Curso de formação continuada para professores de Matemática do Ensino Fundamental II: erros de alunos em frações, decimais e porcentagens

Rodrigo Vitorassi
Barbara Winiarski Diesel Novaes
Vanessa Largo Andrade

TOLEDO - PR

2024

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Rodrigo Vitorassi
Barbara Winiarski Diesel Novaes
Vanessa Largo Andrade

Curso de formação continuada para professores de Matemática do Ensino Fundamental II: erros de alunos em frações, decimais e porcentagens

TOLEDO - PR

2024

RODRIGO VITORASSI

OS NÚMEROS RACIONAIS E SUAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NA RETA NUMÉRICA: OS ERROS DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Rational Numbers and Their Different Representations on the Number Line: The Errors of Middle School Students

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Barbara Winiarski Diesel Novaes
Coorientadora: Vanessa Largo Andrade

TOLEDO - PR
2024

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Toledo

RODRIGO VITORASSI

OS NÚMEROS RACIONAIS E SUAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NA RETA NUMÉRICA: OS ERROS DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 29 de Fevereiro de 2024

Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Danilene Gullich Donin Berticelli, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Dr. Renato Francisco Merli, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Vanessa Largo Andrade, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 19/03/2024.

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Querido professor! Este curso de formação continuada foi elaborado especialmente para você que deseja apreender sobre os erros dos alunos no que tange aos números decimais.

No contexto da educação matemática, a articulação entre frações, decimais e porcentagens é fundamental para o desenvolvimento de competências numéricas sólidas e a compreensão abrangente dos números racionais. No entanto, muitas vezes, os alunos enfrentam dificuldades em compreender as relações entre essas representações e em aplicá-las em diferentes contextos.

Diante dessa necessidade de aprimoramento do ensino e da aprendizagem desses conteúdos, surge a proposta deste curso presencial, concebido como uma iniciativa de aprimoramento pedagógico para professores do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental.

O objetivo principal é proporcionar aos educadores uma oportunidade de aprofundar seus conhecimentos sobre a articulação de representações numéricas na reta numérica, alinhando-se com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e fornecendo subsídios teóricos e práticos para enriquecer suas práticas pedagógicas.

Apresentamos neste material diversos exemplos de erros cometidos por alunos do Ensino Fundamental II em questões matemáticas específicas. A análise detalhada desses erros permitirá aos professores uma compreensão mais profunda das dificuldades enfrentadas pelos estudantes, além de fornecer *insights* sobre possíveis lacunas no processo de ensino e de aprendizagem. O produto educacional também incluiu referências teóricas relevantes e sugestões práticas para aprimorar a prática docente e enriquecer o ambiente de sala de aula.

Agradecemos a você professor(a), colega de profissão, que dedicou seu tempo e energia para contribuir com este material. Obrigado por seu apoio e parceria ao longo deste processo. Em especial agradecemos a escola, equipe diretiva e professores que colaboraram com a pesquisa de mestrado profissional que resultou neste produto educacional.

Grande abraço!

Rodrigo, Barbara e Vanessa

2 SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

Este Produto Educacional foi confeccionado a partir de resultados da dissertação intitulada “Porcentagens na reta numérica: Erros dos alunos do Ensino Fundamental II”, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Toledo.

Para a coleta de dados nesta pesquisa, foram implementados métodos específicos que se alinhavam com os objetivos e a natureza do estudo. Foi elaborado uma atividade com cinco questões sobre frações, decimais e porcentagens que foram aplicadas a alunos de duas turmas dos sextos, sétimos, oitavos e nonos anos, com o intuito de caracterizar os erros cometidos nos processos de resoluções apresentados.

A partir das leituras e análises atentas das respostas dos alunos, foram construídas categorias para os erros que subsidiaram a confecção do produto educacional aqui apresentado. Deste modo, com o objetivo de contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem, este curso de formação continuada para professores que ensinam matemática do Ensino Fundamental II foi cuidadosamente elaborado, levando em consideração os padrões de erro identificados durante a coleta de dados.

O produto educacional foi projetado para abordar de maneira eficaz as áreas em que os alunos demonstraram maior dificuldade em relação aos números racionais e reta numérica. Além disso, foram incluídos recursos e atividades que visam fortalecer o entendimento dos conceitos matemáticos em questão, oferecendo aos professores ferramentas práticas para auxiliar os alunos na superação de suas dificuldades.

Desta forma, o produto educacional busca não apenas corrigir erros, mas também fornecer um suporte teórico mais abrangente, visando aprimorar a compreensão e o desempenho dos alunos no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, e está destinado a professores de matemática do Ensino Fundamental II que desejam compreender melhor os erros dos alunos em relação aos números racionais.

O produto educacional trata-se de um curso de formação continuada com atividades que foram aplicadas para alunos dos sextos ao nono ano. Nos encontros serão apresentados os erros dos alunos e material teórico para embasar as discussões.

As atividades foram discutidas inicialmente por integrantes do Grupo de Pesquisa em História da educação matemática (GHEMATPR) e algumas delas foram aplicadas em curso ministrado pelas professoras Barbara Winiarski Diesel Novaes (UTFPR), Danilene Gullich Doni Berticelli (UFPR) e Késia Ramires (UFGD) para professores do quinto ano no segundo semestre de 2022. O objetivo desse curso era fomentar debates e reflexões a respeito da articulação entre frações, decimais e porcentagem na passagem do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental. Expressamos nossa gratidão para com aqueles que de alguma forma colaboraram com a produção desse material que chega até você.

3 DISCUSSÕES TEÓRICAS RELEVANTES PARA O CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA

Dedicamos essa parte do produto educacional para um aprofundamento teórico de aspectos relevantes da aprendizagem de números racionais, reta numérica e o erro.

Trata-se de uma síntese do capítulo 2 da dissertação “Porcentagens na reta numérica: Erros dos alunos do Ensino Fundamental II”, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Toledo.

3.1 Sobre a compreensão dos números racionais

O domínio das frações, decimais e porcentans é crucial para o desenvolvimento matemático dos alunos, pois permitem a compreensão de relações numéricas, a resolução de problemas do cotidiano e a interpretação de informações quantitativas. Além disso, eles fornecem uma base sólida para a progressão em conceitos matemáticos mais avançados, como proporções, porcentagens fracionárias, cálculos abrangendo números decimais e estatísticas (Cavaliere, 2005).

Todavia, além de compreender as definições e propriedades desses conceitos, é importante enfatizar a conexão entre eles. Frações, porcentagens e números decimais estão inter-relacionados e podem ser representados de diferentes formas. Por exemplo, uma fração pode ser convertida em um número decimal ou em uma porcentagem, e vice-versa. Essas diferentes representações são ferramentas poderosas que permitem aos alunos visualizarem e compreenderem a relação entre as quantidades e realizarem cálculos com maior flexibilidade (Aquino, 2013).

Cyr (2003), ao pesquisar sobre a construção de esquemas para resolver problemas que envolvem frações, decimais e porcentagens, com alunos canadenses do sexto ano, chega à seguinte conclusão: os alunos que têm um raciocínio multiplicativo demonstraram uma compreensão coerente e evoluída das frações e aos diferentes conceitos que estão associados (parte-todo, operador, razão, medida) em detrimento aos alunos que possuem esquemas baseados num raciocínio aditivo. Esse últimos demonstraram “cálculos aleatórios” e uma representação pouco coerente. Para compreender melhor esses dados, é importante compreender o que seriam um raciocínio multiplicativo ou aditivo.

O raciocínio multiplicativo e o raciocínio aditivo são duas formas de pensar e resolver problemas matemáticos que envolvem operações básicas como adição e multiplicação. Esses tipos de raciocínio são fundamentais no desenvolvimento da compreensão matemática, especialmente em contextos do Ensino Fundamental.

O raciocínio aditivo envolve a adição, que é uma operação matemática básica que combina dois ou mais números para encontrar a soma. É usado para resolver problemas que envolvem situações de adição, como juntar quantidades, calcular mudanças, identificar o total de itens em grupos etc. (Heliodoro, 2004). Pode-se usar como exemplo a seguinte situação: se você tem 3 maçãs e depois ganha mais 2, o raciocínio aditivo envolve somar $3 + 2$ para encontrar que agora você tem 5 maçãs.

Vergnaud (1983, p. 20) afirma que “a estrutura de um campo conceitual aditivo é caracterizada por um conjunto de invariantes operatórios que definem as propriedades das relações entre os elementos do campo". Assim, partindo do pressuposto que a definição tradicional de raciocínio aditivo, focada na composição de duas medidas, limita nossa compreensão, é crucial reconhecer que outras relações também se encaixam nesse campo, como: transformação de medidas - mudança de unidades de medida, como converter cinco metros em 500 centímetros; comparação de medidas - determinar a diferença entre duas medidas, como comparar o peso de dois objetos; composição de transformações - combinar duas ou mais transformações aditivas, como aumentar três unidades e depois diminuir duas unidades; composição de relações - combinar duas relações aditivas para formar uma nova relação, como a relação entre a altura e o peso de duas pessoas; transformação de uma relação -

transformar uma relação aditiva em outra, como converter a diferença de altura entre duas pessoas em uma razão.

Os estudos de Gérard Vergnaud sobre Campos Conceituais Aditivos oferecem uma lente valiosa para aprimorar a definição de raciocínio aditivo. Define um campo conceitual aditivo como um conjunto de situações que podem ser resolvidas usando operações aditivas, como soma e subtração. Por exemplo, medidas (comprimento, peso, tempo, volume, etc.); dinheiro (adição e subtração de valores monetários; tempo (cálculo de tempo decorrido, adição e subtração de horas, minutos e segundos) e combinação de conjuntos (união e intersecção de conjuntos).

O raciocínio multiplicativo envolve a multiplicação, que é outra operação matemática fundamental que combina números para encontrar o produto. É usado para resolver problemas que envolvem situações de multiplicação, como dimensionar quantidades, calcular áreas, volumes, taxas e muito mais (Heliodoro, 2004). Pode-se usar como exemplo a seguinte situação: se você tem quatro pacotes, cada um contendo 6 lápis, o raciocínio multiplicativo envolve multiplicar quatro por seis para encontrar que você tem um total de 24 lápis.

No caso da definição de raciocínio multiplicativo, é importante considerar que a multiplicação envolve mais do que apenas combinar conjuntos. Ela também pode ser utilizada para calcular áreas, volumes, razões e proporções (Vergnaud, 1983) e está presente em diversos contextos como, escalas, porcentagens, juros compostos etc. Mais especificamente, podemos elucidar alguns exemplos de aplicações do Raciocínio Multiplicativo: cálculo de áreas - multiplicar o comprimento pela largura de um retângulo para determinar sua área; cálculo de volumes - multiplicar o comprimento, a largura e a altura de um prisma retangular para determinar seu volume; escalas: multiplicar uma medida por um fator de escala para determinar a medida equivalente em outra escala; porcentagens: multiplicar um valor por uma porcentagem para determinar um valor equivalente e juros compostos: multiplicar um valor inicial por um fator de juros composto para determinar o valor final após um período de tempo.

O raciocínio multiplicativo está intimamente ligado ao conceito de proporcionalidade que envolve a comparação de duas razões, que podem ser representadas por frações, decimais ou porcentagens (Vergnaud, 1983). Por exemplo, “Se um carro percorre 100 km com cinco litros de gasolina, quantos litros de gasolina serão necessários para percorrer 200 km?”.

Ao revisar e aprimorar as definições de raciocínio aditivo e multiplicativo, pode-se oferecer aos leitores uma compreensão mais completa e profunda desses processos cognitivos. Essa compreensão aprimorada contribui para o desenvolvimento de habilidades matemáticas mais robustas e para um melhor desempenho dos alunos em diferentes áreas do conhecimento.

Em contextos educacionais, o ensino desses dois tipos de raciocínio é importante, pois eles representam diferentes abordagens para resolver problemas matemáticos. A transição do raciocínio aditivo para o multiplicativo é um marco importante no desenvolvimento matemático de estudantes (Heliodoro, 2004).

Resultados semelhantes aos de Cyr (2003) foram encontrados por Kamii e Clark (1995), em pesquisas sobre frações equivalentes. Os pesquisadores reforçam que as frações equivalentes envolvem dois aspectos relacionados com o pensamento operatório identificados por Piaget: o pensamento multiplicativo e a consideração do todo e das partes.

Ao analisarem dificuldades de alunos dos quintos e sextos anos, ao resolverem tarefas que envolvem frações equivalentes, chegaram à conclusão que a maioria das crianças resolve de forma perceptiva (baseada em formas, que são observáveis) em vez de recorrer aos aspectos relacionados ao pensamento operatório (baseado em operação, que não são observáveis) das frações equivalentes.

Em relação ao ensino de porcentagem, Tian e Siegler (2018) relatam a falta de artigos publicados sobre a aprendizagem de porcentagem e que, "juntamente com a importância do tema, faz pesquisas sobre a compreensão das crianças sobre porcentagens essenciais para uma representação abrangente do conhecimento dos números racionais e seu desenvolvimento" (p. 366). E complementam que não encontraram pesquisas "que examinasse a conversão entre porcentagens e outras notações de números racionais em qualquer direção" (p. 367).

Um dos estudos, citados por Tian e Siegler (2018), analisa a compreensão de alunos dos sétimos e oitavos anos dos Estados Unidos, sobre o senso numérico relativo à porcentagem (Gay & Aichele, 1997). Um dos resultados apontados pelo estudo é que "mesmo que os alunos aprendam as relações entre frações, decimais e porcentagens, os estudantes poderiam citar exemplos específicos de frações e decimais que eram equivalentes a porcentagens, eles não pareciam usar as inter-relações entre as representações numéricas com confiança" (Gay & Aichele, 1997, p. 33). Além disso, os alunos demonstraram "algumas relações errôneas em seu conhecimento de porcentagem e frequentemente usavam regras e procedimentos incorretos com confiança" (p. 33) o que pode ser resultado de um currículo que enfatiza regras e procedimentos em vez de conceitos sobre porcentagem.

Na mesma direção, Monteiro e Costa (1996) argumentam que:

> A utilização prematura das regras no estudo de frações e decimais, tem sido detectado como outro fator que atrasa a compreensão dos números racionais, visto que os alunos não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e as respectivas regras na resolução de situações na sala de aula de matemática (Monteiro & Costa, 1996, p.62).

Uma regra prematura pode levar a um "esquecimento" da criança de um ano para outro. Na teoria piagetiana poderia estar "profundamente relacionado a sua não-incorporação de conhecimentos suficientes para organizar suas ações mentais naquela situação" (Pinto, 2000, p. 117).

3.2 Sobre frações, decimais e porcentagem na reta numérica

A abordagem da reta numérica é uma estratégia eficaz no ensino e aprendizado de frações, porcentagens e números decimais. A reta numérica é uma representação visual que organiza os números de forma linear, permitindo a localização e comparação de diferentes valores numéricos. Ao posicionar os números nessa linha, os alunos podem identificar a sua localização relativa e realizar comparações entre eles. Isso ajuda a desenvolver a compreensão de equivalência entre diferentes formas de representação numérica, como frações equivalentes, porcentagens e números decimais (Mandarino & Sant'anna, 2019).

No ensino de frações, a reta numérica pode ser utilizada para demonstrar a relação entre partes de um todo. Os alunos podem posicionar as frações ao longo da reta numérica, identificando sua posição em relação ao inteiro e comparando o tamanho das mesmas. Isso auxilia-os na compreensão dos conceitos de numerador e denominador, bem como na comparação e ordenação de frações (Mandarino & Sant'anna, 2019).

No que se refere a porcentagens, a reta numérica é igualmente eficaz para representar diferentes proporções em relação a um número inteiro. Os alunos podem marcar pontos específicos na reta numérica para representar porcentagens como

25%, 50% e 75%, permitindo que visualizem as diferentes quantidades representadas por essas porcentagens e estabeleçam relações com frações e números decimais equivalentes.

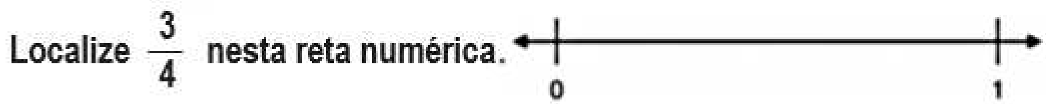
No âmbito dos números decimais, a reta numérica auxilia os alunos a compreender valores decimais entre dois números inteiros. Ao posicionar números decimais ao longo da reta numérica, os alunos podem perceber sua proximidade com números inteiros e comparar seus valores. Isso contribui para o entendimento da relação entre frações e números decimais, além de auxiliar na interpretação e localização de valores decimais (Mandarino & Sant'anna, 2019).

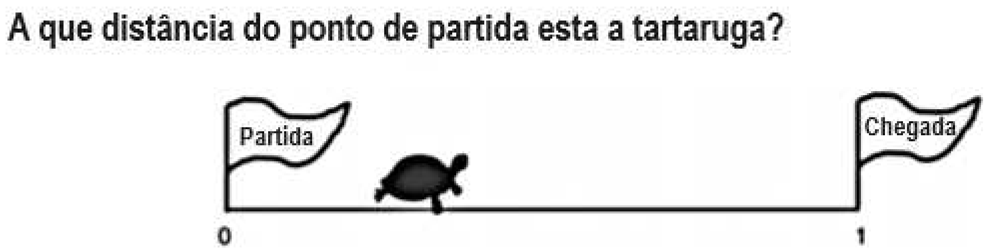
Onuchic e Avellato (2008) destacam que os números racionais têm diferentes "personalidades": ponto racional, quociente, fração, razão e operador. Para as autoras, um deles é a representação como ponto na reta numérica, "todo número racional a/b ocupa um ponto bem definido na reta e, reciprocamente, a todo ponto racional da reta corresponde um número racional" (p. 87).

Lamon (2020) acrescenta uma perspectiva importante sobre a representação de frações na reta numérica. Ela observa que, embora aborde-se o conteúdo de frações como se fossem pontos na reta, na realidade, não são pontos, mas medidas de distância. São as medidas de distância que um ponto específico na reta está do zero, considerando números racionais positivos. Quando um intervalo, nesse caso uma reta numérica, possui comprimento igual a "l" e esse comprimento é subdividido em "b" subintervalos iguais, cada um destes subintervalos terá medida igual a "1/b". A reta numérica pode ser dividida sucessivamente em quantas subunidades forem necessárias, permitindo que o número de partes iguais na reta varie.

Lamon (2020) também destaca a diferença entre dois tipos de exercícios (Figura 1). No primeiro, os alunos são convidados a localizar a fração $\frac{3}{4}$ na reta. Nesse caso, eles são levados a dividir o intervalo dado em quatro partes iguais e marcar o fim do terceiro intervalo, representando assim três partes do todo. Essa abordagem se assemelha a exercícios que enfatizam a interpretação da fração como parte-todo.

Figura 1. Representação de frações na reta numérica





Fonte: Lamon (2020, p. 221-222)

No segundo exercício (Figura 1), os estudantes são encorajados a dividir a reta por subdivisões sucessivas até que consigam marcar a posição desejada. Isso demonstra como a reta numérica pode ser uma ferramenta flexível e adaptável para abordar diferentes aspectos do aprendizado matemático, incluindo a interpretação visual e a compreensão conceitual.

A utilização da reta numérica como uma ferramenta de ensino e aprendizado tem diversas vantagens que vão além das já mencionadas, tais como, a visualização e compreensão; conexões entre conceitos; comparação e ordenação; resolução de problemas; transição suave; flexibilidade e adaptabilidade; e conceitos de medida (Lima, 2020).

Uma observação relevante que pode ser destacada neste estudo, é sobre o número de vezes que a palavra “reta numérica” aparece na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – vinte vezes. Neste documento espera-se que o aluno saiba “reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica” (Brasil, 2017, p. 269). A menção à reta numérica ocorre desde o primeiro ano e na unidade de números há objetos de conhecimento relacionados à “Leitura, escrita e comparação de números naturais (até 100) e reta numérica” (p. 278).

No terceiro ano, a orientação é a construção de fatos de adição, subtração e multiplicação de números naturais e suporte à reta numérica. A primeira vez que ocorre o termo frações associado à reta numérica é no quarto ano. A prescrição é “EF04MA09 - Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso” (p. 291). Para o quinto ano temos previsto o ensino dos “Números racionais expressos na forma decimal e sua representação na reta numérica" (p. 294) e o "Cálculo de porcentagens e representação fracionária" (p. 294).

Para o sexto ano, destacamos as habilidades de "EF05MA06 – Associar as representações $10\%, 25\%, 50\%, 75\% \ e \ 100\%$ respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros" (p. 295) e "EF06MA08 – Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica" (p. 301).

No sétimo ano, "EF07MA10 – Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica" (p. 305). No oitavo ano não aparece nenhuma indicação em relação à reta numérica; e, no nono ano, a reta numérica está associada à representação dos números irracionais.

Na BNCC, ou ocorre a articulação entre as representações fracionárias e decimais ou das frações com a porcentagem e nunca entre os três. Concorda-se com Trindade e Búrigo (2021) quando afirmam que "a BNCC compreende que os diferentes significados de número racional, bem como a noção de número racional, devem ser alcançados até o sétimo ano, visto ser este o último ano em que o documento estabelece maiores especificações em relação a essas aprendizagens" (p. 13).

Schrenk (2021) faz um mapeamento de produções didáticas pedagógicas dos professores da rede estadual de ensino, do estado do Paraná, resultantes da participação do Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) no que tange ao ensino de frações como medida, utilizando a reta numérica. Foram localizadas 106 produções didáticas pedagógicas, o que demonstra que os professores têm conhecimento desta representação, mas que o número não é muito expressivo perto de mais de 20 mil produções.

Behr et al. (1983) realizaram uma pesquisa com 77 alunos da quarta série, dos Estados Unidos, no que concerne à interpretação das frações $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{3}$ na reta numérica, na forma discreta, em círculos e retângulos. Concluíram que há um número desproporcional de erros em problemas de reta numérica para as três frações propostas. Pontuam que isso provavelmente se deve ao fato de que a maioria das experiências dos alunos foram com a interpretação parte-todo da fração em um contexto contínuo (área). Isso sugere que a interpretação da reta numérica é especialmente difícil para as crianças. Os estudos mostraram uma noção imprecisa e inflexível de frações na reta numérica mesmo no nono ano.

Vaz (2013), ao investigar o desempenho de alunos de duas turmas do sétimo ano do ensino fundamental, no município de Itaboraí – RJ, utilizando metodologia de pesquisa baseada na análise das soluções (erros e acertos) em tarefas sobre frações inspirado nos trabalhos de Cury (2019), também constatou alto teor de dificuldade em uma questão relacionada à reta numérica.

A questão era "Entre quais números representados na reta numérica abaixo podemos colocar a fração $\frac{2}{5}$". Os estudantes tinham que posicionar essa fração em uma reta, iniciando em zero e com cinco marcações com números de um a cinco. O percentual de acertos no Pré-teste foi de 0% e, no Pós-teste, de $17{,}19\%$, sendo que a maioria dos alunos posicionou o $\frac{2}{5}$ entre os números dois e cinco.

Um aspecto conflitivo é quando ocorrem intervenções não construtivas por parte dos professores. Pinto (2000) exemplifica que as crianças aprendem que zero é nada num momento em que ainda não têm um conceito bem formado de valor posicional dos algarismos. As crianças "'inventam' regras para completar as tarefas, regras essas que acabam incorporando a seus esquemas" (Pinto, 2000, p. 117) que se transformam em erros sistemáticos, expressando conhecimentos malformados. Talvez possa ser o que tenha acontecido, quando as crianças posicionaram $\frac{2}{5}$ entre dois e cinco, interpretando que poderia ser um número inteiro entre dois e cinco.

Segundo Vaz (2013, p. 64, grifo nosso), ao se referir à sequência didática que continha a atividade "Entre quais números representados na reta numérica abaixo podemos colocar a fração $\frac{2}{5}$ ", afirma que:

> As observações realizadas em sala indicaram, em consonância com o referencial teórico desta pesquisa, que **a maioria dos alunos teve o primeiro contato com a reta numérica durante essa sequência didática**. Ou seja, eles cursaram todo o primeiro segmento do ensino fundamental e o sexto ano sem terem trabalhado com a reta numérica. Outro fator apontado nas referências deste trabalho e observado nesta pesquisa foi a dificuldade de aprendizagem da reta numérica, alunos demonstraram em alguns momentos certo desconforto em trabalhar com tal conceito.

Howe et al. (2011) chegaram em resultados semelhantes e pontuam que talvez o significado de frações na reta numérica (medida) não tenha sido abordado com os alunos no estudo que realizaram. Os alunos acabam utilizando conhecimentos errôneos ou incompletos como, por exemplo, $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{4}$ para $3{,}5$ e $5{,}4$ criando suas próprias regras.

Vaz (2013) sugere que diante da dificuldade do tema este assunto pode, e deve, ser abordado de forma constante e permanente nas séries posteriores, por exemplo, durante a introdução dos números inteiros.

À luz do conteúdo apresentado até o ponto atual desta investigação, a próxima seção prossegue detalhando os encaminhamentos metodológicos adotados, destacando a robustez e a coerência das estratégias empregadas para atender aos objetivos propostos. Nesse contexto, serão minuciosamente explorados os procedimentos metodológicos, delineando o caminho trilhado para conduzir a pesquisa de maneira eficaz.

4 INICIANDO O CURSO

O curso de formação continuada foi organizado para ser desenvolvido em cinco encontros de duas horas que poderão ocorrer semanalmente ou quinzenalmente, a princípio de forma presencial, mas poderá ser adaptado para ser desenvolvido remotamente, caso necessário.

Podemos considerar que três ideias permeiam todo o curso, de refletir sobre os erros dos alunos, ou seja, tornar os erros dos alunos um observável para o professor e de trazer para os professores literatura atualizada sobre o erro e ainda, fazer os professores analisarem os erros dos alunos. Mas antes de analisarmos os erros, é preciso se perguntar: Quais os conhecimentos necessários para a resolução dessa questão?

Afim de responder essa pergunta, no início de cada uma das cinco questões, serão indicados atividades para preparar os alunos, isto é, que levem o aluno a realizar esta articulação.

4.1 Primeiro encontro - análise dos erros dos alunos do Ensino Fundamental II – primeira e segunda questões (2 horas)

No primeiro encontro, os participantes serão organizados em grupos para resolverem as questões 1 e 2 propostas (figura 2 e 3). Cada grupo terá a tarefa de registrar por escrito os processos de resolução, incentivando a reflexão individual e a comunicação entre os membros do grupo.

Para que o aluno consiga responder as Questões 1 e 2 (Figura 2 e 3), é imprescindível que o mesmo saiba o que é porcentagem e saiba fazer cálculo de porcentagem. Alguns exemplos são:

1. **Atividade de Proporção:**

Dê aos alunos uma série de problemas que envolvam encontrar uma porcentagem de uma quantidade. Por exemplo: "Se 20% dos alunos de uma escola participaram de um evento esportivo e isso equivale a 80 alunos, quantos alunos existem na escola?"

Peça aos alunos para identificar a quantidade total e a porcentagem dada em cada problema e, em seguida, use uma proporção para encontrar a quantidade desconhecida.

2. **Problemas do Mundo Real:**

Apresente aos alunos problemas do mundo real que envolvam o cálculo de descontos em compras, taxas de juros em empréstimos ou investimentos, ou até mesmo situações envolvendo aumento ou diminuição percentual de quantidades.

Peça aos alunos para calcular as porcentagens envolvidas em cada situação e discutir como esses conceitos se aplicam à vida cotidiana.

3. **Atividade de Interpretação de Gráficos:**

Forneça aos alunos gráficos ou tabelas que exibam dados percentuais, como a distribuição percentual de diferentes tipos de alimentos em uma dieta ou a distribuição percentual de votos em uma eleição.

Peça aos alunos para interpretar os dados apresentados nos gráficos e fazer inferências com base nas porcentagens fornecidas.

4. **Jogos de Porcentagem:**

Desenvolva jogos de tabuleiro ou jogos de computador que envolvam o cálculo de porcentagens. Por exemplo, um jogo em que os alunos precisam calcular a porcentagem de território controlado por diferentes países em um mapa.

Os jogos podem tornar o aprendizado mais envolvente e oferecer oportunidades para os alunos praticarem suas habilidades de cálculo de porcentagem de uma forma divertida.

5. **Atividades de Comparação:**

Peça aos alunos para comparar diferentes porcentagens e determinar qual é maior ou menor. Por exemplo, "Qual é maior, 25% de 80 ou 20% de 100?"

Essas atividades ajudam os alunos a desenvolver uma compreensão mais intuitiva das porcentagens e como elas se comparam umas às outras.

Com um planejamento a partir desses exemplos, é possível que os alunos consigam realizar as atividades a seguir (Figura 2 e 3):

Figura 2 Questão 1

Questão 01 - A Prova Paraná tem 52 questões. Sophia acertou 50% da Prova. Pergunta-se, quantas questões ela acertou? Justifique sua resposta

Fonte: Dos autores (2024).

Durante a atividade, os participantes serão desafiados a aplicar seus conhecimentos sobre frações, decimais e porcentagens na resolução das questões.

Figura 3 Questão 2

Questão 02 - Observe a carga da bateria do celular do Pedro. Marque a alternativa que representa a porcentagem de carga que falta para o completar o carregamento total da bateria do celular de Pedro. **Justifique sua resposta.**

a) 0,50 = 50%
b) 0,25 = 25%
c) 0,65 = 65%
d) 0,75 = 75%

Fonte: Dos autores (2024).

Após um período dedicado à resolução, cada grupo compartilhará suas abordagens com os demais presentes, promovendo uma troca de ideias enriquecedora. Além disso, será apresentado o processo de resolução proposto pelo proponente do curso, servindo como referência para a discussão posterior.

Com base nas resoluções, algumas questões para discussão e para o registro por escrito serão propostas:

1. Que habilidades da BNCC cada questão aborda?
2. Quais os conteúdos envolvidos?
3. Alunos dos sextos anos teriam condições de resolver? Que conteúdos ou que processos de resoluções eles utilizariam? Que tipos de erros poderiam estar presentes na resolução da questão, neste nível de ensino? Por quê?
4. E alunos dos sétimos anos? Que conteúdos ou que processos de resoluções eles utilizariam? Que tipos de erros poderiam estar presentes na resolução da questão, neste nível de ensino? Por quê?
5. E alunos dos sétimos anos? Que conteúdos ou que processos de resoluções eles utilizariam? Que tipos de erros poderiam estar presentes na resolução da questão, neste nível de ensino? Por quê?
6. E alunos dos oitavos anos? Que conteúdo ou que processos de resoluções eles utilizariam? Que tipos de erros poderiam estar presentes na resolução da questão, neste nível de ensino? Por quê?

Após essa primeira parte do encontro, serão distribuídas folhas para os grupos com algumas resoluções (oito ao todo) dos alunos do Ensino Fundamental II (sexto ao nono ano) para cada uma dessas duas questões, além de algumas perguntas que os professores podem fazer para realizar a Análise dos erros, como por exemplo:

1. Quais conceitos matemáticos os alunos aplicaram corretamente nesta questão?
2. Quais conceitos matemáticos os alunos aplicaram incorretamente?
3. Que estratégias os alunos usaram para resolver o problema?
4. Onde os alunos parecem ter enfrentado dificuldades?
5. Quais foram os erros mais comuns cometidos pelos alunos nesta questão?
6. Existem padrões nos erros cometidos pelos alunos?
7. Como os erros dos alunos refletem suas compreensões conceituais?
8. Que tipos de equívocos os alunos podem ter feito ao interpretar o enunciado da questão?
9. Que conceitos prévios os alunos podem estar confundindo ou não compreendendo completamente?
10. Como os erros dos alunos podem ser abordados para promover uma compreensão mais profunda do conceito em questão?

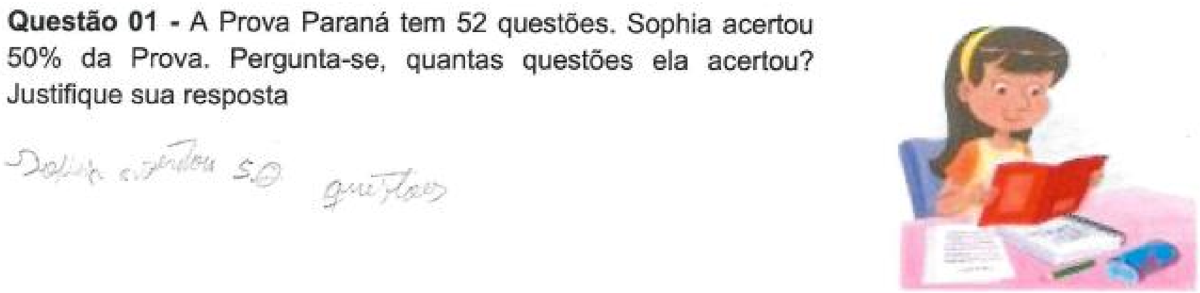
4.1.1 Primeira questão – excertos de erros de alunos dos sextos ao nono ano

Nesta seção, serão apresentados exemplos representativos dos erros cometidos por alunos em diferentes séries, do 6º ao 9º ano. Essa análise detalhada dos erros servirá como ponto de partida para um próximo encontro, no qual serão realizadas reflexões e discussões aprofundadas sobre as dificuldades enfrentadas pelos estudantes no entendimento dos conceitos matemáticos abordados.

Ao examinar esses exemplos, será possível identificar padrões comuns de equívocos e elaborar estratégias pedagógicas mais eficazes para auxiliar os alunos no processo de aprendizagem.

Na questão apresentada na Figura 3, o aluno do sexto ano respondeu que Sophia acertou 52 questões, indicando uma possível falta de compreensão do termo “50%”, sugerindo uma confusão com o valor de 100%. Além disso, o estudante não tentou realizar nenhum cálculo para determinar o número correto de questões acertadas por Sophia.

Figura 4 Erro apresentado pelo aluno A176A

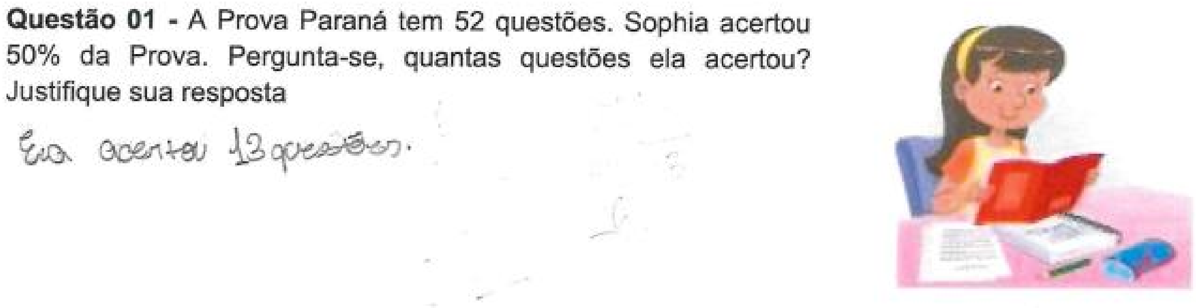


Fonte: Dos autores (2024).

Ao afirmar que ela acertou todas as 50 questões, o aluno (Figura 3) demonstra uma interpretação incorreta da porcentagem fornecida. Assim, é necessário esclarecer o conceito de porcentagem e realizar os cálculos apropriados para encontrar a quantidade correta de questões que Sophia acertou.

Na Figura 5, outro aluno respondeu que Sophia acertou apenas 13 questões, sem demonstrar qualquer tentativa de cálculo. Essa resposta sugere uma falta de compreensão dos termos “50%” e “metade”, revelando uma possível dificuldade na interpretação de porcentagens. A resposta também levanta a suspeita de que o aluno tenha arriscado um palpite, sem base em qualquer raciocínio ou método de resolução ou que ela tenha dividido por quatro, chegando a 13, o que seria 25%.

Figura 5 Erro apresentado pelo aluno A136A

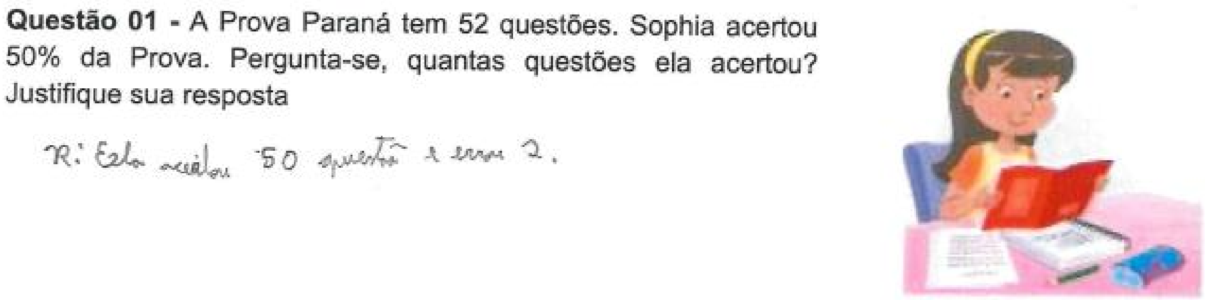

Questão 01 - A Prova Paraná tem 52 questões. Sophia acertou 50% da Prova. Pergunta-se, quantas questões ela acertou? Justifique sua resposta

Ela acertou 13 questões.

Fonte: Dos autores (2024).

O aluno A126A (Figura 6) também demonstra desconhecimento do significado do termo “50%”, como evidenciado pela sua resposta de que Sophia acertou 50 questões e errou duas. Esta resposta sugere uma confusão entre os termos “50%” e “50”, indicando que o aluno pode ter interpretado erroneamente a porcentagem como uma quantidade absoluta de questões, ao invés de uma proporção em relação ao total.

Figura 6 Erro apresentado pelo aluno A126A


Questão 01 - A Prova Paraná tem 52 questões. Sophia acertou 50% da Prova. Pergunta-se, quantas questões ela acertou? Justifique sua resposta

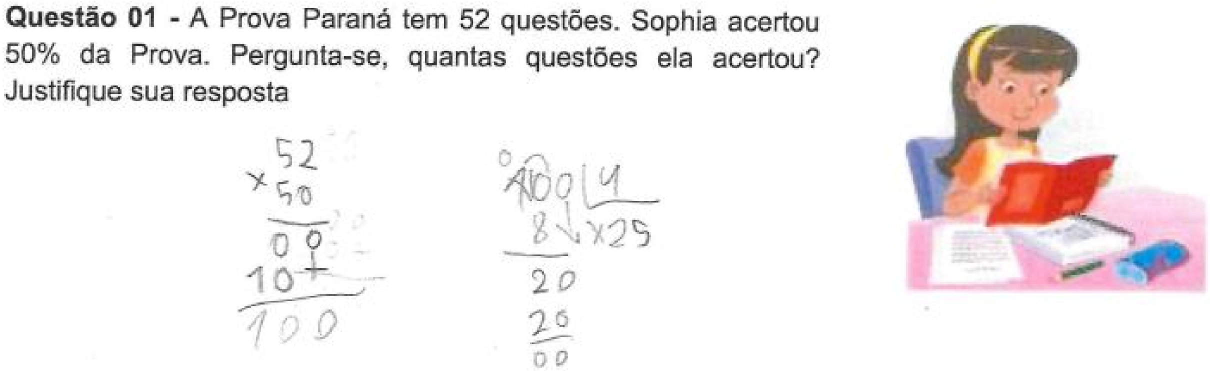
R: Ela acertou 50 questões e errou 2.

Fonte: Dos autores (2024).

Ao afirmar que Sophia acertou exatamente metade das questões, o aluno pode ter presumido que 50% de acertos significavam 50 acertos de um total de 52, revelando uma interpretação equivocada dos conceitos matemáticos envolvidos. Essa confusão ressalta a importância de esclarecer e reforçar os conceitos de porcentagem e sua aplicação correta em situações de resolução de problemas.

O aluno A246B (Figura 7) evidencia uma tentativa de cálculo percentual ao multiplicar o total de questões (52) pela porcentagem requerida (50%) e, posteriormente, dividir por 100 para obter o valor correspondente a 50%. Entretanto, a execução correta da multiplicação falhou, resultando em uma resposta de 100.

Figura 7 Erro apresentado pelo aluno A246B

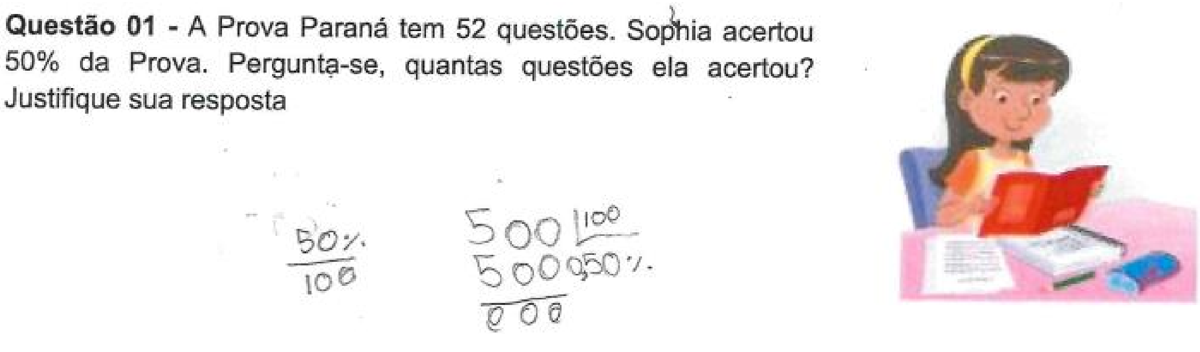


Fonte: Dos autores (2024).

Adicionalmente, ao tentar corrigir o erro através da divisão, o aluno dividiu o resultado obtido (100) por quatro, gerando 25% em vez dos 50% solicitados. Isso indica uma compreensão parcial do procedimento de cálculo necessário para determinar uma porcentagem, revelando lacunas na aplicação efetiva dos conceitos e operações matemáticas. O equívoco ressalta a importância de reforçar e consolidar o entendimento dos alunos em relação aos cálculos percentuais, visando aprimorar suas habilidades de resolução de problemas nessa área.

O aluno A127A (Figura 8), do sétimo ano, ao lidar com a questão que solicitava a quantidade de questões que Sophia acertou, adotou uma abordagem incorreta ao transformar a porcentagem em uma fração $(\frac{50\%}{100})$. Essa transformação já é um equívoco inicial, uma vez que a porcentagem deve ser entendida como uma fração com denominador 100.

Figura 8 Erro apresentado pelo aluno A127A

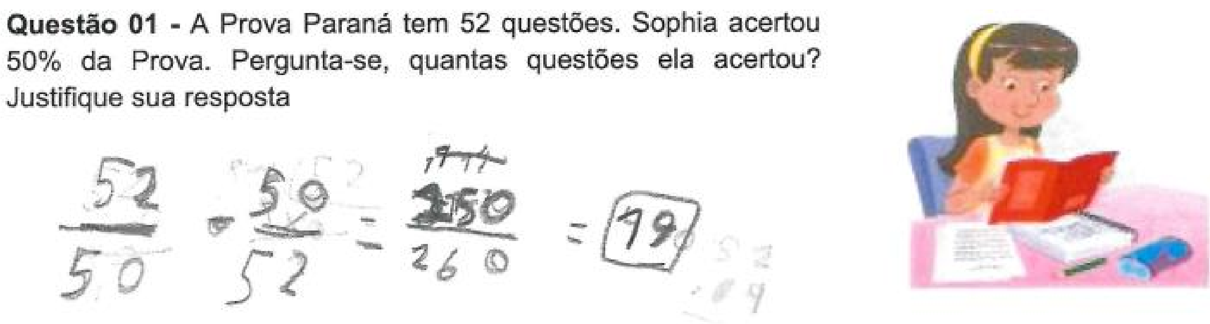


Fonte: Dos autores (2024).

Em seguida, ele realizou a divisão de 50% por 100, chegando ao resultado de $0{,}50\%$. No entanto, esse resultado é outra representação de 50%, o que indica que o aluno não compreendeu corretamente o conceito de porcentagem e sua conversão em fração decimal. Portanto, seu erro reside na interpretação equivocada da porcentagem e na aplicação inadequada das operações matemáticas.

No problema envolvendo a quantidade de acertos de Sophia na prova Paraná, o aluno do oitavo ano, A018A (Figura 9), cometeu diversos equívocos em sua abordagem. Primeiramente, ele tentou representar a quantidade total de questões (52) e a porcentagem de acertos de Sophia (50%) como uma fração $(\frac{52}{50})$, o que já é um erro conceitual. Em seguida, ele inverteu essa fração para $(\frac{50}{52})$ e prosseguiu realizando uma operação de subtração entre as duas frações, o que não faz sentido matematicamente.

Figura 9 Erro apresentado pelo aluno A018A



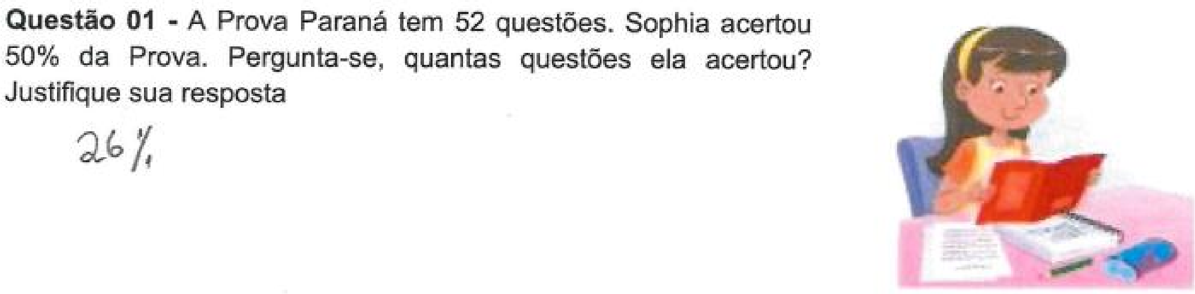
Fonte: Dos autores (2024).

Esse procedimento resultou em uma fração sem coerência $(\frac{250}{260})$ e, por fim, em um valor final de 19, que não possui significado algum dentro do contexto do problema. Portanto, seu erro reside na compreensão inadequada do conceito de porcentagem, na manipulação incorreta das frações e na aplicação equivocada das operações matemáticas.

Dos 49 alunos do nono ano que responderam à questão 1, todos acertaram o número de acertos de Sophia, exceto três alunos optaram por não responder, todos pertencentes à turma 9º B. Entre os que chegaram ao número de questões respondidas corretamente por Sophia (26), o aluno A019A (Figura 10) conseguiu determinar corretamente o número de acertos.

Contudo, ao fornecer sua resposta, ele cometeu um equívoco ao transformar esse resultado em porcentagem (26%), ignorando o enunciado que indicava que Sophia havia acertado 50% das questões. Essa interpretação equivocada do problema resultou em uma resposta incorreta por parte do aluno.

Figura 10 Erro apresentado pelo aluno A019A



Questão 01 - A Prova Paraná tem 52 questões. Sophia acertou 50% da Prova. Pergunta-se, quantas questões ela acertou? Justifique sua resposta

26%

Fonte: Dos autores (2024).

A seguir, serão apresentados quatro exemplos de erros encontrados na resolução da questão 2. Esses exemplos abordam diferentes interpretações equivocadas dos alunos em relação ao conceito de porcentagem e à aplicação de cálculos percentuais. Cada exemplo oferecerá *insights* sobre as dificuldades específicas enfrentadas pelos alunos ao lidar com problemas desse tipo, destacando lacunas no entendimento conceitual e na habilidade de realizar cálculos percentuais com precisão.

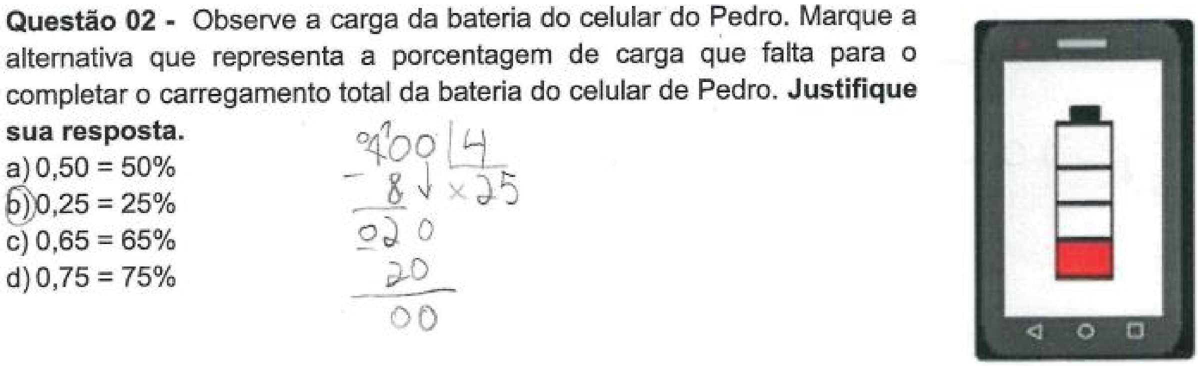
A análise desses erros fornecerá uma visão mais aprofundada das áreas que requerem atenção e intervenção pedagógica para promover uma compreensão mais sólida dos conceitos matemáticos envolvidos.

4.1.2 Segunda questão – excertos de erros de alunos dos sextos ao nono ano

São abordados exemplos de erros cometidos por alunos ao resolverem a questão 2, destacando as dificuldades enfrentadas na compreensão e aplicação de conceitos relacionados à porcentagem. A análise desses equívocos proporcionará *insights* sobre as lacunas no entendimento dos estudantes e os obstáculos específicos encontrados ao lidar com problemas que envolvem cálculos percentuais.

A análise do erro cometido pelo aluno A236B (Figura 11) revela uma interpretação equivocada do enunciado da questão. Ao selecionar a alternativa d) $0{,}25 = 25\%$*, o aluno demonstra uma compreensão inadequada do problema apresentado. Em vez de identificar corretamente a porcentagem de carga restante no celular, que seria representada por* 75% $(0{,}75)$*, o aluno interpreta a porcentagem fornecida como a quantidade de carga já utilizada ou carregada, correspondente a* 25%.

Figura 11 Erro apresentado pelo aluno A236B



Questão 02 - Observe a carga da bateria do celular do Pedro. Marque a alternativa que representa a porcentagem de carga que falta para o completar o carregamento total da bateria do celular de Pedro. **Justifique sua resposta.**

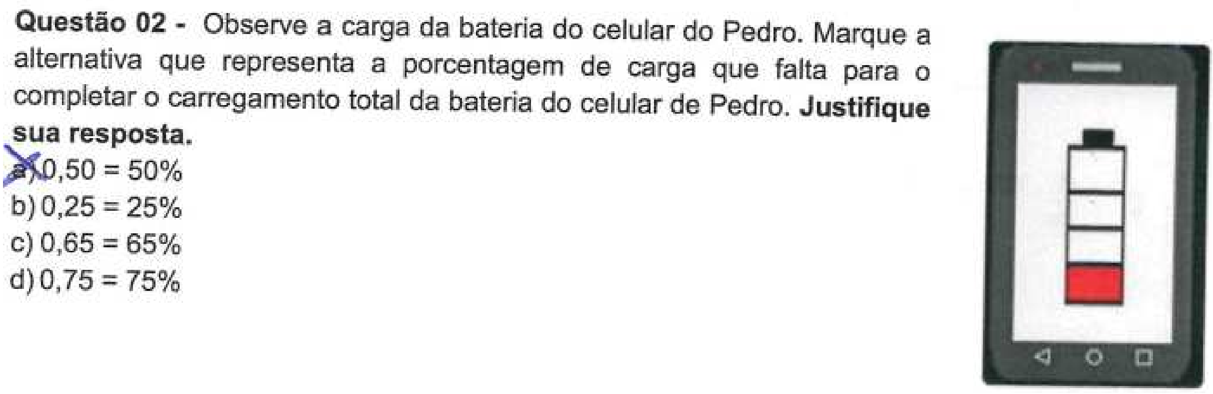
a) 0,50 = 50%
b) 0,25 = 25%
c) 0,65 = 65%
d) 0,75 = 75%

Fonte: Dos autores (2024).

Esse equívoco sugere uma falta de atenção na leitura do enunciado, apesar de saber que $0{,}25 = 25\%$. A análise desse erro ressalta a importância de desenvolver habilidades de interpretação de problemas matemáticos, bem como consolidar o entendimento dos conceitos percentuais, para evitar equívocos semelhantes no futuro.

O erro apresentado pelo aluno A277A (Figura 12) indica uma possível falta de compreensão tanto do enunciado quanto da figura. Ao selecionar a alternativa a) $0{,}50 = 50\%$, o aluno demonstra uma interpretação inadequada da questão, ignorando o contexto apresentado e a finalidade do problema. O ideal, seria que o aluno pagasse, por exemplo, 100% da bateria e retirasse os 25% do que já está carregado, para então descobrir quantos faltava para completar o carregamento total da bateria do celular de Pedro (75%).

Figura 12 Erro apresentado pelo aluno A277A

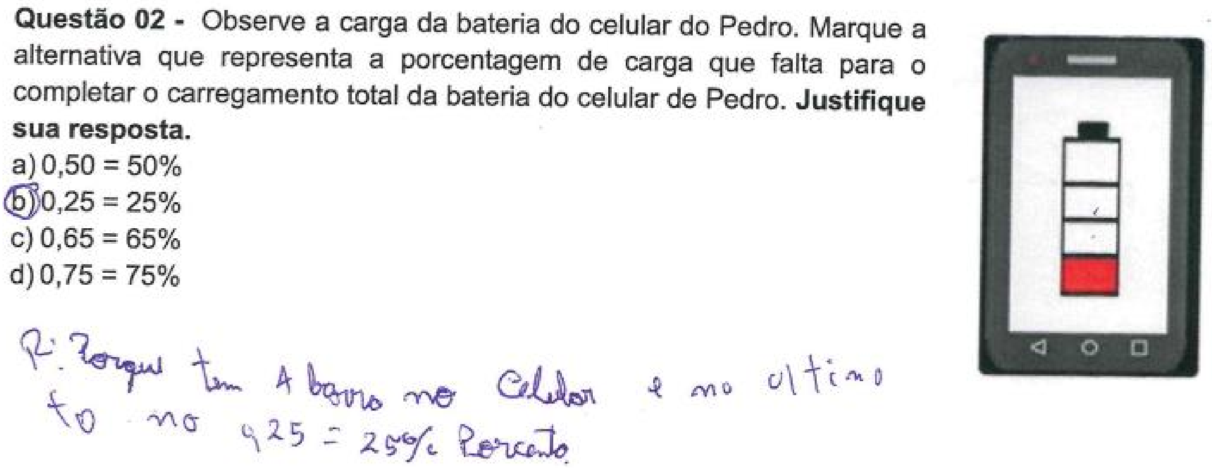

Questão 02 - Observe a carga da bateria do celular do Pedro. Marque a alternativa que representa a porcentagem de carga que falta para o completar o carregamento total da bateria do celular de Pedro. **Justifique sua resposta.**
a) 0,50 = 50%
b) 0,25 = 25%
c) 0,65 = 65%
d) 0,75 = 75%

Fonte: Dos autores (2024).

Além disso, o aluno não fez qualquer tentativa de realizar cálculos ou analisar a situação proposta, o que evidencia uma possível falta de conhecimento sobre o tema abordado.

O erro cometido pelo aluno A187A (Figura 13) ao selecionar a alternativa b) $0{,}25 = 25\%$ também pode ser atribuído a uma falha de interpretação. O aluno parece ter entendido erroneamente que a figura representava o que já estava carregado no celular, levando-o a escolher a opção correspondente a 25%.

Figura 13 Erro apresentado pelo aluno A187A


Questão 02 - Observe a carga da bateria do celular do Pedro. Marque a alternativa que representa a porcentagem de carga que falta para o completar o carregamento total da bateria do celular de Pedro. **Justifique sua resposta.**
a) 0,50 = 50%
b) 0,25 = 25%
c) 0,65 = 65%
d) 0,75 = 75%

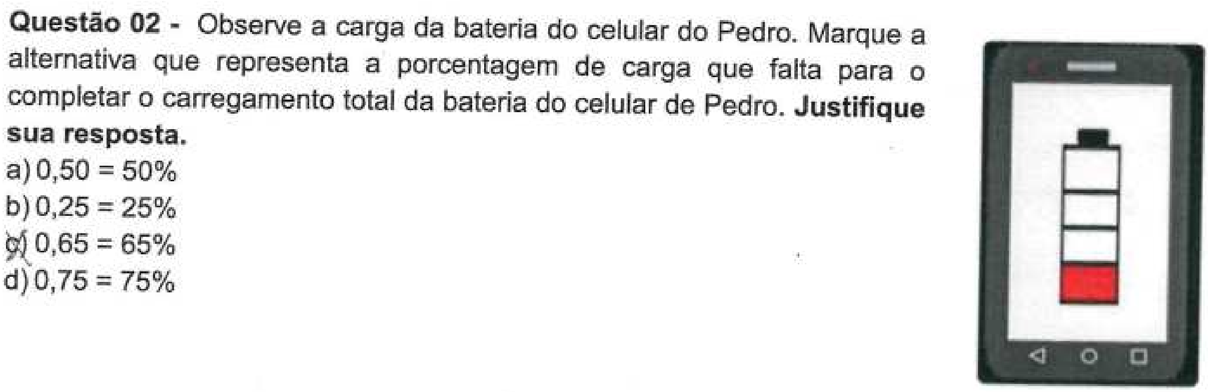
R: Porque tem A barra no Celular e no ultimo to no 0,25 = 25% Porcento

Fonte: Dos autores (2024).

No entanto, ao contrário do caso do aluno A297A, este aluno expressou sua interpretação ao justificar sua resposta. Ao afirmar “Porque tem a barra no celular e no último tá no $0{,}25 = 25\%$ porcento”, ele revela sua compreensão da figura, mas sua interpretação está equivocada, pois a pergunta buscava saber quanto ainda faltava para carregar o celular, não o que já estava carregado. Essa análise destaca a importância de não apenas compreender a questão corretamente, mas também de interpretar adequadamente as informações apresentadas para chegar à resposta correta.

A resposta fornecida pelo aluno A037A (Figura 14) não corresponde à pergunta feita, o que indica uma falta de compreensão do enunciado ou uma tentativa arbitrária de responder à questão sem considerar o contexto ou a lógica envolvida.

Figura 14 Erro apresentado pelo aluno A037A


Questão 02 - Observe a carga da bateria do celular do Pedro. Marque a alternativa que representa a porcentagem de carga que falta para o completar o carregamento total da bateria do celular de Pedro. **Justifique sua resposta.**

a) 0,50 = 50%

b) 0,25 = 25%

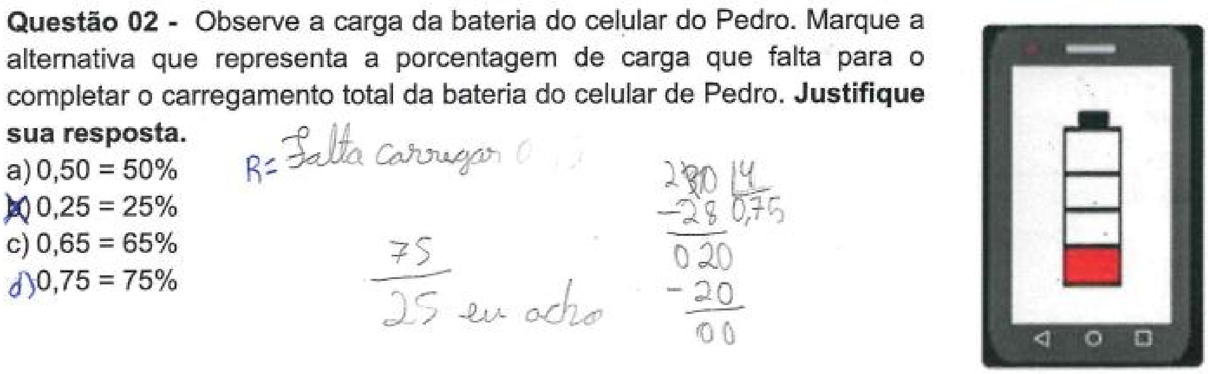
c) 0,65 = 65%

d) 0,75 = 75%

Fonte: Dos autores (2024).

O aluno do oitavo ano, A058A (Figura 15), selecionou a alternativa b) $0{,}25 = 25\%$, e sua resposta, juntamente com os cálculos realizados, revela uma falta de interpretação completa tanto do problema quanto da imagem apresentada na questão.

Figura 15 Erro apresentado pelo aluno A058A


Questão 02 - Observe a carga da bateria do celular do Pedro. Marque a alternativa que representa a porcentagem de carga que falta para o completar o carregamento total da bateria do celular de Pedro. **Justifique sua resposta.**

a) 0,50 = 50%

b) 0,25 = 25%

c) 0,65 = 65%

d) 0,75 = 75%

R= Falta carregar

$\frac{75}{25}$ eu acho

Fonte: Dos autores (2024).

Ao abordar o que faltava para carregar (75%) e o que já havia sido carregado (25%), o aluno transformou esses valores em uma fração $(\frac{75}{25})$ e, em seguida, realizou uma divisão $(30{:}\,4)$, chegando ao valor de $0{,}75$. A sua abordagem carece de uma lógica clara na motivação por trás do cálculo da divisão e da formulação da fração, demonstrando uma interpretação inadequada do problema.

O aluno do nono ano, A219A (Figura 16), selecionou a alternativa b) $0{,}25 = 25\%$, porém, não realizou qualquer tipo de cálculo ou rascunho que possa fornecer alguma pista sobre o que ele pode ter pensado ao assinalar essa alternativa. Isso sugere que o aluno pode ter confundido o que o problema solicitava. Em vez de selecionar a alternativa que indicava quantos faltava para carregar, o aluno optou pela alternativa que apresentava o que já estava carregado. Essa interpretação incorreta do problema pode ter levado à escolha errada da resposta.

Figura 16 Erro apresentado pelo aluno A219A

Questão 02 - Observe a carga da bateria do celular do Pedro. Marque a alternativa que representa a porcentagem de carga que falta para o completar o carregamento total da bateria do celular de Pedro. **Justifique sua resposta.**

a) 0,50 = 50%
b) 0,25 = 25%
c) 0,65 = 65%
d) 0,75 = 75%

Fonte: Dos autores (2024)

Essas situações destacam a importância de uma compreensão sólida do enunciado da questão e da aplicação de raciocínio lógico na escolha da resposta, em vez de simplesmente adivinhar ou fornecer uma resposta sem embasamento.

Ao finalizar este esse primeiro encontro, pretende-se sensibilizar os professores sobre a importância de analisar os erros dos alunos como uma ferramenta pedagógica essencial. Os exemplos apresentados ilustram diferentes tipos de equívocos, desde problemas de interpretação até falta de familiaridade com conceitos básicos. No próximo encontro, os professores participantes serão conduzidos a um estudo teórico sobre análise de erros na educação básica, por meio da leitura e discussão de um artigo específico sobre o tema.

4.2 Segundo encontro - Análise dos erros dos alunos do Ensino Fundamental II – discussão teórica (2 horas)

No segundo encontro, os professores participantes mergulharão no estudo de um artigo sobre análise de erros na educação básica. Será uma oportunidade para refletirem sobre as práticas pedagógicas adotadas, identificarem possíveis lacunas no ensino e explorarem novas estratégias para lidar com as dificuldades dos alunos.

O artigo escolhido foi: "Investigação do Erro da Matemática: Itinerários Didáticos e Históricos" de Neuza Bertoni Pinto (2023)[1] que analisa um estudo no campo da Didática e outro na área da História da Educação Matemática, com ênfase no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Pinto (2000), em estudo na perspectiva didática, defende que o erro não seja apenas um fenômeno observável para o aluno, mas também para o professor. Esse é um aspecto crucial no curso hora proposto.

Durante a atividade, os participantes serão desafiados a relacionar as informações do artigo com suas próprias experiências em sala de aula, buscando identificar padrões e tendências nos erros dos alunos.

4.3 Terceiro encontro - Análise dos erros dos alunos do Ensino Fundamental II – terceira e quarta questões (2 horas)

No terceiro encontro, a dinâmica será a mesma do primeiro encontro, porém com foco nas questões 3 e 4 (Figuras 17 e 18 respectivamente). Os participantes terão a oportunidade de resolver as questões em grupo, compartilhar suas estratégias e discutir possíveis abordagens pedagógicas para lidar com os erros dos alunos em diferentes etapas de aprendizagem.

Retomando as questões do primeiro encontro:

1. Que habilidades da BNCC cada questão aborda?
2. Quais os conteúdos envolvidos?
3. Alunos dos sextos anos teriam condições de resolver? Que conteúdos ou que processos de resoluções eles utilizariam? Que tipos de erros poderiam estar presentes na resolução da questão, neste nível de ensino? Por quê?

---

[1] Pinto, N. B., & Berticelli, D. G. D. (2023). EDITORIAL DOSSIÊ - O ERRO EM MATEMÁTICA EM PERSPECTIVA HISTÓRICA. *Revista De História Da Educação Matemática*, *9*, 1–3. Recuperado de https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/615. Acesso em: 13 de fevereiro de 2024.

4. E alunos dos sétimos anos? Que conteúdos ou que processos de resoluções eles utilizariam? Que tipos de erros poderiam estar presentes na resolução da questão, neste nível de ensino? Por quê?

5. E alunos dos sétimos anos? Que conteúdos ou que processos de resoluções eles utilizariam? Que tipos de erros poderiam estar presentes na resolução da questão, neste nível de ensino? Por quê?

6. E alunos dos oitavos anos? Que conteúdo ou que processos de resoluções eles utilizariam? Que tipos de erros poderiam estar presentes na resolução da questão, neste nível de ensino? Por quê?

Novamente, serão distribuídas folhas para os grupos com algumas resoluções (oito ao todo) dos alunos do Ensino Fundamental II (sexto ao nono ano) para cada uma dessas duas questões.

Ademais, é importante saber responder à pergunta: **Quais os conhecimentos necessários para a resolução dessa questão?** No caso das questões três e quatro (Figura 17 e 18), além das atividades de porcentagem mencionadas acima para resolver as atividades um e dois (Figura 2 e 3), é importante que os alunos Fração e Número Decimal Alguns exemplos de atividades preparatórias são:

1. **Jogo de Cartas de Frações:**

Forneça aos alunos um conjunto de cartas de baralho com os naipes removidos. Cada carta representa uma fração ou um número decimal. Os alunos devem formar pares de cartas que sejam equivalentes. Por exemplo, o par $\frac{1}{2}$ e $0{,}5$.

Este jogo ajuda os alunos a visualizar a equivalência entre frações e números decimais e a praticar suas habilidades de correspondência.

2. **Modelagem com Material Manipulável:**

Use blocos de frações ou tiras de papelão para representar visualmente frações e números decimais. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ pode ser representado por dois blocos iguais, enquanto $0{,}5$ pode ser representado por meio bloco.

Os alunos podem manipular os materiais para explorar a relação entre frações e números decimais e desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos.

3. **Quebra-Cabeças de Frações e Decimais:**

Crie quebra-cabeças que os alunos precisam resolver correspondendo frações a números decimais. Por exemplo, em um quebra-cabeça, pode-se ter a fração $\frac{3}{4}$ correspondendo ao número decimal $0{,}75$.

Essa atividade desafia os alunos a aplicar seus conhecimentos de frações e números decimais para resolver problemas de quebra-cabeça.

4. Atividade de Comparação:

Peça aos alunos para comparar diferentes frações e números decimais e determinar qual é maior ou menor. Por exemplo, "Qual é maior, $\frac{1}{3}$ ou $0{,}4$?"

Essa atividade ajuda os alunos a desenvolver uma compreensão intuitiva de como frações e números decimais se comparam uns aos outros.

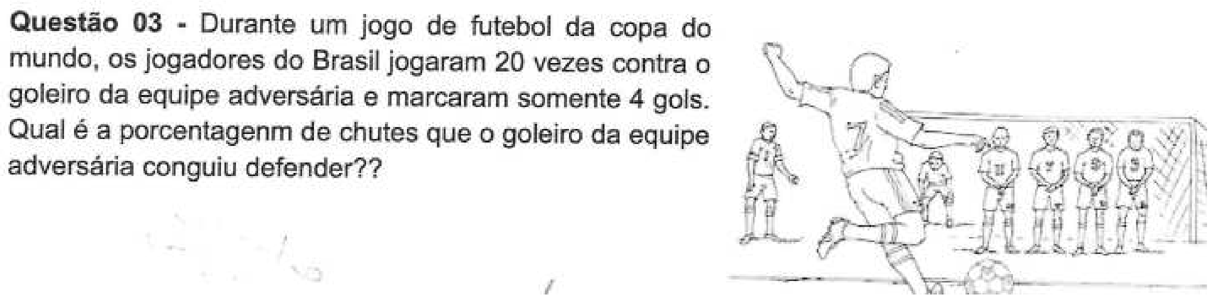
5. Problemas do Mundo Real:

Apresente aos alunos problemas do mundo real que envolvam frações e números decimais, como dividir uma pizza entre amigos (frações) ou calcular o preço total de itens comprados em uma loja (números decimais).

Esses problemas ajudam os alunos a ver a relevância dos conceitos de frações e números decimais em situações cotidianas.

Essas atividades variadas oferecem aos alunos diferentes maneiras de explorar e praticar frações e números decimais, ajudando a reforçar conceitos importantes e a promover uma compreensão sólida desses tópicos matemáticos, permitindo que eles dominem as habilidades para responder as questões três e quatro (Figura 17 e 18).

Figura 17 Questão 3

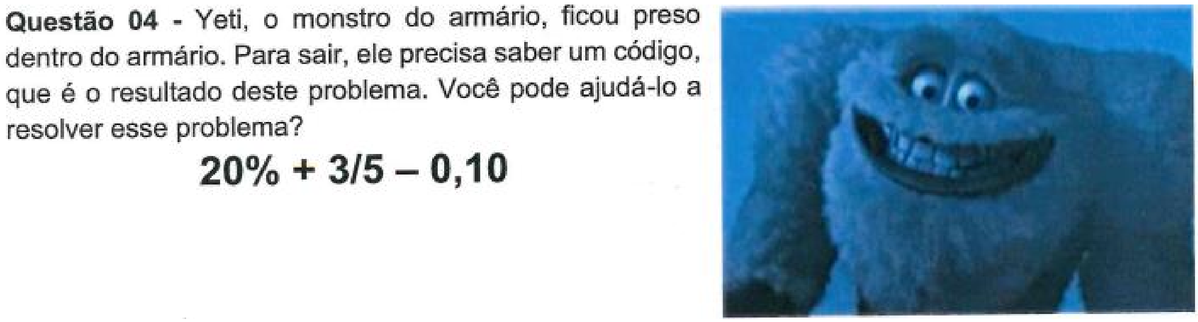


Questão 03 - Durante um jogo de futebol da copa do mundo, os jogadores do Brasil jogaram 20 vezes contra o goleiro da equipe adversária e marcaram somente 4 gols. Qual é a porcentagenm de chutes que o goleiro da equipe adversária conguiu defender??

Fonte: Dos autores (2024)

Durante a discussão, os participantes serão incentivados a refletir sobre como podem adaptar suas práticas de ensino para atender às necessidades específicas de cada grupo de alunos.

Figura 18 Questão 4



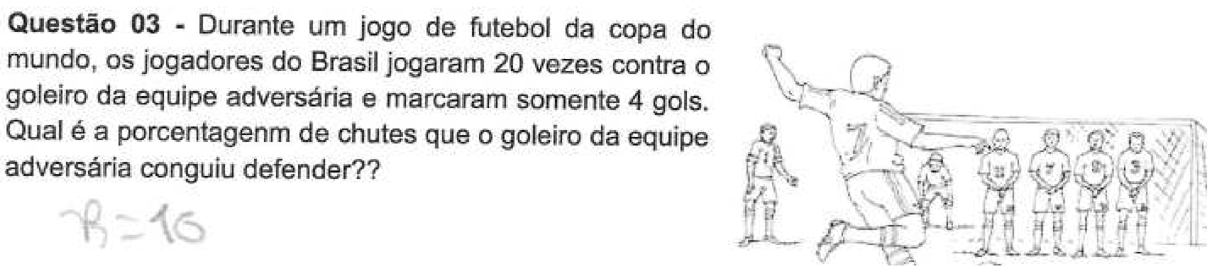
Fonte: Dos autores (2024).

Na sequência, serão abordados exemplos de erros observados nas respostas fornecidas para as questões três e quatro, ilustradas pelas Figuras 16 e 17, respectivamente.

4.3.1 Terceira questão – excertos de erros de alunos dos sextos ao nono ano

O aluno A087A (Figura 19), ao enfrentar a questão mencionada, respondeu com o número 16 sem efetuar qualquer cálculo escrito prévio. Esse comportamento sugere uma possível falta de compreensão da pergunta ou um desconhecimento do conceito de porcentagem. No caso em questão, a resposta estaria parcialmente correta.

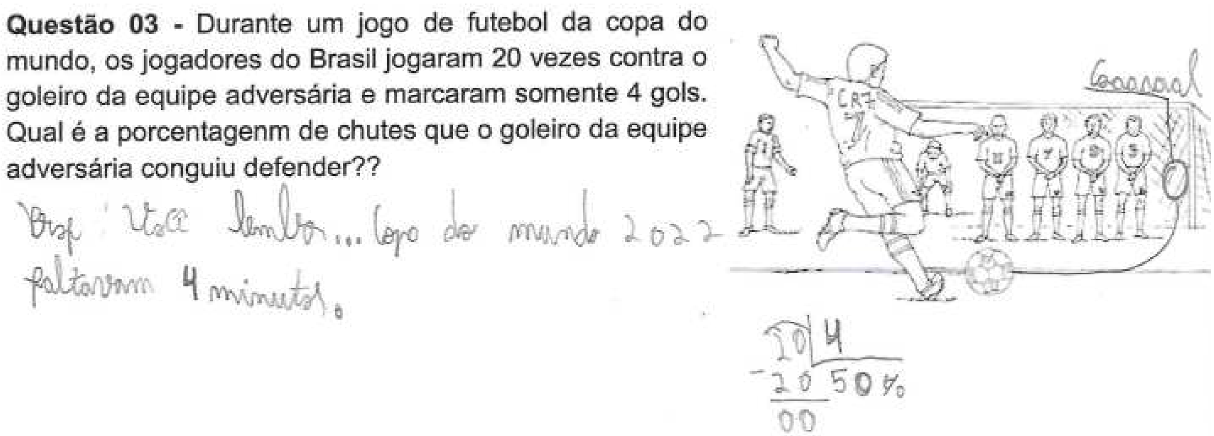
Figura 189 Erro apresentado pelo aluno A087A



Fonte: Dos autores (2024).

É plausível inferir que o aluno tenha tentado resolver a primeira etapa do problema, talvez realizando uma subtração entre o número total de chutes e os gols marcados pelos jogadores brasileiros. Essa abordagem evidencia mostra que ele pode não saber calcular porcentagem, mas ele sabe quantos chutes foram defendidos pelo goleiro. O aluno A017B (Figura 20), ao enfrentar a mesma questão, também incorreu no erro de interpretação observado no caso anterior (A087A). No entanto, em vez de realizar uma subtração, optou por dividir o número total de chutes (20) pelo número de gols marcados pelos jogadores brasileiros (4). Contudo, o resultado dessa divisão, cinco, foi equivocadamente transformado em porcentagem, resultando em 50%.

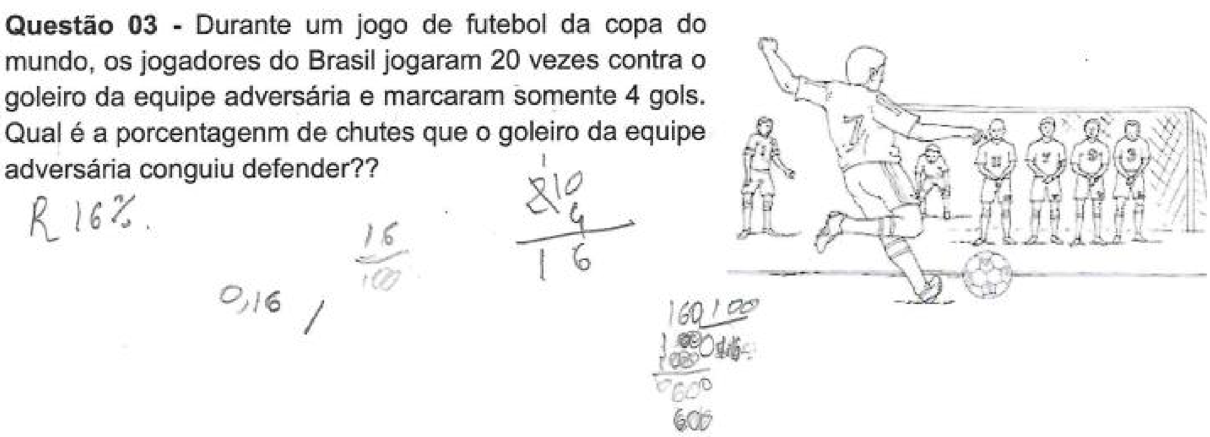
Figura 20 Erro apresentado pelo aluno A017B



Fonte: Dos autores (2024).

O aluno A047B (Figura 21) demonstrou desconhecimento sobre como calcular uma porcentagem a partir de números naturais, conforme evidenciado por suas tentativas de resposta. Inicialmente, realizou uma subtração ($20 - 4 = 16$), seguida de tentativas de representar esse número de diversas maneiras, incluindo como número decimal ($0{,}16$), fração ($\frac{16}{100}$) e através de uma divisão ($160 \div 100$).

Figura 21 Erro apresentado pelo aluno A047B

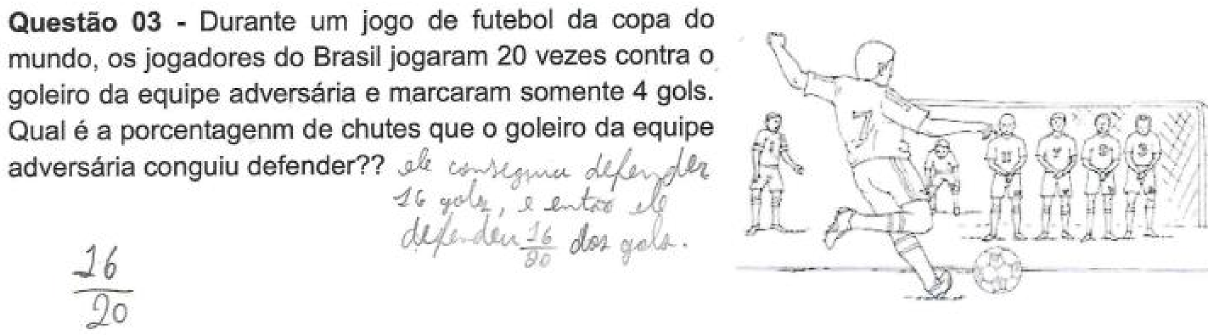


Fonte: Dos autores (2024).

Por fim, concluiu que a resposta para o problema seria 16%. Essa abordagem indica uma confusão sobre os conceitos envolvidos na resolução do problema e uma tentativa de chegar a uma resposta válida sem compreender completamente o processo matemático necessário.

O aluno A218A (Figura 22) demonstrou uma abordagem incorreta ao tentar resolver o problema. Ele transformou as tentativas de gols bem-sucedidos ou não em uma fração ($\frac{20}{16}$), utilizando o número 16 que resultou de uma subtração ($20 - 4$). Sua resposta indicou: "Ele conseguiu defender 16 gols, e então ele defendeu $\frac{16}{20}$ dos gols".

Figura 22 Erro apresentado pelo aluno A218A



Questão 03 - Durante um jogo de futebol da copa do mundo, os jogadores do Brasil jogaram 20 vezes contra o goleiro da equipe adversária e marcaram somente 4 gols. Qual é a porcentagenm de chutes que o goleiro da equipe adversária conguiu defender?? ele conseguiu defender 16 gols, e então ele defendeu $\frac{16}{20}$ dos gols.

$\frac{16}{20}$

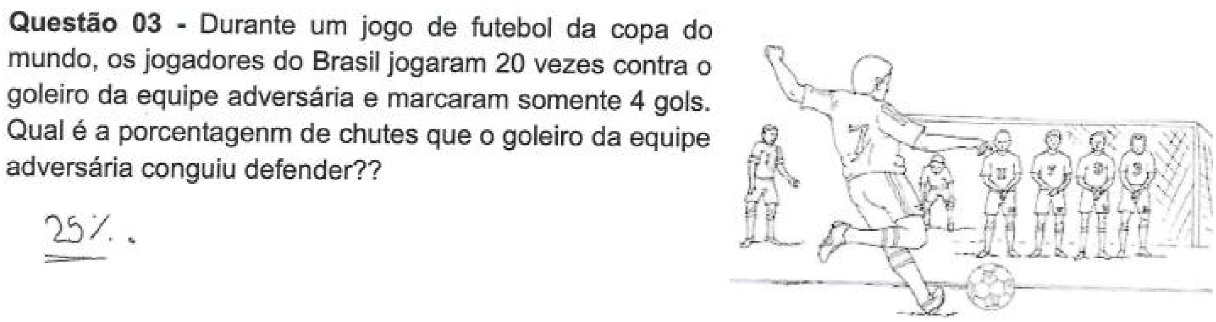
Fonte: Dos autores (2024).

No entanto, o problema solicitava a porcentagem de chutes que o goleiro da equipe adversária conseguiu defender e não a fração do total de chutes defendidos. Essa interpretação equivocada evidencia uma falta de compreensão sobre o que foi solicitado no enunciado da questão e sobre como calcular porcentagens a partir de dados fornecidos.

O aluno do nono ano, A199A (Figura 23), simplesmente respondeu 25% sem demonstrar qualquer cálculo ou raciocínio adicional. Esta resposta é incorreta, pois não reflete uma análise adequada do problema. A pergunta buscava a porcentagem de chutes defendidos pelo goleiro da equipe adversária, não a porcentagem de chutes realizados pela equipe brasileira.

Assim, a resposta correta deveria indicar a porcentagem de chutes que o goleiro adversário conseguiu defender em relação ao total de tentativas de gol feitas pela equipe brasileira, que seria de 80% (16 gols defendidos de um total de 20 tentativas).

Figura 23 Erro apresentado pelo aluno A199A


Questão 03 - Durante um jogo de futebol da copa do mundo, os jogadores do Brasil jogaram 20 vezes contra o goleiro da equipe adversária e marcaram somente 4 gols. Qual é a porcentagenm de chutes que o goleiro da equipe adversária conguiu defender??

25%.

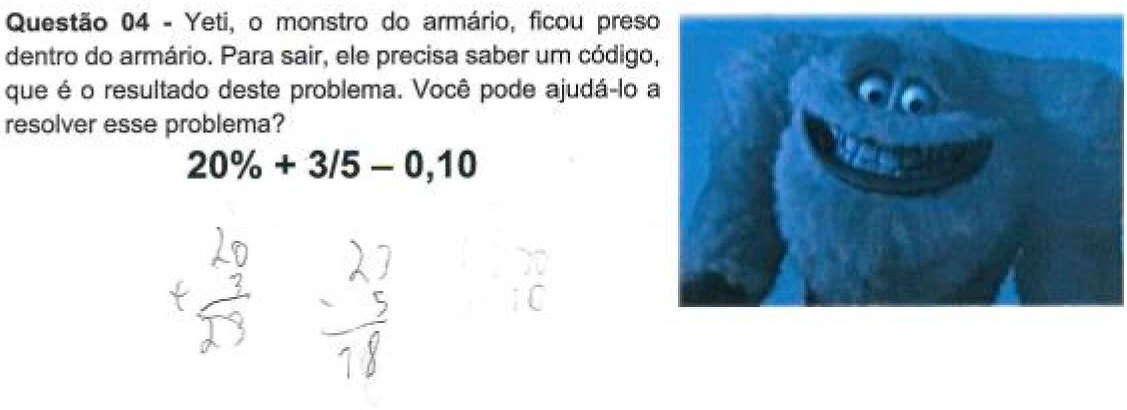
Fonte: Dos autores (2024).

A seguir, serão apresentados os excertos da questão quatro, os quais destacam diferentes abordagens e erros cometidos pelos alunos ao tentarem resolver o problema proposto.

4.3.2 Quarta questão – excertos de erros de alunos dos sextos ao nono ano

O aluno A036A (Figura 24) cometeu alguns erros na resolução da questão. Primeiro, ao retirar a porcentagem dos 20%, ele converteu incorretamente para o número inteiro 20. Em seguida, ao realizar a adição do número três dos $\frac{3}{5}$ ao número 20, ele obteve 23. Por fim, ao subtrair o número $cinco$ dos $\frac{3}{5}$ de 23, ele obteve 28, o que está incorreto. O erro principal foi não entender como manipular corretamente os números decimais e as frações, resultando em uma resposta final incorreta.

Figura 234 Erro apresentado pelo aluno A036A


Questão 04 - Yeti, o monstro do armário, ficou preso dentro do armário. Para sair, ele precisa saber um código, que é o resultado deste problema. Você pode ajudá-lo a resolver esse problema?

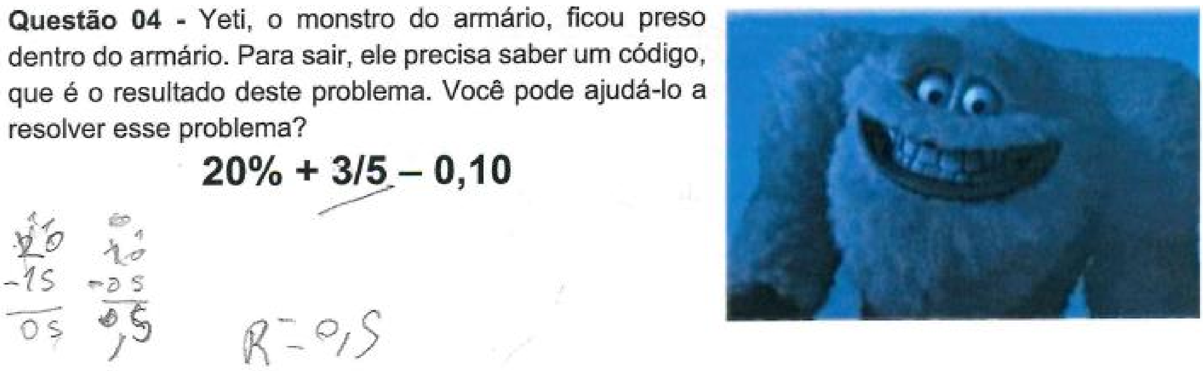
20% + 3/5 – 0,10

$$\begin{array}{r} 20 \\ +\ 3 \\ \hline 23 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ -\ 5 \\ \hline 18 \end{array}$$

Fonte: Dos autores (2024).

O aluno A077B (Figura 25) cometeu diversos erros ao resolver a questão. Primeiro, ele converteu incorretamente as frações e porcentagens em números inteiros, transformando $\frac{3}{5}$ em 35 e 20% em 20. Em seguida, ele realizou uma subtração entre esses números inteiros $(35 - 20)$, obtendo 15. Entretanto, não há evidências claras dessa subtração na atividade.

Figura 25 Erro apresentado pelo aluno A077B



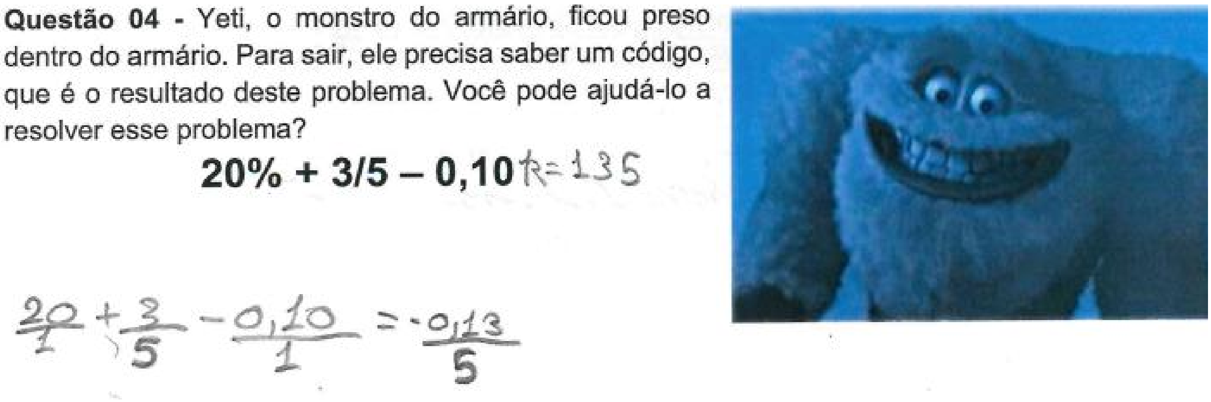
Fonte: Dos autores (2024).

Em seguida, ele realizou outras subtrações, mas não está claro como ele chegou aos números cinco e 10. Finalmente, ele subtraiu esses números incorretamente, chegando a um resultado de cinco. O principal erro foi não compreender corretamente como lidar com frações e porcentagens, levando a uma série de cálculos incorretos e uma resposta final imprecisa.

O aluno A158B (Figura 26) tentou resolver a expressão $20\% + \frac{3}{5} - 0{,}10$ transformando tudo em fração. Isso mostra uma abordagem inicialmente lógica. No entanto, ao realizar essa transformação, ele cometeu um erro ao escrever a fração para a porcentagem e para o número decimal.

Ele tentou transformar 20% em fração escrevendo $\frac{20}{1}$, que é 20 dividido por um, em vez de $\frac{20}{100}$, que seria a representação correta. Da mesma forma, ele escreveu $\frac{0{,}10}{1}$ para $0{,}10$, em vez de $\frac{10}{100}$, que seria a fração equivalente. A representação correta para $0{,}10$ seria $\frac{1}{10}$.

Figura 26 Erro apresentado pelo aluno A158B

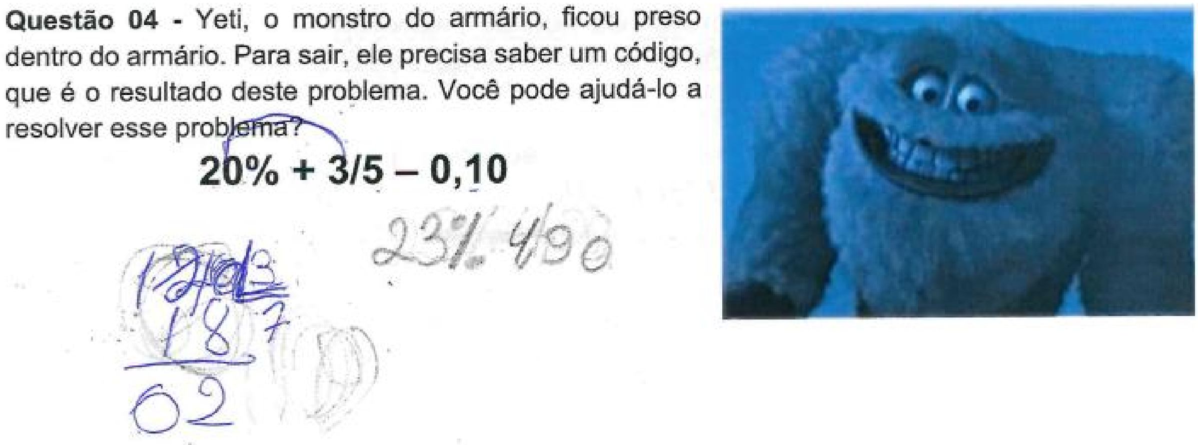


Fonte: Dos autores (2024).

Ao escrever 20% como $\frac{20}{1}$ em vez de $\frac{20}{100}$ e $0{,}10$ como $\frac{10}{1}$ em vez de $\frac{1}{10}$, ele gerou frações incorretas. Se tivesse convertido corretamente, somado as frações e realizado as operações, poderia ter chegado à resposta correta.

O aluno A148B (Figura 27) adotou uma abordagem confusa ao resolver a expressão. Primeiramente, tentou dividir os 20% pelo número três, do termo $\frac{3}{5}$, chegando a uma resposta de sete, o que seria incorreto mesmo em um cálculo de 20 dividido por três. Em seguida, de maneira ainda mais difícil de compreender, somou os 20% com o três de $\frac{3}{5}$, resultando em 23%. Por fim, como resposta final, escreveu "23% $4{,}90$", uma sequência sem lógica aparente e difícil de interpretar. Suas respostas não revelam uma linha de raciocínio clara ou consistente.

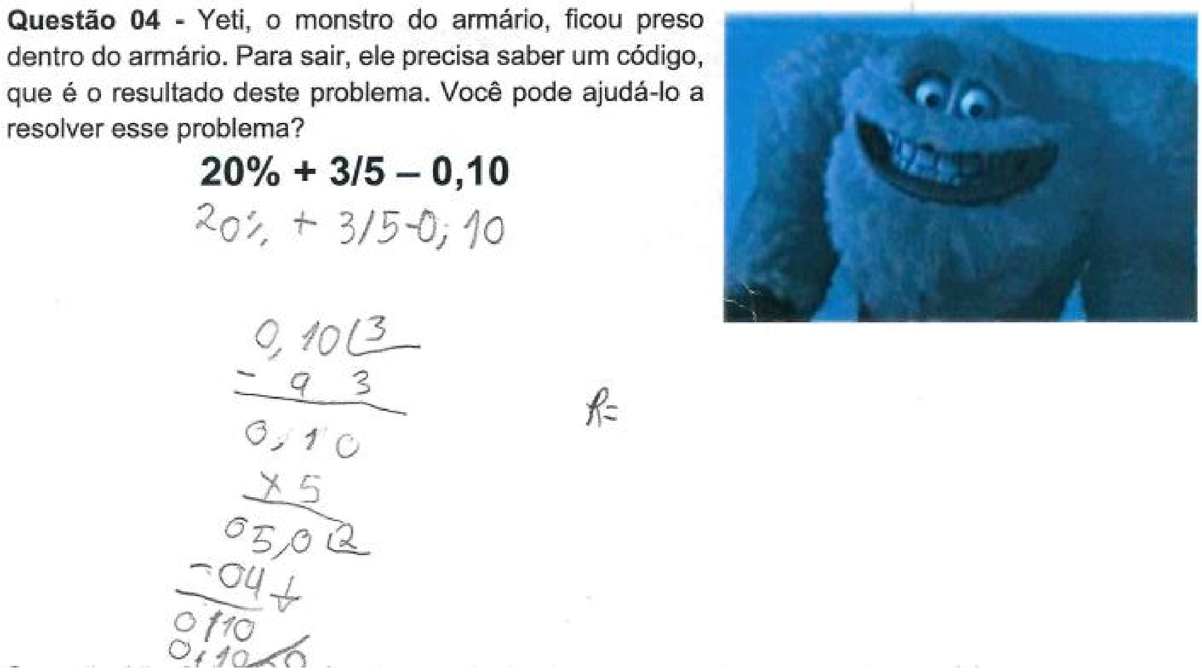
Figura 27 Erro apresentado pelo aluno A148B



Fonte: Dos autores (2024).

O aluno A209B (Figura 28) tentou resolver a expressão de forma desconexa e errônea. Primeiramente, parece ter tentado dividir $0{,}10$ por três, embora não esteja claro por que escolheu esse número. Em seguida, multiplicou $0{,}10$ por $cinco$, sem uma justificativa aparente, e então dividiu o resultado $(0{,}50)$ por $dois$, novamente sem uma base lógica evidente. O resultado apresentado foi $0{,}10$. Não é possível identificar uma linha de raciocínio coerente nesses cálculos. Além disso, os próprios cálculos realizados estavam incorretos, sugerindo que o aluno não domina as operações envolvidas.

Figura 28 Erro apresentado pelo aluno A209B


Questão 04 - Yeti, o monstro do armário, ficou preso dentro do armário. Para sair, ele precisa saber um código, que é o resultado deste problema. Você pode ajudá-lo a resolver esse problema?

20% + 3/5 – 0,10

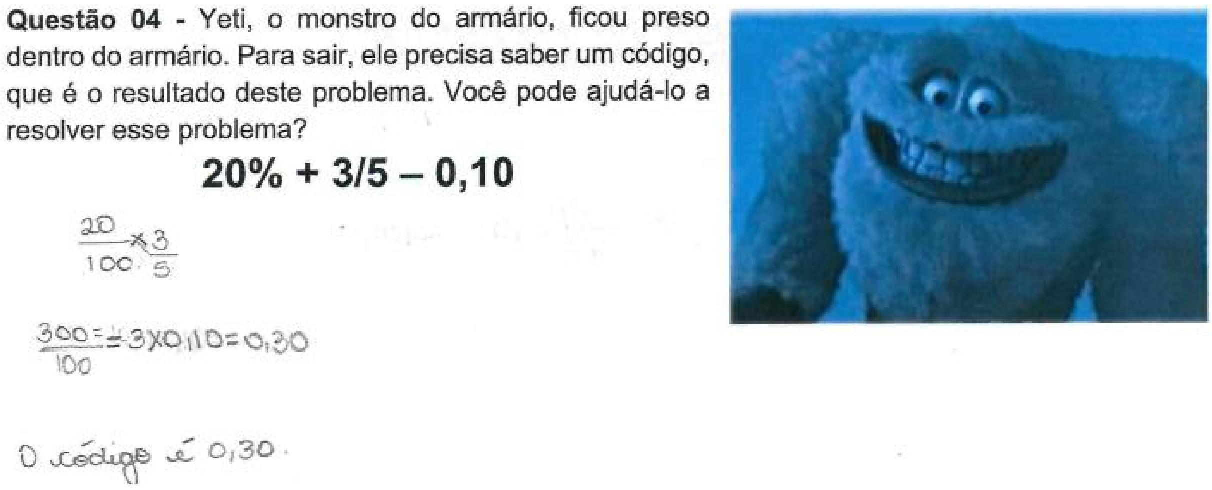
20% + 3/5-0,10

R=

Fonte: Dos autores (2024).

O aluno A189B (Figura 29) demonstrou compreensão ao transformar corretamente 20% em sua forma fracionária equivalente, $\frac{20}{100}$. No entanto, cometeu um equívoco ao multiplicar essa fração pela outra fração presente na expressão, $\frac{3}{5}$, resultando em $\frac{300}{100}$. Em seguida, ao dividir 300 por 100, obteve erroneamente o valor de três. O próximo passo do aluno foi multiplicar esse valor por $0{,}10$, quando o correto seria subtrair, conforme indicado pelo problema. Esse procedimento resultou em $0{,}30$ como resposta final.

Figura 29 Erro apresentado pelo aluno A189B



Fonte: Dos autores (2024)

O erro do aluno ocorreu ao multiplicar as frações e depois multiplicar o resultado obtido $por\ 0{,}10$, em vez de realizar a subtração. Para corrigir o procedimento, o aluno deveria ter calculado primeiramente a subtração entre 20% e $0{,}10$ e, em seguida, somado o resultado à fração $\frac{3}{5}$. Dessa forma, a solução correta seria encontrar 20% de um $(0{,}20)$ e subtrair $0{,}10$, o que resultaria em $0{,}10$. Em seguida, somar-se-ia a essa resposta a fração $\frac{3}{5}$.

Após corrigir o procedimento, o resultado seria: $0{,}20\ -\ 0{,}10\ =\ 0{,}10$. Em seguida, somaríamos $0{,}10$ com a fração $\frac{3}{5}$. Portanto, a resposta correta seria $0{,}10\ +\ 0{,}60\ =\ 0{,}70$.

Ao final desse encontro, será deixada uma tarefa de casa para os professores, a leitura do artigo “Porcentagens na reta numérica? Como assim? Uma análise dos erros de alunos do oitavo ano[2]” de nossa autoria e resultado parcial da dissertação.

4.4 Quarto Encontro - Análise dos erros dos alunos do Ensino Fundamental II – quinta questão (2 horas)

O quarto encontro será dedicado à discussão do artigo proposto como tarefa no encontro anterior e análise da questão cinco (Figura 30). Para responder essa

[2] VITORASSI, R.; NOVAES, B. W. D.; ANDRADE, V. L. **Porcentagens na Reta Numérica? Como Assim? Uma Análise dos Erros de Alunos do Oitavo Ano. Revista de História da Educação Matemática, [S. l.], v. 9, p. 1–24, 2023.** Disponível em: https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/576. Acesso em: 11 fev. 2024.

questão, além de dominar a porcentagem, fração e números decimais, é preciso que o aluno saiba transformar esses números, de forma e conseguir colocá-los em uma reta numérica.

Alguns exemplos de atividades preparatórias seriam:

1. Atividade de Plotagem na Reta Numérica:

Forneça aos alunos uma reta numérica grande desenhada em papel ou no chão da sala de aula. Peça-lhes para plotar diferentes números decimais, porcentagens e frações ao longo da linha, utilizando marcadores ou pedaços de papel com os valores escritos.

Por exemplo, os alunos podem plotar $0{,}5$, 50% e $\frac{1}{2}$ na mesma posição na reta numérica.

Essa atividade ajuda os alunos a visualizar as relações entre essas diferentes formas de representação numérica.

2. Jogo de Cartões Correspondentes:

Prepare cartões com diferentes representações numéricas, como números decimais, frações e porcentagens. Por exemplo, um cartão pode ter "$0{,}75$", outro pode ter "$\frac{3}{4}$" e outro pode ter "75%".

Os alunos devem emparelhar os cartões que representam o mesmo valor numérico e, em seguida, colocá-los juntos em uma reta numérica desenhada no quadro ou em uma folha de papel grande.

Essa atividade ajuda os alunos a praticar a identificação de equivalências e a localização dos valores correspondentes na reta numérica.

3. Desafio da Reta Numérica:

Apresente aos alunos uma série de problemas que envolvam colocar números decimais, frações e porcentagens em uma reta numérica. Por exemplo, "Coloque os seguintes valores na reta numérica: $0{,}25$, $\frac{1}{4}$ e 25%".

Os alunos devem usar seu conhecimento sobre as relações entre essas representações numéricas para resolver o desafio.

Essa atividade incentiva os alunos a pensar criticamente e aplicar seus conhecimentos de equivalência e posicionamento na reta numérica.

4. Modelagem com Material Manipulável:

Use tiras de papelão, blocos de frações e porcentagens para que os alunos criem sua própria reta numérica física. Eles podem manipular os materiais para colocar os diferentes valores ao longo da linha.

Essa abordagem tátil ajuda os alunos a desenvolver uma compreensão concreta das relações entre frações, números decimais e porcentagens na reta numérica.

5. Saber transformar as frações e porcentagem em números decimais:

Transformando as frações e porcentagem em números decimais facilita a compreensão dos números, contribuindo com o reconhecimento de quem tem um valor ou menor, facilitando as operações. Por exemplo:

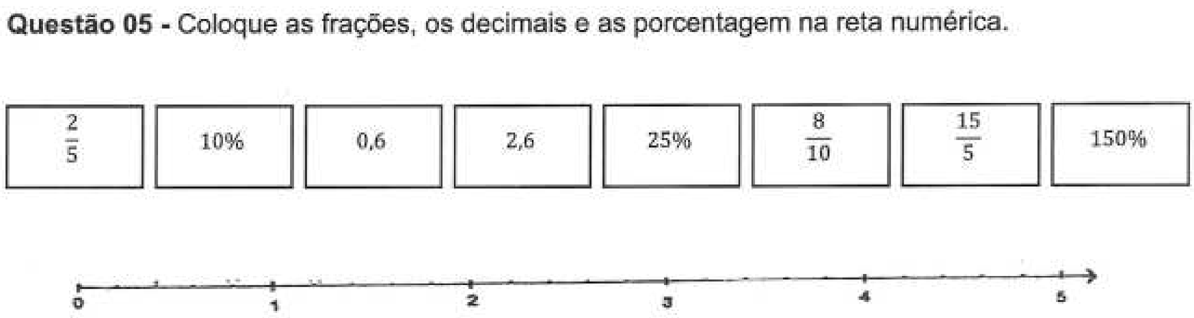
$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 0{,}20$$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 60\% = 0{,}6 = 0{,}60$$

$$0{,}10 = 0{,}1 = 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

Essas atividades proporcionam aos alunos oportunidades práticas para explorar e consolidar seus conhecimentos sobre a colocação de números decimais, porcentagens e frações em uma reta numérica, ao mesmo tempo em que desenvolvem habilidades de encontrar equivalências entre essas diferentes formas de representação numérica, tendo enfim, sucesso para resolver a Questão 5 (Figura 30).

Figura 30 Questão 5



Fonte: Dos autores (2024)

Com enfoque na questão cinco, retomaremos as questões:

1. Que habilidades da BNCC cada questão aborda?
2. Quais os conteúdos envolvidos?
3. Alunos dos sextos anos teriam condições de resolver? Que conteúdos ou que processos de resoluções eles utilizariam? Que tipos de erros poderiam estar presentes na resolução da questão, neste nível de ensino? Por quê?
4. E alunos dos sétimos anos? Que conteúdos ou que processos de resoluções eles utilizariam? Que tipos de erros poderiam estar presentes na resolução da questão, neste nível de ensino? Por quê?
5. E alunos dos sétimos anos? Que conteúdos ou que processos de resoluções eles utilizariam? Que tipos de erros poderiam estar presentes na resolução da questão, neste nível de ensino? Por quê?

Da mesma forma, como nos encontros um e três, serão distribuídas folhas para os grupos com algumas resoluções (oito ao todo) dos alunos do Ensino Fundamental II (sexto ao nono ano) para cada uma dessas duas questões.

4.4.1 Estudo do artigo “Porcentagens na reta numérica? Como assim? Uma análise dos erros de alunos do oitavo ano”

O quarto encontro será iniciado com a resolução por parte dos professores da questão cinco, assim como feito no primeiro e terceiro encontro.

Na sequência será abordado o artigo com os resultados parciais da dissertação em que os autores apresentam os erros dos alunos do oitavo ano distribuídos em categorias de análise de erro.

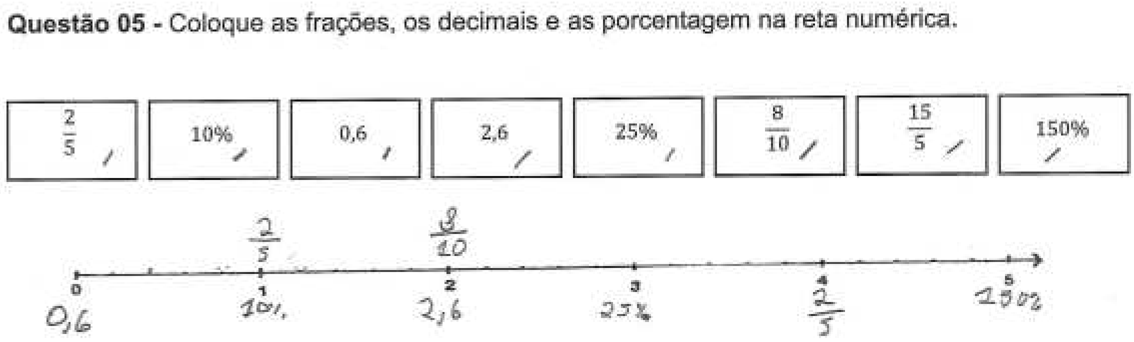
Serão comentados erros dos alunos em relação a esta questão para alunos dos sextos, sétimos e nonos anos, já que os oitavos anos já foram abordados no artigo.

4.4.2 Quinta questão – excertos de erros de alunos dos sextos ao nono ano

Nesta parte do curso, nos dedicaremos à análise dos excertos da questão cinco, onde serão apresentados exemplos dos erros cometidos pelos alunos durante a resolução desse problema específico.

Nesta questão, observamos que nenhum aluno do sexto ano conseguiu acertar a colocação dos números na reta numérica, sendo que a maioria deixou a questão em branco. Em particular, o aluno A126A (Figura 31) apresentou erros ao posicionar os numerais de maneira incorreta. Ele pareceu não saber como converter os números decimais em porcentagens ou vice-versa, dificultando sua representação na reta. Por exemplo, o aluno colocou 150% no final da reta, no número cinco, quando na verdade o cinco representaria 500% da reta ou, mais precisamente, 150% equivale a $1{,}5$.

Figura 31 Erro apresentado pelo aluno A126A

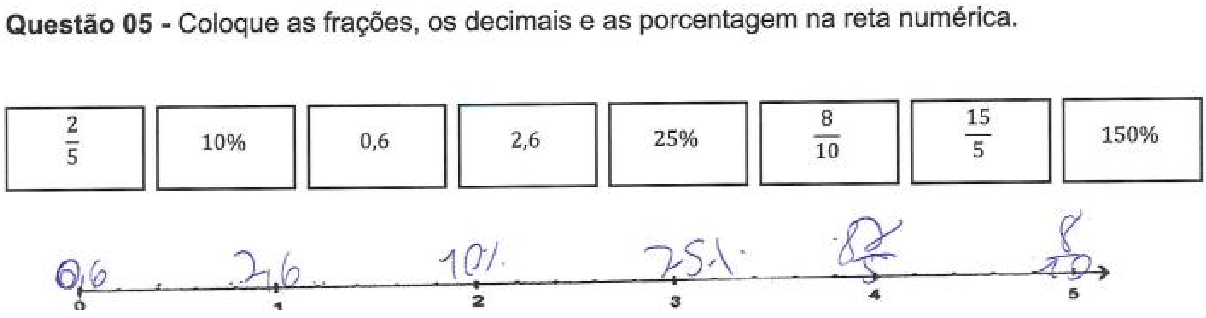


Fonte: Dos autores (2024)

Além disso, ele posicionou o número $2{,}6$ entre os números inteiros dois e três, quando, na verdade, $2{,}6$ deveria estar localizado um pouco depois da metade entre esses números. Esse equívoco indica uma dificuldade do aluno em compreender as relações entre números decimais e porcentagens e em aplicá-las corretamente na representação gráfica.

Nesta questão, nenhum aluno do 7º ano conseguiu acertar a colocação dos números na reta numérica. Um exemplo desse erro é o aluno A287A (Figura 32), que não tentou converter as frações, números decimais e porcentagens em um único segmento para facilitar a determinação de suas posições na reta. Como resultado, o aluno posicionou os numerais de maneira incorreta. Por exemplo, ele colocou a fração $\frac{8}{10}$ no número cinco, quando, na verdade, essa fração equivale a $0{,}8, e$ 25% no número $tr\hat{e}s$, quando, na verdade, 25% corresponde a $0{,}25$.

Figura 32 Erro apresentado pelo aluno A287A



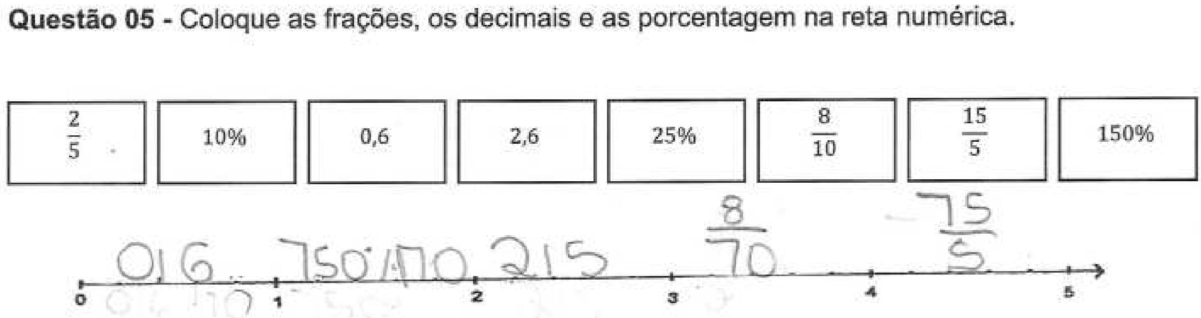
Fonte: Dos autores (2024)

Esses equívocos indicam uma dificuldade do aluno em compreender como representar numericamente as frações e porcentagens na reta numérica, o que impactou negativamente na resolução da questão.

Na resolução da questão sobre a colocação dos números na reta numérica, o aluno do oitavo ano A108A (Figura 33) demonstrou alguma noção do que estava fazendo, apesar de ter errado a questão. Ele posicionou o número $0{,}6, 2{,}5\ e\ 150\%$ em uma posição aproximada da que seria correta. No entanto, mesmo sendo aproximadas, nenhuma das posições estava correta, seja para os números decimais, frações ou porcentagens.

Alguns desses erros foram bastante equivocados, como no caso da fração $\frac{15}{5}$, que ele posicionou entre os números inteiros quatro e cinco, quando na verdade deveria estar no número três.

Figura 33 Erro apresentado pelo aluno A108A

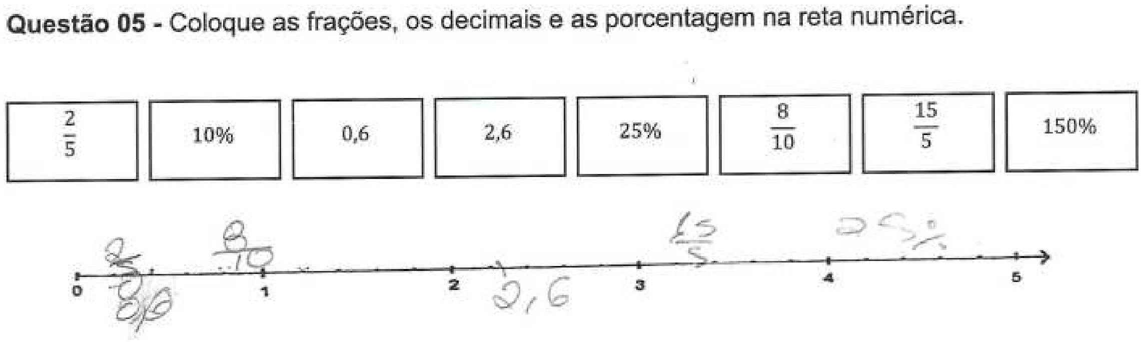


Fonte: Dos autores (2024)

Além disso, a fração $\frac{8}{10}$ foi posicionada entre os números inteiros três e quatro, quando na verdade representa $0{,}8$ e deveria estar entre os números inteiros zero e um. Esses equívocos evidenciam uma compreensão parcial por parte do aluno, mas ainda há dificuldades em posicionar corretamente os numerais na reta numérica.

O aluno A019A (Figura 34) localiza incorretamente as demais representações, fração e porcentagem, indícios de que foram colocadas aleatoriamente, não seguindo qualquer conceito matemático.

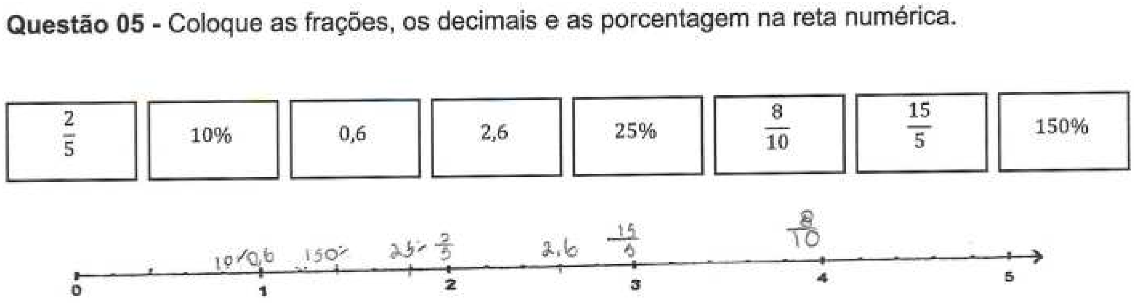
Figura 34 Erro apresentado pelo aluno A019A



Fonte: Dos autores (2024)

O aluno A109A (Figura 35) posicionou o número $2{,}6$ de maneira próxima ao lugar correto na reta numérica e localizou corretamente a posição da fração $\frac{15}{5}$.

Figura 35 Erro apresentado pelo aluno A109A

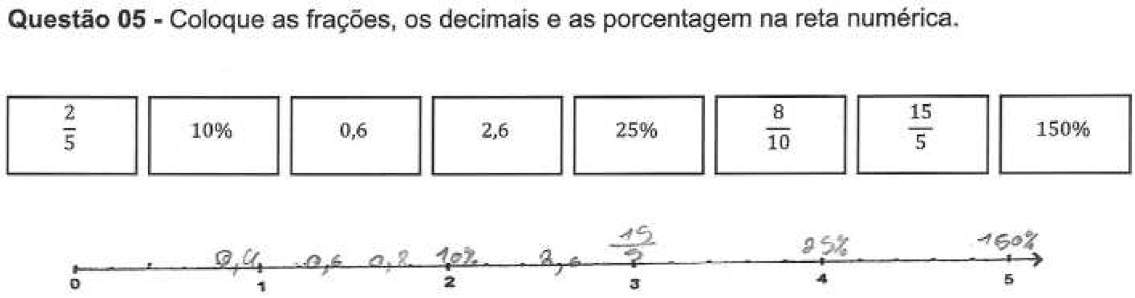


Fonte: Do autor (2024)

Todavia, não há como saber se A109A acertou a posição da referida fração porque sabia que ela representava o número três ou se ele posicionou aleatoriamente como o fez com as demais numerações.

No caso do aluno A199B (Figura 36), com exceção da colocação correta da fração $\frac{15}{5}$ e do número decimal $2{,}6$, nenhuma outra resposta está posicionada adequadamente na reta numérica.

Figura 36 Erro apresentado pelo aluno A199B



Fonte: Dos autores (2024)

Embora o número $0{,}4$ tenha sido disposto entre zero e um, sua posição permanece incorreta. Não é possível concluir com segurança que o aluno o posicionou com a certeza de que ele é menor que um inteiro, uma vez que os demais números decimais, como $0{,}6$ e $0{,}8$ (este último não constava nas opções), foram também posicionados entre um e dois, indicando uma possível falta de compreensão das relações numéricas.

Ao final do quarto encontro será proposto as cursistas que apliquem a atividade com as cinco questões (Apêndice A) com os alunos de uma turma do Ensino Fundamental II em que são professores. Para o último encontro cada grupo deve elaborar uma apresentação de 15 minutos para compartilhar os resultados com os demais colegas.

4.5 Quinto encontro – Apresentação dos resultados da aplicação da atividade com as turmas dos professores cursistas (2 horas)

Os participantes tiveram (semana anterior ao encontro) a chance de aplicar as aprendizagens teóricas em uma situação prática, analisando as respostas dos alunos e refletindo sobre como podem melhorar sua abordagem pedagógica.

Durante a discussão, os participantes serão encorajados a compartilhar suas experiências e *insights*, enriquecendo assim o debate e ampliando suas perspectivas sobre o ensino de frações, decimais e porcentagens.

Uma expectativa de nossa parte é que ao final do curso os professores, em conjunto, reflitam sobre estratégias para articular em suas aulas o ensino de frações, decimais e porcentagem.

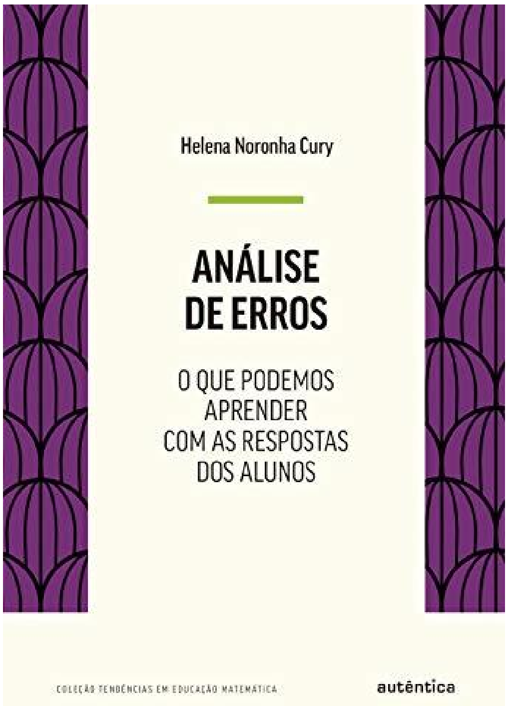
Na última aula, será feita uma revisão das discussões e aprendizados das aulas anteriores. Em seguida, será realizada uma conversa sobre os resultados apresentados no artigo “Porcentagens na Reta Numérica? Como Assim? Uma Análise dos Erros de Alunos do Oitavo Ano” e nos demais erros apresentados pelos alunos que participaram da pesquisa de mestrado com os fornecidos pelos cursistas. Isso pode proporcionar uma visão mais aprofundada sobre as estratégias de resolução dos alunos e as possibilidades de articulação de conteúdo. O curso será encerrado com uma análise coletiva dos resultados das atividades, promovendo uma reflexão final sobre as práticas pedagógicas e os objetivos da BNCC para os anos escolares em questão.

Durante essa análise, os participantes serão incentivados a identificar padrões e tendências nos erros dos alunos, bem como a propor estratégias de ensino que visem fortalecer a articulação entre frações, decimais e porcentagens. Ao final do curso, espera-se que os participantes estejam mais preparados para enfrentar os desafios do ensino desses conteúdos, contribuindo assim para uma educação matemática mais significativa e inclusiva.

5 PARA VOCÊ PROFESSOR

Para ampliar o conhecimento dos professores sobre a análise de erros e sua relevância no contexto educacional, uma obra fundamental é "Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos", de autoria de Helena Noronha Cury, publicada em 2019 pela editora Autêntica. Neste livro, Cury explora de maneira profunda e acessível a importância de compreender os erros dos alunos como parte integrante do processo de aprendizagem.

Figura 37 Capa do Livro Análise de erros.



Fonte: Cury (2019).

Outro livro que pode ser considerado para discutir sobre a função do erro no processo de aprendizagem da matemática elementar no contexto educacional será o livro "O erro como estratégia didática: o estudo do erro no ensino da matemática elementar", de autoria de Neuza Bertoni Pinto, publicada em 2000 pela editora Papirus. Neste livro, Pinto explora o cotidiano escolar como matéria-prima para o estudo, as reflexões propostas pela autora contribuem para a construção de três níveis de debate: o da formação continuada de professores, o de ensino de matemática e o do processo de avaliação da aprendizagem escolar.

Figura 38 Capa do Livro O erro como estratégia didática

Fonte: Pinto (2000).

Através de exemplos práticos e reflexões teóricas, o autor oferece *insights* valiosos sobre como os educadores podem utilizar a análise de erros para diagnosticar lacunas no aprendizado dos estudantes, adaptar suas abordagens de ensino e promover um desenvolvimento mais eficaz e significativo. Essa obra é uma leitura indispensável para professores interessados em aprimorar suas práticas pedagógicas e promover uma educação mais inclusiva e eficiente.

O curso presencial sobre frações, decimais e porcentagem e possibilidades de articulação de representações numéricas, entre elas, a reta numérica representa não apenas uma oportunidade de aprimoramento profissional para os professores, mas também um compromisso com a melhoria da qualidade do ensino da matemática.

6 SOBRE OS AUTORES

Rodrigo Vitorassi – (rvmatemática@gmail.com)

Possui Formação de Docentes (Magistério) pelo Colégio Estadual Dom Manoel Könner Santa Terezinha de Itaipu - PR (2013), Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná, UNIOESTE - Campus Foz do Iguaçu - PR (2016). Pós Graduação em Ensino de Matemática e Física; Docência no Ensino Superior, Pela Faculdade de Educação São Luiz (2017); Tópicos Especiais em Matemática Pela Universidade Cândido Mendes (2017), Educação de

Jovens e Adultos pela Faculdade de Educação São Luiz (2018). Mestre pelo PROFMAT campus UTFPR Toledo. Atualmente é Professor de Matemática na SEED-Pr (Secretaria do Estado e Educação) e Colégio CAESP FOZ (Privado). Tem Experiência em Escola Pública e Privada, como professor de matemática do Ensino Fundamental II, EJA e Ensino Médio. Trabalha com projetos de educação financeira, empreendedorismo e solidariedade.

Barbara Winiarski Diesel Novaes (barbaraw@utfpr.edu.br)

Professora do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) - Campus Toledo desde 2012. Atua no Programa de Pós-graduação em Matemática (PROFMAT - Polo Toledo) e no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas (PPGECEMTE - UFPR - Setor Palotina). Possui graduação em Engenharia Elétrica (2002) e Licenciatura em Matemática (2006) pela UTFPR; Mestrado (2007) e doutorado (2012) em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR) sob orientação da Profa. Dra. Neuza Bertoni Pinto. Foi bolsista de doutorado sanduíche (2009) sob orientação do Prof. Dr. José Manuel Matos (UNL/UIED-Portugal). Realizou Estágio Pós-Doutoral (06/2022 - 07/2023) no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal do Santa Catarina (UFSC) sob supervisão do Prof. Dr. Antônio David da Costa com parte dos estudos desenvolvidos na Universidade de Genebra. Foi Coordenadora de Área do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (2015-2016) e Docente Orientador do Programa Residência Pedagógica (2018 - 2020). Foi Diretora de Pesquisa e Pós-graduação do Campus Toledo (01/2018 - 05/2021). Tem experiência na Área de História da educação matemática atuando principalmente nos seguintes temas: Frações; Movimento da Matemática Moderna; matemática do ensino e formação de professores que ensinam matemática. Líder do Grupo de Pesquisa em História da educação matemática - Paraná (GHEMAT-PR - @ghematparana) e pesquisadora do Grupo de Pesquisa em Educação e Educação Matemática (GPEEM). Atua no projeto de extensão "Grupo da Quarta" (@grupo_da_quarta) - coletivo de professores que ensinam matemática da UTFPR-TD.

Vanessa Largo Andrade (vanessalargo@utfpr.edu.br)

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE (2000), cursou especialização em Ensino de Ciências e Matemática pela UNIOESTE (2003), mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina - UEL (2004) e doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina - UEL (2013). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR/Toledo, atua no curso de Licenciatura em Matemática e no Programa de Pós-graduação em Matemática (PROFMAT - Polo Toledo).

REFERÊNCIAS

AQUINO, J. P. G. de. **Frações:** Uma abordagem pedagógica. Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, para a obtenção do título de Mestre em matemática. Mossoró – RN, 2013.

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., & SILVER, E. A. **Rational number concepts.** In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic, 1983.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2017.

CAVALIERE, L. **O ensino das frações**. Umuarama – PR. Monografia (Especialização em Ensino da Matemática), Coordenadoria de Pós-Graduação, Universidade Paranaense, 2005.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. [S.l.]: Autêntica, 2019.

CYR, M. **Les Représentations de la fraction**: schèmes et connaissances chez des élèves de la fin du primaire. Maître ès arts (M.A.) dissertation, Département d'enseignement et d'apprentissage, Faculté des Sciences de L'éducation, Université Laval, 2003.

GAY, A. S., & AICHELE, D. B. **Middle school students' understanding of number sense related to percent.** School Science and Mathematics, 97(1), 27-36. doi:10.1111/j.1949-8594.1997.tbl7, 1997.

HOWE, C., NUNES, T., & BRYANT, P. **Rational number and proportional reasoning:** Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. International Journal of Science and Mathematics Education, 9, 391–417, 2011.

KAMII C., CLARK, F. B. **Equivalent fractions:** Their difficulty and educational implications. Journal for Research in Mathematics Education, 26(5), 422-442, 1995.

LAMON, S. J. **Teaching Fractions and Ratios for Understanding:** Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers (4th ed.). New York: Routledge, 2020.

MANDARINO, M., & SANT'ANNA, A. **A importância da reta numérica no ensino de matemática:** uma abordagem para o desenvolvimento da compreensão de frações, porcentagens e números decimais. Revista Educação Matemática em Foco, 9(1), 30-42, 2019.

MONTEIRO, C., & COSTA, C. **Dificuldades na aprendizagem dos números racionais.** Revista Educação e Matemática, (40), 60–63. Portugal: APM, 1996.

ONUCHIC, L. de la R.; BOTTA, L. S. **Uma nova visão sobre o ensino e a**

aprendizagem dos números racionais. Revista de Educação Matemática, n. 3, p. 5–8, 1997. São Paulo: SBEM. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2106/1831. Acesso em: 19 de novembro de 2022.

ONUCHIC, L. R., & ALEVATTO, N. S. **As diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas**. Boletim de Educação Matemática, 21(31), 79-102, 2008.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática**: Estudo do erro no ensino da matemática elementar (2 ed.). Campinas, SP: Papirus, 2000.

SCHRENK, S. **As produções dos "professores PDE" para o ensino de frações como medida na reta numérica:** possibilidades para o apoio pedagógico no Ensino Fundamental. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Curso Superior de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2021.

TIAN, J., & SIEGLER, R. S. Which Type of Rational Numbers Should Students Learn First? **Educational Psychology Review**, 30(2), 351-372. Retrieved from, 2018. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/44956398. Acesso em: 15 de outubro de 2023.

VAZ, R. F. N. **Metodologia didática de análise de soluções aplicada no ensino de frações** (Dissertação de mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

APÊNDICE A - Atividade para desenvolvimento com os alunos

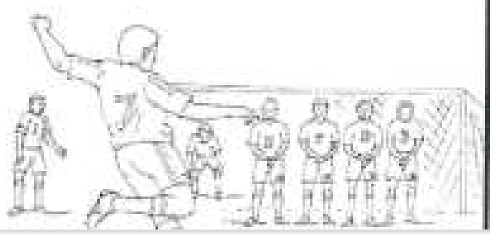
ATIVIDADE DE MATEMÁTICA

Questão 01 - A Prova Paraná tem 52 questões. Sophia acertou 50% da Prova. Pergunta-se, quantas questões ela acertou? Justifique sua resposta

Questão 02 - Observe a carga da bateria do celular do Pedro. Marque a alternativa que representa a porcentagem de carga que falta para o completar o carregamento total da bateria do celular de Pedro. **Justifique sua resposta.**

a) 0,50 = 50%
b) 0,25 = 25%
c) 0,65 = 65%
d) 0,75 = 75%

Questão 03 - Durante um jogo de futebol da copa do mundo, os jogadores do Brasil jogaram 20 vezes contra o goleiro da equipe adversária e marcaram somente 4 gols. Qual é a porcentagenm de chutes que o goleiro da equipe adversária conguiu defender??



Questão 04 - Yeti, o monstro do armário, ficou preso dentro do armário. Para sair, ele precisa saber um código, que é o resultado deste problema. Você pode ajudá-lo a resolver esse problema?

20% + 3/5 – 0,10 =

Questão 05 - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.

$\frac{2}{5}$	10%	0,6	2,6	25%	$\frac{8}{10}$	$\frac{15}{5}$	150%