vez que não se está discutindo semelhanças de triângulos.

No trecho abaixo, os alunos estão debatendo quando a professora se aproxima e faz questionamentos.

- [28] Ana: *Você viu diferença/semelhança?*
- [29] Carlos: *Tamanho.*
- [30] Ana: *É, tamanho. Você viu diferença Caio?*
- [31] Caio: *Acho que não. No tamanho.*
- [32] Professora: *E aqui [no grupo], o que vocês viram de semelhança ou tem alguma diferença.*
- [33] Carlos: *A diferença é no tamanho, no tamanho, nas medidas.*
- [34] Ana: *E que esses 2 triângulos retângulos deram, como diz? Exatos?*
- [35] Carlos: *É, deu exato.*
- [36] Ana: *Tipo, a gente soma aqui, 16 mais 9 deu 25. E aqui 64 mais 36 deu 100. [...] Não sei como é que fala, mas acho que deu exato. E esse aqui faltou um pouco para dar 169.*
- [37] Professora: *Por que faltou um pouco?*
- [38] Carlos: *Porque deu a menos, porque deu...*
- [39] Ana: *134 mais 25...*
- [40] Professora: *Quanto tem esse lado?*
- [41] Ana: *12*
- [42] Professora: *12, e o que você fez para dar esse número?*
- [43] Ana: *Eu multipliquei 12, lado vezes lado e obtive 134.*
- [44] Professora: *Calcula essa área novamente.*

Em [29], [30], [31] e [33], enquanto discutiam sobre as características comuns ou diferentes extraídas dos triângulos, os alunos se mantêm no nível 0 – *visualização* ou *reconhecimento*, uma vez que estão raciocinando basicamente por meio de considerações visuais (Kaleff *et al.*, 1994). No entanto, em [34], [35] e [36], os alunos parecem avançar para o nível 1 – *análise*, pois, por meio da observação e

experimentação, percebem que dois dos três triângulos possuem uma característica em comum. Em [36], Ana menciona que, no caso do triângulo de lados com medidas três, quatro e cinco unidades, a soma das áreas dos quadrados de lado quatro unidades e três unidades é igual à área do quadrado de lado cinco unidades. O mesmo aconteceu com o triângulo de lado seis, oito e dez. Em [34] e [35], os alunos Ana e Carlos utilizam o termo “exato” para dizer que a soma das áreas de dois quadrados era igual à área do terceiro quadrado.

O grupo apenas não percebeu essa mesma característica para o terceiro triângulo porque os alunos erraram nas contas. Como pode ser observado em [38], [39] e [43], os alunos calcularam 12×12 e chegaram em 134 ao invés de 144. Por esse motivo, a soma $134 + 25$ “*faltou um pouco para dar 169*”. Em [44], a professora pede para que o grupo pense melhor e o erro foi logo percebido e corrigido.

No trecho abaixo, a professora solicita que verifiquem se a mesma característica pode ser observada para novos triângulos. Primeiro, um triângulo equilátero cujos lados medem 7 unidades de comprimento. Depois, um triângulo escaleno cujos lados medem 5, 7 e 8.

[45] Professora: *Agora, as mesmas coisas que vocês fizeram com esses [três] triângulos, vocês farão com esse que vou entregar.*

[46] Caio: *Vamos medir. Esse lado aqui é 7.*

[47] Ana: *7. Aqui também vai dar 7.*

[48] Caio: *Vai tudo ser igual. Então, é tudo igual.*

[49] Carlos: *O de [triângulo] baixo tem um lado maior e um lado menor. E esse aqui?*

[50] Ana: *Esse aqui é um triângulo perfeito. Esse aqui [referindo-se ao outro triângulo] é o, como é que eu falei aquele dia?*

[51] Carlos: *Triângulo desformado!*

[52] Caio: *7, 5 e? E 8 em baixo.*

[53] Carlos: *Esse aqui, vai dar tudo 49.*

[54] Ana: *Porque é o triângulo perfeito.*

[...]

[55] Ana: *Quantos que deu 8?*

[56] Caio/Carlos: *64*

[57] Carlos: *Agora são 25 mais 49*

[58] Carlos: *74*

[59] Ana: *Passou.*

[60] Carlos: *Passou.*

Os alunos do grupo percebem que os dois novos triângulos não possuem a mesma característica dos três triângulos discutidos anteriormente. Em [53], Carlos comenta que “*vai dar tudo 49*”, referindo-se ao fato de que todos os lados do triângulo medem 7 unidades e 7×7 é 49. Em [50] e [54], Ana retoma o termo “triângulo perfeito” para se referir ao triângulo equilátero. Em [50] e [51], Ana e Carlos voltam a falar em “triângulo desformado” para se referir ao triângulo escaleno de medidas 5, 7 e 8.

O uso de termos informais, criados pelos próprios alunos, pode ajudá-los, inicialmente, na construção de ideias matemáticas. No entanto, considerando que a professora, durante a aula anterior, havia discutido com os alunos a classificação dos triângulos a partir da medida dos lados (equilátero, isósceles e escaleno), os alunos poderiam estar utilizando os termos adequados neste momento da aula. Tal evidência indica que os alunos ainda não estão discernindo características das figuras geométricas para além daquelas básicas percebidas visualmente. Novamente, os alunos indicam características do nível 0 – *visualização* ou *reconhecimento* do pensamento geométrico.

A professora inicia, então, a discussão da Tarefa 2 com toda a turma e caminha para a sistematização da aprendizagem dos estudantes.

[61] Professora: *Encerrando essa tarefa, organizando as falas de vocês, sobre o que cada grupo falou um pouquinho. Como nós podemos expressar verbalmente a relação entre as medidas das áreas desses quadrados? Como podemos falar sobre a comparação? Somaram as duas áreas desses quadrados e fizeram uma comparação com a área desse quadrado maior. O que nós descobrimos?*

[62] Ana: *Que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior.*

[63] Professora: *Que a soma?*

[64] Todos: *Das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior.*

[65] Professora: *Então nessa explicação verbal do que vocês fizeram, onde calcularam a área de cada quadrado que se forma a partir de cada lado desse triângulo aí, fizeram o cálculo da área do quadrado menor, do médio e do maior, porque são 3 quadrados, certo? Então vocês somaram a área dos quadrados menores e verificaram que a áreas desses dois cabem certinho dentro do?*

[66] Ana: *Quadrado maior.*

[67] Professora: *Do quadrado maior! Então será que existe um padrão ou uma regrinha para a área do quadrado, partindo dos lados de um triângulo, será que eu consigo estabelecer uma regrinha?*

[68] Ana: *Eu acho que todo triângulo ... tem que ter ângulo de 90°.*

[69] Carlos: *Triângulo retângulo, no caso daí.*

[70] Ana: [Para] *as duas áreas menores caberem dentro da área maior.*

[71] Professora: *E isso só é possível?*

[72] Carlos: *No triângulo retângulo.*

[73] Ana: *Com ângulo de 90°.*

[74] Professora: *Ou seja, no triângulo?*

[75]: Todos: *Retângulo.*

A partir dos questionamentos da professora em [61], [63], [65], [67] e [71], Ana e seu grupo, não só mostram discernir características de figuras geométricas (Kaleff *et al.*, 1994), característica do nível 1 – *análise*, mas, vão um pouco além, pois começam a estabelecer interrelações das propriedades dos triângulos, característica do nível 2 – *dedução informal*. Em [62], Ana enuncia, de maneira informal, a ideia de que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior. Em [68], [69], [72], [73] e [75], o grupo estabeleceu a interrelação entre o fato de o triângulo ser um triângulo retângulo e o fato de que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior.

Para reforçar essa percepção, no trecho a seguir, a professora pergunta sobre os outros dois triângulos (não retângulos).

[76] Professora: *Exatamente, nesse ponto que eu queria chegar, que somente no triângulo retângulo, a soma das medidas das áreas dos quadrados menores*

e igual a medida da área do quadrado maior. Vocês conseguiram fazer isso nos outros dois triângulos?

[77] Todos: Não.

[78] Professora: *O que aconteceu lá?*

[79] Ana: *Deu maior.*

Em [79], quando Ana afirma que “*deu maior*”, refere-se ao fato de que, no caso dos dois outros triângulos trabalhados pelos alunos, a soma das áreas dos quadrados formados pelas medidas de lados do triângulo era maior do que a área do quadrado formado pelo terceiro lado do triângulo. Portanto, para esses dois triângulos, a relação percebida em [62] não era válida.

Considerando o conjunto de afirmações feitas pelo grupo, reconhecendo, a partir da experimentação com diferentes triângulos, que a soma das medidas das áreas dos quadrados menores é igual à medida do quadrado maior sempre que o triângulo for retângulo e que o mesmo não ocorre para triângulos não retângulos, pode-se inferir que os alunos manifestam características do nível 3 – *dedução formal*. Como afirmam Kaleff *et al.* (1994), nesse nível, os alunos desenvolvem sequências de afirmações deduzindo uma afirmação a partir de uma outra ou de outras, sendo que tais deduções são entendidas como um caminho para o estabelecimento de uma teoria geométrica.

A professora avança para a formalização do Teorema de Pitágoras e a sistematização das aprendizagens dos estudantes (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013).

[80] Professora: *O lado oposto ao ângulo reto é o lado maior. Então, essas são as características do triângulo retângulo. Com toda essa verificação, essas características, nós podemos demonstrar o Teorema de Pitágoras. Sabiam? Com toda essa demonstração que vocês fizeram aí dos quadrados, das áreas dos quadrados menores. A soma das medidas das áreas dos quadrados menores é igual à medida da área do quadrado maior. [...] Vocês pegaram um triângulo retângulo, mediram os lados. Recortaram as malhas quadriculadas. Não foi isso que vocês fizeram?*

[81] Ana: *Sim.*

[82] Professora: *Recortaram as malhas quadriculadas. Então, dado esse triângulo retângulo, nós vamos marcar o quê? Vamos marcar, o “a”, o “b” e o “c”. Certo? O “a” sempre vai ser o que mesmo?*

[83] Outro Aluno: *O lado maior.*

[84] Ana: *A hipotenusa.*

[85] Professora: *O lado maior que é chamado de?*

[86] Ana: *Hipotenusa.*

[87] Professora: *Que sempre vai ser o lado maior. E fica sempre do lado oposto... A hipotenusa sempre vai ficar do lado oposto?*

[88] Ana: *Do ângulo de 90° .*

[89] Professora: *Do ângulo reto, que é o ângulo de 90° . Os outros 2 lados como se chamam?*

[90] Outro Aluno: *Cateto.*

[91] Professora: *Então, ó o Teorema de Pitágoras, é demonstrado da seguinte maneira: O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Nesse momento da formalização e sistematização da aprendizagem, a professora retoma algumas ideias centrais, mas que os alunos já estavam utilizando durante as aulas: o triângulo retângulo possui um ângulo de 90° , o lado de maior medida é chamado de hipotenusa e os outros dois são chamados de cateto. A própria enunciação do Teorema de Pitágoras, feita em [91] pela professora, já havia sido construída pelos alunos em momentos anteriores.

Por isso, considera-se que a professora conseguiu introduzir o Teorema de Pitágoras de maneira que os próximos alunos chegassem à equação matemática, sem a necessidade de apenas introduzir a fórmula para ser decorada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste Produto Educacional, apresentamos um caderno de tarefas cujo objetivo é auxiliar o professor a introduzir o Teorema de Pitágoras utilizando duas tarefas matemáticas voltadas para o desenvolvimento do pensamento geométrico. A abordagem de ensino sugerida é a do Ensino Exploratório, mas o leitor interessado pode optar por outra abordagem de ensino.

Apesar de ser elaborado com dados produzidos em um contexto específico, conforme detalhado na pesquisa de mestrado “*Ensino Exploratório e o Teorema de Pitágoras: uma análise das manifestações do pensamento geométrico*”, o material tem potencial para ser replicado em diferentes salas de aula, por diferentes professores, gerando outras interações e, possivelmente, outras manifestações de níveis de pensamento geométrico.

Sobre os níveis de pensamentos geométrico identificados e caracterizados, percebeu-se que, durante a Tarefa 1, os alunos, por diversas vezes, manifestaram o nível 0 de *visualização* ou *reconhecimento* enquanto manipulavam os palitos. A progressão para o nível 1 – *análise* ocorreu, principalmente, quando a professora estimulava a discussão. Os alunos do grupo analisado não enunciaram, de maneira autônoma, a condição de existência de um triângulo, ficando a cargo da professora promover essa formalização, após manifestação de alunos de outros grupos.

Na Tarefa 2, os alunos também manifestaram o nível 0 de *visualização* ou *reconhecimento* e progrediram para o nível 1 – *análise*, mas de maneira mais autônoma do que na Tarefa 1. Isso pode ter contribuído para o fato de que também manifestaram o nível 2 – *dedução informal* e nível 3 – *dedução informal* na Tarefa 2.

É preciso ressaltar, no entanto, que, para esses dois níveis (nível 2 e nível 3) serem manifestados pelos alunos do grupo analisado, a professora interveio de forma

considerável (não apenas na Tarefa 2, mas, também, na Tarefa 1). Por um lado, isso contribuiu para que os alunos do grupo manifestassem tais níveis; por outro, é possível dizer que, por vezes, as intervenções da professora restringiram a discussão ao direcionar demasiadamente as ações alunos.

Foi a primeira experiência da professora com a abordagem do Ensino Exploratório. Como menciona Canavarro (2011, p. 11), “O ensino exploratório da Matemática é, pois, uma actividade complexa e considerada difícil por muitos professores”. Por isso, caso o professor se interesse em trabalhar pela primeira vez com suas turmas na perspectiva do Ensino Exploratório, sugere-se algum estudo prévio, preparação e planejamento. A experiência vivenciada pela professora que realizou a pesquisa de mestrado que resultou neste Produto Educacional indica alguns desafios de se trabalhar na perspectiva do Ensino Exploratório, tal qual sugere a literatura científica (por exemplo, ver Canavarro (2011)).

Um dos desafios do Ensino Exploratório, conforme indica Canavarro (2011), é controlar as questões e comentários que se oferecem aos alunos durante o trabalho autônomo dos alunos, de modo a não lhes indicar a estratégia a seguir, evitando reduzir o desafio intelectual das tarefas e diminuir o potencial da discussão matemática.

Outro desafio do Ensino Exploratório que merece destaque diz respeito à gestão do tempo. O planejamento inicial era abordar uma tarefa matemática em cada dia (aulas de 50 minutos cada, totalizando 100 minutos), promovendo as quatro fases do Ensino Exploratório em um único dia (duas aulas). No entanto, a realidade da sala de aula foi outra e o tempo planejado não funcionou. A Tarefa 1 começou no primeiro dia e finalizou no segundo dia de aula. A Tarefa 2 começou no segundo dia e finalizou no terceiro dia de aula.

De acordo com Canavarro (2011), para cada tarefa, deve-se evitando adiar para a aula seguinte a discussão ou a síntese dos conhecimentos produzidos pelos alunos. Tal

fato, segundo a autora, pode gerar a perda de envolvimento dos alunos e o seu distanciamento das produções matemáticas realizadas.

Mencionamos esses desafios, mas há outros. No entanto, apesar desses desafios, a experiência aqui abordada evidencia que as fases do Ensino Exploratório, conduzidas a partir de tarefas matemáticas ricas, têm potencial para auxiliar o professor na promoção do desenvolvimento do pensamento geométrico de seus estudantes. O ambiente criado pela abordagem do Ensino Exploratório pode criar a situação ideal para o aluno alcançar um nível mais elevado de pensamento (Leivas, 2017).

Para concluir, desejamos que este material sirva de apoio a diversos professores que ensinam Matemática na Educação Básica. A proposta de se trabalhar o Teorema de Pitágoras a partir de níveis do pensamento geométrico é fundamental, na medida em que retira o foco do conteúdo e o coloca no desenvolvimento do pensamento dos estudantes. Dessa forma, evitamos um ensino pautado na fórmula do Teorema de Pitágoras e na resolução de exercícios, dando atenção aos níveis de pensamento que conduzem à dedução e abstração.

REFERÊNCIAS

CANAVARRO, A. P. Ensino Exploratório da matemática: Práticas e desafios. **Educação e matemática**, n.115, p.11-17, 2011.

CARGNIN, R. M.; GUERRA, S. H.; LEIVAS, J. C. P. Teoria de van Hiele e investigação matemática: implicações para o ensino de Geometria. **Revista Práxis**, Volta redonda, Ano VIII, n. 15, 2016.

KALEFF, A. M. *et al.* Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 9, n. 10, 1994.

LEIVAS, J. C. P. Pitágoras e Van Hiele: uma possibilidade de conexão. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 18, n. 3, p. 643-655, 2012.

LEIVAS, J. C. P. Geometria com tecnologia na formação inicial e continuada do professor de matemática. In: **Formação do Professor de Matemática: reflexões e propostas**. Editora IPR, Santa Cruz do Sul, 2012.

LEIVAS, J. C. P. Investigando o último nível da teoria de van Hiele com alunos de pósgraduação: a generalização do teorema de Pitágoras. **Vidya**, v. 37, n. 2, p. 515-531, 2017.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, Vol. XXII, Nº 2, 2013.

ROQUE, T. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Editora Zahar, 2012.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Helping Teachers learn to better incorporate student thinking. **Mathematical Thinking and Learning**, v.10, n.4, p.313-340, 2008.

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.3, p. 400-431, 2010.

ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO EDUCACIONAL

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Ensino Exploratório e o Teorema de Pitágoras: uma análise das manifestações do Pensamento Geométrico
Título do Produto/Processo Educacional	Tarefas Matemáticas para o desenvolvimento do Pensamento Geométrico: explorando o Teorema de Pitágoras
Autores do Produto/Processo Educacional	Discente: Elisângela Udeliza Toginho
	Orientador: Henrique Rizek Elias
	Outros (se houver):
Data da Defesa	18 de setembro de 2024

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u> Linhas de Pesquisa do PPGMAT: <i>L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático</i> (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); <i>L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	() Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u> A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	() PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. () PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). () PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. <u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u>	() Local () Regional (X) Nacional () Internacional Justificativa (<i>obrigatória</i>): O tema matemático é um tema da BNCC, portanto tem abrangência nacional. O PE elaborado pode ser adaptado a qualquer contexto, em qualquer escola do Brasil.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u>	() PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u>	() Econômica; () Saúde; (X) Ensino;

	☐ Cultural; ☐ Ambiental; ☐ Científica; ☐ Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. <u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u>	☒ O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. ☒ A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. ☒ Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. ☒ Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	☐ PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). ☒ PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ☐ PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
Henrique Rizek Elias	UTFPR - Londrina
Zenaide De Fatima Dante Correia Rocha	UTFPR - Londrina
Diego Fogaça Carvalho	UNOPAR - Universidade Pitágoras Unopar Anhanguera UVA - Universidade Estadual do Vale do Acaraú