

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

RODRIGO VITORASSI

**OS NÚMEROS RACIONAIS E SUAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NA
RETA NUMÉRICA: OS ERROS DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II**

TOLEDO

2024

RODRIGO VITORASSI

**OS NÚMEROS RACIONAIS E SUAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NA
RETA NUMÉRICA: OS ERROS DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II**

**Rational Numbers and Their Different Representations on the Number Line:
The Errors of Middle School Students**

Dissertação apresentada como requisito para
obtenção do título de Mestre em Matemática do
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática da
Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Barbara Winiarski Diesel Novaes
Coorientadora: Vanessa Largo Andrade

TOLEDO - PR

2024



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Toledo**



RODRIGO VITORASSI

OS NÚMEROS RACIONAIS E SUAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NA RETA NUMÉRICA: OS ERROS DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 29 de Fevereiro de 2024

Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Danilene Gullich Donin Berticelli, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Dr. Renato Francisco Merli, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Vanessa Largo Andrade, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 19/03/2024.

Dedico este trabalho à minha família, pelos
momentos de ausência.

AGRADECIMENTOS

Certamente, estes parágrafos não abrangem a totalidade das pessoas que desempenharam papéis fundamentais nesta fase significativa da minha vida acadêmica. Desde já, peço desculpas àqueles que não estão explicitamente mencionados, mas é importante que saibam que ocupam um lugar especial em meus pensamentos e na minha gratidão.

Expresso meu sincero agradecimento as minhas orientadoras, as professoras Barbara Winiarski Diesel Novaes e Vanessa Largo Andrade, pela orientação sábia e dedicada ao longo desta trajetória. Agradeço também aos meus colegas de sala pela colaboração e ao pessoal da Secretaria do Curso pelo suporte constante.

Não poderia deixar de registrar minha profunda gratidão à minha família, cujo apoio incondicional foi essencial para superar os desafios desta jornada. Em última análise, estendo meu reconhecimento a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta pesquisa.

À banca examinadora, expresso meu agradecimento pela avaliação cuidadosa e pelas valiosas contribuições que certamente enriqueceram este trabalho.

Ensinar e aprender são assim momentos de um processo maior – o de conhecer, que implica em reconhecer. No fundo, o que eu quero dizer é que o educando se torna realmente educando quando e na medida em que conhece, ou vai conhecendo os conteúdos cognoscíveis, e não na medida e em que o educador vai depositando nele a descrição de objetos, ou dos conteúdos.

Paulo Freire

RESUMO

O presente estudo objetiva caracterizar erros cometidos por alunos do Ensino Fundamental Anos Finais na resolução de uma questão que envolvia localização de números racionais com diferentes representações (frações, decimais e porcentagens) na reta numérica. Para alcançar esse objetivo, foi analisada uma questão aplicada a 203 alunos (duas classes: de sextos, sétimos, oitavos e nonos anos), de um Colégio Estadual localizado no Oeste do Paraná, tendo como referenciais teórico e metodológico a Análise de Erro e Análise de Conteúdo. Por meio da análise minuciosa das respostas dos alunos foram identificados padrões e construídas as seguintes categorias para os erros: por incompletude na resolução; no reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica; por distração; e, pela inexistência da articulação entre as representações do número racional. O estudo conclui que, dos 129 alunos que resolveram a questão, 70,5% deles a responderam incorretamente por utilizarem localizações pouco coerentes na reta numérica, 28% acertaram a resolução parcialmente por demonstrarem compreender a fração como quociente, e 1,5% dos alunos responderam corretamente, porém com erros pontuais considerados como distração. As análises revelaram falta de flexibilidade na conversão entre as diferentes representações do número racional na reta numérica, sugerindo novas estratégias de ensino que potencializem a compreensão desse conteúdo ao longo do Ensino Fundamental. Deste modo, destacamos a relevância do produto educacional proposto para formação de professores de Matemática do Ensino Fundamental Anos Finais, dos sextos aos nonos anos, com atividades que possam auxiliar a promover a articulação dos conceitos das diferentes representações dos números racionais, consideradas como fundamentais para os alunos, tanto para a vida escolar como cotidiana.

Palavras-chave: Análise de Erro; Educação Matemática; Ensino Fundamental; Números Racionais; Reta Numérica.

ABSTRACT

The present study aims to characterize errors made by middle school students in solving a question involving the placement of rational numbers with different representations (fractions, decimals, and percentages) on the number line. To achieve this goal, it was analyzed a question applied to 203 students (across sixth, seventh, eighth, and ninth grades) from a State School located in the West of Paraná, with Error Analysis and Content Analysis as theoretical and methodological frameworks. By conducting a detailed analysis of the students' responses, patterns were identified, and the following error categories were established: incomplete resolution, failure to recognize percentage representations and locate them on the number line, distraction, and lack of articulation between the representations of rational numbers. The study concludes that out of the 129 students who attempted the question, 70.5% answered incorrectly by using inconsistent locations on the number line, 28% partially solved the question by demonstrating an understanding of fractions as quotients, and 1.5% of the students answered correctly, albeit with occasional errors considered as distractions. The analyses revealed a lack of flexibility in converting between the different representations of rational numbers on the number line, suggesting new teaching strategies to enhance the understanding of this content throughout middle school. Thus, we emphasize the relevance of educational products for the training of Mathematics teachers in middle school, from sixth to ninth grades, with activities that can help promote the integration of concepts of different representations of rational numbers, considered fundamental for students, both in their academic and everyday lives.

Keywords: Error Analysis; Mathematical Education; Middle School; Rational Numbers; Number Line.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNE/CP	Conselho Nacional de Educação / Coordenador Pedagógico
COVID-19	Coronavirus Disease 2019
PDE	Programa de Desenvolvimento Educacional
RJ	Rio de Janeiro

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
2. ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS DA PESQUISA	15
2.1 Sobre a compreensão dos números racionais.....	15
2.2 Sobre frações, decimais e porcentagens na reta numérica	19
2.3 Encaminhamentos Metodológicos da Pesquisa	24
3 AS CATEGORIAS DE ERROS E OS RESULTADOS DAS ANÁLISES	33
3.1 Os sextos anos	33
3.1.1 Erro pela inexistência da articulação entre as representações do número racional.....	34
3.2 Os sétimos anos	35
3.2.1 Erro no reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica.....	36
3.2.2 Erro pela inexistência da articulação entre as representações do número racional.....	38
3.3 Os oitavos anos	39
3.3.1 Erro por Incompletude na Resolução	40
3.3.2 Erro no Reconhecimento das Representações de Porcentagens e na Localização na Reta Numérica	42
3.3.3 Erro por Distração	43
3.3.4 Erro pela Inexistência da Articulação entre as Representações do Número Racional	44
3.4 Os nonos anos.....	48
3.4.1 Erro no reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica.....	48
3.4.2 Erro pela inexistência da articulação entre as representações do número racional.....	50
3.5 Um quadro geral dos anos finais do Ensino Fundamental	52
4 PERCURSO PARA A ELABORAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL	56
4.1 Expectativas em relação a resolução das questões por parte dos alunos.....	56
4.2 Discussão sobre BNCC, pandemia e conteúdos não consolidados	61
4.3 Delineando o curso de formação continuada.....	65
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
REFERÊNCIAS.....	69

1. INTRODUÇÃO

O erro, muitas vezes temido e punido, assume um papel crucial na aprendizagem da matemática. Edgar Pimentel, em seu artigo "Menos com menos é mais: o papel do erro na matemática", publicado na Folha de São Paulo (2023), nos convida a repensar essa visão. O autor destaca que errar não só é humano, mas também parte da rotina científica, como demonstrado pelo matemático Henri Poincaré ao corrigir um erro em sua monografia premiada.

Ao longo da história da educação matemática, a percepção do erro passou por diferentes fases. Wagner Rodrigues Valente (2022) traça essa trajetória, desde a ênfase no cálculo exato no século XIX, passando pela pedagogia científica e pelo Movimento da Matemática Moderna, até chegar às teorias construtivistas nas décadas de 1980, que reconhecem o erro como parte da construção do conhecimento.

Com base nessa perspectiva histórica, defendemos que o erro, quando refletido e utilizado como ferramenta de ensino, pode potencializar a aprendizagem. Pinto (2000) reforça essa ideia, afirmando que os erros servem como indicadores de lacunas e falhas, possibilitando a "regulamentação" do processo de ensino.

Nesse contexto, os números racionais se configuram como um tema desafiador para muitos alunos. Toledo (2009) observa que as dificuldades com esse conteúdo persistem desde o ensino fundamental até o superior. Monteiro e Costa (1996) atribuem essa dificuldade à complexidade dos conceitos, à utilização precoce de regras e à natureza densa do conjunto dos números racionais.

Professores de diferentes níveis de ensino corroboram essa visão, reconhecendo os números racionais como um obstáculo a ser superado no ensino da matemática (Marques, Leão e Carpes, 2018).

Diante de tais desafios, esta pesquisa se propõe a desvendar os erros mais comuns cometidos pelos alunos ao lidar com números racionais. Através de uma análise crítica e reflexiva, buscaremos identificar as causas dessas dificuldades e propor soluções inovadoras para o ensino eficaz desse conteúdo.

Ao abraçar o erro como uma oportunidade de aprendizado, podemos transformar a sala de aula em um espaço de exploração matemática, onde a experimentação, a investigação e a construção conjunta do conhecimento são elementos essenciais para o desenvolvimento de alunos autônomos e críticos.

No entanto, ainda existem autores que defendem a ideia de que essas dificuldades não limitam apenas aos discentes, mas também aos professores. Onuchic e Botta (1997) afirmam que:

Quem está ou já esteve trabalhando com números racionais nota grande dificuldade no ensino – aprendizagem desse tópico. Na literatura existente sobre esse tema, todos os educadores matemáticos são concordes em dizer que há muita dificuldade aí, tanto para os alunos como para os professores. (Onuchic, Botta, 1997, p.1).

Diante desses fatos questiona-se quais seriam os motivos de tanta dificuldade? Segundo orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais¹ (Brasil, 1998), “uma explicação para as dificuldades encontradas possivelmente deve-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais”.

Já para Sweeney e Quinn (2000), o motivo dessa dificuldade dos alunos está relacionada a uma abordagem isolada das frações, dos decimais e das porcentagens, o que impossibilita ao aluno a identificação e associação das diferentes representações dos números racionais, gerando assim, uma compreensão vaga e incompleta acerca dos números.

Duval (2012) afirma que essa dificuldade enfrentada pelos alunos aumenta ainda mais quando é solicitada a troca de registro ou o uso de dois registros ao mesmo tempo. Duval descreve "registro" como a capacidade de um aluno de reconhecer e manipular diferentes representações de conceitos matemáticos. Isso envolve a compreensão de como os mesmos objetos ou conceitos podem ser representados de várias maneiras, como símbolos, palavras, gráficos, tabelas etc.

Portanto, quando Duval menciona "troca de registro" ou "uso de dois registros ao mesmo tempo", ele está se referindo à dificuldade que os alunos têm em alternar entre diferentes formas de representações matemáticas de um conceito ou em combinar essas representações.

Esse obstáculo ocorre em vários níveis de ensino, ou seja, acontece um bloqueio no qual o aluno não consegue identificar o mesmo objeto em duas representações diferentes. Maranhão e Iglioni (2003) complementam que, essas constatações são reais, pois apesar dos alunos terem conhecimento das regras da

¹ Apesar dos Parâmetros não estarem mais em vigor no Brasil, consideramos importante trazer essa reflexão para o nosso trabalho.

escrita matemática acerca do assunto, muitas vezes não conseguem fazer alteração simultaneamente quando são solicitados. Um exemplo simples é a representação de $\frac{1}{2}$ que é equivalente a 0,50 (cinquenta centésimos ou cinco décimos).

Monteiro e Costa (1996) alertam para o uso prematuro de regras sem a devida compreensão, o que contribui para a dificuldade em lidar com os números racionais.

Diante das justificativas relacionadas aos estudos dos números racionais, verifica-se que o processo de ensino e de aprendizagem do conceito tem sido alvo de várias pesquisas da educação matemática, como as citadas anteriormente. Mas o que mais preocupa são as implicações e não acessibilidade aos alunos acerca dos conceitos dos números racionais, o que pode acarretar grandes prejuízos para o ensino e aprendizagem da matemática. Essas dificuldades podem ter implicações negativas para o desenvolvimento de habilidades matemáticas dos alunos em outros conteúdos, além de gerar uma insegurança em relação aos seus desempenhos na disciplina.

Baseada em minha experiência como professor de matemática da educação básica, é importante destacar que a compreensão dos conceitos de frações, decimais e porcentagens é essencial para o cotidiano dos alunos, pois estão presentes em várias situações como no cálculo de porcentagens em compras, nas operações financeiras, na culinária, entre outros, deste modo, a dificuldade em compreender esses conceitos pode afetar o dia a dia dos alunos, mesmo após sua passagem pela escola.

Segundo Onuchic e Avellato (2008, p. 81) “educadores matemáticos concordam que o ensino e a aprendizagem dos conceitos relacionados aos números racionais permanecem um sério obstáculo no desenvolvimento matemático dos alunos”. Nesse sentido, estudos sobre os erros relacionados aos números racionais podem auxiliar os professores a torná-los observáveis em sua prática e, consequentemente, um observável para o aluno (Pinto, 2000).

A compreensão do número racional é entendida como um pré-requisito para o raciocínio proporcional bem-sucedido (Behr et al., 1983), mas pesquisas têm mostrado que a compreensão de frações e o raciocínio proporcional bem-sucedido também podem promover a compreensão de número racional (Howe et al., 2011).

A presente dissertação parte da inquietação dos autores sobre erros cometidos pelos alunos ao articular frações, decimais e porcentagens ou na ausência desta articulação. Portanto, a relevância e complexidade do tema de números racionais,

aliada às dificuldades encontradas no ensino da matemática, tornam essa pesquisa necessária e justificam a sua realização. Espera-se que os resultados obtidos possam contribuir para a construção de um processo de ensino e aprendizagem efetivos para os alunos e professores da área.

Diante desse cenário, esta pesquisa tem a intenção de responder a seguinte questão: **Como os erros cometidos pelos alunos do ensino fundamental II podem demonstrar se há articulação entre as diferentes representações dos números racionais?**

A partir do problema exposto, o objetivo geral desta pesquisa é caracterizar erros cometidos por alunos do ensino fundamental II na resolução de uma questão que envolvia localização de números racionais com diferentes representações (frações, decimais e porcentagens) na reta numérica e partir disso propor um produto educacional direcionado a formação continuada de professores que ensinam matemática.

Com isso, espera-se obter informações e subsídios para a construção de um curso de formação continuada para professores que ensinam matemática, com situações que possibilitem o desenvolvimento da articulação entre essas diferentes representações numéricas.

Para responder à questão de pesquisa, alguns objetivos específicos foram propostos, dentre eles, elaborar uma atividade a ser desenvolvida com as turmas dos sextos, sétimos, oitavos e nonos anos; analisar cada uma dessas atividades; compreender o processo de resolução de cada questão; analisar os erros ou acertos; utilizar os resultados para a elaboração de um produto educacional destinado a professores da Educação Básica, que promova a articulação dos conteúdos pesquisados.

Para tanto, foi construída/adaptada uma atividade contendo 5 questões sobre frações, decimais e porcentagens, aplicada no mês de abril, de 2023, em duas turmas de sextos, de sétimos, de oitavos e nonos anos, de uma escola estadual de um município localizado na região Oeste do estado do Paraná.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) prevê que, até o final do sétimo ano os alunos tenham habilidade para “(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica” (Brasil, 2017, p. 305).

É importante ressaltar que, em 2020 e 2021, os alunos que participaram da pesquisa estavam respectivamente nos quintos e sextos anos, e o ensino ocorreu de forma remota em função da pandemia de COVID-19. Uma análise dos resultados da atividade em cada ano pode indicar uma progressão na compreensão do conteúdo ao longo dos anos.

O presente estudo é de cunho qualitativo, uma vez que esta é uma abordagem aberta e flexível. O trabalho realizou a coleta de dados por meio do desenvolvimento de uma atividade com os alunos do ensino fundamental anos finais, que envolveu a resolução de questões elaboradas para este fim. Com base nos processos de resoluções apresentados, foi realizada a análise de como os alunos demonstraram compreender ou não, a articulação dos conteúdos. Para Flick (2004, p. 21-22), a pesquisa qualitativa busca a compreensão da totalidade das relações sociais e, nesse contexto, o objeto do estudo é o ponto de partida.

Para análise dos dados, utilizamos autores que trabalham com a análise de erros (Cury, 2019; Pinto, 2000) e análise de conteúdo (Bardin, 2004).

Segundo Cury (2019), na

análise de erros, busca-se compreender as razões pelas quais os alunos cometem erros matemáticos e, a partir dessa compreensão, desenvolver estratégias de ensino que possam auxiliá-los na superação dessas dificuldades. A análise dos erros dos alunos nos oferece insights valiosos sobre as concepções e os processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas matemáticos, permitindo-nos direcionar nossa prática docente de maneira mais efetiva e proporcionar uma aprendizagem mais significativa para os estudantes (Cury, 2019).

Após a análise pré-textual (Bardin, 2004) da resposta dos alunos à questão, construímos as seguintes categorias: erro por incompletude na resolução, erro no reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica, erro por distração; e, erro pela inexistência da articulação entre as representações do número racional.

A dissertação está dividida em três capítulos acrescidas da introdução e considerações finais do trabalho. O capítulo 2 apresenta uma discussão sobre os aspectos teóricos e metodológicos da pesquisa. Aborda a compreensão de números decimais, frações e porcentagens, bem como a importância da reta numérica no contexto do ensino de matemática fazendo relações com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O capítulo finaliza trazendo o percurso metodológico da pesquisa.

O capítulo 3 apresenta os resultados da pesquisa qualitativa realizada em uma escola da rede estadual de ensino na região Oeste do Paraná. Os erros foram categorizados e excertos dos tipos de erros por ano escolar elucidam as descrições e análises. Ao final, em síntese, apresenta um quadro geral dos erros dos alunos.

O capítulo 4 traz, em linhas gerais, o percurso para elaboração do produto educacional, com as expectativas de resolução da atividade por parte dos alunos, discussão sobre a BNCC e delineamento do curso de formação continuada para os professores que ensinam matemática. O produto educacional está em documento anexo a dissertação.

2. ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS DA PESQUISA

O capítulo dois desta pesquisa traz uma discussão teórica sobre ensino dos números racionais com compreensão. Estes constituem pilares cruciais no desenvolvimento matemático dos alunos, desempenhando um papel fundamental na interpretação de relações numéricas, resolução de problemas cotidianos e na interpretação de informações quantitativas. Na sequência, particulariza esse conhecimento para a reta numérica. A terceira seção do capítulo detalha o percurso metodológico da pesquisa.

2.1 Sobre a compreensão dos números racionais

O domínio das frações, decimais e porcentagens é crucial para o desenvolvimento matemático dos alunos, pois permitem a compreensão de relações numéricas, a resolução de problemas do cotidiano e a interpretação de informações quantitativas. Além disso, eles fornecem uma base sólida para a progressão em conceitos matemáticos mais avançados, como proporções, porcentagens fracionárias, cálculos abrangendo números decimais e estatísticas (Cavaliere, 2005).

Todavia, além de compreender as definições e propriedades desses conceitos, é importante enfatizar a conexão entre eles. Frações, porcentagens e números decimais estão inter-relacionados e podem ser representados de diferentes formas. Por exemplo, uma fração pode ser convertida em um número decimal ou em uma porcentagem, e vice-versa. Essas diferentes representações são ferramentas

poderosas que permitem aos alunos visualizarem e compreenderem a relação entre as quantidades e realizarem cálculos com maior flexibilidade (Aquino, 2013).

Cyr (2003), ao pesquisar sobre a construção de esquemas para resolver problemas que envolvem frações, decimais e porcentagens, com alunos canadenses do sexto ano, chega à seguinte conclusão: os alunos que têm um raciocínio multiplicativo demonstraram uma compreensão coerente e evoluída das frações e aos diferentes conceitos que estão associados (parte-todo, operador, razão, medida) em detrimento aos alunos que possuem esquemas baseados num raciocínio aditivo. Esse últimos demonstraram “cálculos aleatórios” e uma representação pouco coerente. Para compreender melhor esses dados, é importante compreender o que seriam um raciocínio multiplicativo ou aditivo.

O raciocínio multiplicativo e o raciocínio aditivo são duas formas de pensar e resolver problemas matemáticos que envolvem operações básicas como adição e multiplicação. Esses tipos de raciocínio são fundamentais no desenvolvimento da compreensão matemática, especialmente em contextos do Ensino Fundamental.

O raciocínio aditivo envolve a adição, que é uma operação matemática básica que combina dois ou mais números para encontrar a soma. É usado para resolver problemas que envolvem situações de adição, como juntar quantidades, calcular mudanças, identificar o total de itens em grupos etc. (Heliodoro, 2004). Pode-se usar como exemplo a seguinte situação: se você tem 3 maçãs e depois ganha mais 2, o raciocínio aditivo envolve somar $3 + 2$ para encontrar que agora você tem 5 maçãs.

Vergnaud (1983, p. 20) afirma que “a estrutura de um campo conceitual aditivo é caracterizada por um conjunto de invariantes operatórios que definem as propriedades das relações entre os elementos do campo”. Assim, partindo do pressuposto que a definição tradicional de raciocínio aditivo, focada na composição de duas medidas, limita nossa compreensão, é crucial reconhecer que outras relações também se encaixam nesse campo, como: transformação de medidas - mudança de unidades de medida, como converter cinco metros em 500 centímetros; comparação de medidas - determinar a diferença entre duas medidas, como comparar o peso de dois objetos; composição de transformações - combinar duas ou mais transformações aditivas, como aumentar três unidades e depois diminuir duas unidades; composição de relações - combinar duas relações aditivas para formar uma nova relação, como a relação entre a altura e o peso de duas pessoas; transformação de uma relação -

transformar uma relação aditiva em outra, como converter a diferença de altura entre duas pessoas em uma razão.

Os estudos de Gérard Vergnaud sobre Campos Conceituais Aditivos oferecem uma lente valiosa para aprimorar a definição de raciocínio aditivo. Define um campo conceitual aditivo como um conjunto de situações que podem ser resolvidas usando operações aditivas, como soma e subtração. Por exemplo, medidas (comprimento, peso, tempo, volume, etc.); dinheiro (adição e subtração de valores monetários; tempo (cálculo de tempo decorrido, adição e subtração de horas, minutos e segundos) e combinação de conjuntos (união e intersecção de conjuntos).

O raciocínio multiplicativo envolve a multiplicação, que é outra operação matemática fundamental que combina números para encontrar o produto. É usado para resolver problemas que envolvem situações de multiplicação, como dimensionar quantidades, calcular áreas, volumes, taxas e muito mais (Heliodoro, 2004). Pode-se usar como exemplo a seguinte situação: se você tem quatro pacotes, cada um contendo 6 lápis, o raciocínio multiplicativo envolve multiplicar quatro por seis para encontrar que você tem um total de 24 lápis.

No caso da definição de raciocínio multiplicativo, é importante considerar que a multiplicação envolve mais do que apenas combinar conjuntos. Ela também pode ser utilizada para calcular áreas, volumes, razões e proporções (Vergnaud, 1983) e está presente em diversos contextos como, escalas, porcentagens, juros compostos etc. Mais especificamente, podemos elucidar alguns exemplos de aplicações do Raciocínio Multiplicativo: cálculo de áreas - multiplicar o comprimento pela largura de um retângulo para determinar sua área; cálculo de volumes - multiplicar o comprimento, a largura e a altura de um prisma retangular para determinar seu volume; escalas: multiplicar uma medida por um fator de escala para determinar a medida equivalente em outra escala; porcentagens: multiplicar um valor por uma porcentagem para determinar um valor equivalente e juros compostos: multiplicar um valor inicial por um fator de juros composto para determinar o valor final após um período de tempo.

O raciocínio multiplicativo está intimamente ligado ao conceito de proporcionalidade que envolve a comparação de duas razões, que podem ser representadas por frações, decimais ou porcentagens (Vergnaud, 1983). Por exemplo, “Se um carro percorre 100 km com cinco litros de gasolina, quantos litros de gasolina serão necessários para percorrer 200 km?”.

Ao revisar e aprimorar as definições de raciocínio aditivo e multiplicativo, pode-se oferecer aos leitores uma compreensão mais completa e profunda desses processos cognitivos. Essa compreensão aprimorada contribui para o desenvolvimento de habilidades matemáticas mais robustas e para um melhor desempenho dos alunos em diferentes áreas do conhecimento.

Em contextos educacionais, o ensino desses dois tipos de raciocínio é importante, pois eles representam diferentes abordagens para resolver problemas matemáticos. A transição do raciocínio aditivo para o multiplicativo é um marco importante no desenvolvimento matemático de estudantes (Heliodoro, 2004).

Resultados semelhantes aos de Cyr (2003) foram encontrados por Kamii e Clark (1995), em pesquisas sobre frações equivalentes. Os pesquisadores reforçam que as frações equivalentes envolvem dois aspectos relacionados com o pensamento operatório identificados por Piaget: o pensamento multiplicativo e a consideração do todo e das partes.

Ao analisarem dificuldades de alunos dos quintos e sextos anos, ao resolverem tarefas que envolvem frações equivalentes, chegaram à conclusão que a maioria das crianças resolve de forma perceptiva (baseada em formas, que são observáveis) em vez de recorrer aos aspectos relacionados ao pensamento operatório (baseado em operação, que não são observáveis) das frações equivalentes.

Em relação ao ensino de porcentagem, Tian e Siegler (2018) relatam a falta de artigos publicados sobre a aprendizagem de porcentagem e que, “juntamente com a importância do tema, faz pesquisas sobre a compreensão das crianças sobre porcentagens essenciais para uma representação abrangente do conhecimento dos números racionais e seu desenvolvimento” (p. 366). E complementam que não encontraram pesquisas “que examinasse a conversão entre porcentagens e outras notações de números racionais em qualquer direção” (p. 367).

Um dos estudos, citados por Tian e Siegler (2018), analisa a compreensão de alunos dos sétimos e oitavos anos dos Estados Unidos, sobre o senso numérico relativo à porcentagem (Gay & Aichele, 1997). Um dos resultados apontados pelo estudo é que “mesmo que os alunos aprendam as relações entre frações, decimais e porcentagens, os estudantes poderiam citar exemplos específicos de frações e decimais que eram equivalentes a porcentagens, eles não pareciam usar as inter-relações entre as representações numéricas com confiança” (Gay & Aichele, 1997, p. 33). Além disso, os alunos demonstraram “algumas relações errôneas em seu

conhecimento de porcentagem e frequentemente usavam regras e procedimentos incorretos com confiança” (p. 33) o que pode ser resultado de um currículo que enfatiza regras e procedimentos em vez de conceitos sobre porcentagem.

Na mesma direção, Monteiro e Costa (1996) argumentam que:

A utilização prematura das regras no estudo de frações e decimais, tem sido detectado como outro fator que atrasa a compreensão dos números racionais, visto que os alunos não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e as respectivas regras na resolução de situações na sala de aula de matemática (Monteiro & Costa, 1996, p.62).

Uma regra prematura pode levar a um “esquecimento” da criança de um ano para outro. Na teoria piagetiana poderia estar “profundamente relacionado a sua não-incorporação de conhecimentos suficientes para organizar suas ações mentais naquela situação” (Pinto, 2000, p. 117).

2.2 Sobre frações, decimais e porcentagens na reta numérica

A abordagem da reta numérica é uma estratégia eficaz no ensino e aprendizado de frações, porcentagens e números decimais. A reta numérica é uma representação visual que organiza os números de forma linear, permitindo a localização e comparação de diferentes valores numéricos. Ao posicionar os números nessa linha, os alunos podem identificar a sua localização relativa e realizar comparações entre eles. Isso ajuda a desenvolver a compreensão de equivalência entre diferentes formas de representação numérica, como frações equivalentes, porcentagens e números decimais (Mandarino & Sant’anna, 2019).

No ensino de frações, a reta numérica pode ser utilizada para demonstrar a relação entre partes de um todo. Os alunos podem posicionar as frações ao longo da reta numérica, identificando sua posição em relação ao inteiro e comparando o tamanho das mesmas. Isso auxilia-os na compreensão dos conceitos de numerador e denominador, bem como na comparação e ordenação de frações (Mandarino & Sant’anna, 2019).

No que se refere a porcentagens, a reta numérica é igualmente eficaz para representar diferentes proporções em relação a um número inteiro. Os alunos podem marcar pontos específicos na reta numérica para representar porcentagens como 25%, 50% e 75%, permitindo que visualizem as diferentes quantidades representadas por essas porcentagens e estabeleçam relações com frações e números decimais

equivalentes.

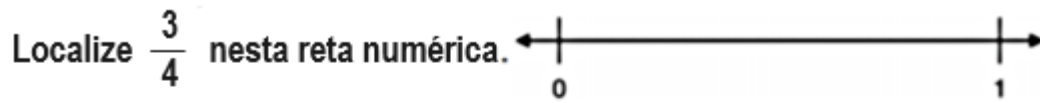
No âmbito dos números decimais, a reta numérica auxilia os alunos a compreender valores decimais entre dois números inteiros. Ao posicionar números decimais ao longo da reta numérica, os alunos podem perceber sua proximidade com números inteiros e comparar seus valores. Isso contribui para o entendimento da relação entre frações e números decimais, além de auxiliar na interpretação e localização de valores decimais (Mandarino & Sant'anna, 2019).

Onuchic e Avellato (2008) destacam que os números racionais têm diferentes "personalidades": ponto racional, quociente, fração, razão e operador. Para as autoras, um deles é a representação como ponto na reta numérica, "todo número racional a/b ocupa um ponto bem definido na reta e, reciprocamente, a todo ponto racional da reta corresponde um número racional" (p. 87).

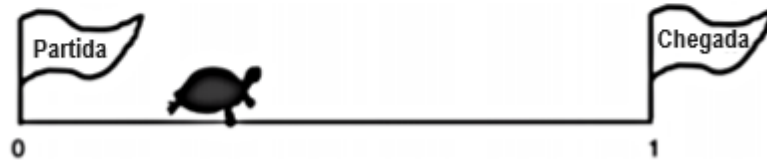
Lamon (2020) acrescenta uma perspectiva importante sobre a representação de frações na reta numérica. Ela observa que, embora aborde-se o conteúdo de frações como se fossem pontos na reta, na realidade, não são pontos, mas medidas de distância. São as medidas de distância que um ponto específico na reta está do zero, considerando números racionais positivos. Quando um intervalo, nesse caso uma reta numérica, possui comprimento igual a "1" e esse comprimento é subdividido em "b" subintervalos iguais, cada um destes subintervalos terá medida igual a "1/b". A reta numérica pode ser dividida sucessivamente em quantas subunidades forem necessárias, permitindo que o número de partes iguais na reta varie.

Lamon (2020) também destaca a diferença entre dois tipos de exercícios (Figura 1). No primeiro, os alunos são convidados a localizar a fração $\frac{3}{4}$ na reta. Nesse caso, eles são levados a dividir o intervalo dado em quatro partes iguais e marcar o fim do terceiro intervalo, representando assim três partes do todo. Essa abordagem se assemelha a exercícios que enfatizam a interpretação da fração como parte-todo.

Figura 1. Representação de frações na reta numérica



A que distância do ponto de partida esta a tartaruga?



Fonte: Lamon (2020, p. 221-222)

No segundo exercício (Figura 1), os estudantes são encorajados a dividir a reta por subdivisões sucessivas até que consigam marcar a posição desejada. Isso demonstra como a reta numérica pode ser uma ferramenta flexível e adaptável para abordar diferentes aspectos do aprendizado matemático, incluindo a interpretação visual e a compreensão conceitual.

A utilização da reta numérica como uma ferramenta de ensino e aprendizado tem diversas vantagens que vão além das já mencionadas, tais como, a visualização e compreensão; conexões entre conceitos; comparação e ordenação; resolução de problemas; transição suave; flexibilidade e adaptabilidade; e conceitos de medida (Lima, 2020).

Uma observação relevante que pode ser destacada neste estudo, é sobre o número de vezes que a palavra “reta numérica” aparece na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – vinte vezes. Neste documento espera-se que o aluno saiba “reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica” (Brasil, 2017, p. 269). A menção à reta numérica ocorre desde o primeiro ano e na unidade de números há objetos de conhecimento relacionados à “Leitura, escrita e comparação de números naturais (até 100) e reta numérica” (p. 278).

No terceiro ano, a orientação é a construção de fatos de adição, subtração e multiplicação de números naturais e suporte à reta numérica. A primeira vez que ocorre o termo frações associado à reta numérica é no quarto ano. A prescrição é “EF04MA09 - Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como

recurso” (p. 291). Para o quinto ano temos previsto o ensino dos “Números racionais expressos na forma decimal e sua representação na reta numérica” (p. 294) e o “Cálculo de porcentagens e representação fracionária” (p. 294).

Para o sexto ano, destacamos as habilidades de “EF05MA06 – Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros” (p. 295) e “EF06MA08 – Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica” (p. 301).

No sétimo ano, “EF07MA10 – Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica” (p. 305). No oitavo ano não aparece nenhuma indicação em relação à reta numérica; e, no nono ano, a reta numérica está associada à representação dos números irracionais.

Na BNCC, ou ocorre a articulação entre as representações fracionárias e decimais ou das frações com a porcentagem e nunca entre os três. Concorda-se com Trindade e Búrigo (2021) quando afirmam que “a BNCC compreende que os diferentes significados de número racional, bem como a noção de número racional, devem ser alcançados até o sétimo ano, visto ser este o último ano em que o documento estabelece maiores especificações em relação a essas aprendizagens” (p. 13).

Schrenk (2021) faz um mapeamento de produções didáticas pedagógicas dos professores da rede estadual de ensino, do estado do Paraná, resultantes da participação do Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) no que tange ao ensino de frações como medida, utilizando a reta numérica. Foram localizadas 106 produções didáticas pedagógicas, o que demonstra que os professores têm conhecimento desta representação, mas que o número não é muito expressivo perto de mais de 20 mil produções.

Behr et al. (1983) realizaram uma pesquisa com 77 alunos da quarta série, dos Estados Unidos, no que concerne à interpretação das frações $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{3}$ na reta numérica, na forma discreta, em círculos e retângulos. Concluíram que há um número desproporcional de erros em problemas de reta numérica para as três frações

propostas. Pontuam que isso provavelmente se deve ao fato de que a maioria das experiências dos alunos foram com a interpretação parte-todo da fração em um contexto contínuo (área). Isso sugere que a interpretação da reta numérica é especialmente difícil para as crianças. Os estudos mostraram uma noção imprecisa e inflexível de frações na reta numérica mesmo no nono ano.

Vaz (2013), ao investigar o desempenho de alunos de duas turmas do sétimo ano do ensino fundamental, no município de Itaboraí – RJ, utilizando metodologia de pesquisa baseada na análise das soluções (erros e acertos) em tarefas sobre frações inspirado nos trabalhos de Cury (2019), também constatou alto teor de dificuldade em uma questão relacionada à reta numérica.

A questão era “Entre quais números representados na reta numérica abaixo podemos colocar a fração $\frac{2}{5}$ ”. Os estudantes tinham que posicionar essa fração em uma reta, iniciando em zero e com cinco marcações com números de um a cinco. O percentual de acertos no Pré-teste foi de 0% e, no Pós-teste, de 17,19%, sendo que a maioria dos alunos posicionou o $\frac{2}{5}$ entre os números dois e cinco.

Um aspecto conflitivo é quando ocorrem intervenções não construtivas por parte dos professores. Pinto (2000) exemplifica que as crianças aprendem que zero é nada num momento em que ainda não têm um conceito bem formado de valor posicional dos algarismos. As crianças “‘inventam’ regras para completar as tarefas, regras essas que acabam incorporando a seus esquemas” (Pinto, 2000, p. 117) que se transformam em erros sistemáticos, expressando conhecimentos malformados. Talvez possa ser o que tenha acontecido, quando as crianças posicionaram $\frac{2}{5}$ entre dois e cinco, interpretando que poderia ser um número inteiro entre dois e cinco.

Segundo Vaz (2013, p. 64, grifo nosso), ao se referir à sequência didática que continha a atividade “Entre quais números representados na reta numérica abaixo podemos colocar a fração $\frac{2}{5}$ ”, afirma que:

As observações realizadas em sala indicaram, em consonância com o referencial teórico desta pesquisa, que **a maioria dos alunos teve o primeiro contato com a reta numérica durante essa sequência didática**. Ou seja, eles cursaram todo o primeiro segmento do ensino fundamental e o sexto ano sem terem trabalhado com a reta numérica. Outro fator apontado nas referências deste trabalho e observado nesta pesquisa foi a dificuldade de aprendizagem da reta numérica, alunos demonstraram em alguns momentos certo desconforto em trabalhar com tal conceito.

Howe et al. (2011) chegaram em resultados semelhantes e pontuam que talvez o significado de frações na reta numérica (medida) não tenha sido abordado com os alunos no estudo que realizaram. Os alunos acabam utilizando conhecimentos errôneos ou incompletos como, por exemplo, $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{4}$ para 3,5 e 5,4 criando suas próprias regras.

Vaz (2013) sugere que diante da dificuldade do tema este assunto pode, e deve, ser abordado de forma constante e permanente nas séries posteriores, por exemplo, durante a introdução dos números inteiros.

À luz do conteúdo apresentado até o ponto atual desta investigação, a próxima seção prossegue detalhando os encaminhamentos metodológicos adotados, destacando a robustez e a coerência das estratégias empregadas para atender aos objetivos propostos. Nesse contexto, serão minuciosamente explorados os procedimentos metodológicos, delineando o caminho trilhado para conduzir a pesquisa de maneira eficaz.

Na próxima seção, será apresentado os aspectos metodológicos da pesquisa. Uma atenção especial será dedicada à apresentação e discussão do instrumento utilizado para a coleta de dados e a construção das categorias de análise.

2.3 Encaminhamentos Metodológicos da Pesquisa

Esta pesquisa se caracteriza como qualitativa, optando por uma abordagem aberta e flexível que permite uma investigação profunda e contextualizada do objeto de estudo. Para Flick (2004), a pesquisa qualitativa busca a compreensão da totalidade das relações sociais e, nesse contexto, o objeto do estudo é o ponto de partida, e segundo Machado (2006, p.96), nos “estudos qualitativos, o desenho da investigação emerge, normalmente, da própria investigação”. A tomada de decisões ocorre “durante o decurso do próprio estudo, procurando precaver a existência de subjetividade tanto na recolha de dados quanto na interpretação dos mesmos” (Machado, 2006, p. 92).

O instrumento de coleta de dados utilizado nesta investigação foi uma lista de atividades com cinco questões, elaboradas e organizadas de tal forma que fosse possível verificar se haveria ou não, a compreensão dos alunos sobre possíveis articulações entre as representações numéricas frações, decimais e porcentagem, bem como as estratégias utilizadas para a resolução das questões. Destaca-se que

esse conteúdo está previsto na BNCC (2017) a partir do quinto ano do Ensino Fundamental.

A ideia de aplicar o mesmo instrumento nos sextos, sétimos, oitavos e nonos anos, tem inspiração nos trabalhos de Nunes, Campos, Magina e Bryant² (2005) quando aplicam a mesma atividade com alunos dos anos iniciais do primeiro ao quinto ano para ver as transformações na compreensão dos números e operações numéricas. A limitação deste estudo está no fato de não realizar entrevistas com os alunos que realizaram a pesquisa, mas fornecem indicativos sobre a dificuldade dos alunos com os números racionais na reta numérica.

Para se investigar como os alunos demonstram compreender e articular as representações dos números fracionários, decimais e percentuais, organizou-se atividades que pudessem fornecer indícios dessa articulação, por meio da caracterização dos erros. De início, foi definido que seriam um total de seis a sete questões, abertas e de múltipla escolha. Cada questão precisaria, em ordem crescente de dificuldade, abordar as diferentes representações do número racional.

Ao final, optou-se por cinco questões (Figura 2), pois julgou-se ser um número adequado para ser resolvido em uma hora-aula, considerando-se que seriam desenvolvidas com alunos dos sextos aos nonos anos. Caso algum aluno terminasse antes do tempo de cinquenta minutos, seriam entregues duas questões extras para ocupá-los, porém não foi necessário.

² Essa forma de realizar pesquisa baseia-se no método clínico desenvolvido por Jean Piaget e seus colaboradores e que realiza entrevistas com os alunos para compreender o que realmente sabem sobre um determinado conteúdo.

Figura 2. Atividades sobre frações, decimais e porcentagem propostas aos alunos

Questão 01 - A Prova Paraná tem 52 questões. Sophia acertou 50% da Prova. Pergunta-se, quantas questões ela acertou? Justifique sua resposta.



Questão 02 - Observe a carga da bateria do celular do Pedro. Marque a alternativa que representa a porcentagem de carga que falta para o completar o carregamento total da bateria do celular de Pedro. Justifique sua resposta.

- a) $0,50 = 50\%$
 b) $0,25 = 25\%$
 c) $0,85 = 85\%$
 d) $0,75 = 75\%$



Questão 03 - Durante um jogo de futebol da copa do mundo, os jogadores do Brasil jogaram 20 vezes contra o goleiro da equipe adversária e marcaram somente 4 gols. Qual é a porcentagem de chutes que o goleiro da equipe adversária conseguiu defender?



Questão 04 - Yeti, o monstro do armário, ficou preso dentro do armário. Para sair, ele precisa saber um código, que é o resultado deste problema. Você pode ajudá-lo a resolver esse problema?

$$20\% + \frac{3}{5} - 0,10$$



Questão 05 - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.



Fonte: Dos autores (2023)

A questão 01 promove a articulação entre os conceitos de fração, porcentagem e números decimais ao apresentar uma situação em que essas três formas de representação numérica estão interligadas. A resolução da questão envolve a compreensão desses conceitos e a capacidade de converter entre eles.

Para resolver a questão, espera-se que os alunos identifiquem que "50%" é uma porcentagem, que pode ser representada como "0.50" na forma decimal ou " $\frac{1}{2}$ " na forma de fração. Sabendo que Sophia acertou 50% da prova, os alunos devem entender que isso equivale a metade das questões, ou seja, 26 questões (metade de 52). Portanto, a resposta correta é que Sophia acertou 26 questões.

A resolução completa deve justificar o processo de conversão da porcentagem para fração ou decimal e explicar como essa conversão permite determinar o número correto de questões que Sophia acertou. Essa questão estimula os alunos a aplicarem seus conhecimentos sobre frações, porcentagens e números decimais de forma integrada para resolver problemas do mundo real.

A questão 02 promove a articulação entre os conceitos de fração, porcentagem e números decimais ao fornecer uma situação concreta em que esses conceitos estão interligados. A resolução da questão envolve a compreensão de como representar a carga da bateria em termos de fração e, em seguida, convertê-la para porcentagem ou decimal.

Para resolver a questão, espera-se que os alunos observem que a carga da bateria do celular de Pedro foi representada como $\frac{1}{4}$ do total. Isso significa que ele carregou $\frac{1}{4}$ da carga total da bateria. Os alunos devem então determinar a porcentagem ou decimal equivalente a essa fração para representar a carga restante que falta para completar o carregamento total da bateria.

A resolução completa deve apresentar a conversão da fração $\frac{1}{4}$ para porcentagem ou decimal, mostrando como essa representação permite determinar a quantidade de carga que falta para completar o carregamento total. Espera-se que os alunos identifiquem corretamente que, se $\frac{1}{4}$ da bateria está carregada, então $\frac{3}{4}$ da bateria ainda está descarregada. Isso pode ser representado como 75% ou 0.75 em termos de porcentagem ou decimal, respectivamente. Portanto, a resposta correta é que 75% (ou 0.75) da carga da bateria ainda falta para completar o carregamento total.

No caso da questão 03, promove a articulação entre os conceitos de fração, porcentagem e números decimais ao apresentar uma situação que envolve esses três elementos inter-relacionados. A resolução da questão requer uma compreensão da relação entre o número total de tentativas de gol, o número de gols marcados e a porcentagem de chutes defendidos pelo goleiro adversário.

Para resolver a questão, espera-se que os alunos determinem o número total de chutes realizados pelos jogadores do Brasil (20), subtraiam o número de gols marcados (4) para encontrar o número de chutes defendidos pelo goleiro adversário. Em seguida, os alunos devem expressar a relação entre os chutes defendidos e o total de chutes como uma fração.

A resolução completa envolve converter essa fração em porcentagem ou decimal para representar a porcentagem de chutes defendidos pelo goleiro adversário. Espera-se que os alunos identifiquem corretamente a fração de chutes defendidos e a convertam para porcentagem ou decimal, mostrando assim a eficácia do goleiro adversário em defender os chutes. Por exemplo, se o goleiro defendeu 16

dos 20 chutes, a fração seria $\frac{16}{20}$, que pode ser convertida para 80% ou 0.80 em termos de porcentagem ou decimal, respectivamente. Portanto, espera-se que a resposta correta indique que o goleiro adversário defendeu 80% (ou 0.80) dos chutes realizados pelos jogadores do Brasil.

A questão 04 promove a articulação entre os conceitos de fração, porcentagem e números decimais ao apresentar uma expressão matemática composta por esses elementos inter-relacionados. A resolução da questão requer uma compreensão dos diferentes formatos de representação numérica e a habilidade de operar com essas diferentes formas.

Para resolver a questão, espera-se que os alunos identifiquem e calculem corretamente o resultado da expressão matemática fornecida. Primeiramente, os alunos devem realizar as operações aritméticas na expressão, levando em consideração a prioridade das operações. Eles devem somar 20% (ou 0.20 em termos decimais) com $\frac{3}{5}$ (fração) e subtrair 0.10 (número decimal).

A resolução completa envolve converter todas as partes da expressão para um formato comum, como fração ou decimal, para facilitar a operação. Em seguida, os alunos devem realizar as operações matemáticas corretamente e determinar o resultado final.

Espera-se que os alunos apresentem uma resposta numérica precisa, demonstrando assim a capacidade de operar com diferentes representações numéricas e integrar conceitos de fração, porcentagem e números decimais em uma única expressão matemática. Por exemplo, a resposta final pode ser apresentada na forma de uma fração, número decimal ou porcentagem, dependendo da preferência do aluno e da forma da expressão fornecida.

A questão 05 promove a articulação entre os conceitos de fração, porcentagem e números decimais ao desafiar os alunos a posicionar esses diferentes tipos de números em uma reta numérica comum. A resolução da questão requer que os alunos compreendam as relações entre essas diferentes representações numéricas e sejam capazes de localizá-las adequadamente na reta numérica.

Para resolver a questão, os alunos devem primeiro entender como cada tipo de número (fração, porcentagem e decimal) se relaciona e se converte entre si. Em seguida, eles devem posicionar cada número fornecido na reta numérica, levando em consideração sua magnitude e relação com os outros números apresentados.

Espera-se que os alunos identifiquem corretamente a posição de cada número na reta numérica, demonstrando assim sua compreensão das relações entre frações, porcentagens e números decimais. A resolução completa da questão envolve a precisão na localização de cada número na reta numérica, garantindo que todos os números estejam corretamente representados e que as proporções entre eles sejam mantidas.

De acordo com a BNCC (2017), alguns dos objetivos das questões propostas para além das apresentadas anteriormente sobre a reta numérica são:

[...] (EF06MA08) reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. [...] (EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora. [...] (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (Brasil, 2017, p. 301).

A primeira questão foi autoral e a segunda questão é recorrente em vários *sites* de matemática disponíveis na Internet. Já as três últimas questões foram inspiradas no trabalho de Cyr (2003), que se propôs a estudar esquemas de conhecimento para aprender frações com 22 alunos do sexto ano do ensino fundamental, no Canadá. A intenção deste estudo foi de propor cinco questões, em ordem crescente de dificuldade, partindo-se do pressuposto que, ao resolver as quatro anteriores, o aluno teria subsídios para resolver a quinta questão.

As atividades foram desenvolvidas por um total de 203 alunos – divididos em oito turmas, de uma escola da rede estadual de ensino que está situada na região Oeste do estado do Paraná durante o mês de abril de 2023. O diretor e equipe pedagógica estavam cientes do estudo e autorizaram seu desenvolvimento. A princípio era para ser aplicada pelo próprio pesquisador, por ser a escola que trabalha, mas que depois, em função da dinâmica da escola foi feita por outros professores.

Todas as atividades e respostas³ dos alunos foram utilizadas no estudo, não havendo critérios de exclusão. Das oito turmas, têm-se duas turmas do sexto (55

³ A quinta questão foi utilizada para caracterização dos erros e excertos das cinco questões foram utilizados para criação do produto educacional atrelado a esta dissertação.

alunos), duas do sétimo (53 alunos), duas do oitavo (46 alunos) e duas do nono ano (49 alunos) do Ensino Fundamental II. Todas as folhas foram impressas coloridas e entregues aos alunos. O tempo médio para a realização das atividades foi de cinquenta minutos e sem o auxílio do professor. Cada folha de atividade, depois de recolhida, foi escaneada e arquivada para posteriores análises.

Nesta pesquisa é trazida para discussão apenas a questão 5, pela riqueza de informações fornecidas e pela referida questão, além de envolver os conteúdos contidos nas quatro anteriores, ter como enfoque a reta numérica, frações, decimais e porcentagens.

De posse das atividades resolvidas e escaneadas, iniciou-se o primeiro contato com os dados, por meio de leituras flutuantes. A leitura flutuante, proposta por Laurence Bardin em sua obra "Análise de Conteúdo", é a primeira etapa fundamental para a análise de documentos em diversas áreas, como comunicação, educação, psicologia e sociologia. Ela consiste em uma imersão inicial no material a ser analisado, com o objetivo de familiarizar-se com o conteúdo por meio da compreensão da temática geral, da percepção da estrutura e concepção e da identificação de elementos relevantes; Da formulação de hipóteses e objetivos por meio do levantamento de questões norteadoras e da definição dos objetivos de pesquisa, entre outros (Bardin, 2004).

Para a análise das informações, utilizou-se a Análise de Conteúdo (Bardin, 2004) e a Análise de Erros (Cury, 2019). A Análise de Conteúdo é uma metodologia amplamente utilizada na pesquisa qualitativa para analisar o conteúdo de textos, discursos, documentos, entrevistas e outras fontes de dados.

As etapas da Análise de Conteúdo de Bardin (2004) geralmente incluem a pré análise; a exploração do material; a codificação; a definição das categorias e a elaboração do relatório. A primeira etapa, da pré análise, refere-se ao que será analisado, neste caso, ao processo de resolução da questão cinco. A elaboração de um esquema de codificação ou categorias iniciais e a organização dos materiais a serem analisados fazem parte desta fase.

A segunda etapa, da exploração do material, é o momento em que se familiariza com os dados a serem analisados, por meio da leitura e releitura; da identificação de características significativas e de anotações de ideias ou insights iniciais – os erros nas resoluções que foram comuns, emergiram nesta etapa.

Na sequência, tem-se a codificação, na qual o material é analisado e

categorizado, por meio da codificação das unidades de análise com base no esquema de categorias previamente definido; e na classificação do material de acordo com essas categorias. Por questão de organização dos dados, uma primeira codificação foi realizada, sendo, por exemplo, A018A – aluno um, oitavo ano, turma A. A partir disso, algumas unidades de análise para os erros foram consideradas, e passou-se para a categorização.

Para a verificação das respostas dos alunos, nosso enfoque foi nos erros. Deste modo, a metodologia de análise de dados por nós utilizada foi a Metodologia da Análise de Erros, proposta por Cury (2019).

Ao reconhecer e valorizar o erro como um componente natural da aprendizagem matemática, os educadores podem criar um ambiente seguro e encorajador, onde os alunos se sentem à vontade para explorar, cometer erros e refletir sobre suas estratégias.

Na análise de erros, busca-se compreender as razões pelas quais os alunos cometem erros matemáticos e, a partir dessa compreensão, desenvolver estratégias de ensino que possam auxiliá-los na superação dessas dificuldades. A análise dos erros dos alunos nos oferece insights valiosos sobre as concepções e os processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas matemáticos, permitindo-nos direcionar nossa prática docente de maneira mais efetiva e proporcionar uma aprendizagem mais significativa para os estudantes (Cury, 2019).

As categorias foram definidas de acordo com o agrupamento dos erros comuns, bem como, para os incomuns, quando se fez necessário. Nesta fase, obteve-se quatro categorias de erros: por incompletude na resolução; no reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica; por distração; e pela inexistência da articulação entre as representações do número racional. A seguir está a descrição do que foi considerado em cada categoria.

Na categoria, o erro **por incompletude na resolução**, tem-se no processo de resolução que os alunos compreendem fração como quociente, por efetuarem a divisão, e localizam a representação decimal corretamente na reta numérica, entretanto, observamos que desconhecem a representação do número racional na forma de porcentagem, por ignorarem ou desconsiderarem estas representações.

Na categoria o erro **no reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica**, há erros dos alunos que demonstraram compreender a fração como quociente, por registrarem o cálculo da divisão e obterem como resultado um número na forma decimal.

Na categoria o erro **por distração**, têm-se fragmentos dos processos de resoluções em que os alunos demonstraram ter compreendido fração como quociente, localizaram corretamente os números na reta numérica e compreenderam porcentagem como fração e como quociente. Cometeram pequenos erros por distração.

Por fim, na categoria do erro **pela inexistência da articulação entre as representações do número racional**, destacamos os erros daqueles processos de resolução em que os alunos demonstraram desconhecer as diferentes representações do número racional, por localizarem de forma pouco coerente e utilizando a própria intuição os números na reta numérica, ou seja, não compreenderam as representações dos números, bem como sua localização na reta numérica.

Consideramos a categoria **atividade sem resposta** para que possamos ter uma noção da quantidade de alunos que não apresentou nenhuma tentativa de responder a atividade.

Quadro 1 Quadro resumo com as cinco categorias e suas explicações

CATEGORIAS DE ERROS	EXPLICAÇÃO
Por incompletude na resolução	Quando o aluno deixou a atividade incompleta ou parcialmente correta.
No reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica	Falta de compreensão do conceito de porcentagem, dificuldade em visualizar a localização na reta numérica e confusão entre diferentes representações.
Pela inexistência da articulação entre as representações do número racional	Erros daqueles processos de resolução em que os alunos demonstraram desconhecer as diferentes representações do número racional
Atividade sem resposta	Atividades que os alunos deixaram em branco, sem tentativa de resolução.

Fonte: Do autor (2023)

De posse dessas informações, definimos os recortes dos processos de resolução a serem apresentados em cada categoria para as análises. Na sequência, serão apresentadas as categorias dos erros, descrições e análises, trazendo as nuances dos erros cometidos pelos alunos, apresentando as categorias identificadas e as análises detalhadas desses equívocos.

E para finalizar, foi proposto como produto educacional um curso de formação de professores que ensinam matemática sobre a temática da dissertação que possa auxiliar o professor no ensino das diferentes representações dos números racionais, de forma a promover, incentivar e a desenvolver a articulação destas, principalmente por meio de atividades que tem a reta numérica como enfoque (Cury, 2019).

Por meio dessa investigação, buscamos não apenas identificar erros específicos dos alunos, mas também fornecer informações importantes sobre a aprendizagem dos números racionais.

3 AS CATEGORIAS DE ERROS E OS RESULTADOS DAS ANÁLISES

Neste capítulo foram trazidas as categorias com os resultados das análises para os sextos, sétimos, oitavos e nonos anos e alguns excertos para elucidar as estratégias de resolução dos alunos e seus erros. Ao final, foi apresentado um quadro geral das categorias dos erros para essas turmas.

3.1 Os sextos anos

Nas turmas de 6º ano A e B, 55 alunos realizaram as atividades propostas e nenhum conseguiu resolver corretamente a questão. Dezenove alunos resolveram a questão de forma incorreta, e trinta e seis a deixaram em branco, o que pode indicar um desconhecimento completo da forma de abordagem necessária para resolvê-la. Parece que, a maioria dos alunos estavam tendo um primeiro contato com uma atividade sobre as frações, decimais e porcentagem na reta numérica durante o desenvolvimento da atividade, assim como apontado por Vaz (2013). No Quadro 1 tem-se o número de alunos inseridos nesta categoria.

Quadro 1 – Categorização dos erros dos alunos dos sextos anos

Codificação	Categorização do Erro
	Por incompletude na resolução
	No reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica
	Por distração

A066A; A076A; A126A; A236A; A016B; A036B; A076B; A096B; A126B; A136B; A146B; A176B; A186B; A206B; A216B; A226B; A236B; A246B; A256B;	Pela inexistência da articulação entre as representações do número racional
A016A; A026A; A036A; A046A; A056A, A086A; A096A; A106A; A116A; A136A; A146A; A156A; A116A; A176A; A186A, A196A; A206A; A216A; A226A; A246A; A256A; A266A; A276A; A286A; A296A; A306A; A026B; A046B; A056B; A066B; A086B; A106B; A116B; A156B; A166B; A196B;	Atividade sem resposta

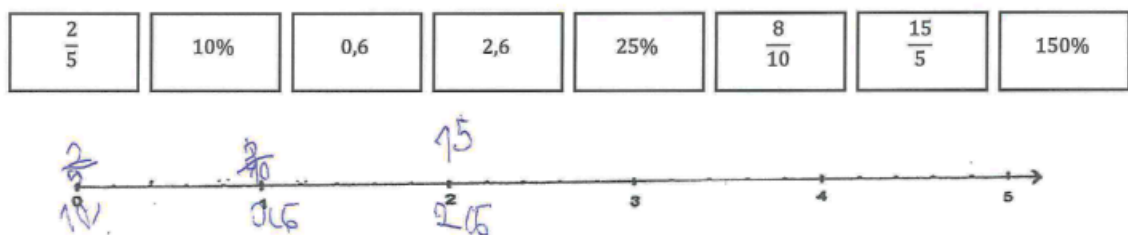
Fonte: Do autor (2023)

3.1.1 Erro pela inexistência da articulação entre as representações do número racional

De acordo com o Quadro anterior, todas as resoluções dos respondentes estão alocadas na categoria dada **pela inexistência da articulação entre as representações do número racional**.

Alunos como A136A e A096B tentaram resolver a questão proposta, porém observa-se que há uma certa incoerência no processo de resolução de ambos (Figura 3).

Figura 3 Resolução do A136A

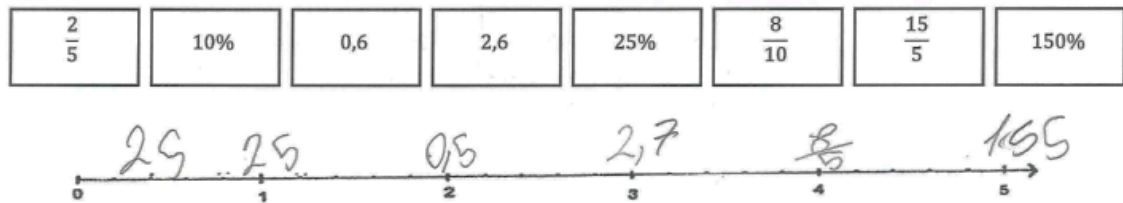


Fonte: Dos autores (2023)

Verifica-se (Figura 3) que o 0,6 aparece antes do 2,6. Há uma "lógica" em localizar o menor antes do maior. Mas a relação entre as representações e seus valores numéricos não existe, por exemplo, 2,6 e 15 "marcados" exatamente no número dois na reta numérica.

Com relação ao aluno A096B, destaca-se a tentativa de acrescentar algumas das opções presentes no quadro da questão de forma pouco coerente, acima da reta numérica.

Figura 4 Resolução do A096B



Fonte: Dos autores (2023)

O aluno demonstra interpretar $\frac{2}{5}$ e 25% como representações semelhantes, e ao comparar 0,5 com 2,7, percebe que 0,5 é menor que 2,7 (o número correto seria 2,6), além de inserir $\frac{8}{5}$ (na questão seria $\frac{8}{10}$) e substituir o 10 pelo 5 no denominador, e marcar $\frac{15}{5}$ após o $\frac{8}{5}$, indícios de que entende que $\frac{8}{5}$ é menor que $\frac{15}{5}$.

Chegou-se a resultado semelhante a Pinto (2000). Por ainda não ter um conhecimento bem formado sobre os números racionais na reta numérica, as crianças “inventam regras” para completar as tarefas e que no futuro podem se tornar erros sistemáticos.

Portanto, é difícil concluir se o aluno tem alguma compreensão desses conceitos ou se essas ações foram tentativas, sendo possível averiguar apenas com uma entrevista. O aluno A096B (Figura 4), que por sua vez inseriu utilizando a própria intuição os números na reta numérica, incluindo 0,5 e 2,7, que não estavam na lista original, pode nos indicar uma falta de atenção ao ler os números ou uma tentativa de cálculo, embora a questão não exigisse cálculos. Além disso, os resultados apresentados não correspondem à conversão correta para números decimais das frações e porcentagens dadas.

3.2 Os sétimos anos

Realizaram a atividade proposta um total de 53 alunos dos dois sétimos anos. Dezesesseis alunos a deixaram em branco, nenhum aluno a respondeu de forma totalmente correta. Dos respondentes, dois apresentaram um acerto parcial e correto; e trinta e quatro alunos responderam de forma totalmente incorreta.

Quadro 2 – Categorização dos erros dos alunos dos sétimos anos

Codificação	Categorização do Erro
	Por incompletude na resolução
A037B; A177B, A257B, A047B; A177B; A257B	No reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica
	Por distração
A017A; A037A; A097A; A117A; A127A; A137A; A157A; A167A; A177A; A187A; A197A; A207A; A217A; A227A; A277A; A287A A297A; A307A; A027B; A067B; A077B; A107B; A137B; A147B; A167B; A187B; A197B; A207B; A217B; A227B; A237B;	Pela inexistência da articulação entre as representações do número racional
A027A; A047A; A057A; A067A; A077A; A087A; A107A; A147A; A237A; A247A; A257A; A267A; A087B; A097B; A127B; A157B;	Atividade sem resposta

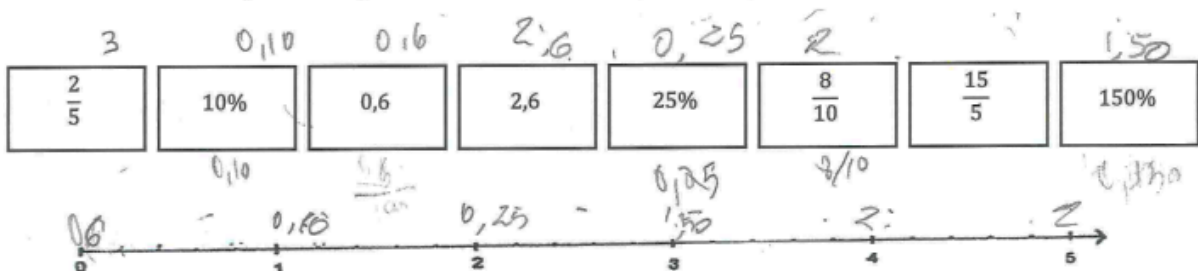
Fonte: Do autor (2023)

3.2.1 Erro no reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica

Observe que o aluno A037B, representado na Figura 5, demonstrou a capacidade de converter a fração e a porcentagem em números decimais. No entanto, ele cometeu um erro ao não conseguir localizar o valor decimal correto na reta numérica, sendo esse erro categorizado como "dificuldade em reconhecer a localização na reta numérica".

Figura 5: Resolução do aluno A037B

Questão 05 - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.



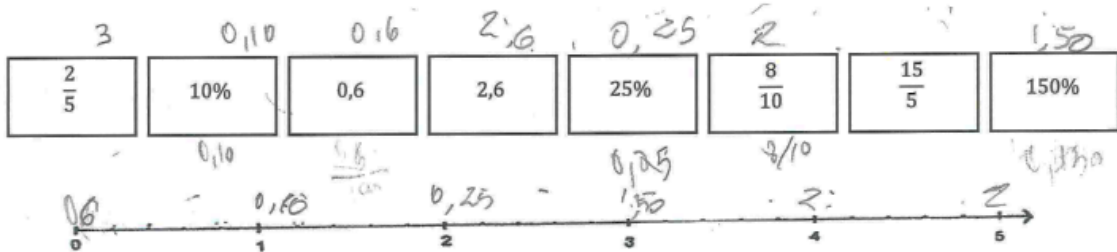
Fonte: Dos autores (2023)

Na resolução apresentada pelo aluno A177B, é possível verificar que ele

transformou tanto as frações como as porcentagens em seus números decimais correspondentes, exceto pelas frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{8}{10}$ que foram incorretamente representadas.

Figura 5: Resolução do aluno A177B

Questão 05 - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.



Fonte: Dos autores (2023)

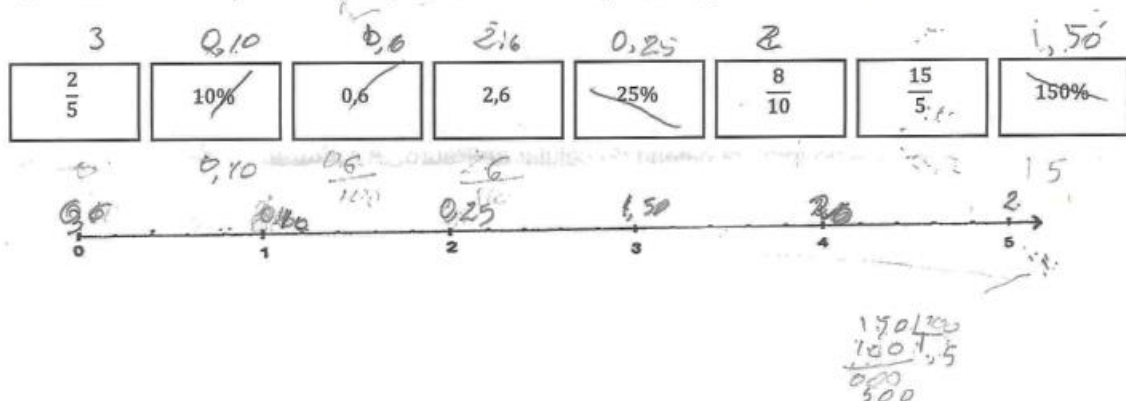
Além disso, ainda segundo a resolução do A177B, a fração $\frac{15}{5}$ foi deixada em branco, indicando que o aluno não realizou as operações necessárias para encontrar o resultado.

Apesar de efetuar a conversão dos valores, o aluno demonstrou não dominar a habilidade de colocar os números decimais e inteiros na reta numérica. Essa dificuldade evidencia que ainda não compreende como posicionar os valores de forma adequada na reta numérica.

Observa-se que o aluno A257B demonstrou conhecer as duas representações ao realizar a conversão de porcentagens em números decimais, como se pode verificar na conta armada de 150 dividido por 100.

Figura 6: Resolução do aluno A257B

Questão 05 - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.



Fonte: Dos autores (2023)

Na resolução do A257B, o aluno demonstra a incompreensão ao localizar

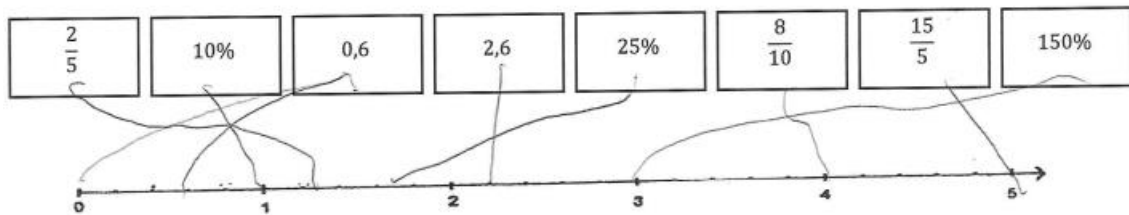
“todos” os valores como pontos específicos em uma reta numérica, são representações pouco coerentes, bem como dificuldades ao converter frações em números decimais.

3.2.2 Erro pela inexistência da articulação entre as representações do número racional

Serão apresentadas as resoluções das questões dos alunos A177A, A207A, A257B, A277A, A117B, A177B, A187B, por representarem os demais alunos, visto que os resultados foram semelhantes.

O aluno A277A (Figura 7) demonstrou entendimento apenas na colocação do número 0,6 e 2,6, números decimais na reta numérica. Mesmo assim, se observa a posição do número 2,6, que foi posicionado entre o dois e o três, sendo que a colocação correta deveria ser mais próxima do três do que do dois, indicando uma falta de clareza na compreensão das posições numéricas na reta.

Figura 7: Resolução do aluno A277A

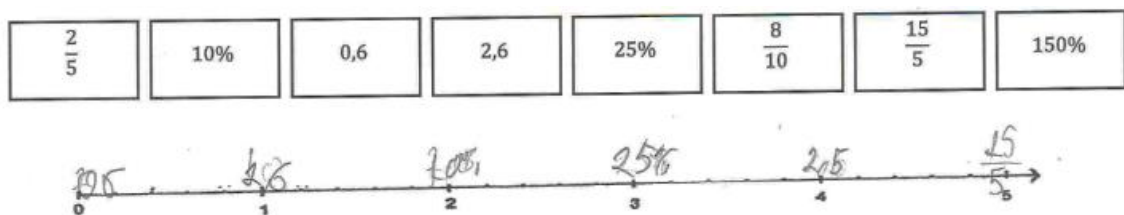


Fonte: Dos autores (2023)

Nas demais localizações, A277A pode ter feito estas marcações de forma pouco coerente. Isso se torna evidente quando se observa a posição das frações e da porcentagem na reta numérica.

No excerto do aluno A327A nos parece evidente que a abordagem para a resolução da questão o aluno utilizou a própria intuição, desprovida de qualquer base ou de uma sequência crescente ou decrescente de valores.

Figura 8: Resolução do aluno A327A

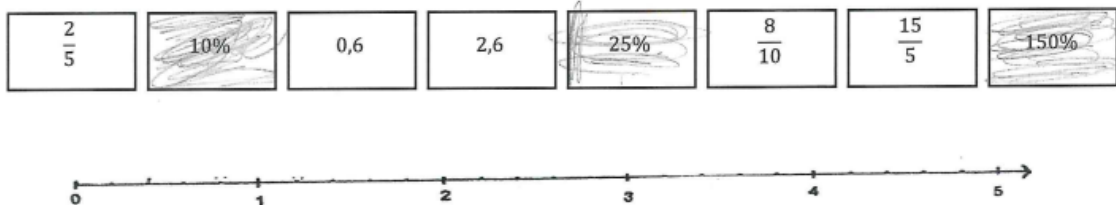


Fonte: Dos autores (2023)

Observa-se que a resolução tem coerência, pois o aluno colocou em ordem crescente os números, mas não entendeu a posição dos números na reta. No caso do aluno A187B (Figura 9), expressa não ter compreendido o enunciado da questão.

Figura 9: Resolução do aluno A187B

Questão 05 - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.



Fonte: Dos autores (2023)

A187B não posicionou as diferentes representações – as frações, os decimais e as porcentagens na reta numérica, optou por destacar os números 10%, 25% e 150%, colorindo os quadros. Em suma, o aluno demonstrou total desconhecimento de como resolver essa questão.

Encerrando a análise dos erros do sétimo ano, observou-se uma incompreensão por parte dos alunos das representações dos números racionais na reta numérica, ano em que a BNCC prevê a consolidação desses conhecimentos. Na próxima seção serão apresentados os resultados para os oitavos anos.

3.3 Os oitavos anos

Dos oitavos anos, 46 alunos fizeram a atividade, trinta alunos resolveram a questão e dezesseis a deixaram em branco. Dois responderam corretamente; oito, parcialmente correto; e vinte, totalmente incorreto (Quadro 3).

Quadro 3 – Categorização dos erros dos alunos dos oitavos anos

Codificação	Categorização do Erro
A028A; A128A; A148A; A198A; A138B	Por incompletude na resolução
A178A; A218A; A108B	No reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica
A058B; A208B	Por distração
A018A; A058A; A108A; A118A; A138A; A158A; A168A; A208A; A018B; A028B; A038B; A048B; A068B; A078B; A088B; A128B; A148B; A168B; A178B; A198B	Pela inexistência da articulação entre as representações do número racional

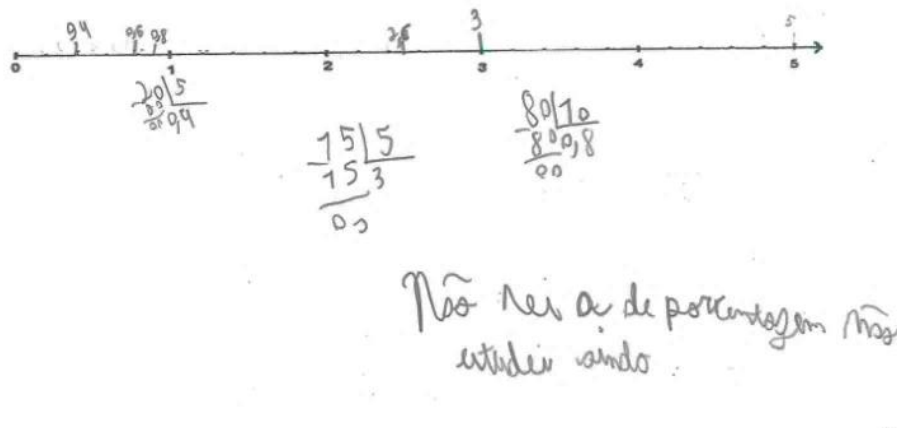
A038A; A048A; A068A; A078A; A088A; A098A; A188A; A228A; A098B; A118B; A158B; A188B; A218B; A228B; A248B; A258B;	Atividade sem resposta
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------

Fonte: Do autor (2023)

3.3.1 Erro por Incompletude na Resolução

Os alunos A28A, A128A, A148A, A198A, A138B demonstraram no processo de resolução que compreendem fração como quociente, por efetuarem a divisão, e localizaram a representação decimal corretamente na reta numérica, entretanto, observamos que desconhecem a representação do número racional na forma de porcentagem, por ignorarem ou desconsiderarem estas representações. Selecionamos três recortes para exemplificarmos, do A28A, do A128A e do A138B.

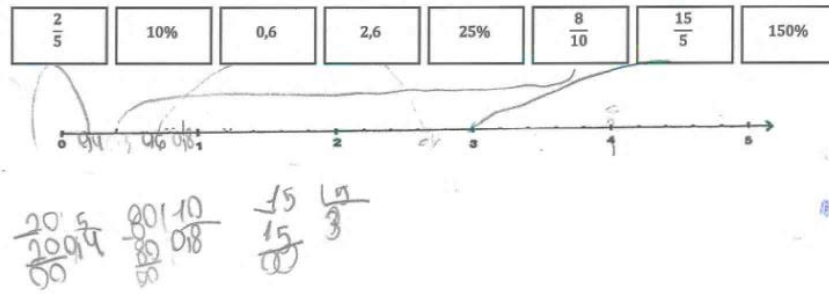
Figura 10. Resolução do A028A



Fonte: Dos autores (2023)

Observamos na Figura 10, que A028A deixa explícito na questão que desconhece o conteúdo relacionado à porcentagem. Porém, encontra-se no oitavo ano, ou seja, parece não ter “memorizado” ou “entendido” o conceito estudado em anos anteriores. Resultado semelhante ao encontrado por Tian e Siegler (2018) e Gay e Aichele, (1997), com estudantes dos Estados Unidos.

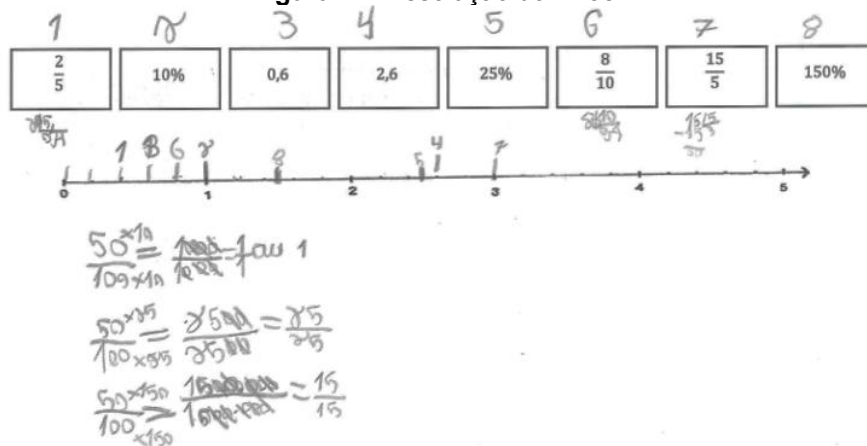
Figura 11. Resolução do A128A



Fonte: Dos autores (2023)

A128A (Figura 11) localizou na reta numérica somente as representações do número racional na forma de decimal e frações, assim como A28A.

Figura 12. Resolução do A138B



Fonte: Dos autores (2023)

O A138B (Figura 12) “arriscou” localizar as porcentagens na reta numérica, associando o número 1 ao 10%; 1,5 ao 150% (correto) e o 2,5 ao 25% (subdividiu o intervalo entre dois e três e marcou exatamente o 2,5). Observamos que essas “localizações” na reta numérica são resultados de algumas operações, com o auxílio de frações equivalentes, porém utilizou a fração $\frac{50}{100}$ para multiplicar por $\frac{10}{10}$, depois fez o mesmo com $\frac{50}{100}$ e multiplicou por $\frac{25}{25}$ e novamente, $\frac{50}{100}$ multiplicando por $\frac{150}{150}$.

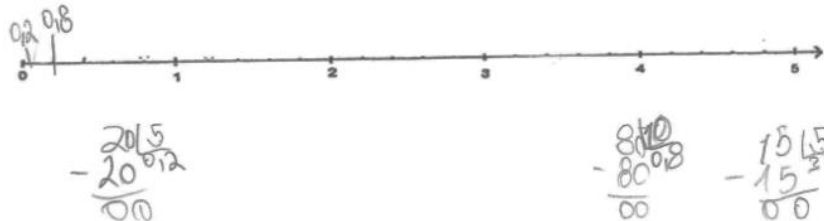
Parece-nos que a memorização do uso de regras para “conversão” da representação para decimais com confiança pode ter levado ao erro, como afirmam Gay e Aichele (1997). Todavia, é uma hipótese, pois é difícil compreender o processo que o aluno tentou fazer.

3.3.2 Erro no Reconhecimento das Representações de Porcentagens e na Localização na Reta Numérica

Os alunos A178A, A218A e A108B, no que diz respeito a categoria nomeada “no reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica”, demonstraram compreender a fração como quociente, por registrarem o cálculo da divisão e obterem como resultado um número na forma decimal.

Observa-se que no processo de resolução apresentado no excerto do A178A, não há a resolução completa da questão, porém esse aluno efetuou as divisões dos números fracionários e armou a operação na chave. Além disso, pode-se considerar que o erro na divisão de 20 por 5 ocorreu por falta de atenção.

Figura 13: Resolução do A178A

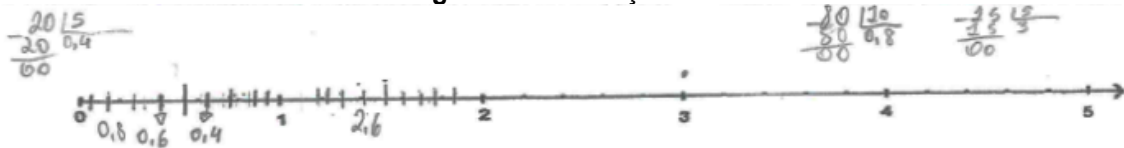


Fonte: Dos autores (2023)

Tem-se também que o aluno A178A localizou incorretamente e somente, 0,2 e 0,8 na reta numérica, desconsiderando as demais representações dos números racionais propostos na questão.

A218A (Figura 14) efetuou as divisões dos números fracionários corretamente e fez algumas subdivisões na reta numérica.

Figura 14: Resolução do A218A

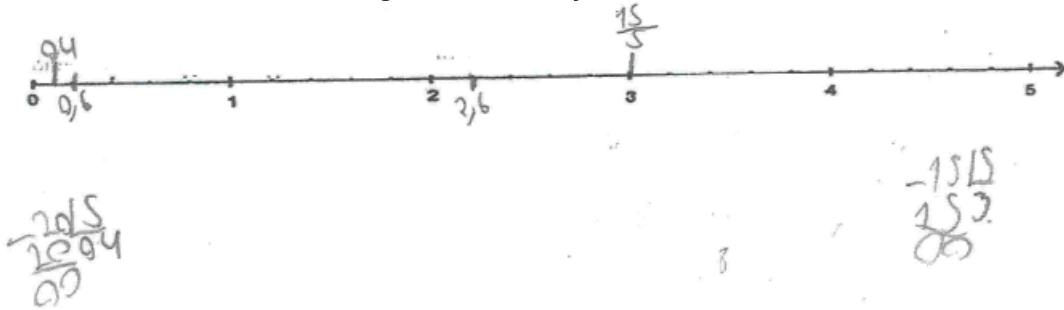


Fonte: Dos autores (2023)

Porém, A218A localizou os valores incorretamente na reta numérica, como se pode observar no intervalo de zero a um: 0; 0,8; 0,6; 0,4; 1. É interessante destacar que, ente zero e um, os valores foram marcados em ordem decrescente – 0,8, 0,6, 0,4. Entre os números um e dois realizou várias marcações – subintervalos, e arriscou localizar com insucesso, o 2,6 neste intervalo.

A108B (Figura 15) efetuou as divisões dos números fracionários corretamente, não os localizou de forma correta na reta numérica e ignorou os números representados por porcentagens.

Figura 15. Resolução do A108B



Fonte: Dos autores (2023)

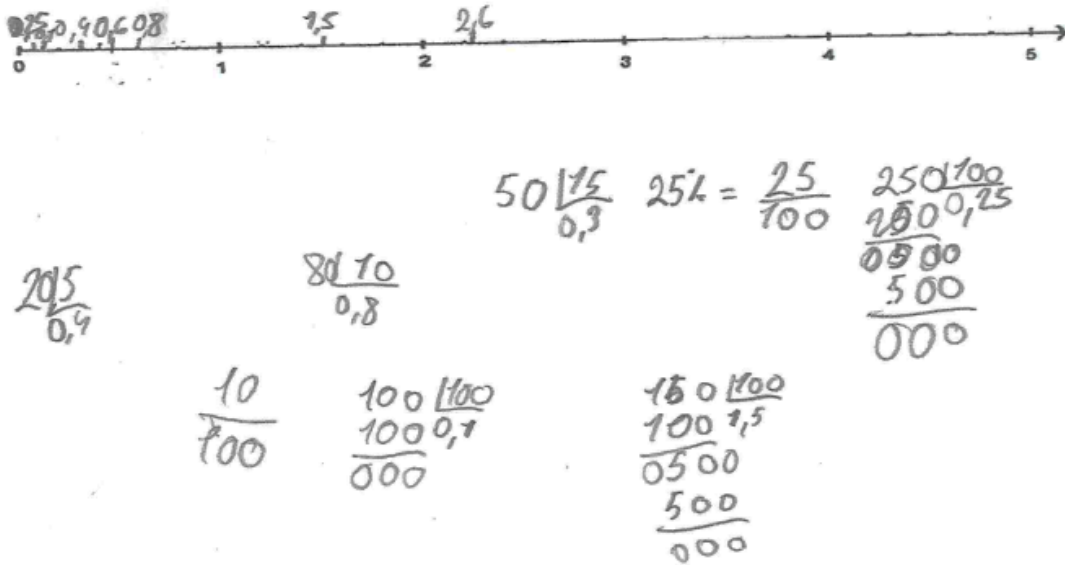
O aluno A108B demonstra compreender que a representação na forma fracionária pode ser expressa como um número decimal, resultado de uma operação de divisão.

3.3.3 Erro por Distração

Os alunos A058B e A208B demonstraram ter compreendido fração como quociente, localizaram corretamente os números na reta numérica e compreenderam porcentagem como fração e como quociente.

No excerto da resolução do A058B (Figura 16), observamos que realizou o cálculo da divisão de 15 por cinco incorretamente, fazendo na chave cinco dividido por 15, ou seja, inverteu o numerador com o denominador porque entendeu que o numerador não poderia ser maior que o denominador. A058B localizou na reta numérica o número 2,6 incorretamente. Este aluno demonstrou compreender que 25% podem ser representados por $\frac{25}{100}$ e que pode efetuar a operação relativa a esta divisão, ao registrar a conta armada na chave.

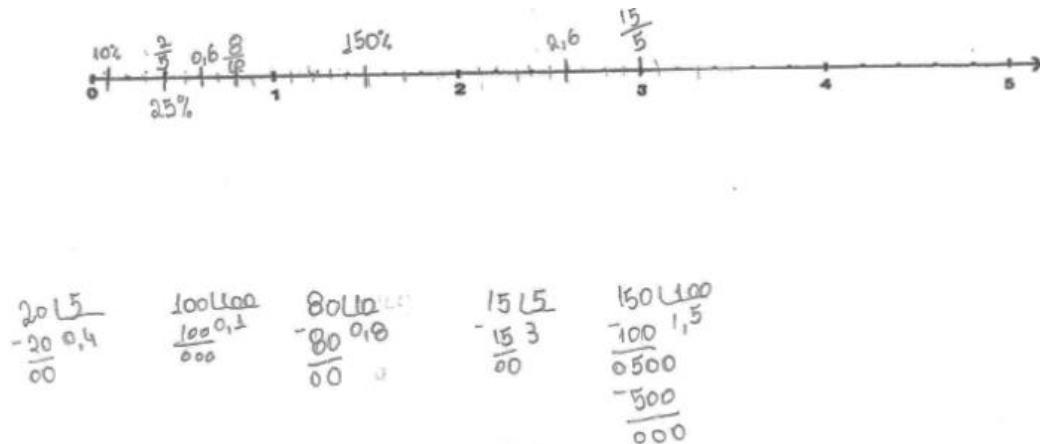
Figura 16. Resolução do A058B



Fonte: Dos autores (2023)

O aluno A208B (figura 17) localizou o número racional na forma de porcentagem (25%) de maneira incorreta. Acreditamos que esse erro se deu por distração.

Figura 17. Resolução do A208B



Fonte: Dos autores (2023)

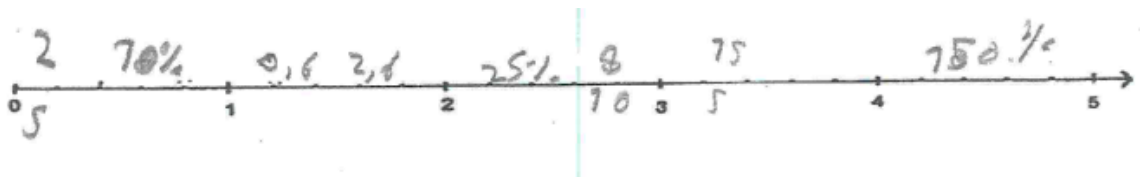
3.3.4 Erro pela Inexistência da Articulação entre as Representações do Número Racional

A categoria que mais obteve resoluções alocadas foi “**pela inexistência da articulação entre as representações do número racional**”. Os alunos A18A, A58A, A108A, A118A, A138A, A158A, A168A, A208A, A18B, A28B, A38B, A48B, A68B,

A78B, A88B, A128B, A148B, A168B, A178B e A198B demonstraram desconhecer as diferentes representações do número racional.

Destes, erraram totalmente a questão os alunos A18A, A58A, A108A, A118A, A168A, A208A, A38B, A48B, A78B, A128B, A148B, A178B e A198B, por localizarem os números na reta numérica usando a própria intuição, ou seja, não compreenderam as representações dos números, bem como sua localização na reta numérica. Serão apresentados alguns excertos de alguns destes alunos, como podemos observar na sequência, a resolução do A018A (Figura 18).

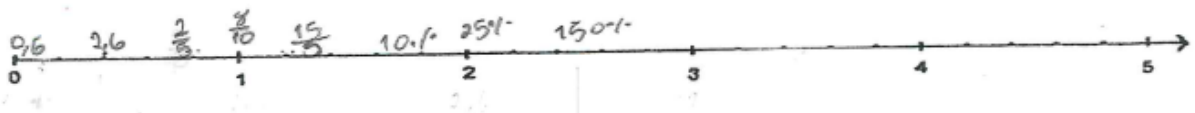
Figura 18. Resolução do A018A



Fonte: Dos autores (2023)

Constata-se na figura 11, que a localização dos números racionais propostos na questão se deu de forma pouco coerente. O recorte do processo de resolução do A018B, apresentado abaixo (figura 19), confirma essa mesma aleatoriedade (Cyr, 2003; Kamii e Clark, 1995). Observamos que “marcou” os números na reta numérica no intervalo de zero a 2,4.

Figura 19. Resolução do A018B



Fonte: Dos autores (2023)

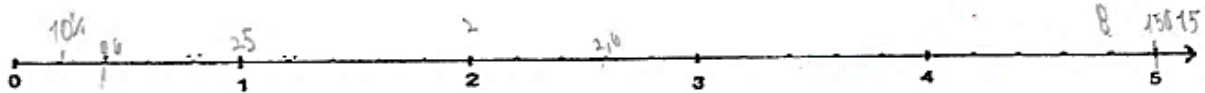
Como podemos perceber acima, o aluno A018B (Figura 19) “agrupou” e localizou as representações dos números em ordem crescente de cada grupo – decimais, fracionários e porcentagens. Subdividiu a reta numérica em intervalos iguais e associou zero a 0,6; e na sequência, localizou e escreveu o número decimal 2,6. Depois, registrou a representação fracionária dos números $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{10}$ e $\frac{15}{5}$, e por último, localizou erroneamente os números 10%, 25% e 150%.

A percepção é que ele entendeu que deveria colocar em ordem crescente por agrupamento, sem levar em conta "o distanciamento" (valor) de cada número. A questão é: ele sabe transformar fração para decimal e porcentagem para decimal? No caso das frações, ele ordenou por saber de frações equivalentes ou por dividir os decimais e compará-los? No caso da porcentagem nem dá para saber, pois ele pode

saber que 10% é menor que 25% que é menor que 150%. Nesse caso, a análise seria mais profunda.

Verifica-se no próximo fragmento, que A138A (figura 20) localizou corretamente 2,6 na reta numérica, e nos questionamos, será que na sorte?

Figura 20. Resolução do A138A

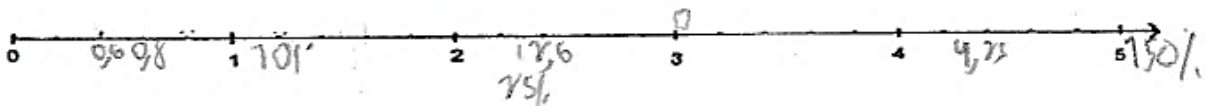


Fonte: Dos autores (2023)

Na figura 20, o aluno demonstrou usar sua própria intuição para marcar os valores, associou o 5 da reta numérica ao 150 (sem a notação de porcentagem) e ao lado do 150, registrou o número 15.

Na figura 21, A158A efetuou a divisão de 8 por 10 corretamente, mas não apresentou o cálculo. Fez a tentativa de localizar 0,6 e 0,8 entre zero e um, porém não registrou todas as subdivisões no intervalo de zero e um. Inseriu 150% ao final da reta numérica, talvez entendendo que 150% extrapole o 100% que é o valor final da reta.

Figura 21. Resolução do A158A

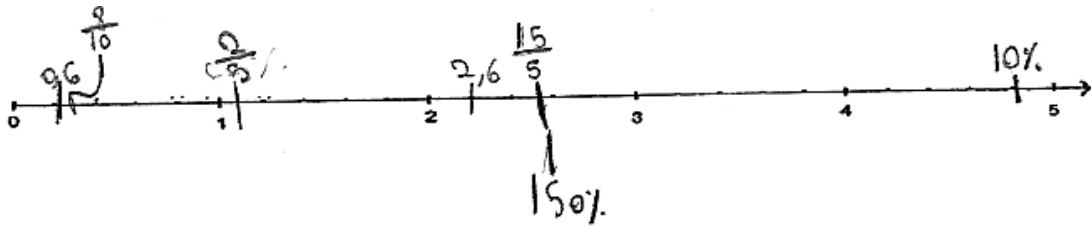


Fonte: Dos autores (2023)

No excerto acima, temos um valor entre *quatro e cinco*, que seria um 4,25 e que não está entre os valores dados nesta questão. Entre *dois e três*, temos registrado o número 25% e ao lado, o 2,6. Associado ao algarismo *três*, o aluno escreveu o número *zero*, e ao final da reta, registrou 150%. Uma sequência de erros (Cyr, 2003; Kamii e Clark, 1995), em que esses alunos demonstram fragilidade no raciocínio multiplicativo.

Pode-se observar a incoerência também no próximo excerto, referente ao aluno A28B (Figura 22).

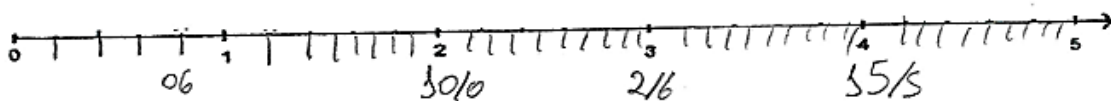
Figura 22. Resolução do A028B



Fonte: Dos autores (2023)

O A028B (Figura 22) localizou aleatoriamente alguns números na reta numérica, associou $\frac{15}{5}$ a 150% e marcou o número 10% próximo ao número cinco. O aluno A068B (Figura 23) registrou alguns números erroneamente na reta numérica, associou 10% a dois, $\frac{2}{6}$, a três e $\frac{15}{5}$ a quatro, como apresentado na figura a seguir.

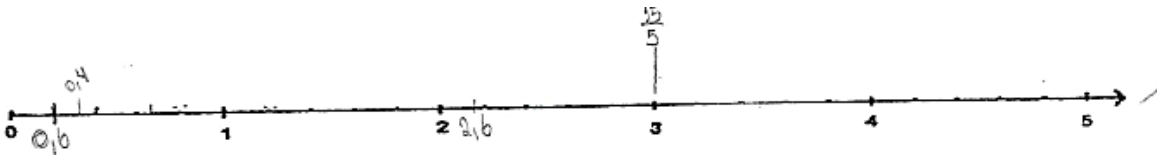
Figura 23. Resolução do A068B



Fonte: Dos autores (2023)

O excerto do aluno A088B (Figura 24) – próxima figura, mostra-nos que localizou usando a própria intuição alguns números na reta numérica, marcou 0,6 muito próximo do zero (poderíamos considerar como 0,2), e na sequência, marca 0,4, ou seja, não compreende a ordem, que 0,6 é maior que 0,4.

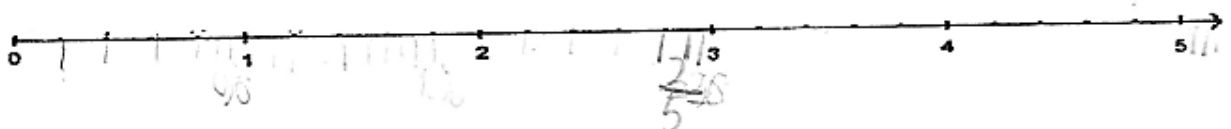
Figura 24. Resolução do A088B



Fonte: Dos autores (2023)

É interessante observarmos no fragmento acima, que A88B localizou corretamente $\frac{15}{5}$ na reta numérica e que efetuou a divisão de 2 por 5, resultando em 0,4. No próximo recorte, observamos uma tentativa do aluno A168B (Figura 25) em localizar a fração $\frac{2}{5}$ na reta.

Figura 25 - Resolução do A168B



Fonte: Dos autores (2023)

No excerto acima, o aluno registra tentativas de subdivisões na reta numérica e a localização de números que escreveu, porém os apagou. Localizou somente o $\frac{2}{5}$ na reta, com insucesso, pois marcou $\frac{2}{5}$ entre dois e três, e muito próximo do três.

Podemos observar que os alunos inventaram regras para resolverem a questão, demonstrando erros sistemáticos e expressando conhecimentos malformados, corroborando com as considerações de Pinto (2000).

3.4 Os nonos anos

Quarenta e nove alunos dos nonos anos realizaram a atividade. Sete alunos deixaram a resposta em branco, nenhum deles acertou a resposta, e vinte e nove apresentaram respostas parcialmente corretas e dezoito responderam incorretamente.

Quadro 4 – Categorização dos erros dos alunos dos nonos anos

Codificação	Categorização do Erro
	Por incompletude na resolução
A089A; A099A; A119A; A129A; A139A; A159A; A169A; A179A; A189A; A199A; A219A; A229A; A239A; A249A; A259A; A269A; A279A; A289A; A299A; A029B; A069B; A079B; A159B; A339B;	No reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica
	Por distração
A019A; A029A; A039A; A049A; A059A; A069A; A109A; A149A; A209A; A109B; A119B; A129B; A139B; A149B; A169B; A179B; A189B; A199B; A209B;	Pela inexistência da articulação entre as representações do número racional
A079A; A019B; A039B; A049B; A059B; A089B; A099B;	Atividade sem resposta

Fonte: Do autor (2023)

3.4.1 Erro no reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica

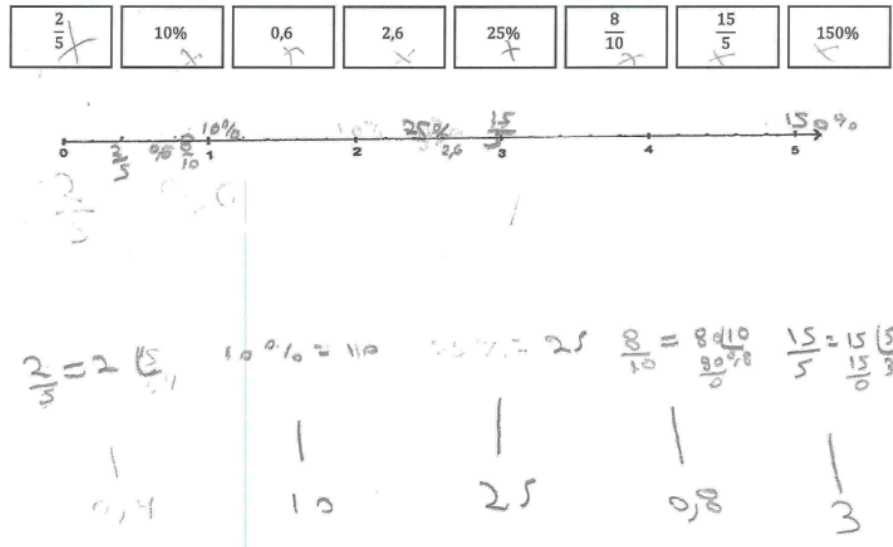
É interessante ser destacado que, a categoria que mais obteve alocações foi o erro “**no reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica**”. Segundo a BNCC (2017) espera-se que no nono ano o aluno compreenda as diferentes representações dos números racionais e como transitar

entre elas, entretanto não ocorreu desta forma.

No excerto de A339B (Figura 26), verifica-se a relação errônea que estabeleceu entre o 150% e o todo da reta, não reconhecendo o que a porcentagem representava na reta numérica, bem como sua localização.

Figura 26: Resolução do A339B

Questão 05 - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.



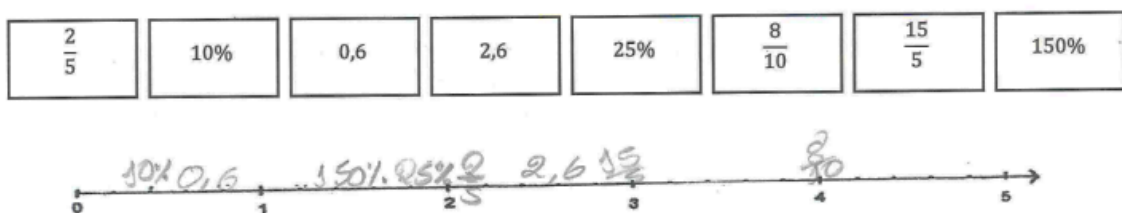
Fonte: Dos autores (2023)

A339B utilizou a regra do quociente para transformar as frações em decimais, acertando a divisão $\frac{8}{10}$, 3 e $\frac{15}{3}$, mas efetuou a divisão de dois por cinco incorretamente. Expressou 10% como sendo “igual” a 1, 25% como sendo igual a 2,5, mas não usou a mesma lógica para o 150%. Posicionou corretamente os números decimais.

Observa-se que o aluno A139A (Figura 27) demonstrou compreender como se dá a localização dos números decimais na reta numérica.

Figura 27: Resolução do A139A

Questão 05 - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.



Fonte: Dos autores (2023)

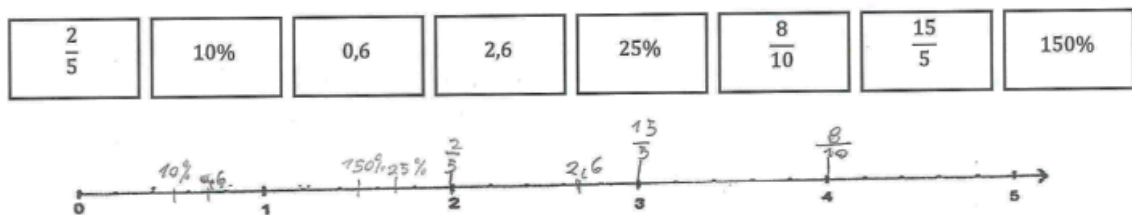
O aluno A139A (Figura 27) fez o correto posicionamento da fração $\frac{15}{5}$, um

acerto recorrente dos nonos anos. No entanto, enfrentou desafios nas representações de outras frações e porcentagens, nas quais não obteve sucesso.

O aluno A259A (Figura 28) localizou corretamente $\frac{15}{5}$, como pode-se verificar na figura 29.

Figura 28: Resolução do A259A

Questão 05 - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.



Fonte: Dos autores (2023)

Entretanto, A259A, assim como outros alunos, posicionou a fração $\frac{8}{10}$ após a fração $\frac{15}{5}$, possivelmente devido à suposição de que a primeira fração possui um valor maior que a outra. Esse erro pode ser explicado pela falta de compreensão da natureza das frações, levando os alunos a considerar o denominador como um número inteiro, desvinculando-o do contexto de representar partes de um todo.

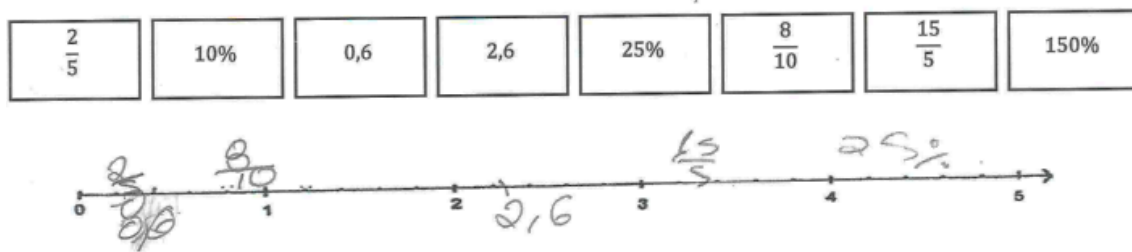
3.4.2 Erro pela inexistência da articulação entre as representações do número racional

A categoria intitulada **“pela inexistência da articulação entre as representações do número racional”** contém várias alocações.

No fragmento do processo de resolução do A019A (Figura 29), verifica-se que posicionou os números 0,6 e 2,6 próximos de sua posição correta na reta numérica.

Figura 29: Resolução do A019A

Questão 05 - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.



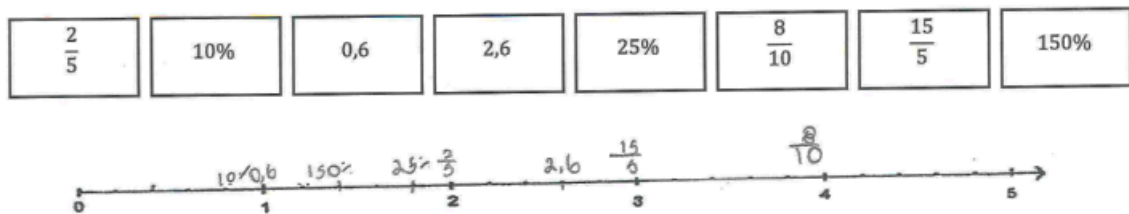
Fonte: Dos autores (2023)

O aluno A019A (Figura 29) localiza incorretamente as demais representações, fração e porcentagem, indícios de que foram colocadas seguindo sua intuição e não qualquer conceito matemático.

O aluno A109A (Figura 30) posicionou o número 2,6 de maneira próxima ao lugar correto na reta numérica e localizou corretamente a posição da fração $\frac{15}{5}$.

Figura 30: Resolução do A109A

Questão 05 - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.



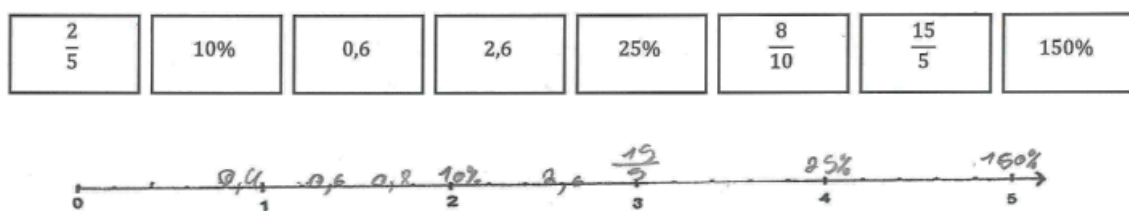
Fonte: Dos autores (2023)

Todavia, não há como saber se A109A acertou a posição da referida fração porque sabia que ela representava o número três ou se ele posicionou seguindo sua própria intuição como o fez com as demais numerações.

No caso do aluno A199B (Figura 31), com exceção da colocação correta da fração $\frac{15}{5}$ e do número decimal 2,6, nenhuma outra resposta está posicionada adequadamente na reta numérica.

Figura 31: Resolução do A199B

Questão 05 - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.



Fonte: Dos autores (2023)

Embora o número 0,4 tenha sido disposto entre zero e um, sua posição permanece incorreta. Não é possível concluir com segurança que o aluno o posicionou com a certeza de que ele é menor que um inteiro, uma vez que os demais números decimais, como 0,6 e 0,8 (este último não constava nas opções), foram também posicionados entre um e dois, indicando uma possível falta de compreensão das relações numéricas.

3.5 Um quadro geral dos anos finais do Ensino Fundamental

Por várias vezes houve a ausência de respostas para a questão cinco. Em um primeiro momento pode-se considerar a falta de compreensão do enunciado da questão (que pode significar um enunciado mal elaborado) ou dos conceitos envolvidos, além disso, a ansiedade diante de uma tarefa desafiadora ou a pressão do tempo durante uma atividade que pode ter sido entendida como um teste, ou até mesmo o imediatismo do aluno ao optar por não tentar resolvê-la.

A falta de confiança nas próprias habilidades matemáticas, levando o aluno a duvidar de sua capacidade de resolver o problema de forma correta. Mas, as respostas dos alunos, mesmo que não sejam em uma situação ideal, trazem pistas e indícios sobre a compreensão e erros cometidos pelos alunos do Ensino Fundamental II no que tange a posicionar frações, decimais e porcentagem na reta numérica.

Apresenta-se um quadro geral, com os códigos e as categorias, e se pode observar que os erros recorrentes estão relacionados com **o reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica e principalmente, pela inexistência da articulação entre as representações do número racional.**

Quadro 5 – Categorização dos erros dos alunos

Codificação	Categorização do Erro
A028A; A128A; A148A; A198A; A138B;	Por incompletude na resolução
A037B; A047B; A177B; A257B; A178A; A218A; A108B; A089A; A099A; A119A; A129A; A139A; A159A; A169A; A179A; A189A; A199A; A219A; A229A; A239A; A249A; A259A; A269A; A279A; A289A; A299A; A029B; A029B; A069B; A079B; A159B;	No reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica
A058B; A208B;	Por distração

<p>A066A; A076A; A126A; A236A; A016B; A036B; A076B; A096B; A126B; A136B; A146B; A176B; A186B; A206B; A216B; A226B; A236B; A246B; A256B;</p> <p>A017A; A037A; A097A; A117A; A127A; A137A; A157A; A167A; A177A; A187A; A197A; A207A; A217A; A227A; A277A; A287A A297A; A307A; A027B; A057B; A067B; A077B; A107B; A137B; A147B; A167B; A177B; A187B; A197B; A207B; A217B; A227B; A237B;</p> <p>A018A; A058A; A108A; A118A; A138A; A158A; A168A; A208A; A018B; A028B; A038B; A048B; A068B; A078B; A088B; A128B; A148B; A168B; A178B; A198B;</p> <p>A019A; A029A; A039A; A049A; A059A; A069A; A109A; A149A; A209A; A109B; A119B; A129B; A139B; A149B; A169B; A179B; A189B; A199B; A209B;</p>	<p>Pela inexistência da articulação entre as representações do número racional</p>
<p>A016A; A026A; A036A; A046A; A056A; A066A; A096A; A106A; A116A; A136A; A146A; A156A; A166A; A176A; A186A; A196A; A206A; A216A; A226A; A246A; A256A; A266A; A276A; A286A; A296A; A306A; A036B; A056B; A066B; A076B; A086B; A116B; A156B; A196B; A027A; A047A; A057A; A067A; A077A; A087A; A107A; A147A; A237A; A247A; A257A; A267A; A087B; A097B; A127B; A157B; A038A; A048A; A068A; A078A; A088A; A098A; A188A; A228A; A098B; A118B; A158B; A188B; A218B; A228B; A238B; A248B; A049B; A059B; A089B; A099B;</p>	<p>Responderam em branco</p>

Fonte: Do autor (2023)

No Quadro acima, destaca-se o maior número de erros (91 no total) concentrados na categoria dada **pela inexistência da articulação entre as representações do número racional**, ou seja, indícios de que pode haver uma lacuna no ensino e na aprendizagem quando se trata do uso e articulação de diferentes representações dos números racionais. A segunda categoria que concentrou mais erros é aquela que trata do **reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica**. Em muitas resoluções apresentadas, os alunos demonstraram dificuldades em reconhecer e lidar com números na forma percentual, desta forma, a localização destes números na reta numérica também ficou comprometida.

Ainda com relação ao Quadro acima, em menor número, na categoria **por incompletude na resolução**, pode-se destacar que nela estão alocados os erros de alunos dos sextos e oitavos anos, que apresentaram resoluções parciais corretas e incorretas, porém incompletas. A categoria com menor número de erros, **por distração**, demonstra que a falta de atenção por parte do aluno pode comprometer todo um processo de ensino e aprendizagem, normalmente baseado em notas.

Vale destacar que 75 alunos deixaram a questão 5 sem resposta. A ausência de respostas pode indicar uma falta de compreensão dos alunos sobre como posicionar corretamente esses números na reta numérica ou sobre como convertê-los entre as diferentes representações numéricas.

Observou-se, com relação aos sextos e sétimos anos que não houve diferenças consideráveis em relação à resolução das questões propostas. A maioria dos alunos das turmas de sétimos anos enfrentou desafios semelhantes aos das turmas de sextos anos ao resolverem a questão cinco. Muitos deles chegaram a "chutar" as respostas, demonstrando uma falta de compreensão das atividades propostas. Isso sugere que eles não apenas não sabiam como resolver as questões, mas também não compreenderam o que estava sendo solicitado no enunciado. Talvez, a atividade proposta tenha sido o primeiro contato com frações, decimais e porcentagem na reta numérica, assim como demonstram estudos anteriores (Behr et al. 1983; Vaz, 2013; Howe et al. (2011).

Entretanto, destacam-se duas exceções representadas pelos alunos A117B e A257B, que conseguiram realizar as atividades e apresentar os cálculos necessários, no entanto demonstraram dificuldades específicas ao colocar os números decimais na reta numérica. Nesses dois exemplos que representam poucas ocorrências, o senso numérico relativo à porcentagem (Gay & Aichele, 1997) limita-se a transformar em decimais a porcentagem.

Destaca-se que alguns alunos podem se sentir mais à vontade ao transformar frações em números decimais. A representação decimal é muito usada na vida cotidiana, principalmente em experiências que envolvem medidas, valores de produtos como alimentos, vestuário, entre outros. E ainda, comparar entre o maior e o menor, quando se trata de decimais, se torna mais fácil, o que pode não ocorrer de imediato com a representação fracionária.

Observa-se também que, se o aluno compreender – ou talvez até mesmo

memorizar, que 0,25 é o mesmo que $\frac{1}{4}$, que 0,50 é igual a $\frac{1}{2}$, pode ser que ele opte pela representação fracionária em algumas situações de sala de aula. Uma observação interessante é que vários alunos posicionaram a fração $\frac{15}{5}$ corretamente na reta numérica, errando as demais posições, talvez por considerarem fração imprópria mais fácil, ou por realizarem o processo de divisão, transformando a fração $\frac{15}{5}$ em número inteiro $15 \div 5 = 3$. Infelizmente, uma resposta mais concreta dependeria de uma entrevista com os alunos para buscar compreender o processo de raciocínio que utilizaram.

Entretanto, essas situações de erros nas resoluções da questão proposta, também podem indicar que o problema não está apenas relacionado ao conhecimento matemático dos alunos, mas também com a incompreensão do enunciado da questão, ou seja, podem ter dificuldades em interpretar os problemas, compreender o contexto e aplicar corretamente as estratégias de resolução.

Erros relacionados com a incompletude na resolução indicam que os alunos podem ter compreendido parcialmente o conceito ou o processo necessário para resolver a questão, e deixaram lacunas importantes em sua resolução. Destaca-se que os erros podem estar relacionados com a falta de prática de situar os valores na reta numérica, desta forma, sugere-se a necessidade de reforço por meio de atividades para sanar esse aspecto em específico, e desta forma aprimorar essa habilidade.

A dificuldade em representar frações por meio de números decimais sugere um processo de compreensão ainda em desenvolvimento dos conceitos matemáticos subjacentes a essa tarefa específica. É possível que o impacto da pandemia de COVID-19 pode ter influenciado o aprendizado de determinados conteúdos matemáticos, visto que os alunos que estão nos nonos anos em 2023, estavam nos sextos anos em 2020 – início da pandemia e atividades remotas em nosso país.

Observa-se que os alunos dos sétimos anos não apresentaram cálculos que pudessem fundamentar suas respostas, demonstraram não compreender como se dá a conversão de frações e porcentagens em números decimais e racionais, além de dificuldades em posicionar corretamente os valores na reta numérica.

Os alunos dos nonos anos, apesar de terem expressado que compreendem como localizar alguns números decimais na reta numérica, ainda “deixam a desejar” no que diz respeito ao domínio desses conceitos, acredita-se que podem não ter

consolidado suas habilidades em relação a esse tema específico ou que os conteúdos em questão não foram abordados devidamente.

Ou seja, era esperado que os alunos do nono ano resolvessem por inteiro e corretamente a questão cinco, visto que consta na BNCC (2017) que os alunos neste nível de ensino, devem ser capazes de realizar operações complexas com frações, incluindo adição, subtração, multiplicação e divisão, e devem compreender profundamente as relações entre frações, números decimais e porcentagens, e serem capazes de aplicar esses conhecimentos em contextos do mundo real.

Deste modo, recomenda-se o incentivo por parte do professor para que o aluno reconheça, interprete e compreenda os conceitos em suas diferentes representações, mais especificamente, envolvendo o uso da reta numérica.

4 PERCURSO PARA A ELABORAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Nesse capítulo será apresentado o percurso de elaboração do produto educacional fruto da dissertação de mestrado profissional.

Inicialmente pensamos que ele poderia ser direcionado aos alunos, mas, ao percorrer o caminho percebemos que de posse do material coletado bem como a caracterização dos erros seria mais significativo pensar em um curso de formação continuada dos professores que ensinam matemática.

4.1 Expectativas em relação a resolução das questões por parte dos alunos

Para pensar no produto educacional, foi adotada a mesma atividade previamente desenvolvida com os alunos do Ensino Fundamental II, buscando conduzir uma análise mais detalhada dos resultados obtidos. Cada questão foi apresentada com as expectativas em relação às resoluções dos alunos, seguido de uma análise dos erros cometidos por eles em cada item. Essa abordagem proporcionou uma compreensão abrangente das áreas que demandam atenção, elucidando lacunas conceituais que podem ter contribuído para esses equívocos. Essa estratégia visa identificar padrões de dificuldades, possibilitando a formulação de estratégias mais específicas para abordar tais questões em futuras atividades de aprendizado, colaborando para a preparação do curso de formação continuada

As cinco questões apresentadas aos alunos estão de acordo com as habilidades da BNCC (2017), são elas:

(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.

(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Nos quadros seguintes foram apresentadas “a expectativa” do pesquisador em relação a resolução das questões por parte dos alunos.

Na questão do quadro 6, esperava-se que o aluno utilizasse de um método válido para resolução dessa questão, e um deles era utilizar frações equivalentes, o que vale para o 6° ano, 7° ano em diante poderia utilizar regra de 3 simples ou até mesmo multiplicação de frações. O objetivo das resoluções das questões foi observar qual(is) método(s) de resolução os alunos poderiam utilizar na resolução.


Quadro 6: Possível resolução da questão 1

1. A prova Paraná tem 52 questões. Sophia acertou 50% da Prova. Pergunta-se, quantas questões ela acertou? Justifique sua resposta.	
Possível Resolução:	
Escrever a equação em forma de equação.	50% de 52
Transformar as unidades em frações.	$\frac{50}{100} \cdot \frac{52}{1}$
Operar as multiplicações de frações.	$\frac{2600}{100}$
Simplificar as frações	$\frac{26}{1}$
Resultado	26

Fonte: Do autor (2023).

No Quadro 8, o objetivo era que os alunos utilizassem o conceito de frações equivalentes para realizar duas tarefas: converter frações em porcentagens e resolver por meio de frações decimais.

Quadro 7: Possível resolução da questão 2

<p>2. Observe a carga da bateria do celular do Pedro. Marque a alternativa que representa a porcentagem de carga que falta para o completar o carregamento total da bateria do celular de Pedro.</p> <p>a) $0,50 = 50\%$ b) $0,25 = 25\%$ c) $0,65 = 65\%$ d) $0,75 = 75\%$</p>										
<p>Possível resolução:</p> <table border="1"> <tr> <td>Fração equivalente ao que falta para completar a bateria</td> <td>$\frac{3}{4}$</td> </tr> <tr> <td>Transformar a fração em número decimal</td> <td>$\frac{3}{4}$</td> </tr> <tr> <td>Multiplicar por 100 o número decimal encontrado</td> <td>$0,75 \times 100$</td> </tr> <tr> <td>Resultado em porcentagem.</td> <td>75%</td> </tr> </table>			Fração equivalente ao que falta para completar a bateria	$\frac{3}{4}$	Transformar a fração em número decimal	$\frac{3}{4}$	Multiplicar por 100 o número decimal encontrado	$0,75 \times 100$	Resultado em porcentagem.	75%
Fração equivalente ao que falta para completar a bateria	$\frac{3}{4}$									
Transformar a fração em número decimal	$\frac{3}{4}$									
Multiplicar por 100 o número decimal encontrado	$0,75 \times 100$									
Resultado em porcentagem.	75%									

Fonte: Do autor (2023)

No quadro 9, a expectativa era que utilizassem os conceitos de frações equivalentes com frações porcentagem (base 100), para que pudessem transformar o valor em porcentagem. Outro método seria transformar em decimal e após, fazer a transformação em porcentagem.

Quadro 8: Possível resolução da questão 3

<p>3. Durante um jogo de futebol da copa do mundo, os jogadores do Brasil jogaram 20 vezes contra o goleiro da equipe adversária e marcaram somente 4 gols. Qual é a porcentagem de chutes que o goleiro da equipe adversária conseguiu defender??</p>
<p>Possível resolução:</p>

Encontrar o número de gols não marcados	$20 - 4 = 16$
Montar a razão entre o número de gols não marcados e o total de chutes ao gol	$\frac{16}{20}$
Transformar em uma fração centesimal	$\frac{80}{100}$
Transformar o resultado em porcentagem.	80%

Fonte: Do autor (2023).

No quadro 9, a expectativa era que o aluno analisasse a questão e observasse que precisaria apresentar os números em uma única escrita, seja ela porcentagem, decimal ou fracionária. O aluno teria no final apenas três códigos para testar e ajudar o monstro a sair do armário.

Quadro 9: Possível resolução da questão 4

4. Yeti, o monstro do armário, ficou preso dentro do armário. Para sair, ele precisa saber um código, que é o resultado deste problema. Você pode ajudá-lo a resolver esse problema? 20% + 3/5 – 0,10	
Possível resolução nº 1:	
Transformar a porcentagem em fração.	$\frac{20}{100} + \frac{3}{5} - 0,10$
Transformar as frações em decimais.	$0,20 + 0,6 - 0,10$
Realizar a operação e encontrar o resultado final.	0,70
Possível resolução nº 2:	
Transformar em frações com o mesmo denominador	$\frac{20}{100} + \frac{60}{100} - \frac{10}{100}$
Realizar a operação com frações.	$\frac{20 + 60 - 10}{100}$
Resultado final.	$\frac{70}{100}$
Possível resolução nº 3:	

Transformar todos em porcentagem.	$20\% + 60\% - 10\%$
Realizar a soma e a subtração das porcentagens.	70%.

Fonte: Do autor.

No quadro 10, a expectativa era que o aluno demonstrasse uma compreensão das relações entre as diferentes formas de expressar números racionais. Antecipamos que os alunos pudessem observar uma sequência lógica entre frações, decimais e porcentagens, evidenciando a capacidade de situar essas representações de maneira coerente e proporcional na reta numérica.

Quadro 10: Possível resolução da questão 5

<p>5. Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.</p>	
<p>Possível resolução:</p>	
<p>Transformar os números em decimais</p>	$\frac{2}{5} = 0,20;$ $10\% = \frac{10}{100} = 0,10;$ $25\% = \frac{25}{100} = 0,25;$ $\frac{8}{10} = 0,8;$ $\frac{15}{5} = 3;$ $150\% = \frac{150}{100} = 1,5$
<p>Colocar os números na reta numérica identificando o intervalo decimal que ele equivale, ou seja, o intervalo que ele pertence.</p>	$\frac{2}{5} = 0,20 - \text{intervalo } 0 \text{ e } 1$ $10\% = \frac{10}{100} = 0,10 - \text{intervalo } 0 \text{ e } 1$

	$25\% = \frac{25}{100} = 0,25 - \text{intervalo } 0 \text{ e } 1$ $\frac{8}{10} = 0,8 - \text{intervalo } 0 \text{ e } 1$ $\frac{15}{5} = 3 - \text{número inteiro } 3$ $150\% = \frac{150}{100} = 1,5 - \text{intervalo } 1 \text{ e } 2.$ $0,6 - \text{intervalo } 0 \text{ e } 1$ $2,6 - \text{intervalo } 2 \text{ e } 3;$
--	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Do autor (2023).

Ao se considerar as expectativas em relação à resolução das questões pelos alunos, observou-se certa distância no que nos foi apresentado nos processos de resoluções, deste modo, optou-se por desenvolver a mesma atividade previamente administrada aos alunos do Ensino Fundamental II com os professores, proposta que se revelou estratégica, ao permitir uma análise minuciosa e detalhada dos resultados obtidos.

Na próxima seção, propõe-se uma discussão sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os impactos da pandemia no processo educacional e a ressonância desses elementos nos conteúdos matemáticos ainda não consolidados.

4.2 Discussão sobre BNCC, pandemia e conteúdos não consolidados

No curso de formação continuada uma discussão que pode ocorrer é porque os alunos do oitavo e nono ano cometeram tantos erros como os alunos dos sextos e sétimos anos? De forma intrigante, uma comparação entre os desempenhos das turmas A e B do 8º ano com os do 6º e 7º ano revela pouco avanço na compreensão desses conteúdos, o que vai ao encontro à expectativa de um progresso contínuo ao longo dos anos. Enquanto as quedas nos resultados do 6º e 7º ano podem, em parte, ser atribuídas aos impactos da pandemia de COVID-19 e outros fatores, o mesmo não pode ser dito em relação ao 9º ano. Os alunos desse nível educacional passaram pela experiência da pandemia durante o 6º e parte do 7º ano, tendo tido a oportunidade de revisar os conteúdos apresentados na grade curricular do 5º ano e retomados nos 7º, 8º e 9º anos.

Ao concluir o Ensino Fundamental, de acordo com a Base Nacional Comum

Curricular (BNCC) do Brasil, espera-se que os estudantes tenham alcançado competências e habilidades essenciais na disciplina de matemática. Nesse estágio, eles deveriam ter adquirido uma compreensão sólida de conceitos matemáticos fundamentais, como operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação, divisão), frações, números decimais, porcentagens, proporções e medidas (BNCC, 2017).

Os alunos também deveriam estar aptos a fazer conexões entre diferentes tópicos matemáticos e reconhecer as relações entre frações, números decimais e porcentagens. Isso implica uma compreensão abrangente dos princípios subjacentes a esses conceitos matemáticos. Uma outra discussão que pode ocorrer no curso é porque esse conteúdo não está sendo compreendido pelos alunos?

Antes de analisarmos os resultados das turmas do 8º e 9º ano, é essencial compreender que os possíveis desafios enfrentados pelas turmas do 6º e 7º ano podem estar relacionados às consequências da pandemia de COVID-19 (SARS-CoV-2) (Queiroz; Silva; Souza, 2022). Será, que isso se deve ao fato de que frações são conteúdos típicos do 4º ano e números decimais e porcentagem são abordados no 5º ano dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental?

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece diretrizes gerais para a educação básica no Brasil. No 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, em relação a frações, porcentagens e números decimais na reta numérica, a BNCC prevê uma progressão no ensino matemático (BNCC, 2017). Na sequência, apresentamos alguns dos principais tópicos que a BNCC destaca para esses anos.

Para o 4º Ano, com relação ao conteúdo de **Frações**, os alunos devem começar a compreender o conceito de fração como uma divisão de um todo em partes iguais. Eles devem ser capazes de identificar frações equivalentes e realizar operações simples com frações, como adição e subtração. No que diz respeito aos **Números Decimais**, na BNCC está proposta a introdução aos números decimais, entendendo que eles representam uma extensão do sistema de números inteiros. Os alunos devem ser capazes de ler e representar números decimais.

Para o 5º Ano, em **Frações**, têm-se o aprofundamento na compreensão de frações, incluindo a adição e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes. Os alunos devem ser capazes de resolver problemas envolvendo frações. Para o conteúdo de **Números Decimais**, na BNCC está proposto o desenvolvimento da compreensão dos números decimais, realizando operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Os alunos devem ser capazes de comparar números decimais

e compreender a relação entre frações e números decimais. Em comparação ao 4º ano, na BNCC há a proposição de mais dois conteúdos, **Porcentagens e Reta Numérica**.

No que diz respeito à **Porcentagem**, tem-se a introdução ao conceito de porcentagem, relacionando-o a frações e números decimais. Os alunos devem ser capazes de resolver problemas envolvendo porcentagens simples, e com relação à **Reta Numérica**, há a proposta de exploração mais aprofundada da representação de números decimais e frações em uma reta numérica. Os alunos devem ser capazes de posicionar números decimais e frações na reta numérica e compreender as relações entre eles.

É importante destacar que a progressão do ensino de matemática na BNCC incentiva a construção gradual do conhecimento, começando com conceitos mais simples e progredindo para tópicos mais complexos à medida que os alunos avançam nos anos escolares. A BNCC oferece uma estrutura flexível que permite que os educadores adaptem o ensino às necessidades específicas de seus alunos e ao contexto da sala de aula.

Durante a pandemia, muitos alunos enfrentaram dificuldades na continuidade dos estudos, o que pode ter afetado o aprendizado desses conteúdos específicos. Mesmo com o retorno das aulas presenciais, os currículos escolares foram adaptados para priorizar conteúdos considerados essenciais, como as quatro operações e resolução de problemas. Isso pode ter limitado o tempo disponível para desenvolver com eficiência os conceitos abordados na questão 5, como frações, números decimais e porcentagem.

É importante reconhecer que, apesar das adaptações no ensino, os alunos já deveriam ter adquirido essas habilidades durante o 6º ano, especialmente no caso dos alunos do 7º ano. O mesmo parecer que permitia a adaptação dos conteúdos no contexto da pandemia, também trazia que, posteriormente, seria necessário planejar “período integral ou carga horária maior para o ano escolar de 2020-2021”, e ainda, que o planejamento curricular fosse organizado “para cumprir objetivos de aprendizagem não oferecidos em 2020” (Brasil, 2020).

Portanto, os anos de 2020 e 2021 deveriam ter sido dedicados à reposição dos conteúdos que não puderam ser abordados em 2020. No entanto, devido ao retorno das aulas presenciais apenas no início do segundo trimestre de 2021, um ano após o previsto no parecer mencionado, o cronograma teve seu prazo estendido. Isso levou

a 2022 a expectativa de cumprir os objetivos de aprendizagem que não foram totalmente abordados em 2020.

Contudo, na prática, 2022 também se caracterizou como um ano de adaptações, conforme indicado no Parecer da CNE/CP N° 6 de 06 de julho de 2021, que ressalta a necessidade de um replanejamento curricular para considerar o contínuo curricular 2020-2021-2022 (Brasil, 2021).

Conseqüentemente, os resultados apontam para a constatação de que muitos alunos ainda não consolidaram os conteúdos que deveriam ter adquirido nos dois anos anteriores. Essa análise destaca a relevância de uma abordagem pedagógica que seja abrangente e progressiva, abarcando o desenvolvimento contínuo das habilidades⁴ matemáticas ao longo dos anos escolares. É crucial estabelecer uma sequência de ensino que permita aos alunos progredir de forma gradual, assegurando que eles alcancem um conhecimento sólido em todos os conceitos fundamentais da matemática.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece diretrizes essenciais para a Educação Básica no Brasil, incluindo os anos finais do Ensino Fundamental. No 8º ano, a BNCC indica claramente os objetivos de aprendizagem em matemática, que abrangem a compreensão sólida de conceitos-chave, como frações, números decimais e porcentagens. De acordo com a BNCC, nessa etapa da educação, os estudantes devem ser capazes de realizar operações com frações, identificar frações equivalentes, compreender as relações entre frações, decimais e porcentagens, além de posicionar esses números em uma reta numérica (Brasil, 2017).

Espera-se que, ao final do 8º ano, os alunos dominem esses conceitos matemáticos e possam aplicá-los em uma variedade de situações, desenvolvendo habilidades críticas para sua formação acadêmica e cidadania. Esta introdução destaca o nível de compreensão esperado dos alunos de 8º ano em frações, porcentagens e números decimais, conforme estabelecido pela BNCC, servindo como

⁴ No contexto educacional, a "habilidade" refere-se à capacidade de um aluno de realizar uma tarefa ou uma atividade específica com sucesso. Essas habilidades podem englobar uma ampla gama de competências, incluindo habilidades acadêmicas, sociais, cognitivas e práticas. Por exemplo, em matemática, as habilidades podem incluir a capacidade de resolver equações, compreender conceitos geométricos ou interpretar dados estatísticos. No entanto, as habilidades também podem abranger aspectos não acadêmicos, como a capacidade de trabalhar em equipe, resolver conflitos ou demonstrar empatia. No contexto educacional, o desenvolvimento de habilidades é um objetivo importante, pois capacita os alunos a aplicar o que aprenderam em situações do mundo real e a se tornarem aprendizes ao longo da vida.

base para avaliar o desempenho dos estudantes e a qualidade do ensino nessa etapa da Educação Básica.

4.3 Delineando o curso de formação continuada

Este curso presencial – com possibilidades de ser desenvolvido de forma remota, se necessário, foi concebido como uma iniciativa de aprimoramento pedagógico, compreendendo um encontro semanal com a duração de duas horas, ao longo de cinco semanas, totalizando 10 horas de curso.

Durante primeira semana, os professores serão convidados a compartilhar as estratégias utilizadas para a resolução de algumas questões, no caso, as mesmas questões desenvolvidas pelos alunos nesta pesquisa. Desta forma, os professores identificarão abordagens comuns e desafios enfrentados pelos alunos nas resoluções, e espera-se que essas situações promoverão várias discussões construtivas, que serão complementadas com a apresentação e exploração dos excertos significativos dos processos de resoluções dos alunos desta pesquisa.

Neste primeiro encontro, com duração de 2 horas, serão abordadas as questões 1 e 2, a fim de fomentar uma compreensão mais profunda das estratégias adotadas para resolução, e após, serão apresentados os excertos com os erros dos alunos.

Na segunda semana será proposto o estudo de um artigo sobre análise de erro na educação básica da professora Neusa Bertoni Pinto, “Investigação do erro em matemática: Itinerários didáticos e históricos”, publicado na Revista de História da Educação Matemática (HISTEMAT) em 2023.

Na terceira semana será repetida a mesma ideia do primeiro encontro, agora com o estudo teórico da semana anterior para permear as discussões e as resoluções e análises das questões 3 e 4.

Na quarta semana de curso os professores seriam encorajados a desenvolver a atividade contendo as cinco questões, em uma sala de aula, preferivelmente naquela em que atuam. Para esta atividade, que será nomeada de “tarefa”, os professores teriam o tempo até o último encontro para se organizarem e apresentarem os resultados.

Ainda na quarta semana, o encontro seria dedicado à leitura do artigo elaborado a partir da pesquisa⁵, juntamente com a resolução e discussão da questão cinco – apresentada no artigo. Estas atividades fornecerão aos professores uma base teórica sólida para fundamentar suas práticas, ao consolidar os aprendizados até então, e oferecer uma visão mais aprofundada sobre a articulação de representações dos números racionais na reta numérica.

Na quinta semana – e último encontro, os professores trarão suas atividades desenvolvidas com seus alunos, suas respostas (ou processos de resoluções) e relacionarão ou confrontarão com os resultados apresentados no artigo “PORCENTAGENS NA RETA NUMÉRICA? COMO ASSIM? UMA ANÁLISE DOS ERROS DE ALUNOS DO OITAVO ANO” de nossa autoria.

Neste encontro, os resultados das atividades serão apresentados e discutidos, promovendo uma análise coletiva e identificação de padrões nas estratégias dos alunos. Este encontro incluirá uma breve apresentação de 15 minutos por grupo, proporcionando uma oportunidade para compartilhar *insights* e experiências. Nesse ponto, os professores serão incentivados a refletirem sobre como as estratégias adotadas pelos alunos podem estar alinhadas com as diretrizes da BNCC para os anos escolares em questão.

Neste sentido, o produto educacional resultado da dissertação, visa fortalecer a articulação entre frações, decimais e porcentagens, alinhando-se com os objetivos da BNCC para o sexto, sétimo, oitavo e nono ano do Ensino Fundamental. Ao final, espera-se que os professores, colaborando ativamente, alcancem um entendimento conjunto das possibilidades de articulação, enriquecendo suas práticas pedagógicas em consonância com as exigências da BNCC.

⁵ VITORASSI, R.; NOVAES, B. W. D.; ANDRADE, V. L. PORCENTAGENS NA RETA NUMÉRICA? COMO ASSIM? UMA ANÁLISE DOS ERROS DE ALUNOS DO OITAVO ANO. Revista de História da Educação Matemática, [S. l.], v. 9, p. 1–24, 2023. Disponível em: <https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/576>. Acesso em: 11 fev. 2024.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta dissertação, discutimos a importância do ensino de frações, decimais e porcentagens no contexto do Ensino Fundamental, bem como da relevância de analisarmos e refletirmos sobre os erros apresentados pelos alunos, por entendermos que esses conteúdos são fundamentais para o dia a dia deles, tanto na escola como para lidarem com situações cotidianas.

Para buscarmos respostas à questão proposta para esta investigação, **como os erros cometidos pelos alunos do ensino fundamental II podem demonstrar se há articulação entre as diferentes representações dos números racionais?** Analisamos e categorizamos os processos de resolução apresentados pelos alunos em uma questão que os desafiava a posicionarem diferentes representações do número racional na reta numérica. A categoria que obteve o maior número de respostas de alunos foi referente ao “erro pela inexistência da articulação entre as representações do número racional”, na qual constatamos erros em que utilizam a própria intuição, demonstrando um raciocínio multiplicativo frágil, uma noção imprecisa e inflexível na conversão das diferentes representações dos números racionais.

Pudemos observar, também, que a abordagem mobilizada pelos alunos foi a divisão do numerador pelo denominador para transformar em um número decimal, e o desconhecimento do conteúdo de porcentagem e porcentagem na reta numérica pela maioria dos alunos. Destacamos que apresentaram dificuldades em localizar frações impróprias na reta numérica, uma tendência de usar a reta como parte-todo, e que o uso de frações equivalentes não prevaleceu – entendemos que o conhecimento sobre frações equivalentes facilitaria a flexibilidade da conversão das diferentes representações.

Ressaltamos que apresentar fração, decimal e porcentagem como conceitos diferentes pode ser uma prática comum em sala de aula, porém não parece ser interessante, como observamos nos erros apresentados pelos alunos, que demonstraram não terem habilidades para articularem os números racionais em suas diferentes representações.

Neste sentido, como medida prática, elaboramos um produto educacional para formação continuada de professores que ensinam matemática, com a proposição de atividades que promovam a conexão, e ou, articulação entre as representações dos

números racionais, de modo a incentivar nos alunos o raciocínio multiplicativo e de estimular os professores – atuando como mediadores do processo de ensino e de aprendizagem, que explorem na reta numérica, a articulação desses conceitos.

Como trabalhos futuros, podemos considerar a possibilidade de que a atividade seja aplicada com outras turmas para verificarmos como os dados se apresentam – será que se repetem? E se realizarmos entrevistas com o método clínico para compreendermos melhor o pensamento dos alunos que responderam as atividades? Os erros em relação as frações, decimais e porcentagens poderiam ser analisados com base nos cadernos dos alunos? Esperamos que, durante e após o desenvolvimento do curso de formação continuada, possamos dar continuidade a pesquisa.

Destacamos a importância de um ensino consistente e contínuo desses conceitos matemáticos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. É importante que os alunos tenham a oportunidade de desenvolver suas habilidades progressivamente, construindo uma base sólida para compreender e aplicar frações, números decimais e porcentagens em diversos contextos.

Ademais, essa análise realça a relevância de uma abordagem pedagógica que leve em consideração as necessidades individuais dos alunos, oferecendo suporte específico àqueles que enfrentam dificuldades em relação a esses conteúdos. Com orientação adequada, exercícios práticos e revisões periódicas, os alunos podem avançar em suas habilidades matemáticas e desenvolver uma compreensão mais sólida e eficiente desses conceitos ao longo de sua trajetória escolar.

Espera-se, assim, que este estudo possa contribuir para a formação de alunos mais competentes e confiantes em suas habilidades matemáticas, além de auxiliar na formação de professores mais capacitados e preparados para enfrentar os desafios do ensino da matemática. Em última análise, esse trabalho pode desempenhar um papel significativo na melhoria da qualidade do ensino de matemática nas escolas e na construção de uma sociedade mais justa, equitativa e inclusiva.

REFERÊNCIAS

- AQUINO, J. P. G. de. (2013). **Frações: Uma abordagem pedagógica**. Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, para a obtenção do título de Mestre em matemática. Mossoró – RN.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa; ed. 70, 2004.
- BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., & SILVER, E. A. (1983). **Rational number concepts**. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic.
- Brasil. Ministério da Educação. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília:
- BRASIL. Ministério da Educação. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília.
- _____. **Parecer CNE/CP Nº 11/2020**. Orientações Educacionais para a Realização de Aulas e Atividades Pedagógicas Presenciais e Não Presenciais no contexto da Pandemia. Ministério da Educação, Brasília – DF, 2020.
- _____. **Parecer CNE/CP Nº 6/2021**. Diretrizes Nacionais orientadoras para a implementação de medidas no retorno à presencialidade das atividades de ensino e aprendizagem e para a regularização do calendário escolar. Ministério da Educação, Brasília – DF, 2021.
- CAVALIERE, L. (2005). **O ensino das frações**. Umuarama – PR. Monografia (Especialização em Ensino da Matemática), Coordenadoria de Pós-Graduação, Universidade Paranaense.
- CURY, H. N. (2019). **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. [S.l.]: Autêntica.
- CYR, M. (2003). **Les Représentations de la fraction: schèmes et connaissances chez des élèves de la fin du primaire**. Maître ès arts (M.A.) dissertation, Département d'enseignement et d'apprentissage, Faculté des Sciences de L'éducation, Université Laval.
- DUVAL, R. (Ed.). **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. REVEMAT: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 13 de março de 2023.
- FLICK, U. **Uma introdução à pesquisa qualitativa**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.
- Freire, P. (1992). **Pedagogia da esperança**. Paz e Terra
- GAY, A. S., & AICHELE, D. B. (1997). **Middle school students' understanding of**

number sense related to percent. *School Science and Mathematics*, 97(1), 27-36. doi:10.1111/j.1949-8594.1997.tb17

HELIODORO, Y. M. L. **Os sentidos do raciocínio multiplicativo e suas implicações para a docência nas series iniciais.** VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/MC01055380434.pdf>. Acesso em: 04 de outubro de 2023.

HOWE, C., NUNES, T., & BRYANT, P. (2011). **Rational number and proportional reasoning:** Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 391–417.

KAMII C., CLARK, F. B. (1995) **Equivalent fractions:** Their difficulty and educational implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(5), 422-442.

LAMON, S. J. (2020). **Teaching Fractions and Ratios for Understanding:** Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers (4th ed.). New York: Routledge.

LIMA, R. (2020). **O uso da reta numérica como recurso pedagógico no ensino de matemática:** vantagens e possibilidades. *Revista Brasileira de Educação Matemática*, 20(2), 471-486.

MACHADO, M. P. N. **O papel do professor na construção do currículo.** 2006. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Minho. Portugal, 2006.

MANDARINO, M., & SANT'ANNA, A. (2019). **A importância da reta numérica no ensino de matemática:** uma abordagem para o desenvolvimento da compreensão de frações, porcentagens e números decimais. *Revista Educação Matemática em Foco*, 9(1), 30-42.

MARANHÃO, M. C. S. A, IGLIORI, S. B. C. **Registro de representação e os números racionais.** In: MACHADO, S. D A. (Org.) *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.* Ed. Papirus, p. 57 – 70. Campinas, SP, 2003.

MARQUES, C. S., LEÃO, A. S. G., & CARPES, P. P. G. (2018, novembro). **Números racionais: dificuldades de aprendizagem apontadas pelo professor.** In *Anais do 10º Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão –SIEPE da Universidade Federal do Pampa.* Santana do Livramento, RS.

MONTEIRO, C., & COSTA, C. (1996). **Dificuldades na aprendizagem dos números racionais.** *Revista Educação e Matemática*, (40), 60–63. Portugal: APM.

NUNES, T., CAMPOS, A., MAGINA, S., & BRYANT, P. (2005). **Theories of Mathematics Education:** Seeking New Frontiers. Springer.

ONUCHIC, L. de la R.; BOTTA, L. S. **Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais.** *Revista de Educação Matemática*, n. 3, p. 5–8, 1997. São Paulo: SBEM. Disponível em:

<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2106/183>
1. Acesso em: 19 de novembro de 2022.

ONUCHIC, L. R., & ALEVATTO, N. S. (2008). **As diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas**. Boletim de Educação Matemática, 21(31), 79-102.

QUEIROZ, N. F. L. de; SILVA, R. A. da; SOUSA, M. R. C. A. de. **Os efeitos da pandemia da COVID-19 no processo educacional no Brasil entre os anos de 2020 e 2021**. The effects of the COVID-19 pandemic on the educational process in Brazil between 2020 and 2021. Revista de Linguística, Letras e Artes, v. 21, n. 2, p. 548-562, 2022. ISSN: 2177-2894 (online). Disponível em: <https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/download/2798/2090/15036>. Acesso em: 08 de outubro de 2023.

PINTO, N. B. (2000). **O erro como estratégia didática**: Estudo do erro no ensino da matemática elementar (2 ed.). Campinas, SP: Papirus.

PIMENTEL, E. (2023) **Menos com menos é mais**: o papel do erro na matemática. Folha de São Paulo. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/blogs/ciencia-fundamental/2023/05/menos-com-menos-e-mais-o-papel-do-erro-na-matematica.shtml>. Acesso em: 09 de outubro de 2023.

SCHRENK, S. (2021). **As produções dos “professores PDE” para o ensino de frações como medida na reta numérica**: possibilidades para o apoio pedagógico no Ensino Fundamental. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Curso Superior de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo.

SWEENEY, E. & QUINN, R. J. (2000). Connecting fractions, decimals & percents. Mathematics Teaching in The Middle School, 5(5), 324–328.

TIAN, J., & SIEGLER, R. S. (2018). Which Type of Rational Numbers Should Students Learn First? **Educational Psychology Review**, 30(2), 351-372. Retrieved from. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/44956398>. Acesso em: 15 de outubro de 2023.

TOLEDO, M. de B. de A. **Teoria e Prática de Matemática**: Como Dois e Dois, volume único: Marília de Barros de Almeida Toledo, Mauro de Almeida Toledo. 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

TRINDADE, S. S., & BÚRIGO, E. Z. (2021). As abordagens dos diferentes significados de número racional presentes na Base Nacional Comum Curricular. In **5º Fórum Nacional sobre Currículos de Matemática (pp. 1-13)**. Canoas: Ulbra.

VALENTE, W. R. (2022) **Como foram construídas e modificadas as representações sobre o erro em matemática?** In: XX Simpósio Nacional de História e Educação Matemática (pp. 224-231). Editora Universitária: São Paulo, Brasil.

VAZ, R. F. N. (2013). **Metodologia didática de análise de soluções aplicada no ensino de frações** (Dissertação de mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

VITORASSI, R.; NOVAES, B. W. D.; ANDRADE, V. L. **Porcentagens na Reta Numérica? Como Assim? Uma Análise dos Erros de Alunos do Oitavo Ano. Revista de História da Educação Matemática, [S. l.], v. 9, p. 1–24, 2023.**

Disponível em: <https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/576>.

Acesso em: 11 fev. 2024.