

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

JOMAR BERTON JUNIOR

**MEDIDAS DE DESLOCAMENTO EM 2D E 3D UTILIZANDO CÂMERA  
DIGITAL COMO SENSOR SEM CONTATO**

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

JOMAR BERTON JUNIOR

**MEDIDAS DE DESLOCAMENTO EM 2D E 3D UTILIZANDO CÂMERA  
DIGITAL COMO SENSOR SEM CONTATO**

Trabalho de dissertação apresentado ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito para a obtenção do título de “Mestre em Engenharia Mecânica”.

Orientador: Prof. Dr. Adailton Silva Borges

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

---

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

---

- B547 Berton Junior, Jomar  
Medidas de deslocamento em 2D e 3D utilizando câmera digital como sensor sem contato /  
Jomar Berton Junior. – 2016.  
103 f. : il. color. ; 30 cm
- Orientador: Adailton Silva Borges.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica. Cornélio Procópio, 2016.  
Bibliografia: p. 97-103.
1. Processamento de imagens. 2. Imagem tridimensional. 3. Análise modal. 4. Engenharia  
Mecânica – Dissertações. I. Borges, Adailton Silva, orient. II. Universidade Tecnológica Federal  
do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD (22. ed.) 620.1



**Título da Dissertação N° 012:**

**“Medida De Deslocamento Em 2d E 3d Utilizando Uma Câmera Digital Como Sensor Sem Contato”.**

por

**Jomar Berton Junior**

Orientador: **Prof. Dr. Adailton Silva Borges**

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA** – Área de Concentração: **Ciências Mecânicas**, linha de pesquisa: **Dinâmica De Sistemas Mecânicos**, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Câmpus Cornélio Procópio, às 09h do dia 30 de setembro de 2016. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos professores:

---

Prof. Dr. Adailton Silva Borges  
(Orientador – UTFPR - CP)

---

Prof. Dr. Fabian Andres Lara Molina  
(UTFPR - CP)

---

Prof. Dr. João Antônio Pereira  
(UNESP - Ilha Solteira)

Visto da coordenação:

---

Prof. Dr. Edson Hideki Koroishi  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio

Dedico este trabalho aos meus pais Jomar Berton e Lusia Barreto Berton, e a minha namorada Sharise Beatriz Roberto sem os quais nada faria sentido.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus, por ter me iluminado, e protegido durante toda a realização deste trabalho.

A minha mãe Lusía Barreto Berton, pelo apoio, paciência e incentivo durante todo o período do curso.

Ao meu pai Jomar Berton, que de onde quer que esteja, sempre foi um exemplo de pessoa e de pai, e com certeza me iluminou e esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis.

À minha namorada Sharise Beatriz Roberto, pelo companheirismo, paciência, apoio e amor demonstrado, além de toda a ajuda para a finalização do trabalho.

Às minhas irmãs Tamissa e Tamires, por toda ajuda e companheirismo.

À todos meus amigos que contribuíram com ideias, sugestões ou ainda com momentos de descontração.

Um agradecimento especial ao meu orientador, Professor Dr. Adailton Silva Borges, por sua confiança, paciência e amizade, além de seus ensinamentos e competência para que meu trabalho fosse finalizado da melhor maneira possível

## RESUMO

BERTON JUNIOR, J. Medidas de deslocamento em 2D e 3D utilizando câmera digital como sensor sem contato. 2016. 103 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio. 2016.

A utilização de sensores sem contato tem uma ampla gama de aplicações nos mais variados campos de conhecimento. Sensores de imagem, como câmeras digitais, vêm sendo muito utilizados para este tipo de aplicações, devido a sua alta capacidade de adaptação. Desta maneira, o presente trabalho propõe a utilização de câmeras digitais como sensor sem contato, em análises em duas (2D) e três dimensões (3D). Medidas em 2D foram realizadas, conhecendo o comprimento do fundo da imagem, de maneira a avaliar o tamanho do pixel no plano estudado e com isso foi possível calcular o deslocamento de pontos em destaque. Já nas medidas em 3D, foi utilizado conceitos de estereoscopia de imagens, geometria epipolar e triangulação de pontos em imagens distintas da mesma cena, assim tornou-se possível determinar a posição de pontos pré-definidos no espaço tridimensional. Para a separação dos alvos na imagem, foi utilizado métodos de processamento de imagens, como limiar de corte, erosão e dilatação. O experimento em duas dimensões realizado foi uma análise modal baseada apenas na resposta com a utilização de uma câmera com alta taxa de aquisição, os resultados foram comparados com uma análise numérica, bem como com análises feitas com acelerômetros, com entrada conhecida e também com base apenas na resposta. Já em três dimensões, foram utilizadas duas câmeras iguais para reconhecer deslocamentos realizados por uma ferramenta controlada por computador (CNC). Os resultados se mostraram consistentes, e trazem grandes possibilidades para a utilização das metodologias propostas.

**Palavras-chave:** Processamento de imagens. Medidas de deslocamento em 3D. Análise modal. Sensor sem contato.

## ABSTRACT

BERTON JUNIOR, J. Displacement measurements in 2D and 3D using digital camera as contactless sensor. 2016. 103 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio. 2016.

The use of sensors with no contact have a wide range of applications in various fields of knowledge. Image sensors such as digital cameras, have been widely used for this kind of applications due to its high adaptability. Thus, this work proposes the use of digital cameras as contactless sensor, for analysis in two (2D) and three dimensions (3D). 2D measurement were performed, knowing the background length of the image, in order to evaluate the pixel size in the plan studied and so it was possible to calculate the displacements of the highlighted points. On the other hand, the 3D measurements was used concepts of stereoscopic images, epipolar geometry and triangulation of points in different images of the same scene, so it has become possible to determine the position of predefined points in three dimensional space. For the separation of the targets in the image, it was used image processing methods such as thresholding, erosion and dilatation. The experiment performed in two dimensions was a modal analysis using the output-only data with the use of a camera which has high acquisition rate, the results were compared with a numerical analysis, as well as analysis done with accelerometers of known input and also based only in the output. Otherwise in three dimensions, two cameras were used to recognize the same movements made by a tool controlled by computer (CNC). The results were consistent, and bring great possibilities for using the methodologies proposed.

**Keywords:** Image processing. Displacement measurements in 3D. Modal analysis. Contactless sensor.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema de componentes de uma câmera digital .....	22
Figura 2 – Detalhe do conjunto de lente.....	23
Figura 3 – Distorção causada por lente: (a) Imagem normal; (b) imagem com distorção negativa; (c) imagem com distorção positiva.....	24
Figura 4 – (a) Imagem original. (b) Imagem corrigida.....	24
Figura 5 – Esquema de funcionamento de um sensor CCD.....	26
Figura 6 – Esquema de funcionamento do sensor CMOS .....	27
Figura 7 – Distorções causadas por <i>rollingshutter</i> : (a) Distorção causada por translação horizontal. (b) Distorção causada por translação para cima. (c) Distorção causada por translação para baixo. (d) Distorção causada por rotação. ....	28
Figura 8 – <i>Aliasing</i> .....	29
Figura 9 – Processo de discretização de uma imagem. (a) Imagem contínua. (b) Amostragem. (c) Quantização. (d) Codificação.....	31
Figura 10 – Espectro de cores RGB.....	32
Figura 11 – Modelo do plano projetivo.....	37
Figura 12 – Geometria da câmera de orifício .....	42
Figura 13 – Coordenadas de imagem $(x, y)$ e de câmera $(x_{cam}, y_{cam})$ .....	44
Figura 14 – Transformação entre os sistemas de coordenadas global e da câmera	45
Figura 15 – Geometria de Pontos Correspondente. (a) Plano Epipolar. (b) Reta Epipolar .....	49
Figura 16 – (a) Relação entre plano epipolar, reta base, epipolos e retas epipolares. (b) Feixe de planos epipolares .....	50
Figura 17 – Homografia 2D entre pontos correspondentes.....	51
Figura 18 – Esquema da estrutura de um sistema entrada/saída.....	56
Figura 19 – Viga de aço inoxidável .....	62
Figura 20 – Esquema da instrumentação utilizada no ensaio experimental.....	64
Figura 21 – Funções de Resposta de Frequência. (a) pontos 1-1; (b) pontos 1-2; (c) pontos 1-3; (d) pontos 1-4; (e) pontos 1-5 e (f) pontos 1-6.....	65
Figura 22 – (a) Aparato experimental para determinação da velocidade de escoamento. (b) Viga de metal com acelerômetros acoplados.....	67
Figura 23 – Densidades espectrais de potência obtidas, (a) PSD do ponto 1, de (b) a (f) CSD's entre o ponto 1 e o ponto 2,3,4,5,6 em ordem alfabética.....	68

Figura 24 – Densidade espectral da viga aço inoxidável.....	69
Figura 25 – Amortecimento do segundo modo de vibrar.....	70
Figura 26 – Experimento de análise modal baseada apenas na resposta, utilizando o sensor câmera.....	71
Figura 27 – Esquema do funcionamento da rotina computacional.....	73
Figura 28 – Resultados obtidos: ponto 1 e ponto 2.....	74
Figura 29 – Resultados obtidos: ponto 3 e ponto 4.....	75
Figura 30 – Resultados obtidos: ponto 5 e ponto 6.....	76
Figura 31 – Amortecimento da estrutura analisada, utilizando o sensor câmera.....	77
Figura 32 – MAC-valores entre os diferentes métodos.....	79
Figura 33 – Suporte e Câmeras para filmagem estérea. (a) Suporte devidamente montado. (b) Esquema do posicionamento das câmeras.....	81
Figura 34 – Pares estéreos de imagens utilizados no processo de calibração: (a) par estéreo 2, (b) par estéreo 9.....	82
Figura 35 – Posições dos padrões de calibração em relação ao sistema estéreo.....	83
Figura 36 – Erro médio de reprojeção.....	84
Figura 37 – Aparato experimental análise de deslocamento 3D.....	86
Figura 38 – Esquema do funcionamento da rotina computacional para reconhecimento de pontos em 3D.....	87
Figura 39 – Trajetória definida para o ponto.....	89
Figura 40 – Trajetória encontrada do ponto em três dimensões.....	90
Figura 41 – Trajetória definida para o ponto.....	91
Figura 42 – Trajetória encontrada do ponto em três dimensões.....	93

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Frequências naturais (Hz) .....	78
Tabela 2 – Fatores de amortecimentos .....	78
Tabela 3 – Deslocamento caso 1 .....	89
Tabela 4 – Deslocamento caso 2 .....	92

## LISTA DE ACRÔNIMOS E SIMBOLOS

$\{\Phi_i^a\}$  – vetor modal simulado referente ao modo  $i$

$\{\Phi_j^e\}$  – vetor modal experimental referente ao modo  $j$

ANPSD - Média normalizada da densidade espectral de potência

AVI – *Audio Video Interleave* (Intercalação de Áudio e Vídeo)

BFD – Método básico no domínio da frequência

CCD – *Charge-coupled Device* (Dispositivo de carga acoplada)

CMOS – *Complementary Metal-oxide Semiconductor* (Semicondutor de metal-óxido complementar)

CNC – *Computer Numeric Control* (Comando Numérico Computadorizado)

CSD – Densidade Espectral Cruzada

D – Comprimento característico

dB – Decibel

DDF – Decomposição no Domínio da Frequência

E – Módulo de Elasticidade

EMA – *Experimental Modal Analysis* (Análise modal experimental)

FDD – Método de Decomposição no Domínio da Frequência

FFT – *Fast Fourier Transform* (Transformada Rápida de Fourier)

$f_{\text{máx}}$  – Frequência Máxima

fps – Frames por segundo

FRF – *Frequency Response Function* (Função de Resposta em Frequência)

g – Gravidade

Gpa – Gigapascal

HD – *Hard Disk* (Disco Rígido)

Hz – Hertz

In - Polegada

lbf – Libra-força

Kg – Quilograma

kHz – Quilohertz

m – Metro

MAC – *Modal assurance criterion* (Coeficiente de Correlação Modal)

mm – Milímetro

MPEG - *Moving Picture Experts Group* (Grupo de Especialistas em Imagens em Movimento)

MOV – Formato de arquivo de vídeos

mV – milivolts

m<sup>3</sup> – Metros cúbicos

P<sub>a</sub> – Pressão em a

P<sub>b</sub> – Pressão em b

PP – *Peak Picking* (seleção de pico)

PSD – *Power Spectral Density* (Densidade Espectral de Potência)

R – Rotação

Re – Número de Reynolds

RGB – *Red, Green and Blue* (Vermelho, Verde e Azul)

rpm – Rotação por minuto

s – Segundo

SAE – *Society of Automotive Engineers* (Sociedade dos Engenheiros Automotivos)

SSI - Identificação estocástica de subespaço

SVD – Decomposição em Valores Singulares

T – Translação

USB – *Universal Serial Bus* (Porta Universal)

V – Velocidade do Escoamento

V<sub>a</sub> – Velocidade em a

V<sub>ar</sub> – Velocidade do ar

V<sub>b</sub> – Velocidade em b

Z<sub>a</sub> – Altura no ponto a

Z<sub>b</sub> – Altura no ponto b

2D – Duas Dimensões

3D – Três Dimensões

$\nu$  – Viscosidade Cinemática do Fluido

$\Delta P$  – Diferença de Pressão

$\rho$  – Densidade

$\rho_{ar}$  – Densidade do ar

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	15
1.1 OBJETIVOS .....	20
1.1.1 Objetivo Geral .....	20
1.1.2 Objetivos Específicos .....	21
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	21
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	22
2.1 CÂMERA DIGITAL .....	22
2.1.1 Conjunto de Lentes .....	22
2.1.2 Tipos de Sensores .....	25
2.2 VELOCIDADE DE CAPTURA DE VÍDEO .....	29
2.3 PROCESSAMENTO DE IMAGEM .....	30
2.3.1 Discretização Espacial .....	30
2.3.2 Sistemas de Cores .....	32
2.3.3 Segmentação .....	33
2.3.4 Operações Morfológicas .....	34
2.4 GEOMETRIA PROJETIVA .....	34
2.4.1 Geometria Projetiva 2D .....	35
2.4.2 Geometria Projetiva 3D .....	38
2.5 MODELO DE CÂMERA .....	42
2.5.1 Câmeras Finitas .....	42
2.5.2 Projeção Central em Coordenadas Homogêneas .....	43
2.5.3 Deslocamento do Ponto Principal .....	44
2.5.4 Rotação e Translação de Câmera .....	45
2.6 CORREÇÃO DA DISTORÇÃO RADIAL .....	46
2.7 ESTEREOSCOPIA .....	47
2.7.1 Geometria Epipolar .....	48
2.7.2 Matriz Fundamental .....	50
2.7.3 Cálculo da Matriz Fundamental .....	52
2.7.4 Câmeras Canônicas .....	52
2.7.5 Triangulação .....	53
2.7.6 Erro de Reprojeção .....	54
2.8 PROCESSAMENTO DE SINAL .....	54

2.9 ANÁLISE MODAL .....	55
2.9.1 Análise Modal Baseado Apenas na Resposta.....	57
2.9.2 Coeficiente MAC .....	59
<b>3 EXPERIMENTOS REALIZADOS E RESULTADOS OBTIDOS .....</b>	<b>61</b>
3.1 EXPERIMENTO 1 .....	61
3.1.1 Análise por Elementos Finitos .....	62
3.1.2 Análise Modal Convencional .....	63
3.1.3 Análise Modal Baseada Apenas na Resposta.....	65
3.1.4 Análise Modal Baseada Apenas na Resposta Utilizando o Sensor Câmera ....	70
3.1.4.1 Implementação do Algoritmo .....	72
3.1.4.2 Respostas Encontradas pela Câmera .....	73
3.2 RESULTADOS – EXPERIMENTO 1 .....	78
3.3 EXPERIMENTO 2 .....	80
3.3.1 Calibração .....	81
3.3.2 Análise de Deslocamento em 3D .....	85
3.3.3 Caso 1 .....	88
3.3.4 Caso 2.....	90
<b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>95</b>
<b>66REFERÊNCIAS.....</b>	<b>97</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Medições de deslocamento apresentam aplicações nos mais diversos ramos da engenharia. Estas variam desde medições entre dois pontos distintos em intervalos definidos, sem se importar com o trajeto, até aplicações dinâmicas, onde se leva em conta o deslocamento durante o trajeto. Desta maneira, muitos sensores de contato ou de não contato foram desenvolvidos para realizarem estimativas desta grandeza.

Assim, para o desenvolvimento e projeto de equipamentos que são submetidos às cargas dinâmicas, ou seja, que variam no tempo, são necessários estudos aprofundados sobre esta questão. Por exemplo, quando se analisa situações como um avião a jato atravessando uma tempestade, ou um trem de alta velocidade viajando sobre os trilhos, encontram-se situações onde as estruturas estão submetidas às cargas dinâmicas, logo, diversas análises e testes, experimentais ou computacionais, devem ser feitos para determinar a resposta às cargas dinâmicas, garantindo assim a segurança, desempenho e confiabilidade de estruturas como estas. (CRAIG JR, 1981).

Em sua formulação Allemang (1982), Craig (1981), Heylen, Lammens e Sas (1997), Przemieniecki (1968), Rao (2009) e Thorby (2008), trazem a maneira como a estrutura se comporta dinamicamente, a qual é estudada por relações entre a entrada e a saída do sistema ou mesmo observadas a partir apenas das respostas (saída) do sistema obtidos por meio de experimentos. Os parâmetros modais são então estimados através das relações obtidas utilizando uma formulação teórica.

Na formulação tradicional é possível estudar o comportamento dinâmico estrutural através de uma formulação matricial, que estabelece uma relação direta entre a entrada, a excitação da estrutura, e a saída, que é a resposta da estrutura à excitação exercida. Assim a Função de Resposta em Frequência (FRF) do sistema é obtida através da excitação da estrutura e aquisição das respostas medidas em pontos definidos previamente, em seguida os parâmetros modais do modelo são obtidos.

Desta forma é necessário não só medir as respostas, mas também as excitações, o que pode se tornar uma dificuldade em muitos casos, tanto para medir, como também para realizar estas excitações, que é o caso de grandes estruturas como, por exemplo, pontes, prédios, viadutos, entre outros, ou estruturas muito sensíveis onde uma excitação desproporcional pode danificar o sistema.



Uma alternativa para estes casos é a análise modal utilizando apenas a resposta ou análise modal operacional. Nos testes baseados apenas na resposta, a identificação dos parâmetros modais é feita de uma forma diferente da análise modal clássica, pois a entrada do sistema não é medida.

Os métodos utilizando apenas as respostas, de forma geral, surgiram posteriormente, como em Brincker (2000) e Brincker (2001), onde em seus trabalhos utilizou a técnica para simular casos de estruturas reais com modos de vibrar próximos e sinais com ruídos. Já Peeters, Roeck (2001), publicaram uma revisão relacionada aos métodos de identificação de sistema estocástico para a análise modal operacional, assim, consolidando uma boa base teórica para a técnica.

Em decorrência dessa consolidação teórica, uma vasta gama de aplicações tem sido mostrada, dentre elas cita-se: a análise operacional de dutos de refrigeração de reator nuclear (PEKKA et al., 2004), estimavas dos parâmetros modais do sistema de transmissão de um automóvel em funcionamento (MOLLER, GADE, 2004), a utilização da técnica para estimar os parâmetros modais em uma torre de transmissão (LIU, LOH, 2011) entre outros.

A análise modal experimental é uma das principais técnicas utilizadas para a realização de análises dinâmicas em sistemas estruturais. Esta geralmente é feita com sistemas que utilizam acelerômetros acoplados nos pontos onde se deseja analisar. Essa abordagem é muito utilizada e com resultados confiáveis, porém dificilmente consegue-se analisar a contribuição dos sensores para o comportamento do conjunto, principalmente em sistemas com pouca massa, pois, a massa destes componentes pode ser significativa a ponto dos resultados divergirem do correto de forma a tornar todo o estudo realizado incompatível com a realidade (TREBUÑA, HAGARA, 2014).

Aliado a incompatibilidade causada pela massa do sensor, há situações onde o acesso físico é dificultado pela posição do objeto a ser medido ou até mesmo pela sua geometria, assim a utilização de sensores sem contato vem crescendo, e tornando-se ampla a sua importância. Além destes fatores, sensores sem contato são indispensáveis em sistemas que ofereçam riscos ao operador das medições, como em sistemas energizados, superfícies com temperaturas elevadas, entre outros sistemas que possam afetar a segurança ou a eficácia das medições. Além disso, provavelmente o ponto mais importante de sensores sem contato, seja o fato dos mesmos não interferirem fisicamente nas medidas, isto é, não alteram as propriedades do sistema a ser analisado.

Assim, alguns sensores para tal finalidade já foram criados e estudados, sendo dois os métodos de medidas de movimento de não contato mais empregados: o caso do laser utilizado por Sviridov, Sterlyagov (1994) e os métodos de medida por ultrassom utilizados por Song, Tang (1996) e Carullo, Parvis (2001). Segundo Leonardi (2015), estes métodos de medida, cujo funcionamento está baseado no princípio de reflexão e contagem de pulsos de ondas, realizando medidas dinâmicas a partir do tempo gasto para que os pulsos enviados reflitam em uma barreira e retornem ao instrumento. Dessa maneira, a precisão destes métodos está associada à reflexão da superfície medida, e caso o objeto analisado tenha uma superfície com reflexão deficiente, a medida será comprometida. Outro aspecto importante destes métodos é o número de pontos que podem ser medidos simultaneamente, pois, sensores com base de funcionamento em ultrassom são mais eficientes para medir apenas um alvo de interesse, enquanto que os sensores a laser atuais, podem mapear uma região assim como uma câmera fotográfica, como em Feliciano et al., (2005), Lu et al., (2010), Sabino (2013), Genovese et al., (2013) e Leonardi (2015), onde com a utilização de uma única câmera, foi possível medir inúmeros pontos ao mesmo tempo, desde que todos estivessem contidos no campo visual do dispositivo utilizado.

Devido à ampla disponibilidade no mercado, alta reprodutibilidade e confiabilidade dos resultados, as câmeras digitais vem sendo muito utilizadas em aplicações como sensor sem contato, como visto em Marques et al., (2001), onde realizaram cálculo de volume de objetos para automatização de processos industriais por meio do uso de um sensor câmera; já no trabalho de Peeters et al., (2004), verificaram por meio de três câmeras (CCD) a análise dinâmica da estrutura reduzida de um avião; e na pesquisa de Lu et al., (2010), usaram uma câmera como sensor para um sistema para evitar colisões em automóveis.

Para medir a resposta da estrutura, convencionalmente são utilizados acelerômetros (sensor com contato), e atualmente também são utilizadas câmeras digitais e sensores a laser (sensores sem contato), todos com resultados satisfatórios, como encontrado em Chen et al., (2014), o qual compararam resultados encontrados utilizando acelerômetros, câmera e laser; em Pankow et al., (2010), no qual utilizando uma única câmera com alta frequência de aquisição, captou-se movimentos de deslocamentos fora do plano de visão do sistema; também em Sabino, Pereira e Abreu (2014), que com a utilização de uma câmera realizou-se a análise modal de um prédio em escala reduzida, comparando os resultados obtidos através da utilização

de acelerômetros; e em Leonardi (2015), onde os resultados de parâmetros modais obtidos por meio de sensor câmera foram comparados com simulações numéricas.

Verificou-se assim a possibilidade real e viável para realização de medições sem contato por meio da utilização da câmera digital, devido ao custo inferior deste equipamento em comparação com as demais alternativas citadas anteriormente, bem como a capacidade de adaptação e pós-processamento dos dados, sem prejuízo nos resultados obtidos.

Busca-se então utilizar imagens captadas por câmeras digitais simples, para captar o movimento de um ou mais pontos específicos de um sistema estrutural submetido à uma excitação aleatória. Dessa maneira, será possível determinar com a ajuda de abordagens matemáticas feitas por meio de rotinas computacionais as características dinâmicas do sistema em estudo.

Desde 1964 a área de processamento de imagens tem crescido significativamente e suas aplicações permeiam quase todos os ramos da atividade humana (MARQUES FILHO, VIEIRA NETO, 1999). Na área de engenharia, as aplicações de processamento de imagens são reportadas desde meados de 1980, onde foram utilizadas câmeras para a realização de medições na área de metrologia, utilizando-se das mesmas para que não fossem necessários contatos entre os instrumentos e as peças medidas. A grande vantagem desta nova utilização foi à automatização dos processos de medições durante a produção de peças na indústria, além de possibilitar a medição de regiões de difícil acesso (POULTER, 1985; TAKESA et al., 1984).

Utilizando-se de algumas técnicas específicas de processamento de imagens, é possível que os pontos de interesse sejam separados e analisados adequadamente sem sofrerem interferência do restante da imagem. Aliado ao desenvolvimento de sensores mais precisos e com capacidade de captar imagens a elevadas taxas de aquisição, essas aplicações em análises dinâmicas estão sendo amplamente desenvolvidas de maneira a facilitar e melhorar a realização dos experimentos na área. Com essas novas possibilidades, a área de imagens digitais pode ser um grande avanço no campo de medições de deslocamentos, bem como em análises dinâmicas de estruturas.

Resultados consistentes relacionados a deslocamento e análise modal em duas dimensões com o uso de uma única câmera digital, já foram obtidos em um estudo realizado por Peeters et al., (2004), Sabino (2013), Chen et al., (2014) e

Leonardi (2015), onde é possível observar que a partir de uma câmera de alta frequência resultados precisos tanto estáticos, como dinâmicos, foram notados.

Esse método apresenta alguns empecilhos. A principal dificuldade deste método é fazer com que a rotina reconheça os pontos desejados distintamente, de modo que a cada frame do vídeo seja captada a variação de posição do ponto, e essa possa ser calculada adequadamente, deve-se então adequar a imagem para que seja facilitado o reconhecimento dos pontos pelo computador. Outra consideração importante é quando se trata do reconhecimento computacional, como por exemplo, o fato da imagem formada por uma câmera possuir apenas duas dimensões, logo não é possível determinar medidas de profundidade em um plano tridimensional de forma satisfatória. Este empecilho pode ser minimizado ou até solucionado por meio do uso de duas câmeras, pois a partir da verificação destas imagens em ângulos e posições diferentes é possível realizar o correlacionamento das mesmas e obter informações em três dimensões.

Utilizando-se dos conceitos de estereoscopia, através de relações trigonométricas, é possível encontrar uma relação para transformar as informações contidas nas duas imagens, em informações sobre deslocamentos e posições de um mesmo ponto ou objeto em três dimensões.

O uso de imagens estereoscópicas é algo que vem sendo estudado em diversas áreas de maneira a formar uma visão em três dimensões, como pode ser encontrado em Sutton et al., (2008), com estudo realizado sobre o efeito de rotação e translação fora do plano, em duas dimensões (2D) e também em três dimensões (3D) com imagens estereoscópicas. Outro estudo utilizando o princípio de estereoscopia foi realizado por Esteves, Feitosa e Fernandes (2012) para calcular a distância da câmera ao objeto utilizando uma visão tridimensional (3D).

São conhecidas algumas maneiras de se obter duas imagens, a primeira e mais intuitiva é utilizar duas ou mais câmeras distintas (SUTTON et al., 2008; HELFRICK et al., 2011; PARK et al., 2014), outra maneira é por meio do uso de um jogo de espelhos como visto por Pankow et al., (2010), ou até mesmo usando um biprisma como em Genovese et al., (2013). Com duas câmeras distintas surge o problema de sincronizar os dois vídeos, já com a utilização de espelhos ou um biprisma, o vídeo é um só, porém são obtidas duas imagens com campo de visão e resolução menores, além de se adicionar as imperfeições do material utilizado na divisão das imagens.

De acordo com o exposto, o presente trabalho consiste em um primeiro momento na realização de experimentos de análise do comportamento dinâmico de uma estrutura em duas dimensões com equipamentos apropriados, utilizando o sensor câmera e em seguida utilizando sensores acelerômetros (análise convencional). A análise modal feita com os dados obtidos pelo sensor câmera será baseada apenas na resposta do sistema, já com acelerômetros será realizada igualmente ao feito com a câmera além da realização de uma análise convencional, onde se utiliza uma entrada impulsiva conhecida e os parâmetros são obtidos a partir de funções de transferências. Desta maneira, é possível comparar os resultados obtidos utilizando os três métodos e ponderar a capacidade da utilização do sensor câmera.

Em sequência, uma rotina computacional para reconhecimento de posições e deslocamentos em três dimensões foi implementada. Então, com a utilização de duas câmeras iguais, as quais passam por um processo de calibração para o conhecimento das características do sistema montado, foi filmado um alvo preso na ferramenta de um CNC, a qual foi submetida a deslocamentos controlados nas três dimensões. As imagens das duas câmeras montadas e calibradas foram então captadas por um computador e posteriormente processadas. Os resultados obtidos a partir da aplicação do sistema estereoscópico, foram então comparados com os valores de deslocamento pré-definidos no sistema do equipamento CNC.

## 1.1 OBJETIVOS

Neste tópico serão abordados os objetivos do trabalho, separados em objetivo geral e objetivos específicos.

### 1.1.1 Objetivo Geral

Aplicar um sistema utilizando câmeras digitais, para a realização de medidas de deslocamento em duas e três dimensões, bem como utilizar essas medidas para a realização de análises dinâmicas, examinando sua eficiência e comparar resultados com testes realizados utilizando a análise clássica com o uso de acelerômetros.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Apontar características importantes a serem levadas em conta na utilização deste método;
- Aplicar o uso de uma câmera digital para realização de análise modal;
- Observar a eficiência das análises realizadas;
- Comparar as análises feitas com o sensor câmera com análises feitas de maneira convencional;
- Desenvolver uma rotina para a aquisição de dados por câmeras em 3D (três dimensões);
- Realizar medições de deslocamento em 3D;
- Apontar desvantagens e propor melhorias e maneiras de desenvolver o método em questão.

## 1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

No capítulo 2 é apresentado conceitos teóricos sobre câmeras, processamento de imagens e análises dinâmicas, para embasar o trabalho e dar fundamentos para o entendimento do mesmo.

No capítulo 3 é apresentado os experimentos realizados bem como a metodologia empregada. Em um primeiro momento é demonstrado um experimento dinâmico, onde o objetivo é identificar os parâmetros modais de uma estrutura utilizando diferentes métodos, entre eles análise por elementos finitos, análise modal convencional, análise modal baseada apenas na resposta e análise modal baseada apenas na resposta utilizando câmera como sensor de deslocamento, e comparar os resultados. Em um segundo momento, é realizado uma medição de deslocamento em três dimensões, utilizando duas câmeras digitais idênticas, as quais são posicionadas e calibradas, e em sequência é captado o deslocamento da ferramenta de um CNC, de modo a comparar os dados obtidos pelo sistema de câmeras com os dados inseridos no equipamento.

Por fim, no capítulo 4 é apresentada as considerações finais sobre o trabalho.

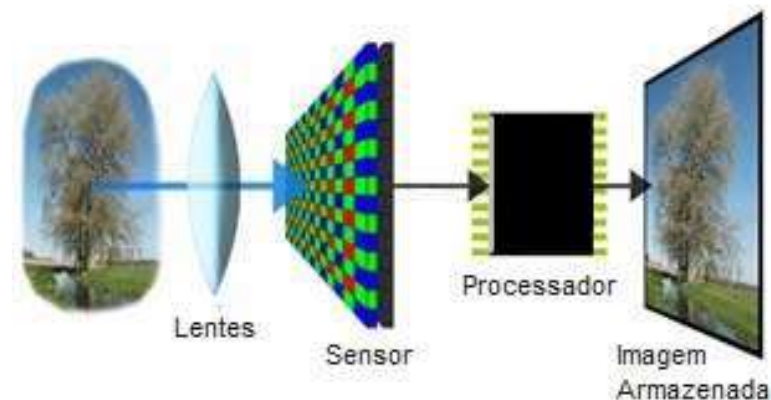
## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

O presente capítulo discorre sobre os conceitos básicos envolvidos na metodologia de aquisição e processamento de imagem, cuja finalidade é possibilitar a identificação do deslocamento em 2D e 3D de alvos predeterminados, por meio de um sensor de imagem.

### 2.1 CÂMERA DIGITAL

Na câmera digital, ao invés do sensor gravar a imagem em uma película, ele transforma as informações contidas na imagem obtida em sinais digitais, ou seja, estas imagens são passadas do real (imagens analógicas) para o virtual (imagens digitais).

As câmeras digitais atuais são complexas e possuem diversos componentes, porém, os componentes básicos de acordo com Sabino (2013), são: um conjunto de lentes, um sensor de captura de luminosidade, processador e mídia de armazenamento de dados. A Figura 1 mostra os componentes e funcionamento básico de uma câmera digital. Nas seções a seguir, tais componentes são detalhadamente explorados.



**Figura 1 - Esquema de componentes de uma câmera digital**  
 Fonte: Adaptado de GURGEL, SOLRAC (2015)

#### 2.1.1 Conjunto de Lentes

Nas câmeras, o objetivo da lente é focar a luz refletida ou emitida pelo cenário a ser capturado, encaminhando a mesma em direção ao sensor. Câmeras mais

simples utilizam apenas uma lente, já as câmeras mais elaboradas possuem um conjunto de lentes as quais se ajustam por complexos mecanismos, como é mostrado na Figura 2 por meio da imagem em corte.



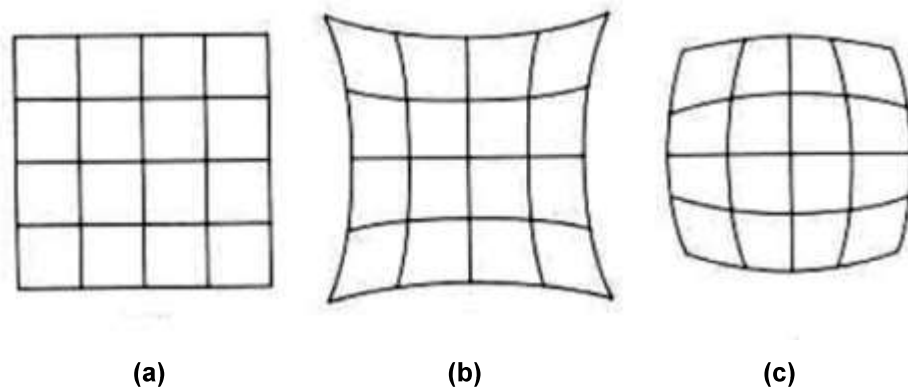
**Figura 2 - Detalhe do conjunto de lente**  
**Fonte: TROTTA (2015)**

Estes conjuntos de lentes podem ser fixos a uma câmera ou podem ser cambiáveis com elementos de diferentes distâncias focais, aberturas e outras propriedades. Embora, em princípio, uma lente convexa simples seja suficiente para focar a luz da imagem no sensor, na prática é utilizado um componente constituído por um grupo de elementos de lentes ópticas, e estes são destinados a corrigir (sempre que possível) as muitas imperfeições que aparecem. Algumas imperfeições estarão presentes em qualquer sistema de lentes (LEONARDI, 2015).

As imperfeições deste tipo de componentes, dificilmente são eliminadas por completo, desta maneira, as imagens obtidas pelo sistema utilizado apresentam imprecisões causadas por estes defeitos. A imperfeição, ou também chamada de distorção, a mais comum de ser encontrada e de maior influência nas medições de imagem, é a distorção radial.

Para Lobão (2004), a distorção radial representa a parte mais significativa das distorções na maioria das câmeras comerciais, sendo normalmente observável através dos efeitos apresentados na Figura 3, denominados distorção negativa e positiva, também conhecidas como efeito almofada e barril, respectivamente.

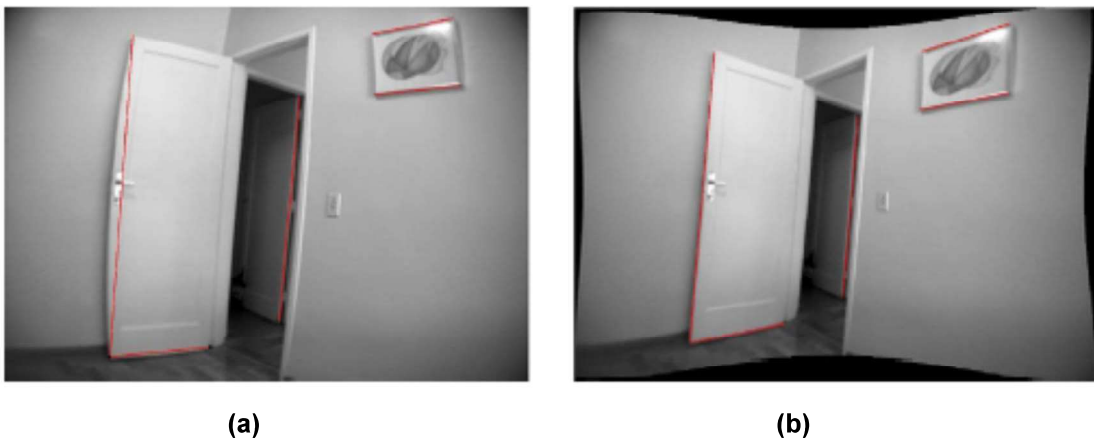




**Figura 3 - (a) Imagem linear. (b) imagem com distorção negativa. (c) imagem com distorção positiva**  
 Fonte: COURROL, PRETO (2010)

Percebe-se que distorções radiais são mais pronunciadas nas extremidades das imagens, sendo que na região central, as mesmas são praticamente insignificantes.

A imagem capturada é demonstrada na Figura 4, e representa bem a distorção radial. De modo que seja mantida uma fidelidade da imagem capturada com a referência real, é então possível corrigi-la para que a mesma torne-se uma melhor representação da cena captada. Para ilustrar melhor este fenômeno, na Figura 4 são apresentadas duas imagens, no item (a) a imagem original com distorções e no item (b) a imagem com as correções das distorções. Em ambas foram inseridas linhas vermelhas retas sobre as bordas da porta e do quadro, para destacar as distorções.



**Figura 4 - (a) Imagem original. (b) Imagem corrigida**  
 Fonte: LOBÃO (2004)

Pode-se perceber a notável diminuição das distorções radiais na Figura 4b, com relação à Figura 4a. O cálculo da correção e sua respectiva demonstração será apresentada na seção 2.6.

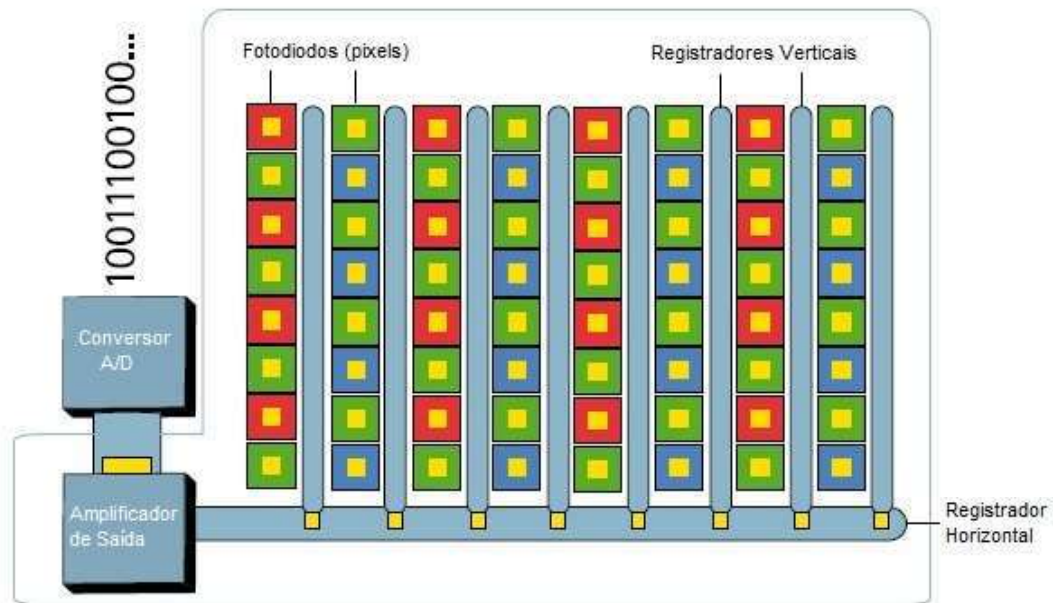
### 2.1.2 Tipos de Sensores

Quando uma imagem está sendo capturada, a luz passa pela lente e incide sobre o sensor, que é responsável por transformar a luz em voltagem. Em seguida, passa por um conversor analógico/digital, para então o sinal digital ser processado de maneira que cada pixel contenha a informação da cor captada.

Atualmente, existem duas principais tecnologias que podem ser usadas como sensor de imagem em uma câmera, CCD (Dispositivo de carga acoplada, do inglês *Charge-coupled Device*) e CMOS (Semicondutor de metal-óxido complementar, do inglês *Complementary Metal-oxide Semiconductor*) (AXIS COMMUNICATIONS, 2010).

De acordo com Waltham et al., (2010), a estrutura do sensor CCD consiste numa série de capacitores separados da camada de substrato semicondutor na parte de baixo por uma fina camada de óxido isolante. Cada capacitor transmite o sinal analógico por meio dos registradores, e então é convertido, fora do sensor, por um conversor analógico/digital, conforme é ilustrado na Figura 5.

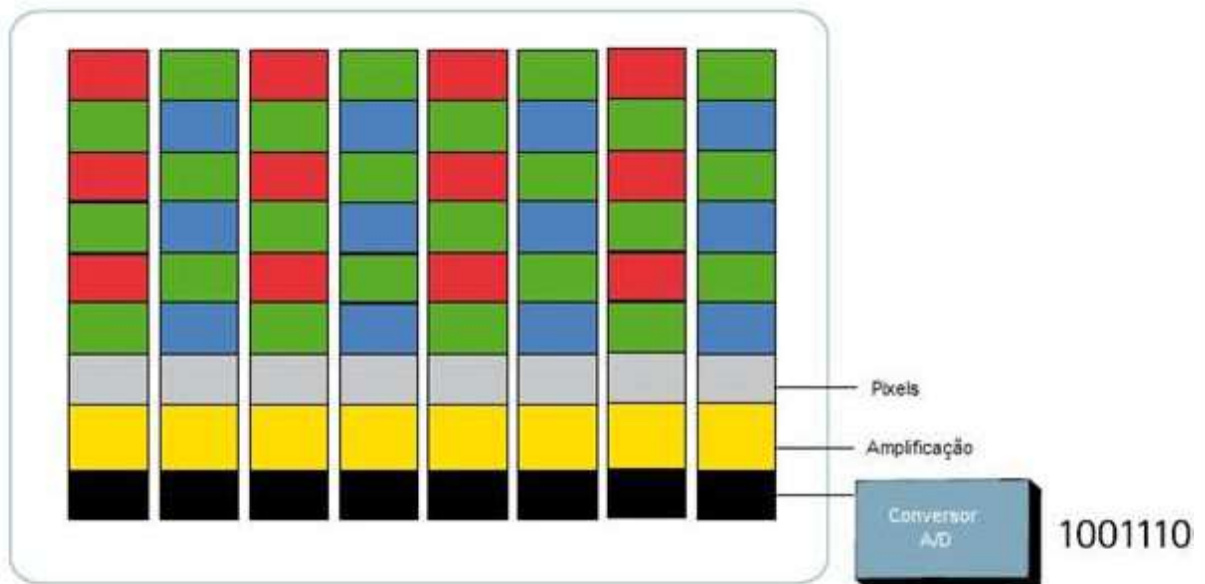
Sensores CCD têm algumas vantagens em relação aos sensores CMOS, dentre elas é possível citar: maior sensibilidade à luz e menos ruídos. Porém, com o desenvolvimento da tecnologia CMOS essas diferenças diminuiram muito (WALTHAM et al., 2010). A principal desvantagem de sensores CCD é o fato de serem analógicos e necessitarem de circuitos eletrônicos fora do sensor, desta maneira, tornam-se mais caro de produzir, com tamanho excessivamente grande e com maior consumo de energia (AXIS COMMUNICATIONS, 2010).



**Figura 5 - Esquema de funcionamento de um sensor CCD**  
 Fonte: AXIS COMMUNICATIONS (2010)

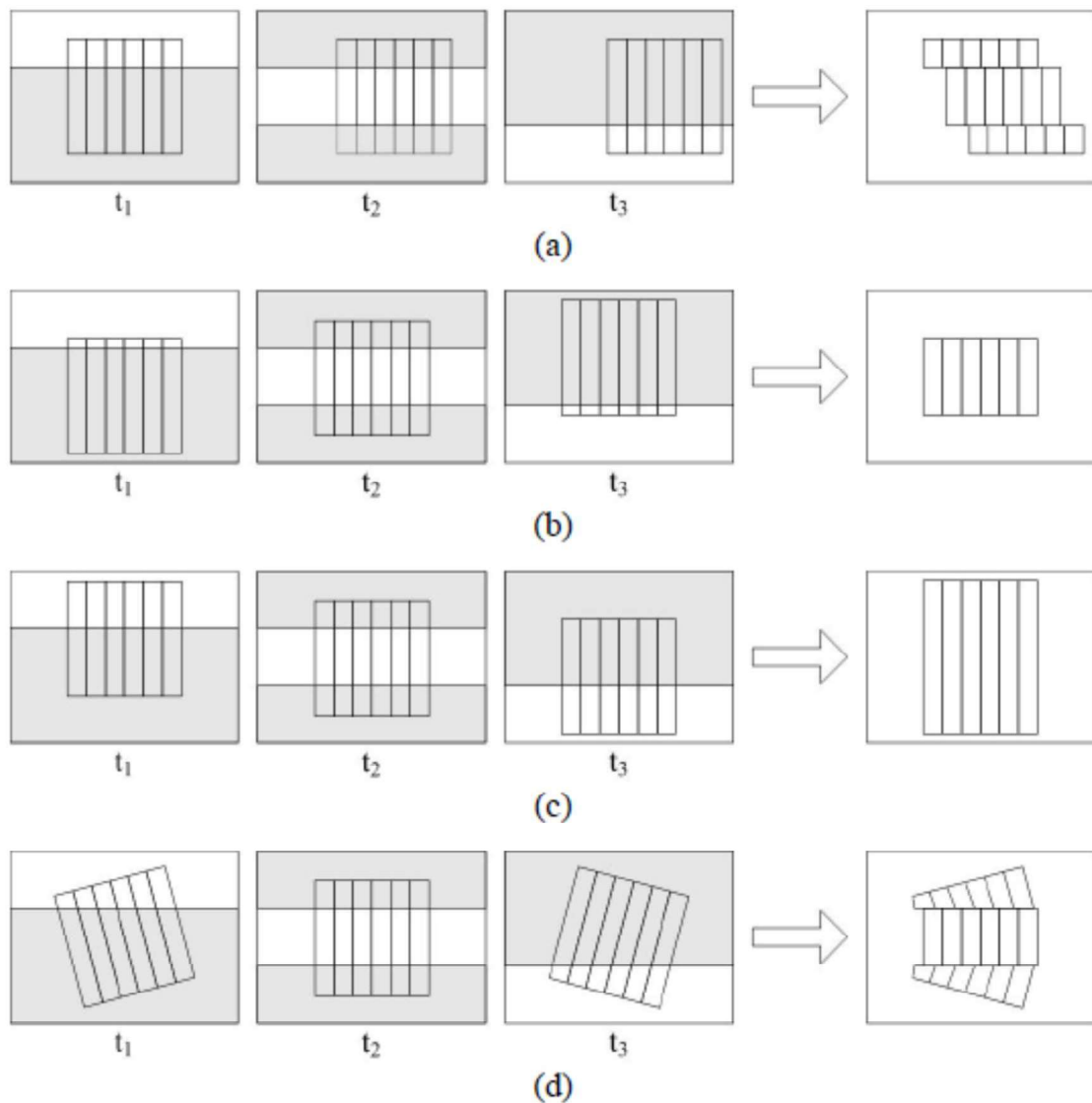
Já os sensores CMOS funcionam de maneira similar ao CCD, porém ao invés de possuírem capacitores, eles utilizam transdutores fotossensíveis, cuja tecnologia de chips de silício é a mesma utilizada em microprocessadores. Desta forma, milhões de transistores e transdutores podem ser integrados em um único circuito de silício. Isto traz a possibilidade de integrar uma grande matriz de pixels, onde cada pixel é o próprio fotodiodo e transistor de leitura (WALTHAM et al., 2010).

Os sensores CMOS incorporam os amplificadores e o conversor analógico digital, conforme evidenciado na Figura 6. Assim, diminui o custo de fabricação de uma câmera, pois contém toda a lógica necessária para se produzir uma imagem. Outras vantagens deste tipo de sensor em comparação com o CCD são os gastos menores de energia, além de sistemas menores e com maior velocidade de leitura. Entretanto, pelo fato de adicionar circuitos eletrônicos em seu interior é mais suscetível a ruídos estruturados, como listras ou outros padrões (AXIS COMMUNICATIONS, 2010).



**Figura 6 - Esquema de funcionamento do sensor CMOS**  
**Fonte: AXIS COMMUNICATIONS (2010)**

Outra diferença que pode ser associada aos sensores está diretamente ligada aos obturadores. Enquanto os sensores CCD usam obturadores globais (*global shutter*), ou seja, os dados de voltagem são armazenados no mesmo instante para todos os pixels, e em sequência processados; nos sensores CMOS, por causa da sua maneira de operação, adota-se o obturador móvel (*rolling shutter*) para ler e limpar linhas de pixels sequencialmente na matriz do sensor, fazendo com que, o momento de captura de cada linha seja levemente atrasado com relação ao tempo de captura da linha anterior. Desta forma, como as linhas da imagem são expostas em diferentes intervalos, a cena na imagem fica distorcida caso a velocidade de movimento de algum objeto seja superior à capacidade de processamento total do sensor (SUN, LIU, 2012), tais distorções, bem como os movimentos que as causam, são mostradas na Figura 7.



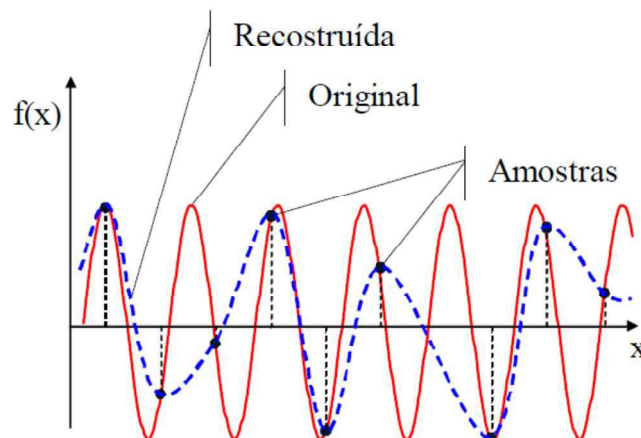
**Figura 7 - Distorções causadas por *rolling shutter*: (a) Distorção causada por translação horizontal. (b) Distorção causada por translação para cima. (c) Distorção causada por translação para baixo. (d) Distorção causada por rotação**  
**Fonte: SUN, LIU (2012)**

Sun, Liu, (2012), expõem que distorções causadas pelo efeito *rolling shutter* são mais visíveis em vídeos do que em imagens únicas, porque as distorções em quadros consecutivos podem ser diferentes e conseqüentemente produzir efeitos inusitados. Portanto, é muito difícil prever o comportamento deste efeito em vídeos, pois cada quadro pode estar exposto a movimentos diferentes.

## 2.2 VELOCIDADE DE CAPTURA DE VIDEO

Um dos aspectos importantes a ser observado durante uma análise de alvos dinâmicos é a taxa de amostragem. No caso da câmera, esta taxa é definida pelo número de quadros por segundo que são armazenados durante a filmagem.

Neste caso, o efeito que é desejado evitar chama-se *aliasing*, que ocorre quando um evento é discretizado temporalmente a uma taxa insuficiente para capturar seu movimento dinâmico (OLSHAUSEN, 2000). Na Figura 8 é demonstrado o efeito *aliasing*, onde a linha vermelha representa o sinal original, que se deseja captar, a linha azul é a reconstrução feita a partir dos pontos em preto, que são as medições realizadas em uma amostragem insuficiente. Assim, é possível observar que o sinal original é diferente do sinal medido, ou seja, a medição não representa o fenômeno analisado.



**Figura 8 - Aliasing**  
**Fonte: SCURI (2002)**

Um sinal que varia continuamente no tempo, com uma frequência máxima  $f_{\text{máx}}$  ciclos por segundo, só será convenientemente amostrado com uma taxa de amostragem mínima superior a duas vezes  $f_{\text{máx}}$ . Esta taxa de amostragem mínima é denominada de frequência de Nyquist (OPPENHEIM, 1989).

Para que uma câmera possua uma alta taxa de captura, alguns componentes devem ser otimizados, como o sensor de captura, que deve ser rápido o suficiente para captar imagens com a velocidade necessária; o processador deve possuir capacidade para processar e ajustar as imagens antes que o próximo quadro inicie, e

por último, e provavelmente o fator mais importante, o dispositivo de armazenamento deve apresentar rendimento suficiente para transferir todos os dados captados e processados com a rapidez necessária.

## 2.3 PROCESSAMENTO DE IMAGEM

A área de processamento de imagem vem se desenvolvendo amplamente com o advento de câmeras digitais, pois a constante necessidade e desejo de desenvolvimento faz com que novas aplicações para estes equipamentos apareçam. Assim, surge a área de análise automática de imagens, onde um *software* analisa as imagens obtidas e extrai as informações desejadas. De acordo com Marques Filho (1999), algumas aplicações já são encontradas em áreas como medicina e biologia, por exemplo, a contagem automática de células em imagem obtida de microscópio, (GRISHAGIN, 2015), na área de geografia, por meio da análise de imagens de satélites (GALLIS, 2004), na engenharia com o advento de robôs dotados de visão artificial (FRANÇA, 2003), entre outras aplicações.

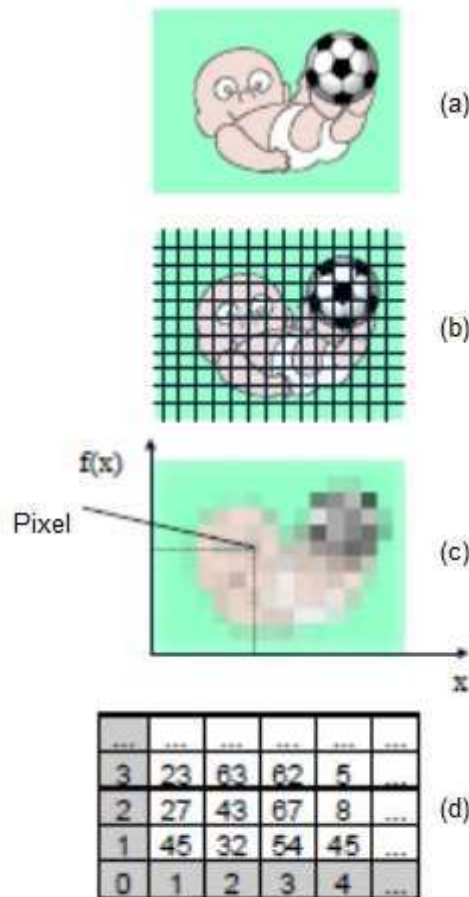
### 2.3.1 Discretização Espacial

As imagens devem ser tratadas como sinais, pois na realidade as imagens são sinais visuais. De acordo com o exposto por Albuquerque (2003), as imagens são um suporte físico que carrega no seu interior uma determinada informação. Processar uma imagem consiste então em transformá-la sucessivamente, com o objetivo de extrair com maior facilidade a informação nela presente.

Um método de armazenar as informações de uma imagem é utilizando o método de matriz, onde cada pixel é um elemento da matriz, conforme demonstrado na Figura 9d. O modelo matricial utiliza uma matriz de dados para armazenar a informação de cor em cada ponto da imagem, onde o sistema de coordenadas é obviamente uma grade de números inteiros, que descrevem a posição na matriz (SCURI, 2002). Portanto, neste método de armazenamento não há distinção dos objetos na imagem.

É possível perceber que uma imagem digital é uma forma de discretizar uma imagem do mundo real, onde, esta é contínua e cada pixel da imagem digital é uma amostra. Este processo está demonstrado na Figura 9, onde cada pixel armazena um

valor, ou seja, quantifica a luz que recebe (Figura 9c), a qual é convertida em seguida, em um valor de cor (Figura 9d).



**Figura 9 - Processo de discretização de uma imagem.**  
**(a) Imagem contínua. (b) Amostragem. (c) Quantização. (d) Codificação.**  
**Fonte: SCURI (2002)**

Conforme é observável na Figura 9, uma cena é melhor representada conforme cresce o número de elementos (pixels) da matriz da imagem. Assim, quanto menor for este elemento, um maior número dos mesmos serão necessários para representar a mesma cena, portanto maior será a fidelidade da discretização. Então, para que um computador realize a análise de uma imagem de forma automática, por exemplo, deve se levar em consideração a qualidade das imagens.

De acordo com o trabalho de Scuri (2002), existem duas subdivisões quando se trata de análises de imagem: fidelidade e inteligibilidade. No primeiro item a preocupação é aproximar a imagem processada da imagem original ou de um padrão determinado que melhor a represente. Já no segundo caso, a preocupação deve ser



com a informação que é possível extrair da imagem, seja pelo olho humano ou por algum processamento computacional.

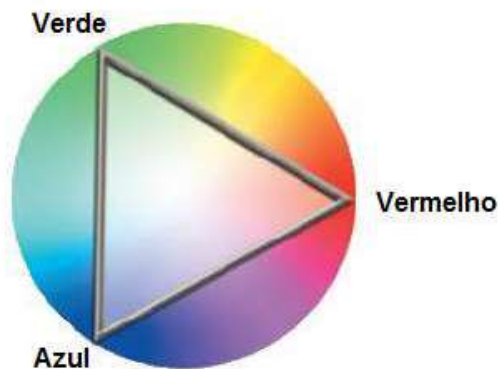
Desta maneira, pode-se dizer que para a aplicação em reconhecimento de pontos por um programa de computador, além da fidelidade das imagens, deve-se atentar também para a inteligibilidade, ou seja, nas informações que se consegue extrair da imagem, como formas, tamanhos, cores de objeto, distâncias entre ponto, entre outras.

### 2.3.2 Sistemas de Cores

Quando se deseja utilizar imagens coloridas, deve-se levar em conta como é feita a representação de cada cor em uma imagem. De acordo com Meneses, Almeida (2012), para o dimensionamento de uma cor matematicamente é preciso numerar os vetores que serão necessários para caracterizar diretamente a percepção de cor.

Existem várias formulações para descrever adequadamente cada cor em uma imagem, estas são chamadas de sistemas de cores. Os de maior importância para o trabalho em questão são: RGB (*Red*, *Green* e *Blue*) e Tons de Cinza.

O sistema RGB utiliza as cores primárias vermelho (*red*), verde (*green*) e azul (*blue*) para caracterizar todas as outras cores, conforme mostrado na Figura 10.



**Figura 10 - Espectro de cores RGB**  
**Fonte: Adaptado de Keese (2012)**

Para codificar uma cor é comum usar 1 byte ou 8 bits, para cada componente. Um byte possui  $2^8 = 256$  possibilidades, assim, computacionalmente utiliza-se valores de 0 a 255. Assumindo que são três componentes (vermelho, verde e azul), tem-se então 3 bytes ou 24 bits, ou seja, são  $2^{24}$  de possíveis cores, totalizando mais de dezesseis milhões de possibilidades (SCURI, 2002).

Este sistema é conhecido como sistema de cores aditivas, pois quando os valores para as três cores forem zero, a cor obtida é o preto puro, à medida que se adiciona cor a mesma fica mais clara, até o ponto em que as três chegam a 255, onde é obtido o branco puro.

Este é o sistema utilizado por dispositivos que trabalham com luz, como câmeras digitais, scanners, projetores, monitores, etc.

Já o sistema de tons de cinza é uma forma de simplificar a análise de imagens coloridas, de modo a diminuir o tempo de processamento computacional de uma imagem. Neste sistema, ao invés de ser 24 bits em cada pixel, como seria no RGB, tem-se apenas 8 bits (1 byte), ou seja, possui 256 combinações possíveis de tons de cinza (MACHADO, SOUKI, 2004).

Uma maneira de transformar uma imagem de RGB para tons de cinza pode ser encontrada em Gonzalez, Woods, (2007), e dada pela Eq. 1.

$$Y = 0,299R + 0,587G + 0,114B \quad (1)$$

Onde:

Y = Valor em tons de cinza;

R = Valor na camada de cor vermelha;

G = Valor na camada de cor verde;

B = Valor na camada de cor azul.

Este sistema não é eficiente quando se deseja precisão de cores, porém é muito eficiente quando se deseja trabalhar com pontos específicos que possuam tonalidades em cinza consideravelmente diferentes.

No presente trabalho, as cenas captadas utilizam o sistema de cores RGB, padrão da câmera, posteriormente estas imagens são transformadas em escala de cinza, com a finalidade de agilizar o processamento dos dados.

### 2.3.3 Segmentação

É uma operação de processamento de imagens, que pode ser definida como o processo que divide uma imagem digital em regiões separadas (CASTLEMAN, 1995).

Um tipo de segmentação muito utilizado por suas propriedades intuitivas, simplicidade de implementação e velocidade computacional é o *thresholding* (GONZALEZ, WOODS, 2007). Nesta operação, a identificação dos objetos torna-se

possível em cenas onde se tem objetos sólidos sobre um fundo contrastante, pois a mesma consiste em transformar a imagem em informações binárias. Utiliza-se um tom de cinza limite, todas as tonalidades acima deste tom tornam-se branco e todas abaixo são consideradas preto (CASTLEMAN, 1995), assim as informações dos pixels são apenas 0 ou 1.

Utilizando imagens binárias torna-se mais simples a obtenção de dados e parâmetros dos objetos desejados, como quantidade, área, perímetro, centro de gravidade, etc. (SCURI, 2002).

#### 2.3.4 Operações Morfológicas

Para Marques Filho, Vieira Neto (1999), as operações morfológicas concentram seus esforços no estudo da estrutura geométrica das entidades presentes em uma imagem, como forma ou tamanho de objetos.

Neste tipo de operação os conjuntos de pixels de uma imagem são comparados com formas pré-definidas de maneira a adicionar ou remover pixels necessários. As duas operações morfológicas fundamentais são erosão e dilatação (GONZALEZ, WOODS, 2007).

A erosão é o processo onde são removidos pixels das bordas do objeto desejado, enquanto na dilatação são adicionados pixels nas bordas deste objeto.

## 2.4 GEOMETRIA PROJETIVA

Esta seção apresenta os conceitos básicos de geometria projetiva, que fornece a representação matemática, a terminologia e a notação necessários para a compreensão dos demais conceitos teóricos apresentados neste trabalho. Inicialmente são apresentados os conceitos relativos a transformações projetivas do espaço bidimensional, que posteriormente são estendidos para a geometria projetiva do espaço tridimensional. Tais conceitos são mais facilmente visualizados no espaço 2D que em 3D, e a geometria projetiva do espaço tridimensional é uma simples generalização do caso bidimensional. Os conceitos e notações são obtidos de Hartley, Zisserman, (2003).

Serão adotadas algumas convenções nesta seção, e nas subsequentes. Na notação das fórmulas e no texto, são utilizadas as seguintes convenções:

- Letras maiúsculas são matrizes, por exemplo:  $F, P$ ;
- Letras maiúsculas em negrito são vetores representando pontos do espaço tridimensional, por exemplo:  $\mathbf{X}$ ;
- Letras minúsculas em negrito são vetores representando pontos ou retas do espaço bidimensional, por exemplo:  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  e  $\mathbf{l}$ ;
- Letras minúsculas em itálico são valores escalares;
- Sistemas de coordenadas são representados por letras minúsculas e maiúsculas em itálico, exemplo:  $x, y, z, X, Y, Z$ .

#### 2.4.1 Geometria Projetiva 2D

Um ponto pertencente a um plano pode ser representado por um par de coordenadas  $(x, y)$  de  $\mathbf{R}^2$ . Como transformações lineares entre espaços vetoriais são representadas por matrizes, é conveniente representar as entidades geométricas por vetores coluna. Assim, o ponto passa a ser representado pelo vetor  $\mathbf{x} = (x, y)^T$  do espaço vetorial  $\mathbf{R}^2$ .

**Representação homogênea de retas:** A representação natural da reta é o vetor  $(a, b, c)^T$ , correspondente à equação  $ax + by + c = 0$ , e todos os vetores equivalentes  $k(a, b, c)^T$  representam a mesma reta, para qualquer escalar  $k$  não nulo. Uma classe de vetores equivalentes sob esta relação é conhecida como vetor homogêneo, e qualquer vetor  $k(a, b, c)^T$  é um representante desta classe de equivalência. O conjunto de classes de equivalência de vetores em  $\mathbf{R}^3 - (0,0,0)^T$  forma o espaço projetivo  $\mathbf{P}^2$ .

**Representação homogênea de pontos:** Um ponto  $\mathbf{x} = (x, y)^T$  pertence à reta  $\mathbf{l} = (a, b, c)^T$ , se e somente se,  $ax + by + c = 0$ . Em termos do produto interno, um ponto  $\mathbf{x}$  pertence à reta  $\mathbf{l}$  se e somente se  $\mathbf{x}^T \mathbf{l} = 0$ . Como para qualquer escalar  $k$  não nulo tem-se  $k(x, y, 1) \mathbf{l} = 0$ , então o ponto  $(x, y)^T$  em  $\mathbf{R}^2$  pode ser representado por um vetor homogêneo. Dessa forma, um vetor homogêneo qualquer  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  representa o ponto  $(x_1/x_3, x_2/x_3)^T$  em  $\mathbf{R}^2$ .

**Intersecção de duas retas:** A intersecção de duas retas  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{l}'$  é o ponto  $\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'$ . Dadas duas retas  $\mathbf{l} = (a, b, c)^T$  e  $\mathbf{l}' = (a', b', c')^T$ , o produto vetorial  $\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'$  é tal que  $\mathbf{l}^T \mathbf{x} = \mathbf{l}'^T \mathbf{x} = 0$ . Assim, o ponto  $\mathbf{x}$  pertence a ambas retas  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{l}'$  e representa a intersecção entre elas.

**Reta definida por dois pontos:** Analogamente ao caso da intersecção de duas retas, a reta que passa pelos pontos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  é  $\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{x}'$ .

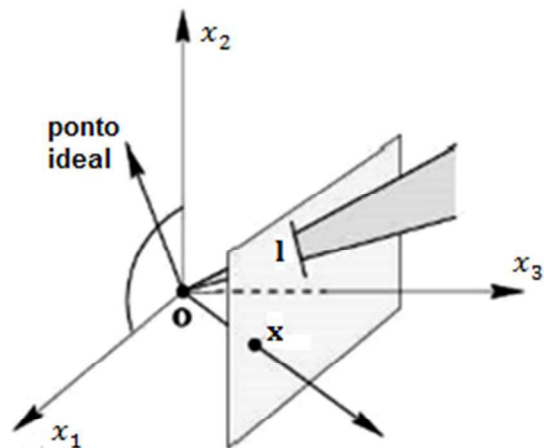
**Intersecção de retas paralelas:** A intersecção entre as retas  $\mathbf{l} = (a, b, c)^T$  e  $\mathbf{l}' = (a, b, c')^T$  é  $\mathbf{l} \times \mathbf{l}' = (c' - c)(b, -a, 0)^T$ . O ponto  $(b, -a, 0)^T$  não representa nenhum ponto finito em  $\mathbf{R}^2$ , e corresponde à definição geométrica de duas retas paralelas que se cruzam no infinito.

**Pontos ideais e reta no infinito:** Vetores homogêneos  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  de coordenada  $x_3 \neq 0$  correspondem a pontos em  $\mathbf{R}^2$ . Acrescentando a  $\mathbf{R}^2$  os pontos de coordenada  $x_3 = 0$ , tem-se o conjunto de todos os vetores homogêneos de 3 dimensões, o espaço projetivo  $\mathbf{P}^2$ . Os pontos em coordenada  $x_3 = 0$  são chamados pontos ideais, ou pontos no infinito. O conjunto de todos os pontos ideais pode ser escrito  $(x_1, x_2, 0)^T$ , e todos estes pontos pertencem a uma reta, a reta no infinito, denotada  $\mathbf{l}_\infty = (0, 0, 1)^T$ .

Uma reta  $\mathbf{l} = (a, b, c)^T$  cruza a reta  $\mathbf{l}_\infty$  no ponto ideal  $(b, -a, 0)^T$ , assim como qualquer reta  $\mathbf{l}' = (a, b, c')^T$  paralela a  $\mathbf{l}$ . Dessa forma, o ponto ideal  $(b, -a, 0)^T$  representa a direção da reta  $\mathbf{l} = (a, b, c)^T$ , e a reta infinito  $\mathbf{l}_\infty$  representa o conjunto de direções de retas em um plano.

**Modelo do plano projetivo:** O espaço projetivo  $\mathbf{P}^2$  consiste em um conjunto de raios em  $\mathbf{R}^3$ , uma vez que o conjunto de todos os pontos  $k(x_1, x_2, x_3)^T$  forma raios passando pela origem à medida que se varia  $k$ , e cada um destes raios apresenta um único ponto em  $\mathbf{P}^2$ . Neste modelo, retas de  $\mathbf{P}^2$  representam planos passando pela origem em  $\mathbf{R}^3$ . Os raios representando pontos ideais e o plano representando  $\mathbf{l}_\infty$  são paralelos ao plano  $x_3 = 0$ , conforme ilustrado na Figura 11.

**Princípio da dualidade:** No espaço projetivo  $\mathbf{P}^2$ , os papéis de pontos e retas podem ser intercambiados com relação a suas propriedades. O princípio da dualidade estabelece que qualquer teorema da geometria projetiva do espaço bidimensional corresponde a um teorema dual, derivado permutando-se os papéis de pontos e retas no teorema original.



**Figura 11 – Modelo do plano projetivo**  
 Fonte: Adaptado de Hartley, Zisserman (2003)

**Transformações projetivas:** A geometria projetiva 2D é o estudo das propriedades de  $\mathbf{P}^2$  invariantes sob um grupo de transformações chamadas projetividade. Um mapa  $h: \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$  é uma projetividade, se e somente se, existe uma matriz não-singular  $H$   $3 \times 3$ , tal que para qualquer ponto  $x$  em  $\mathbf{P}^2$  vale a relação  $h(x) = Hx$ . As projetividades formam um grupo, pois a inversa de uma projetividade e a composição de duas projetividades também é uma projetividade. Uma projetividade também é chamada de colineação, transformação projetiva ou homografia.

Uma transformação projetiva planar é uma transformação linear de vetores homogêneos de três dimensões representada por matriz  $H$   $3 \times 3$  não-singular, tal que  $x' = Hx$ :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

A matriz  $H$  é dita uma matriz homogênea, pois pode ser multiplicada por um fator de escala não-nulo sem alterar a transformação projetiva. Somente as oito razões independentes entre os nove elementos da matriz são significativas, e portanto  $H$  tem oito graus de liberdade.

Alguns casos particulares de transformações projetivas formam subgrupos dentro do grupo projetivo linear, que podem ser organizados em uma hierarquia de classes de transformações, cada qual representando uma generalização da classe anterior. Esta hierarquia é formada pelas transformações isométrica, similar, afim e projetiva. Cada uma destas transformações pode ser representada pelos seus

invariantes: função escalar da configuração geométrica cujo valor não é alterado pela transformação. Para o trabalho em questão, as transformações isométricas são as que possuem importância, e por isso serão as únicas exploradas.

As transformações isométricas, ou isometrias, são transformações do plano  $\mathbf{R}^2$  que preservam a distância Euclidiana. Uma isometria é uma transformação da forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \cos \theta & -\sin \theta & t_x \\ \varepsilon \sin \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

onde  $\varepsilon = \pm 1$ . Se  $\varepsilon = 1$ , a isometria preserva a orientação e é uma transformação Euclidiana – a composição de uma rotação e uma translação, onde  $\theta$  é o ângulo de rotação entre os sistemas de eixos. As transformações Euclidianas modelam o movimento de objetos rígidos, que pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}' = H_E \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (4)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz de rotação  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{t}$  é um vetor de translação de duas dimensões, e  $\mathbf{0}$  é um vetor nulo de duas dimensões. Uma transformação Euclidiana também é chamada de deslocamento.

Uma transformação Euclidiana planar tem três graus de liberdade e seus invariantes são: comprimento (distância entre dois pontos), ângulo (ângulo entre duas retas) e área.

#### 2.4.2 Geometria Projetiva 3D

Muitas das propriedades e entidades do espaço projetivo 3D, ou  $\mathbf{P}^3$  são generalizações diretas das suas equivalentes no plano projetivo, descritas na seção anterior. Em  $\mathbf{P}^3$ , o espaço Euclidiano tridimensional é ampliado por um conjunto de pontos ideais pertencentes a um plano no infinito,  $\pi_\infty$ , análogo a  $\mathbf{l}_\infty$  em  $\mathbf{P}^2$ . Retas paralelas em  $\mathbf{P}^2$  correspondem a planos paralelos em  $\mathbf{P}^3$ , que se cruzam em uma reta sobre  $\pi_\infty$ . Apesar destas semelhanças, as coordenadas homogêneas em  $\mathbf{P}^3$  são representadas por vetores de quatro dimensões, introduzindo propriedades adicionais em relação à  $\mathbf{P}^2$ .

**Pontos:** A representação homogênea de um ponto  $\mathbf{X}$  do espaço tridimensional é um vetor de quatro dimensões. Dado o vetor homogêneo  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ , com  $x_4 \neq 0$ , o ponto  $(X, Y, Z)^T$  correspondente em  $\mathbf{R}^3$  tem coordenadas não-homogêneas

$X = x_1/x_4$ ,  $Y = x_2/x_4$  e  $Z = x_3/x_4$ . Pontos homogêneos com coordenada  $x_4 = 0$  representam pontos no infinito.

**Transformações Projetivas:** Uma transformação projetiva em  $\mathbf{P}^3$  é uma transformação linear sobre vetores homogêneos de quatro dimensões, e é representada por uma matriz  $H 4 \times 4$  não-singular tal que  $\mathbf{X}' = H\mathbf{X}$ . A matriz  $H$  é homogênea e tem 15 graus de liberdade. Como no caso das transformações projetivas planares, o mapa é uma colineação (retas são transformadas em retas), que preserva relações como o ponto de intersecção entre uma reta e um plano, e ordem de contato.

De forma análoga à transformação em 2D, a transformação em 3D consiste em uma matriz rotação  $R 3 \times 3$ , encontrada pela Eq. 5 e um vetor translação  $\mathbf{t} 3 \times 1$ .

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \text{sen } \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\text{sen } \beta & 0 \\ \text{sen } \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Onde  $\theta$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são os ângulos de rotação do sistema projetado, em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  do sistema global, respectivamente.

**Dualidade:** Em  $\mathbf{P}^3$  pontos e planos são duais, com representações e propriedades análogas às da dualidade entre ponto e reta em  $\mathbf{P}^2$ . Em  $\mathbf{P}^3$ , retas são auto-duais.

**Planos:** Um plano do espaço tridimensional pode ser equacionado como  $\pi_1 X + \pi_2 Y + \pi_3 Z + \pi_4 = 0$ . A representação homogênea de um plano é o vetor de quatro dimensões  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)^T$  e as três razões independentes  $\{\pi_1 : \pi_2 : \pi_3 : \pi_4\}$  definem os três graus de liberdade do plano no espaço tridimensional. Utilizando a representação homogênea do ponto  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  tem-se  $\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \pi_3 x_3 + \pi_4 x_4 = 0$ . Assim, a expressão do ponto  $\mathbf{X}$  sobre o plano  $\pi$  é:

$$\pi^T \mathbf{X} = 0 \quad (6)$$

Um vetor normal ao plano  $\mathbf{R}^3$  pode ser determinado como o vetor  $\mathbf{n} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$ .

**Plano definido por três pontos:** Dados três pontos  $\mathbf{X}_i, i = 1, \dots, 3$  pertencentes a um plano  $\pi$ , pela Eq. 6 tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T \\ \mathbf{X}_2^T \\ \mathbf{X}_3^T \end{bmatrix} \pi = 0 \quad (7)$$



A solução desta equação é dada pelo espaço nulo da matriz  $3 \times 4$  formada pelos três pontos como linhas. Se os pontos  $X_1, X_2, X_3$  não são todos colineares, a matriz tem posto 3, e existe uma única solução para o plano  $\pi$ . Se a matriz tem posto 2, os três pontos são colineares, e determinam um feixe de planos com eixo na reta formada por eles.

**Ponto definido por três planos:** Este é o caso dual do plano definido por três pontos. Assim, o ponto  $X$  definido pela intersecção de três planos  $\pi_i, i = 1, \dots, 3$ , é dado pelo espaço nulo da matriz  $3 \times 4$  composta pelos planos como linhas:

$$\begin{bmatrix} \pi_1^T \\ \pi_2^T \\ \pi_3^T \end{bmatrix} X = 0 \quad (8)$$

**Transformação projetiva sobre um plano:** Dada uma transformação pontual  $X' = HX$  sobre um ponto, um plano sofre a transformação:

$$\pi' = H^{-T} \pi \quad (9)$$

**Pontos parametrizados sobre um plano:** O ponto  $X$  sobre o plano  $\pi$  pode ser escrito como:

$$X = Mx \quad (10)$$

onde, matriz  $M$   $4 \times 3$  é tal que  $\pi^T M = 0$ , e o vetor de 3 dimensões  $x$  é um ponto no plano projetivo  $P^2$ , e parametriza os pontos sobre o plano  $\pi$ .

**Retas:** Uma reta é definida como a união de dois pontos, ou a intersecção de dois planos, e tem quatro graus de liberdade no espaço tridimensional. Duas representações compatíveis com vetores homogêneos de  $P^3$  podem ser derivadas da própria definição de reta: como a composição de dois pontos, ou sua versão dual como a intersecção de dois planos. Geometricamente, uma reta é um feixe de pontos colineares, definida por quaisquer dois destes pontos. Analogamente, uma reta representa o eixo de um feixe de planos, definida pela intersecção de quaisquer dois destes planos.

Dados dois pontos  $A$  e  $B$  não coincidentes, a reta unindo estes dois pontos é representada pelo suporte do espaço vetorial das linhas da matriz  $W$   $2 \times 4$  composta por  $A^T$  e  $B^T$ :

$$W = \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} \quad (11)$$

Desta forma, o suporte de  $W^T$  é o feixe de pontos  $\lambda A + \mu B$  sobre a reta, e o suporte do espaço nulo de  $W$  é o feixe de planos cujo eixo é esta reta.

A representação dual da reta como a intersecção de dois planos,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ , é o suporte do espaço vetorial das linhas da matriz  $W^* 2 \times 4$  composta por  $\mathbf{P}^T$  e  $\mathbf{Q}^T$ :

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \\ \mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \quad (12)$$

Desta forma, o suporte de  $W^{*T}$  é o feixe de pontos  $\lambda'\mathbf{P} + \mu'\mathbf{Q}$  com a reta como eixo, e o suporte do espaço nulo bidimensional de  $W^*$  é o feixe de pontos sobre esta reta.

O plano  $\pi$  definido pela união do ponto  $\mathbf{X}$  e de uma reta  $W$  é dado pelo espaço nulo de:

$$M = \begin{bmatrix} W \\ \mathbf{X}^T \end{bmatrix} \quad (13)$$

Se o espaço nulo de  $M$  tem dimensão 2, então o ponto  $\mathbf{X}$  pertence à reta  $W$ , caso contrário,  $M\pi = \mathbf{0}$ .

O ponto  $\mathbf{X}$  definido pela intersecção da reta  $W^*$  com o plano  $\pi$  é dado pelo espaço nulo de:

$$M = \begin{bmatrix} W^* \\ \pi^T \end{bmatrix} \quad (14)$$

Se o espaço nulo de  $M$  tem dimensão 2, então a reta  $W^*$  pertence ao plano  $\pi$ , caso contrário,  $M\mathbf{X} = \mathbf{0}$ .

**Plano no infinito:** Na geometria projetiva planar, a identificação da reta no infinito  $\mathbf{I}_\infty$  permite determinar as propriedades afins do plano, e a identificação dos pontos circulares sobre  $\mathbf{I}_\infty$  permite determinar as propriedades métricas. Na geometria projetiva 3D os equivalentes geométricos destas entidades são respectivamente o plano no infinito  $\pi_\infty$  e a cônica absoluta  $\Omega_\infty$ .

A posição canônica do plano no infinito é  $\pi_\infty = (0,0,0,1)^T$ . Este plano contém as direções  $\mathbf{D} = (X_1, X_2, X_3, 0)^T$ , e permite identificar propriedades afins como o paralelismo. Dois planos são paralelos se, e somente se, a reta definida por sua intersecção está em  $\pi_\infty$ , e uma reta é paralela a outra reta ou a um plano, se o ponto de intersecção está sobre  $\pi_\infty$ .

O plano  $\pi_\infty$  representa os 3 graus de liberdade necessários para determinar propriedades afins em um sistema de coordenadas projetivo. Estes 3 graus de liberdade determinam a componente projetiva de uma homografia em geral – com 15 graus de liberdade, comparada à transformação afim – com 12 graus de liberdade.

O plano no infinito  $\pi_\infty$  é um plano fixo segundo a transformação projetiva  $H$  se, e somente se,  $H$  é uma transformação afim. O plano  $\pi_\infty$  em geral é fixo apenas como conjunto segundo a transformação afim, e não fixo ponto a ponto. Segundo uma transformação afim particular, pode haver outros planos fixos além de  $\pi_\infty$ , mas somente  $\pi_\infty$  é fixo para qualquer transformação afim.

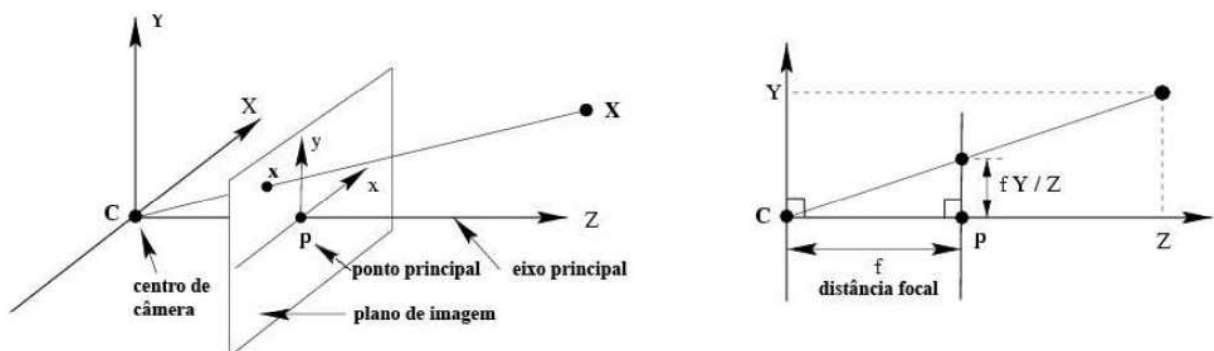
O espaço projetivo  $P^2$  relaciona-se ao espaço projetivo  $P^3$  de forma que um plano  $\pi$  cruza o plano  $\pi_\infty$  na reta no infinito  $l_\infty$  do plano  $\pi$ , e uma transformação projetiva de  $P^3$  induz uma transformação projetiva planar subordinada em  $\pi$ .

## 2.5 MODELO DE CÂMERA

Uma câmera representa objetos constantes no espaço tridimensional em um espaço bidimensional formado na sua imagem. Desta maneira é necessário apresentar as relações para as transformações entre os dois espaços. Utilizando os conceitos já apresentados de geometria projetiva, são então destacadas relações e propriedades do modelo de câmera mais utilizado.

### 2.5.1 Câmeras Finitas

O modelo de câmera mais específico e também mais simples é o modelo básico de câmera de orifício, também conhecido como câmera finita.



**Figura 12 – Geometria da câmera de orifício**  
 Fonte: Adaptado de Hartley, Zisserman (2003)

Considerando a projeção central de pontos do espaço sobre um plano, seja o centro de projeção a origem de um sistema de coordenadas Euclidiana, e o plano, chamado plano de imagem ou plano focal.

Segundo o modelo de câmera de orifício, um ponto 3D com coordenadas  $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^T$  é mapeado para o ponto onde a reta que passa por  $\mathbf{X}$  e pelo centro de projeção (ou centro de câmera –  $C$ ) encontra o plano de imagem, conforme mostrado na Figura 12. Desta forma, o ponto  $(X, Y, Z)^T$  é mapeado para o ponto  $(fX/Z, fY/Z)^T$  sobre o plano de imagem. Ignorando a coordenada  $Z$ , tem-se:

$$(X, Y, Z)^T \rightarrow (fX/Z, fY/Z)^T \quad (15)$$

A relação contida na Eq. 15 descreve o mapeamento da projeção central 3D para coordenadas de imagem. Trata-se de uma relação entre o espaço Euclidiano tridimensional  $\mathbf{R}^3$  e o espaço Euclidiano bidimensional  $\mathbf{R}^2$ .

O centro de projeção é chamado centro de câmera ou centro óptico. A reta perpendicular ao plano de imagem que passa pelo centro de câmera é chamada de eixo principal ou raio principal da câmera, e o ponto onde o eixo principal encontra o plano de imagem é chamado de ponto principal. O plano paralelo ao plano de imagem que contém o centro de câmera é chamado de plano principal da câmera.

### 2.5.2 Projeção Central em Coordenadas Homogêneas

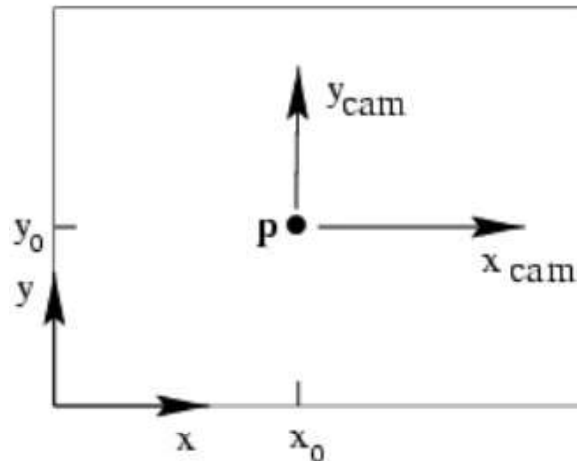
Representando os pontos tridimensionais e os pontos da imagem por vetores de coordenadas homogêneas, pode-se expressar a projeção central como um mapeamento linear entre estes vetores. Desta forma, a Eq. 15 pode ser escrita como uma multiplicação matricial:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & & 0 \\ & f & 0 \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

A matriz na expressão acima pode ser escrita como  $diag(f, f, 1)[I|0]$ , onde  $diag(f, f, 1)$  é uma matriz diagonal e  $[I|0]$  representa uma matriz dividida em um bloco  $3 \times 3$  (matriz identidade) e um vetor-coluna de zeros. Sendo  $\mathbf{X}$  o ponto tridimensional representado pelo vetor homogêneo  $(X, Y, Z, 1)^T$ , e  $\mathbf{x}$  o ponto da imagem representado pelo vetor homogêneo  $(fX, fY, Z)^T$ , e definindo  $P$  como a matriz homogênea  $3 \times 4$ , escreve-se a Eq. 16 de forma compacta como  $\mathbf{x} = P\mathbf{X}$ . Assim, define-se a matriz de projeção da câmera para o modelo de projeção central de câmera de orifício como  $P = diag(f, f, 1)[I|0]$ .

### 2.5.3 Deslocamento do Ponto Principal

A Eq. 15 assume que a origem do sistema de coordenadas no plano da imagem está sobre o ponto principal. Na prática, esta condição pode não se aplicar, conforme ilustrado na Figura 13.



**Figura 13– Coordenadas de imagem  $(x, y)$  e de câmara  $(x_{cam}, y_{cam})$ .**  
**Fonte: Adaptado de Hartley, Zisserman (2003)**

Assim, pode-se generalizar a Eq. 15 como:

$$(X, Y, Z)^T \rightarrow (fX/Z + x_0, fY/Z + y_0)^T \quad (17)$$

onde o ponto  $(x_0, y_0)$  representa as coordenadas do ponto principal. Em coordenadas homogêneas tem-se:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} fX + x_0 \\ fY + y_0 \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & x_0 & 0 \\ & f & y_0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Chama-se matriz de calibração da câmara a matriz definida por:

$$K = \begin{bmatrix} f & x_0 \\ & f & y_0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

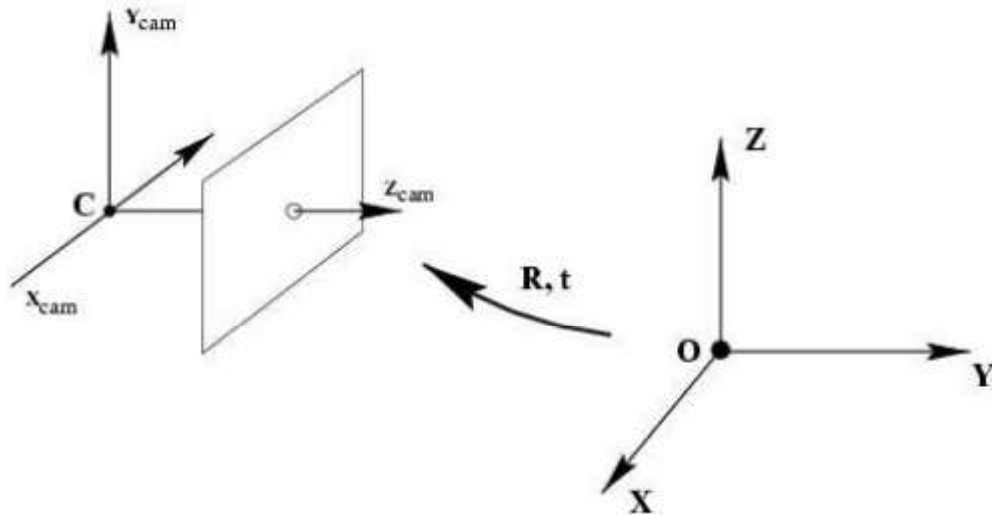
Assim, a forma resumida da Eq. 18 é dada por:

$$\mathbf{X} = K[I|0]\mathbf{X}_{cam} \quad (20)$$

onde  $\mathbf{X}_{cam} = (X, Y, Z, 1)^T$ , indicando que o ponto está representado no sistema de coordenadas Euclidiano, cuja origem coincide com o centro de câmara e cujo eixo Z coincide com o eixo principal. Este sistema de coordenadas é chamado de sistema de coordenadas de câmara.

### 2.5.4 Rotação e Translação de Câmera

Em geral, pontos 3D são descritos em relação a um sistema de coordenadas Euclidiano diferente do sistema de coordenadas de câmera, chamado de sistema de coordenadas global. Os dois sistemas de coordenadas estão relacionados por rotação dos eixos e translação da origem, conforme ilustrado na Figura 14.



**Figura 14— Transformação entre os sistemas de coordenadas global e da câmera**  
 Fonte: Hartley, Zisserman (2003)

Se  $\tilde{\mathbf{X}}$  é um vetor não-homogêneo de três elementos representando as coordenadas de um ponto no sistema de coordenadas global, e  $\tilde{\mathbf{X}}_{\text{cam}}$  representa o mesmo ponto no sistema de coordenadas da câmera, então pode-se escrever  $\tilde{\mathbf{X}}_{\text{cam}} = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{C}})$ , onde  $\tilde{\mathbf{C}}$  representa as coordenadas do centro de câmera no sistema de coordenadas global, e  $\mathbf{R}$  é uma matriz de rotação  $3 \times 3$  representando a orientação do sistema de coordenadas de câmera. Utilizando coordenadas homogêneas, tem-se:

$$\mathbf{X}_{\text{cam}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} \quad (21)$$

Utilizando a Eq. 21 em conjunto com a Eq. 20 tem-se:

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}\mathbf{R}[\mathbf{I} | -\tilde{\mathbf{C}}]\mathbf{X} \quad (22)$$

onde o ponto  $\mathbf{X}$  é expresso no sistema de coordenadas global. A Eq. 22 representa o mapeamento realizado pela câmera de orifício de forma mais generalizada, expresso matricialmente por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{R}[\mathbf{I} | -\tilde{\mathbf{C}}] \quad (23)$$

Nota-se que a câmara de orifício geral da Eq. 23 tem 9 graus de liberdade: 3 provenientes de  $K$  (os elementos  $f$ ,  $x_0$  e  $y_0$ ), 3 de  $R$ , e 3 de  $\tilde{C}$ .

Os parâmetros provenientes de  $K$  são chamados de parâmetros intrínsecos, da câmara. Os parâmetros provenientes de  $R$  e  $\tilde{C}$ , que relacionam a posição e a orientação da câmara no sistema de coordenadas global, são chamados de parâmetros extrínsecos, ou orientação externa da câmara. Em geral, é conveniente ocultar a referência ao centro de câmara e representar a transformação de coordenadas globais para coordenadas de câmara por  $\tilde{X}_{cam} = R\tilde{X} + t$ , onde  $t = -R\tilde{C}$ . Neste caso a matriz de câmara é dada por:

$$P = K[R|t] \quad (24)$$

## 2.6 CORREÇÃO DA DISTORÇÃO RADIAL

A correção da distorção radial deve ser aplicada na etapa correta do processo de projeção: a distorção devido à lente ocorre durante a projeção 3D para o plano de imagem, de acordo com a Eq.16. Em seguida, a matriz de calibração  $K$  reflete a escolha de coordenadas da imagem, relacionando as posições no plano de imagem com as coordenadas de pixel.

Desta maneira, é necessário que a correção da distorção radial seja feita antes de qualquer outra análise na imagem.

Sejam  $(\tilde{x}, \tilde{y})^T$  as coordenadas de imagem de um ponto 3D  $X$  sob uma câmara de orifício ideal (sem distorção), medidas em múltiplos da distância focal, e  $X_{cam}$  o ponto 3D expresso em coordenadas de câmara, relacionadas às coordenadas globais pela Eq. 22. A partir da Eq. 20 tem-se  $(\tilde{x}, \tilde{y}, 1)^T = [I|0]X_{cam}$ . O ponto verdadeiramente projetado corresponde ao deslocamento radial do ponto linear, de forma que a distorção radial (ou distorção de lente) pode ser modelada por:

$$\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} = \mathcal{L}(\tilde{r}) \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (25)$$

onde o ponto  $(\tilde{x}, \tilde{y})^T$  é a posição ideal na imagem (segundo projeção linear), e o ponto  $(x_d, y_d)^T$  é a posição real na imagem, com distorção radial. A função  $\mathcal{L}(\tilde{r})$  fornece o fator de distorção em função do raio  $\tilde{r}$  (distância radial em relação ao centro:  $\sqrt{x_d^2 + y_d^2}$ ).

Em coordenadas do pixel, pode-se escrever a correção da distorção radial como:

$$\hat{x} = x_c + \mathcal{L}(r)(x - x_c) \quad \hat{y} = y_c + \mathcal{L}(r)(y - y_c) \quad (26)$$

onde  $(x, y)^T$  são coordenadas reais do ponto na imagem,  $(\hat{x}, \hat{y})^T$  são coordenadas corrigidas,  $(x_c, y_c)^T$  são coordenadas do centro da distorção radial, e  $r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$ . Se a relação de aspecto não for unitária, é necessário corrigir seu efeito no cálculo de  $r$ . Após esta correção, a relação entre as coordenadas  $(\hat{x}, \hat{y})^T$  e as coordenadas do ponto 3D correspondente será a de uma câmera projetiva linear.

A função  $\mathcal{L}(r)$  só está definida para valores positivos de  $r$ , sendo que  $\mathcal{L}(0) = 1$ . Aproxima-se uma função arbitrária  $\mathcal{L}(r)$  por uma expansão de Taylor  $\mathcal{L}(r) \approx 1 + k_1 r + k_2 r^2 + k_3 r^3 + \dots$ . Os coeficientes para correção radial  $\{k_1, k_2, k_3, \dots, x_c, y_c\}$  são considerados como parte da calibração interna da câmera. Geralmente, utiliza-se o ponto principal como centro da distorção radial, ainda que não seja necessário que coincidam exatamente. Tal correção, em conjunto com a matriz de calibração, especifica o mapeamento de um ponto da imagem para um raio no sistema de coordenadas de câmera.

## 2.7 ESTEREOSCOPIA

A estereoscopia está relacionada à capacidade de enxergar ou analisar objetos em três dimensões, isto é, de perceber a profundidade. O princípio de funcionamento da maioria dos dispositivos estereoscópicos é o oferecimento de imagens distintas ao olho esquerdo e direito do observador, proporcionando sensação de profundidade, tal qual quando se observa um objeto real (SISCOUTTO et al., 2004). Ou seja, é o processo onde se utiliza duas imagens em ângulo e posições diferentes, para que seja possível a captação de imagens que possam fornecer informações sobre três dimensões.

Na estereoscopia, cada câmera possui seu plano de imagem, assim para se analisar informações de um objeto que está presente nas duas imagens, deve se correlacionar as informações obtidas por cada sensor.

A condição de correspondência dos pontos, e a determinação do ponto desejado no espaço, que serão detalhados nos tópicos a seguir, são baseadas em princípios trigonométricos, e dependem das características de cada sistema. Os

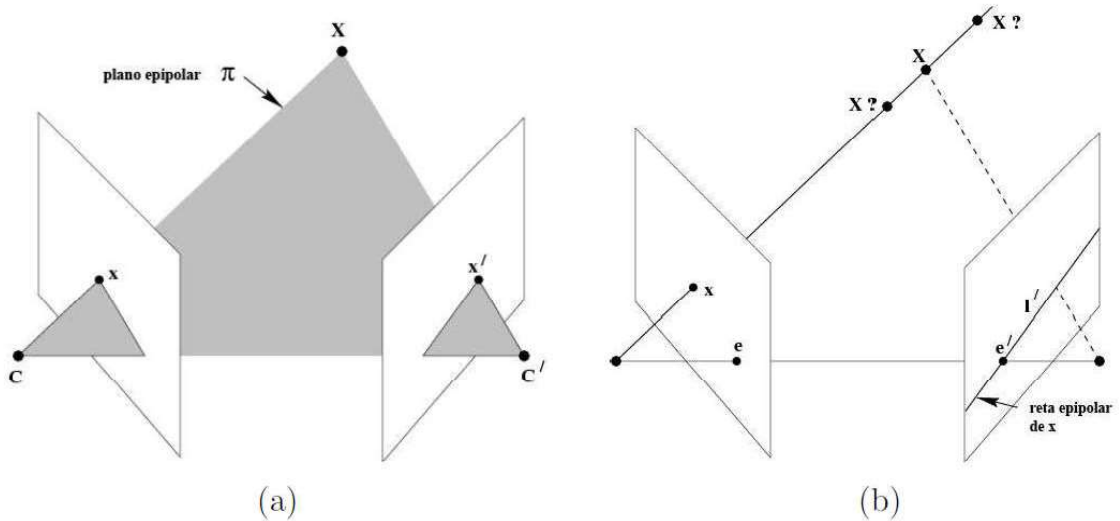


princípios detalhados para a determinação da correspondência podem ser encontrados em Pilu, (1997); Zhang, (1997); França, (2003); Gallis, (2004); Hartley, Zisserman, (2003); Karlstroem, (2007); Davies, (2012); Esteves, Feitosa, Fernandes, (2012) e Gomes, (2012).

### 2.7.1 Geometria Epipolar

A geometria epipolar entre duas imagens é essencialmente a geometria da intersecção dos planos de imagem com o feixe de planos cujo eixo é a reta base entre as imagens – esta é definida pelos centros das câmeras (HARTLEY, ZISSERMAN, 2003).

Dado um ponto  $X$  no espaço tridimensional, suas imagens segundo duas câmeras distintas são:  $x$  para a primeira e  $x'$  para a segunda. Os pontos  $X$ ,  $x$  e  $x'$  são coplanares e formam um plano denominado  $\pi$ , conforme ilustrado na Figura 15a. Os raios das projeções inversas de  $x$  e  $x'$  cruzam-se no ponto  $X$ , sendo que estes raios são coplanares, pertencentes também ao plano  $\pi$ . Esta propriedade tem grande importância para a determinação de pontos correspondentes entre as imagens. Supondo que apenas o ponto  $x$  é conhecido, determina-se o plano  $\pi$  a partir da reta base e do raio da projeção inversa de  $x$ . Como o raio da projeção inversa de  $x'$  (desconhecido) também pertence a  $\pi$ , então  $x'$  pertence à reta  $I'$ , formada pela intersecção entre  $\pi$  e o segundo plano de imagem. Esta reta  $I'$  é a imagem do raio da projeção inversa de  $x$  na segunda cena. Desta forma, o ponto correspondente a  $x$  está restrito à reta  $I'$ , conforme ilustrado na Figura 15b.



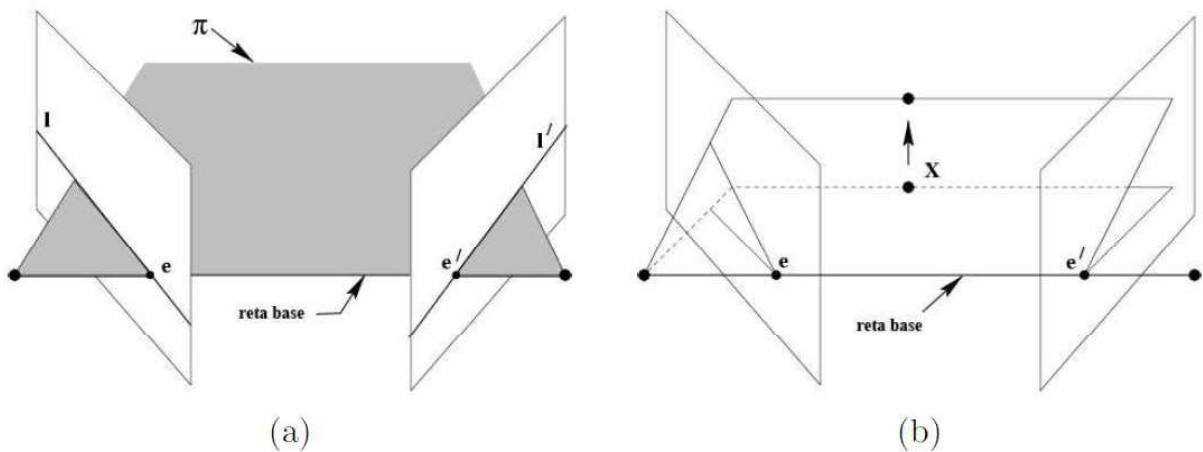
**Figura 15 – Geometria de Pontos Correspondentes. (a) Plano Epipolar. (b) Reta Epipolar**  
 Fonte: Adaptado de Hartley, Zisserman (2003)

De acordo com Karlstroem (2007), as entidades geométricas presentes na geometria epipolar são os epipolos (ponto  $e$  e  $e'$ ), o plano epipolar ( $\pi$ ) e as retas epipolares ( $l$  e  $l'$ ). As Figuras 15 e 16 ilustram estes elementos, que são definidos a seguir:

**Epipolo:** ponto de intersecção da reta base com o plano de imagem. De maneira equivalente, o epipolo é a projeção do centro de câmara de uma imagem na outra.

**Plano epipolar:** plano que contém a reta base. Existe um feixe de planos epipolares determinado pela reta base.

**Reta epipolar:** intersecção de um plano epipolar com o plano de imagem. Todas as retas epipolares de uma imagem passam pelo epipolo desta imagem.



**Figura 16 – (a) Relação entre plano epipolar, reta base, epipolos e retas epipolares. (b) Feixe de planos epipolares**

Fonte: Adaptado de Hartley, Zisserman (2003)

### 2.7.2 Matriz Fundamental

A matriz fundamental é a representação algébrica da geometria epipolar entre duas imagens, e pode ser deduzida da relação entre um ponto em uma imagem e sua reta epipolar na outra imagem.

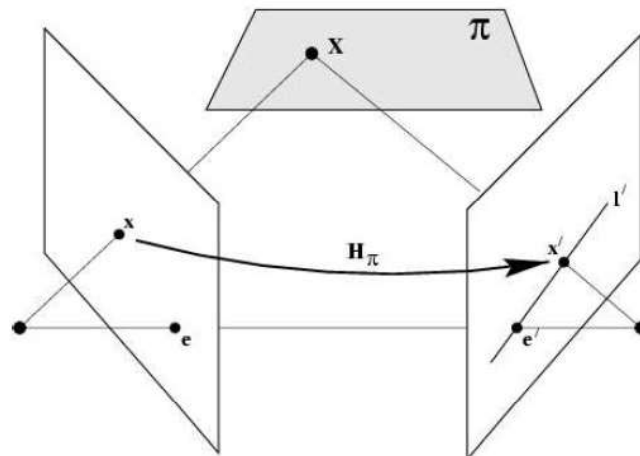
Ainda em relação a Figura 15, percebe-se que para cada ponto  $x$  em uma imagem existe uma reta epipolar  $I'$  na outra imagem, e qualquer ponto  $x'$  da segunda imagem correspondente a  $x$  deve pertencer à reta epipolar  $I'$ . A reta epipolar é a projeção na segunda imagem do raio que parte do ponto  $x$  e passa pelo centro de câmera  $C$  da primeira imagem. Desta forma, estabelece-se uma relação  $x \rightarrow I'$  entre um ponto de uma imagem e a reta epipolar correspondente na outra imagem. Esta relação é uma correlação (singular), que representa uma transformação projetiva de pontos para retas, representada por uma matriz denominada matriz fundamental.

Considerando um plano  $\pi$  que não contenha nenhum dos centros de câmera, o ponto  $X$  é a intersecção deste plano com o raio passando pelo primeiro centro de câmera e pelo ponto  $x$  da primeira imagem. Como  $X$  está sobre o raio correspondente a  $x$ , o ponto  $x'$  projetado na segunda imagem deve estar sobre a reta epipolar  $I'$ , conforme ilustrado na Figura 15b. Os pontos  $x$  e  $x'$  são ambos imagens do ponto  $X$ . O conjunto de todos os pontos  $x_i$ , com  $i$  de 1 ao número de pontos da primeira imagem e os correspondentes  $x'_i$  da segunda imagem são projetivamente equivalentes, uma vez que cada um é projetivamente equivalente ao ponto  $X_i$  pertencente ao plano  $\pi$ . Assim, define-se uma homografia 2D  $H_\pi$  que mapeia cada  $x_i$  ao seu correspondente

$x'i$ , conforme ilustrado na Figura 16. A reta epipolar  $I'$  passando por um ponto  $x'$  e pelo epipolo  $e'$  é dada por  $I' = e' \times x' = [e']_x x'$  (a notação  $[a]_x b$  denota o produto vetorial  $a \times b$ ). Como  $x' = H_\pi x$ , tem-se:

$$I' = [e']_x H_\pi x = Fx \quad (27)$$

Assim, a matriz fundamental  $F$  pode ser escrita como  $F = [e']_x H_\pi$ , onde  $H_\pi$  é a relação de transferência de uma imagem para a outra através de um plano  $\pi$  qualquer (Figura 17). Ademais, como  $[e']_x$  tem posto 2 e  $H_\pi$  tem posto 3,  $F$  é uma matriz singular de posto 2. Geometricamente,  $F$  representa uma relação entre o plano projetivo bidimensional da primeira imagem e o feixe de retas epipolares passando por  $e'$ . Desta forma, a matriz fundamental representa um mapeamento do espaço projetivo bidimensional para o espaço projetivo unidimensional, e portanto tem posto 2.



**Figura 17 – Homografia 2D entre pontos correspondentes**  
 Fonte: Adaptado de Hartley, Zisserman (2003)

A principal propriedade da matriz fundamental é a chamada condição de correspondência, que é determinada como: “para qualquer par de pontos correspondentes  $x \leftrightarrow x'$  em duas imagens, a matriz satisfaz a condição  $x'^T F x = 0$ ” (Karlstroem, 2007).

Se os pontos  $x$  e  $x'$  são correspondentes, então  $x'$  está sobre a reta epipolar  $I' = Fx$  correspondente ao ponto  $x$ . Assim,  $x'^T I' = 0$ , e portanto,  $x'^T F x = 0$ . Assim, quando os raios definidos por estes pontos são coplanares, os pontos apresentam condição suficiente para serem considerados correspondentes.

### 2.7.3 Cálculo da Matriz Fundamental

O cálculo da matriz fundamental é realizado a partir da condição de correspondência  $\mathbf{x}'^T F \mathbf{x} = 0$ , para qualquer par de pontos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$ . Dado um conjunto que contenha suficientes pontos correspondentes  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ , a condição de correspondência pode ser usada para calcular a matriz  $F$ .

Para  $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$  e  $\mathbf{x}' = (x', y', 1)^T$ , cada par de pontos correspondentes determina uma equação linear em função dos elementos de  $F = f_{ij}$ , conforme descrito na Eq.28, onde  $i$  são as linhas e  $j$  as colunas da matriz  $F$ :

$$x'x f_{11} + x'y f_{12} + x' f_{13} + y'x f_{21} + y'y f_{22} + y' f_{23} + x f_{31} + y f_{32} + f_{33} = 0 \quad (28)$$

Chamando de  $\mathbf{f}$  o vetor de nove elementos, composto pelos coeficientes de  $F$ , a Eq. 28, pode ser expressa como  $(x'x, x'y, x', y'x, y'y, y', x, y, 1)^T \mathbf{f} = 0$ . A partir de um conjunto de  $n$  pares de pontos correspondentes, obtém-se um sistema de equações lineares, conforme o descrito na Eq. 29:

$$A\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x'_1 x_1 & x'_1 y_1 & x'_1 & y'_1 x_1 & y'_1 y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n x_n & x'_n y_n & x'_n & y'_n x_n & y'_n y_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (29)$$

A matriz  $A$  representa um sistema de equações lineares homogêneo, e  $\mathbf{f}$  pode ser determinado a menos de um fator de escala. Para que exista uma solução,  $A$  deve ter posto máximo igual a oito, caso o posto seja igual a 8, a solução é única, determinada pelo gerador do espaço nulo à direita de  $A$ . Se os pontos correspondentes são inexatos, devido a ruídos em suas coordenadas,  $A$  pode ter posto igual a nove, caso em que a solução é determinada por mínimos-quadrados. Neste caso,  $\mathbf{f}$  corresponde ao vetor singular referente ao menor valor singular da decomposição em valores singulares de  $A = UDV^T$ , que minimiza  $\|A\mathbf{f}\|$ , sob a condição de  $\|\mathbf{f}\| = 1$ . Esta minimização representa apenas a solução de melhor ajuste ao conjunto de pontos, não havendo relação deste critério com medidas tomadas nas imagens, portanto não tem significado físico.

### 2.7.4 Câmeras Canônicas

Dados um vetor 3D qualquer  $\mathbf{v}$  e um escalar não nulo  $\lambda$ , a forma geral de matrizes de câmera canônicas, correspondente à matriz fundamental  $F$  é dada na Eq. 30:

$$P = [I|0]$$

$$P' = [[\mathbf{e}']_{\times}F + \mathbf{e}'\mathbf{v}^T|\lambda\mathbf{e}'] \quad (30)$$

Assim como se define que  $P$  fica centrada sobre a origem do sistema de coordenadas, de maneira a simplificar as equações, é adotada uma escolha conveniente, onde  $\lambda = 1$  e  $\mathbf{v} = (0,0,0)^T$ . Portanto as matrizes  $P$  e  $P'$  são então definidas na sua forma canônica na Eq 31:

$$P = [I|0]$$

$$P' = [[\mathbf{e}']_{\times}F|\mathbf{e}'] \quad (31)$$

### 2.7.5 Triangulação

Este tópico discorre sobre como determinar a posição de um ponto no espaço tridimensional a partir de duas vistas, diferentes da cena.

Conhecido o par de câmeras  $(P, P')$  e um par de pontos correspondentes  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$ , que satisfazem a condição de correspondência  $\mathbf{x}'^T \cdot F \cdot \mathbf{x} = 0$ , então o ponto  $X$  pode ser determinado por triangulação linear. Para as duas imagens, tem-se  $\mathbf{x} = P\mathbf{X}$  e  $\mathbf{x}' = P'\mathbf{X}$ , e estas equações podem ser combinadas para formar um sistema linear homogêneo  $A\mathbf{X} = 0$  (HARTLEY, ZISSERMAN, 2003).

Inicialmente, elimina-se o fator de escala homogêneo através do produto vetorial, resultando em três equações para cada ponto de imagem, duas das quais são linearmente independentes. No caso da primeira imagem,  $\mathbf{x} \times P\mathbf{X} = 0$ , e  $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$  tem-se a Eq. 32:

$$x(p^{3T}\mathbf{X}) - (p^{1T}\mathbf{X}) = 0$$

$$y(p^{3T}\mathbf{X}) - (p^{2T}\mathbf{X}) = 0 \quad (32)$$

$$x(p^{2T}\mathbf{X}) - y(p^{1T}\mathbf{X}) = 0$$

Onde os vetores  $p^{iT}$  representam as linhas da matriz  $P$ . Fazendo o mesmo procedimento para a segunda imagem, e fazendo uso das equação linearmente independentes de cada situação, uma equação da forma  $A\mathbf{X} = 0$  pode então ser composta, conforme a Eq. 33:

$$A\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x(p^{3T}) - (p^{1T}) \\ y(p^{3T}) - (p^{2T}) \\ x'(p'^{3T}) - (p'^{1T}) \\ y'(p'^{3T}) - (p'^{2T}) \end{bmatrix} \mathbf{X} = 0 \quad (33)$$

A matriz  $A$  é composta de duas equações de cada imagem, resultando em quatro equações para as quatro variáveis homogêneas. Trata-se de um sistema de equações sobre determinado, uma vez que a solução é dada a menos de um fator de escala. Portanto, a Eq. 33 pode ser resolvida através da SVD (decomposição em valores singulares) de  $A$ , e a solução  $X$  corresponde ao vetor relativo ao menor valor singular de  $A$ .

### 2.7.6 Erro de Reprojção

A partir dessa reconstrução projetiva obtida por triangulação, os pontos do espaço projetivo podem ser então reprojados nas imagens geradas pela matriz projetiva de câmera obtida em cada situação.

Para cada ponto reprojado, é então calculada a distância em relação à projeção original, para um ponto  $i$ , conforme a Eq. 34:

$$d = \sqrt{(x_R - x)^2 + (y_R - y)^2} \quad (34)$$

Em que  $x$  e  $y$ , representam as coordenadas da projeção original, enquanto  $x_R$  e  $y_R$ , representam as coordenadas das reprojções, encontradas a partir da condição de correspondência. Logo,  $d$  é o valor do erro de reprojção que é determinado em pixels (GOMES, 2012).

## 2.8 PROCESSAMENTO DE SINAL

Após a extração das informações relevantes das imagens, obtemos sinais de deslocamento em função do tempo, estes sinais podem ser então processados de maneira a pronunciar comportamentos do sinal original.

O sinal carrega em si informações de um ponto a outro. O processamento de sinal deve ser baseado em representação, manipulação e transformação do sinal e as informações que este carrega (HAYES, 1996).

Um procedimento muito utilizado é transformar os dados obtidos em espectros. O espectro mais comum na análise modal é a FRF (Função Resposta na Frequência, do inglês *Frequency Response Function*). Já o PSD (Densidade espectral de potência, do inglês *Power Spectral Density*) é um dos tipos de espectro, o qual é muito utilizado para a realização da análise modal baseada apenas na resposta. De acordo com

Stoica, Moses (2005), a densidade espectral estima como a energia total é distribuída através da frequência.

A vantagem de se utilizar o sinal no domínio da frequência é que o sistema não necessita ser excitado a uma determinada frequência específica no tempo. Assim, é possível utilizá-lo mesmo se o sistema estiver sujeito a uma excitação a qual compreenda várias ondas de diferentes frequências, tal como em um ruído branco (excitação aleatória Gaussiana) ou um impulso. Utilizando-se do recurso da transformada de Fourier, é possível então descobrir como o sistema responde a várias frequências (OPPENHEIM, 1989).

A maneira de se obter a resposta na frequência é utilizar a FFT (Transformada Rápida de Fourier, do inglês *Fast Fourier Transform*). Assim, o PSD pode ser definido então como a transformada de Fourier da sequência de autocorrelação.

A utilização de dados no domínio da frequência é importante principalmente para a análise modal, pois no domínio da frequência é possível observar comportamentos, de maneira mais didática, que no domínio do tempo (STOICA, MOSES, 2005).

## 2.9 ANÁLISE MODAL

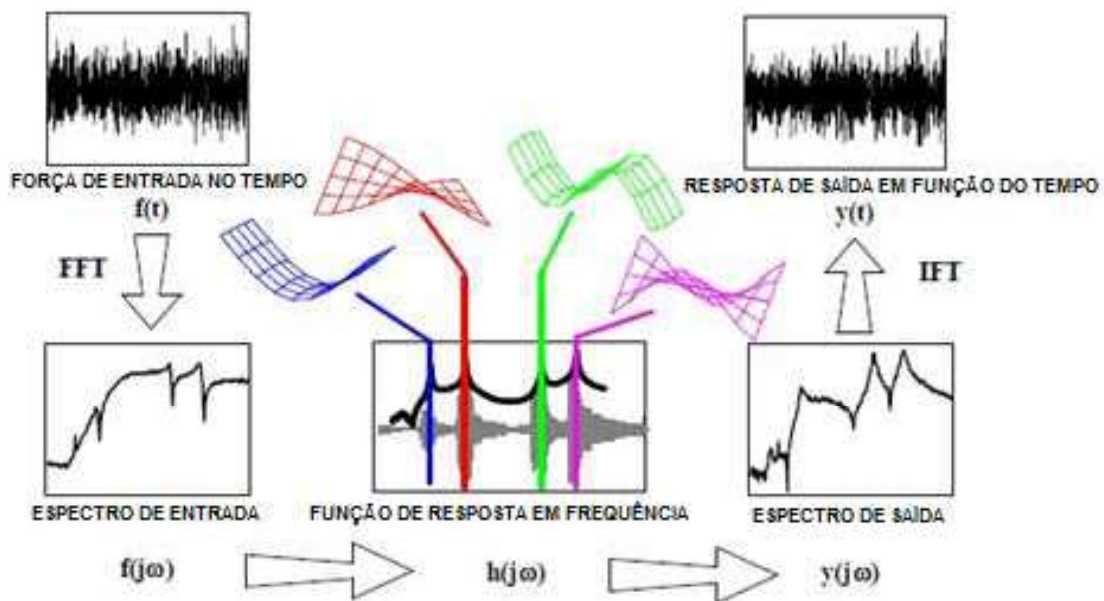
A análise modal foi o início para o grande avanço ocorrido nas últimas décadas na área de análise de estruturas, e nos dias atuais já existem vários métodos, numéricos e experimentais, eficientes para este tipo de análise (BATHE, WILSON, 1976; ZIENKIEWICZ, 1985; SALGADO, 2012).

Análise modal é o processo onde se descreve uma estrutura em termos de suas características naturais, que são frequência, amortecimento e modos de vibrar, estas são as propriedades dinâmicas (AVITABILE, 2001). A determinação destes parâmetros é sustentada por três hipóteses básicas, as quais são empregadas na análise modal para investigar o comportamento dinâmico de uma estrutura, a primeira hipótese seria a linearidade do comportamento dinâmico, isto é a resposta da estrutura para uma combinação de forças aplicadas simultaneamente, sendo esta equivalente à soma das respostas de cada força atuando individualmente; a segunda hipótese seria o fato de ser invariável no tempo, isto é, os parâmetros físicos da estrutura são constantes, e a última hipótese se baseia no fato de ser observável, ou



seja, é possível adquirir dados que contenham informações suficientes para determinar o comportamento dinâmico do modelo (BORGES, 2006).

Geralmente, os sistemas que atendem às hipóteses básicas já citadas, são estruturas lineares contínuas, e estas podem ser representadas por modelos matemáticos lineares obtidos a partir da discretização da estrutura em elementos conectados rigidamente por nós (PRZEMIENIECKI, 1968). Cada equação de equilíbrio associada a cada força descreve o movimento de um grau de liberdade da estrutura discretizada e o resultado é um conjunto de equações acopladas. Se uma estrutura pode ser idealizada dessa forma, ela pode ser excitada com uma dada força, e tanto a resposta quanto à própria força são obtidas simultaneamente. Então, os parâmetros modais podem ser estimados a partir das relações entrada-saída, ou seja, as respectivas funções de transferência, conforme ilustrado na Figura 18.



**Figura 18 - Esquema da estrutura de um sistema entrada/saída**  
 Fonte: Adaptado de AVITABILE (2001).

Estes modelos matemáticos lineares, como análise modal teórica por elementos finitos, problema do autovalor, e outros, podem ser encontrados em Przemieniecki, (1968); Craig, (1981); Allemang, (1982); Ewins, (1984); Heylen, Lammens, Sas, (1997); Thorby, (2008) e Rao, (2009).

### 2.9.1 Análise Modal Baseado Apenas na Resposta

Quando métodos convencionais de identificação dos parâmetros modais são adotados, utiliza-se a Função de Resposta em Frequência (FRF), e o conhecimento tanto do valor da entrada do sinal, quanto o valor da sua saída, é requerido. Porém, tratando-se de condições reais de operação, na maioria das vezes não é possível medir o valor de entrada, ou seja, apenas os dados de resposta operacional da estrutura são mensuráveis e o processo de identificação do sistema necessitará basear-se apenas no valor das respostas medidas no próprio sistema; esta identificação obtida sem utilizar as informações de excitação é conhecida como análise modal baseada apenas na resposta, ou ainda análise modal operacional (LARDIES; MINH-HGI, 2011).

Segundo Borges (2006), os métodos de identificação dos parâmetros modais utilizando apenas a resposta no domínio da frequência podem ser agrupados basicamente em duas classes: o método básico no domínio da frequência (BFD) ou *Peak Picking* – seleção de pico (PP) e o método de Decomposição no Domínio da Frequência (FDD).

Nos dois métodos mencionados acima, a identificação dos parâmetros modais é feita por meio das funções de densidade espectral da resposta do sistema. A partir destas funções se constrói uma matriz de densidade espectral, onde as funções de densidade espectral de potência ficam posicionadas na diagonal principal, enquanto nas outras posições se encontram as funções de densidade espectral cruzada. Portanto, com a matriz de densidade espectral determinada, o procedimento para se encontrar os parâmetros modais do sistema é ligeiramente diferente em cada um dos métodos.

De acordo com Felber (1993), no método *Peak Picking* é feita à normalização e a média das funções de densidades espectral, a fim de se obter a média normalizada da densidade espectral de potência (ANPSD), que em um primeiro momento, mostra todos os picos de ressonância correspondente aos modos de vibrar do sistema. A identificação das frequências desses picos fornece uma primeira ideia das frequências dos modos de vibrar do sistema.

Apesar de as forças de entrada não serem medidas neste método, este empecilho é superado pela utilização de uma técnica derivada da identificação de parâmetros modais convencional, onde um determinado grau de liberdade é adotado

como sendo um ponto de referência, e em sequência é utilizado como sendo a “entrada” do sistema. As relações obtidas a partir do sinal de referência e do sinal dos pontos de medida do sistema são utilizadas para obter as estimativas das funções de transmissibilidade e coerência. Esta relação serve, não somente para ajudar na identificação das ressonâncias, mas também para estimar os modos operacionais de deflexão. De fato, estes modos não são os modos de vibrar do sistema, mas de qualquer forma, a diferença entre eles torna-se insignificante para sistemas com modos bem separados e levemente amortecidos (BORGES, 2006).

Segundo Brincker et al., (2000), no método de decomposição no domínio da frequência (FDD), para cada frequência discreta a matriz de densidade espectral é decomposta em valores e vetores singulares utilizando a decomposição em valores singulares (SVD). A matriz de densidade espectral é decomposta para a contribuição dos diferentes modos da estrutura, em que cada pico de frequência contribui para a resposta do sistema. Neste caso, o primeiro vetor singular para o pico de frequência do k-ésimo modo é a própria estimativa deste modo, e a partir da análise dos valores singulares é possível identificar a função de densidade espectral relacionada com um dado grau de liberdade correspondente ao k-ésimo modo de vibrar do sistema.

Para Borges (2006), uma das principais vantagens das técnicas baseadas no domínio da frequência é a sua facilidade de interação “amigável” com o usuário, sua utilização é simples e dá ao usuário um “sentimento” físico dos dados usados. Entretanto, as técnicas no domínio da frequência, tal como a *Peak Picking*, que são baseadas no simples processamento do sinal utilizando a Transformada Discreta de Fourier, fornecem uma estimativa razoável da frequência natural e dos modos de vibrar, apenas se os modos forem bem separados. Para modos próximos, elas podem apresentar alguma dificuldade na identificação, mesmo que, os modos possam ser identificados, a estimativa fica contaminada. Outro aspecto é a limitação na estimativa da frequência devido aos problemas relacionados com a resolução do espectro de potência, assim como a incerteza na estimativa do amortecimento.

Conforme apresentado em Brincker et al., (2000), a utilização da técnica de Decomposição no Domínio da Frequência reduz esses inconvenientes associados com as técnicas clássicas, ainda mantendo a características de ser “amigável” com o usuário.

### 2.9.2 Coeficiente MAC

O coeficiente MAC (Coeficiente de Correlação Modal, do inglês *Modal Assurance Criterion*) é um coeficiente de correlação entre dois autovetores quaisquer, que irá fornecer uma medida de consistência, isto é grau de linearidade entre estimativa de vetores modais (ALLEMANG, 2003; ALLEMANG, 2002).

Então, o MAC é um método de comparar facilmente estimativas de vetores modais, provenientes de fontes diferentes. Por exemplo, os vetores modais de uma análise realizada por elementos finitos podem ser comparados com aqueles determinados experimentalmente, bem como vetores modais determinados com diferentes métodos experimentais de estimação de parâmetros modais (ALLEMANG, 2002).

O coeficiente MAC é calculado pela Eq. 35:

$$MAC_{(i,j)} = \frac{|\{\Phi_i^a\}^T \{\Phi_j^e\}|^2}{(\{\Phi_i^a\}^T \{\Phi_i^a\})(\{\Phi_j^e\}^T \{\Phi_j^e\})} \quad (35)$$

Onde:

$\{\Phi_i^a\}$  – vetor modal simulado referente ao modo  $i$ ;

$\{\Phi_j^e\}$  – vetor modal experimental referente ao modo  $j$

O coeficiente MAC é uma quantidade escalar, independente se os autovetores forem complexos ou não; então, o MAC irá correlacionar os pares de vetores modais assumindo valores entre 0 e 1 (FARRAR, WORDEN 2013 apud JULIANI 2014; ALLEMANG, 2002; KLOUTSEY, DINIZ e VILLA, 2006). Um valor do MAC entre 0,9 a 1,0 irá indicar uma boa proximidade dos modos, e caso o valor encontrado seja 1,0 isso irá indicar que os vetores modais são idênticos, havendo uma perfeita correlação entre eles. Por outro lado, se o valor for perto de zero, conclui-se que os modos de vibrar são diferentes, isto é, sem nenhuma correlação (ALLEMANG, 2002; KLOUTSEY, DINIZ e VILLA, 2006). Essencialmente, o coeficiente MAC fornece a medida do cosseno do ângulo entre os vetores modais (FARRAR, WORDEN, 2013 apud JULIANI, 2014).

A eficácia deste método de comparação irá depender da quantidade e também da qualidade dos resultados obtidos experimentalmente, por exemplo, a determinação das deformadas modais necessitará de números de pontos de medidas tão maior quanto à complexidade da estrutura e também ao número de modos a serem medidos (ALLEMANG, 2002; KLOUTSEY, DINIZ, VILLA, 2006).

Como este é um critério onde o confronto dos vetores modais resulta em um único escalar, com certeza ocorre uma perda de sensibilidade para pequenas variações nos vetores modais.

A representação do coeficiente MAC pode ser realizada de diferentes maneiras, como em Allemang (2003), onde o coeficiente MAC é demonstrado em uma tabela, e cada modo da situação referência é comparado com todos os modos das outras situações. Já Juliani (2014), utiliza uma matriz para representar o MAC, onde, assim como na tabela feita por Allemang (2003), o valor da situação referência é comparado com todas as outras, e desta maneira os vetores modais de mesmo modo são representados na diagonal principal da matriz, e devem ter valores próximos de 1 para que forneçam uma boa correlação, enquanto nas outras posições os valores devem ser próximos a 0, pois teoricamente não há boa correlação entre modos diferentes.

### 3 EXPERIMENTOS REALIZADOS E RESULTADOS OBTIDOS

Este capítulo discorrerá sobre os experimentos realizados no decorrer do trabalho e o aparato experimental.

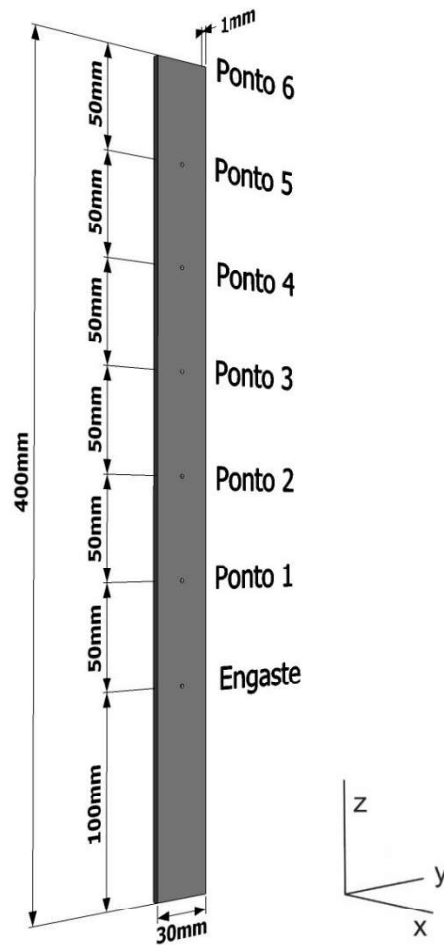
Em um primeiro momento foi realizado a análise modal de uma estrutura do tipo viga, engastada livre, sujeita a excitação provocada pelo escoamento de ar turbulento. A identificação dos parâmetros modais foi realizada utilizando quatro diferentes métodos.

Os métodos utilizados foram: análise modal numérica por elementos finitos, análise modal experimental convencional e com base apenas nas respostas, ambos utilizando acelerômetros como sensores de saída e análise modal com base apenas nas respostas utilizando uma câmera digital. Ao final, a presente metodologia de aquisição de dados foi avaliada com bases nos resultados obtidos.

Já em um segundo experimento foi realizada a aquisição de deslocamento em objetos em três dimensões, utilizando um sistema com duas câmeras iguais para capturar as imagens e correlacionar os alvos de interesse. Duas situações de deslocamentos foram avaliadas, para comparar os resultados, a fim de quantificar e qualificar a presente metodologia.

#### 3.1 EXPERIMENTO 1

Para a realização dos experimentos, foi utilizada uma barra de aço inoxidável engastada-livre, cujas características geométricas são mostradas na Figura 19. Destaca-se que, a densidade ( $\rho$ ) e o módulo de elasticidade ( $E$ ) foram encontrados experimentalmente, cujos valores são  $7953 \text{ kg/m}^3$  e  $195,8 \text{ Gpa}$  respectivamente.



**Figura 19 - Viga de aço inoxidável**  
**Fonte: Autoria própria**

Conforme mostrado na Figura 19, ao longo do comprimento da viga foram distribuídos seis pontos equidistantes, pontos 1-6. Tais pontos foram utilizados no presente trabalho como referência para a aquisições das respostas utilizando acelerômetros e o posicionamento dos alvos para identificação com a câmera digital.

### 3.1.1 Análise por Elementos Finitos

A viga foi modelada numericamente através do método de elementos finitos utilizando a teoria clássica de vigas de Euler Bernoulli (BATHE, 1976). A presente estrutura foi dividida em 6 elementos e 7 nós, com 3 graus de liberdade por nó, sendo dois de translação, x e y, e um de rotação em torno de z. Tal procedimento numéricos foi utilizado para identificação dos parâmetros modais, como frequências naturais e

modos próprios, para posterior confrontação com os resultados obtidos com as demais metodologias de aquisição e como base para o planejamento experimental.

Os resultados obtidos serão expostos e analisados posteriormente, em conjunto com os resultados encontrados nas metodologias experimentais.

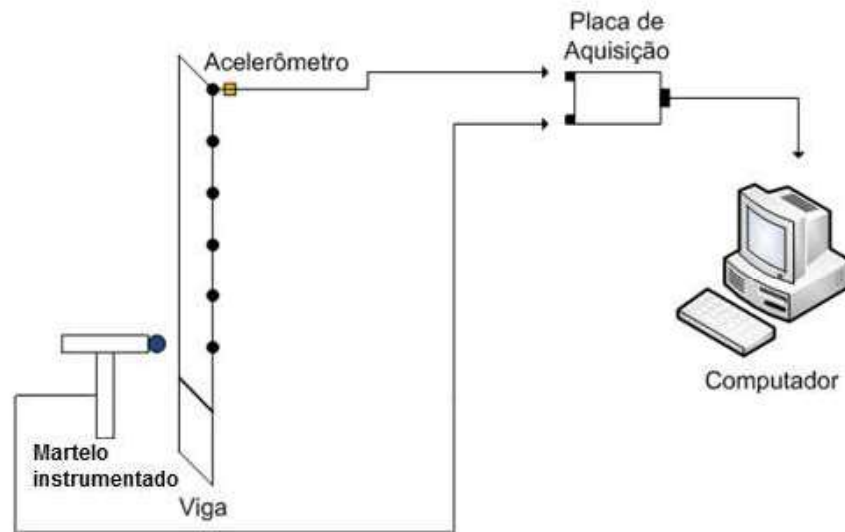
### 3.1.2 Análise Modal Convencional

No presente trabalho, foi utilizado um martelo instrumentado PCB Piezotronics modelo 086C01, cuja sensibilidade é de  $50 \text{ mV/lbf} \pm 15\%$ , para excitar o sistema com uma entrada impulsiva, aplicada ao ponto 1. Já as respostas da estrutura foram captadas com acelerômetros PCB Piezotronics modelo 352C22, cuja sensibilidade é de  $10 \text{ mV/g} \pm 15\%$  e a faixa de frequência de operação de  $1\text{-}10000 \text{ Hz} \pm 5\%$ , e posicionados nos pontos 1-6 identificados na Figura 19. O sistema de aquisição utilizado foi o Data Physics Quattro, o mesmo possui quatro entradas, duas saídas, e uma entrada exclusiva para tacômetro. O sistema possui um processador de sinal digital de 32 bit com ponto flutuante, e taxa de amostragem de 204,8 kHz em todos os canais simultaneamente, e filtros anti-aliasing integrais em todas entradas e saídas.

Foi definida uma frequência de amostragem de 130 Hz, definida com 800 linhas espectrais, o que inclui os dois primeiros modos de vibrar.

Na Figura 20 é mostrada esquematicamente o aparato experimental utilizado. Conforme evidenciado, os acelerômetros e o martelo instrumentado são conectados a um computador por meio do sistema de aquisição da Data Physics Quattro, e o *software* de gerenciamento Signal CalcAce.



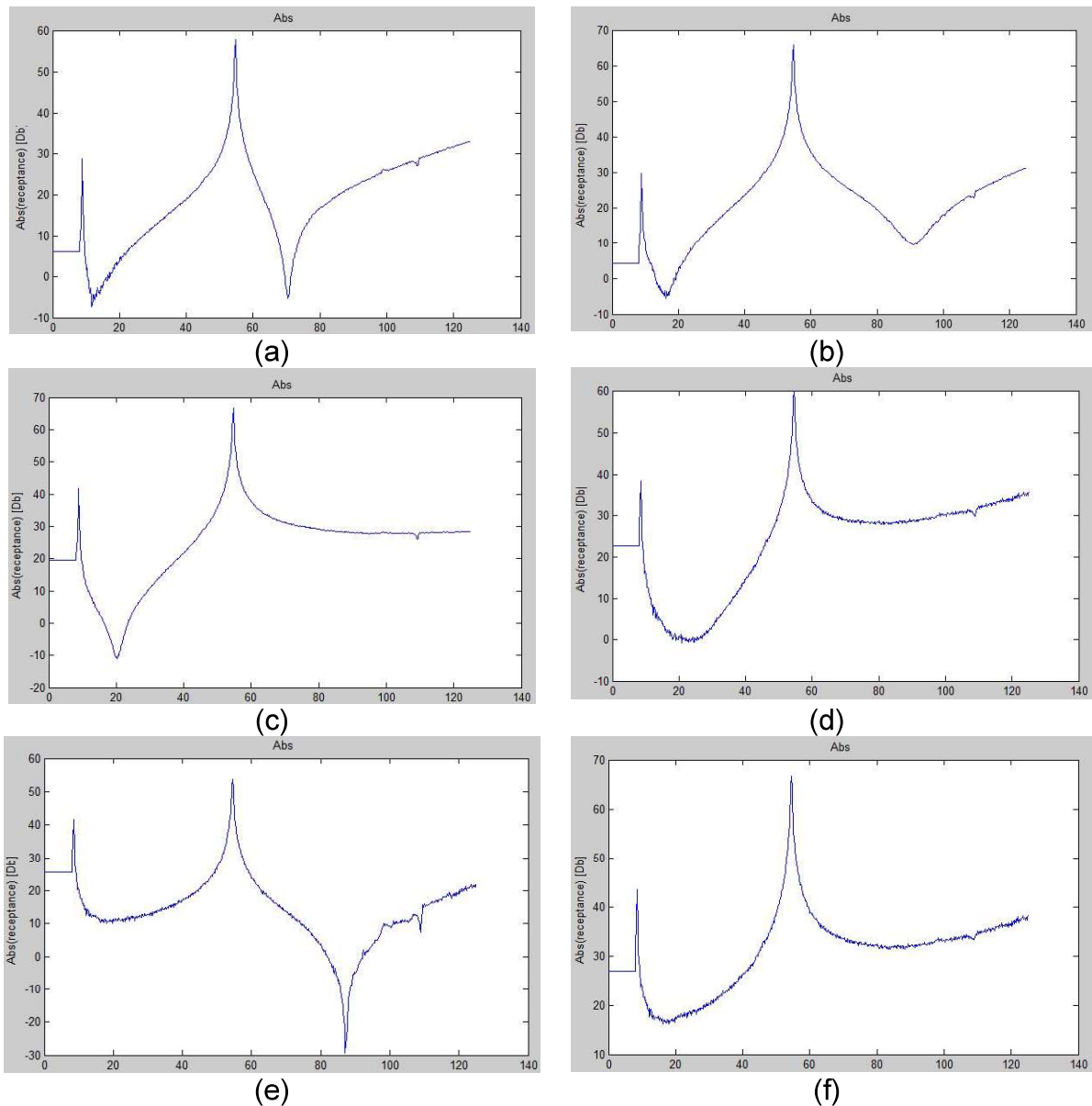


**Figura 20 – Esquema da instrumentação utilizada no ensaio experimental**

Fonte: Autoria própria

Posteriormente, as FRF's fornecidas pelo *software* computacional de aquisição foram utilizadas para alimentar as rotinas de identificação dos parâmetros modais da estrutura. No presente trabalho, utilizou-se o *software* EMA (Experimental Modal Analysis), que é um algoritmo de análise modal, implementado em ambiente *Matlab*®, capaz de identificar as frequências naturais, assim como, os modos próprios, utilizando métodos clássicos e de somente a resposta. Tal *software* foi desenvolvido no âmbito da Universidade Júlio de Mesquita Filho (UNESP/Ilha Solteira) e maiores informações sobre o algoritmo podem ser encontradas no trabalho de Borges (2006).

Na Figura 21 são apresentadas as FRF's obtidas neste experimento.



**Figura 21 – Funções de Resposta de Frequência (a) pontos 1-1; (b) pontos 1-2; (c) pontos 1-3; (d) pontos 1-4; (e) pontos 1-5 e (f) pontos 1-6.  
Fonte: Autoria própria**

Os parâmetros modais da estrutura foram identificados a partir das FRF(s) utilizando um método de identificação bem consolidado de análise modal clássica, o método Ibrahim (IBRAHIM, MIKULCIK, 1973). Os resultados obtidos através da presente análise serão discutidos em conjuntos aos demais nas próximas seções.

### 3.1.3 Análise Modal Baseada Apenas na Resposta

Na análise modal baseada apenas na resposta, a entrada do sistema é desconhecida. Dessa maneira é preciso buscar alternativas para a obtenção dos

parâmetros modais, através das técnicas que utilizam somente a resposta. Tais métodos implementados no algoritmo do EMA, consistem no método de identificação no domínio do tempo, baseado no modelo de espaço de estado denominado Identificação Estocástica de Subespaço (SSI), e o método baseado no domínio da frequência, denominado Decomposição no Domínio da Frequência (DDF).

No presente trabalho, optou-se por utilizar o método de Decomposição no Domínio da Frequência (DDF), cuja entrada do algoritmo de identificação é realizada através das densidades espectrais de potência. Outra característica desta metodologia de identificação, é que assume-se que a entrada da estrutura seja um ruído branco Gaussiano de média zero, caso esta hipótese não seja possível, e por exemplo, a estrutura seja excitado por um ruído rosa, a metodologia ainda produzirá uma boa aproximação (BORGES, 2006). Desta forma, optou-se por excitar a estrutura, idêntica a utilizada na seção 3.1.2, através de um fluxo de fluido turbulento, cuja característica aleatória, cumpre as exigências da metodologia de identificação.

Assim, a estrutura foi excitada por um ventilador industrial, da marca OTAM modelo LMS 355 ARR.4, de modo a simular a excitação de uma estrutura pelo vento, e os valores de resposta foram captados com acelerômetros, placa de aquisição e *software* já citados. A velocidade do escoamento foi definida a partir de um tubo de Pitot conectado a um manômetro em U, e através da Eq. 36, Equação de Bernoulli (WHITE, 1998).

$$V_{ar} = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho_{ar}}} \quad (36)$$

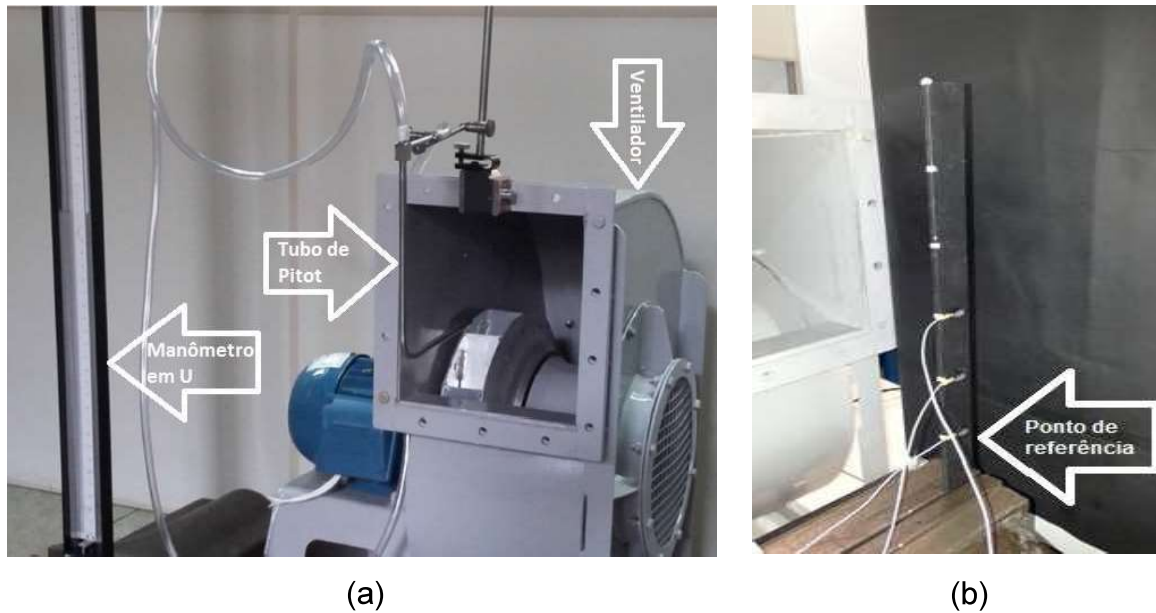
Onde:

$V_{ar}$  = Velocidade do ar;

$\Delta P$  = Diferença de Pressão;

$\rho_{ar}$  = Densidade do ar;

O valor medido no manômetro foi de 19mmca, ou seja, 186,32Pa. Utilizando a Eq. 36, encontra-se a velocidade do escoamento, a qual é 17,74m/s. A Figura 22a apresenta o aparato experimental utilizado para calcular a velocidade do escoamento.



**Figura 22 – (a) Aparato experimental para determinação da velocidade de escoamento. (b) Viga de metal com acelerômetros acoplados.**

Fonte: Autoria própria

Em seguida, para verificar se o escoamento é laminar ou turbulento, através da Eq. 37, calculou-se o número de Reynolds, o qual é da ordem de  $3 \times 10^4$ , ou seja, o escoamento é turbulento, pois de acordo White, (1998), um escoamento com número de Reynolds acima de  $10^3$  é considerado um escoamento turbulento.

$$Re = \frac{VxD}{\nu} \quad (37)$$

Onde:

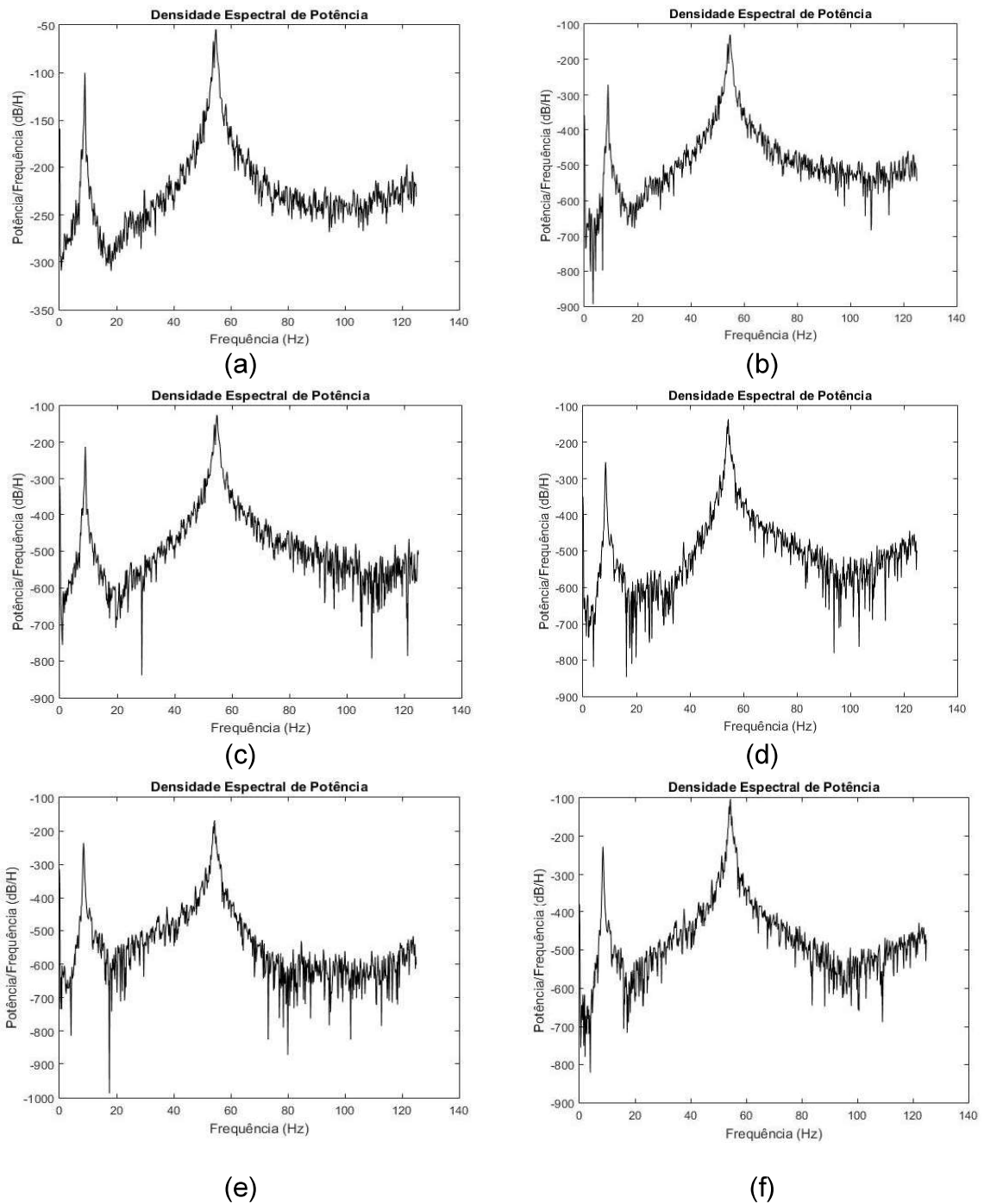
Re = Número de Reynolds;

V = velocidade do escoamento;

D = Comprimento característico;

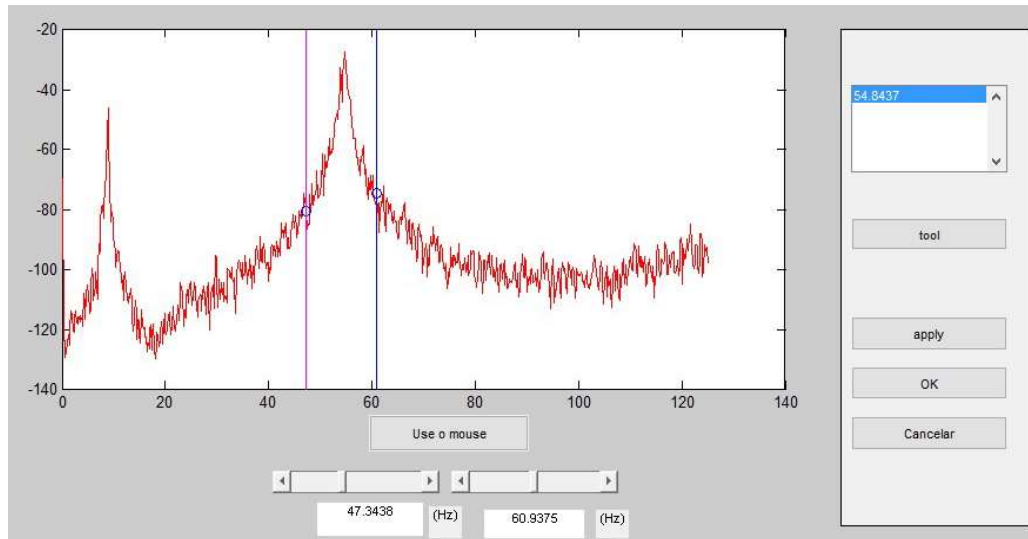
$\nu$  = viscosidade cinemática do fluido.

Conforme mostrado na Figura 22b, optou-se por definir como referência o ponto 1, para a aquisição das densidades espectrais cruzadas. Na figura 23a é apresentada a densidade espectral de potência do ponto 1, já nas Figuras 23b-f são mostradas as densidades espectrais cruzadas, obtidas a partir dos pontos 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente.



**Figura 23 – Densidades espectrais de potência obtidas, (a) PSD do ponto 1, de (b) a (f) CSD's entre o ponto 1 e o ponto 2,3,4,5,6 em ordem alfabética.**  
**Fonte: Aatoria Própria**

A partir das densidades espectrais, passa-se para a fase de identificação dos parâmetros modais, na Figura 24 é apresentada a densidade espectral e a interface gráfica do algoritmo de identificação.



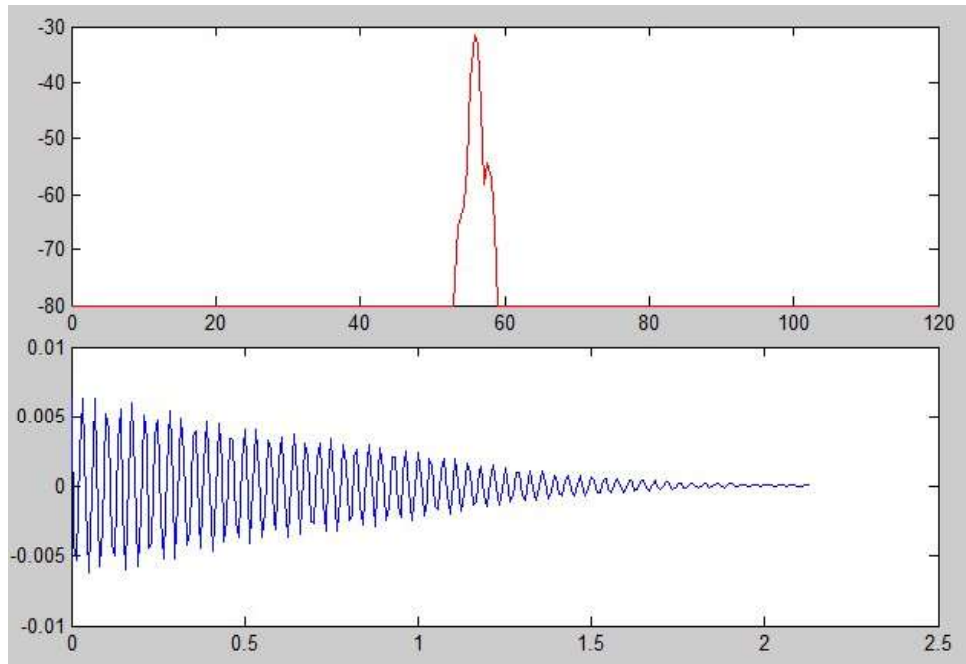
**Figura 24 - Densidade espectral da viga de aço inoxidável**  
**Fonte: Autoria Própria**

Selecionado o pico de interesse, foi calculada a decomposição em valores singulares (SVD) das respectivas funções de densidades para as linhas de frequências em torno do pico de ressonância.

Uma vez estimado o modo de vibrar referente ao pico de interesse, é feita uma busca dos vetores singulares, em torno do pico de frequência correlacionado com o modo. Essa correlação é definida para MAC-valores maiores que um dado valor pré-definido pelo usuário. Neste caso, o índice utilizado foi 0.5 e o processo termina quando é encontrado algum valor singular com correlação inferior a este índice (BORGES, 2006).

Cada vetor singular obtido tem um correspondente valor singular, os quais definem uma função de valores singulares, corresponde à função de densidade espectral de um sistema de um grau de liberdade para o respectivo modo.

Identificado à função de densidade espectral do sistema de um grau de liberdade, é possível obter o amortecimento do referido modo, transformando a função densidade espectral para o domínio do tempo, utilizando a transformada inversa de Fourier. O amortecimento é obtido com base no conceito de decremento logarítmico (BORGES, 2006). Para demonstrar o exposto o amortecimento encontrado do segundo modo de vibrar é demonstrado na Figura 25.



**Figura 25 - Amortecimento do segundo modo de vibrar**  
**Fonte: Autoria Própria**

Os resultados obtidos através da presente análise serão discutidos em conjuntos aos demais nas próximas seções.

#### 3.1.4 Análise Modal Baseada Apenas na Resposta Utilizando o Sensor Câmera

Primeiramente, foram colocadas placas negras nas paredes ao fundo do local das análises, para que as mesmas não interfiram no processamento das imagens. Em seguida pequenos pedaços padrões de fita branca foram colocados nos pontos da estrutura observada. O passo seguinte consistiu em colocar a câmera em um suporte, de modo que esta não sofra vibrações, focalizando o objeto de observação e iniciando a aquisição dos dados. A estrutura analisada foi excitada de forma análoga à mostrada na seção anterior.

O equipamento para realização das filmagens foi uma câmera digital (Casio), linha *High SpeedExilim*, modelo EX-ZR700BK, sensor CMOS, com possibilidade de alteração da frequência de captura, onde a mesma tem opções de captura que vão de 15 fps até 1000 fps, sendo que em maiores fps perde-se resolução. Além da câmera, foi necessário também um computador com o *software Matlab®* instalado, onde foram analisadas e processadas as imagens obtidas pelo sensor (câmera).

Na Figura 26, é possível observar o experimento utilizando a câmera digital em execução. Neste ensaio, a filmagem foi realizada à uma taxa de 240 quadros por segundos, cuja resolução, de acordo com as limitações da câmera, fica em 512x384 pixels. O tamanho de cada pixel foi calculado de acordo com um padrão branco posicionado no mesmo plano que a estrutura analisada. O padrão é um quadrado com lados de 1 in, possuindo então área de 1 in<sup>2</sup>. É então calculada a quantidade de pixels contidos neste quadrado, e assim, é determinado o tamanho de cada pixel da imagem. Neste experimento, cada pixel tem aproximadamente 0,74 mm. O tempo de aquisição foi de quatro segundos totalizando 960 quadros. Como na análise anterior, o ponto de referência utilizado foi o ponto 1, conforme evidenciado na Figura 26. Posteriormente à aquisição do vídeo, o mesmo foi processado por uma rotina implementada em *Matlab*®.



**Figura 26 – Experimento de análise modal baseada apenas na resposta, utilizando o sensor câmera**

Fonte: Aatoria Própria



### 3.1.4.1 Implementação do Algoritmo

O algoritmo implementado no presente trabalho, em ambiente *Matlab*®, importa arquivos de vídeo nos principais formatos existentes, dentre eles destaca-se MOV, AVI, MPEG, entre outros; e após a importação, a primeira operação realizada pelo algoritmo é o corte da imagem na seleção desejada, de forma a eliminar o excesso de informações desnecessárias, e por consequência diminuir o tempo de processamento computacional.

A rotina utiliza o sistema de cores RGB, e através da Eq. (1) a imagem é transformada em escala de cinza, e em seguida subtrai-se a camada da cor desejada nos alvos, se o mesmo for branco em um fundo preto este procedimento é desprezado, já na sequência aplica-se o limiar de corte (*thresholding*). Após o limiar de corte a imagem se torna binária.

Em seguida a imagem binária passa por operações morfológicas de maneira a remover ruídos e outras informações indesejadas. Assim, o resultado é uma imagem binária, onde os alvos ficam em branco (1) e o restante em preto (0). O próximo passo é calcular o centroide dos alvos, estes são estipulados pela intersecção das diagonais do menor retângulo que contém o alvo, e finalmente as posições dos centroides são armazenadas em uma matriz.

Estes procedimentos são realizados a cada quadro do vídeo, e assim, comparando os quadros, é possível analisar o deslocamento temporal dos alvos nas duas dimensões da imagem. Porém, estas medidas estarão referenciadas em pixels, desta forma torna-se necessário a conversão para uma unidade de medida de comprimento, que consiste em utilizar-se de um padrão com tamanho conhecido, o qual é colocado no mesmo plano da imagem e então com este valor da medida do padrão, dividir pela quantidade de pixels que o mesmo ocupa na imagem. Desta forma, foi possível determinar o tamanho de cada pixel e em consequência os deslocamentos dos alvos na unidade de medida desejada.

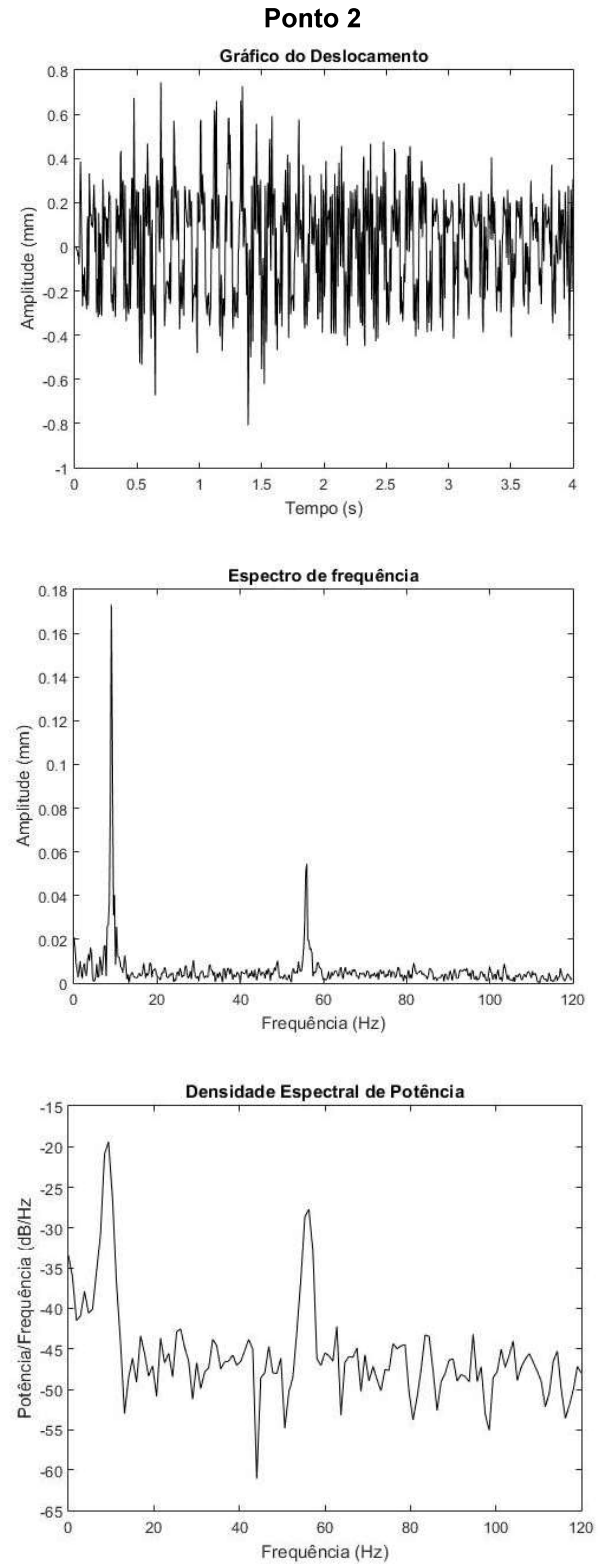
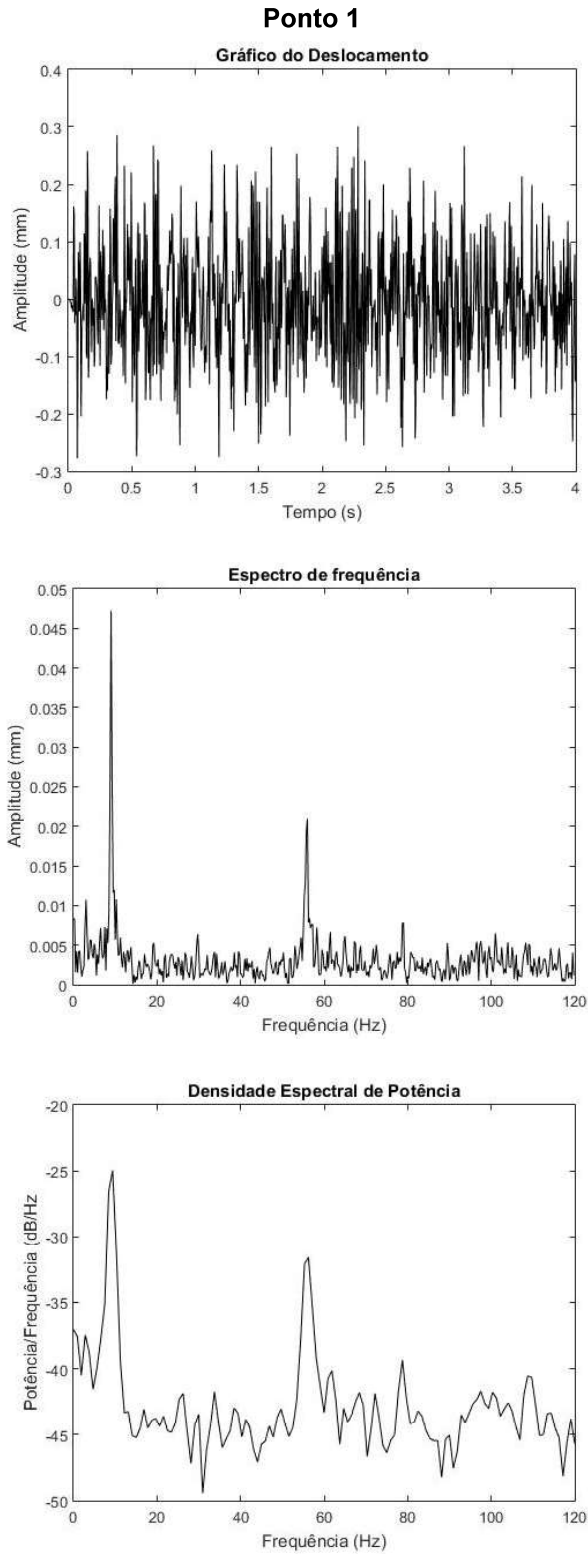
A partir da identificação dos deslocamentos dos alvos disposto na estrutura de interesse ao longo tempo, estes são manipulados matematicamente. Desta forma, são janelados, utilizando uma janela hanning, e seguida é gerado um auto espectro, através da transformada rápida de Fourier e construídas as densidades espectrais de potência (PSD's) e cruzadas (CSD's). Na Figura 27, está demonstrado um fluxograma dos principais passos da rotina do algoritmo desenvolvido.



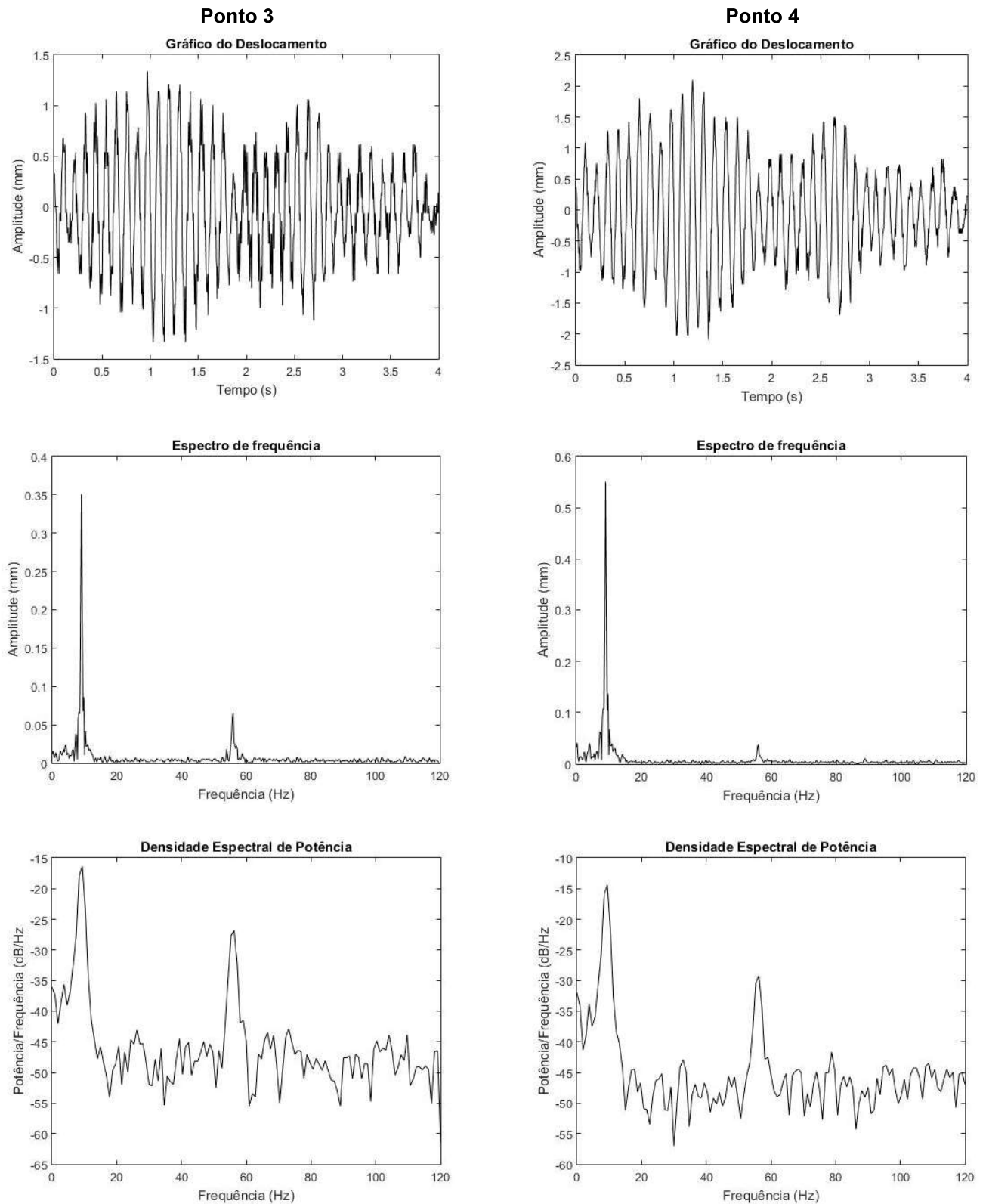
Figura 27 - Esquema do funcionamento da rotina computacional  
 Fonte: Autoria própria

#### 3.1.4.2 Respostas Encontradas pela Câmera

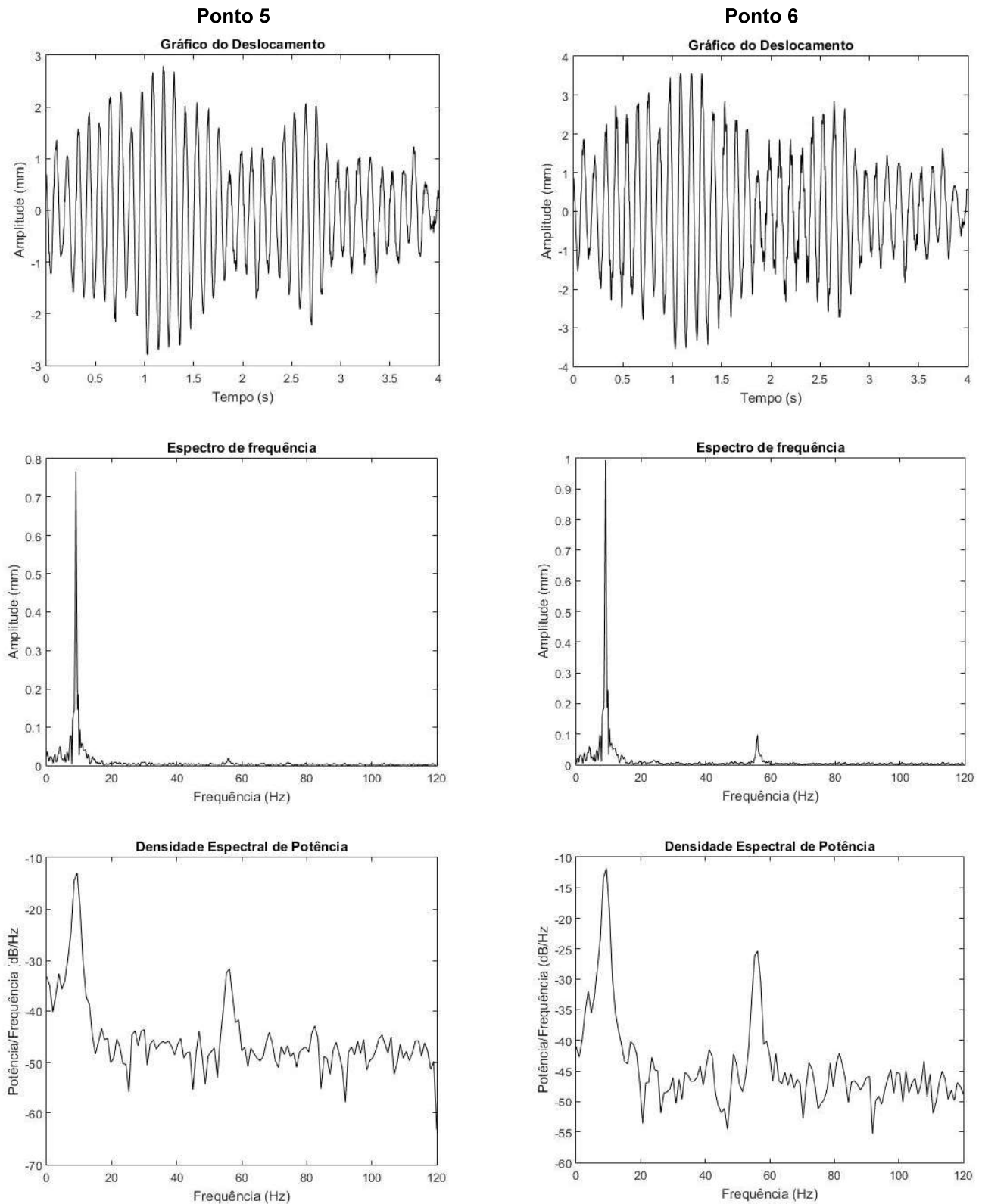
Neste tópico, serão apresentadas as respostas encontradas com a utilização do sensor câmera com a rotina demonstrada na Figura 27. As respostas da estrutura estão expostas nas Figuras 28, 29 e 30.



**Figura 28 – Resultados obtidos: ponto 1 e ponto 2**  
**Fonte: Autoria Própria**



**Figura 29 – Resultados obtidos: ponto 3 e ponto 4**  
**Fonte: Autoria Própria**



**Figura 30 – Resultados obtidos: ponto 5 e ponto 6**  
**Fonte: Autoria Própria**

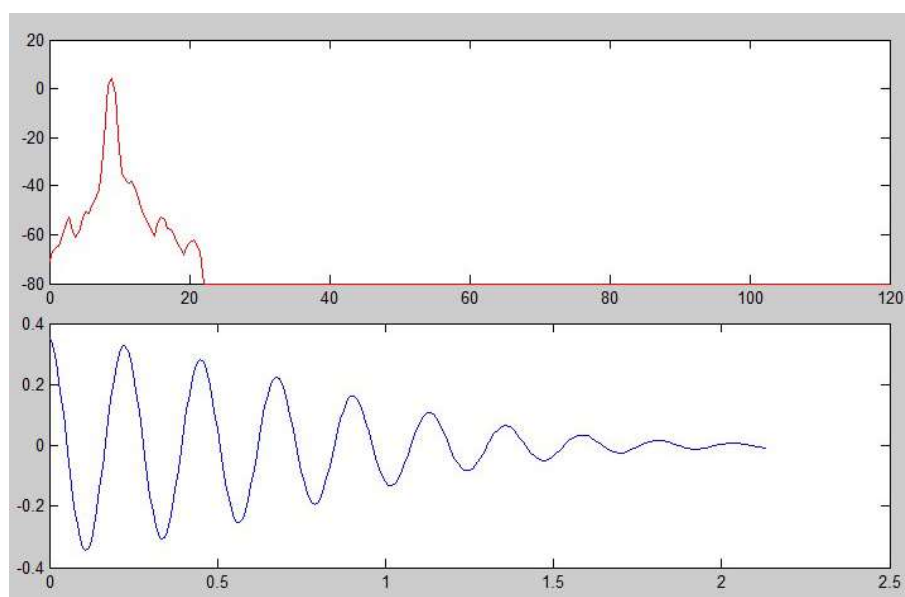
Nas Figuras 28, 29 e 30 observa-se os deslocamentos em função do tempo obtidos pela presente metodologia de identificação. Também, abaixo da resposta no

tempo, é exposto a resposta na frequência, obtida pela FFT do deslocamento. Por fim, ainda são mostradas as PSD e as CSD's obtidas a partir dos dados de deslocamento.

Analisando as Figuras 28, 29 e 30 percebe-se que, os deslocamentos captados próximos ao engaste, possuem amplitudes pequenas, e a resposta em frequência captada apresenta muito ruído. Acredita-se que, a presença do ruído seja principalmente devido à resolução das imagens capturadas pela câmera. Porém, os deslocamentos dos demais pontos são bem definidos e foi possível encontrar dois picos de frequência nos sinais dos pontos 1, 2, 3,4 e 6, podendo observar a influência dos dois primeiros modos de vibrar. No ponto 5, apenas um pico de frequência é mais pronunciado no seu espectro de frequência, e este fato ocorre provavelmente devido ao ponto se localizar próximo à uma região nodal do segundo modo de vibrar, porém na densidade espectral cruzada os dois picos são bem aparentes.

Assim como nos experimentos anteriores, os dados obtidos através da rotina implementada neste trabalho, são utilizados para subsidiar o EMA, de modo a obter os parâmetros modais da estrutura analisada. De forma análoga à análise modal baseada apenas na resposta utilizando acelerômetro, foi utilizado o método DDF para a determinação das características dinâmicas. Na Figura 31, é apresentada o pico selecionado, bem como seu respectivo amortecimento, obtidos através da rotina do EMA.

Os resultados obtidos por esta metodologia serão discutidos, juntamente com os obtidos pelas demais metodologias na seção seguinte.



**Figura 31 - Amortecimento da estrutura analisada, utilizando o sensor câmera**

**Fonte: Autoria Própria**

### 3.2 RESULTADOS - EXPERIMENTO 1

A análise modal de uma viga de aço inoxidável engastada-livre foi realizada numérica e experimentalmente. Para análise numérica, utilizou o método de elementos finitos, e para análise experimental, utilizou-se acelerômetros e uma câmera como sensor. Desta forma, para a identificação dos parâmetros modais foram utilizados métodos de análise modal convencional e utilizando somente a resposta.

Na Tabela 1, estão apresentados os valores das frequências naturais encontradas por cada método e na Tabela 2, os valores dos fatores de amortecimento encontrados pelos métodos experimentais.

**Tabela 1 – Frequências naturais (Hz)**

MODO	Frequência (Hz)				Erro Relativo (%)					
	A	B	C	D	AxB	AxC	AxD	BxC	BxD	CxD
1º	8,90	8,86	8,44	8,91	0,44	5,17	0,11	4,76	0,56	5,57
2º	55,81	54,73	54,38	55,78	1,93	2,56	0,05	0,64	1,92	2,57

**Fonte: Autoria Própria.**

**Tabela 2 – Fatores de amortecimentos**

MODO	B	C	D
1º	0,0062	0,0067	0,0127
2º	0,0024	0,0032	0,0056

**Fonte: Autoria Própria.**

Onde na tabela 1 e 2:

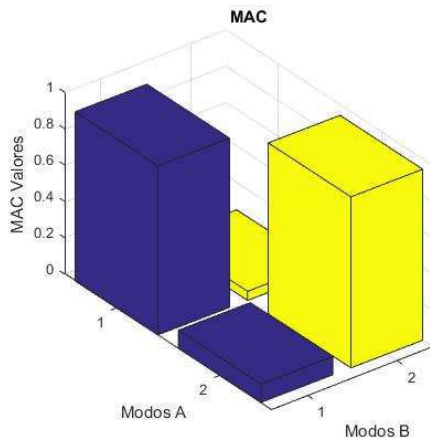
A – Análise por elementos finitos;

B – Análise modal convencional;

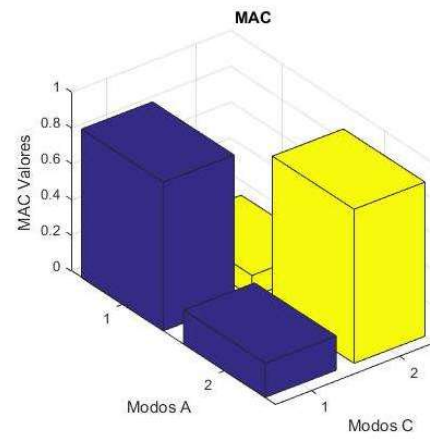
C – Análise modal com base apenas na resposta, feita com acelerômetro;

D – Análise modal com base apenas na resposta, feita com o sensor câmera;

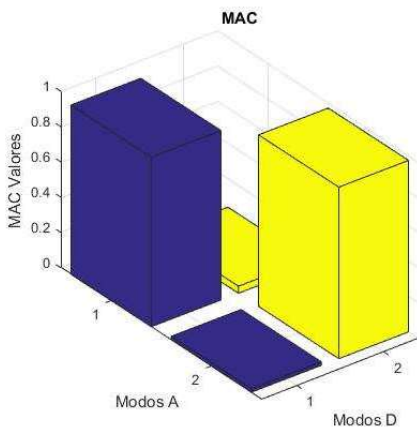
O coeficiente MAC foi então calculado para observar a correlação dos modos encontrados entre os diferentes métodos. Na Figura 31 é apresentado estas correlações por meio de gráficos de barras.



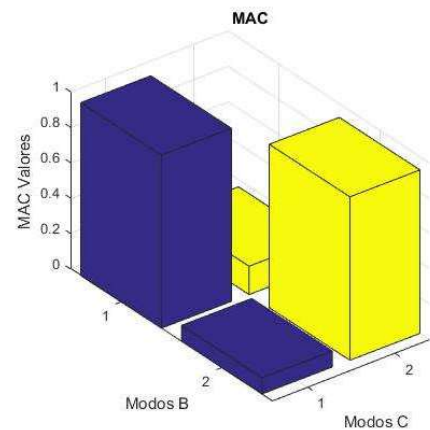
(a) Elementos Finitos vs Convencional



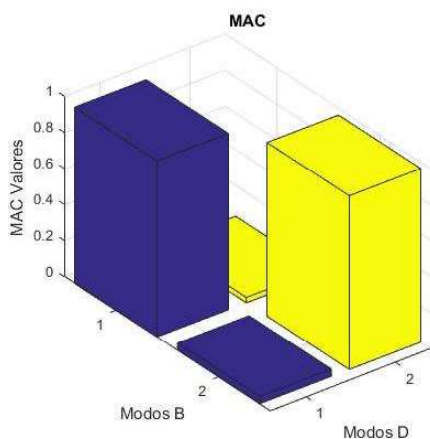
(b) Elementos Finitos vs Somente com a resposta



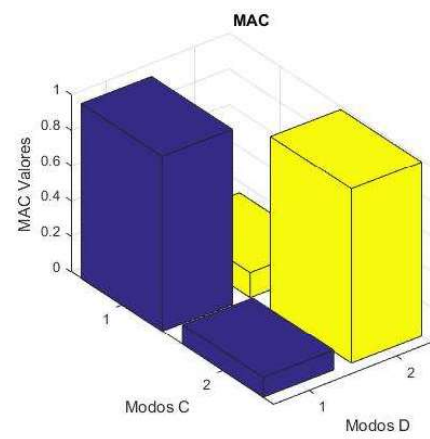
(c) Elementos Finitos vs Câmera



(d) Convencional vs Somete com a resposta



(e) Convencional vs Câmera



(f) Somente com a resposta vs Câmera

**Figura 32 – MAC-valores entre os diferentes métodos**  
**Fonte: Autoria Própria**



Os dois modos foram identificados em todos os métodos, com grande correlação entre eles conforme evidenciado na Figura 32. Analisando a Tabela 1, é possível perceber que os valores diferem, em termos absolutos, em menos de 0,47 Hz para o primeiro modo e menos de 1,43 Hz para o segundo modo. O erro percentual ficou um pouco mais acentuado no primeiro modo, com o maior valor de 5,57% devido ao valor de referência ser pequeno.

Ainda de acordo com a Tabela 1, nota-se que as maiores discrepâncias de valores ocorrem quando compara-se métodos em que se utilizou acelerômetros, com os métodos sem contato ou de simulação, acreditasse que este fato ocorreu principalmente devido a massa dos acelerômetros que influenciaram o comportamento dinâmico da estrutura, alterando levemente suas características modais. Na estrutura utilizada, este comportamento foi mais evidente devido à pequena massa da mesma.

Os Mac-valores de todos os casos ficaram muito próximos à 1 (um) em modos iguais e próximos a 0 (zero) para modos diferentes, havendo pequenas variações, comprovando assim que os modos encontrados pelos diferentes métodos foram os mesmos.

Apesar das limitações técnicas de cada método utilizado, é possível observar que, os resultados obtidos são consistentes, com pequenas variações entre os diferentes métodos.

Ao analisar a Tabela 2, nota-se uma grande dispersão encontrada nos valores das razões de amortecimento, identificadas pelos diferentes métodos. Tal fato, conforme mostrado na literatura (CRAIG JR, 1981, BORGES, 2006, THORBY, 2008), evidencia a grande dificuldade na identificação dos fatores de amortecimento.

### 3.3 EXPERIMENTO 2

No presente experimento foram realizadas medições de deslocamentos de um alvo fixado na ferramenta de um CNC, utilizando um sistema estéreo de câmeras, para a realização de medições em três dimensões.

No presente trabalho, optou-se por captar a imagem do alvo por meio de duas câmeras idênticas, de maneira simultânea, para se obter um campo de visão adequado e uma boa resolução. Desta maneira, o equipamento utilizado consistiu em

duas webcams da marca Logitech modelo c920 com resolução máxima em vídeo de 1920 x 1080 pixels a 30 fps, opção entre foco automático ou manual e conexão USB.

Na Figura 33a é apresentado o aparo experimental para a aquisição de imagens estéreas devidamente montado. Na figura 33b, é apresentada esquematicamente a distância entre as câmeras.



**Figura 33 - Suporte e Câmeras para filmagem estérea. (a) Suporte devidamente montado. (b) Esquema do posicionamento das câmeras**

Fonte: Aatoria Própria

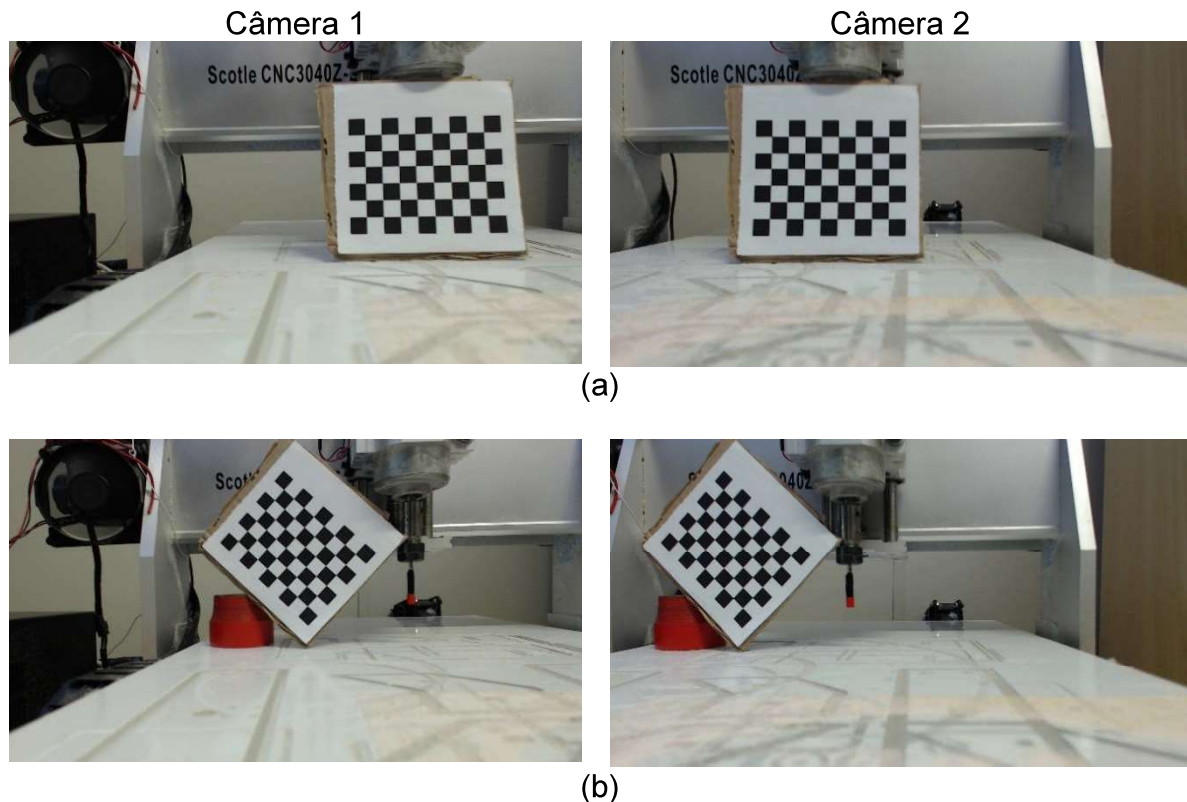
### 3.3.1 Calibração

Para que seja possível realizar medições precisas, o sistema deve ser calibrado, para que possam ser encontradas as correlações entre as imagens obtidas pelas duas câmeras, bem como a remoção de pequenas imperfeições de imagem devido as características intrínsecas construtivas de cada câmera.

Para este processo, foi utilizada a sub-rotina do *software* comercial *Matlab*®, para calibração de sistemas estéreos, denominada *stereoCameraCalibrator*. Durante a realização da calibração é necessário um modelo, com quadrados brancos e pretos, e tamanhos iguais, predefinidos. O padrão utilizado para a realização do trabalho continha quadrados perfeitos com lados de 10 mm.

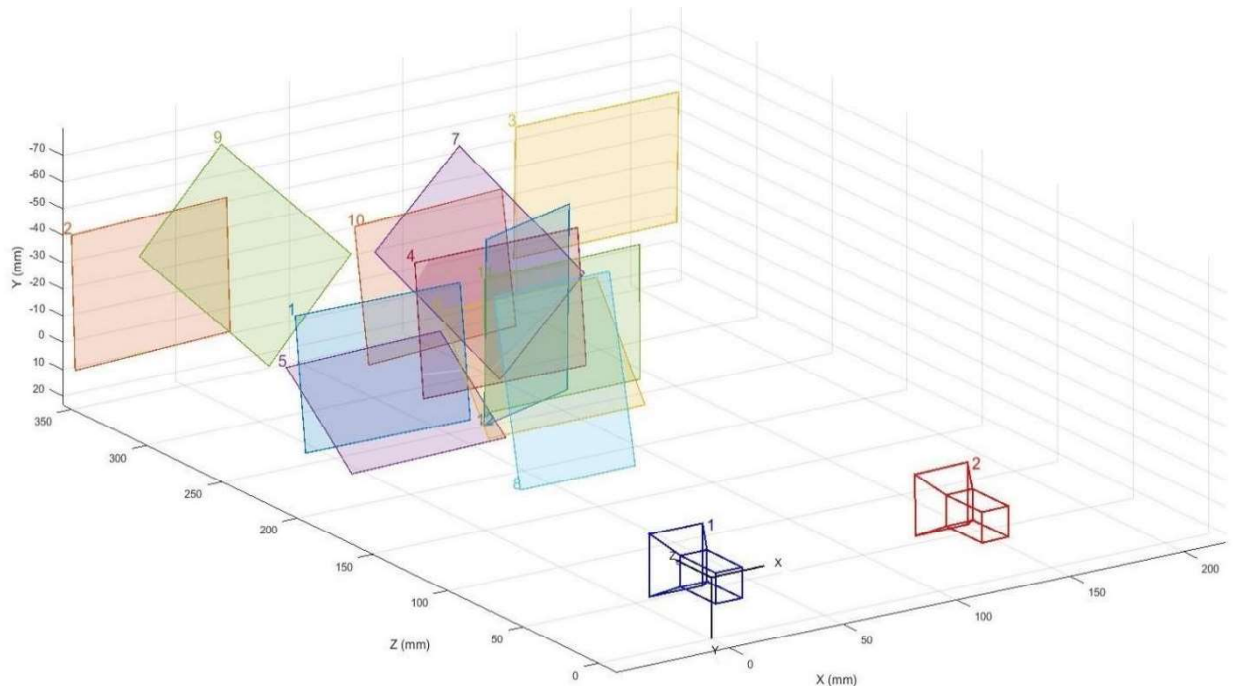
Assim, para a calibração, foram capturadas imagens do padrão em várias posições e angulações, com as duas câmeras. Para a realização do experimento, foram utilizadas doze pares de imagens estéreas. Na Figura 34 é apresentado dois pares de imagens utilizados no processo de calibração, o de número 2 e o de número 9, respectivamente. Para a realização do processo de calibração, também foi

necessário definir uma das câmeras como referência. No presente trabalho optou-se por definir a câmera à esquerda como referência, e partir deste momento serão denominadas Câmera 1 e Câmera 2, as câmeras a esquerda e a direita, respectivamente.



**Figura 34 – Pares estéreo de imagens utilizados no processo de calibração: (a) par estéreo 2. (b) par estéreo 9**  
**Fonte: Autoria Própria**

A aquisição das imagens para o processo de calibração, foi realizada com o aparato já posicionado para realização dos experimentos de deslocamento. Após alimentar a sub-rotina de calibração com as imagens das 12 distintas posições, a mesma gera os parâmetros de correlação e de correção entre as câmeras. Com esses dados foi possível então recriar cenas captadas pelo sistema estéreo e determinar posições de objetos na mesma. Na Figura 35 é apresentada um gráfico tridimensional das posições dos padrões numerados em cada imagem, em relação ao sistema, bem como a posição das câmeras e a definição do referencial. A origem do sistema de coordenadas global  $(X, Y, Z)$ , ficou definido como sendo no centro ótico da câmera 1 de maneira a simplificar os cálculos.



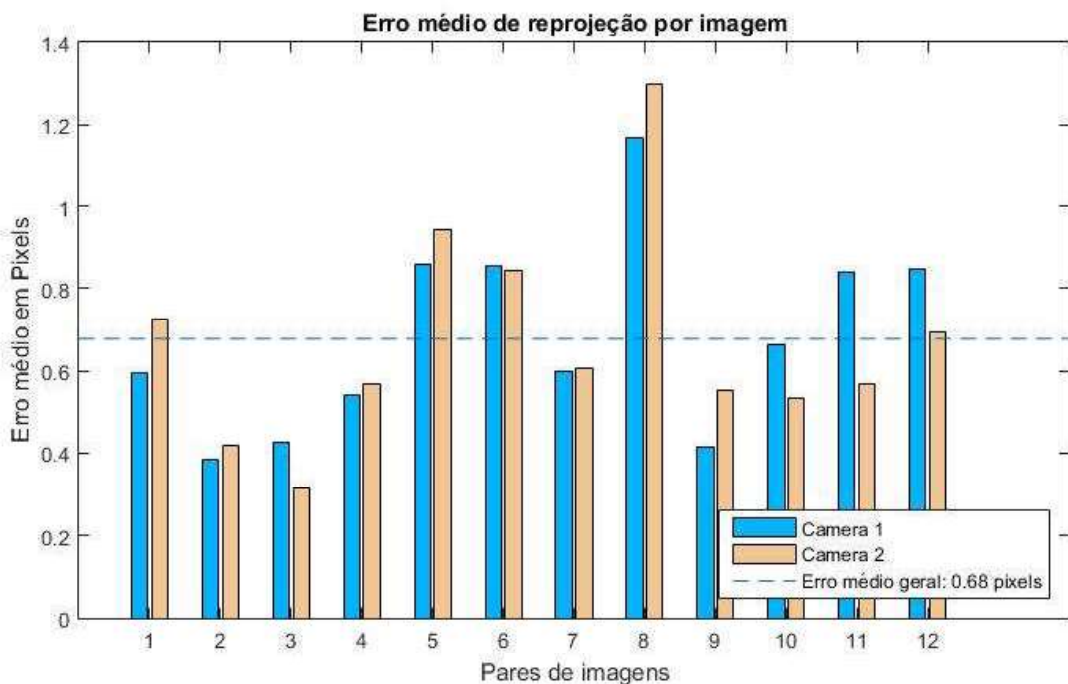
**Figura 35 - Posições dos padrões de calibração em relação ao sistema estéreo**  
**Fonte: Autora Própria**

No processo de calibração, através dos conceitos apresentados nas seções 2.4, 2.5, 2.6 e 2,7, o vetor de translação  $t$  e a matriz de rotação  $R$  (Eq. 5) da câmera 2 com relação à 1, bem como a matriz de transformação  $F$  através da Eq. 29, foram encontradas, e estão apresentadas na Eq. 38:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t} &= [-117.7772 \quad -0.3194 \quad 0.1644] \\
 \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 0.9998 & 0.0133 & -0.0117 \\ -0.0134 & 0.9999 & -0.0038 \\ 0.0117 & 0.0039 & 0.9999 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 7.6651e-10 & -7.6933e-7 & 7.6651e-10 \\ 8.2735e-8 & -2.3018e-7 & 0.0836 \\ 1.7931e-4 & -0.0821 & 0.2801 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{38}$$

Estes dados vão ao encontro com as informações da montagem do sistema, onde a distância mais significativa é a distância da câmera 2 em  $X$  com relação ao eixo definido no centro ótico da câmera 1, que foi encontrada sendo 117,7772 mm, a qual é praticamente a mesma que a distância entre os furos utilizados do suporte, que é de aproximadamente 120 mm, a diferença ocorre porque quando instaladas as câmeras, as mesmas não ficam exatamente sobre o centro do furo, o que causa uma pequena variação. Os demais valores do vetor  $t$ , os componentes em  $Y$  e  $Z$  da posição espacial da câmera 2, são próximos de zero, como era de se esperar.

O ponto encontrado na imagem da câmera 1, é projetado através da matriz fundamental  $F$  na imagem captada pela câmera 2. Porém, o ponto projetado não fica exatamente sobre o ponto correspondente na imagem 2, esta diferença é conhecida como erro de reprojeção, e o valor deste erro é dado em pixels. Portanto, imagens mais próximas ao sistema estéreo, tendem a ser mais diferentes entre si, desta maneira os valores do erro de reprojeção tendem a ser maiores. No processo de calibração foi definido um erro de reprojeção dos pontos do padrão utilizado, conforme visto na Figura 36.



**Figura 36 - Erro médio de reprojeção**  
**Fonte: Autoria própria**

Com base na Figura 35 e na Figura 36, é possível notar que os pares de imagens mais próximas das câmeras realmente apresentam um erro maior, ou seja, maiores disparidades, enquanto os pares mais afastados do sistema estereoscópico apresentam um erro menor.

Desta maneira, espera-se que imagens mais próximas do sistema, apresentem resultados menos precisos, enquanto imagens mais afastadas apontem resultados melhores. Porém, devido à resolução, quando a distância do alvo à câmera é aumentada, tem-se uma grande dificuldade de estimar até que distância os resultados são consistentes. Alvos pequenos muito distantes sofrerão erros, devido ao fato de que pequenas variações causadas por ruídos podem gerar nestes casos, erros muito grandes.

Assim, a melhor alternativa para a realização de medições, é realizar calibrações a variadas distâncias, de maneira a tentar diminuir os efeitos das disparidades entre as imagens captadas por duas ou mais câmeras.

### 3.3.2 Análise do deslocamento em 3D

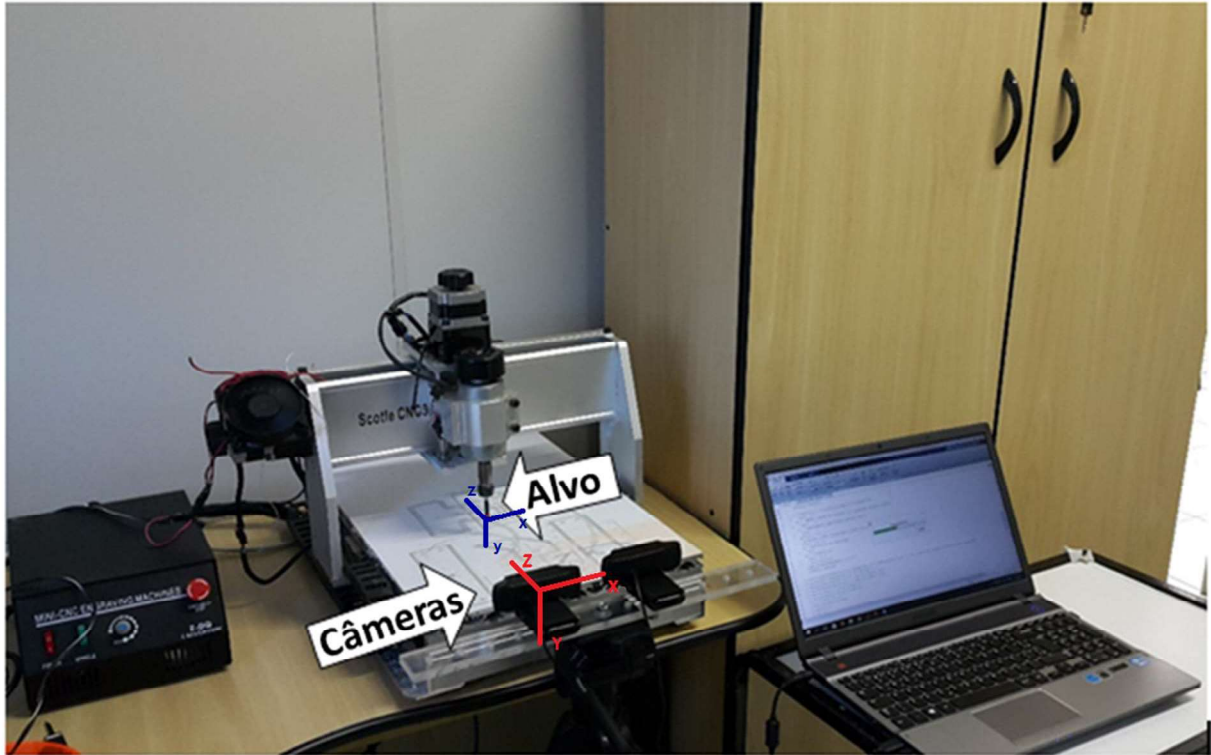
Com o sistema calibrado, partiu-se então para a realização do experimento de deslocamentos controlados em três dimensões. Para a realização dos deslocamentos, foi utilizado um CNC da marca China Zone, modelo 3040Z-DQ, que de acordo com o fabricante, tem área de trabalho máxima de (580 x 400 x 90) mm e precisão de 0,05 mm em cada eixo.

Em sequência, foi determinado um alvo vermelho na haste da ferramenta do CNC, conforme ilustrado na Figura 36. Posteriormente, foram definidos no CNC uma programação para que o mesmo execute alguns trajetos tridimensionais. Destaca-se que, o movimento foi filmado pelo sistema de câmeras, e os resultados obtidos pela presente metodologia de identificação foram confrontado com os dados de entrada do CNC.

As imagens foram captadas pelo *software StereoscopicMultiplexer*, que gerencia a aquisição de imagens de forma a sincronizá-las. A resolução utilizada foi de 1920x1080 pixels em cada câmera. É importante destacar que, as imagens gravadas, sofreram um problema de queda de quadro, pois, a fim de sincronizar as imagens, o *software* utilizado para aquisição das mesmas esperava o momento em que as duas câmeras estavam prontas simultaneamente, para então captar o mesmo instante, assim, perdendo quadros, e deixando a taxa de gravação diferente da especificada da câmera, de 30 quadros por segundo. Além disso, o *HD* do computador não era capaz de salvar a informação à esta taxa, sendo outro limitador, fazendo com que a taxa final fosse irregular e variável, porém ficando próxima à 5 quadros por segundo. Esta taxa irregular não interfere nas medidas de deslocamento, pelo fato de que, no presente trabalho, não foi considerada a variação de posição no tempo.

Na Figura 37, é apresentado o aparato experimental utilizado para a realização das medidas de deslocamentos em três dimensões, é ainda demonstrado o eixo de coordenadas adotado  $(X, Y, Z)$ , destacado em vermelho, que fica no centro ótico da câmera 1, bem como o sistema de coordenadas  $(x, y, z)$ , do CNC, destacado em azul, que fica definido para o centro da ferramenta. Os equipamentos foram posicionados

de modo que estes eixos de coordenadas sejam paralelos, ou seja, não possuem rotação entre os dois, havendo somente o componente de translação, para definição dos mesmos. Desta maneira, de modo a conhecer apenas o deslocamento (diferença entre posições), não é necessária nenhuma transformação espacial adicional.



**Figura 37 - Aparato experimental análise de deslocamento 3D**  
Fonte: Autoria própria

A partir da aquisição, o vídeo com as imagens das duas câmeras foi processado utilizando a metodologia proposta no presente trabalho, de acordo com as etapas evidenciadas no fluxograma mostrado na Figura 38. Assim, após carregado cada quadro do vídeo, a imagem foi separada, em imagem direita e imagem esquerda. Cada imagem foi tratada separadamente da seguinte forma, primeiramente aplicando as correções das distorções causadas por imperfeições da câmera, e em seguida transformando-as em escala de cinza e aplicado o limiar de corte para convertê-las em binárias.



Figura 38 - Esquema do funcionamento da rotina computacional para reconhecimento de pontos em 3D

Fonte: Autoria própria

O próximo passo consistiu em aplicar operações morfológicas como erosão e dilatação, para remoção de possíveis ruídos ou falsos pontos na imagem. Ao final deste processo, obtêm-se uma imagem totalmente preta com apenas os alvos de interesse em branco. Então, calculou-se os centroides dos pontos, por meio da intersecção das diagonais do menor retângulo contendo o alvo, e estas informações foram armazenadas em uma matriz. Finalmente, com os dados de posição do centroide de ambas as imagens, foi feita a correlação dos pontos, com base na teoria



de triangulação de pontos de duas imagens, as posições encontradas em três dimensões foram então salvas.

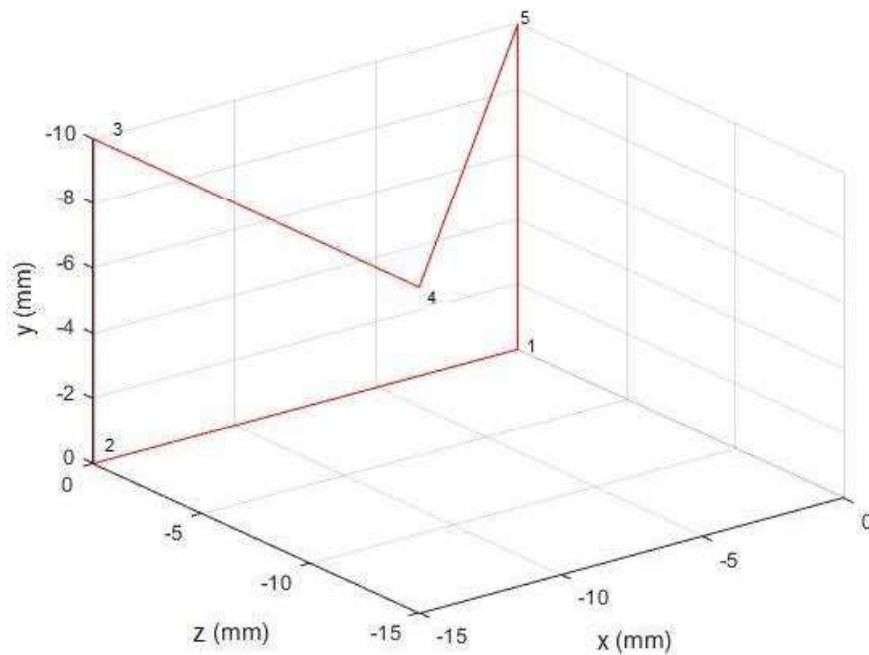
As operações mostradas na Figura 38 foram realizadas até que sejam processados todos os quadros do vídeo, e os resultados de posição em cada quadro foram então salvos e demonstrados em gráficos de deslocamento.

Com base nesta rotina, efetuando pequenas adaptações, várias outras aplicações podem ser executadas a partir da mesma, como a realização de análises dinâmicas, entre outras. Entretanto no presente trabalho, deu-se maior enfoque as medidas estáticas em 3 dimensões.

Foram analisadas duas situações diferentes, de modo a observar o comportamento dos resultados em diferentes tipos de deslocamentos, em um primeiro caso, foi realizado deslocamentos nas 3 coordenadas de maneira isolada e por fim deslocamentos em duas coordenadas simultaneamente, de modo a observar se a rotina é capaz de reconhecer de forma satisfatória os deslocamentos do alvo nas três dimensões. Na segunda situação, o alvo realizou deslocamentos nas três coordenadas simultaneamente, bem como aproximou-se o alvo do sistema de câmeras durante todo o percurso, de modo a perceber o aumento dos erros quando as disparidades entre as imagens aumentam.

### 3.3.3 Caso 1

Definiu-se um roteiro de deslocamentos nas três direções, sendo que num primeiro momento, a ferramenta (alvo) moveu-se 15 mm em  $x$ , em seguida 10 mm em  $y$ , depois 15 mm em  $z$  e finalmente retornou para o ponto inicial. Dessa maneira, realizou-se deslocamentos isolados em cada um dos eixos e por fim realizou um deslocamento no plano  $xz$ , a fim de verificar se o algoritmo é capaz de reconhecer as diferentes situações. O deslocamento programado para o ponto é apresentado pela Figura 39 onde a ferramenta parte do ponto 1, passando pelos pontos 2, 3, 4 e 5, retornando posteriormente ao ponto 1.



**Figura 39 - Trajetória definida para o ponto**

Fonte: Autoria própria

A Tabela 3 exibe os resultados obtidos nos deslocamentos entre as posições fixadas conforme a Figura 39.

**Tabela 3 – Deslocamentos caso 1**

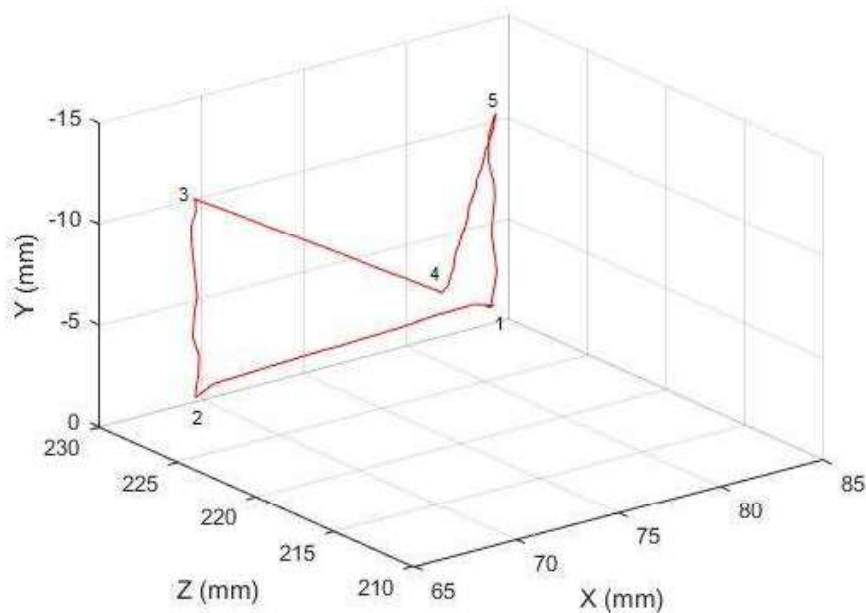
Percurso	Deslocamento definido (mm)			Deslocamento medido (mm)					
	x	y	z	X	Erro (%)	Y	Erro (%)	Z	Erro (%)
1 - 2	-15	0	0	-14,95	0,33	0,30	-	0,10	-
2 - 3	0	-10	0	0,09	-	-9,82	1,83	-0,10	-
3 - 4	0	0	-15	0,31	-	0,35	-	-15,10	0,67
4 - 5	15	0	15	14,61	2,67	-0,09	-	15,40	2,60
5 - 1	0	10	0	0,21	-	9,90	1,01	0,20	-

Fonte: Autoria Própria.

Observa-se que, durante o deslocamento em apenas uma direção, é identificada pela presente metodologia um pequeno valor nas demais direções.

Acredita-se que, estas medidas, inferiores a 0,40 mm, ocorrerem devido às variações no reconhecimento do alvo, ao erro de reprojeção e ao erro associado à discretização espacial realizada pela câmera, que é variável conforme a distância do alvo à câmera, neste caso, o tamanho de cada pixel varia de 0,32 a 0,37 mm. Porém, de modo geral os valores encontrados pela metodologia aplicada são muito próximos do deslocamento definido para o CNC, cujo erro máximo foi de 0,39 mm, ou seja, 2,67%.

Na Figura 40, é exposta a trajetória realizada pela ferramenta em três dimensões, adquiridos pela presente metodologia de aquisição. É possível perceber que a trajetória foi coerente com a definida previamente.



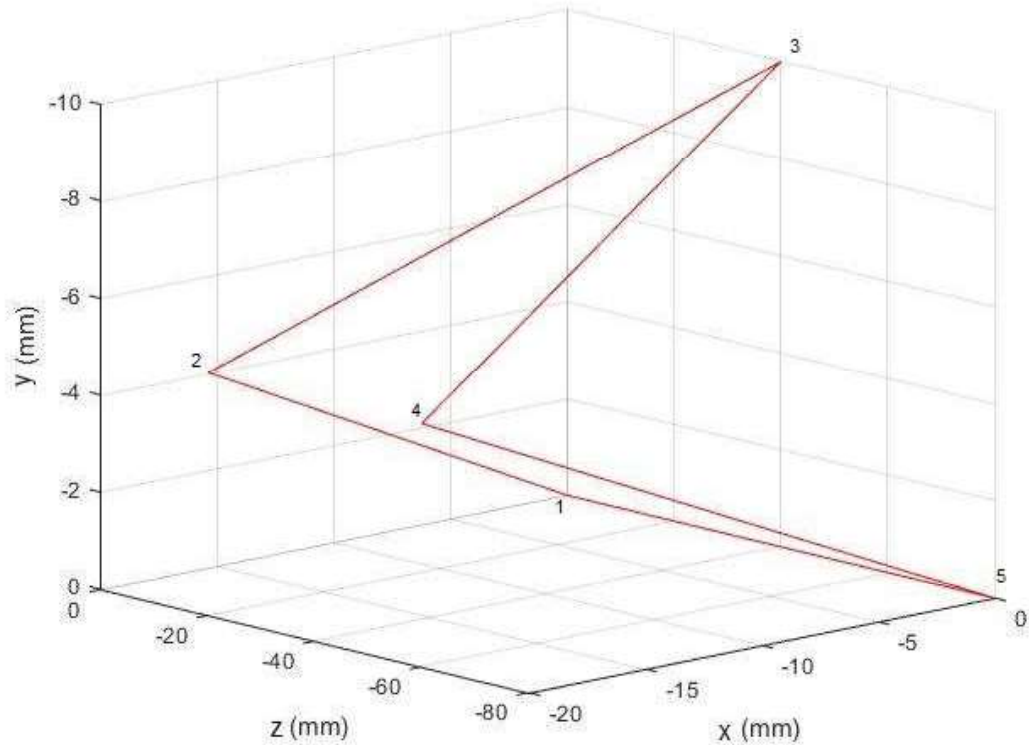
**Figura 40 - Trajetória encontrada do ponto em três dimensões**  
**Fonte: Autoria própria**

Há pequenas variações observadas na trajetória apresentada na Figura 40, e estas são causadas pelos erros já citados, que também ocorrem durante os trajetos.

#### 3.3.4 Caso 2

De modo a testar diferentes situações, foi realizado outro experimento, onde os deslocamentos ocorrem nas três direções simultaneamente. Assim, foram realizados deslocamentos de 20 mm no plano xz, juntamente com um deslocamento de 5 mm em y. Tais valores e direções foram definidos de maneira a não extrapolar o campo visual do sistema de aquisição, e de acordo com as limitações da ferramenta CNC.

Na Figura 41, exibe-se a trajetória definida, sendo que o alvo (ferramenta) parte do ponto 1, passando pelos pontos 2, 3, 4 e 5 e então retornando ao ponto 1.



**Figura 41 - Trajetória definida para o ponto**  
**Fonte: Autoria própria**

Os deslocamentos impostos à ferramenta, foram realizados com intuito de identificar possíveis problemas de medição quando o objeto medido se aproxima da câmera. Assim, durante o percurso que realiza dos pontos 1 ao 5, o alvo se desloca de encontro às câmeras. Na Tabela 4, é exposto os resultados obtidos para os deslocamentos entre as posições mostradas na Figura 40.

**Tabela 4 – Deslocamentos caso 2**

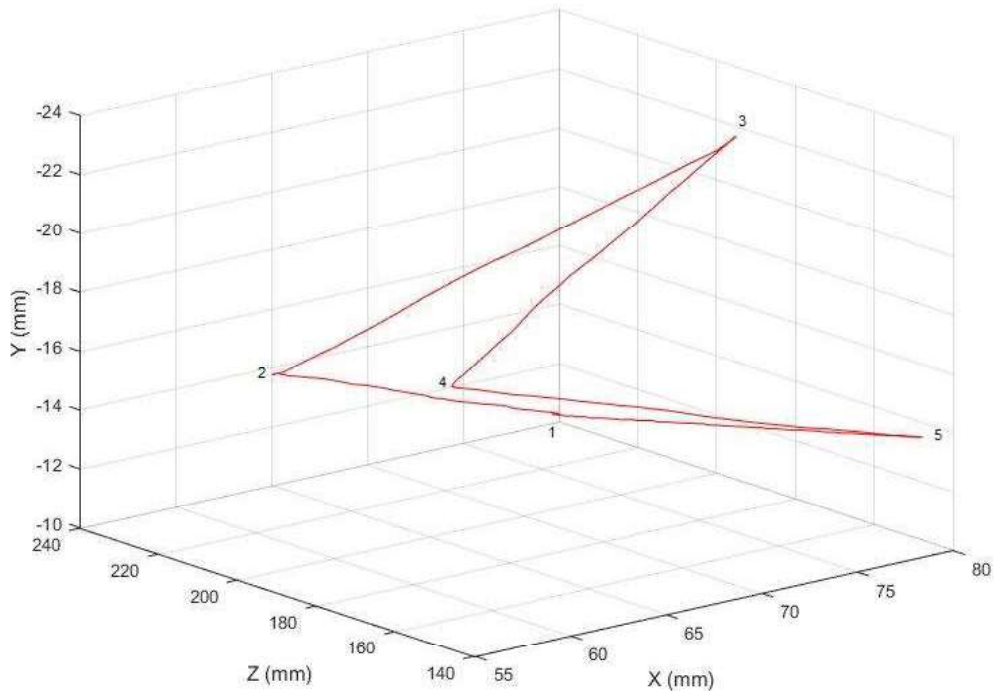
Percurso	Deslocamento definido (mm)			Deslocamento medido (mm)					
	x	y	z	X	Erro (%)	Y	Erro (%)	Z	Erro (%)
1 - 2	-20	-5	-20	-19,33	3,46	-5,08	1,57	-21,00	4,76
2 - 3	20	-5	-20	20,18	0,89	-5,69	12,12	-19,72	1,52
3 - 4	-20	5	-20	-19,16	4,38	4,83	3,52	-20,70	3,38
4 - 5	20	5	-20	20,50	2,44	4,01	24,69	-19,91	0,50
5 - 1	0	0	80	-2,20	-	2,28	-	81,09	1,36

**Fonte: Autoria Própria.**

O erro absoluto, em todos os casos onde há deslocamento, não ultrapassa 1,1 mm, porém quando analisado o erro percentual, tem-se um valor elevado (24,69%) na direção Y durante o trajeto entre os pontos 4 - 5, este erro acontece exatamente no momento em que o ponto está mais próximo às câmeras. Portanto, é possível concluir que o erro é na sua maior parte causados pelos erros de reprojeção. Porém, assim como no Caso 1, há ainda um erro associado à discretização espacial realizada pela câmera, que é variável conforme a distância do alvo à câmera, neste caso, o tamanho de cada pixel varia de 0,19 a 0,38 mm. Os erros de pontos próximos ao sistema foram aumentados de forma considerável. Porém, ao analisar o valor absoluto do mesmo, percebe-se que o erro possui um valor de 0,99 mm, ou seja, o erro percentual é grande, devido ao fato de o valor de referência ser pequeno.

Os erros na triangulação em planos mais próximos da câmera são comuns, como em Gomes, (2012), onde foi encontrado erros relativos de mais de 10% com erro absoluto de 3,6 mm. Também é possível notar que eliminando erros de reprojeção, com a utilização de apenas uma câmera para estimar a profundidade, também traz erros grandes, pelo fato de uma única imagem não ser a melhor maneira de representar medidas em 3D, como em Wang et al., (2007), que apresenta erros de medida absoluta com valor maior de 12 mm.

Na Figura 42, é exposta a trajetória realizada pela ferramenta em três dimensões, adquiridos pela presente metodologia de aquisição. É possível perceber que a trajetória foi coerente com a definida previamente.



**Figura 42 - Trajetória encontrada do ponto em três dimensões**  
**Fonte: Autoria própria**

Desta maneira, é possível observar que, os deslocamentos são captados e possuem boa relação com os valores reais, porém ao se aproximar o alvo do conjunto de câmeras, a precisão diminui drasticamente e os resultados passam a ser pouco confiáveis. Isto ocorre principalmente em consequência da disparidade das imagens, pois quanto mais perto do sistema, as disparidades entre as imagens de cada câmera aumenta, conseqüentemente, quanto mais longe do sistema estereoscópico, menor a disparidade das mesmas. Aliado a isto, os erros acabam sendo ampliados pela forma como o alvo é definido, devido ao fato de que o processo para separação do alvo com limiar de corte, pode variar de forma significativa o reconhecimento do alvo, dependendo da iluminação incidente no mesmo. Assim, a utilização de uma outra metodologia, menos suscetível aos fatores externos, pode diminuir estes erros.

Ainda é notável, analisando a Tabela 4, que deslocamentos que ocorrem nas três dimensões simultaneamente, acabam por terem uma imprecisão maior, pelo fato de a realização de movimento em três dimensões causar um erro maior, tanto na ferramenta CNC que realiza os deslocamentos, que possui precisão de 0,05 mm em cada eixo, como na rotina que os processa, pois os erros de reprojeção variam de acordo com a distância do alvo à câmera, conforme demonstrado na Figura 35.

Apesar das limitações, o método se comprovou eficaz e capaz de reconhecer e realizar medições em três dimensões. Porém, alguns pontos neste tipo de análise ainda merecem uma maior atenção, entre eles destaca-se:

- Realização da calibração: utilizar-se de mais pares de imagens, bem como pares que se utilizem de todo o campo visual do sistema em diferentes situações;

- Reconhecimento do alvo: aprimorar o algoritmo na forma de reconhecimento do ponto, de modo que condições luminosas ou outros fatores externos não prejudiquem os resultados;

- Queda de quadros: encontrar alternativas para a perda de quadros na sincronização das imagens captadas pelas câmeras diferentes, de modo que seja possível realizar medições dinâmicas.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É notável a ampla gama de aplicação de sensores de imagem na engenharia, onde o sensor pode ser adaptado às diferentes finalidades. Essa característica, junto com o desenvolvimento de câmeras baratas e cada vez com mais recursos, são os aspectos que fazem com que o campo de análise de imagem esteja em grande expansão.

Como visto a técnica de análise modal baseada apenas na resposta, deve se levar em consideração que a entrada não é conhecida, e desta forma a mesma pode alterar de maneira sutil as características da estrutura, alterando também o comportamento da mesma. Desta maneira, quando se obtém um modo de vibrar com este método deve se ter em mente que o modo é uma aproximação satisfatória do modo da estrutura real.

É importante notar, que a utilização da câmera como sensor para medições em análise modal, se torna vantajoso devido ao fato de não influenciar no comportamento do sistema, no presente trabalho, foi utilizada uma estrutura com pouca massa, e foi possível notar uma pequena alteração nos resultados dos métodos utilizando os sensores com contato, evidenciando assim a vantagem de se utilizar sensores sem contato em medições dinâmicas.

Atualmente já existem câmeras mais avançadas capazes de realizar medições em faixas de frequência muito elevadas, trazendo a possibilidade de análises ainda mais complexas, em situações mais condizentes com as encontradas no cotidiano, porém as mesmas ainda possuem um alto valor, se comparado com a utilizada. Com o desenvolvimento tecnológico, várias câmeras são desenvolvidas anualmente, e certamente em um futuro próximo, câmeras de baixo custo não apresentarão mais as limitações presentes no sensor utilizado neste trabalho. Portanto, os conhecimentos adquiridos, bem como a rotina computacional desenvolvida, são de extrema valia para trabalhos futuros.

O desenvolvimento do reconhecimento de pontos e deslocamentos em três dimensões, traz a utilização do sensor câmera a um patamar ainda mais vantajoso, visto que neste tipo de análise a aquisição de dados é ainda mais complexa, tornando a utilização de sensores de contato menos viável.



A aplicação de um sistema para captar imagens estéreas da mesma cena, se provou eficiente e com grande aplicabilidade na engenharia, como em visão robótica, análises dimensionais, entre outros.

A principal dificuldade do método é o fato de ser necessária uma calibração para o reconhecimento das características do sistema, visto que isto tende a ser trabalhoso. Assim, uma grande evolução para área seria a adoção de sistemas autocalibráveis, onde qualquer alteração possa ser corrigida internamente sem que exista interferência do usuário.

A utilização do sistema já calibrado comprovou que a método é capaz de medir deslocamentos em três dimensões simultaneamente, com resultados satisfatórios, porém com grande possibilidade de melhorias, como o melhor reconhecimento do alvo e diminuição de interferência de fatores externos, como a variação da iluminação incidente em diferentes posições no espaço tridimensional.

A estereoscopia apresenta erros maiores quando o objeto a ser medido é aproximado das câmeras, isto ocorre devido às disparidades das imagens que são maiores nesta região, enquanto que num plano mais afastado do sistema, as disparidades diminuem proporcionalmente.

Devido a problemas de aquisição do vídeo, não foi possível fazer análises dinâmicas com os equipamentos e *softwares* utilizados, desta maneira sugere-se que para trabalhos futuros estes problemas sejam solucionados, pois a rotina implementada é facilmente adaptável para a realização de medidas dinâmicas.

Por fim, é de notória observação, que os desenvolvimentos apresentados no trabalho podem gerar várias aplicações práticas, como a realização de análises dinâmicas operacional utilizando câmeras com altas taxas de captura, medições de deslocamentos em três dimensões em equipamentos automatizados, medidas de objetos tridimensionais, entre muitas outras, bem como traz à luz alguns problemas e dificuldades para o desenvolvimento de rotinas melhores e mais precisas para a área de processamento e análise de imagens.

## REFERÊNCIAS

- ALBUQUERQUE, M. P. de; ALBUQUERQUE, M. P. de. CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS – CBPF, 2003, Urca. **Artigo de divulgação científica online...**, Rio de Janeiro: CBPF, 2003. Disponível em: <<http://www.cbpf.br/cat/download/publicacoes/pdf/ProcessamentoImagens.PDF?#zom=81&statusbar=0&navpanes=0&messages=0>>. Acesso em: 28 set. 2014.
- ALLEMANG, R. J. Experimental Modal Analysis Bibliography, **Proceedings of the I-IMAC**, 1982.
- ALLEMANG, R. J. The modal Assurance Criterion twenty years of use and abuse. International Modal Analysis Conference – Future Directions in Structural Dynamics, 20, 2002, Los Angeles, CA. **Anais Eletrônicos...** Los Angeles: 2002. Disponível em: <<http://sem-proceedings.com/20i/sem.org-IMAC-XX-Conf-S12P10-The-Modal-Assurance-Criterion-MAC-Twenty-Years-Use-Abuse.pdf>>. Acesso em: 20 nov. 2015.
- ALLEMANG, R. J. The modal assurance criterion – Twenty years of use and abuse. **Journal of Sound and Vibration**. p.14-21, ago. 2003.
- AVITABILE, P. Experimental modal analysis. (A simple non-mathematical presentation). **Sound & Vibration Magazine**, 15 p, Jan. 2001.
- AXIS COMMUNICATIONS. **CCD and CMOS sensor technology Technical white paper**. Lund, Suécia, 2010.
- BATHE, J.; WILSON, E. L. **Numerical methods in finite element analysis**. EnglewoodCliffs: Prentice-Hall, 1976. 528p.
- BORGES, A. S. **Análise modal baseada apenas na resposta – decomposição no domínio de frequência**. 123f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.
- BRINCKER, R.; ZHANG, L.; ANDERSEN, P. Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 18., 2000, San Antonio. **Anais eletrônicos...** Texas: IMAC, 2000. Disponível em: <[http://www.svibs.com/solutions/literature/2000\\_2.pdf](http://www.svibs.com/solutions/literature/2000_2.pdf)>. Acesso em: 26 jan. 2015.
- BRINCKER, B.; VENTURA, C.; ANDERSEN, P. Damping Estimation by Frequency Domain Decomposition. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 19., 2001, Kissimmee. **Anais eletrônicos...** Florida: IMAC, 2001. Disponível em: <[http://www.svibs.com/solutions/literature/2001\\_4.pdf](http://www.svibs.com/solutions/literature/2001_4.pdf)>. Acesso em: 12 jan. 2015.
- CARULLO, A.; PARVIS, M. An Ultrasonic Sensor for Distance Measurement in Automotive Applications, **IEEE Sensors Journal**, v. 1. n. 2, p. 143-147, 2001.

CASTLEMAN, Kenneth R. **Digital Image Processing**. 2. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1995.

CRAIG JR., R. R. **Structural dynamics: an introduction to compute methods**. New York: J. Wiley, 1981. 527 p. ISBN 0-471-87715-8

DATA PHYSICS CORPORATION. **Products and Solutions**. Disponível em: <<http://www.dataphysics.com/products-and-solutions/dynamic-signal-analyzers-signalcalc/signalcalc-ace.html>>. Acesso em: 06 set. 2015.

DAVIES, E. R.; **Computer and Machine Vision: Theory, Algorithms, Practicalities**. 4. ed. Oxford: Academic Press, 2012.

ESTEVES, G. R. P.; FEITOSA, M. A. F.; FERNANDES, B. J. T. Estereoscopia no cálculo de distância e controle de plataforma robótica. Conference on Graphics, Patterns and Images 25, 2012, Ouro Preto. **Anais Eletrônicos...**Outro Preto: SIBGRAPI, 2012. Disponível em: <[http://www.decom.ufop.br/sibgrapi2012/e proceedings/wuw/102815\\_1.pdf](http://www.decom.ufop.br/sibgrapi2012/e proceedings/wuw/102815_1.pdf)>. Acesso em: 22 jun. 2015.

FELBER, A. **Development of a Hybrid Bridge Evaluation System**. PhD Thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada, 1993.

FELICIANO, F. F.; SOUZA, I. de.; LETA, F. R. Visão Computacional Aplicada à Metrologia Dimensional Automatizada: Considerações sobre sua Exatidão. **Engvista**, v. 7, n. 2, p. 38-50, 2005.

FRANÇA, J. A. de. **Desenvolvimento de Algoritmos de Visão Estereoscópica para Aplicações em Robótica Móvel**. 2003. 103f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

FRISWELL, M.I.; MOTTERSHEAD, J.E. **Finite Element Model Updating in Structural Dynamics**, Kluwer Academic Publishers, 1995.

GALLIS, R. B. de A. Metodologia Semi-Automática para Extração 3D de Rodovias Usando Programação Dinâmica e Geometria Epipolar. Simpósio de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação 1, 2004, Recife. **Anais Eletrônicos...** Recife: SIMGEO, 2004. Disponível em: <<https://www.ufpe.br/cgtg/ISIMGEO/CD/html/Fotogrametria%20e%20Sensoriamento%20Remoto/Artigos/f031.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2016.

GENOVESE, K.; CASALETTO, L; RAYAS, J.A.; FLORES, V.; MARTINEZ, A. Stereo-Digital Image Correlation (DIC) measurements with a single camera using a biprism. **Optics and Lasers in Engineering**, v. 51, pg. 278 – 285, 2013.

GOMES, M. M. **Recuperação de Informações Tridimensionais a Partir de Múltiplas Imagens**. 2012. 98f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2012.

GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. **Digital Image Processing**. 3. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2007.

GURGEL, S.; SOLRAC, C. **Curso de Fotografia**: Escola Vanguardista de Arte. Disponível em <<http://www.vanguardistadearte.com.br/fotografia/forum/materias-super-interessantes/como-a-imagem-e-registrada/>>. Acesso em: 20 dez. 2015.

HARTLEY, R.; ZISSERMAN, A. **Multiple View Geometry in Computer Vision**. 2. ed. Cambridge University Press, 2003.

HAYES, M., H. **Statistical Digital Signal Processing and Modeling**. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 1996.

HELFRICK, M. N.; NIEZRECKI, C.; AVITABILE, P.; SCHMIDT, T. 3D digital image correlation methods for full-field vibration measurement. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 25, n. 1, p. 917-927, 2011.

HEYLEN, W.; LAMMENS, S.; SAS, P. **Modal Analysis Theory and Testing**. Leuven: KUL Press, 1997

HOCKEN, R. J.; CHAKRABORTY, N.; BROWN, C. Optical Metrology of Surfaces, **CIRP Annals - Manufacturing Technology**, v. 54, p. 169-183, 2005.

IBRAHIM, S. R.; MIKULCIK, E. C., A Time Domain Modal Vibration Test Technique, **The Shock and Vibration Bulletin**, v. 43, n 4, p. 21-37, 1973.

KARLSTROEM, A. **Correspondência entre Imagens Segundo Geometria Epipolar em Projeção Perspectiva**. Laboratório de Sistemas Embarcados - Departamento de Engenharia Mecatrônica Escola Politécnica da Universidade de São Paulo 2006. Disponível em: <<http://monoceros.mcca.ep.usp.br/ESL/publications/rr2004-01.pdf/view>>. Acesso em: 17 jan. 2016.

KARLSTROEM, A. **Estimação de Posição e Quantificação de Erro Utilizando Geometria Epipolar entre Imagens**. 2007. 156f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

KLOUTSEY, A. E. H.; DINIZ, A. C. G. C.; VILLA, C. V. S. Influência das Condições de Contorno na Análise Modal Experimental de Vigas. Simpósio de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 16, 2006, Uberlândia. **Anais Eletrônicos...** Uberlândia: POSMEC, 2006. Disponível em: <<http://www.posgrad.mecanica.ufu.br/posmec/16/PDF/PM16-0099.pdf>>. Acesso em: 17 dez. 2015.

JULIANI, T. M. **Detecção de danos em pontes em escala reduzida pela identificação modal estocástica**, 2014, Dissertação (Mestrado em engenharia de estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2014.

LARDIES, J.; MINH-NGI, T. Modal Parameter identification of stay cables from output-only measurements. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 25, n. 1, p. 133-150, 2011.

LEONARDI, D. M. **Medida de deslocamentos e vibrações utilizando uma câmera digital como sensor sem contato**. 2015. 85f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, 2015.

LIU, Y. G.; LOH, C. H. Stochastic Subspace Identification for Output-only Modal Analysis: Accuracy and Sensitivity on Modal Parameter Estimation. **Proc. of SPIE**, v. 7981, p. 1-14, 2011.

MACHADO, A. W.; SOUKI, B. Q. Simplificando a obtenção e a utilização de imagens digitais - scanners e câmeras digitais. **Dental Press de Ortodontia e Ortopedia Facial**. Maringá, v. 9, n. 4, p. 133-156, jul./ago. 2004.

MARQUES, D. C.; FELICIANO, R. A.; RANGEL, A. L.; MARTIN, R. L.; ASSADA, D.; BIANCHI, R. A. C. Um sistema de medição de volume por visão computacional. Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 5, 2001, Canela. **Anais Eletrônicos... Canela: SBAI**, 2001. Disponível em: <<http://fei.edu.br/~rbianchi/publications/sbai2001-fei.pdf>>. Acesso em: 20 nov. 2015.

MARQUES FILHO, O.; VIEIRA NETO, H. **Processamento Digital de Imagens**, Rio de Janeiro: Brasport, 1999. ISBN 8574520098.

MEIRELES, J. F. B. de. **Análise dinâmica de estrutura por modelos de elementos finitos identificados experimentalmente**. 2007. 366f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica: Mecânica dos Materiais) – Universidade do Minho, Guimarães, 2007.

MEIROVITCH, L. **Computational Methods in Structural Dynamics**, Sijthoff e Noordhoof International Publisher B. V., 1980.

MENDES, P.; OLIVEIRA, S.. **Análise dinâmica de estruturas. Utilização integrada de modelos de identificação modal e modelos de elementos finitos**. Lisboa: Edições LNEC, ITB-DBB (Informação técnica de barragens – Departamento de Barragens de Betão), 2008.

MENESES, P. R.; ALMEIDA, T. de. **Introdução ao Processamento de Imagens de Sensoriamento Remoto**. Brasília, 2012

MOLLER, N.; GATE, S. Operational Modal Analysis on an Automotive Transmission System. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 22., 2004, Detroit. **Anais eletrônicos...** Michigan: IMAC, 2004. Disponível em: <<http://www.svibs.com/solutions/papers.aspx>>. Acesso em: 12 fev. 2015.

OLSHAUSEN, B. A. **PSC 129 - Sensory Processes**, Aliasing, 2000.

OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W. **Discrete-Time signal Processing**, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.

PANKOW, M.; JUSTUSSON, B.; WAAS, A. M. Three-dimensional digital image correlation technique using single high-speed camera for measuring large out-of-plane displacements at high framing rates. **Applied Optics**, v. 49, No. 17, jun. 2010.

PARK, S. W.; PARK, H. S.; KIM, J.H.; ADELI, H. 3D displacement measurement model for health monitoring of structures using a motion capture system. **Measurement**, Londres, v. 59, p. 352-362, out. 2014.

PEETERS, B.; PEETERS, K.; VAN DER AUWERAER, H.; OLBRECHTS, T.; DEMEESTER, F.; WENS, L. Experimental modal analysis using camera displacement measurements: a feasibility study. 6., Ancona **Anais eletrônicos...** Itália, ICVML, 2004.

PEETERS, B.; ROECK, G. D. Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis a Review. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 123, p. 659-667, 2001.

PEKKA, N.; HAAPANIEMI, H. Operational Modal Analysis of a Piping System. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 22., 2004, Detroit. **Anais eletrônicos...** Michigan: IMAC, 2004. Disponível em: <<http://www.svibs.com/solutions/papers.aspx>>. Acesso em: 20 mar. 2015.

PILU, M. Uncalibrated Stereo Correspondence by Singular Value Decomposition. **HP Laboratories Bristol**, 1997.

POULTER, K. F.; Vision Systems for Dimensional Metrology, **CIRP Annals - Manufacturing Technology**, v. 34, p. 593-598, 1985.

PRZEMIENIECKI, J. S.; **Theory of structural analysis**. New York: McGraw-Hill Book Company, 468p, 1968.

RAO, S.S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, c2009.

ROUSSON, J.; NAUDIN, M.; MARCHESSOUX, C. Matching methods evaluation framework for stereoscopic breast x-ray images. **Journal of Medical Imaging (Bellingham)**, v. 3, nº 1, 2016.

RUBERT, C.; FONSECA, L. M. G.; VELHO, L. Super-resolução de imagens de sensores remotos usando a transformada de cor YUV para estimação das altas frequências. In: WORCAP, 4., 2004, São José dos Campos. **Anais...** São José dos Campos: INPE, 2004.

SABINO, D. D. **Medidas de deslocamento e vibrações através de imagens de câmeras digitais**. 2013. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Estadual Paulista "Julio De Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2013.

SABINO, D. D.; PEREIRA, J. A.; ABREU, G. L. C. M. Output only based modal analysis of a reduced scale building using digital camera images. In: International Conference on Structural Dynamics, 9., Porto. **Anais eletrônicos...** Portugal: IMAC, 2014. Disponível em:

<[http://paginas.fe.up.pt/~eurodyn2014/CD/papers/304\\_MS12\\_ABS\\_1590.pdf](http://paginas.fe.up.pt/~eurodyn2014/CD/papers/304_MS12_ABS_1590.pdf)>.

Acesso em: 04 fev. 2015.

SALGADO, J. M. da S. O. **Análise Modal Experimental Aplicada a um Componente Estrutural Automóvel**. 2012. 134 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade do Minho, Escola de Engenharia, Portugal, 2012.

SCURI, A. E. **Fundamentos da Imagem Digital**. Rio de Janeiro: Tecgraf/PUC-Rio, 2002.

SISCOUITO, R. A.; SZENBERG, F.; TORI, R.; RAPOSO, A. B.; CELES, W.; GATTASS, M. **Realidade Virtual: Conceitos e Tendências**. Cap 11, p. 179-201. São Paulo: Editora Mania de Livros, 2004.

SONG, K. T.; TANG, W. H. Environment Perception for a Mobil Robot Using Double Ultrasonic Sensors and a CCD Camera, **IEEE Trans. on Industrial Electronics**, v. 43, n. 3, p. 372-379, 1996.

STOICA, P.; MOSES, R. **Spectral Analysis of Signals**. New Jersey: Prentice Hall, 2006.

SUN, Y.; LIU, G. Rolling shutter distortion removal based on curve interpolation **IEEE Transactions on Consumer Electronics**, v. 58, p. 1045 - 1050, 2012.

SUTTON, M. A.; YAN, J. H.; TIWARI, V.; SCHREIER, H. W.; ORTEU, J. J. The effect of out-of-plane motion on 2D and 3D digital image correlation measurements. **Optics and Lasers in Engineering**, v. 46, pg. 746 – 757, 2008.

SVIRDOV, S. A.; STERLYAGOV, M. S. Sea surface slope statistics measured by laser sensor, **Proceedings of oceans engineering for today's technology and tomorrow's preservation**, v. 1, p 900-905, 1994.

TAKESA, K.; SATO, H; TANI, Y. Measurement of Diameter Using Charge Coupled Device (CCD). **Annals of the CIRP**, v. 33, nº1, 1984.

THORBY, D. **Structural Dynamics and Vibrations in Practice: An Engineering Handbook**. 1. ed. Hungria: Elsevier, 2008.

TREBUÑA, F.; HAGARA, M. Experimental modal analysis performed by high-speed digital correlation system. **Measurement.**, Londres, v. 50, p. 78-85, abr. 2014.

TROTТА, M. Fotografia: Objetiva (lente) Leica cortada ao meio. Disponível em: <<http://www.marcustrotta.com/2011/05/20/fotografia-objetiva-lente-leica-cortada-ao-meio/>>. Acesso em: 15 de dezembro de 2015.

WALTHAM, N.; HUBER, M.C.E.; PAULUHN, A.; CULHANE, J.L.; TIMOTHY, J.G.; WILHELM, K.; ZEHNDER, A. **Observing Photons in Space: A Guide to Experimental Space Astronomy**. pg. 391-408, 2010.

WHITE, F. M. **Fluid mechanics**. 4. ed., New York: McGraw-Hill, 1998.

ZHANG, Z. Motion and Structure from Two Perspective Views: From Essential Parameters to Euclidean Motion Via Fundamental Matrix. **Journal of the Optical Society of America A**, v. 15, nº 11, p. 2938-2950, 1997.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The finite element method**. 3. ed. London: McGraw-Hill, 1985.