UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ – UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

RODRIGO MORAES FERREIRA

MAXIMIZANDO LUCROS E MINIMIZANDO PERDAS: TÓPICOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR COM APLICAÇÕES E PERSPECTIVAS PARA O ENSINO

CURITIBA
2017

RODRIGO MORAES FERREIRA

MAXIMIZANDO LUCROS E MINIMIZANDO PERDAS: TÓPICOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR COM APLICAÇÕES E PERSPECTIVAS PARA O ENSINO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba – PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Gotardi Begiato.

CURITIBA
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

F383m Ferreira, Rodrigo Moraes
2017 Maximizando lucros e minimizando perdas: tópicos de programação linear com aplicações e perspectivas para o ensino / Rodrigo Moraes Ferreira.-- 2017.
82 f.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web. Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2017.
Bibliografia: f. 81-82.

1. Pesquisa operacional. 2. Programação linear. 3. Solução de problemas. 4. Programação (Matemática). 5. Métodos gráficos. 6. Empreendedorismo. 7. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 8. Matemática – Dissertações. I. Begiato, Rodolfo Gotardi, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba - UTFPR

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Curitiba
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Título da Dissertação No. 039

"Maximizando lucros e minimizando perdas: Tópicos de programação linear com aplicações e perspectivas para o ensino"

por

Rodrigo Moraes Ferreira

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 17 de fevereiro de 2017. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Rodolfo Gotardi Begiato, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Olivier Brahic, Dr.
(UFPR)

Profa. Diane Rizzotto Rossetto, Dra.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Márcio Rostirolla Adames, Rr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a minha esposa Thais, pois seu amor e incentivo foram fundamentais para que eu vencesse os momentos de incertezas. Sem ela e seus joelhos dobrados em oração, eu jamais teria conseguido chegar até aqui. Esse trabalho também é dedicado à minha filha Isabella, pois ela me mantém focado em ser uma pessoa melhor a cada dia. Ela é um dos principais motivos para que eu estude e batalhe para buscar dias ainda melhores.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me abençoar em todas as áreas da minha vida. A minha avó Iolanda (*in memoriam*) por ter sido o melhor exemplo de pessoa que meus olhos já contemplaram. Aos meus pais, Mauro e Carmen, ao meu avô Albérico (*in memoriam*) e a minha tia Sônia, pelo amor sincero e educação. Aos meus irmãos Leonardo e Carolina por serem bênçãos na minha vida. Aos meus sogros, Ana e Roberto, por todo o apoio desde que cursei a graduação e pela alegria compartilhada com a conclusão desse curso. Aos tios Ivair, por me orientar a ter prazer pelos estudos e pelo conhecimento desde criança, e Fernando, por me incentivar no início do curso e me inspirar como professor, mesmo que eu nunca tenha tipo oportunidade de assistir uma aula dele. A toda a família Moraes Ferreira, pois mesmo com todas as dificuldades que passamos juntos, provamos que, com humildade, empenho e as bênçãos de Deus podemos evoluir. Aos meus cunhados, amigos e a todos aqueles que de alguma forma torceram e oraram por mim.

Finalmente, agradeço ao Prof. Dr. Márcio Rostirolla Adames pela forma amigável, humilde e atenciosa em orientar os alunos do PROFMAT/UTFPR sob sua coordenação e ao meu orientador, Prof. Dr. Rodolfo Gotardi Begiato, pela ótima pessoa que é, pelas sugestões, paciência e disposição em ser um verdadeiro parceiro dos seus orientados.

Retém a instrução e não a largues; guarda-a, porque ela é a tua vida.

Provérbios 4:13

RESUMO

FERREIRA, Rodrigo Moraes. MAXIMIZANDO LUCROS E MINIMIZANDO PERDAS: TÓPICOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR COM APLICAÇÕES E PERSPECTIVAS PARA O ENSINO. 82 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017.

Este trabalho inicialmente apresenta de forma introdutória a importância e aplicações da área de Pesquisa Operacional, enfatizando os Problemas de Programação Linear com exemplos de situações envolvendo maximização e minimização. O Método Gráfico geralmente é usado como solução de problemas com duas variáveis enquanto o Método Simplex é mais versátil em relação a quantidade de variáveis. Ao final é apresentada uma proposta de abordagem de Problemas de Programação Linear nas aulas de Ensino Médio, incluindo, no contexto, o tema do empreendedorismo.
Palavras-chave: Problemas de Programação Linear. Método Gráfico. Método Simplex.

ABSTRACT

FERREIRA, Rodrigo Moraes. MAXIMIZING PROFITS AND MINIMIZING LOSSES: LINEAR PROGRAMMING TOPICS WITH APPLICATIONS AND PROSPECTS FOR TEACHING. 82 p. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017.

This work initially introduces the importance and applications of the area of Operational Research, emphasizing Linear Programming Problems with examples of situations involving maximization and minimization. The Graphical Method is usually used as a two-variable problem solving while the Simplex Method is more versatile in relation to the number of variables. Finally, a proposal is presented to approach Linear Programming Problems in High School classes, including, in the context, the theme of entrepreneurship.
Keywords: Linear Programming Problems. Graphical Method. Simplex Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

PO – Pesquisa Operacional

PL – Programação Linear

PPL – Problemas de Programação Linear

EUA – Estados Unidos da América

SCOOP - *Scientific Computation of Optimum Programs* (Computação Científica de Programas de Otimização)

F. Obj. – Função-Objetivo

Restr. – Restrição

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

BNCC – Base Nacional Curricular Comum

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, a área Pesquisa Operacional (PO) vem ganhando destaque no mundo, uma vez que, apresenta um impacto direto na melhoria da eficiência de muitas organizações e na economia de diversos países. Ela está relacionada à pesquisa científica para a tomada de decisões tendo como ponto de referência a utilização de métodos e modelos matemáticos. Sua aplicação se dá nas mais variadas áreas como logística e cadeia de suprimentos, carteira de investimentos, mix de produção, turnos de funcionários nas empresas, misturas e ligas de matérias primas, tráfego de veículos, assistência médica, área militar, entre outras. Assim, os problemas de otimização, sejam de maximização ou minimização de recursos pertencem a essa área. Nesse trabalho, foram destacadas a resolução de situações-problemas que buscavam otimizar funções lineares, chamadas de função-objetivo, sujeitas a algumas restrições também lineares que se apresentam na forma de equações e inequações. Esses problemas são chamados de Problemas de Programação Linear (PPL).

O objetivo dos PPL não é somente achar uma solução viável, isto é, que cumpre as restrições de igualdade e desigualdade, mas a melhor solução entre essas, a qual chamamos de solução ótima, ou seja, aquela que maximiza ou minimiza a função-objetivo. Para resolver esses problemas, duas ações são fundamentais: a Modelagem Matemática e um método que solucione o modelo adotado.

Em relação à literatura recente, muitos pesquisadores lançaram diversos materiais sobre o assunto. Alguns, apresentam um material muito completo, envolvendo Pesquisa Operacional e consequentemente Programação Linear, Método Gráfico, Método Simplex com diversas situações e variações, além de outros tipos de problemas clássicos de otimização como é o caso de Marins (2011), Lachtermacher (2007), Hillier e Liebermn (2006) e Goldbarg e Luna (2005), entre outros. Luenberger e Ye (2008) e Nocedal e Wright ((2006) destacam-se pela ótima fundamentação do assunto. Em relação a aproximar a Programação Linear do Ensino Médio no Brasil, destaca-se o material de Salles Neto (2006) que aborda alguns problemas clássicos e a resolução de PPL por meio do método gráfico numa linguagem clara e agradável. Em Portugal, destaca-se o trabalho de Dias (2011), na Universidade de Aveiro, que trata da Programação Linear no Ensino Secundário, além dos objetivos e competências matemáticas esperadas. No Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT, há alguns trabalhos interessantes como a dissertação de Crócoli (2016) que apresenta uma abordagem sobre Programação Linear com destaque para o método gráfico, bem como Camargo (2014) que ainda contempla a utilização de *softwares* como Geogebra e o Solver presente no Microsoft Excel. Vasconcelos (2013) apresenta as contribuições dos Métodos Simplex e das resoluções gráficas à aprendizagem de Álgebra Linear enquanto Lyra (2014) leva em consideração os métodos de ensino, o perfil profissional do professor, o perfil do estudante, a flexibilização do currículo escolar e uma proposta para uso do *software* Octave para auxiliar na resolução de sistemas lineares.

O objetivo geral desse trabalho está na resolução de situações simples de Problemas de Programação Linear utilizando os Métodos Gráfico e Simplex e se justifica pela relevância das aplicações envolvendo maximização e minimização no cotidiano e na aproximação proposta aos jovens por meio de aulas no Ensino Médio, pois visa ampliar o conhecimento dos alunos e incentivá-los a otimizarem situações desde então. De forma mais específica deseja-se despertar interesse de qualquer leitor desse trabalho pela área de Pesquisa Operacional, apresentar o Método Simplex de forma simples e por meio das abordagens geométrica, algébrica e consequentemente a forma tabular, além de apresentar uma proposta para aulas no Ensino Médio envolvendo empreendedorismo, onde os alunos pudessem simular situações de criação de um negócio próprio, relacionando a comercialização às situações de otimização por meio de PPL. Com esse objetivo, o trabalho foi organizado da seguinte maneira:

No capítulo 1, a área de PO é apresentada visando ampliar o processo de tomada de decisões. São abordados conceitos, contexto histórico bem como as fases de um estudo de Pesquisa Operacional. Em relação às aplicações de PO, o Quadro 1 apresenta a economia e lucro (em milhões de dólares) de algumas organizações bem como a natureza dessa aplicação. No capítulo 2 o destaque é para a Programação Linear, e os problemas relacionados a essa área. São apresentadas algumas definições, restrições e limitações dos mesmos. Contempla-se ainda a modelagem matemática, com alguns artifícios e principais dificuldades nesse processo. O capítulo 3 dedica-se a resolução de problemas por meio do Método Gráfico, pois a forma geométrica indica com mais clareza a compreensão de conceitos relacionados à Solução Ótima. Já o capítulo 4 apresenta o Método Simplex com os conceitos fundamentais, uma abordagem geométrica, algébrica e tabular para resolução dos problemas. No capítulo 5, é apresentada uma proposta para o trabalho com Problemas de Programação Linear no Ensino Médio voltados ao tema “empreendedorismo” que podem ser utilizados nas aulas de Matemática, tendo por base os exemplos já desenvolvidos nos capítulos anteriores. O último capítulo, trata das considerações finais sobre o trabalho.

1. PESQUISA OPERACIONAL

Apesar de ser uma ação complexa, tomar decisões é comum a qualquer pessoa. Segundo Andrade (2000, p. 2) “uma decisão é um curso de ação escolhido pela pessoa, como o meio mais efetivo à sua disposição para alcançar os objetivos procurados, ou seja, para resolver o problema que a incomoda”.

A Pesquisa Operacional consiste numa abordagem científica na tomada de decisões. Pode ser compreendida como um conjunto de métodos e modelos matemáticos aplicados à resolução de complexos problemas nas operações de uma organização, ou de um sistema real (SALLES NETO, 2006, p.1).

Com o intuito de auxiliar na tomada das melhores decisões, a área de Pesquisa Operacional vem ganhando cada vez mais destaque nas organizações e, utilizando-se de técnicas e modelos matemáticos, a Pesquisa Operacional tem sido empregada para otimizar processos visando a melhoria da performance de organizações.

A ideia de líderes políticos e militares utilizarem-se dos conhecimentos de cientistas para a tomada de decisões e soluções de problemas não é nova, pois há registros desde o século III A.C. quando Arquimedes foi chamado por Hieron, Imperador de Siracusa, para acabar com o cerco naval dos romanos (LÓSS *apud* MARINS, 2011, p. 13 – 14). Esse mesmo autor, ainda descreve que, no século XVII, Pascal e Fermat também modelaram alguns problemas e forneceram soluções para os respectivos modelos em relação a aplicações industriais. Logo após a 1ª Revolução Industrial, com o aumento da complexidade nas organizações, houve uma crescente divisão do trabalho e segmentação das responsabilidades gerenciais tornando-se mais difícil a tarefa de alocar recursos de forma a atender não aos interesses de cada segmento, mas das organizações como um todo. Assim, as sementes da Pesquisa Operacional foram lançadas nas tentativas de usar o método científico no gerenciamento de sistemas e organizações de grande porte.

Todavia, foi na área militar, que inicialmente a Pesquisa Operacional ganhou substancial importância, especialmente durante a Segunda Guerra, conforme pode-se observar:

> Em 1939, o matemático e economista soviético L.V. Kantorovich formulou e resolveu problemas ligados à otimização na administração das organizações, só que o seu trabalho se manteve desconhecido até 1959. Por isso, a história registra que cientistas contratados pelo governo da Inglaterra e dos EUA para desenvolver e aprimorar a logística de guerra foram os pioneiros na área de Pesquisa Operacional, ou seja, de pesquisa das operações, neste caso, militares. Em 1947, George Dantzig e outros

> pesquisadores da SCOOP (*Scientific Computation of Optimum Programs*), programa do Departamento da Força Aérea Americana, divulgaram um método eficiente para resolução de Problemas de Programação Linear chamado Método Simplex. A partir deste trabalho a Pesquisa Operacional se desenvolveu rapidamente, sendo, desde então, aplicada nas mais diversas áreas, da produção industrial à medicina. O avanço da pesquisa operacional nos últimos 50 anos se deu também em função do grande desenvolvimento da informática, ferramenta indispensável para extensão prática dos métodos desenvolvidos nos problemas reais (SALLES NETTO, 2006, p. 1).

Após a Segunda Guerra, as técnicas de PO foram se expandindo para diversas áreas, pois ficava cada vez mais evidenciada a sua eficácia no auxílio aos processos de análise e decisão obtendo-se assim, resultados mais rápidos, assertivos, versáteis e economicamente viáveis, em várias partes do mundo, e consequentemente, em terras brasileiras, não foi diferente.

> “O início da PO no Brasil se deu aproximadamente uma década após sua implantação na Grã-Bretanha e nos Estados Unidos, sendo que as aplicações à economia é que motivou os trabalhos pioneiros da PO. Em 1957 a Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP) criou o primeiro Curso de Engenharia de Produção, em nível de graduação no Brasil nos moldes de cursos de Engenharia Industrial dos Estados Unidos. Em 1958 teve início o Curso de Engenharia de Produção (em nível de graduação) do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Foram criados os cursos de Programação Linear, Teoria dos Jogos, Simulação, Teoria das Filas e Estatística, oferecidos aos alunos de Engenharia de Produção da USP e do ITA.
>
> No início dos anos 60, como vários professores atuavam também no setor privado, teve início uma pequena interação entre a Universidade e a Empresa, resultando nas primeiras aplicações de PO a problemas reais. No final dos anos 60 já existia uma tendência de se formarem em algumas empresas grupos dedicados a PO voltados à solução de problemas táticos e estratégicos. O primeiro grupo formal de PO estabelecido no Brasil em uma empresa foi o da Petrobrás, criado em 1965.
>
> Em 1966 foi realizado no Rio o “Primeiro Seminário de PO no Brasil”, promovido pela Petrobrás. Nesta época foi fundada a SOBRAPO – Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional, que congrega interessados no desenvolvimento e uso de técnicas de PO (LÓSS *apud* MARINS, 2011, p. 14 – 15).

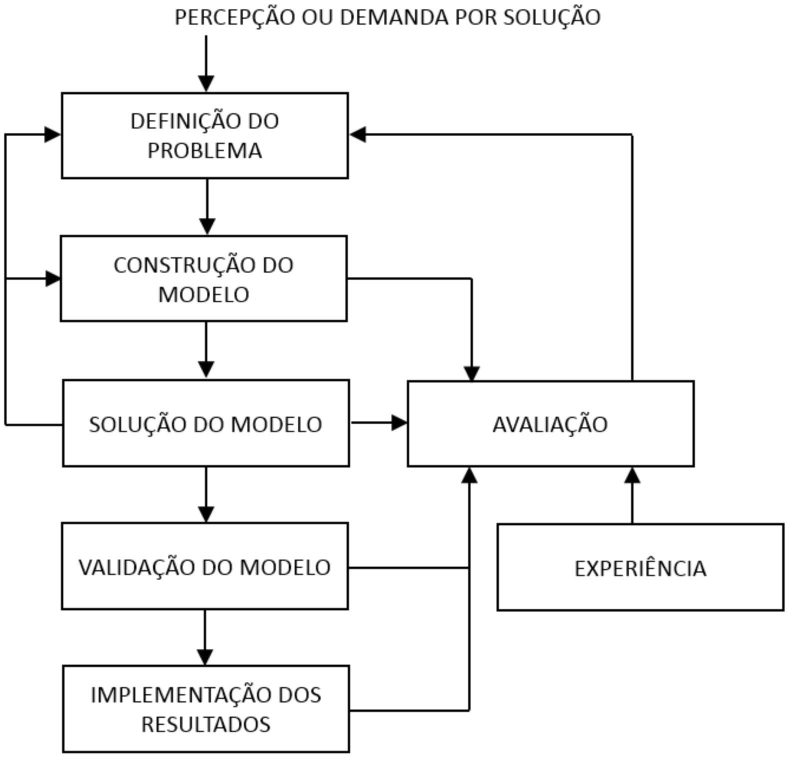
A Pesquisa Operacional teve um impacto impressionante na melhoria da eficiência de inúmeras organizações. O Quadro 1 a seguir, apresenta de forma resumida informações publicadas por Hillier e Lieberman (2006, p. 3 – 4). Na primeira coluna, estão presentes as organizações que se utilizaram de Pesquisa Operacional. Em seguida, pode-se notar na natureza da aplicação da PO a grande diversidade dessas aplicações e o impacto financeiro que estudos bem planejados nessa área podem resultar:

Quadro 1 – Algumas aplicações da Pesquisa Operacional

Organização	**Natureza da Aplicação**	**Ano da Publicação**	**Economia anual (US$)**
United Airlines	Programar turnos de trabalho nos balcões de reserva para atender às necessidades dos clientes a um custo mínimo	1986	6 milhões
Departamento de Polícia de San Francisco	Programar e empregar de forma otimizada os patrulheiros por meio de um sistema computadorizado.	1989	11 milhões
Texaco, Inc.	Misturar de forma otimizada produtos da gasolina e componentes disponíveis, visando atender às exigências de qualidade e de comercialização.	1989	30 milhões
IBM	Integrar uma rede nacional de inventários de peças de reposição para melhorar os serviços de suporte.	1990	20 milhões + 250 milhões em decorrência de inventários menores
Departamento de Saúde de New Haven	Desenvolvimento de um programa para a troca de agulhas eficientes para combater o alastramento da AIDS/HIV.	1993	33% de redução nos casos
AT&T	Desenvolver um sistema baseado em PCs para orientar clientes comerciais no projeto de *call centers*.	1993	750 milhões
Delta Airlines	Maximizar o lucro na alocação de tipos de aeronaves em mais de 2 500 voos domésticos.	1994	100 milhões
China	Selecionar e programar de forma otimizada, projetos em grande escala para atender às necessidades futuras de energia do país.	1995	425 milhões
Força de Defesa da África do Sul	Redesenhar de forma otimizada o tamanho e o formato das forças de defesa e seus sistemas de armamentos.	1997	1,1 bilhão
Proctor and Gamble	Redesenhar o sistema de distribuição e de produção nos Estados Unidos para reduzir custos e aumentar a velocidade de chegada ao mercado.	1997	200 milhões
Hewlett Packard	Redesenhar os tamanhos e as localizações de *buffers* em uma linha de produção de impressoras para atender aos objetivos de produção.	1998	280 milhões a mais em receitas
IBM	Fazer a reengenharia de sua cadeia global de abastecimento para responder mais rapidamente aos clientes, mantendo, ao mesmo tempo, o menor estoque possível.	2000	750 milhões no primeiro ano
Samsung Electronics	Desenvolver métodos de redução de tempos de fabricação e níveis de estoque.	2002	200 milhões a mais em receitas
Continental Airlines	Otimizar a realocação de tripulações quando da ocorrência de desajustes nos horários de voo.	2003	40 milhões

Em relação as fases de um estudo de PO, há algumas opções disponíveis apontada pelos pesquisadores. Ficaremos com Andrade (2000, p. 10) que contempla 5 fases, dispostas da forma apresentada na Figura 1:

Figura 1 – Fases de um estudo de Pesquisa Operacional



A **definição do problema** é o ponto de partida do modelo e baseia-se em três aspectos principais a saber: descrição exata dos objetivos do estudo, identificação das alternativas de decisão existentes e reconhecimento das limitações, restrições e exigências do sistema. A **construção do modelo** é fundamental para a qualidade da solução fornecida, pois aponta se o problema será resolvido por algum método convencional ou se será necessário criar ou adaptar algum outro método. A **solução do modelo** baseia-se nos conhecimentos matemáticos disponíveis em busca da solução ótima. A fase de **validação do modelo** é o momento de verificar se o modelo apresentado é capaz de fornecer uma previsão aceitável do comportamento do sistema e uma resposta que possa contribuir para a qualidade da decisão a ser tomada. Na fase de **implementação** seria conveniente que uma equipe responsável controlasse o processo, uma vez que é uma das etapas críticas do estudo, pois após validar as vantagens da solução obtida, sua implementação pode gerar desconforto e mudança no ambiente de aplicação ou até mesmo a necessidade de revisão do modelo. Finalmente após essas fases, deve-se realizar a **avaliação** dos resultados obtidos e a aplicabilidade da decisão. A **experiência** da equipe envolvida é um fator preponderante desse processo, pois o modelo é apenas uma representação simplificada não conseguindo captar todas as nuanças da realidade.

Enfim, nota-se que a área de Pesquisa Operacional tem grande importância por possui grande amplitude de atuação nas mais diversas áreas, buscar a melhor solução possível e indicar caminhos para a tomada de decisões. Portanto, tem crescido muito a quantidade de organizações que buscam profissionais da área de PO e, segundo Meyer (2011), “esse tipo de arma competitiva é uma sobrevivência para as empresas”.

2. PROGRAMAÇÃO LINEAR

Pelo que já foi apresentado até aqui nesse trabalho, percebe-se que a ação de alocar recursos da forma mais eficiente é intrínseca à Pesquisa Operacional. Os problemas que envolvem essas atividades são chamados de Problemas de Otimização. A finalidade desse tipo de situação continua sendo encontrar a solução ótima. Há problemas em que o objetivo é obter o maior lucro, já em outros casos, objetiva-se reduzir o custo até onde for possível. Uma vez identificado que precisamos resolver um problema de otimização, temos três passos iniciais a seguir, conforme Salles Neto (2006, p. 4):

- identificar ou definir as variáveis de decisão;
- obter a função-objetivo, ou seja, a função que queremos maximizar ou minimizar;
- identificar as condicionantes ou restrições do problema.

A formulação do modelo de um Problema de Otimização em Pesquisa Operacional podem ser compreendidas da seguinte forma:

> A formulação do modelo depende diretamente do sistema a ser representado. A função objetivo e as funções de restrições podem ser lineares ou não-lineares. As variáveis de decisão podem ser contínuas ou discretas (por exemplo, inteiras) e os parâmetros podem ser determinísticos ou probabilísticos.
> O resultado dessa diversidade de representações de sistemas é o desenvolvimento de diversas técnicas de otimização, de modo a resolver cada tipo de modelo existente. Estas técnicas incluem, principalmente: programação linear, programação inteira, programação dinâmica, programação estocástica e programação não-linear. *Programação linear* é utilizada para analisar modelos onde as restrições e a função objetivo são lineares; *programação inteira* se aplica a modelos que possuem variáveis inteiras (ou discretas); *programação dinâmica* é utilizada em modelos onde o problema completo pode ser decomposto em subproblemas menores; *programação estocástica* é aplicada a uma classe especial de modelos onde os parâmetros são descritos por funções de probabilidade; finalmente, *programação não-linear* é utilizada em modelos contendo funções não-lineares (LISBOA 2002, p. 2).

O conceito de **programação** no caso refere-se à sequência e planejamento, enquanto a palavra **linear** aponta para que todas as funções matemáticas envolvidas no modelo, sejam funções lineares (HILLIER e LIEBERMAN, 2006, p. 25).

Dantzig *apud* Silva e Urbanavicius Júnior (2009, p.1) afirma que a Programação Linear pode ser concebida como “parte de um grande desenvolvimento revolucionário que deu a humanidade a capacidade geral de estabelecer metas e um caminho detalhado para se tomar decisões no sentido de "melhor" atingir os seus objetivos quando confrontados com situações concretas de grande complexidade”.

2.1 PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR (PPL)

Matematicamente, adotaremos a seguinte representação como Padrão de um Problema Programação Linear:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\text{sujeito a:} & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \\
 & g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2 \\
 & \vdots \\
 & g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.
\end{array}
\qquad (1)
$$

Onde:

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$.

$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n$, para $i = 1, \ldots, m$.

- n é o número de variáveis;
- m é o número de restrições do problema;
- i é o índice de uma determinada restrição (i = 1, 2, ..., m);
- j é o índice de uma determinada variável (j = 1, 2, ..., n);
- c_i é o coeficiente (constante) da variável x_i da função-objetivo;
- a_{ij} é o coeficiente (constante) da variável x_i da j-ésima restrição.

Portanto, podemos reescrever o problema (*1*) da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
\text{sujeito a:} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.
\end{array}
$$

ou na forma reduzida:

$$\text{maximizar} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sujeito a} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.$$

E, também, na forma matricial:

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & c^T x & \\ \text{sujeito a:} & Ax = b & (P) \\ & x \geq 0, & \end{array}$$

onde:

$c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in \Re^n$;

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Re^n$;

$b = (b_1, b_2, ..., b_m) \in \Re^m$;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \Re^{m \times n};$$

e $x \geq 0$ indica que $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$.

Definição 2.1 *O conjunto*

$$X = \{x \in \Re^n;\ Ax = b,\ x \geq 0\}$$

é chamado ***conjunto viável para o problema (P)*** *e um ponto $x \in X$ é denominado* ***ponto viável****.*

Pode-se interpretar o problema (P) da seguinte maneira: dados uma matriz com números reais A, $m \times n$, um vetor do lado direito b $\in \Re^m$ e um vetor custo $c \in \Re^n$, encontrar, se existir, um vetor de variáveis de decisão $x^* \in X$ tal que

$$c^T x^* = max\ \{c^T x,\ x \in X\}.$$

Para prosseguir o trabalho de maneira satisfatória, convém introduzir algumas definições:

Definição 2.2 *A função linear $x \mapsto c^T x$ é chamada* ***função-objetivo para o problema (P)****.*

Definição 2.3 *Quando existe, o número* $v(P) = max \{c^T x, x \in X\}$ *é denominado o* ***valor ótimo para o problema (P)****. O conjunto*

$$X(P) = \{x \in X; c^T x = v(P)\}$$

é chamado de ***conjunto de soluções ótimas para o problema (P)*** *e um ponto* $x \in X(P)$ *é denominado* ***solução ótima****,* ***maximizador****, ou* ***ponto de máximo****.*

Definição 2.4 *O problema (P) é dito ser* ***ilimitado****, quando existe uma sequência* (x^k) *tal que* $x^k \in X$ *e* $c^T x^k \to \infty$*, quando* $k \to \infty$*.*

Definição 2.5 *O problema (P) é dito ser* ***inviável****, quando X é vazio.*

Não há diferença prática entre trabalhar com maximização e minimização. Caso o problema seja relacionado a minimização pode-se utilizar a seguinte proposição:

Proposição 2.6 *Seja X um conjunto viável de um Problema de Programação Linear que possui alguma solução ótima. Então,*

$$max \{c^T x, x \in X \} = -min \{-c^T x, x \in X \}.$$

Demonstração 2.7 Seja $x^* \in X$ uma solução ótima do problema

$$max \{c^T x, x \in X \}.$$

Para todo $x \in X$ temos pela definição de x^*, $max \{c^T x\} = c^T x^* \geq c^T x$, que é equivalente a $-c^T x \geq -c^T x^* = -min \{-c^T x\}$. Portanto, para todo $x \in X$, $max \{c^T x\} = -min \{-c^T x\}$ ■

Dessa maneira, o resultado anterior garante que na ocorrência de

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeito a:} & x \in X, \end{array}$$

podemos usar a seguinte interpretação:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & -c^T x \\ \text{sujeito a:} & x \in X. \end{array}$$

Vale ressaltar que, caso exista solução ótima, dito $x^* \in X$, o valor ótimo será

$$min \{c^T x, x \in X\} = -max \{-c^T x, x \in X\}.$$

Há situações onde o uso de artifícios é fundamental para a redução de um modelo qualquer à Forma-Padrão, conforme Marins (2011, p. 47 – 48):

- **Ocorrência de desigualdade nas restrições:** qualquer desigualdade pode ser transformada numa igualdade equivalente, bastando adicionar ou subtrair novas variáveis não negativas, denominadas **variáveis de folga**.

Exemplo: Sejam as restrições: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 5 \end{cases}$

estas restrições são equivalentes a $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \text{ com } x_3 \geq 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_4 = 5 \text{ com } x_4 \geq 0. \end{cases}$

- **Ocorrência de $b_i < 0$:** basta multiplicar por (–1) a restrição i, pois os coeficientes a_{ij} podem assumir qualquer sinal na forma padrão.
- **Ocorrência de variáveis livres:** variáveis que podem ser positivas, nulas ou negativas. Seja x_k uma variável livre, pode-se substituí-la em todas as equações do modelo x_k por $x_k = x'_k - x''_k$, onde $x'_k \geq 0$ e $x''_k \geq 0$.
- **Ocorrência de variável não positiva:** se existe $x_k \leq 0$, basta substituí-la pela sua simétrica $x'_k = -x_k \geq 0$ nas equações do modelo.

A seguir, vejamos uma situação modelada por Hillier e Lieberman (2006, p. 26 – 28). A resolução desse problema pode ser feita por meio de abordagem de PPL e será feita nos próximos capítulos desse trabalho:

Problema da Wyndor Glass

A Wyndor Glass CO. fabrica produtos de vidro de alta qualidade, entre os quais janelas e portas de vidro. A empresa possui três fábricas industriais. As esquadrias de alumínio e ferragens são feitas na Fábrica 1, as esquadrias de madeira são produzidas na Fábrica 2 e, finalmente, a Fábrica 3 produz o vidro e monta os produtos.

Em consequência da queda nos ganhos, a direção decidiu modernizar a linha de produtos da empresa. Produtos não rentáveis estão sendo descontinuados, liberando capacidade produtiva para o lançamento de dois novos produtos com grande potencial de vendas:

- Produto 1: Uma porta de vidro com esquadria de alumínio.
- Produto 2: Uma janela duplamente adornada com esquadrias de madeira.

O produto 1 requer parte da capacidade produtiva das Fábricas 1 e 3, mas nenhuma da Fábrica 2. O produto 2 precisa apenas das Fábricas 2 e 3. A divisão de marketing concluiu que a empresa poderia vender tanto quanto fosse possível produzir desses produtos por essas fábricas. Entretanto, pelo fato de ambos os produtos poderem estar competindo pela mesma capacidade produtiva na Fábrica 3, não está claro qual *mix* dos dois produtos seria o *mais lucrativo*.

A equipe de Pesquisa Operacional da empresa destinada à essa atividade coletou alguns dados que estão dispostos a seguir:

Quadro 2 – Dados para o problema da Wyndor Glass.

Fábrica	**Tempo de Produção por Lote (em horas)**		**Tempo de Produção Disponível por Semana (em horas)***
	Produto		
	1	**2**	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Lucro por Lote	US$ 3.000	US$ 5.000	

* A maior parte do tempo nessas fábricas já está comprometida com os produtos atuais, de modo que a capacidade disponível para os novos produtos é bastante limitada.

O problema a se resolver passou a ser então determinar quais as taxas de produção para ambos os produtos de modo a maximizar o lucro total, sujeito às restrições impostas pelas capacidades produtivas limitadas disponíveis nas três fábricas. (Cada produto será fabricado em lotes de 20, de forma que a taxa de produção é definida como o número de lotes produzidos por semana.) É permitida qualquer combinação de taxas de produção que satisfaça essas restrições, inclusive não produzir nada de um produto e o máximo possível do outro. Pelo fato de nenhum custo adicional incorrer para o início da produção e a comercialização de tais produtos, o lucro total de cada um deles é aproximadamente o lucro por lote multiplicado pelo número de lotes produzidos.

Modelagem Matemática do Problema:

De posse dos dados, pode-se formular um modelo matemático a ser resolvido por meio de métodos de programação linear:

- x_1 = número de lotes do produto 1 produzidos semanalmente;
- x_2 = número de lotes do produto 2 produzidos semanalmente;

- Z = lucro total por semana (em milhares de dólares) obtido pela produção desses dois produtos.

Assim, x_1 e x_2 serão chamadas de **variáveis de decisão** para o modelo, enquanto $Z = 3x_1 + 5x_2$ expressa a **função-objetivo**, isto é, aquela à qual deseja-se otimizar, sendo, nesse caso, maximizar. O problema está sujeito às **restrições** impostas pela capacidade de produção disponível nas três fábricas:

- Fábrica 1: $1x_1 + 0x_2 \leq 4 \Rightarrow x_1 \leq 4$;
- Fábrica 2: $0x_1 + 2x_2 \leq 12 \Rightarrow 2x_2 \leq 12$;
- Fábrica 3: $3x_1 + 2x_2 \leq 18$,

além de, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, pois não é possível produzir quantidades negativas.

Dessa maneira, o problema[1] consiste em determinar os valores de x_1 e x_2 de modo a

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito a:} & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ \text{e} & x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0. \end{array}$$

Em qualquer Problema de Programação Linear, sejam situações que envolvem maximização ou minimização, um aspecto fundamental é a modelagem matemática da situação. A tradução da realidade empírica para um modelo matemático está sujeita a erros, pois o modelo formal é uma simplificação do real. O modelo formal busca imitar as principais características para ser tratado por métodos disponíveis o que, para muitos, é uma das partes mais difíceis nesse contexto. Vale ressaltar que algumas dificuldades apresentadas na representação por meio de modelagem matemática, conforme Goldbarg e Luna (2005, p. 15 – 16). A primeira delas pode ser uma dificuldade em face aos instrumentos de representação, pois como nem todos os fenômenos podem ser expressos por meio de lógica convencional, ao representar seu comportamento por meio de variáveis, nem sempre essas variáveis são suficientes, sendo, nesses casos, necessário identificar ou criar variáveis "artificiais". Já a dificuldade face ao grau de incerteza se dá pelo risco de comportamento imprevisível de algum fenômeno no futuro, mesmo quando teoricamente estiver bem definido pelas variáveis. Há ainda a dificuldade com a ferramenta de solução que ocorre quando há problemas em implementar o modelo, seja pela natureza das variáveis de decisão e de seu inter-relacionamento, entre outros. Nesses casos, os

[1] O problema em questão ainda não está na forma padrão. No momento de resolvermos esse problema por meio do Método Simplex adotaremos a forma padrão, utilizando as instruções da página 24.

modelos poderão ser solucionados por técnicas não necessariamente exatas denominadas heurísticas. Dessa forma, uma técnica heurística admite sacrificar o ideal de perfeição sugerido pela otimização em troca de melhorar a eficiência de um processo de busca. Contudo, uma vez compreendido e devidamente representado por meio de um modelo matemático de otimização com sua função-objetivo e restrições, segue-se para a aplicação de um método de resolução. Finalmente, pode-se processar a solução obtida concluindo se é ou não adequada para o problema inicial.

Antes de finalizar esse capítulo, vale ressaltar que o foco é trabalhar com situações mais simples e que possam ser introduzidas e aplicadas também a alunos que cursam o Ensino Médio. Portanto, as situações estão delimitadas em Problemas de Programação Linear.

3. O MÉTODO GRÁFICO

A maior quantidade de problemas resolvidos por esse método encontra-se em situações com apenas duas variáveis, uma vez que, pode-se facilmente construir um gráfico, tendo essas duas variáveis de decisão como eixos (embora seja possível trabalhar nesse método com 3 variáveis). Inicialmente é preciso determinar o conjunto dos pontos que satisfazem as restrições do problema para, em seguida, encontrar na região viável onde a função atinge o valor máximo, em problemas envolvendo maximização ou mínimo, em problemas de minimização.

Embora esse método seja de certa forma limitado, devido à quantidade de variáveis de decisão, ele é didático no sentido de que facilita a compreensão de conceitos importantes como a região viável, solução viável e solução ótima, além de fornecer elementos para o entendimento de casos mais gerais. Ademais pode ser utilizado nas aulas de Matemática no Ensino Médio como aplicação de conteúdos escolares relacionados às Funções Afins, Equações e Inequações de 1º grau, Plano Cartesiano, Matrizes, Sistemas Lineares, entre outros.

Para trabalhar com o Método Gráfico é conveniente que o PPL esteja na forma (*P2*) a seguir, equivalente à forma padrão (*P*):

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & c^T x \\ \text{sujeito a:} & Ax \leq b \qquad (P2) \\ & x \geq 0, \end{array}$$

3. 1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR POR MEIO DO MÉTODO GRÁFICO

Exemplo 1: Resolução do problema da Wyndor Glass – Método Gráfico

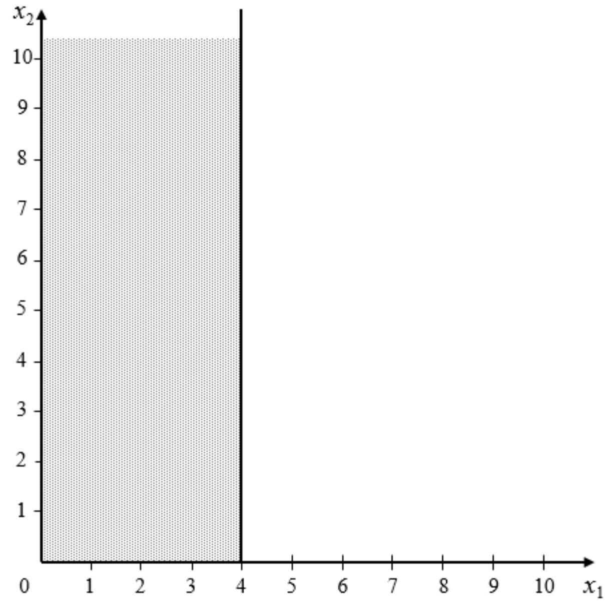
Vamos iniciar pela resolução do problema da Wyndor Glass, proposto por Hillier e Lieberman (2006, p. 26 – 30), cujo modelo já foi apresentado na seção 2.1 desse trabalho:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito a:} & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ \text{e} & x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0. \end{array}$$

As variáveis de decisão x_1 (abcissas) e x_2 (ordenadas) serão os eixos do gráfico. Inicialmente serão representadas as restrições, sempre considerando a não-negatividade de x_1 e x_2. A seguir, temos o gráfico da restrição $x_1 \leq 4$.

Figura 2 – Restrição $x_1 \leq 4$, $x_1 \geq 0$

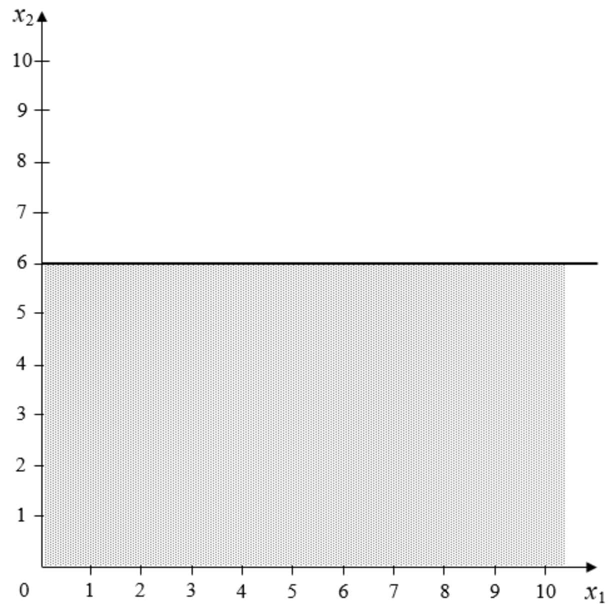
(Exemplo 1)



A seguir temos o gráfico da função $2x_2 \leq 12 \Rightarrow x_2 \leq 6$.

Figura 3 – Restrição $2x_2 \leq 12$, $x_2 \geq 0$

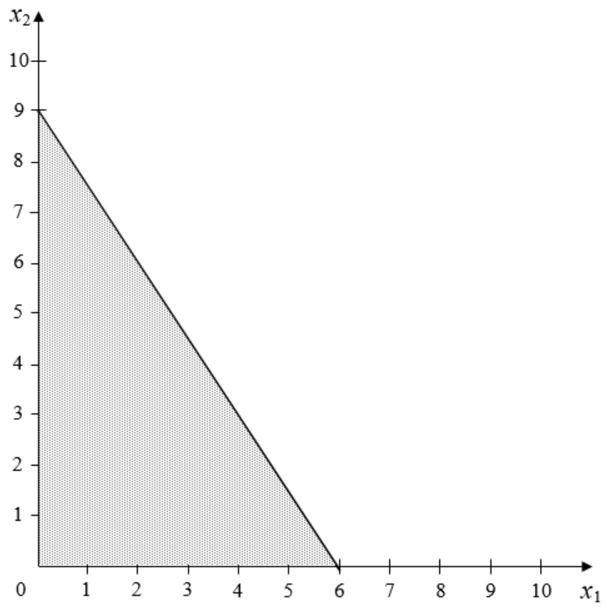
(Exemplo 1)



Para descobrir a reta que representa a função $3x_1 + 2x_2 \leq 18$, pode-se utilizar a equação da reta $3x_1 + 2x_2 = 18$ e posteriormente determinar a desigualdade. Para tal, vamos inicialmente identificar dois pares ordenados. Os mais simples são $(x_1, 0)$ e $(0, x_2)$, pois intersectam respectivamente os eixos do gráfico. Assim, para $(x_1, 0)$, $x_2 = 0$, temos em $3x_1 + (2 \cdot 0) = 18 \Rightarrow 3x_1 = 18 \Rightarrow x_1 = 6$. Para $(0, x_2)$, $x_1 = 0$, resulta em $(3 \cdot 0) + 2x_2 = 18 \Rightarrow 2x_2 = 18 \Rightarrow x_2 = 9$. Portanto, os pontos (6, 0) e (0, 9) pertencem à reta $3x_1 + 2x_2 = 18$ e fazendo o teste da desigualdade, determinamos o conjunto de pontos que cumpre a restrição $3x_1 + 2x_2 \leq 18$. Tal conjunto encontra-se na Figura 4.

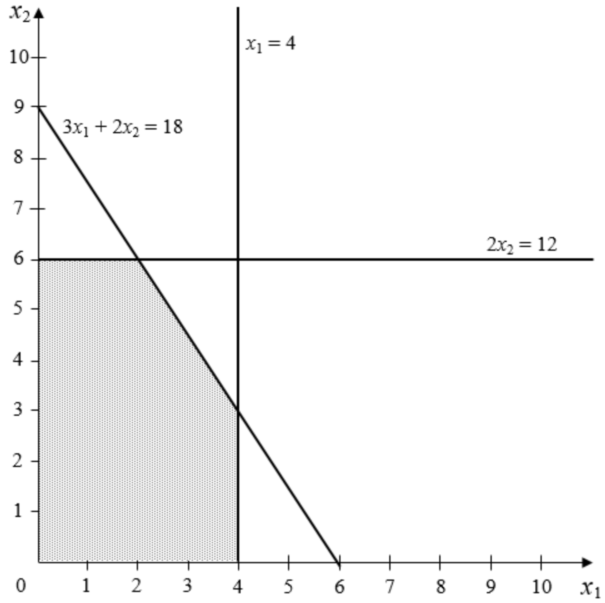
Figura 4 – Restrição $3x_1 + 2x_2 \leq 18$, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

(Exemplo 1)



Para delimitar a região viável, basta obter a intersecção de todas as restrições do problema, representada na Figura 5 a seguir:

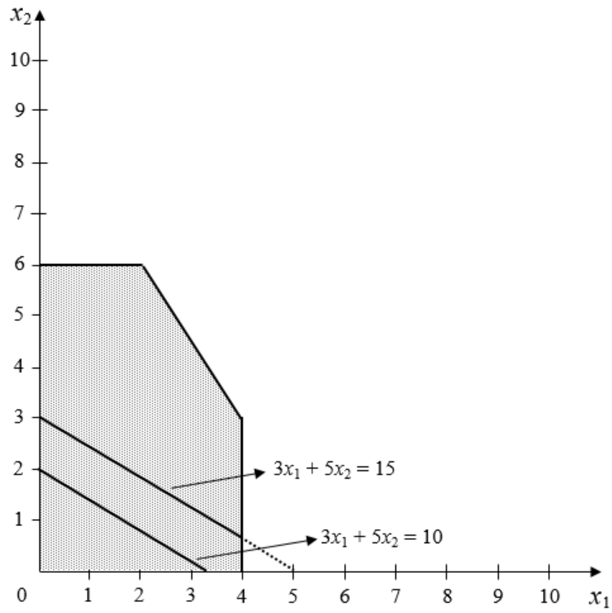
Figura 5 – Região viável considerando as restrições $x_1 \leq 4$, $x_2 \leq 12$ e $3x_1 + 2x_2 \leq 18$, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ (Exemplo 1)



Agora, avançamos para a etapa final dessa resolução que, a partir dessa região viável, busca escolher o ponto que maximiza o lucro da empresa por meio da função-objetivo $3x_1 + 5x_2$. Atribuindo-se um **valor para *Z***, é possível determinar a reta $Z = 3x_1 + 5x_2$ e analisar se há algum ponto dessa reta que pertença a região viável. Tomando, inicialmente o valor $Z = 10$, vamos determinar $(x_1, 0)$, onde $Z' = 10 = 3x_1 + (5 \cdot 0) \Rightarrow 10 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{10}{3}$ e $(0, x_2)$, onde $10 = (3 \cdot 0) + 5x_2 \Rightarrow 10 = 5x_2 \Rightarrow x_2 = 2$. Portanto, $(\frac{10}{3}, 0)$ e $(0, 2)$ são dois pontos que pertencem a reta $10 = 3x_1 + 5x_2$. Dando continuidade, o valor atribuído para Z dessa vez será 15. Para $(x_1, 0)$, temos $15 = 3x_1 + (5 \cdot 0) \Rightarrow 15 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = 5$. Para $(0, x_2)$, temos $15 = (3 \cdot 0) + 5x_2 \Rightarrow 15 = 5x_2 \Rightarrow x_2 = 3$. Portanto, $(5, 0)$ e $(0, 3)$ são dois pontos que pertencem a reta $15 = 3x_1 + 5x_2$. A seguir, temos o gráfico com esses dados:

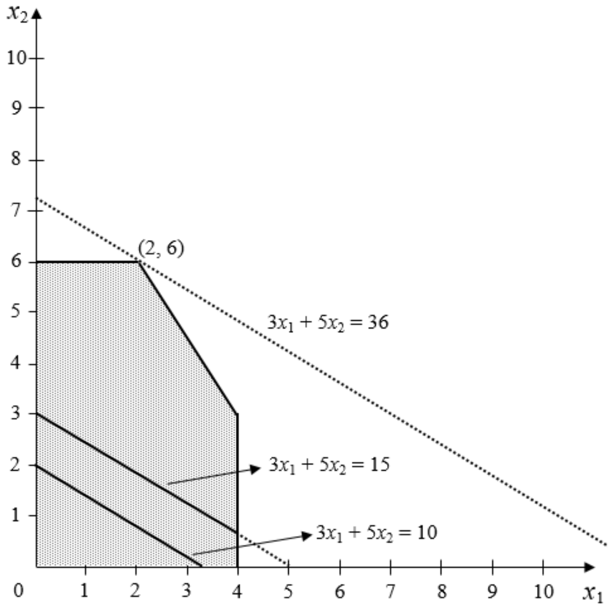
Figura 6 – Região viável para Z = 10 e Z = 15

(Exemplo 1)



Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, para $3x_1 + 5x_2 = 10$ e $3x_1 + 5x_2 = 15$ só foram considerados nas retas, os valores que atendem a essas condições. Nota-se que há muitos pontos pertencentes a cada uma dessas duas retas que pertencem a região viável. Logo, $Z = 10$ e $Z = 15$ são soluções viáveis de lucro. Contudo, nenhum desses valores é ainda, a solução ótima. Um fato muito importante que pode ser constatado é que as duas retas construídas são paralelas. Pode-se constatar isso porque ambas possuem a mesma inclinação igual a $-\frac{3}{5}$, uma vez que, $Z = 3x_1 + 5x_2 \Rightarrow 5x_2 = -3x_1 + Z \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}Z$. Portanto, como ainda há espaço para se construírem mais retas paralelas acima das duas já construídas, continua-se o processo, até achar a solução ótima. Poderíamos seguir atribuindo valores para Z, contudo, pelo gráfico, é possível perceber que dentro da região viável, o ponto de máximo ocorre no vértice do polígono onde as retas $x_2 = 6$ e $3x_1 + 2x_2 = 18$ se encontram. Resta então, descobrir a coordenada em x_1. Como, $3x_1 + 2x_2 = 18 \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 - 18 = 0$ e $2x_2 = 12 \Rightarrow 2x_2 - 12 = 0$. Igualando as duas equações, temos $3x_1 + 2x_2 - 18 = 2x_2 - 12 \Rightarrow 3x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 2$ e temos que (2, 6) é o ponto de máximo procurado.

Figura 7 – Solução ótima
(Exemplo 1)



Finalmente, com o ponto (2, 6), pode-se calcular o valor ótimo para a função-objetivo. Como $Z = 3x_1 + 5x_2 = (3 \cdot 2) + (5 \cdot 6) = 6 + 30 = 36$. Portanto, a WyndorGlass, para ter o maior lucro possível, de US$ 36.000, deveria fabricar dois lotes do produto 1 e seis lotes do produto 2 semanalmente.

Nesse exemplo, nota-se que as variáveis x_1 e x_2 assumem valores inteiros, pois representam a quantidade de lotes produzidos de portas e janelas. No exemplo 2, x_1 e x_2 representam o tempo (em horas), podendo assim, assumir quaisquer valores reais, desde que atendam todas as restrições.

Exemplo 2: Resolução do problema da Alumilâminas S.A. – Método Gráfico

Essa situação-problema envolve minimização de custos (adaptada de Oliveira, 2005):

As indústrias Alumilâminas S.A. fechou contrato e para a venda de todos os três tipos diferentes de lâminas de alumínio que fabrica: espessura fina, média ou grossa. Toda produção da companhia é realizada em duas fábricas, uma localizada em São Paulo e outra no Rio de Janeiro. Segundo os contratos fechados, a empresa precisa entregar 16 toneladas de lâminas finas, 6 toneladas de lâminas médias e 28 toneladas de lâminas grossas. Devido à qualidade dos produtos da Alumilâminas S.A., há uma demanda extra para cada tipo de lâmina. A fábrica de São Paulo tem um custo de produção diário de R$ 100.000,00 para uma capacidade produtiva de 8 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 2 toneladas de lâminas grossas por dia. O custo de produção diário para a fábrica do Rio de Janeiro é de R$ 200.000,00 para uma produção de 2 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 7 toneladas de lâminas grossas. Quantos tempo cada uma das fábricas deverá operar para atender os pedidos ao menor custo possível? Qual o valor do menor custo?

Vamos inicialmente à Modelagem Matemática. Para isso, temos:

- x_1 = tempo (dias) de operação da fábrica de São Paulo;
- x_2 = tempo (dias) de operação da fábrica do Rio de Janeiro;
- C = Custo (em milhares de reais) para a produção das lâminas.

Assim, x_1 e x_2 serão as variáveis de decisão para o modelo, enquanto $C = 100x_1 + 200x_2$ expressa a função-objetivo.

Restrições:

- Lâmina fina: $8x_1 + 2x_2 \geq 16$.
- Lâmina Média: $x_1 + x_2 \geq 6$.
- Lâmina Grossa: $2x_1 + 7x_2 \geq 28$.

e, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.

Assim, o problema pode passa a ser determinar os valores de x_1 e x_2 de modo a

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimizar} & 100x_1 + 200x_2 & \\
\text{sujeito a:} & 8x_1 + 2x_2 \geq 16 & \text{(I)} \\
 & x_1 + x_2 \geq 6 & \text{(II)} \\
 & 2x_1 + 7x_2 \geq 28 & \text{(III)} \\
\text{e} & x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$

Para a restrição (I), vamos determinar a reta $8x_1 + 2x_2 = 16$:

Para $(x_1, 0)$, $8x_1 + 2x_2 = 16 \Rightarrow 8x_1 + (2 \cdot 0) = 16 \Rightarrow x_1 = 2$. Para $(0, x_2)$, $8x_1 + 2x_2 = 16 \Rightarrow (8 \cdot 0) + 2x_2 = 16 \Rightarrow x_2 = 8$. Portanto, os pontos (2,0) e (0,8) pertencem à reta $8x_1 + 2x_2 = 16$.

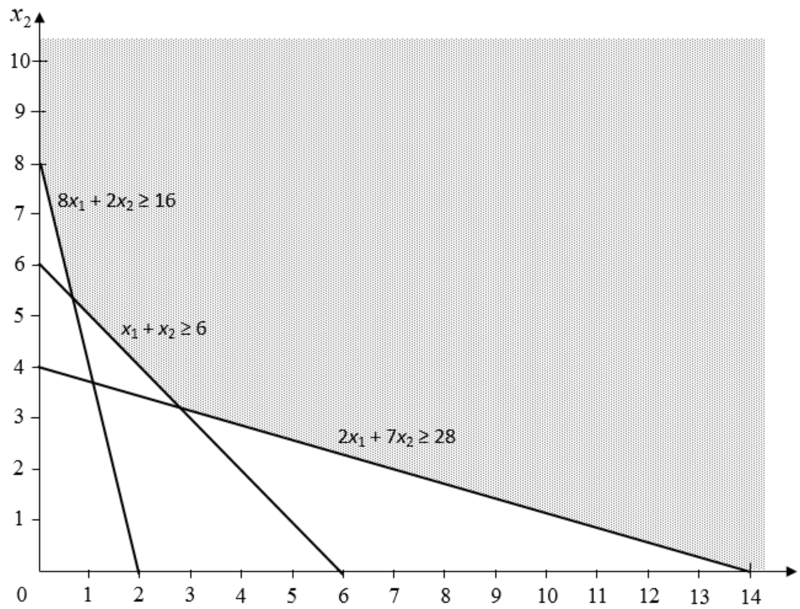
Para a restrição (II), vamos determinar a reta $x_1 + x_2 = 6$:

Para $(x_1, 0)$, $x_1 + 0 = 6 \Rightarrow x_1 = 6$. Para $(0, x_2)$, $x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow 0 + x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 6$. Portanto, os pontos (6,0) e (0,6) pertencem à reta $x_1 + x_2 = 6$.

Finalmente, para a restrição (III), a reta $2x_1 + 7x_2 = 28$. Assim, para $(x_1, 0)$, $2x_1 + 7x_2 = 28 \Rightarrow 2x_1 + (7 \cdot 0) = 28 \Rightarrow x_1 = 14$. Para $(0, x_2)$, $2x_1 + 7x_2 = 28 \Rightarrow (2 \cdot 0) + 7x_2 = 28 \Rightarrow x_2 = 4$. Portanto, os pontos (14,0) e (0,4) pertencem à reta $2x_1 + 7x_2 = 28$.

Para delimitar a região viável, basta obter a intersecção de todas as restrições do problema, que pode ser vista na Figura 8 a seguir:

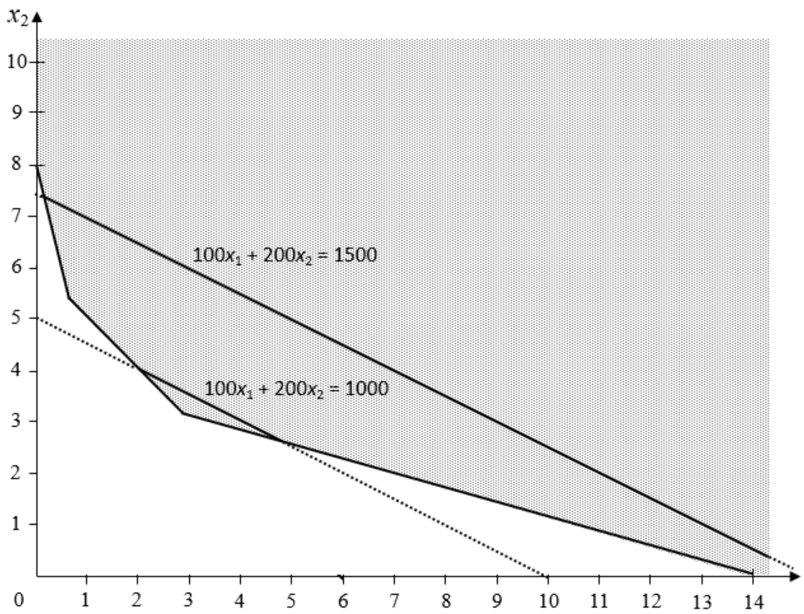
Figura 8 – Região viável considerando todas as restrições
(Exemplo 2)



Atribuindo-se valores para C dentro da região viável, podemos avaliar a função-objetivo. Inicialmente vamos considerar $C = 1500$. Assim, para $(x_1, 0)$, $1500 = 100x_1 + 200x_2 \Rightarrow 1500 = 100x_1 + (200 \cdot 0) \Rightarrow x_1 = 15$. Para $(0, x_2)$, $C = 1500 = (100 \cdot 0) + 200x_2 \Rightarrow x_2 = 7{,}5$. Portanto, com os dois pontos obtidos (15, 0) e (0, 7,5), pode-se determinar a reta $100x_1 + 200x_2 = 1500$. Dando continuidade, o valor atribuído para C dessa vez será 1000. Para $(x_1, 0)$, $1000 = 100x_1 + (200 \cdot 0) \Rightarrow x_1 = 10$. Para $(0, x_2)$, $1000 = (100 \cdot 0) + 200x_2 \Rightarrow x_2 = 5$. Portanto, com os dois obtidos (10, 0) e (0, 5) pode-se determinar a reta $100x_1 + 200x_2 = 1000$. Na Figura 9, a seguir, estão representadas essas retas, além do conjunto viável.

Figura 9 – Região viável para C = 1500 e C = 1000

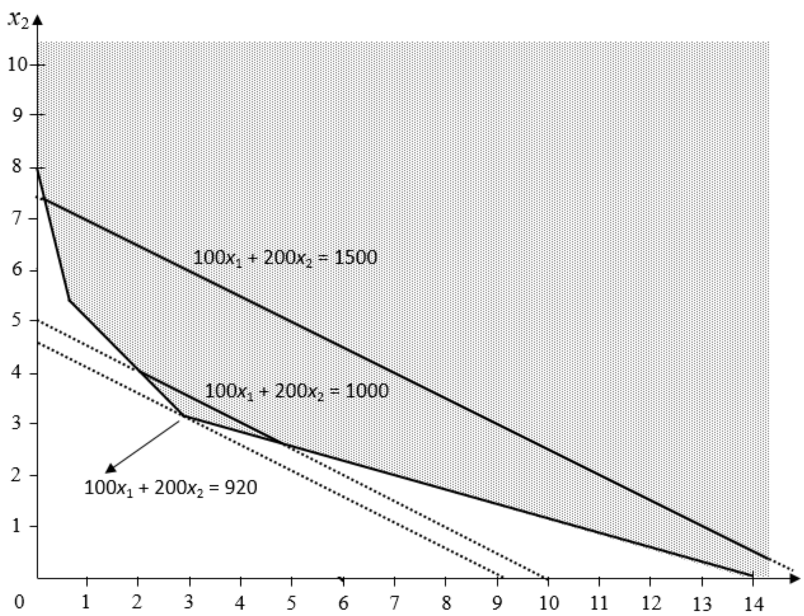
(Exemplo 2)



Pelas retas obtidas, pode-se perceber que o ponto mínimo ocorre para C < 1000 e justamente na intersecção das retas $x_1 + x_2 = 6$ e $2x_1 + 7x_2 = 28$. Resolvendo esse sistema de equações lineares temos $x_1 = 2{,}8$ e $x_2 = 3{,}2$. Logo, $C = 100x_1 + 200x_2 = 100 \cdot 2{,}8 + 200 \cdot 3{,}2 = 280 + 640 = 920$. Portanto, o custo mínimo para a Alumilâmina atender aos contratos formados é de R$ 920.000,00. Para atingir este custo, a fábrica de São Paulo deverá operar 2,8 dias, enquanto que a fábrica do Rio de Janeiro deverá operar 3,2 dias.

Figura 10 – Solução ótima

(Exemplo 2)



Vimos até aqui duas situações-problema com uma única solução ótima, conforme a finalidade desse trabalho. Em ambos os casos, um polígono representava a região viável, pois eram duas as variáveis de decisão em cada caso. No caso de três variáveis, um poliedro representaria essa região.

Existem situações em que número de soluções ótimas é infinito e, antes de finalizar esse capítulo, vamos expor um Teorema que trata deste assunto e fornece perspectivas para o desenvolvimento do Método Simplex que será visto no próximo capítulo.

Definição 3.1 *Os pontos de fronteira de uma região viável que são interseções de dois segmentos de retas de fronteira são chamados de **vértices** ou **pontos extremos**.*

Teorema 3.2 *Se a região viável de um problema de programação linear é não-vazia e limitada, então a função-objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável é ilimitada, então a função-objetivo pode ou não atingir valores máximo ou mínimo, contudo, se atingir um máximo ou mínimo, este ocorrerá em **pontos extremos**.*

Demonstração 3.3 Ver em Anton e Rorres (2001, p. 373).

> A ideia da demonstração reside no fato da curva de nível da função-objetivo intersectar a região viável, se esta for limitada, com seu maior valor ou num ponto extremo (única solução ótima) ou numa reta fronteira (infinitas soluções). Caso a região viável seja ilimitada podemos ter uma solução ilimitada, no caso da função-objetivo crescer na direção da região ilimitada num problema de maximização ou no caso da função-objetivo decrescer na direção da região ilimitada. No caso de um problema de maximização e da função-objetivo crescer na direção contrária ao da região ilimitada, teremos ao menos uma solução ótima. Similarmente, se estivermos trabalhando com um problema de minimização e a função-objetivo decrescer na direção contrária da região ilimitada, teremos ao menos uma solução ótima (Salles Neto, 2006, p.14).

4. O MÉTODO SIMPLEX

O Método Simplex "é um algoritmo que se utiliza de ferramental matemático para determinar, por um modo iterativo, a solução ótima de um Problema de Programação Linear" (PAVAN, 2010, p. 22). Desde que foi desenvolvido por George Dantzig em 1947 tem sido amplamente divulgado, haja vista a grande quantidade de aplicações. Ao longo do tempo, esse método tem se provado muito eficiente sendo utilizado na resolução de problemas por meio de computadores, com muitos *softwares* disponíveis no mercado.

Para a aplicação do método de forma prática, o PPL deve estar na forma padrão (P), vista no início deste texto, ou seja:

- Todos os problemas devem ser relacionados à maximização;
- Todas as variáveis devem ser não-negativas;
- Todas as restrições funcionais devem se tornar equações (ou seja, restrições de igualdade);
- Todas as constantes (b_i) do lado direito também devem ser não-negativas.

Quando a situação a ser resolvida por meio do Método Simplex for relacionada à minimização, pelo que foi apresentado também na seção 2.1 desse trabalho, pode-se notar que basta multiplicar por (– 1) todos os coeficientes da função-objetivo.

Por meio das situações-problemas resolvidas a seguir, pode-se comprender o desenvolvimento do método.

4. 1 RESOLUÇÃO DE PPL POR MEIO DO MÉTODO SIMPLEX

Antes do desenvolvimento do algoritmo, se faz necessário algumas definições e teoremas, encontrados em Goldbarg e Luna (2005, p. 92 – 96):

Definição 4.1 *Uma matriz A (m × n) é dita ser de* ***ordem p*** *se admite p colunas linearmente independentes.*

Definição 4.2 *Uma base de uma matriz A (m × n) é uma matriz quadrada de m vetores coluna linearmente independentes em $\Re^m$. As variáveis associadas a essas colunas são denominadas* ***variáveis básicas****.*

Podemos decompor o vetor das variáveis $x = (x_B; x_R)$, onde:

- x_B representa o vetor das **variáveis básicas** de m componentes;
- x_R é o vetor das restantes $n - m$ **variáveis não-básicas**;
- I é o conjunto dos índices correspondentes às **variáveis básicas**;
- J é o índice das **variáveis não-básicas**.

Definição 4.3 *Seja B uma base associada à matriz A. O vetor composto de $x_B = B^{-1}b$ e $x_R = 0$ é chamado de* ***solução básica****.*

Definição 4.4 *Uma solução básica sem componentes negativos é denominada* ***solução básica viável****.*

Teorema 4.5 *Um ponto x é extremo em um conjunto de soluções viáveis de um problema de programação linear se e somente se $x \geq 0$ for uma solução básica do sistema de equações lineares $Ax = b$.*
Demonstração 4.6 Ver em Goldbarg e Luna (2005, p. 96).

Observamos que, pelo Teorema 3.2, vamos ter que toda **solução básica viável** do sistema Ax = b é um **ponto extremo** do conjunto de soluções viáveis, ou seja, um extremo do conjunto X.

Vejamos agora um resultado conhecido como *Teorema Fundamental da Programação Linear*, que justifica o uso do método Simplex:

Teorema 4.7 Dado um modelo de programação linear na forma padrão:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & c^T x \\ \text{sujeito a:} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

onde A é uma matriz $m \times n$ de ordem m, com $m > n$, temos que:

i) Se houver uma solução viável, há uma solução básica viável;

ii) Se houver uma solução viável ótima, há uma solução básica viável ótima.

Demonstração 4.8 Ver em Luenberger e Ye (2008, p. 38 – 40).

Geometricamente, pode-se interpretar esse teorema da seguinte forma: se $c^T x$ assume um valor mínimo (máximo) na região viável, este valor mínimo (máximo) será assumido num vértice. A demonstração deste fato pode ser encontrada em Nocedal e Wright (2006, p. 365 – 366).

4. 1. 1 Abordagem Geométrica

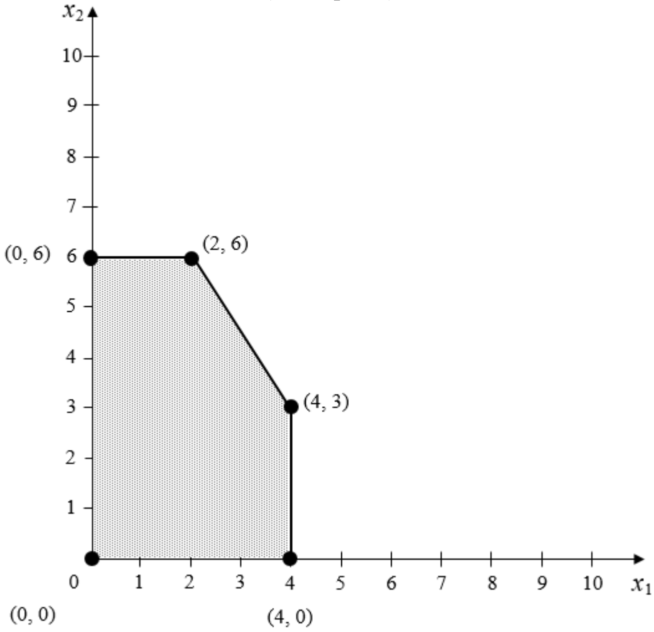
As abordagens geométrica e algébrica são interessantes para a compreensão do Método Simplex. Geometricamente, a ideia básica do Método Simplex é mover-se de vértice em vértice, isto é, de solução básica viável a outra solução básica viável até determinar uma solução ótima, o que é justificado pelo resultado do Teorema 3.2 (p. 47), o qual chama os vértices de pontos extremos.

Exemplo 3: Resolução do problema da Wyndor Glass – Método Simplex Geométrico

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito a:} & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ \text{e} & x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0. \end{array}$$

Para iniciar a aplicação do método, toma-se uma das soluções viáveis de pontos extremos, que nada mais são do que os vértices que delimitam a região viável do gráfico na solução de um problema. Do exemplo 1, temos que os pontos (0, 0), (0, 6), (2, 6), (4, 3) e (4, 0) seriam as soluções viáveis em pontos extremos, conforme a Figura 11 a seguir:

Figura 11 – Região viável com vértices
(Exemplo 3)



O Teorema 4.9 é de extrema importância, pois permite estabelecer um critério de parada para o Método Simplex, em qualquer uma de suas formas.

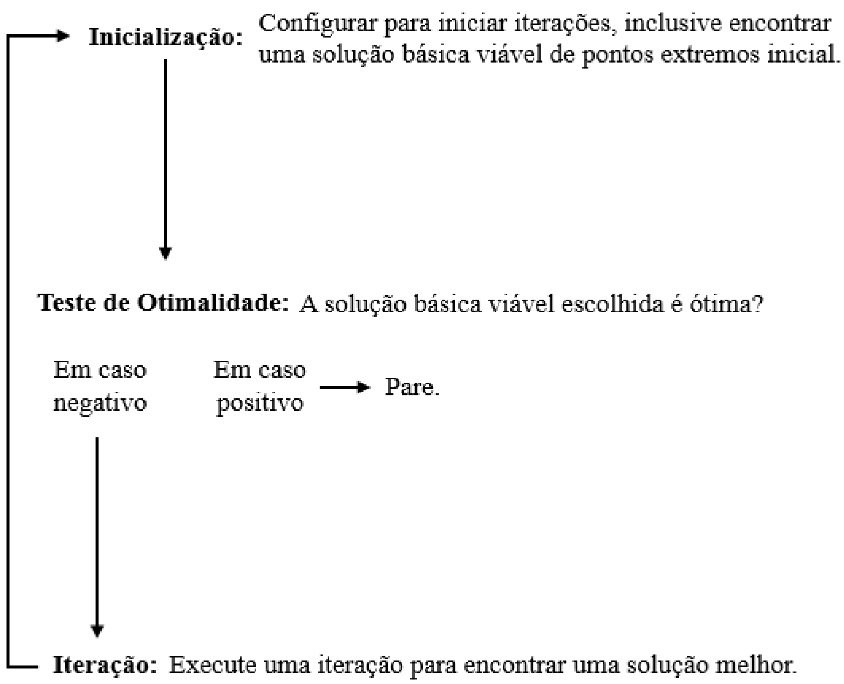
Teorema 4.9 *Considerando um problema de programação linear na forma padrão (P), se houver uma solução básica viável tal que nenhuma outra solução básica viável adjacente seja melhor (no sentido de que aumenta o valor da função-objetivo), então não há nenhuma solução viável melhor*.

Demonstração 4.10 ver Hillier e Lieberman (2006, p. 174 – 176).

Dessa maneira, escolhendo-se um dos pontos representados na Figura 11, aplica-se o teste de otimalidade, isto é, a verificação se o ponto escolhido representa a solução ótima do problema. Uma das formas de realizar essa ação em problemas de maximização é determinando-se valor de $Z = 3x_1 + 5x_2$ no ponto (x_1, x_2) escolhido e, em seguida, realizar o mesmo procedimento nos dois pontos extremos adjacentes. Caso o resultado do ponto escolhido seja maior, achou-se a solução ótima. Percebe-se que, assim, não há necessidade de se analisar todas as demais soluções viáveis em pontos extremos, reduzindo-se o custo computacional do método. No caso desse problema da Wyndor Glass, já sabemos, por meio do exemplo 1, que a solução ótima é (2, 6). Os dois vértices adjacentes são representados pelos pontos (0, 6) e (4, 3). Como a função-objetivo pode ser representada por $Z = 3x_1 + 5x_2$, no ponto (0, 6), temos, $Z = (3 \cdot 0) + (5 \cdot 6) = 30$ e, no ponto (4, 3), temos$(3 \cdot 4) + (5 \cdot 3) = 12 + 15 = 27$. Logo, como no ponto escolhido (2, 6), temos (3 · 2) + (5 · 6) = 36, essa é a solução ótima, pois 36 > 30 e 36 > 27.

Pode-se perceber então até aqui que, "o método simplex é um algoritmo iterativo, ou seja, um procedimento sistemático para solução que fica repetindo uma série de passos, chamados de iteração, até que se chegue a um resultado desejado" (HILLIER; LIEBERMAN, 2006, p. 104 – 105). Ainda, baseando-se nesses autores, pode-se representar esse método iterativo por meio da seguinte estrutura:

Figura 12 – Fluxograma Simplex – Abordagem Geométrica.



4. 1. 2 Abordagem Algébrica

As variáveis básicas e não-básicas definidas no início dessa seção são fundamentais para o desenvolvimento do algoritmo do método simplex nas formas algébrica e tabular. Nessas duas abordagens, sempre que o problema apresentar desigualdades nas restrições, será necessário o artifício para introduzir as variáveis de folga. A cada iteração, uma variável não-básica deve ser escolhida para entrar na base (tornando-se variável básica) e consequentemente, uma das variáveis básicas deve ser escolhida para sair da base (tornando-se variável não-básica).

Em relação a abordagem algébrica, pode-se seguir os seguintes passos para a resolução dos problemas:

1. *Colocar o problema na forma padrão: para isso, deve-se adotar os procedimentos já vistos na seção 2.1.*
2. *Encontrar uma solução básica viável inicial. Reescrever a função-objetivo em relação às variáveis não-básicas.*
3. *Fazer o Teste de otimalidade: Para determinar se o valor atual é máximo, basta avaliar os coeficientes da função-objetivo. Coeficientes positivos para variáveis não-básicas permitem aumentar o valor da função-objetivo, caso contrário isso não é possível.*
   Se essa solução for ótima, pare. Caso não seja, siga para o próximo passo.
4. *Definir a variável não-básica que deverá entrar na base: escolhe-se a variável com maior coeficiente.*
5. *Definir a variável básica que deverá sair da base: aumenta-se o valor da variável de entrada escolhida até que o valor de uma das variáveis básicas caia a zero, sendo esta a variável que sairá da base.*
6. *Com a nova solução básica viável, volte ao passo 3.*

Exemplo 4: Resolução do Problema da Wyndor Glass – Método Simplex Algébrico:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito a:} & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ \text{e} & x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0. \end{array}$$

Passo 1: A primeira etapa é converter as restrições funcionais de desigualdade em restrições de igualdade. Isso pode ser feito inserindo *variáveis de folga*. Na primeira restrição se $x_1 \leq 4$, então pode-se inserir uma variável x_3, tal que, $x_1 + x_3 = 4$, com $x_3 \geq 0$. Na segunda restrição, se $2x_2 \leq 12$, então pode-se inserir uma variável x_4, tal que, $2x_2 + x_4 = 12$, com $x_4 \geq 0$. Da mesma forma, a terceira restrição pode ser escrita como $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$. Assim, o modelo assume a forma:

$$\begin{array}{llllllll} \text{maximizar} & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito a:} & x_1 & & + x_3 & & & = & 4 \text{ (I)} \\ & & 2x_2 & & + x_4 & & = & 12 \text{ (II)} \\ & 3x_1 & + 2x_2 & & & + x_5 & = & 18 \text{ (III)} \\ \text{e:} \end{array}$$

$x_j \geq 0$, para $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Passo 2: Para obter uma solução básica viável inicial, observe que tomando $x_1 = x_2 = 0$, x_3, x_4 e x_5 são facilmente obtidos a partir das equações das restrições e temos o ponto (0, 0, 4, 12, 18) como solução básica viável inicial. Note que neste caso, as variáveis básicas serão x_3, x_4 e x_5.

Passo 3: Teste de otimalidade. A equação $Z = 3x_1 + 5x_2$ a zero, indica que aumentar tanto o valor de x_1 quanto de x_2 aumenta o valor da função-objetivo, assim, concluímos que é possível obter uma solução básica viável melhor.

Passo 4: Para definir uma nova solução básica viável, primeiramente será necessário que uma das variáveis não-básicas, se torne uma variável básica. Chamamos essa variável escolhida de *variável básica de entrada*. No caso da equação $Z = 3x_1 + 5x_2$, a variável escolhida será x_2, pois a melhor opção é aquela que apresentar o maior coeficiente.

Passo 5: Como, $x_1 = 0$, continua como variável não-básica, x_2 terá o valor ajustado. Como nenhuma variável pode ser negativa, temos:

(I) $x_1 + x_3 = 0 + 4 = 4$, (não há limite superior em função de x_2).

(II) $x_4 = 12 - 2x_2$ e $x_4 \geq 0$, logo $12 - 2x_2 \geq 0 \Rightarrow 12 \geq 2x_2 \Rightarrow x_2 \leq 6$.

(III) $x_5 = 18 - 3x_1 - 2x_2$ e $x_5 \geq 0$, logo $18 - (3 \cdot 0) - 2x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 9$.

Logo, o valor máximo a qual a variável de entrada x_2 pode assumir é 6. Assim, quando se aumenta x_2 a esse valor, a variável x_4 cai a zero. Diz-se então que x_4 será a *variável básica de saída*, pois passará a ser considerada agora como variável não-básica. Logo, assume o valor zero.

Passo 6: É preciso encontrar a nova solução básica viável, onde $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$. Analisando as equações oriundas das restrições, temos:

(III) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \Rightarrow (3 \cdot 0) + 2 \cdot 6 + x_5 = 18 \Rightarrow x_5 = 18 - 12 = 6$.

Logo, a solução básica viável será (0, 6, 4, 0, 6). Essa solução é ótima?

Para responder a essa questão, Z deverá estar em função das variáveis não-básicas atuais. No momento, são x_1 e x_4. Da segunda restrição, temos

(II) $2x_2 + x_4 = 12 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}x_4 + 6$.

Logo, $Z = 3x_1 + 5x_2 \Rightarrow Z = 3x_1 + 5 \cdot (-\frac{1}{2}x_4 + 6) \Rightarrow Z = 3x_1 - \frac{5}{2}x_4 + 30$.

Como o coeficiente de x_1 é positivo, a solução (0, 6, 4, 0, 6) não é ótima. Assim há outra solução para Z com resultado maior que $Z = 3 \cdot 0 - \frac{5}{2} \cdot 0 + 30 \Rightarrow Z = 30$.

Voltando ao Passo 4: Como o coeficiente de x_1 é o único positivo, dessa vez, toma-se x_1 como a variável de entrada.

Voltando ao Passo 5: Como, $x_4 = 0$, continua como variável não-básica, x_1 terá o valor ajustado. Como nenhuma variável pode ser negativa, temos:

(I) $x_1 + x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 4 - x_1 \Rightarrow 4 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 4$.

(II) $2x_2 + x_4 = 12$ (não há limite superior em função de x_1).

(III) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \Rightarrow x_5 = -3x_1 - (2 \cdot 6) + 18 = -3x_1 + 6 \Rightarrow -3x_1 + 6 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 2$.

Logo, o maior valor que a variável de entrada que x_1 pode assumir é 2. Quando isso ocorre, x_5 cai a zero, sendo assim, a variável básica de saída.

Voltando ao Passo 6: É preciso encontrar a nova solução básica viável, onde $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_4 = 0$ e $x_5 = 0$. Analisando as equações oriundas das restrições, temos:

(I) $x_1 + x_3 = 4 \Rightarrow 2 + x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 4 - 2 = 2$. Logo, a solução básica viável será (2, 6, 2, 0, 0). Essa solução é ótima?

Para responder a essa questão, Z deverá estar em função das variáveis não-básicas atuais, no momento, x_4 e x_5. Assim, temos:

(III) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \Rightarrow 3x_1 = -2x_2 - x_5 + 18 \Rightarrow 3x_1 = -(2 \cdot 6) - x_5 + 18 \Rightarrow 3x_1 = 6 - x_5 \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_5$.

Logo, $Z = 3x_1 - \frac{5}{2}x_4 + 30 \Rightarrow Z = 3 \cdot \left(2 - \frac{1}{3}x_5\right) - \frac{5}{2}x_4 + 30 \Rightarrow Z = -\frac{5}{2}x_4 - x_5 + 36$.

Finalmente, pode-se afirmar que como as variáveis não-básicas (x_4 e x_5) não apresentam coeficientes positivos e a solução (2, 6, 2, 0, 0) é ótima. O lucro máximo será, será, portanto, $Z = \left[\left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 0\right] - 0 + 36 = 36$.

Portanto, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ é a solução ótima do problema original.

4. 1. 3 Abordagem Tabular

Embora as abordagens geométrica e algébrica permitam uma compreensão mais clara do funcionamento do Método Simplex, é por meio da forma tabular que geralmente se resolvem manualmente problemas simples.

O Simplex Tabular trabalha com as informações do método algébrico concentradas numa tabela, a saber: *coeficientes das variáveis*, *constantes no lado direito das equações*, *além das variáveis básicas de entrada e saída*. Para aplicá-lo, pode-se seguir os mesmos passos do método algébrico:

1. *Colocar o problema na forma padrão: para isso, deve-se adotar os procedimentos já vistos na seção 2.1.*
2. *Encontrar uma solução básica viável inicial. Reescrever a função-objetivo em relação às variáveis não-básicas.*
3. *Fazer o Teste de otimalidade: Para determinar se o valor atual é máximo, basta avaliar a primeira linha numérica da tabela, onde consta os coeficientes função-objetivo. Coeficientes positivos para variáveis não-básicas permitem aumentar o valor da função-objetivo, caso contrário isso não é possível.*

   Se essa solução for ótima, pare. Caso não seja, siga para o próximo passo.
4. *Definir a variável não-básica que deverá entrar na base: escolhe-se a variável com maior coeficiente.*
5. *Definir a variável básica que deverá sair da base: no caso da abordagem tabular, o Teste da Razão Mínima é feito, dividindo, quando possível, os coeficientes da última coluna pelos correspondentes coeficientes da coluna pivô.*
6. *Com a nova solução básica viável, volte ao passo 3.*

Exemplo 5: Resolução do problema da Wyndor Glass – Método Simplex Tabular:

Passo 1: Introduzir as variáveis de folga, seguindo o mesmo procedimento usado na abordagem algébrica na resolução desse problema.

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{maximizar} & 3x_1 + 5x_2 & & & & & \\
\text{sujeito a:} & x_1 & & + x_3 & & & = 4 \text{ (I)} \\
 & & 2x_2 & & + x_4 & & = 12 \text{ (II)} \\
 & 3x_1 & + 2x_2 & & & + x_5 & = 18 \text{ (III)} \\
 & & & & & & \\
\text{e:} & x_j \geq 0, \text{ para } j = 1, 2, 3, 4, 5. & & & & &
\end{array}
$$

Passo 2: Encontrar uma solução básica viável inicial que pode ser realizada também da mesma forma já utilizada na abordagem algébrica, (0, 0, 4, 12, 18).

Passo 3: Como temos $3x_1 + 5x_2$ de função-objetivo inicial, a solução seria ótima, se, e somente se, todos os coeficientes das variáveis não-básicas da 1ª linha nesse novo formato forem não-positivos. Como os coeficientes de x_1 e x_2 são respectivamente 3 e 5, significa que há uma solução melhor que a atual.

Passo 4: Tomaremos x_2 como variável básica de entrada, pois tem o coeficiente maior.

Passo 5: A coluna em que se encontra essa variável escolhida (x_2), recebe o nome de *coluna pivô*.

Teste da razão mínima: Dividindo-se, quando possível, o termo do lado direito (independente) em cada linha pelo coeficiente correspondente da coluna pivô é possível para definir qual o valor que a variável de entrada deve assumir para que uma das variáveis básicas chegue a valor zero. Como o coeficiente ou número pivô é selecionado de acordo com a razão mínima positiva, evita-se a negatividade dos termos do lado direito nas equações de restrição.

Quadro 3 – Coluna pivô – Iteração 1

(Exemplo 5)

Variável Básica	**Equações**	**Coeficiente de:**						**Lado Direito**	**Razão**
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	F. Obj. (0)	1	3	5	0	0	0	0	
x_3	Restr. (I)	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	Restr. (II)	0	0	2	0	1	0	12	$\frac{12}{2} = 6$
x_5	Restr. (III)	0	3	2	0	0	1	18	$\frac{18}{2} = 9$

Ao calcular os dados da coluna Razão, aplica-se o teste da razão mínima, isto é, seleciona-se o número 6, pois esse é o valor que a variável de entrada escolhida no *Passo 4*, no caso x_2, deve assumir para que a variável básica que está na mesma linha, no caso x_4, caia a zero. Essa linha passa então a ser chamada de *linha pivô* e o contorno no formato retangular também será inserido nela para melhor identificação. O coeficiente de cruzamento da linha pivô com a coluna pivô é chamado de *coeficiente pivô*.

Quadro 4 – Linha, coluna e coeficiente pivô – Iteração I
(Exemplo 5)

Iteração	**Variável Básica**	**Equações**	**Coeficiente de:**						**Lado Direito**
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	Z	F. Obj. (0)	1	3	5	0	0	0	0
	x_3	Restr. (I)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	Restr. (II)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	Restr. (III)	0	3	2	0	0	1	18

Como a variável x_4 está na linha pivô e seu valor cai a zero, ela será a variável básica de saída.

Passo 6: Para achar uma solução básica viável são necessárias algumas operações as quais chamamos de **pivoteamento**. Isso pode ser feito da seguinte maneira:

1. Dividir cada coeficiente da linha pivô pelo número pivô, isso fará com que o coeficiente pivô torne-se igual a 1. Será definida então uma linha, na Iteração 1, que deverá substituir a anterior à qual será chamada de *nova linha da variável de entrada*.

Quadro 5 – Nova linha da variável de entrada – Iteração 1
(Exemplo 5)

Iteração	**Variável Básica**	**Equações**	**Coeficiente de:**						**Lado Direito**
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	Z	F. Obj. (0)	1	3	5	0	0	0	0
	x_3	Restr. (I)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	Restr. (II)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	Restr. (III)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	F. Obj. (0’)	1						
	x_3	Restr. (I’)	0						
	x_2	Restr. (II’)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	Restr. (III’)	0						

2. Determinar as novas linhas da Iteração 1, multiplicando-se um elemento da coluna pivô, com sinal invertido, por todos os elementos dessa nova linha da variável de entrada, somando-se cada resultado com o coeficiente da respectiva linha na iteração anterior. Se houver coeficiente zero na coluna pivô esses cálculos não serão necessários, pois os coeficientes dessa linha não sofrem alteração (multiplicação por zero). Isso fará com que todos os demais elementos da coluna pivô tornem-se iguais a 0.

Cálculos da Iteração 1 – Linha Função-Objetivo ($L_{0'}$), 5 é o coeficiente da coluna pivô. Logo, $L_{0'} = (5 \cdot L_{II'}) + L_0$.

- Coeficiente Z: $[(-5) \cdot 0] + 1 = 1$;
- Coeficiente x_1: $[(-5) \cdot 0] + 3 = 3$;
- Coeficiente x_2: $[(-5) \cdot 1] + 5 = 0$;
- Coeficiente x_3: $[(-5) \cdot 0] + 0 = 0$;
- Coeficiente x_4: $[(-5) \cdot \frac{1}{2}] + 0 = -\frac{5}{2}$;
- Coeficiente x_5: $[(-5) \cdot 0] + 0 = 0$;
- Coeficiente lado direito: $(5 \cdot 6) + 0 = 30$.

Cálculos da Iteração 1 – Linha Restrição III ($L_{III'}$): 2 é o coeficiente na coluna pivô. Logo, $L_{III'} = [(-2) \cdot L_{II'}] + L_{III}$.

- Coeficiente Z: $[(-2) \cdot 0] + 0 = 0$;
- Coeficiente x_1: $[(-2) \cdot 0] + 3 = 3$;
- Coeficiente x_2: $[(-2) \cdot 1] + 2 = 0$;
- Coeficiente x_3: $[(-2) \cdot 0] + 0 = 0$;
- Coeficiente x_4: $[(-2) \cdot \frac{1}{2}] + 0 = -1$;
- Coeficiente x_5: $[(-2) \cdot 0] + 1 = 1$;
- Coeficiente lado direito: $[(-2) \cdot 6] + 18 = 6$.

Quadro 6 – Iteração 1

(Exemplo 5)

Iteração	**Variável Básica**	**Equações**	**Coeficiente de:**						**Lado Direito**
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	Z	F. Obj. (0)	1	3	5	0	0	0	0
	x_3	Restr. (I)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	Restr. (II)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	Restr. (III)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	F. Obj. (0’)	1	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	Restr. (I’)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	Restr. (II’)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	Restr. (III’)	0	3	0	0	-1	1	6

Para definir a solução básica viável após a Iteração 1, basta analisar o Quadro 6, considerando x_2 com valor 6 (definida no *passo 5*) e x_1 e x_4 com valores iguais a zero, uma vez que nesse momento, são as variáveis não-básicas definidas nessa iteração. Restava calcular os valores de x_3 e x_5. Contudo, pelos coeficientes da Iteração 1, nota-se que a coluna Lado direito, aponta para os valores das variáveis básicas. Assim, $x_3 = 4$ e $x_5 = 6$.

Logo, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 6, 4, 0, 6)$ é a solução básica viável após a Iteração 1. Essa solução é ótima? Não, pois na Tabela Simplex ainda há um coeficiente positivo em uma das variáveis não-básicas na linha que corresponde à função-objetivo. Logo, em relação ao lucro máximo, pode-se afirmar que o valor é maior que $Z = 3x_1 - \frac{5}{2}x_4 + 30 \Rightarrow Z = 30$.

Voltando ao Passo 4: Tomaremos, agora, x_1 como variável de entrada, uma vez que, é o coeficiente positivo que persiste na função-objetivo.

Voltando ao Passo 5: Segundo os mesmos procedimentos da iteração anterior, o quadro a seguir apresenta os cálculos da nova coluna razão e a identificação da coluna, linha e coeficiente pivô.

Quadro 7 – Linha, coluna e coeficiente pivô – Iteração 2
(Exemplo 5)

Variável Básica	**Equações**	**Coeficiente de:**						**Lado Direito**	**Razão**
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	F. Obj. (0’)	1	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	30	
x_3	Restr. (I’)	0	1	0	1	0	0	4	$\frac{4}{1} = 4$
x_2	Restr. (II’)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	
x_5	Restr. (III’)	0	3	0	0	-1	1	6	$\frac{6}{3} = 2$

Como na Restrição (III), temos $3x_1 - x_4 + x_5 = 6$, analisando o teste da razão mínima nota-se que quando x_1 assume o valor 2, a variável x_5 cai a zero:

$3x_1 - x_4 + x_5 = 6 \Rightarrow 3 \cdot 2 - 0 + x_5 = 6 \Rightarrow x_5 = 6 - 6 = 0$.

Nesse caso, fica definida x_5 como a variável básica de saída.

Voltando ao Passo 6: Realiza-se então, a Iteração 2 de forma completa para definir uma nova solução básica viável.

1. Dividindo cada coeficiente da linha pivô pelo número pivô temos a nova linha da variável de entrada.

Quadro 8 – Nova linha da variável de entrada – Iteração 2
(Exemplo 5)

Iteração	**Variável Básica**	**Equações**	**Coeficiente de:**						**Lado Direito**
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	Z	F. Obj. (0)	1	3	5	0	0	0	0
	x_3	Restr. (I)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	Restr. (II)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	Restr. (III)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	F. Obj. (0’)	1	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	Restr. (I’)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	Restr. (II’)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	Restr. (III’)	0	3	0	0	– 1	1	6
2	Z	F. Obj. (0”)							
	x_3	Restr. (I”)							
	x_2	Restr. (II”)							
	x_1	Restr. (III”)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

2. Determinar as novas linhas da Iteração 2, usando o mesmo procedimento da Iteração 1.

Cálculos da Iteração 2 – Linha Função-Objetivo ($L_{0''}$): 3 é o coeficiente na coluna pivô. Logo, $L_{0''} = (3 \cdot L_{III''}) + L_{0'}$.

- Coeficiente Z: $[(-3) \cdot 0] + 1 = 1$;
- Coeficiente x_1: $[(-3) \cdot 1] + (-3) = 0$;
- Coeficiente x_2: $[(-3) \cdot 0] + 0 = 0$;
- Coeficiente x_3: $[(-3) \cdot 0] + 0 = 0$;
- Coeficiente x_4: $[(-3) \cdot -\frac{1}{3}] + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$;
- Coeficiente x_5: $[(-3) \cdot \frac{1}{3}] + 0 = 1$;
- Coeficiente lado direito: $(3 \cdot 2) + 30 = 36$.

Cálculos da Iteração 2 – Linha Restrição I ($L_{I''}$): 1 é o coeficiente na coluna pivô. Logo $L_{I''} = [(-1) \cdot L_{III''}] + L_{I'}$.

- Coeficiente Z: $[(-1) \cdot 0] + 0 = 0$;
- Coeficiente x_1: $[(-1) \cdot 1] + 1 = 0$;
- Coeficiente x_2: $[(-1) \cdot 0] + 0 = 0$;
- Coeficiente x_3: $[(-1) \cdot 0] + 1 = 1$;
- Coeficiente x_4: $[(-1) \cdot (-\frac{1}{3})] + 0 = \frac{1}{3}$;
- Coeficiente x_5: $[(-1) \cdot \frac{1}{3}] + 0 = -\frac{1}{3}$;
- Coeficiente lado direito: $[(-1) \cdot 2] + 4 = 2$.

Quadro 9 – Iteração 2

(Exemplo 5)

Iteração	**Variável Básica**	**Equações**	**Coeficiente de:**						**Lado Direito**
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	Z	F. Obj. (0)	1	3	5	0	0	0	0
	x_3	Restr. (I)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	Restr. (II)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	Restr. (III)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	F. Obj. (0')	1	3	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	Restr. (I')	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	Restr. (II')	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	Restr. (III')	0	3	0	0	– 1	1	6
2	Z	F. Obj. (0”)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	Restr. (I”)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	Restr. (II”)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	Restr. (III”)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Para definir a solução básica viável após a Iteração 2, basta analisar o Quadro 9, considerando a segunda e última colunas e tomando x_4 e x_5 com valores iguais a zero, uma vez que nesse momento, são as variáveis não-básicas, vamos ter $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 6, 2, 0, 0)$ como solução básica viável após a Iteração 2.

Essa solução é ótima? Sim, pois na Tabela Simplex não há mais nenhum coeficiente positivo na linha que corresponde à função-objetivo.

Logo, pela iteração 2, temos $Z + \frac{3}{2} x_4 + x_5 = 36 \Rightarrow Z = 36$.

Portanto, $x_1 = 2$ e $x_2 = 6$ otimizam o lucro $Z = 36$.

Exemplo 6: Resolução do problema da Fábrica de Móveis – Método Simplex Tabular

Vejamos mais uma situação-problema. Dessa vez, envolvendo maximização com 3 variáveis (adaptado de Sáez, 2004):

Uma fábrica de Móveis comercializa três produtos: mesa - Tipo A, mesa – Tipo B e cadeiras. A fabricação requer matérias-primas e mão de obra. A mão de obra se classifica em dois tipos: carpintaria e acabamento. A quantidade de recursos necessários para cada tipo de produto é apresentada no Quadro 13. Atualmente se dispõe de 48 tocos de madeira, 20 horas para acabamento e 8 horas para carpintaria. Cada mesa – Tipo A é vendida por US$ 60, cada mesa – Tipo B, a US$ 30 e cada cadeira a US$ 20. A empresa acredita que há demanda para os três produtos, mas acredita que vai ser vendido no máximo 5 mesas – Tipo B. Devido aos recursos que já foram adquiridos, a empresa quer maximizar seu lucro.

Quadro 10 – Informações de produção

(Exemplo 6)

Recursos	**Mesas – Tipo A**	**Mesas – Tipo B**	**Cadeiras**
Materiais (tocos de madeira)	8	6	1
Acabamento (horas)	4	2	1,5
Carpintaria (horas)	2	1,5	0,5

Quantas unidades de cada produto essa empresa deve produzir e qual o valor do máximo lucro que poderá obter nessas condições?

Pode-se considerar as seguintes variáveis:

x_1: quantidade de mesas – Tipo A produzidas;

x_2: quantidade de mesas – Tipo B produzidas;

x_3: quantidade de cadeiras produzidas;

Modelo:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{sujeito a:} & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \leq 20 \\
 & 2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 8 \\
 & x_2 \leq 5 \\
\text{e} & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

Passo 1: Introduzir as variáveis de folga:

maximizar $60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

sujeito a:

$$\begin{array}{lllllllll} 8x_1 & + 6x_2 & + x_3 & + x_4 & & & & = & 48 \text{ (I)} \\ 4x_1 & + 2x_2 & + 1{,}5x_3 & & + x_5 & & & = & 20 \text{ (II)} \\ 2x_1 & + 1{,}5x_2 & + 0{,}5x_3 & & & + x_6 & & = & 8 \text{ (III)} \\ & x_2 & & & & & + x_7 & = & 5 \text{ (IV)} \end{array}$$

e: $x_j \geq 0$, para j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7

Passo 2: Encontrar uma solução básica viável inicial. Tomando x_1, x_2 e x_3 como variáveis não-básicas (valores iguais a zero), obtemos facilmente a solução básica viável inicial (0, 0, 0, 48, 20, 8, 5).

Passo 3: Teste de otimalidade.

$Z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$. Como há coeficientes positivos na função-objetivo, a solução básica (0, 0, 0, 48, 20, 8, 5) é viável, mas não é ótima.

Passo 4: Tomaremos x_1 como variável básica de entrada, pois tem o coeficiente menor.

Passo 5: Definição da variável básica de saída. Inicialmente, vamos identificar a linha, coluna e coeficiente pivô, calculando antes a coluna Razão.

Quadro 11 – Linha, coluna e coeficiente pivô – Iteração 1

(Exemplo 6)

Variável Básica	**Equações**	**Coeficiente de:**								**Lado Direito**	**Razão**
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
Z	F. Obj. (0)	1	60	30	20	0	0	0	0	0	
x_4	Restr. (I)	0	8	6	1	1	0	0	0	48	$\frac{48}{8} = 6$
x_5	Restr. (II)	0	4	2	1,5	0	1	0	0	20	$\frac{20}{4} = 5$
x_6	Restr. (III)	0	2	1,5	0,5	0	0	1	0	8	$\frac{8}{2} = 4$
x_7	Restr. (IV)	0	0	1	0	0	0	0	1	5	

Aplicando-se o teste da razão mínima, identifica-se a linha da restrição (III) como a linha pivô. Assim, quando x_1 assume o valor 4, x_6 cai a zero, pois $2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + x_6 = 8 \Rightarrow (2 \cdot 4) + (1{,}5 \cdot 0) + (0{,}5 \cdot 0) + x_6 = 8 \Rightarrow x_6 = 0$. Portanto, x_6 será a variável básica de saída.

Passo 6: Encontrar uma nova solução básica viável. Realizando-se o processo de pivoteamento, temos os resultados das Quadro 12 a seguir:

Quadro 12 – Iteração 1

(Exemplo 6)

Iteração	**Variável Básica**	**Equações**	**Coeficiente de:**								**Lado Direito**
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	*Z*	F. Obj. (0)	1	60	30	20	0	0	0	0	0
	x_4	Restr. (I)	0	8	6	1	1	0	0	0	48
	x_5	Restr. (II)	0	4	2	1,5	0	1	0	0	20
	x_6	Restr. (III)	0	2	1,5	0,5	0	0	1	0	8
	x_7	Restr. (IV)	0	0	1	0	0	0	0	1	5
1	*Z*	F. Obj. (0')	1	0	– 15	5	0	0	– 30	0	240
	x_4	Restr. (I')	0	0	0	– 1	1	0	– 4	0	16
	x_5	Restr. (II')	0	0	– 1	0,5	0	1	– 2	0	4
	x_1	Restr. (III')	0	1	0,75	0,25	0	0	0,5	0	4
	x_7	Restr. (IV')	0	0	1	0	0	0	0	1	5

Para definir a solução básica viável após a Iteração 1, basta analisar o Quadro 12, onde temos $x_1 = 4$, $x_4 = 16$, $x_5 = 6$ e $x_7 = 5$, sendo $x_2 = x_3 = x_6 = 0$, uma vez que nesse momento, são as variáveis não-básicas definidas nessa iteração. Assim, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (4, 0, 0, 16, 6, 0, 5)$ é a solução básica viável após a Iteração 1.

Essa solução é ótima? Não, pois na Tabela Simplex ainda há um coeficiente positivo em uma das variáveis não-básicas na linha que corresponde à função-objetivo. Logo, em relação ao lucro máximo, pode-se afirmar que o valor é maior que 240.

Voltando ao Passo 4: Tomaremos, agora, x_3 como variável básica de entrada, uma vez que, é o coeficiente positivo que persiste na função-objetivo.

Passo 5: Segundo os mesmos procedimentos da iteração anterior, o quadro a seguir apresenta os cálculos da nova coluna razão e a identificação da coluna, linha e coeficiente pivô.

Quadro 13 – Coluna pivô – Iteração 2

(Exemplo 6)

Variável Básica	Equações	Coeficiente de:								Lado Direito	Razão
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
Z	F. Obj. (0')	1	0	– 15	5	0	0	– 30	0	240	
x_4	Restr. (I')	0	0	0	– 1	1	0	– 4	0	16	
x_5	Restr. (II')	0	0	– 1	0,5	0	1	– 2	0	4	$\frac{4}{0,5} = 8$
x_1	Restr. (III')	0	1	0,75	0,25	0	0	0,5	0	4	$\frac{4}{0,25} = 16$
x_7	Restr. (IV')	0	0	1	0	0	0	0	1	5	

Aplicando-se o teste da razão mínima, identifica-se a linha da restrição (II) como a linha pivô. Assim, quando x_3 assume o valor 8, x_5 cai a zero, pois $– x_2 + 0,5x_3 + x_5 – 2x_6 = 4 \Rightarrow – 0 + (0,5 \cdot 8) + x_5 – (2 \cdot 0) = 4 \Rightarrow x_5 = 0$. Portanto, x_5 será a variável básica de saída.

Voltando ao Passo 6: Encontrar uma nova solução básica viável. Realizando-se o pivoteamento, temos a Quadro 14 a seguir:

Quadro 14 – Nova linha da variável de entrada – Iteração 2

(Exemplo 6)

Iteração	Variável Básica	Equações	Coeficiente de:								Lado Direito
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	Z	F. Obj. (0)	1	60	30	20	0	0	0	0	0
	x_4	Restr. (I)	0	8	6	1	1	0	0	0	48
	x_5	Restr. (II)	0	4	2	1,5	0	1	0	0	20
	x_6	Restr. (III)	0	2	1,5	0,5	0	0	1	0	8
	x_7	Restr. (IV)	0	0	1	0	0	0	0	1	5
1	Z	F. Obj. (0')	1	0	– 15	5	0	0	– 30	0	240
	x_4	Restr. (I')	0	0	0	– 1	1	0	– 4	0	16
	x_3	Restr. (II')	0	0	– 1	0,5	0	1	– 2	0	4
	x_1	Restr. (III')	0	1	0,75	0,25	0	0	0,5	0	4
	x_7	Restr. (IV')	0	0	1	0	0	0	0	1	5
2	Z	F. Obj. (0”)	1	0	– 5	0	0	– 2,5	– 10	0	280
	x_4	Restr. (I”)	0	0	– 2	0	1	0,5	– 8	0	24
	x_3	Restr. (II”)	0	0	– 2	1	0	0,5	– 4	0	8
	x_1	Restr. (III”)	0	1	1,25	0	0	–0,125	1,5	0	2
	x_7	Restr. (IV”)	0	0	1	0	0	0	0	1	5

Para definir a solução básica viável após a Iteração 2, basta analisar o Quadro 14, onde temos $x_1 = 2$, $x_3 = 8$, $x_4 = 24$ e $x_7 = 5$, sendo $x_2 = x_5 = x_6 = 0$, uma vez que nesse momento, são as variáveis não-básicas definidas nessa iteração. Assim, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (2, 0, 8, 24, 0, 0, 5) é a solução básica viável após a Iteração 2.

Essa solução é ótima? Sim, pois na Tabela Simplex não há mais nenhum coeficiente positivo nas variáveis não-básicas na linha que corresponde à função-objetivo.

Portanto, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 8$ otimizam o lucro $Z = 280$, ou seja, para obter esse lucro, essa Fábrica de Móveis deve produzir 2 mesas – Tipo A e 8 cadeiras com o material já adquirido.

Exemplo 7: Resolução do problema da Alumilâmina S.A. – Método Simplex Tabular

Vejamos agora a resolução do problema da Alumilâmina, por meio da forma Tabular do Simplex, já com modelo matemático definido e resolvida pelo método gráfico na seção 2.1. Essa é uma situação relacionada a minimização e envolve duas variáveis de decisão:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & 100x_1 + 200x_2 \\
\text{sujeito a:} & 8x_1 + 2x_2 \geq 16 \\
 & x_1 + x_2 \geq 6 \\
 & 2x_1 + 7x_2 \geq 28. \\
\text{e} & x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Passo 1: Introduzir as variáveis de folga e alterar a função minimizar para maximizar:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & C = 100x_1 + 200x_2 \\
\text{maximizar} & C' = -100x_1 - 200x_2 \\
\text{Sujeito a:} & \begin{array}{rrrrrcl}
8x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & = & 16 \text{ (I)} \\
x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = & 6 \text{ (II)} \\
2x_1 & +7x_2 & & & -x_5 & = & 28 \text{ (III)}
\end{array} \\
\text{e:} & x_j \geq 0, \text{ para } j = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{array}
$$

O leitor atento irá perceber que não podemos multiplica por (– 1) as equações oriundas das restrições afim de determinar as variáveis básicas, pois isto tornaria o lado direito das equações negativos, obtendo, desta maneira, o ponto (0, 0, – 16, – 6, – 28) que não é viável, não garantindo, assim, a convergência do Método Simplex.

Passo 2: Com esse problema, observamos e também podemos constatar pela Figura 10, que o ponto (0,0) não pertence à região viável. Logo, não se pode configurar as variáveis x_1 e x_2 para o valor zero. Assim, é necessário realizar algumas vezes consecutivamente o teste da razão mínima com os dados das linhas referentes às restrições para definir, quais dessas cinco variáveis, x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5, são as três que inicialmente ocupam a posição de variáveis básicas para que o algoritmo do Método Simplex possa ser executado. Inicialmente trabalha-se somente com as linhas referentes às restrições, até que as variáveis básicas e não-básicas sejam definidas.

Quadro 15 – Dados do problema
(Exemplo 7)

Equações	**Coeficiente de:**						**Lado Direito**
	C'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
F. Obj.	1	– 100	– 200	0	0	0	0
Restr. (I)	0	8	2	– 1	0	0	16
Restr. (II)	0	1	1	0	– 1	0	6
Restr. (III)	0	2	7	0	0	– 1	28

- *Definição da 1ª variável básica:* dividindo-se os coeficientes independentes do lado direito pelos coeficientes positivos da sua respectiva linha nas restrições, temos o teste da razão mínima:
  - Restrição (I): 16 : 8 = 2 (x_1) e 16 : 2 = 8 (x_2).
  - Restrição (II): 6 : 1 = 6 (x_1 e x_2).
  - Restrição (III): 28 : 2 = 14 (x_1)   28 : 7 = 4 (x_2).

  Como a razão mínima resultou em 2, temos a seguinte linha, coluna e número pivô:

Quadro 16 – Linha, coluna e coeficiente pivô – 1ª variável básica
(Exemplo 7)

Equações	**Coeficiente de:**						**Lado Direito**
	C'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Restr. (I)	0	8	2	– 1	0	0	16
Restr. (II)	0	1	1	0	– 1	0	6
Restr. (III)	0	2	7	0	0	– 1	28

Realizando-se o pivoteamento, temos:

Quadro 17 – Pivoteamento – 1ª variável básica
(Exemplo 7)

Equações	Coeficiente de:						Lado Direito
	C'	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	
Restr. (I)	0	8	2	– 1	0	0	16
Restr. (II)	0	1	1	0	– 1	0	6
Restr. (III)	0	2	7	0	0	– 1	28
Restr. (I')	0	1	0,25	– 0,125	0	0	2
Restr. (II')	0	0	0,75	0,125	– 1	0	4
Restr. (III')	0	0	6,5	0,25	0	– 1	24

Logo, x_1 é a primeira variável definida como básica.

- *Definição da 2ª variável básica:* desconsiderando a coluna x_1 (pois já está definida como básica) prosseguimos com o teste a razão mínima, dividindo-se os coeficientes independentes do lado direito pelos coeficientes positivos da sua respectiva linha nas restrições, temos:
  - Restrição (I): 2 : 0,25 = 8 (x_2).
  - Restrição (II): 4 : 0,75 = $5,\overline{3}$ (x_2), 4 : 0,125 = 32 (x_3).
  - Restrição (III): 24 : 6,5 ≅ 3,69 (x_2) 24 : 0,25 = 96 (x_3).

  Como a razão mínima resultou em aproximadamente 3,69, temos o Quadro 18 a seguir:

Quadro 18 – Linha, coluna e coeficiente pivô – 1ª variável básica
(Exemplo 7)

Equações	Coeficiente de:						Lado Direito
	C'	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	
Restr. (I)	0	8	2	– 1	0	0	16
Restr. (II)	0	1	1	0	– 1	0	6
Restr. (III)	0	2	7	0	0	– 1	28
Restr. (I')	0	1	0,25	– 0,125	0	0	2
Restr. (II')	0	0	0,75	0,125	– 1	0	4
Restr. (III')	0	0	6,5	0,25	0	– 1	24

Realizando-se o pivoteamento, temos (coeficientes decimais foram aproximados):

Quadro 19 – Pivoteamento – 2ª variável básica

(Exemplo 7)

Equações	Coeficiente de:						Lado Direito
	C'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Restr. (I)	0	8	2	– 1	0	0	16
Restr. (II)	0	1	1	0	– 1	0	6
Restr. (III)	0	2	7	0	0	– 1	28
Restr. (I')	0	1	0,25	– 0,125	0	0	2
Restr. (II')	0	0	0,75	0,125	– 1	0	4
Restr. (III')	0	0	6,5	0,25	0	– 1	24
Restr. (I")	0	1	0	–0,13462	0	0,03846	1,07692
Restr. (II")	0	0	0	0,09615	– 1	0,11538	1,23077
Restr. (III")	0	0	1	0,03846	0	–0,15385	3,69231

Logo, x_2 é a segunda variável definida como básica.

- *Definição da 3ª variável básica:* desconsiderando as colunas x_1 e x_2 (pois já foram definidas como básicas) prosseguimos com o teste a razão mínima, dividindo-se os coeficientes independentes do lado direito pelos coeficientes positivos da sua respectiva linha nas restrições, temos:
  - Restrição (I): 1,07692 : 0,03846 = 28 (x_5).
  - Restrição (II): 1,23077 : 0,09615 = 12,8 (x_3) e 1,23077 : 0,11538 = $10,\overline{6}$ (x_5).
  - Restrição (III): 3,69231 : 0,03846 = 96 (x_3) e 24 : 0,25 = 96 (x_3).

Como a razão mínima resultou em aproximadamente $10,\overline{6}$ (x_5), temos a seguinte linha, coluna e número para novo pivoteamento:

Quadro 20 – Linha, coluna e coeficiente pivô – 3ª variável básica

(Exemplo 7)

Equações	**Coeficiente de:**						**Lado Direito**
	C'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Restr. (I)	0	8	2	– 1	0	0	16
Restr. (II)	0	1	1	0	– 1	0	6
Restr. (III)	0	2	7	0	0	– 1	28
Restr. (I')	0	1	0,25	– 0,125	0	0	2
Restr. (II')	0	0	0,75	0,125	– 1	0	4
Restr. (III')	0	0	6,5	0,25	0	– 1	24
Restr. (I")	0	1	0	–0,13462	0	0,03846	1,07692
Restr. (II")	0	0	0	0,09615	– 1	0,11538	1,23077
Restr. (III")	0	0	1	0,03846	0	–0,15385	3,69231

Realizando-se o pivoteamento, temos (coeficientes decimais foram aproximados para facilitar a visualização):

Quadro 21 – Pivoteamento – 3ª variável básica

(Exemplo 7)

Equações	**Coeficiente de:**						**Lado Direito**
	C'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Restr. (I)	0	8	2	– 1	0	0	16
Restr. (II)	0	1	1	0	– 1	0	6
Restr. (III)	0	2	7	0	0	– 1	28
Restr. (I')	0	1	0,25	– 0,125	0	0	2
Restr. (II')	0	0	0,75	0,125	– 1	0	4
Restr. (III')	0	0	6,5	0,25	0	– 1	24
Restr. (I")	0	1	0	–0,13462	0	0,03846	1,07692
Restr. (II")	0	0	0	0,09615	– 1	0,11538	1,23077
Restr. (III")	0	0	1	0,03846	0	–0,15385	3,69231
Restr. (I'")	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	0	$\frac{4}{6}$
Restr. (II'")	0	0	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{52}{6}$	1	$\frac{64}{6}$
Restr. (III'")	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{8}{6}$	0	$\frac{32}{6}$

Logo, x_5 é a terceira variável definida como básica.

Como x_1, x_2 e x_5 serão as variáveis básicas iniciais, consequentemente, x_3 e x_4 serão as variáveis não-básicas inicias, cujos valores serão iguais a zero. De acordo com o último pivoteamento realizado no Quadro 16, nota-se que $x_1 = \frac{4}{6}$, $x_5 = \frac{64}{6}$ e $x_2 = \frac{32}{6}$.

Logo, para a solução básica viável inicial será $\left(\frac{4}{6}\ ,\ \frac{32}{6}, 0, 0, \frac{64}{6}\right)$.

Desenvolvendo a função-objetivo em relação às variáveis não-básicas, temos:

$C' = -\ 100x_1 - 200x_2 = 0 \Rightarrow C' = -\ 100 \cdot (\frac{1}{6}\ x_3 - \frac{2}{6}\ x_4 + \frac{4}{6}) - 200 \cdot (-\frac{1}{6}\ x_3 + \frac{8}{6}\ x_4 + \frac{32}{6}) = 0$

$\Rightarrow C' = +\ \frac{100}{6}\ x_3 - \frac{1400}{6}\ x_4 - \frac{7000}{6}.$

Quadro 22 – Iniciando a 1ª Iteração

(Exemplo 7)

Equações	**Coeficiente de:**						**Lado Direito**
	C'	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	
F. Obj. (0)	1	0	0	$\frac{100}{6}$	$-\frac{1400}{6}$	0	$-\frac{7000}{6}$
Restr. (I)	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	0	$\frac{4}{6}$
Restr. (II)	0	0	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{52}{6}$	1	$\frac{64}{6}$
Restr. (III)	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{8}{6}$	0	$\frac{32}{6}$

Passo 3: Teste de otimalidade. Como um dos coeficientes das variáveis não-básicas no lado esquerdo da 1ª linha é positivo, a solução $\left(\frac{4}{6}\ ,\ \frac{32}{6}, 0, 0, \frac{64}{6}\right)$ não é ótima.

Passo 4: Tomaremos x_3 como variável básica de entrada, pois é a variável que apresenta o coeficiente positivo.

Passo 5: Definição da variável básica de saída. Inicialmente, determina-se da coluna pivô (onde encontra-se x_2) e efetua-se os cálculos da coluna razão:

Quadro 23 – Coluna pivô – Iteração 1

(Exemplo 7)

Variável Básica	Equações	Coeficiente de:						Lado Direito	Razão
		C'	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**		
C'	F. Obj. (0)	1	0	0	$\frac{100}{6}$	$-\frac{1400}{6}$	0	$-\frac{7000}{6}$	
x_1	Restr. (I)	0	1	0	$\boxed{-\frac{1}{6}}$	$\frac{2}{6}$	0	$\frac{4}{6}$	
x_5	Restr. (II)	0	0	0	$\boxed{\frac{5}{6}}$	$-\frac{52}{6}$	1	$\frac{64}{6}$	$\frac{64}{6} : \frac{5}{6} = \frac{64}{5}$
x_2	Restr. (III)	0	0	1	$\boxed{\frac{1}{6}}$	$-\frac{8}{6}$	0	$\frac{32}{6}$	$\frac{32}{6} : \frac{1}{6} = 32$

Pelo teste da razão mínima, a linha pivô está na restrição (II). Logo, x_5 será a variável de saída e seu valor cai a zero, quando x_3 assume o valor $\frac{64}{5}$.

Quadro 24 – Linha, coluna e coeficiente pivô – Iteração 1

(Exemplo 7)

Iteração	Variável Básica	Equações	Coeficiente de:						Lado Direito
			C'	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	
0	C'	F. Obj. (0)	1	0	0	$\frac{100}{6}$	$-\frac{1400}{6}$	0	$-\frac{7000}{6}$
	x_1	Restr. (I)	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	0	$\frac{4}{6}$
	x_5	Restr. (II)	0	0	0	$\boxed{\frac{5}{6}}$	$-\frac{52}{6}$	1	$\frac{64}{6}$
	x_2	Restr. (III)	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{8}{6}$	0	$\frac{32}{6}$

Passo 6: Achar uma nova solução básica viável. Realizando-se o pivoteamento, temos:

Quadro 25 – Iteração 1

(Exemplo 7)

Iteração	Variável Básica	Equações	Coeficiente de:						Lado Direito
			C'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	C'	F. Obj. (0)	1	0	0	$\frac{100}{6}$	$-\frac{1400}{6}$	0	$-\frac{7000}{6}$
	x_1	Restr. (I)	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	0	$\frac{4}{6}$
	x_5	Restr. (II)	0	0	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{52}{6}$	1	$\frac{64}{6}$
	x_2	Restr. (III)	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{8}{6}$	0	$\frac{32}{6}$
1	C'	F. Obj. (0')	1	0	0	0	− 60	− 20	− 920
	x_1	Restr. (I')	0	1	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	2,8
	x_3	Restr. (II')	0	0	0	1	$-\frac{52}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{64}{5}$
	x_2	Restr. (III')	0	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	3,2

Para definir a solução básica viável após a Iteração 1, basta analisar o Quadro 25, considerando $x_3 = \frac{64}{5}$, $x_1 = 2{,}8$ e $x_2 = 3{,}2$. As variáveis não-básicas são $x_4 = x_5 = 0$. Assim, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2{,}8,\ 3{,}2,\ \frac{64}{5},\ 0,\ 0)$ é a solução básica viável após a Iteração 1.

Essa solução é ótima? Sim, pois na Tabela Simplex não há coeficientes positivos na linha que corresponde à função-objetivo.

Como $C' = -920 \Rightarrow C = -C' = 920$ e esse é o custo mínimo.

Logo, a fábrica de São Paulo (x_1) deverá operar 2,8 dias, enquanto que a fábrica do Rio de Janeiro (x_2) deverá operar 3,2 dias. O custo mínimo é para a Alumilâmina atender aos contratos formados é de R$ 920.000,00.

5. VIABILIDADE E ABORDAGEM PARA AULAS NO ENSINO MÉDIO

A Programação Linear tem sido abordada informalmente no Ensino Médio, embora por uma quantidade ainda ínfima de educadores, pois a grande maioria deles não estuda o tema durante a sua formação. O PROFMAT tem alavancado a abordagem do tema, pois, conforme descrito na Introdução desse trabalho, alguns professores que cursaram esse Programa de Mestrado têm voltado o tema de suas dissertações para essa área. Embora haja uma relação direta com diversos conteúdos da área de Matemática no Ensino Médio, no Brasil, a Programação Linear é tratada de maneira formal somente no currículo do Ensino Superior, em diversos cursos de Graduação.

Em Portugal, o Ensino Secundário engloba do 10º ao 12º ano e corresponde ao Ensino Médio no Brasil. Segundo Dias (2011, p. 5), "Reconhecido o potencial para a motivação dos alunos, este tema passa a ser obrigatório com os Programas de Matemática A e B para o 11º ano e 12º ano, respectivamente, homologados em 2002 e que entraram em vigor no ano letivo de 2004/2005".

O tema Programação Linear permite que sejam abordados todos os temas transversais, referidos nos Programas de Matemática, que se passa a mencionar:

- Comunicação Matemática;
- Aplicações e Modelação Matemática;
- História da Matemática;
- Lógica e Raciocínio Matemático;
- Resolução de Problemas e Atividades Investigativas;
- Tecnologia e Matemática.

> No programa de Matemática B para o 12º ano, o tema "Programação Linear" aparece como uma ferramenta de planejamento e gestão. [...]. O objetivo principal é familiarizar os alunos com situações de gestão, para que estes desenvolvam competências para tomar boas decisões em termos de planejamento. Como objetivos pretende-se que os estudantes sejam capazes de:
> - Reconhecer que diferentes situações podem ser descritas pelo mesmo modelo matemático;
> - Resolver numérica e graficamente problemas simples de programação linear;
> - Reconhecer o contributo da Matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações (SILVA et al. *apud* DIAS, 2011, p. 5 – 6).

A Programação Linear também está presente no Módulo B4 do Ensino Profissional em Portugal e as competências matemáticas que os alunos devem desenvolver estão listadas a seguir:

> - Aptidão para reconhecer as vantagens na escolha de referenciais, no uso das coordenadas e de condições para modelar situações e resolver problemas;

> - Aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para situações reais, em especial as de planejamento (produção ou outras);
> - Aptidão para reconhecer sobre os modelos os valores ótimos para cada situação e capacidade para tomar boas decisões;
> - Capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
> - Capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidados os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias;
> - Capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.
>
> Os objetivos de aprendizagem que se pretende que os alunos atinjam são os seguintes:
> - Utilizar sistema de coordenadas para obter equações e inequações que representem determinados lugares geométricos (retas e domínios planos);
> - Utilizar os estudos gráfico, numérico e analítico de funções afins, com resolução de equações e inequações;
> - Relacionar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das funções afins, bem como entre os sinais dos coeficientes e a monotonia;
> - Resolver numérica, graficamente e, com recurso a programas computacionais (na folha de cálculo), problemas de programação linear;
> - Abordar a história da programação linear como ferramenta de gestão e nos contextos da sua criação e desenvolvimento;
> - Resolver numérica, gráfica e algebricamente alguns sistemas de equações e inequações;
> - Utilizar a tecnologia e programas computacionais específicos para a gestão e planejamento;
> - Reconhecer a contribuição da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações;
> - Comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados (SILVA et al. *apud* DIAS, 2011, p. 6 – 7).

Portanto, pode-se notar a estreita relação da Programação Linear com conteúdos do Ensino Médio. As situações-problemas descritas nesse trabalho por meio dos exemplos 1 e 2, permitem a abordagem de assuntos como Plano Cartesiano, Ideia de Semi-Plano e demais conceitos geométricos, Equação da Reta, Representação Gráfica de uma Função Afim, Inequações e Equações, resolução de Sistemas Lineares com visualização gráfica de tais sistemas, contemplando as restrições e as regiões geradas por esse fator, entre outros assuntos. Uma sugestão de atividade está em utilizar modelos semelhantes como sondagem e análise de conhecimentos prévios sobre esses assuntos, apresentando aos alunos, situações interessantes e relativamente simples de resolver. No decorrer das aulas, o professor pode dar continuidade a aproximação dos alunos a situações desse tipo explorando-as para explicar conceitos e definições até que eles passem a resolver problemas dessa natureza.

Em relação aos exemplos 3 – 7 sobre o Método Simplex, há toda uma série de definições envolvidas e relacionada à Geometria Plana e Espacial, Matrizes e especialmente Sistemas Lineares, onde pode-se avaliar a viabilidade do sistema, o comportamento das variáveis em situações reais (adaptadas para o contexto escolar). Ao investigar Método Simplex em sua forma geométrica, algébrica e tabular é interessante aos alunos compreenderem a origem, o desenvolvimento e a relação entre os conteúdos.

Vale ressaltar também a importância da modelagem matemática em todos os exemplos abordados. Boa parte dos alunos e até professores, ao se depararem com um PPL de apenas duas variáveis, espantam-se ao perceber que o envolvimento de mais três variáveis de folga, torna a resolução mais prática no Simplex. Temos no Brasil, sim, diversos professores motivados, participando de cursos de formação continuada, buscando atualização e estratégias diferentes de mobilizar seus alunos para uma aprendizagem significativa. As diversas aplicações e relações com o cotidiano envolvendo maximização de custos e minimização de lucros, tendem a gerar aos Problemas de Programação Linear um potencial de motivação dos alunos.

Assim, esse trabalho propõe com os exemplos das seções anteriores, envolver Problemas de Programação Linear no contexto de Empreendedorismo aos alunos de 2ª e 3ª série do Ensino Médio. Segundo dados do SEBRAE em 2013, 254 professores foram capacitados, atendendo 7858 estudantes do ensino médio em todo o Brasil. Estima-se que 500 mil estudantes do Ensino Médio tenham sido atendidos no biênio 2014-2015 nas três soluções educacionais que compõem o portfólio do Programa Nacional de Educação Empreendedora do Sebrae: *Formação de Jovens Empreendedores*, *Despertar* e *Crescendo e Empreendendo*. Trata-se de temas muito relevantes para essa faixa etária de alunos, pois:

> A educação empreendedora para o Ensino Médio está estruturada com o objetivo de colaborar para o desenvolvimento integral dos jovens, procurando estimular o protagonismo juvenil, sensibilizar e preparar os estudantes para os desafios do mundo do trabalho, instigando-os a identificarem oportunidades e planejarem seu futuro por meio de atitudes empreendedoras.
>
> [...] Na Educação Empreendedora, não basta ensinar conteúdos técnicos ou apresentar ao estudante os muitos dilemas e desafios de nossa sociedade, estimulando-o a pensar caminhos de mudança. É necessário, efetivamente, capacitá-lo a construir esses caminhos por meio de ações concretas e tecnicamente embasadas que tenham efetiva capacidade transformadora e, sobretudo, o levem a aliar a teoria à prática.
>
> [...] Assim, a Educação Empreendedora é aquela que ajuda o estudante a enxergar e avaliar determinada situação, assumindo uma posição proativa frente a ela, capacitando-o a elaborar e planejar formas e estratégias de interagir com aquilo que ele passou a perceber (SEBRAE, 2017).

Pensando nesse contexto, seria interessante a elaboração de um projeto para que os estudantes desenvolvam ações de maximização ou minimização de situações ou planejem a criação de um produto projetando obter lucro máximo e/ou custo mínimo, tornando prático os assuntos estudados sobre PPL. Os alunos poderiam receber orientação sobre Educação Empreendedora e em seguida pensariam numa situação real de um negócio próprio, onde, e acordo com o ramo escolhido, definissem quais seriam as ações de otimização, podendo usar como base, as situações-problemas abordadas nesse trabalho.

Enfim, ao longo dos tempos é notável a dificuldade de muitos alunos em manter-se motivados a encontrar aplicações próximas, relevantes e significativas bem como a dificuldade de muitos professores em criar situações que modifiquem o comportamento e interesse desses jovens. Estudar Problemas de Otimização com foco em PPL simples no contexto da Educação Empreendedora pode ser uma boa alternativa.

6. CONCLUSÃO

A área de Pesquisa Operacional remete a um fazer matemático dinâmico e prático e com aplicações nas mais variadas áreas. Por meio do breve relato histórico contido nesse trabalho, pode-se ter uma noção da evolução desse tema com o passar do tempo e sua relevância nos dias atuais. Os estudos sobre Problemas de Otimização tendem a ser práticos e interessantes e o enfoque dado aos Problemas de Programação Linear foi imprescindível para delimitação do tema nesse trabalho.

O material produzido pelo Prof. Dr. Luiz Leduíno Salles Neto e publicado no ano de 2006 para a Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica da Universidade Federal Fluminense em Volta Redonda-RJ, introduz o tema Maximizando Lucros e Minimizando Perdas com uma linguagem simples e muito clara e, certamente, foi o material inspirador e o ponto de partida dessa dissertação. Assim, o presente trabalho trata de situações relativamente simples e interessantes de como maximizar e minimizar funções por meio dos Métodos Gráfico e Simplex. Para que não fosse utilizado somente o algoritmo do Método Simplex Tabular, foram inseridas primeiramente as abordagens geométrica e algébrica visando fundamentar melhor a compreensão.

Há vários anos, desde os Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio em 2000, a resolução de problemas tem sido abordada. Ações como identificar um problema, procurar, selecionar, interpretar informações, formular hipóteses e prever resultados, selecionar estratégias, interpretar e criticar resultados, fazer e validar conjecturas experimentando e recorrendo a modelos, discutir ideias e produzir argumentos convincentes, entre outras, não são novidades. Essas ações estão mantidas de forma implícita na Base Nacional Curricular Comum – Ensino Médio, que teve sua 2ª versão publicada em Abril/2016. O conteúdo desenvolvido nesse trabalho tem relação direta com essas ações e favorece, de forma acentuada, a análise crítica dos resultados obtidos, fato não muito comum, podendo ser estimulado especialmente pelo uso do Método Simplex.

As sugestões de viabilidade para aplicação do tema nas aulas no Ensino Médio contempla também um contexto de empreendedorismo buscando promover a resolução de Problemas de Programação Linear bem como incentivar o desenvolvimento da autonomia dos jovens com sugestão de um projeto de criação de produtos ou meios para otimizar situações. A abordagem do conteúdo e exemplos descritos nesse trabalho tem relação bem próxima no Ensino Médio com temas descritos no capítulo anterior.

Portanto, conclui-se que as expectativas em relação aos objetivos traçados inicialmente foram satisfatórias, não só em relação à resolução de Problemas de Programação Linear utilizando os Métodos Gráfico e Simplex, mas também como articular o texto de forma prática e direta possibilitando a compreensão dos métodos, promover a área de Pesquisa Operacional e suas aplicações e apresentar perspectivas para o ensino.

Para estudos futuros de continuidade sobre o assunto sugere-se temas como a ênfase de Programação Linear na Base Nacional Curricular Comum no Ensino Médio ou até mesmo projetos sobre Sustentabilidade relacionada a otimização de recursos naturais, entre outros.

Enfim, espera-se que, pela forma como o tema foi abordado e a clareza nas informações apresentadas que esse material sirva como uma boa possibilidade para a compreensão das aplicações de Pesquisa Operacional e resolução de Problemas de Programação Linear por parte de estudantes, em especial de alunos do Ensino Médio, bem como para qualquer pessoa que se interesse pelo tema apresentado nesse trabalho.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, R. C. de. **O Teorema Fundamental da Programação Linear e Modelagem Matemática no Ensino Médio**. São João del Rei: Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João del Rei, 2013.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ANDRADE, E. L. **Introdução à Pesquisa Operacional**: Métodos e Modelos para Análise de Decisão. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

BOLDRINI, J. L.; et al. **Álgebra Linear**. 3. Ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**. Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2000.

______. **Base Nacional Curricular Comum**. Proposta Preliminar. Segunda versão revista. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2016.

DANTZIG, G. B. **Linear Programming and Extensions**. Santa Monica, EUA: Princeton University Press – The RAND Corporation, 1963.

DIAS, M. A. F. **A Programação Linear no Ensino Secundário**. Aveiro-PT: Universidade de Aveiro, 2011.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear**: modelos e algoritmos. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. Tradução: Ariovaldo Griesi; Revisão Técnica: João Chang Júnior. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na tomada de decisões**: modelagem em excel. 3. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

LUENBERGER D. G.; YE, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. New York, USA: Springer, 2008.

LISBOA, E. F. A. **Pesquisa Operacional**. Apostila da disciplina. Rio de Janeiro, 2002.

MARINS, F. A. S. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: Cultura Acadêmica, Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2011.

MENEZES, M. A. F. **Programação Linear**. Goiânia: Universidade Católica de Goiás, Departamento de Computação, 2006.

MEYER, C. **O matemático nas empresas**. Revista Exame. [*on-line*]. Edição 0877. São Paulo: Abril, 2011. Disponível em <http://exame.abril.com.br/revista-exame/o-matematico-das-empresas-m0111601/>. Acesso em: 09.jan.2017.

NOCEDAL J. ; WRIGHT S. **Numerical Optimization.** New York, USA: Springer, 2006.

OLIVEIRA, A. C. M. de. **Modelos de Programação Linear**. São Luís: Universidade Federal do Maranhão, Departamento de Informática, 2005. Disponível em:< http://www.deinf.ufma.br/~acmo/grad/PO_c02_v2005.pdf>. Acesso em: 30.jan.2017.

PAVAN, A. R. **Caderno de Pesquisa Operacional** – Dom Alberto. Santa Cruz do Sul: Faculdade Dom Bosco, 2010.

SÁEZ, E. **Investigación de Operaciones 1 – Método Simplex**. In: Fundamentos de Investigación de Operaciones. Valparaíso, CHL: Universidad Tecnica Federico Santa Maria – Departamento de Informática, 2004. Disponível em: <https://www.inf.utfsm.cl/~esaez/fio/s2_2004/apuntes/simplex_s2_2004.pdf>. Acesso em: 15.jan.2017.

SALLES NETO, L. L. **Tópicos de Pesquisa Operacional para o Ensino Médio**. Curso de curta duração ministrado/Extensão. Rio de Janeiro. Volta Redonda: UFF, 2006.

SEBRAE. **A proposta de Educação Empreendedora do SEBRAE**. Disponível em : <https://sgcwem.pr.sebrae.com.br/PortalSebrae/sebraeaz/A-proposta-de-Educa%C3%A7%C3%A3o-Empreendedora-do-Sebrae>. Acesso em 15.jan.2017.

______. A Educação Empreendedora no Ensino Médio. Disponível em: <http://www.sebraepr.com.br/PortalSebrae/programas/Educa%C3%A7%C3%A3o-Empreendedora-no-Ensino-M%C3%A9dio>. Acesso em 15.jan.2017.

SILVA, E. M. da; URBANAVICIUS JÚNIOR, V. **Resolução de problemas de pesquisa operacional antes do surgimento dos softwares: uma abordagem sobre o algoritmo simplex**. In: XIII Encontro Latino Americano de Iniciação Científica e IX Encontro Latino Americano de Pós-Graduação – Universidade do Vale do Paraíba. São José dos Campos: UNIVAP, 2009. Disponível em <http://www.inicepg.univap.br/cd/INIC_2009/anais/arquivos/0089_0658_01.pdf >. Acesso em: 10.jan.2017.