COLEÇÃO PEDAGÓGICA

ENSINO DE MATEMÁTICA PARA OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:

ASPECTOS TEÓRICOS E PRÁTICOS

Claudete Cargnin
Natalia Neves Macedo Deimling
Cesar Vanderlei Deimling
Organizadores

EDUTFPR

ENSINO DE MATEMÁTICA PARA OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:

ASPECTOS TEÓRICOS E PRÁTICOS

COLEÇÃO PEDAGÓGICA

ENSINO DE MATEMÁTICA PARA OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:

ASPECTOS TEÓRICOS E PRÁTICOS

Claudete Cargnin
Natalia Neves Macedo Deimling
Cesar Vanderlei Deimling
Organizadores

Curitiba, 2024
EDUTFPR

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Ensino de matemática para os anos iniciais do ensino fundamental [recurso eletrônico] : aspectos teóricos e práticos / Organização: Claudete Cargnin, Natalia Neves Macedo Deimling, Cesar Vanderlei Deimling. -- Curitiba, PR : EDUTFPR, 2024.
1 arquivo texto (184 p.): il. PDF; 16,4 MB.

Modo de acesso: World Wide Web.
Disponível em formato PDF.
Título retirado da tela de abertura (visualizado em 02 mar. 2024).
eISBN 9788570142399
Inclui bibliografias.

1. Matemática - Estudo e ensino (Ensino fundamental). 2. Professores de matemática - Formação. 3. Número - Estudo e ensino (Ensino fundamental). 4. Matemática - Problemas, exercícios, etc. 5. Geometria - Estudo e ensino (Ensino fundamental). I. Cargnin, Claudete. II. Deimling, Natalia Neves Macedo. III. Deimling, Cesar Vanderlei. II. Título.

CDD: ed. 23 – 372.2

Departamento de Bibliotecas da Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Bibliotecário: Adriano Lopes CRB-9/1429

Design Maria Carolina Buhr, Giorgia Holzmann e Mateus Nicastro

Capa Letícia Aparecida Rubio

Revisão Amanda Baroni, Anna Morais, Daksha Lainequer Kohler, Isabella Amaral de Macedo, Maria Eduarda M. da Rosa Eufrasio, Maria Eduarda Pamponet, Maria Luisa Manrique, Miguel Afonso Martini, Paulo Augusto D. Varella Filho e Thais Prieto

Normalização Amanda Baroni, Anna Morais, Maria Eduarda Pamponet e Tatiana Campos da Hora Soares

EDUTFPR

Editora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Sete de Setembro, 3165
80230-901 Curitiba PR
utfpr.edu.br/editora
editora.utfpr.edu.br

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

APRESENTAÇÃO

Nos anos iniciais do ensino fundamental, a Matemática, enquanto unidade curricular, é desenvolvida por professores polivalentes, os quais, na sua grande maioria, são formados em cursos de Pedagogia que contemplam uma ou mais disciplinas sobre ensino de Matemática voltadas aos aspectos metodológicos, fundamentais para a compreensão didática do conteúdo, mas insuficientes para a compreensão mais ampla dos saberes a ele inerentes. Essa carência de conhecimentos específicos das diferentes unidades curriculares do ensino fundamental na formação inicial docente pode gerar alguns problemas no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que os professores acabam por resgatar os conhecimentos adquiridos ao longo da educação básica para abordar esses conteúdos em sala de aula, uma educação muitas vezes finalizada há anos, levando muitos professores a não se recordarem desses conteúdos ou não compreendê-los em sua necessária profundidade. Essa dificuldade pode levá-los à insegurança e à dependência de materiais didáticos pré-elaborados, ou mesmo à pesquisa em páginas da internet sem, contudo, uma análise crítica de seus conteúdos.

Essa discussão vai ao encontro do que discute a literatura sobre os elementos que compõem a base de conhecimento para a docência. Segundo Shulman (2005)[1], a docência tem como base muitos e diversificados conhecimentos. Com o objetivo de categorizá-los, o autor elaborou o que denomina de "base de conhecimento para a docência", composta por várias categorias que, sintetizadas, podem resultar em: conhecimento do conteúdo específico, conhecimento pedagógico geral e conhecimento pedagógico do conteúdo. Tal base de conhecimento consiste, segundo Mizukami (2004)[2], de um corpo de compreensões, saberes e disposições que são necessários para que o professor possa propiciar processos de ensinar e de aprender em diferentes áreas do saber, níveis, contextos e modalidades de ensino, envolvendo conhecimentos

1 SHULMAN, L. S. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. **Profesorado**: revista de currículum y formación del profesorado, Granada, v. 9, n. 2, p. 1-30, 2005.

2 MIZUKAMI, M. G. N. Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman. **Educação**, [*s. l.*], v. 29, n. 2, p. 33-50, 2004.

de diferentes naturezas, todos necessários e indispensáveis para a atuação profissional. Como aponta a autora, esta base tem início em cursos de formação inicial e se torna mais aprofundada, diversificada e flexível a partir da experiência profissional.

Assim, aliado aos demais elementos dessa base, o conhecimento específico torna-se fundamental para que o professor tenha domínio dos conceitos e noções básicas da disciplina que irá lecionar. Sem esse conhecimento por parte do professor, os conceitos inerentes ao saber específico poderão ser formulados pelos estudantes de maneira fragmentada. É importante ressaltar, contudo, que o domínio do conteúdo específico não é por si só suficiente para garantir a aprendizagem dos alunos, sendo necessária sua articulação com as demais categorias da base (Mizukami, 2004).

Considerando esses aspectos, e tendo em vista a carência apontada por muitos professores dos anos iniciais do ensino fundamental no que se refere ao conteúdo específico de Matemática em sua formação, organizamos o curso de formação continuada denominado "Ensino de Matemática no ensino fundamental: aspectos teóricos e práticos", oferecido a professores do primeiro ao quinto anos do ensino fundamental da rede pública municipal de educação de Campo Mourão, no estado do Paraná. O curso teve por objetivo, entre outros aspectos, possibilitar a esses professores a compreensão, análise e discussão de alguns dos principais tópicos de conteúdos de Matemática presentes no Planejamento Anual de Ensino Municipal em seus aspectos teóricos e práticos, bem como algumas sugestões de atividades para o trabalho com estes conteúdos nesta etapa da escolarização básica.

Este curso foi uma das ações desenvolvidas no âmbito do projeto de extensão universitária intitulado "Formação Continuada de Professores do Ensino Fundamental I: aspectos teóricos e práticos", tendo em vista contribuir com o enriquecimento do processo de formação e com a prática pedagógica de professores dos anos iniciais do ensino fundamental. Teve por objetivo elaborar, desenvolver e avaliar, em parceria com a Secretaria Municipal de Educação (SECED) de Campo Mourão, cursos/ações de formação continuada com professores do ensino fundamental I, a fim de que fosse possível acompanhar e proporcionar momentos de discussão e de troca de experiências entre esses profissionais, oferecendo-lhes subsídios teórico-práticos e sugestões para o trabalho com tópicos de conteúdos/disciplinas dessa etapa da escolarização básica, contribuindo para o seu desenvolvimento profissional docente.

O curso em questão foi oferecido em sete módulos ao longo do ano de 2019 e teve como ponto de partida as demandas formativas apresentadas pelos próprios professores, sujeitos desse processo de formação. A partir das demandas apontadas pelos docentes[3], e considerando os objetivos do projeto de extensão universitária, foram selecionados os principais tópicos de conteúdo para o curso. São esses tópicos abordados ao longo do processo de formação continuada que estão contemplados neste livro *Ensino de matemática para os anos iniciais do ensino fundamental: aspectos teóricos e práticos*, que reúne quatro capítulos produzidos por professores do Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Campo Mourão.

Assim, os temas aqui abordados e compilados fazem parte do arcabouço de conteúdos que devem ser trabalhados do primeiro ao quinto ano do ensino fundamental, os quais também estão contemplados na atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC) dessa etapa, indo além, todavia, do que este documento propõe[4]. Considerando as especificidades de cada ano, os conteúdos e atividades aqui propostos apresentam diferentes níveis de complexidade, a fim de que possa ser desenvolvido pelos professores de acordo com o nível/ano em que atua.

Todos os conteúdos e atividades propostas neste material foram tratados em seus aspectos teóricos e práticos, tendo em vista superar a dicotomia entre esses dois elementos indissociáveis da práxis pedagógica, bem como subsidiar os professores na compreensão mais ampla dos conteúdos de Matemática,

3 No segundo semestre de 2018 foi enviado aos professores, por intermédio da Secretaria Municipal de Educação de Campo Mourão, um questionário no qual os professores deveriam indicar suas necessidades formativas à respeito dos conteúdos específicos de Matemática trabalhados nos anos iniciais do ensino fundamental.

4 Ao abordar e valorizar os conceitos científicos e demais dimensões do conhecimento em seus aspectos teóricos e práticos, este livro propõe uma formação que ultrapasse o ensino e a aprendizagens por competências.

abordados em suas diferentes dimensões. Em cada unidade são também propostas algumas atividades que podem ser desenvolvidas nas escolas por professores e estudantes com materiais alternativos ou de baixo custo.

No primeiro capítulo, intitulado Números e Operações, é realizado um resgate histórico dos diferentes sistemas numéricos, enfatizando a diferença entre os termos algarismo, número e numeral. Também são definidos os conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais), diferenciando-os em um diagrama de Venn. Partindo dessa construção, embasada em uma vasta revisão da literatura, são disponibilizadas várias propostas de atividades e textos envolvendo as quatro operações fundamentais: soma, subtração, multiplicação e divisão. Ao final, são apresentadas algumas das inquietações docentes, frequentemente encontradas no contexto de sala de aula, bem como as sugestões que a literatura científica oferece para superá-las.

O segundo capítulo, denominado Frações e Operações, trata do conteúdo de Frações, relacionando-o com as quatro operações fundamentais. Inicialmente é oferecido ao leitor um resgate histórico sobre a origem do conceito de frações, seguido de uma vasta coleção de exemplos de aplicação em diferentes situações, bem como opções para leituras complementares de aprofundamento desse conteúdo. Finalizando o capítulo, são apresentados exemplos envolvendo material concreto — jogo de réguas de frações — e os algoritmos que possibilitam resolver as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de frações.

O terceiro capítulo, intitulado Geometria, inicia-se com a discussão sobre a história dessa área e apresenta o cenário de como esse tema tem sido tratado ao longo das últimas décadas nas escolas, em especial no ensino fundamental no Brasil. Com base na literatura científica, é conduzida uma discussão que, em resumo, aponta a indissociabilidade entre o ensino da geometria espacial tridimensional (3D) e a geometria plana bidimensional (2D). Na sequência, são apresentados vários exemplos de formas geométricas espaciais (cilindro, cone, cubo, pirâmide de diferentes bases, esfera, paralelepípedo e prisma) e de como planificar essas formas usando o software GeoGebra para se obter figuras planas que correspondam à superfície da envoltória desses volumes como o círculo, o quadrado, o triângulo, o trapézio, o hexágono, o pentágono, o paralelogramo e o losango. Por fim, é definida a caracterização das figuras planas quanto ao número de lados, número de ângulos e suas respectivas formas; o cálculo do perímetro e da área, além de apresentadas atividades baseadas em um recurso educacional, o geoplano, que, associado ao teorema de Pick, possibilita o cálculo da área de polígonos regulares.

No quarto e último capítulo, Resolução de Problemas, é conduzida uma discussão sobre a importância e as contribuições do método de resolução de problemas, diferenciando os termos exercício, problema e investigação, amplamente usados no processo de ensino-aprendizagem. Na sequência, são apresentados os principais passos utilizados na resolução de problemas, bem como as principais dificuldades que professores e alunos apresentam na resolução de problemas. Ao final, são discutidos exemplos envolvendo a resolução de problemas nos anos iniciais do ensino fundamental.

A despeito da diversidade de temas abordados, todos os capítulos deste material têm o mesmo objetivo: oferecer aos professores — e a quem mais possa interessar — mais um recurso didático ou paradidático que possa ser utilizado no ensino de Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. Todavia, é importante que sua utilização esteja associada a uma discussão abrangente e aprofundada sobre esses temas e à atuação mediadora do professor, uma vez que este recurso — ou qualquer outro —, por si só, não garante a aprendizagem desses conteúdos. Ao contrário, este material tem o potencial de ser utilizado como um dos muitos recursos disponíveis aos professores para a problematização dos conteúdos, tendo em vista sua relação indissociável com a prática humana e social.

Trata-se de um livro que, por ser elaborado a partir de um curso de formação continuada desenvolvido com os professores, parte dos desafios postos pela prática social para, a partir da reflexão, da discussão, da problematização e da instrumentalização, voltar-se a ela visando sua maior compreensão, reelaboração e transformação.

Sabemos que são muitos os desafios encontrados pelos docentes no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem nos diferentes contextos, níveis e modalidades de educação, bem como em todas as áreas do conhecimento. Todavia, entendemos que esses desafios não estão relacionados apenas a forma como o professor desenvolve os conteúdos em sala de aula, uma vez que essa forma depende, direta ou indiretamente, dos princípios e concepções, das finalidades e das condições objetivas e subjetivas que norteiam e permeiam a educação escolar. Entretanto, partindo do princípio de que a educação, ainda que elemento determinado, não deixa de influenciar o elemento determinante, consideramos que a forma como os conteúdos são desenvolvidos em sala de aula necessita igualmente ser ponderada no momento de análise desse processo, tendo em vista, também, a transformação das concepções, finalidades e condições que são postas ou impostas. Assim, se consideramos a necessidade de um ensino que vise à articulação entre teoria e prática, precisamos igualmente pensar em algumas das condições materiais que são necessárias para que tal articulação seja favorecida no âmbito do processo de ensino-aprendizagem.

Partindo desse princípio, esperamos que este material possa efetivamente contribuir enquanto recurso didático tanto para a formação quanto para a prática pedagógica docente na educação básica.

Natalia Neves Macedo Deimling
Cesar Vanderlei Deimling

Professores da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Campo Mourão.
Coordenadores do Projeto de extensão universitária “Formação Continuada de Professores do Ensino Fundamental I: aspectos teóricos e práticos”.

{01}
NÚMEROS E OPERAÇÕES

Claudete Cargnin*
Viviane Colucci Boromelo**
Cesar Vanderlei Deimling***
Natalia Neves Macedo Deimling****

"[...] a construção do sentido do número é um objetivo da educação matemática porque constitui um instrumento fundamental não só para se fazer matemática como para se aprender a pensar matematicamente"

(Biondo, 2017, p. 41).

* Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Mestre em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Especialista em Matemática e em Estatística Aplicada pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora titular da carreira Ensino Básico, Técnico e Tecnológico da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Campo Mourão.

** Mestre e licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora do Magistério Superior da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Campo Mourão. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em equações diferenciais.

*** Doutor e mestre em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Bacharelado e licenciado em Física pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Professor associado na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Campo Mourão. Atua no programa de Pós- Graduação em Ensino de Física – Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física. Membro do grupo local Network for Astronomy School Education (NASE) no Brasil.

**** Doutora em Educação, mestre em Educação Especial pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Licenciada em Pedagogia pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Professora associada da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Campo Mourão. Docente permanente do Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Ciências Humanas, Sociais e da Natureza (PPGEN) e líder do grupo de estudos Formação Docente e Práticas Pedagógicas da UTFPR.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo consiste em compilar informações relevantes para o trabalho com os números em sala de aula nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Partimos da importância crucial, do nosso ponto de vista, que os anos iniciais têm para o bom desempenho do estudante em Matemática no decorrer do seu percurso acadêmico e, deste modo, da necessidade de o professor refletir sobre os conteúdos matemáticos a ensinar e quais os reflexos desse ensino para os estudos seguintes.

Cientes da responsabilidade e comprometimento de cada educador com a qualidade do trabalho que desenvolve em sala de aula, queremos manifestar nossa admiração e, também, o desejo de contribuir com algumas possibilidades para enriquecer esse ofício.

O capítulo está organizado de modo a tratar de conhecimentos específicos sobre números, incluindo recursos didáticos e pesquisas acadêmicas referentes às dificuldades e procedimentos de ensino, nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Foi elaborado levando em consideração as demandas apresentadas por docentes dos anos iniciais em um projeto de formação docente do qual fizemos parte, em 2019.

A CONTAGEM E A REPRESENTAÇÃO DE NÚMEROS[1]

A arte de contar e registrar números é uma das mais antigas habilidades matemáticas de que temos evidências. No ensino, contudo, Pires *et al.* (2013, p. 122) alertam:

> [...] para que as crianças desenvolvam verdadeiramente o seu sentido de número, é fundamental que saibam não apenas escrever os numerais, recorrer à contagem de objetos ou reconhecer quantidades num determinado conjunto, mas também que compreendam, entre outros, o que indicam os numerais e conheçam as diferentes formas de os poderem representar e visualizar.

1 Há uma videoaula sobre esse tema disponível em: https://youtu.be/90g-Q5nYWnY.

Os primeiros sistemas de representação numérica[2] utilizavam marcas ou riscos para simbolizar os números. Com o tempo, as formas de representação de números foram se desenvolvendo e aprimorando. Um dos primeiros sistemas de numeração de que se tem notícia foi o egípcio, cerca de 3.400 a.C. Já por volta de 800 a.C. o sistema romano também já estava em uso. Melo (2016) ilustra os símbolos usados em diferentes sistemas (Figura 1).

Figura 1 – Diferentes sistemas de numeração

	Egípcio	Babilônio	Grego	Romano	Chinês	Maia
1	|	𒁹	I	I	一	•
2	||	𒁹𒁹	II	II	二	••
3	|||	𒁹𒁹𒁹	III	III	三	•••
4	||||	𒁹𒁹 𒁹𒁹	IIII	IV	四	••••
5	||| ||	𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹	Γ	V	五	—
6	||| |||	𒁹𒁹𒁹	ΓI	VI	六	• —
7	|||| |||	𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹 𒁹𒁹	ΓII	VII	七	•• —
8	|||| ||||	𒁹𒁹 𒁹𒁹 𒁹𒁹 𒁹𒁹	ΓIII	VIII	八	••• —
9	||||| ||||	𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹	ΓIIII	IX	九	•••• —
10	∩	𒌋	Δ	X	十	═
11	∩|	𒌋𒁹	ΔI	XI	十 一	• ═
12	∩||	𒌋𒁹𒁹	ΔII	XII	十二	•• ═
13	∩|||	𒌋𒁹𒁹𒁹	ΔIII	XIII	十三	••• ═
14	∩||||	𒌋𒁹𒁹 𒁹𒁹	ΔIIII	XIV	十 四	•••• ═
15	||| ∩||	𒌋𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹	ΔΓ	XV	十五	≡
16	||| ∩|||	𒌋𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹	ΔΓI	XVI	十六	• ≡
17	|||| ∩|||	𒌋𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹 𒁹𒁹	ΔΓII	XVII	十 七	•• ≡
18	|||| ∩||||	𒌋𒁹𒁹 𒁹𒁹 𒁹𒁹 𒁹𒁹	ΔΓIII	XVIII	十 八	••• ≡
19	||||| ∩||||	𒌋𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹	ΔΓIIII	XIX	十六	•••• ≡
20	∩∩	𒌋 𒌋	ΔΔ	XX	二十	• 𝋠

Fonte: Melo (2016, p. 1).

No sistema romano, bem como no egípcio, pode-se perceber a utilização de símbolos que eram utilizados para simplificar a escrita, por exemplo, o X no sistema de numeração romano seria utilizado para representar um grupo de dez vezes o I. O princípio da subtração também ficava evidente nos algarismos romanos, por exemplo, nas representações: IV = 4 e IX = 9. Embora o sistema de numeração romano seja bastante antigo, ainda hoje os números romanos podem ser encontrados em marcadores de relógio, ou na diferenciação de papas (Bento XVI), entre outros. Na página[3] do Clubes de Matemática da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) há uma aba de estudos destinada ao sistema de numeração romano que vale a pena conferir.

→ Quer saber mais sobre os números romanos?

https://www.youtube.com/watch?v=AqNwRxUq1bk

Os numerais gregos áticos podem ter sido usados por volta de 700 a.C. e eram utilizados de forma bem semelhante aos romanos. Esses três sistemas de numeração (romano, egípcio e grego) utilizavam o sistema de agrupamento simples, com a repetição de símbolos para representar a multiplicação, por exemplo, XX = 20, ou seja, 2 vezes 10, na numeração romana. Outros sistemas numéricos foram utilizados na história, como, por exemplo, os numerais sino-japoneses, por volta de 1.400 a.C. Uma curiosidade sobre esse sistema é que os números são escritos em posição vertical (Wall[4], 2014).

Os números hindu-arábicos, os que utilizamos atualmente, são denominados dessa forma porque tiveram origem na Índia, porém os árabes foram os responsáveis por transmiti-los à Europa. Uma forma de representação desses números foi introduzida pelos árabes na Espanha, por volta de 1.000 d.C., e

2 Um sistema de numeração é o "[...] conjunto dos símbolos utilizados para representar quantidades e das regras que definem a forma dessa representação" (OBMEP, 2005).

3 http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudos-sistema-de-numeracao-romano.

4 Esse autor apresenta um capítulo sobre contagem e registro de números com imagens dos símbolos usados em diversos sistemas de numeração.

eram muito semelhantes aos que utilizamos hoje. Melo (2016) sintetiza a evolução dos algarismos que usamos atualmente (Figura 2).

Figura 2 – Algarismos em uso atualmente

Fonte: Melo (2016).

Para aprofundar seu conhecimento sobre os sistemas de numeração, indicamos:

1. a dissertação de Felipe Andrade, *A criação dos números e sua evolução Matemática: de escrava à rainha das ciências*[5], que aborda, de maneira sucinta e objetiva, a história da evolução dos números, desde a representação por riscos (desenhos), até os dias atuais;
2. a página criada por alunos da prof. Olga Pombo, da Universidade de Lisboa, chamada de *6 formas de pensar os algarismos*[6], que apresenta um esboço da história dos algarismos das civilizações Suméria, Egípcia, Romana, Chinesa, Indiana e Árabe.

5 Disponível em: https://www.bdtd.uerj.br:8443/handle/1/4851.
6 Disponível em: https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/algarismos/introducao.htm.

A História da Matemática é uma tendência metodológica para o ensino de Matemática que tem muitos adeptos. Atualmente, há um grupo de trabalho[7] que envolve diversos pesquisadores discutindo o uso da História em ambientes de ensino. Em geral, os livros didáticos usados como referência nos anos iniciais trazem excertos de história da Matemática, como é o caso da Coleção *Ápis Matemática*, de Luiz Roberto Dante (Dante, 2017a, 2017b).

→ Àqueles que preferirem ver a história dos números em um filme, sugerimos **A história do número 1**, disponível no YouTube.

https://www.youtube.com/watch?v=3rijdn6L9sQ

A seguir, há o resumo do documentário.

> A História do Número 1 faz um passeio pela história da matemática tendo como personagem principal o número um. Esse representa o início de tudo, desde os primeiros registros simbólicos grafados em ossos para exprimir quantidades em uma sucessão de traços que permitia a contagem. Analisando os sumérios, o documentário atribui à sua representação do número um em cones de argila como responsável por possibilitar a representação da subtração e, assim, dar origem à aritmética. Sobre os algarismos hindu-arábicos, o documentário defende que seria mais correto denominá-los indianos, pois esses povos já utilizavam esse sistema algorítmico milhares de anos antes de Cristo, e os árabes, nesse processo, foram responsáveis por levá-los à Europa. Esses algarismos traziam uma novidade revolucionária: o número zero, o qual passa a dividir as atenções com o personagem principal do documentário. Como a representação do nada foi recebida pela sociedade europeia, e porque o uso do zero revolucionou a representação tanto de grandes quantidades quanto de muito pequenas são questões trabalhadas neste filme. Além disso, a obra analisa como os números um e zero se tornaram os responsáveis por uma das mais importantes revoluções do conhecimento humano: a informatização (Edu Doc, 2012).

7 Saiba mais em: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/grupo-de-trabalho/gt/gt-05.

Ifrah (2010) também traz, de forma sucinta, a história dos números e o raciocínio subjacente à sua evolução, desde a pré-história. Para os interessados, vale a pena a leitura.

Algarismo, número e numeral

Você já pensou na semelhança ou na diferença entre esses termos?

Embora muitas pessoas considerem esses termos como sinônimos, na verdade, eles não o são. Uma rápida pesquisa em um dicionário online, obtemos as definições apresentadas no Quadro 1:

Quadro 1 – Definições de algarismo, número e numeral

número (nú-me-ro)
sm
1. Cada elemento ou um conjunto de elementos do sistema numérico usado em contagem ou medição
2. Expressão de quantidade; soma: *"Os partidos de centro já perdem para o trabalhista em número de eleitores"* (EV).
3. Expressão indicativa de quantidade certa: O *dicionário precisa de um certo número de exemplos e abonações para os verbos.*

«Continuação na página seguinte»

algarismo (al-ga-ris-mo)
sm
[MAT] Sinal convencional com que se representam os números.

numeral (nu-me-ral)
adj m+f
1. Relativo a número.
2. Que representa um número.
adj m+f sm
[GRAM] Diz-se de ou classe de palavras de função quantificadora que expressa valor definido.

Fonte: Adaptado de Dicionário Michaelis ([200?]).

Uma das habilidades a ser desenvolvida na Educação Básica, segundo a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017), é a capacidade de argumentação. Assim, é importante que o professor questione seus alunos, mesmo que no início da escolarização, se ele já ouviu falar de número, numeral e algarismo, se, para ele, os três termos têm ou não mesmo significado, e assim por diante. Quanto mais o aluno interagir a respeito da Matemática, melhor poderá ser o estudo de Matemática no futuro.

Para que a criança, nos anos iniciais, construa adequadamente o conceito de número, é importante que ela se defronte com várias situações, pois como afirma Villas Bôas (2007, p. 34):

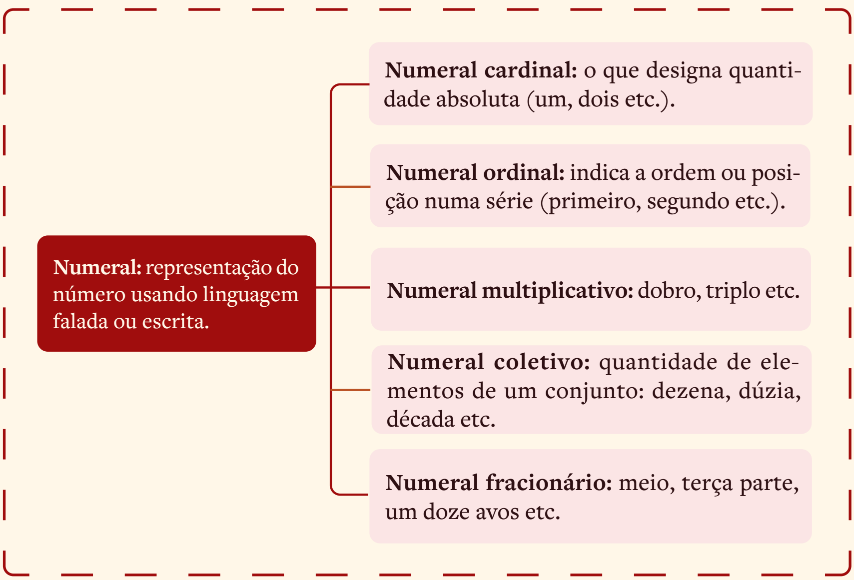
> A criança, desde o seu nascimento, está imersa num mundo cheio de signos aos quais vai aos poucos atribuindo significado, através de um esforço interpretativo, feito de tateios e avanços sucessivos. Entre estes, estão aqueles expressos por números que vão perdendo para ela seu caráter aleatório e expressando um sentido, seja ele social ou lógico-matemático.

De uma forma geral, podemos dizer que:

a) algarismo: são os símbolos utilizados para representação de números. Em nosso sistema de numeração de base 10, existem dez algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9;

b) número[8]: é um conceito (abstrato) associado a uma quantidade, uma grandeza, uma posição, uma medida, que representamos por um símbolo;
c) numeral: tudo o que é relativo a números. É classificado de acordo com a relação que representa. Por exemplo: numeral ordinal – primeiro, segundo, terceiro etc.; numeral multiplicativo – duplo, triplo etc. Isto é, podemos dizer que numeral é toda representação de um número, seja ela escrita ou falada (ou numérica). Veja a Figura 3.

Figura 3 – Classificação de numeral



Fonte: Autoria própria.

→ É importante frisar que essas palavras (algarismo, número e numeral) devem ser usadas dentro do contexto adequado.

8 No endereço: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/n%C3%BAmero/ há inúmeros contextos nos quais a palavra número aparece, inclusive para diferenciar nomes que envolvem a palavra número.

- O site https://escolakids.uol.com.br/matematica/diferencas-entre-numero-numeral-e-algarismo.htm traz imagens bastante ilustrativas para esses termos. Além disso, o professor pode explorar outros temas, inclusive de outras disciplinas. Vale a pena dar uma olhada.

- Já o site http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa7a.html, além de reforçar as diferenças, apresenta um pouco mais de história e reflexões.

Por que estamos falando desses aspectos (de diferenciação de termos)? Porque faz parte do ferramental teórico da matemática e, além disso, implica em melhor reflexão sobre o que é o número e quais os contextos que o envolve. A pesquisa de Nogueira e Barbosa (2008) revelou um dado interessante: crianças de seis anos usavam números fora da escola em vários contextos, mas não atribuíam significado àqueles que aprendiam na escola. Por que será? Será que essa ainda é a realidade de hoje?

OS NÚMEROS E A CONTAGEM NUMA PERSPECTIVA DO DESENVOLVIMENTO INFANTIL

A contagem não deve ser a única perspectiva de utilização do número a ser trabalhada na escola, especialmente nos anos iniciais. Nesse sentido, Nogueira e Barbosa (2008, p. 130) enfatizam:

> [...] no desenvolvimento do trabalho pedagógico, são considerados somente os aspectos utilitários tradicionais do número, tais como contar e medir, que não esgotam, absolutamente, os diferentes significados do número, tais como o de comunicar (tamanho da roupa, número do ônibus), prescrever (placas de rodovia, velocidade máxima permitida), ou localizar (livros numa biblioteca, poltronas num teatro) [...].

Mesmo com esse alerta, vamos apresentar algumas reflexões sobre a contagem. Inicialmente, uma pergunta a se fazer é: o que é contar (números)?

A partir dessa resposta, podemos imaginar ações para se trabalhar os números em sala de aula. Consideramos que contar é atribuir um símbolo a cada objeto de uma coleção (número natural).

A contagem é um esforço humano natural; crianças de dois ou três meses, por exemplo, já conseguem discriminar um objeto e dois objetos. Com 2 ou 3 anos, a criança já consegue comparar grupos maiores de objetos. Com 4 ou 5 anos, elas já começam a demonstrar um sentido mais aguçado de ordinalidade, ou seja, contam de forma sequencial, e começam a apresentar uma noção de cardinalidade, isto é, compreendem que o número de objetos contado pode ser expresso pelo último número falado na ordem da sequência de contagem. Veja a seguir um texto de Hersch *et al.* (2004 *apud* Wall, 2014, p. 30):

> Pedro, de 5 anos, está brincando com alguns carros quando chega a Sra. Jannat. Ela tem uma lata na mão e, ao se sentar ao lado dele no chão, pergunta: 'Você sabe o que tenho na lata?'. Pedro balança a cabeça e a Sra. Jannat diz: 'Balas'. Ela tira a tampa da lata e inclina o recipiente para Pedro, dizendo: 'Quantas você acha que tem?'. Pedro olha dentro da lata e, tocando cuidadosamente cada uma das balas enroladas em papel (não é uma tarefa fácil), ele conta, 'uma, duas, três, quatro, cinco, seis.' A Sra. Jannat sorri e derrama as balas no chão, perto dos carros. Uma bala cai atrás de um carro. Ela diz: 'Você tem certeza?'. Pedro pega a bala que caiu atrás do carrinho e a coloca com as outras, e conta de novo. A seguir, alinha as balas em uma coluna – as duas balas azuis estão no topo – e, enquanto conta, ele marca cada uma com um número, 'uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete'. 'Quantas?', pergunta a Sra. Jannat. Pedro começa novamente a contar: 'uma, duas, três'. Ele hesita, e diz: 'sete'.

A partir da leitura desse texto fica claro que Pedro já consegue ter uma ideia do que representa um objeto de contagem e o que constitui um grupo ou conjunto de objetos. Uma situação um pouco mais complexa poderia ser trabalhada, por exemplo, com alunos de segundo ano do Ensino Fundamental. Poderia ser apresentada duas listas de alunos de uma determinada sala de aula (Quadro 2):

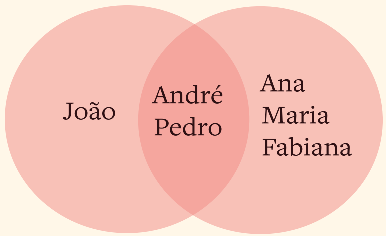
Quadro 2 – Situação possível de ser apresentada

Meninos na sala de aula	Crianças de 7 anos na sala de aula
André	Ana
João	Maria
Pedro	André
	Fabiana
	Pedro

Fonte: Autoria própria.

Se perguntássemos: quantos alunos fazem parte dessa sala de aula, qual seria possivelmente a resposta dos alunos? Provavelmente a maioria responderia 8 alunos, sem perceber que dois alunos fazem parte dos dois conjuntos. Nesse caso, seria interessante trabalhar com um diagrama de Venn, onde os alunos deveriam colocar os elementos referentes a cada conjunto, considerando a região da intersecção (de pontos comuns) entre eles, como indica a Figura 4.

Figura 4 – Diagrama para mostrar elementos comuns



Fonte: Autoria própria.

O NÚMERO E A MEDIDA: CONCEITOS IMPLÍCITOS NA NOÇÃO DE NÚMERO

O número nos permite, além de medir e calcular, localizar, identificar, quantificar e ordenar. Para acontecer a contagem com a intenção de informar uma quantidade, como tratada na seção anterior, é preciso que a criança tenha já formado a noção de número, que é, segundo Vergnaud (2014, p. 125), “[...] a noção mais importante da matemática ensinada na escola [...]”, pois se apoia “[...] em outras noções, tais como a de aplicação, de correspondência biunívoca, de relação de equivalência, de relação de ordem. Na criança pequena, ele é indissociável da noção de medida”.

Isso quer dizer que, mesmo que uma criança saiba recitar números, ela não necessariamente o faz com consciência do conceito que está por detrás dessa palavra pronunciada: o número como uma medida. Para evitar que os números sejam pronunciados apenas como uma recitação, Vergnaud (2014, p. 125) alerta: “[...] a atividade de contar implica não apenas que a criança recite a sequência numérica, mas que, ao mesmo tempo, faça corresponder esta recitação à exploração de um conjunto de objetos”, como é o caso do exemplo com balas de Wall (2014). A criança exemplificada por Wall está no nível propriamente da contagem, em que, segundo Vergnaud (2014, p. 126):

> [...] a recitação da sequência numérica é então acompanhada de gestos da mão e de movimento dos olhos que mostram que a criança executa sua atividade de estabelecer uma correspondência entre o conjunto de objetos, de um lado, e a sequência numérica falada, de outro.

Um exemplo de recitação, é apresentar a sequência de números da Figura 5 e questionar se os alunos sabem lê-los na ordem apresentada.

Figura 5 – Exemplo de recitação na contagem

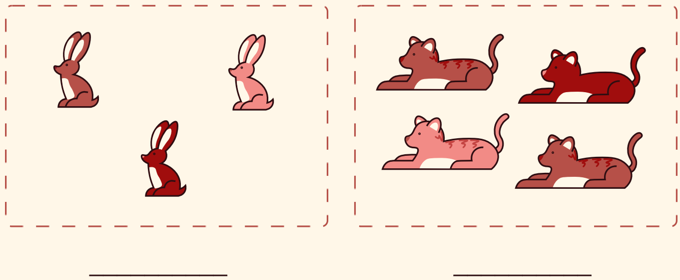
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Fonte: Autoria própria.

O exercício da Figura 5 apenas requer do aluno a recitação dos números. Por outro lado, em uma atividade na qual a criança precisa associar a grafia do número à uma quantidade de objetos deixa de ser meramente uma recitação. Um exemplo de como isso pode ser feito está na Figura 6.

Figura 6 – Atividade para o conceito de número

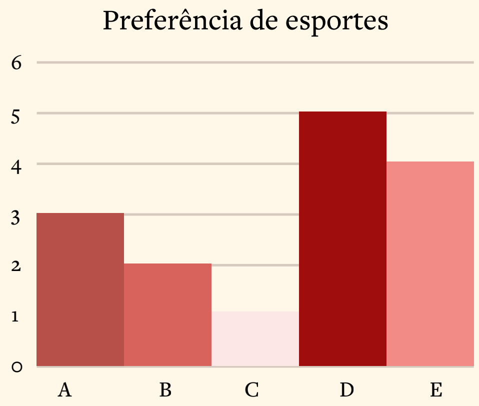
Escreva o número de animais que aparecem em cada quadro abaixo:



Fonte: Autoria própria.

A ideia de comparação (relação de ordem citada por Vergnaud) pode ser trabalhada no 1º ano, por exemplo, com levantamentos feitos na própria turma, como o tipo de esporte preferido, que pode ser apresentado em um gráfico de colunas ou um histograma, como apresentado na Figura 7. A partir da leitura do gráfico, é possível pedir que os alunos escrevam as quantidades preferidas de cada esporte, o esporte de maior ou menor preferência na sala, entre outros.

Figura 7 – Exemplo de contagem



Fonte: Autoria própria.

A Figura 7, para analisar o esporte de maior, ou o de menor, preferência, é preciso estabelecer correspondência entre as palavras que designam números e suas respectivas quantidades associadas, além disso, é preciso reconhecer a relação de ordem dos números para estabelecer o esporte preferido e o menos votado. Note que a noção de correspondência biunívoca (correspondência termo a termo) está implícita quando o aluno responde, por exemplo, que o esporte D é o preferido, pois, mesmo inconscientemente, ele o faz comparando a quantidade de quadradinhos pintados de uma cor e de outra (isto é, faz correspondências do tipo: 1 corresponde ao quadradinho rosa, 2 corresponde ao vermelho claro, 3 corresponde ao vermelho, e assim por diante).

Vergnaud (2014) alerta que a **atividade de contagem é desenvolvida de forma concomitante às noções de equivalência e ordem.** Por exemplo, se conjuntos de ovos e porta-ovos estão dispostos lado a lado, numa correspondência claramente um a um, alunos de 5-6 anos são capazes de reconhecer que os dois conjuntos têm a mesma quantidade de objetos, já se a correspondência não for clara (por exemplo, se os ovos estiverem mais espaçados que o conjunto dos porta-ovos), essas mesmas crianças têm maior dificuldade de reconhecer a mesma quantidade. Segundo a teoria de Piaget, apenas aos 6 ou 7 anos a posição espacial não interfere na comparação de quantidades, por isso, ainda, a importância do professor dos dois primeiros anos do ensino fundamental trabalhar com as variações de configurações espaciais dessas quantidades iguais, para evitar obstáculos futuros, como alerta Vergnaud (2014, p. 128),

> [...] colocar em correspondência termo a termo dois conjuntos suscita dificuldades, mesmo tardias, ao desenvolvimento da criança, o que impede considerar que a grandeza de um conjunto, seja, para a criança, independente da configuração espacial assumida por esse conjunto.

Vergnaud (2014, p. 141) finaliza o capítulo VI dizendo: “Afastar-se dessa ideia de correspondência necessária, ou de homomorfismo, entre os objetos e os conjuntos de um lado, e os números, de outro, seria condenar-se a nada compreender da didática da noção de número”.

Nogueira e Barbosa (2008, p. 132) alertam "[...] que a escola não considere o número e sua representação como um conhecimento previamente construído, mas que atente [...] 'para o pensar, o sentir e o fazer' das crianças acerca dos números com que se deparam no 'mundo real'". Situações em que aparecem os números, como ordem de chamada, localização da poltrona em um teatro, código de barras, Registro Geral (RG), Cadastro de Pessoas Físicas (CPF), número da casa onde mora, entre outros, devem ser trazidos para o ambiente de sala de aula, a fim de propiciar maior reflexão sobre a utilidade dos números no cotidiano, e não apenas na escola.

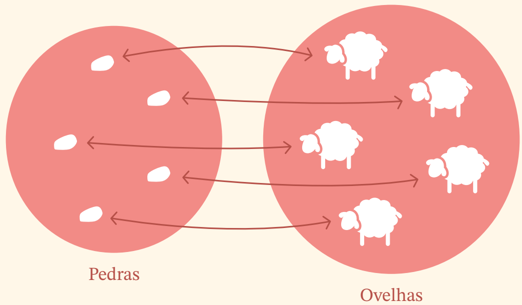
Estudiosos alertam que a **construção do conceito de número**, na criança, passa por algumas etapas, não disjuntas entre si: **classificação**, identifica objetos de acordo com uma determinada característica; **ordenação**, por exemplo, ordem crescente ou decrescente, e até mesmo que o número 5 vem depois do 4 e antes do 6; **sequenciação**, antecessor-sucessor; **correspondência biunívoca**, a cada objeto corresponde um número da sequência numérica; **inclusão hierárquica**, por exemplo, que conjuntos de bananas e maçãs, quando juntados, formam um conjunto de frutas (Biondo, 2017).

→ A construção do conceito de número passa por algumas etapas, não disjuntas entre si:

Classificação – Ordenação – Sequenciação – Correspondência Biunívoca – Inclusão Hierárquica

Em síntese, a literatura, de modo geral, indica que o conceito de número requer as noções de correspondência biunívoca (relação um a um – Figura 8), relação de equivalência, relação de ordem (menor, maior, direita e esquerda) e noção de medida (na criança pequena), como nos diz Vergnaud (2014, p. 125): "[...] a noção mais importante da matemática ensinada na escola", pois se apoia "[...] em outras noções, tais como a de aplicação, de correspondência biunívoca, de relação de equivalência, de relação de ordem. Na criança pequena, ele é indissociável da noção de medida".

Figura 8 – Correspondência biunívoca



Fonte: Autoria própria.

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

De acordo com Biondo (2017, p. 40), "[...] temos um sistema de numeração quando possuímos um conjunto de símbolos e de regras de combinações desses símbolos que nos permitem representar todos os números [...]".

O Sistema de Numeração Decimal (SND) é um sistema de numeração que **utiliza a base** 10. A partir de um conjunto formado por 10 símbolos matemáticos, denominados algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), são escritos quaisquer números, o que dá a ele a característica de **ser econômico**. **Ser posicional** é outra característica do SND: o valor relativo ao algarismo depende da ordem que ele ocupa no número. Veja a Figura 9.

Figura 9 – Quadro de posições

Milhão			**Milhar**			**Unidade**		
C	D	U	C	D	U	C	D	U

Fonte: Autoria própria.

A leitura do quadro deve ser da esquerda para a direita, em que cada posição representa 10 vezes a quantidade da posição anterior. Exemplo: 1 dezena (1D) = 10 unidades (10U); 1 centena (1C) = 10 dezenas (10D), que por sua vez equivale a 100 unidades, e assim por diante. Reconhecer o “ser posicional” do nosso sistema numérico é importante para compreender o valor que assume um determinado algarismo de acordo com sua posição na escrita do número. Veja o caso do número 111. Embora tenhamos usado o algarismo 1 três vezes, cada algarismo está assumindo um valor diferente. Neste caso temos 1 centena + 1 dezena + 1 unidade, que é equivalente a 111 unidades. O Quadro Valor de Lugar (Figura 10) pode ser muito útil nessa localização (e ser facilmente construído pelo professor que desejar utilizá-lo).

Figura 10 – Quadro Valor de Lugar

Classes e Ordens											
Classe dos Bilhões			Classe dos Milhões			Classe dos Milhares			Classe das Unidades simples		
12ª ordem	11ª ordem	10ª ordem	9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centenas de bilhão	Dezenas de bilhão	Unidades de bilhão	Centenas de milhão	Dezenas de milhão	Unidades de milhão	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades

Fonte: Autoria própria.

Outras características do SND são (Castro, 2016):

a) o **zero** indica ausência de unidade (quantidade);

b) é **aditivo**: o resultado é obtido diante da composição somatória dos valores que os algarismos ocupam. Exemplo: $16 = 10 + 6$;

c) é **multiplicativo**: para se descobrir o valor posicional, multiplica-se o algarismo por 10, 100, 1.000 e sucessivamente de acordo com a ordem por ele representada. Exemplo: $532 = 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$.

Reconhecer essas propriedades e características contribui para uma melhor compreensão das operações com números.

Além disso, é importante que os alunos tenham bem desenvolvidas as noções de direita, esquerda, dentro, fora etc., pois tais conceitos são bastante usados no desenvolvimento do contexto dos números.

Dentro desse sistema decimal, temos os números classificados em vários conjuntos numéricos, de acordo com a natureza de cada um. Na próxima subseção, vamos ver essa classificação rapidamente.

Os conjuntos numéricos

Por que tratar dos conjuntos numéricos com professores dos anos iniciais, se nesse período estudamos apenas o conjunto dos números naturais e inteiros?

A resposta é simples. Porque o professor deve saber mais do que aquilo que ensina. Faz parte da contextualização dos números reconhecer sua natureza.

Ao longo da história da Matemática, de acordo com a necessidade de representar certas situações, o homem buscou símbolos capazes de satisfazer suas necessidades. Os primeiros números a surgirem, utilizando o sistema decimal, foram os **naturais**, os quais tinham o objetivo de **representar quantidades, resultados do ato de contar**.

Simbolicamente escrevemos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5,...\}$$

Esse conjunto foi o primeiro a ser "criado", e seu nome leva em consideração a naturalidade com que essas quantidades aparecem. Embora o zero esteja presente neste conjunto, ele não foi tão "natural" para aparecer.

Continuando com um pouco de história, com o desenvolvimento da atividade comercial surgiu a necessidade de **representação de perdas**, dívidas, entre outras situações. Além disso, operações com os números naturais, em especial a **subtração**, deram origem ao surgimento dos números negativos, bem como o zero, formando assim o conjunto dos **números inteiros**, representado por:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,...\}$$

Percebe-se que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ **está contido** (representado matematicamente pelo símbolo $\subset$) no conjunto dos números inteiros, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Isso significa dizer que todo número natural é inteiro, porém a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, -2 é um número inteiro, mas não é um número natural.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, \underbrace{0, 1, 2, 3, 4, \ldots}_{\mathbb{N}}\}$$

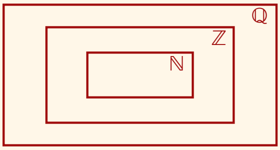
Ao multiplicar e/ou dividir números inteiros percebeu-se que o resultado nem sempre era um número inteiro, o que deu origem ao conjunto dos números racionais, que contém todos os números que podem ser escritos na forma de fração de números inteiros (cujo resultado é um número inteiro, um decimal finito ou um número na forma de dízima periódica). Diante da impossibilidade de escrever todos os possíveis resultados das divisões de dois números inteiros, foi estabelecida uma característica para o conjunto dos **números racionais**, denominado por $\mathbb{Q}$, para lembrar a palavra 'Quociente'. O conjunto dos números racionais é escrito, simbolicamente, na forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \mathrm{x} \,\middle|\, \mathrm{x} = \frac{a}{b}, \text{ com } a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

Exemplos de alguns números racionais entre 0 e 1: $\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$.

Podemos verificar também que o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais, ou seja, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, pois todo número inteiro pode ser escrito como uma divisão de dois números inteiros. No diagrama de Venn (Figura 11), temos:

Figura 11 – Diagrama de Venn para representar conjuntos

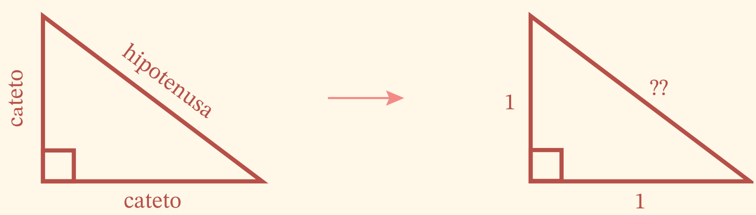


Fonte: Autoria própria.

É importante frisar que esse diagrama é apenas uma representação pictórica que deve ser lida como: existem números inteiros que não são naturais, assim como existem números racionais que não são inteiros. Em termos de currículo escolar, esses conjuntos vão sendo apresentados aos poucos, ao longo dos anos do Ensino Fundamental. Conforme a natureza dos números, classificamos esse número em um determinado grupo, chamado de conjunto numérico. Por exemplo, os números que indicam quantidade de pessoas são classificados como números naturais, já aqueles que representam uma medida, em metros (exemplo: minha altura é 1,65 metros), estão inseridos no conjunto dos números racionais. Mas os números não param por aí.

A origem histórica da necessidade do surgimento de um novo conjunto, o conjunto dos **números irracionais**, deu-se a partir de uma situação de natureza geométrica: como determinar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos com medida de 1 unidade? Veja a Figura 12.

Figura 12 – Representação geométrica do problema da medida da hipotenusa



Fonte: Autoria própria.

Esse problema é da época da Escola de Pitágoras (V a.C.). A partir dele percebeu-se que não era possível representar a medida da hipotenusa desse triângulo retângulo a partir de um número racional, assim surgiu a raiz quadrada de 2, representada por $\sqrt{2}$, uma dízima não periódica, isto é, não tem uma repetição cíclica de números. Temos:

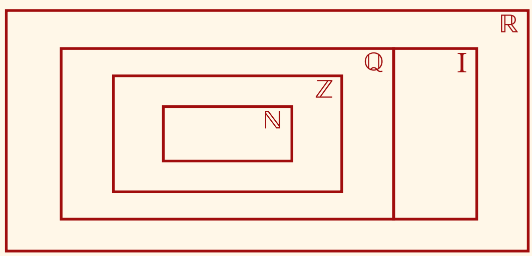
$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots$$

Desta forma, todos os números representados por dízimas não periódicas formam o **conjunto dos números irracionais**, simbolizado pela letra I. Outros exemplos de números irracionais que são importantes para as atividades matemáticas posteriores aos anos iniciais são:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$$
$$e = 2{,}71828182845904523536\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}73205080756887729 35\ldots$$

Então, considerando o diagrama de Venn (Figura 13), apresentado anteriormente, temos:

Figura 13 – Diagrama de Venn com a inserção do conjunto dos números irracionais



Fonte: Autoria própria.

Observe que a representação da Figura 13 indica que os conjuntos I e ℚ, respectivamente irracionais e racionais, não têm pontos em comum, ou seja, a intersecção deles é o conjunto vazio (novamente chamamos a atenção que a figura é apenas uma ilustração da relação entre os conjuntos). E ainda, que a união desses dois conjuntos deu origem ao **conjunto dos números reais**, ou seja, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$. Portanto, podemos dizer que o conjunto dos números reais foi assim definido para podermos considerar todos os números racionais e irracionais juntos num mesmo conjunto.

Por muito tempo os números reais foram considerados suficientes para resolver os problemas matemáticos vigentes. Dentre os problemas que se destacaram ao longo da história, podemos citar a resolução de equações. Os matemáticos antigos da Babilônia já conseguiam resolver algumas equações de segundo grau baseados no que hoje chamamos de "completando quadrados". Já os gregos, que desempenharam importante papel no desenvolvimento da Matemática, resolviam alguns tipos dessas equações com régua e compasso. A conquista da Grécia por Roma praticamente acabou com o domínio da Matemática Grega. Com o fim do Império Romano e o advento da Idade das Trevas no continente Europeu, o desenvolvimento da Matemática ficou nas mãos dos árabes e dos hindus. Os matemáticos hindus avançaram nas pesquisas em Álgebra, e Bhaskara é o nome que imediatamente vem à nossa memória quando falamos de equações do segundo grau (as que são do tipo $ax^2+bx+c=0$). Entretanto, a fórmula de Bhaskara não foi descoberta por ele, mas sim pelo matemático hindu Sridhara, no século XI.

Vale a pena relembrarmos essa fórmula que utilizamos até hoje para a solução de uma equação do segundo grau:

$$\mathrm{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Em várias situações, o valor do radicando $b^2 - 4ac$, também denominado delta (Δ), pode assumir valores negativos. Nesse caso, não é possível encontrar solução no conjunto dos números reais. Então, na época, os matemáticos diziam que esse tipo de equação não tinha solução.

Por volta do século XVI a matemática voltou a se tornar interesse dos europeus, principalmente dos italianos, destacando-se Cardano e Tartaglia, os quais demonstraram grande preocupação em solucionar equações do terceiro grau. Ao desenvolverem suas teorias para solucionar tais equações, esses matemáticos voltaram a se deparar com raízes quadradas de números negativos. Ficava claro que os números reais eram insuficientes para trabalhar com a solução de equações algébricas.

O que aconteceu no século XVI foi semelhante ao ocorrido no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais a partir da construção do número $\sqrt{2}$, que não era racional: o conceito de número precisava ser estendido.

Então, Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido na Itália, em 1530, foi o primeiro a fazer de conta que $\sqrt{-1}$ fosse um número conhecido e tentou operar com ele assim como operava com os demais números. Porém, foi só na primeira metade do século XVII que os geniais matemáticos franceses Pierre de Fermat e René Descartes inventaram, independentemente e quase simultaneamente, o que hoje conhecemos por Geometria Analítica, e com isso conseguiram avançar muito no desenvolvimento dos estudos das equações algébricas.

Em uma passagem do Discurso do Método, Descartes escreveu a seguinte frase: "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais, às vezes elas são imaginárias".

Então, foi assim que o número $\sqrt{-1}$ foi chamado de número imaginário, atualmente denotamos $\sqrt{-1} = i$, termo que se consagrou junto da expressão "número complexo".

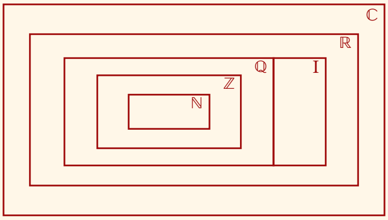
Dessa forma, o **conjunto dos números complexos** ($\mathbb{C}$) foi originado. Todo número complexo é escrito da forma:

$$z = a+bi, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}$$

Quando $a = 0$, o número é dito imaginário puro, e quando $b = 0$, o número é real.

E o diagrama de Venn, considerando todos os conjuntos apresentados, fica conforme a Figura 14:

Figura 14 – Diagrama de Venn para os conjuntos numéricos



Fonte: Autoria própria.

Novamente é importante ressaltar que esta representação apenas quer dizer que existem números que não são reais, e que os "tamanhos" dos conjuntos são meramente ilustrativos.

Feito esse breve resgate histórico sobre os números, vamos nos ater, na sequência, às operações com números naturais, primeiro passo no mundo da aritmética.

AS OPERAÇÕES[9] COM NÚMEROS NATURAIS

De acordo com Biondo (2017, p. 33), "[...] se a aprendizagem é um processo de construção de significados, a comunicação e as negociações devem estar sempre presentes na sala de aula".

As relações entre as quantidades, as ideias de juntar e tirar, relacionadas às operações de adição e subtração, são geralmente introduzidas no primeiro ano do ensino fundamental, junto dos símbolos que representam as quantidades, os números.

No decorrer da História, há diferentes registros da utilização dos números para auxiliar na contagem, que, por sua vez, implicou em operações como adição e subtração. Para a criança, a partir do momento em que ela percebe o número como uma quantidade, uma medida, começa a vislumbrar a possibilidade de operar com esses números, mesmo que ainda de forma inconsciente.

Biondo (2017, p. 42) nos alerta que:

> [...] o conhecimento de cada número não se dá apenas pelo conhecimento das suas propriedades, mas também das suas formas de representação. [...] para que a criança se aproprie da representação dos números é preciso que compreendam as várias formas pelas quais um número pode ser representado.

Daí a importância de fazer associações como $6 \leftrightarrow 5+1 \leftrightarrow 2.3 \leftrightarrow 7-1$ etc. Isto é, é importante frisar para os alunos que **há várias maneiras de se obter um**

9 É importante atestar que, para as crianças, o significado do termo "operações" no contexto matemático é o de somar, subtrair, multiplicar ou dividir. Relatos de professores indicam que há alunos que associam esse termo unicamente ao procedimento cirúrgico realizado em hospitais.

número, a partir das operações de adição e subtração. No estudo das operações, além da preocupação com a **elaboração dos diferentes sentidos de cada operação**, é importante apresentar **diferentes formas de realizá-las**, além dos tradicionais algoritmos escritos, como o **cálculo mental**, as **aproximações** e **estimativas**.

Segundo Nogueira e Andrade (2011, p. 83-84), deve-se:

> [...] dar ênfase ao cálculo mental por diversas razões, entre elas o fato de que os alunos que são estimulados a efetuar o cálculo mental nas aulas de matemática, em geral, demonstram mais segurança em enfrentar situações-problema; são mais autônomos e possuem uma capacidade mais ampla de estabelecer estratégias para obter a solução de um problema. Além disso, parecem compreender com mais facilidade algumas técnicas, por exemplo, a técnica do 'vai um'.

Quando se fala em operações com números, é importante reconhecer que:

> [...] para que a criança construa o sentido de uma operação, é necessário pensar em metodologias que sejam apropriadas, no sentido de permitir que as crianças reflitam, colaborem entre si e, deste modo, construam os significados em função dos quais se utilizam e apropriam os conceitos matemáticos (Biondo, 2017, p. 43).

Vale reiterar que, segundo Piaget, a criança que entra no primeiro ano encontra-se ainda na fase do operatório concreto, então quanto mais ela estiver em ação, dentro do seu ritmo, mais fácil compreenderá as operações que se pretende ensinar. Depois de atribuído esse significado nos dois primeiros anos de escolarização, torna-se mais simples o processo abstrato de fazer operações numéricas.

Na pesquisa de Biondo (2017, p. 43-44), sugere-se que as ações sejam realizadas mediante **resolução de situações-problemas**, na qual "no primeiro momento resolve problemas manuseando objetos; no segundo momento, passa a fazer esquemas desenhados, como suporte do seu raciocínio e, finalmente, a criança passa a representar o seu raciocínio através de símbolos matemáticos". Observe que a sequência proposta implica numa **crescente elevação do nível de abstração**.

Para as adições e subtrações, por exemplo, pode-se usar uma tabela com a numeração estudada no ano de interesse (1º ano, 2º ano etc.). Por exemplo, no 1.º ano, estuda-se do 1 ao 100, então pode-se utilizar uma sequência numérica de 1 a 100 na qual o estudante conta a quantidade de "casinhas" para saber o valor resultante. Veja a Figura 15:

Figura 15 – Numeração de 1 a 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: Autoria própria.

Por exemplo, para que o aluno faça 5+9 ele pode marcar, na tabela, o 5 e a partir daí contar 9 números e verificar o número em que chegou, o 14. Após isso, ele pode escrever 5+9=14. Claro que antes de vir para essa tabela, que exige maior domínio sobre os números, é interessante que o aluno faça as operações desejadas (e registre no seu caderno) com material concreto, como com tampinhas de garrafa pet.

Aqui, o professor pode pedir para que os alunos escrevam as representações:

$$5+9=14 \qquad \begin{array}{r} 5 \\ +\ 9 \\ \hline 14 \end{array}$$

Escrever essas diferentes representações pode contribuir com a formação da ideia, na criança, de que não há somente uma maneira de escrever uma adição ou subtração.

Para adição de números maiores, como 24+37, o professor pode seguir o mesmo raciocínio. Porém, aqui, seria interessante "armar" a adição considerando as respectivas quantidades para dezenas e unidades, assim:

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\quad}^{\text{dezena}} & \overbrace{\quad}^{\text{unidade}} \\ & 2 & 4 \\ + & 3 & 7 \\ \hline & 5 & 11 \end{array}$$

> → Para chegar a esse ponto, a noção de dezena já vai ter sido trabalhada. Assim, o professor pode fazer a substituição das 11 unidades por uma dezena e uma unidade, totalizando a soma 24+37 em 6 dezenas e 1 unidade, equivalente a 61 unidades, ou seja, 24+37=61. O quadro valor lugar também é uma ferramenta útil para esse trabalho.

Este último processo também pode ser utilizado para trabalhar com a subtração, pois pode-se trocar uma dezena por 10 unidades, como, por exemplo, para fazer 52-38. Independentemente do procedimento adotado, a tabela (Figura 15) pode sempre servir como um meio de conferência da conta, e ainda atesta a cardinalidade, pois quando somada ou subtraída a segunda parcela, o número que está na posição de chegada representa o resultado da operação efetuada. Professores que a utilizaram como instrumento pedagógico atestaram a sua eficácia para trabalhar com adições e subtrações.

A tabela também pode ajudar na compreensão dos conceitos de **antecessor** e **sucessor**, pois ao perguntar à classe o sucessor (ou antecessor) de um número, o aluno não precisa recorrer à memória e apenas ver "o próximo" ou "o anterior" do número dado. Ainda na tabela pode ser reforçado que cada linha ou coluna tem uma **dezena** de números.

Para trabalhar com o conteúdo "Ideia de colocar quantidades para formar uma quantidade dada", o professor pode utilizar um material didático disponível em livrarias, ou construir o seu próprio, conforme sua necessidade. Há disponibilidade do livro de subtração (Figura 16) e também de adição. Pela imagem já dá para observar que é possível efetuar "contas" tanto quando se tem as duas parcelas, como quando se conhece o resultado final e uma das parcelas, operações que demandam esforços cognitivos diferentes.

Figura 16 – Material didático para trabalhar com subtração de números naturais

Fonte: TodoLivro ([200?]).

Em relação ao material da Figura 16, vale ressaltar que as figuras ilustram apenas a quantidade que representa o número escrito, e não podemos levá-las em consideração para efetuar a soma ou subtração, pois, afinal, não podemos subtrair de 5 pedaços de melancia, 1 abacaxi e o resultado ser um urso. Ou seja, professor, esteja atento ao material que utiliza em sala de aula para não causar, inadvertidamente, problemas de aprendizagem futuros. O ideal, neste caso, é fazer seu próprio material.

De acordo com Vergnaud (2014), as operações de adição e subtração fazem parte de um campo conceitual chamado de **campo aditivo**; já as operações de multiplicação e divisão compõem o **campo conceitual multiplicativo**. E isso deve ser levado em conta ao trabalhar essas operações no Ensino Fundamental, pois exigem raciocínios diferentes. Vergnaud (2014) apresenta categorizações de problemas nesses campos, aos professores interessados sugerimos visitar a obra citada, ou buscar na internet pela "Teoria dos Campos Conceituais".

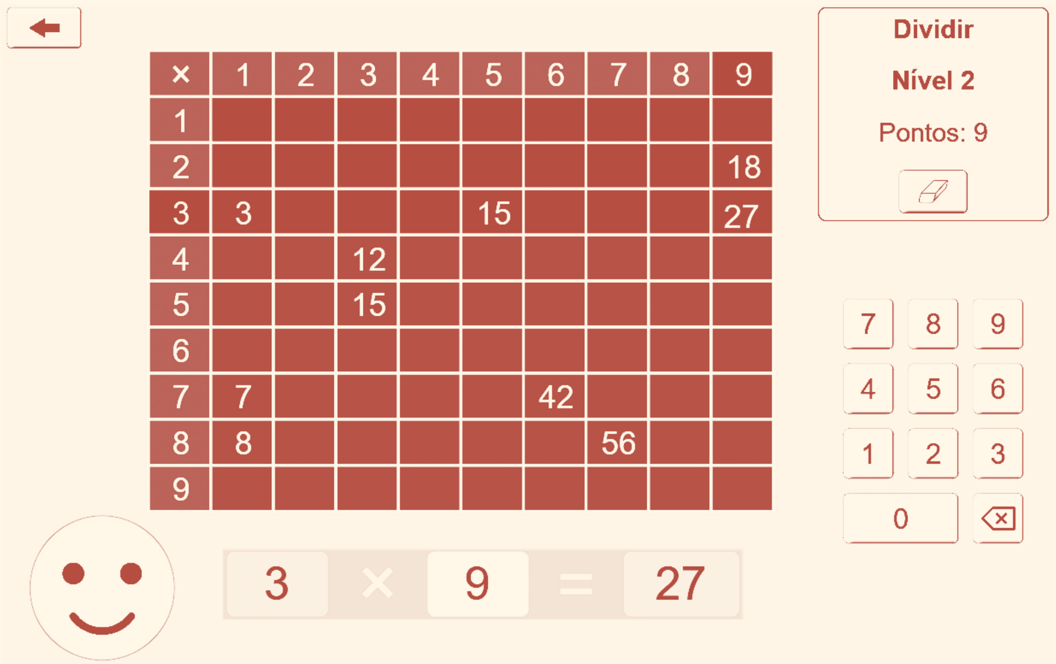
Para trabalhar com multiplicação e divisão, há o site fonte da Figura 17 que fornece as multiplicações associadas às áreas:

Figura 17 – Página inicial de um jogo sobre multiplicação

Fonte: Arithmetic (2020).

Neste site da Figura 18, o ícone da divisão reforça a multiplicação. O aluno usa o teclado virtual para inserir a resposta da multiplicação e pode conferir o resultado automaticamente. Interessante é perceber que o aplicativo mostra a área que representa a multiplicação, o que permite ao professor associar a operação de multiplicação com o cálculo de áreas.

Figura 18 – Jogo associado à divisão



Fonte: Arithmetic (2020).

Usando um material manipulável como um recurso didático, é possível reforçar a agilidade e o raciocínio a partir de um jogo de dominó, em que as peças são compostas por somas ou subtrações ou multiplicação ou divisão de números, conforme for interesse do professor. A Figura 19 mostra um exemplo de cartela e duas operações utilizadas pela autora da proposta. Quem quiser mais informações pode acessar o endereço mostrado na Figura 19. Amaro (2013) também apresenta vários jogos, os quais podem ser construídos com os alunos, para trabalhar com as operações com números naturais.

Figura 19 – Bingo como recurso didático para adição e subtração de números naturais

1° Sugestão:

Providencia uma cartela de bingo contendo 15 números para cada aluno.

Em seguida, escreva uma operação de cada vez no quadro, se preferir fale as operações para as crianças.

BINGO				
5	20	33	55	70
12	23	40	59	84
17	28	47	64	88

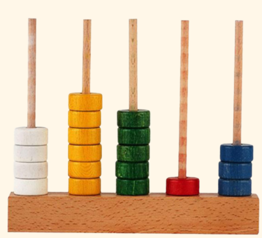
$13 + 4$

$40 + 28$

Fonte: Silva *et al.* (2011).

De acordo com Nogueira e Andrade (2011), cada criança tem uma maneira particular de aprender. Sendo assim, é importante os professores utilizarem materiais variados para que a criança possa compreender o significado das operações a serem realizadas. A sequência da utilização dos materiais deve obedecer ao processo de desenvolvimento lógico da criança, **partindo do material manipulável** (tampinhas, palitos, pedrinhas etc.) **passando pelo material dourado** e por fim **o quadro valor de lugar** (ou quadro de pregas, como alguns o conhecem) **e o ábaco** (Figura 20). Vale ressaltar que o ábaco também pode ser muito útil para a criança assimilar o valor posicional de cada algarismo utilizado para escrever um número.

Figura 20 – Ábaco



Fonte: Thies; Alves (2013).

Ao trabalhar com problemas nos anos iniciais, é preciso levar em conta o contexto envolvido, bem como o esforço cognitivo necessário para resolver a questão, além de observar se o problema está bem formulado, sem duplos sentidos. Vergnaud (2014) apresenta alguns problemas que envolvem estratégias de resolução diferentes, veja no Quadro 3.

Quadro 3 – Problemas aditivos

1. Paulo tem 6 bolinhas de gude de vidro e 8 bolinhas de gude de metal. Quantas bolinhas ele tem ao todo?
2. Paulo tinha 7 bolinhas de gude antes de jogar. Agora, depois do jogo, ele tem 11. Quantas bolinhas de gude ele ganhou no jogo?
3. Paulo tem 8 bolinhas de gude. Tiago tem 5 menos que Paulo. Quantas bolinhas tem Tiago?
4. Anteontem Paulo tinha um certo número de bolinhas de gude. Ontem ele ganhou outras 6 bolinhas, mas no jogo de hoje perdeu 9 bolinhas. Agora, Paulo tem mais ou menos bolinhas que anteontem? Quantas?
5. Paulo deve seis bolinhas de gude para Henrique, mas Henrique lhe deve 4. Quantas bolinhas Paulo deve dar a Henrique para que os dois quitem suas dívidas?
6. Havia 17 pessoas dentro de um ônibus, subiram 4. Quantas pessoas estão ali dentro agora?
7. Henrique acaba de achar R$ 2,60 na calçada. Ele os colocou no seu moedeiro. Ele tem agora, com tudo, R$ 3,90. Quanto dinheiro ele tinha em seu moedeiro antes do achado?
8. João tem 9 balas e deu 4 pra sua irmã. Com quantas balas João ficou?
9. Paulo acabou agora um jogo de bolinha de gude. Ele tinha 41 bolinhas antes de jogar. Agora ele tem 29. Quantas bolinhas ele perdeu?
10. Um agricultor tem 56 hectares de terras, dos quais 17 hectares são em floresta; o resto é cultivável. Qual a área cultivável que ele tem disponível?

Fonte: Vergnaud (2014).

Nos problemas do Quadro 3, observe que não há "termos-chave" indicando se a operação "é de mais ou é de menos", é preciso que o aluno interprete o enunciado. No problema 2, por exemplo, pergunta-se "quantas bolinhas ele ganhou", mas a operação a ser realizada é a de subtração, que alunos, às vezes, associam a perdas. Ao desconstruir as ligações: adição – ganho – mais e subtração – perda – menos, enfatiza-se o significado da operação propriamente dita.

Onde encontrar recursos didáticos

O portal do professor, do Ministério da Educação, disponibiliza diversos planos de aula, de conteúdos diversificados, que podem auxiliar você, professor, a dinamizar suas aulas. A seguir, apresentamos duas propostas e o índice do material disponível (Figura 21).

PROPOSTA 1

→ Em http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=35693 encontramos um plano de aula chamado "**como trabalhar as operações de adição e subtração a partir de jogos como: baralho, bingo e dominó?**" A autora do plano dá sugestões de como trabalhar com os jogos de bingo, baralho e dominó com as crianças.

PROPOSTA 2

→ Em http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000014235.pdf encontra-se material com atividades diversificadas sobre vários assuntos. Vale a pena conferir. A Figura 21 mostra o índice do material.

Figura 21 – Índice do material disponível no portal do professor

Fonte: Paraná (2005).

Ao final deste capítulo, logo após as referências há indicações de páginas da internet que contêm atividades e jogos sobre inúmeros conceitos de Matemática, que são trabalhados nos anos iniciais. Vale a pena entrar em cada um deles e conferir; algum pode ser justamente o que você está procurando.

Para concluir esse capítulo, inserimos uma seção com algumas inquietações de professores que participaram de um curso de Formação Continuada no ano de 2019. Não é nossa intenção abordar todos os temas de modo profundo, apenas indicamos pesquisas sobre como lidar com algumas situações em sala de aula.

INQUIETAÇÕES DOCENTES

A inquietação em relação ao ensino de matemática nos anos iniciais é comum a muitos professores, especialmente os recém-formados. No processo de ensinar, algumas vezes, são tomadas decisões didáticas que interferem na continuidade da aprendizagem.

Maranhão e Carvalho (2009) analisam o caso de uma professora do 4º ano, em relação a conteúdos sobre números naturais e suas operações, entre outros, e mostram falhas docentes que acontecem devido à falta de conhecimento matemático e pedagógico do conteúdo, e inclusive do próprio currículo, conhecimentos considerados essenciais à docência pelo estudioso

Shulman. Sugerimos a leitura atenta desse artigo por todos os professores dos anos iniciais, a fim de que possam refletir sobre suas práticas e possíveis melhorias a serem realizadas na sua forma de ensinar.

Enfatizamos a importância dos professores dos anos iniciais para a formação matemática do estudante, pois são nos cinco primeiros anos do Ensino Fundamental que as principais noções elementares de matemática são adquiridas. Problemas de aprendizagem nessa fase resultam, para alguns, em problemas de aprendizagem matemática por toda a vida acadêmica.

A seguir, elencamos algumas sugestões acerca de algumas inquietações apresentadas pelos docentes que participaram de um encontro de formação sobre números.

A escrita espelhada

Ainda há muitas dúvidas sobre as causas que levam à escrita espelhada. Valente (1984, p. 81) sugere que "[...] o espelhamento da escrita ocorre devido à dificuldade que a criança encontra para reverter a ação de escrever, quando escreve em sentido contrário ao que aprendeu. Deste modo, tratar-se-ia de uma manifestação típica do pensamento pré-operatório". O autor observou experimentalmente que crianças que escreviam espelhadamente junto à margem direita, escreviam corretamente junto à margem esquerda.

Scliar-Cabral (2013) também indica a necessidade de diferenciação direita-esquerda, para o reconhecimento de letras. Segundo a autora:

> [...] para o reconhecimento dos traços que constituem as letras, como os do sistema alfabético, por exemplo, é fundamental distinguir a diferença entre a direção dos traços para a esquerda ou para a direita, para cima ou para baixo. Tal conflito resulta na grande dificuldade de tal aprendizagem, o que leva as crianças a persistirem por maior ou menor tempo na leitura e escrita espelhada (Scliar-Cabral, 2013, p. 280).

Costa e Pavanello (2017) afirmam que, naturalmente, com o tempo, a criança tende a escrever corretamente.

A noção de dezena

Trabalhar com jogos, com o lúdico, é sempre uma boa opção para inserir ou reforçar conceitos matemáticos nos anos iniciais.

→ O vídeo disponível em https://www.youtube.com/watch?v=MuaLyxZ3BDs apresenta um jogo "um dez" que possibilita o tratamento da noção de dezena.

→ Nesse jogo, um jogador nunca pode ficar com 10 peças iguais do material dourado.

→ Esse jogo também é importante para a compreensão do algoritmo da adição de números inteiros.

O reconhecimento dos números

Iniciamos nossa reflexão mencionando uma frase de Nogueira e Barbosa (2008, p. 140-141):

> [...] o ambiente escolar deve criar oportunidades para que as crianças exponham suas ideias, se expressem livremente e busquem alternativas próprias para re-elaborarem seu conhecimento prévio, e, a partir dele, compreender as 'novidades' acerca da escrita numérica.

Isso quer dizer que uma conversa com os alunos sobre o que eles já ouviram ou sabem sobre números pode trazer boas oportunidades ao professor.

→ Em (https://www.youtube.com/watch?v=07whuRDYk6g) há um vídeo "Sistema de numeração - Coleção 1" que mostra uma atividade de contagem para ser usada em sala de aula.

- Já o vídeo “Sistema de Numeração - Coleção 2” (https://www.youtube.com/watch?v=3vsfEVcjUrk) mostra um episódio de sala de aula na qual se trabalha a escrita dos números e a confusão que o número zero provoca na escrita.
- O vídeo “Matemática é D+! - Detetive de números” (https://www.youtube.com/watch?v=5Mgnp0HJEmg) apresenta uma brincadeira para reforçar os números de 1 a 100.

Materiais para utilização em sala de aula

Uma das solicitações dos docentes participantes do primeiro encontro foi sugestões para trabalhar com o **uso cotidiano** dos números.

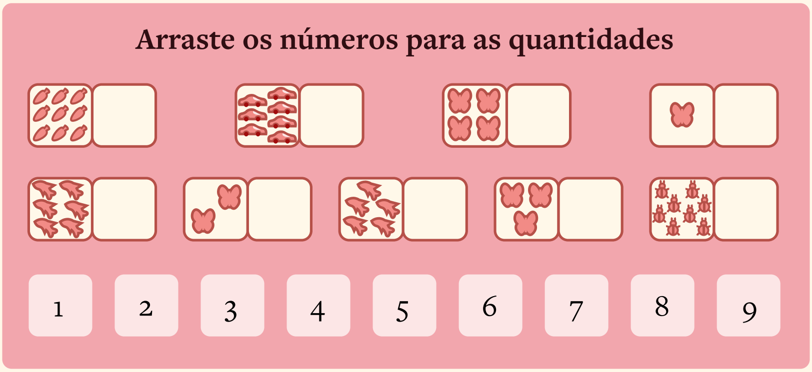
- No portal do professor (http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=48843) há um plano de aula cujo tema é *Descobrindo os números em diferentes textos e contextos*, da professora Eliana Aparecida Carletto. A aula requer que os alunos saibam ler e escrever, mas indica situações que podem ser analisadas pelo professor nas quais aparecem os números. Indica, inclusive, site da internet com atividades que podem ser usadas com alunos de diferentes etapas.

Ainda sobre os contextos dos números, Moreira (2012) elaborou uma dissertação que trata sobre **o desenvolvimento do sentido de número no pré-escolar**, em Portugal, que indica algumas tarefas interessantes, especialmente para os professores de primeiro ano. Veja o endereço nas referências.

A faculdade Unijuí – RS tem um laboratório virtual com conteúdos de vários níveis de ensino. Para os anos iniciais, eles oferecem, na vertente números e operações:

a) um jogo que associa a representação numérica com a imagem figural (Figura 22);

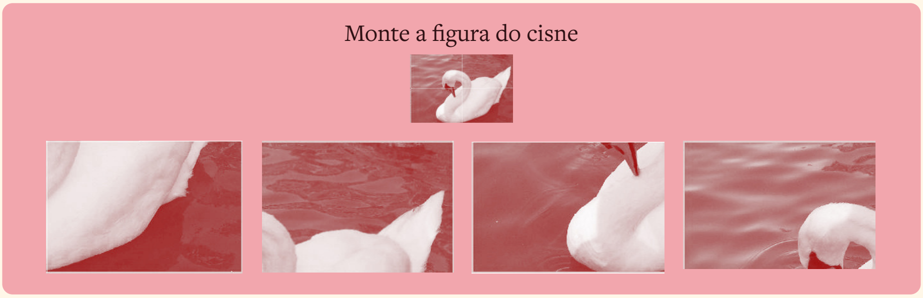
Figura 22 – Jogo sobre representação numérica



Fonte: Identificar (2017).

b) um quebra-cabeça simples, que remete à ordem das peças para montar a figura (Figura 23);

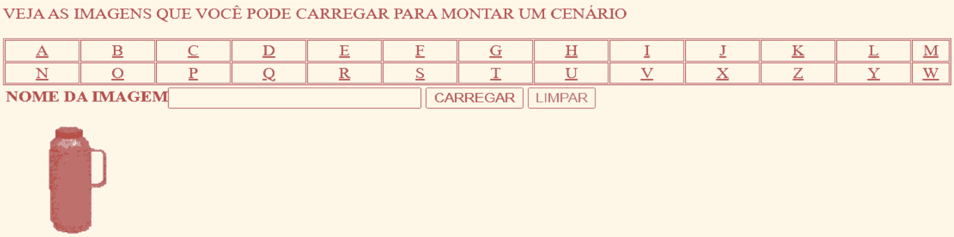
Figura 23 – Quebra-cabeça virtual



Fonte: Pereira (2017a).

c) mercado virtual, no qual o estudante precisa escrever o nome do objeto a ser comprado. O valor aparece no canto direito da tela do computador. O professor pode usar a criatividade para elaborar problemas envolvendo os números e palavras; ou seja, a partir desse instrumento pode trabalhar o assunto de dinheiro, tratamento da informação, e aliar aos estudos da língua portuguesa (Figura 24).

Figura 24 – Página do jogo chamado mercado virtual



VEJA AS IMAGENS QUE VOCÊ PODE CARREGAR PARA MONTAR UM CENÁRIO

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z	Y	W

NOME DA IMAGEM CARREGAR LIMPAR

Fonte: Pereira (2017b).

Inúmeras são as opções de atividades que estão disponíveis na internet. Por exemplo, várias atividades para se trabalhar as operações matemáticas podem ser encontradas no site IXL – Prática de Matemática[10], cuja tela inicial do 1º ano pode ser vista na Figura 25.

Figura 25 – Sugestão de atividades sobre operações matemáticas

P
1º
2º
3º
4º
5º
6º

1º ano

Esta é uma lista de todas as habilidades de matemática que os alunos aprendem no 1º ano! Essas habilidades são organizadas em categorias, e você pode mover o mouse sobre qualquer um para ver um exemplo. Para iniciar a prática, basta clicar em qualquer link. O IXL vai controlar sua pontuação, e o grau de dificuldade das questões aumentará à medida que você melhora!

Números e contagem

A.1 Aprenda a contar - números até 10
A.2 Conte as imagens - números até 10
A.3 Conte as imagens - grupos de duas unidades
A.4 Conte as imagens - grupos de cinco unidades
A.5 Conte as imagens - grupos de dez unidades
A.6 Conte as imagens - grupos de duas, cinco ou dez unidades
A.7 Complete a sequência numérica seguindo os padrões propostos
A.8 Identifique números na reta numérica
A.9 Encontre números na tabela numérica - números até 100
A.10 Complete sequências crescentes e decrescentes - números até 100
A.11 Estime o total de elementos aproximando as dezenas
A.12 Complete sequências crescentes e decrescentes - números até 1000
A.13 Selecione números pares ou ímpares

Adição

B.1 Selecione as adições representadas na imagem
B.2 Efetue as adições - números até 10
B.3 Forme um número usando adição - números até 10
B.4 Complete as adições - números até 10
B.5 Efetue as adições - números até 20
B.6 Forme um número usando adição - números até 20
B.7 Indique a adição com números e resultado equivalentes aos do enunciado
B.8 Some um número de um dígito a um número de dois dígitos - sem reagrupar
B.9 Some um número de um dígito a um número de dois dígitos - reagrupando

Subtração

E.1 Selecione a subtração representada na imagem
E.2 Efetue as subtrações - números até 10
E.3 Forme um número usando subtração - números até 10
E.4 Complete as subtrações - números até 10
E.5 Efetue as subtrações - números até 18
E.6 Forme um número usando subtração - números até 18
E.7 Selecione a subtração com números e resultado equivalentes aos do enunciado
E.8 Subtraia um número de um dígito de um número de dois dígitos - sem reagrupar
E.9 Subtraia um número de um dígito de um número de dois dígitos - reagrupando
E.10 Subtraia dois números de dois dígitos - sem reagrupar
E.11 Subtraia dois números de dois dígitos - reagrupando
E.12 Calcule as diferenças arredondando as dezenas - números de dois dígitos

Estratégias de subtração

F.1 Subtraia os dobros
F.2 Subtraia dois múltiplos de 10
F.3 Subtraia um múltiplo de 10

Desenvolvedores de habilidades de subtração

G.1 Subtraia o número 1
G.2 Subtraia o número 2
G.3 Subtraia o número 3
G.4 Subtraia o número 4
G.5 Subtraia o número 5

Notação de posição

J.1 Conte dezenas e unidades - até 20
J.2 Interprete os modelos de valor posicional - números até 20
J.3 Componha/decomponha números em dezenas e unidades - números até 20
J.4 Decomponha números contando dezenas e unidades - números até 100
J.5 Interprete os modelos de valor posicional - números até 100
J.6 Componha/decomponha números em dezenas e unidades - números até 100

Frações

K.1 Identifique meios, terços ou quartos representados nas imagens
K.2 Determine frações simples representadas nas figuras: partes de um inteiro
K.3 Determine frações simples representadas nas figuras: partes de um grupo
K.4 Interprete as frações: barras de frações
K.5 Interprete as frações: modelos de área
K.6 Determine as frações: barras de frações
K.7 Determine as frações: modelos de área
K.8 Interprete as frações nas retas numéricas
K.9 Determine as frações das retas numéricas

Medição e posição

L.1 Meça usando objetos
L.2 Meça usando uma régua
L.3 Determine a temperatura indicada no termômetro
L.4 Compare os comprimentos
L.5 Localize posições na malha quadriculada
L.6 Determine a localização dos objetos - em cima e embaixo

Fonte: Matemática [200?].

10 Disponível em: br.ixl.com/math.

→ Jogos como, por exemplo, quebra-cabeça matemático, adição até 100, subtração até 100, frações e muitos outros podem ser encontrados no site abaixo:

https://www.digipuzzle.net/digipuzzle/animals/puzzles/rowmixer_daysofweek_pt.htm?language=po.

→ Se for usar matemática até 10 dá para usar o site a seguir:

https://www.digipuzzle.net/animals/monkeys/puzzles/clickmath_split.htm?language=portuguese&linkback=../../../pt/jogoseducativos/matematica-ate-10/index.htm.

Outra demanda apresentada pelos participantes de um curso de extensão para professores dos anos iniciais foi a inserção de **jogos e brincadeiras**. Kishimoto *et al*. (2011) discutem a questão do jogo e letramento em uma turma do 1º ano, em uma escola de São Paulo, que estava passando por adaptações em seu currículo. As autoras sugerem a parlenda *A galinha do vizinho* e a *Caixa surpresa* para trabalhar **a numeração até 10** (que pode ser adaptada para reforçar a ideia de dezena) (Kishimoto *et al*., 2011, p. 200). Por meio de uma história, a professora pede ajuda aos alunos para confeccionar ovos, com massinha de modelar, para que uma galinha possa chocar. Aqui, mais uma vez, a contagem numérica (e, por que não, alguns de seus termos – como dezena) é trabalhada em um contexto lúdico: a criança aprende brincando. Nesse artigo há ainda outras sugestões interessantes ao professor de 1º ano.

Uma possibilidade de ensinar matemática a partir do contexto das histórias infantis é o uso da história *Uma Joaninha Diferente*, de Regina Célio Melo. Na história, a joaninha não tinha pintas. A partir da leitura, podem-se fazer algumas conjecturas para incentivar o desenvolvimento da criatividade. Em sala, o professor pode distribuir uma quantidade de bolinhas para cada estudante (10, 12 ou outra quantidade qualquer), conforme a necessidade, as quais ele (o aluno) deve distribuir entre as asas. Nesse movimento de alocar as bolinhas nas asas da joaninha, o professor pode trabalhar os conceitos de dezena ou dúzia, simetria, adição, divisão, entre outros. Esta é, ainda, uma boa possibilidade de trabalhar as diferentes representações de um número. Por exemplo: 10=9+1=8+2=5+5 (diferentes formas de se obter a dezena).

→ O vídeo https://www.youtube.com/watch?v=prsJNR0Zbqg ensina como fazer a primeira soma usando ovos de dinossauro.

→ O vídeo https://www.youtube.com/watch?v=8L6K69vbyAI ensina uma abelha a somar potes de mel.

COMENTÁRIOS FINAIS

O principal objetivo desse capítulo foi trazer reflexões sobre o ensino de números nos anos iniciais, apontando sugestões da literatura para a sala de aula, numa tentativa de contribuir com o professor que está iniciando sua jornada no magistério nos anos iniciais, ou com aqueles que já iniciaram, mas que, de repente, querem algo novo.

Esperamos que as sugestões apresentadas possam trazer novas ideias a serem implementadas e validadas em sala de aula!

REFERÊNCIAS

A HISTÓRIA do número um. Edu Doc. Youtube, 2012. Vídeo (59 min). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=3rijdn6L9sQ. Acesso em 20 de jun. 2020.

AMARO, N. de S. N. A utilização do jogo como estratégia de aprendizagem das quatro operações com números naturais. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**: produções didático-pedagógicas (Cadernos PDE). Curitiba: Secretaria da Educação, 2013. v. 2. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_uem_mat_pdp_nilce_de_souza_neves_amaro.pdf. Acesso em: 23 jun. 2020.

ARITHMETIC. **PhET interative simulations**, [*s. l.*: *s. n.*], 2020. Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/arithmetic/latest/arithmetic_pt_BR.html. Acesso em: 20 jun. 2020.

BIONDO, A. C. **O ensino da matemática no primeiro ciclo do ensino básico**: a apropriação do sistema de numeração decimal — estudo de caso. 2017. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação) – Universidade do Porto, Porto, 2017. Disponível em: http://www.pmf.sc.gov.br/arquivos/arquivos/pdf/03_04_2018_16.28.22.9af26af0c80542004d69b1c68b36eca0.pdf. Acesso em: 15 maio 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

CASTRO, V. O. de. **A construção do conceito de sistema de numeração decimal durante a alfabetização matemática**: uma proposta de intervenção de ensino. 2016. Dissertação (Mestrado em Formação de Professor da Educação Básica) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2016. Disponível em: http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201420653D.pdf. Acesso em: 15 maio 2019.

COSTA, L. P. da; PAVANELLO, R. M. **Números e operações**: uma discussão da prática docente nos anos iniciais do ensino fundamental. Curitiba: CRV, 2017.

DANTE, L. R. **Ápis**: Matemática 1º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017a.

DANTE, L. R. **Ápis**: Matemática 2º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017b.

DICIONÁRIO Michaelis. [*S. l.*]: Editora Melhoramentos, [200?]. Disponível em: www.michaelis.uol.com.br. Acesso em: 20 jun. 2020.

IDENTIFICAR, Coloque cada número em frente quantidade. **Laboratório Virtual de Matemática**: anos iniciais, Ijuí, 2017. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/fundamental/um_nove/index.html. Acesso em: 20 jun. 2020.

IFRAH, G. **Os números**: história de uma grande invenção. 11. ed. São Paulo: Globo, 2010.

KISHIMOTO, T. M. *et al*. Jogo e letramento: crianças de 6 anos no ensino fundamental. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 37, n. 1, p. 191-210, jan./abr. 2011. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ep/v37n1/v37n1a12. Acesso em: 30 abr. 2019.

MARANHÃO, M. C.; CARVALHO, M. O que professores dos anos iniciais ensinam sobre números. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 2, n. 3, p. 7-28, jan./jun. 2009. Disponível em: http://inma.sites.ufms.br/files/2015/08/PPGEDUMAT_matematica_vol_3.pdf#page=7. Acesso em: 30 abr. 2019.

MATEMÁTICA. 1º ano. **IXL Learning**, [*s. l.*], [200?]. Disponível em: https://br.ixl.com/math/1-ano. Acesso em: 20 jun. 2020.

MELO, H. S. Matemática: uma linguagem universal. **Correio dos Açores**, Ponta Delgada, v. 97, n. 30954, p. 18, jun. 2016. Disponível em: https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/4015/1/Matem%C3%A1tica_uma%20linguagem%20universal_09_06_2016.pdf. Acesso em: 20 jun. 2020.

MOREIRA, A. J. P. **Desenvolver o sentido de número na educação pré-escolar através de experiências integradoras**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Pré-Escolar) – Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana do Castelo, 2012. Disponível em: http://repositorio.ipvc.pt/bitstream/20.500.11960/1375/1/Amelia_Moreira.pdf. Acesso em: 30 abr. 2019.

NOGUEIRA, C. M. I.; ANDRADE, D. **Conceitos básicos em educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**. Maringá: Eduem, 2011.

NOGUEIRA, C. M. I.; BARBOSA, M. R. F. As crianças, os números do cotidiano e os números da escola. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 13,

n. 2, p. 129-142, 2008. Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/426/254. Acesso em: 14 maio 2019.

PARANÁ; Secretaria de Estado da Educação; Superintendência da Educação; Departamento de Ensino Fundamental. **Coletânea de atividades**: matemática sala de apoio à aprendizagem. Curitiba: Seed, 2005. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000014235.pdf. Acesso em: 17 jun. 2020.

PEREIRA, T. M. Monte o cisne. **Laboratório Virtual de Matemática**: anos iniciais, Injuí, 2017a. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/fundamental/cisne/index.html. Acesso em: 20 jun. 2020.

PEREIRA, T. M. Veja as imagens que você pode carregar para montar um cenário. **Laboratório Virtual de Matemática**: anos iniciais. Ijuí, 2017b. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/series_iniciais/Tania_Michel/index.html.

PIRES, A. *et al*. Desenvolver o sentido de número no pré-escolar. **Exedra**, Coimbra, n. 7, p. 120-135, jul. 2013.

SALA de estudos: sistema de numeração romano. **Clubes de Matemática da OBMEP**, Rio de Janeiro, 2005. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudos-sistema-de-numeracao-romano. Acesso em: 8 jun. 2020.

SCLIAR-CABRAL, L. Avanços das neurociências para a alfabetização e a leitura. **Letras de hoje**, Porto Alegre, v. 48, n. 3, p. 277-282, jul./set. 2013. Disponível em: http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/fale/article/view/12634/9905. Acesso em: 30 abr. 2019.

SILVA, M. E. *et al*. Como trabalhar as operações de adição e subtração, a partir de jogos, como: baralho, bingo e dominó? **Portal do Professor**, [*s. l.*], 2011. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=35693. Acesso em: 17 jun. 2020.

THIES, V. G.; ALVES, A. M. M. Material didático para os anos iniciais: ler, escrever e contar. *In*. NOGUEIRA, G. M. (org.). **Práticas pedagógicas na educação infantil e nos anos iniciais do ensino fundamental**: diferentes perspectivas. Rio Grande: Editora da FURG, 2013. p. 183-200. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/antoniomauricio/files/2015/02/caderno-completo-16-texto-material-didatico-pagina-183.pdf. Acesso em: 23 jun. 2020.

TODOLIVRO. **Escolinha flip-book combinações divertidas**. [*S. l.: s. n.*], [200?].

VALENTE, A. A escrita espelhada como manifestação do pensamento pré-operatório. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 51, [*s. n.*], p. 80-83, nov. 1984. Disponível em: http://publicacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/cp/article/view/1463/1458. Acesso em: 30 abr. 2019.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino de matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. da UFPR, 2014.

VILLAS BÔAS, M. C. **Construção da noção de número na educação infantil**: jogos como recurso tecnológico. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

WALL, E. S. **Teoria dos números para professores do ensino fundamental**. 1. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2014.

Sites indicados para consulta:

https://escolakids.uol.com.br/matematica/diferencas-entre-numero-numeral-e-algarismo.htm – busca diferenciar os termos número, numeral e algarismo.

http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa7a.html – parte da definição de número, numeral e algarismo para trabalhar os sistemas de numeração.

https://www.youtube.com/watch?v=3rijdn6L9sQ – *link* para o filme "a história do número 1", que faz um passeio pela história da matemática.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000014235.pdf – coletânea de atividades para apoio à aprendizagem sobre diversos assuntos, inclusive números.

https://www.youtube.com/watch?v=MuaLyxZ3BDs – jogo do nunca 10 – usa o material dourado para explicar a relação entre unidade, dezena e centena, e porque usamos o "vai 1" nas continhas de adição.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=34690 – plano de aula sobre como ensinar o conceito de dezena.

https://www.youtube.com/watch?v=07whuRDYk6g – Sistema de Numeração, sugere como introduzir os sistemas de numeração.

http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/fundamental/um_nove/index.html

– laboratório virtual de matemática, com jogos para associar o numeral à quantidade.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=48843 – plano de aula que trata dos diferentes contextos dos números

http://mathema.com.br/materiais-de-referencia/reflexoes-2/ – propostas de formação em diferentes áreas da Matemática.

http://seculomatematica.blogspot.com/2014/11/a-escrita-dos-calculos-e-as-tecnicas.html – fala sobre o sistema de numeração decimal.

http://www.qvl.com.br – sobre o quadro valor de lugar.

http://paje.fe.usp.br/~labmat/edm321/1999/material/_private/abaco.htm – traz exemplos de como usar o ábaco.

https://mentalidadesmatematicas.org.br/na-pratica/atividades – traz várias atividades para os anos iniciais do Ensino Fundamental, separadas por ano.

br.ixl.com/math – apresenta várias atividades para se trabalhar com todo o conteúdo de matemática dos anos iniciais.

phet.colorado.edu/en/simulation/arithmetic – contém jogos para trabalhar as operações aritméticas.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=35693 – plano de aula “como trabalhar as operações de adição e subtração a partir de jogos como: baralho, bingo e dominó?”

https://www.somatematica.com.br/dicionarioMatematico/n.php. – dicionário sobre números e outros termos que começam com N.

https://www.youtube.com/watch?v=AqNwRxUq1bk – vídeo sobre os números romanos.

{02}

FRAÇÕES E OPERAÇÕES

Angela Mognon*
Viviane Colucci Boromelo**

"As frações não são algo que se tenha que saber, mas sim algo que se tem que compreender, e não é possível compreendê-las antes de ter uma suficiente experiência com elas. [...] A chave do êxito na iniciação ao estudo das frações é a variedade, a troca, a diversidade de pontos de vista"

(Goutard, 1964 *apud* García, 2003, p. 18).

* Mestre, especialista e licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora da carreira Ensino Básico, Técnico e Tecnológico da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Campo Mourão.

** Mestre e licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora do Magistério Superior da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Campo Mourão. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em equações diferenciais.

INTRODUÇÃO

Apesar do tema frações ser um assunto básico em matemática, desperta dificuldades em todos os níveis de ensino. É necessário discutir esse tema com os professores do Ensino Fundamental 1, uma vez que são eles que iniciam o trabalho com as crianças. “A atividade de ensino do professor deve gerar e promover a atividade do estudante, deve criar nele um motivo especial para a sua atividade: estudar e aprender teoricamente sobre a realidade” (Moura *et al.*, 2010, p. 213).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017), orienta que já no segundo ano do Ensino Fundamental – Anos Iniciais o ensino de frações deve ser contemplado com problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais. Ainda, de acordo com a BNCC (Brasil, 2017), para que os alunos aprofundem a noção de número, é importante que eles desenvolvam tarefas como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária, sendo que até o quinto ano do Ensino Fundamental – Anos Iniciais o desenvolvimento de frações está nas ideias associadas ao número fracionário.

Você já parou para pensar no significado dos termos: fração, número fracionário e número racional?

Fração: representa tanto uma parte da unidade quanto o registro numérico associado a essa parte.
Número fracionário: é o número, único (embora com várias representações) associado a toda uma classe de frações equivalentes. Expressa o resultado da divisão de dois números naturais. É um número positivo.
Número racional: são os números que expressam resultados das divisões de dois números inteiros (o segundo não nulo). Os resultados dessas divisões também podem aparecer na representação decimal. Os números racionais podem ser positivos, negativos ou nulo (Bertoni, 2009, p. 78).

De acordo com Perlin (2014), as frações têm origem com o surgimento dos números racionais, a partir da necessidade de medida. Surgiu na Idade do Bronze em culturas mais avançadas, como a egípcia, decorrente da necessidade de se criar subunidades do cúbito (medida da ponta do dedo médio ao cotovelo do faraó ≈ 45 cm). Para medir, os medidores, chamados “esticadores de corda”, utilizavam uma corda com diversos nós, cuja distância entre dois nós consecutivos era a medida de um cúbito. Para medir uma porção de terra, os medidores comparavam a corda com o contorno da porção de terra e contavam a quantidade de vezes que o cúbito cabia no contorno. Mas nem sempre o cúbito cabia um número inteiro de vezes no comprimento a ser medido, sendo necessário fracionar a unidade de medida, surgindo assim o conceito de fração.

> As frações não foram consideradas desde sua origem como números; nem se concebia a noção de fração geral m/n, como m vezes o inverso de n. Os egípcios, por exemplo, só conheciam as frações denominadas “unitárias” e só exprimiam as frações ordinárias através das somas de frações desse tipo (por exemplo: 7/12=1/3+1/4) (Ifrah, 1996, p. 78).

Para Nogueira e Andrade (2011) as frações indicam partes de coisas e sua representação precisa deixar claro isso, indicando a quantidade de partes de um determinado tamanho de uma coisa e exemplificam:

> Se digo que comi 2/3 de um pão, o número 2 indica o número de partes que comi do pão, por isso é chamado de numerador. Mas apenas saber quantas partes não é suficiente para saber, com certeza, quanto do pão eu comi. É preciso saber ainda de que tamanho eram as partes. Isso é indicado pelo número 3, ou seja, o pão foi dividido em três partes iguais. Como o número 3 indica de que tipo são as partes, ou seja, indica o nome das partes, é chamado de denominador (denomina, indica o nome) (Nogueira; Andrade, 2011, p. 136).

Assim,

$$\frac{2}{3} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ Indica o número de partes "numerador"} \\ \rightarrow \text{ Indica o nome das partes "denominador"} \end{array}$$

Dependendo de sua representação, as frações recebem nomes especiais: frações próprias, impróprias, aparentes ou mistas. De acordo com Bertoni (2009) essas frações são classificadas da seguinte forma:

a) **frações próprias** são aquelas que representam quantidades menores do que uma unidade. Exemplos: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$;

b) **frações impróprias** são aquelas que representam quantidades maiores do que uma unidade. Exemplos: $\frac{5}{2}$, $\frac{16}{7}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{9}{4}$;

c) **frações aparentes** são aquelas que representam um número exato de unidades. Podem ser identificadas com números naturais. Exemplos: $\frac{8}{8}$ (igual a 1), $\frac{16}{4}$ (igual a 4), $\frac{10}{2}$ (igual a 5);

d) **frações mistas** (**ou números mistos**) são aquelas em que as unidades aparecem separadas da parte fracionária. Exemplo: $3\frac{1}{4}$. A fração mista é sempre maior do que a unidade e pode sempre ser escrita na forma de uma fração imprópria: $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ (esse número deve ser lido como 3 "e" $\frac{1}{4}$, e pensado como $3 + \frac{1}{4}$).

Você já sentiu necessidade de usar o conceito de frações?

A necessidade de usar frações no nosso dia a dia surge em diversas situações e dentre inúmeros exemplos, citamos alguns:

a) ao preparamos um suco em que devemos colocar uma parte de suco concentrado para cada duas partes de água;

b) ao fazermos um bolo que na receita diz para acrescentar um quarto de xícara de óleo;

c) ao dividirmos uma conta na lanchonete com colegas.

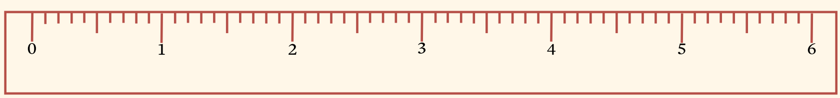
Em sua pesquisa, Perlin (2014, p. 44) conclui que "[...] a compreensão do conceito das frações é necessária aos professores, não apenas o entendimento dos diferentes significados, mas também a relação entre eles". A autora informa ainda que os resultados de sua pesquisa apontam uma defasagem do conhecimento dos professores em relação aos números racionais e que essa dificuldade reflete na sua prática (Perlin, 2014).

A aprendizagem do conceito de fração poderá ser bem-sucedida se for explorado em situações que envolvam os cinco significados: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo (Nunes *et al.*, 2003 *apud* Merlini, 2005). A seguir, apresentamos os cinco significados e alguns exemplos de cada um deles, cuja discussão referente às suas respostas pode ser consultada nas referências citadas na fonte de cada figura.

Significado Número: a fração é representada por pontos na reta numérica, podendo ser representada na forma decimal ou como um número misto, como mostra os exemplos apresentados nas Figura 1 e 2.

Figura 1 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado número de todo contínuo

5) Idenfique as frações $\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{2}$ na reta numérica abaixo:



Fonte: Canova (2006).

Figura 2 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado número de todo contínuo

10) Represente na forma de número decimal as seguintes frações:

A) $\frac{1}{5}$ ____ B) $\frac{8}{5}$ ____ C) $\frac{6}{4}$ ____

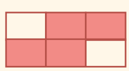
Fonte: Canova (2006).

Significado Parte-Todo: o conceito de fração referente a esse significado consiste na partição de um todo (discreto ou contínuo) em partes iguais. Assim, se um todo foi dividido em n partes iguais, na fração $^{m}/_{n}$, o denominador *n* representa o número de partes que este todo foi dividido e o numerador *m* quantas partes foram consideradas. As Figuras 3, 4 e 5 a seguir apresentam exemplos de atividades que exploram o significado parte-todo. Nas Figuras 3 e 4 as atividades referem-se a todos contínuos e, na Figura 5, temos um exemplo de todo discreto. A atividade da Figura 4 chama a atenção de que o todo deve ser dividido em partes iguais. Além disso, o item 1.2 desta atividade possibilita ainda avaliar o entendimento referente às frações equivalentes.

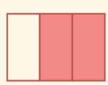
Figura 3 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado parte-todo de todo contínuo

1) Observe as figuras abaixo.

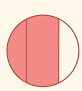
1.1 Responda qual a fração que representa as partes pintadas de cada figura.

A) 

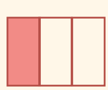
( ) **Não é possível** saber qual é a fração.
( ) É **possível** saber, e a fração correspondente é ___

B) 

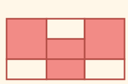
( ) **Não é possível** saber qual é a fração.
( ) É **possível** saber, e a fração correspondente é ___

C) 

( ) **Não é possível** saber qual é a fração.
( ) É **possível** saber, e a fração correspondente é ___

D) 

( ) **Não é possível** saber qual é a fração.
( ) É **possível** saber, e a fração correspondente é ___

E) 

( ) **Não é possível** saber qual é a fração.
( ) É **possível** saber, e a fração correspondente é ___

1.2 Com relação às figuras acima, indique quais representam dois terços.

Fonte: Canova (2006).

Figura 4 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado parte-todo de todo contínuo

6) Um eletricista cortou uma extensão de fio em 5 pedaços iguais. Usou 2 pedaços na obra A e 3 pedaços na obra B.

A) Que fração representa a quantidade de fio usado na obra A em relação ao total de pedaços? ______________

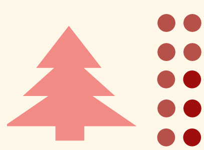
B) Que fração representa a quantidade de fio usado na obra B em relação ao total de pedaços? ______________

C) Que fração representa a quantidade de fio usado nas duas obras em relação ao total de pedaços? ___________

Fonte: Canova (2006).

Figura 5 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado parte-todo de todo discreto

11) Para enfeitar uma pequena árvore de natal, Patrícia usou 10 bolinhas.



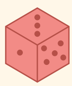
Que fração representa a quantidade de bolinhas vermelhas em relação ao total? ____

Fonte: Canova (2006).

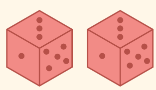
Significado Medida: os exemplos apresentados nas Figuras 6 a 9, a seguir, abordam frações no significado medida. Nelas, o exemplo ilustra o significado medida de quantidades discretas, em que uma quantidade é medida pela relação entre duas variáveis. Tanto no exemplo da Figura 6, como no exemplo da Figura 9, temos que a probabilidade de um evento acontecer é medida pelo quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos. Nas Figuras 7 e 8, os exemplos abordam o significado medida de quantidade contínua. No exemplo da Figura 7, a mistura de tinta azul e branca representa o todo, enquanto que na Figura 8, o todo é a quantidade de argamassa.

Figura 6 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado medida multiplicativo com todo discreto

3) A) Jogando apenas uma vez um dado de 6 faces, qual a fração que representa a chance de tirar o número 3? ____



B) Jogando apenas uma vez dois dados juntos, cada um com 6 faces, qual a fração que representa a chance de tirar o número 3 nos dois dados? ____

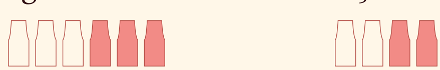


Fonte: Canova (2006).

Figura 7 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado medida com todo contínuo

13) A mistura de tinta vai ter a mesma cor na segunda e terça-feira?

Segunda-feira | Terça-feira



A) Que fração representa a quantidade de tinta rosa em relação a mistura das tintas rosa e branca? ____

B) Na segunda-feira? ____

C) E na terça-feira? ____

Fonte: Canova (2006).

Figura 8 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado medida multiplicativo com todo contínuo

10) Para fazer certa quantidade de argamassa são necessárias 2 medidas de cimento para 5 medidas de areia. Que fração representa a quantidade de cimento em relação a toda a argamassa? __________

Fonte: Canova (2006).

Figura 9 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado medida de todo discreto

8) Para participar do sorteio de uma casa realizado por um canal de televisão, foram enviadas 400 cartas, sendo que 20 delas foram enviadas por Tereza.

Qual a fração que representa a chance de Tereza ser sorteada, ou seja, ganhar a casa?

Fonte: Canova (2006).

Significado Quociente: esse significado ocorre em situações em que está presente a ideia de divisão, como ilustram os exemplos das Figuras 10, 11 e 12. Na Figura 10, o exemplo explora o todo contínuo, podendo ser exploradas também frações equivalentes, pois o número de crianças é triplicado assim como o número de bolos. No exemplo da Figura 11, é abordado o significado quociente para quantidades discretas, enquanto que na Figura 12 o exemplo enfoca o todo contínuo e essa questão chama a atenção para a importância da escolha do todo que será considerado. Observe que, se considerarmos que cada barra representa um todo e se cada barra for dividida em quatro partes iguais, cada criança receberá $1/4$ de cada barra, logo a quantidade de chocolate que cada criança receberá será $3/4$. No entanto, se considerarmos o todo como sendo as três barras juntas, cada criança receberá $3/12$ do total de chocolates.

Figura 10 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado quociente multiplicativo com todo contínuo

2) Em uma festa foram distribuídos igualmente 3 bolos para 7 crianças, enquanto em outra festa foram distribuídos igualmente 9 bolos, do mesmo tamanho, para 21 crianças.

Todas as crianças receberam a mesma quantidade de bolo?

☐ Sim ☐ Não

Descreva como você chegou nessa conclusão ___________

Fonte: Canova (2006).

Figura 11 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado quociente multiplicativo com todo discreto

12) Fernanda tem 27 vasos de violeta para distribuir igualmente entre 9 salas. Ana também irá decorar outras 6 salas e possui 24 vasos de violeta para serem distribuídos igualmente entre elas.

A) As salas de Fernanda e de Ana terão a mesma quantidade de vasos?

☐ Sim. Descreva como você chegou nessa conclusão. ___________
☐ Não. Pois as salas de Fernanda terão ____ vasos e as salas de Ana terão ____ vasos.

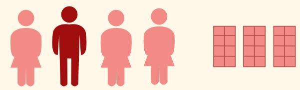
B) Que fração representa a quantidade de vasos distribuídos em cada sala de Fernanda? ___________

C) Que fração representa a quantidade de vasos distribuídos em cada sala de Ana? ___________

Fonte: Canova (2006).

Figura 12 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado quociente multiplicativo com todo contínuo

5) Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate.



A) Cada criança receberá 1 chocolate inteiro?

Sim Não

B) Cada criança receberá pelo menos metade de um chocolate?

Sim Não

C) Que fração de chocolate cada criança receberá?

Fonte: Canova (2006).

Significado Operador Multiplicativo: está associado ao papel de transformação, isto é, a ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo. Esse significado surge quando a fração age sobre um número, multiplicando-o pelo numerador e dividindo-o pelo denominador, transformando o número nesse processo. O resultado dessa transformação pode ser um número maior ou menor do que o número que sofre a ação. As Figuras 13, 14, 15 e 16 apresentam exemplos desse significado.

Figura 13 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado operador multiplicativo com todo discreto

4) Em uma gincana, os três primeiros alunos que terminaram as tarefas ganharam um número de bolas, do total de 35, conforme a classificação. Paulo ganhou $\frac{4}{14}$ das bolas, Daniel $\frac{1}{7}$ e Thiago $\frac{4}{7}$.

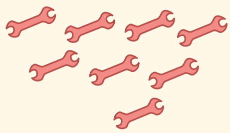
A) Quem chegou em 1°, 2° e 3° lugar respectivamente?

B) Qual a quantidade de bolas que Paulo, Daniel e Thiago ganharam respectivamente? ___________

Fonte: Canova (2006).

Figura 14 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado operador multiplicativo com todo discreto

7) Rodrigo gostaria de abrir uma mecânica. Para isso ele precisa de $\frac{3}{6}$ das ferramentas representadas ao lado.

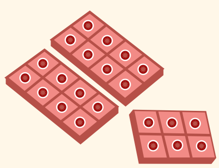


Quantas ferramentas ele precisa? ____

Fonte: Canova (2006).

Figura 15 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado operador multiplicativo de todo contínuo

Em uma festa, Marina, que adorava doces, comeu $\frac{9}{11}$ dos brigadeiros representados ao lado.



Quantos brigadeiros Marina comeu? ____

Fonte: Canova (2006).

Figura 16 – Exemplo de atividade envolvendo fração no significado operador multiplicativo de todo contínuo

14) Fátima e Plínio compraram uma caixa de chocolate que continha 40 barras iguais. Plínio pegou para ele $\frac{7}{10}$ das barras.

A) Plínio ficou com mais da metade do total de barras de chocolate?

Sim Não

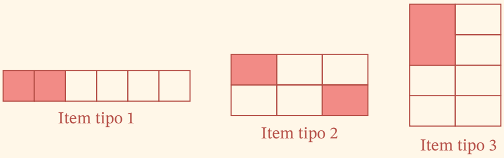
B) Quantas barras Plínio pegou para ele?

Fonte: Canova (2006).

Considerando a presença muito forte da dupla contagem (contar o número total de partes e então as partes pintadas para se determinar a fração representada na figura) em crianças entre 10 e 11 anos de idade, como mostra a pesquisa de Canova (2006), é muito importante que sejam trabalhadas atividades como as que estão representadas nas Figuras 17 e 18:

a) Que frações estão representadas nas Figuras?

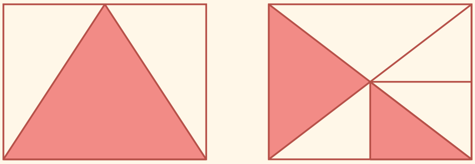
Figura 17 – Exemplo 1 de dupla contagem



Fonte: Canova (2006).

b) Qual fração do todo representa a parte colorida?

Figura 18 – Exemplo 2 de dupla contagem



Fonte: Canova (2006).

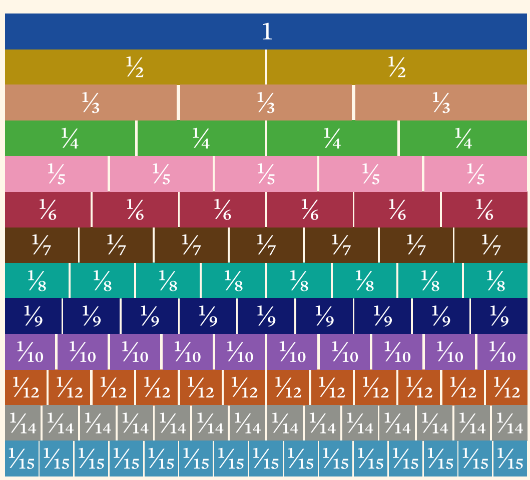
FRAÇÕES EQUIVALENTES E OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

Diversas dificuldades surgem no processo de ensino e aprendizagem das operações com frações nos anos iniciais. É preciso superar essas dificuldades por meio de atividades que motivem e levem os alunos a compreender os significados dos diferentes registros. Segundo Caldeira (2009, p. 582):

> Os materiais manipulativos são facilitadores da aprendizagem matemática visto que: i) se baseiam na experiência; ii) a aprendizagem sensorial é a base de toda a experiência; iii) a aprendizagem caracteriza-se por estádios distintos de desenvolvimento; iv) a aprendizagem é facilitada pela motivação; v) a aprendizagem constrói-se do concreto para o abstrato; vi) a aprendizagem requer participação e envolvimento ativo do aluno.

Nesse contexto, apresentamos um estudo das frações equivalentes, assim como das operações com frações: adição, subtração, multiplicação e divisão, fazendo uso do material concreto, conhecido como material de Cuisenaire, também chamado de "jogo de réguas de frações", ilustrado na Figura 19. O jogo pode ser construído em EVA e a escolha das cores pode variar de acordo com o gosto ou necessidade. No jogo de réguas, ilustrado na Figura 19, a régua azul, que corresponde a UNIDADE, foi construída com 30 cm de comprimento e 2 cm de largura. As réguas amarelas, que correspondem a UM MEIO da unidade, têm 15 cm de comprimento e 2 cm de largura cada uma delas. As réguas na cor salmão, que correspondem a UM TERÇO da unidade, têm 10 cm de comprimento e 2 cm de largura cada uma delas. As réguas na cor verde-claro, que correspondem a UM QUARTO da unidade têm $^{30}/_{4}$ cm de comprimento e 2 cm de largura cada uma delas. E assim sucessivamente.

Figura 19 – Jogo de réguas

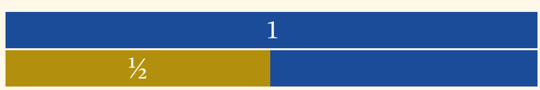


Fonte: Autoria própria.

Antes de iniciar as atividades com o jogo de réguas, recomenda-se, após distribuir os kits com as réguas, apresentar o material aos estudantes fazendo questionamentos, tais como os que são apresentados nas atividades 1, 2 e 3:

1) Solicitar aos estudantes que sobreponham uma régua amarela sobre a régua azul (unidade) e em seguida questionar que parte da régua azul (unidade) foi coberta pela régua amarela. Espera-se que respondam "metade" ou "um meio". É importante realizar essa atividade com as outras réguas, com o objetivo de que os estudantes compreendam que a régua azul-escura representa a UNIDADE ou TODO e compreendam o significado que cada parte da unidade representa, ou seja: a régua amarela representa UM MEIO da unidade (Figura 20), a régua salmão representa UM TERÇO da unidade e assim sucessivamente.

Figura 20 – Representação figural (atividade 1)



Fonte: Autoria própria.

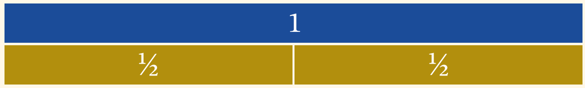
Com o objetivo de levar os estudantes a compreenderem que $^{n}/_{n} = 1$, o professor pode fazer questionamentos como o apresentado na atividade 2.

→ Professor, em todas as atividades, é importante que os estudantes desenhem em seu caderno a representação figural feita com o jogo de réguas junto à representação numérica.

2) Quantas réguas amarelas são necessárias para se obter a medida da régua azul (unidade)?

Conclua com os estudantes que a régua amarela cabe duas vezes na régua azul (unidade) e que isso significa que dois meios é igual a um inteiro (Figura 21).

Figura 21 – Representação figural (atividade 2)



Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{2}{2} = 1$.

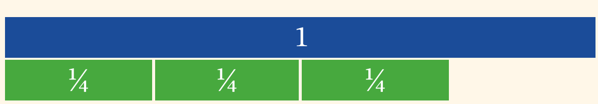
Solicitar aos estudantes que repitam a atividade 2 com outras réguas.

→ No momento em que está sendo apresentado o material, é importante que o estudante compreenda que o numerador da fração se refere à quantidade de réguas tomadas e que o termo denominador se refere ao nome dado a tais réguas.

Para isso, com os estudantes, o professor pode fazer alguns exemplos, como representar a fração obtida quando se toma três réguas verdes (três quartos), nesse caso, a unidade foi dividida em quatro partes iguais e foram tomadas três dessas partes. Isto é, o denominador é igual a quatro e o numerador é igual a três.

3) Representar a fração da unidade obtida considerando três réguas verde-claras (Figura 22).

Figura 22 – Representação figural (atividade 3)



Fonte: Autoria própria.

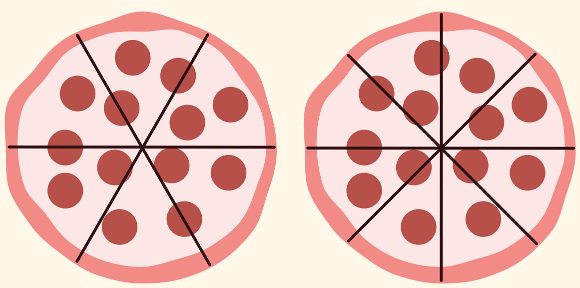
Representação numérica: $\frac{3}{4}$.

Outros exemplos sobre representação de frações podem ser apresentados se for necessário.

Após explorar o material, recomenda-se propor atividades, solicitando aos estudantes que façam comparações entre frações. Pode-se iniciar com uma situação como a atividade 4, retirada de Canova (2006, p. 39).

4) Suponha que você tem duas pizzas do mesmo tamanho e você corta uma delas em 6 pedaços de tamanhos iguais e a outra em 8 pedaços de tamanhos iguais. Se você recebe um pedaço de cada pizza, de qual delas você recebe o maior pedaço?

Figura 23 – Comparação entre frações (atividade 4)



Fonte: Autoria própria.

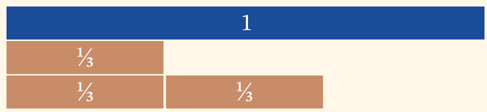
Após ouvir as respostas dos estudantes, é interessante perguntar como eles pensaram para responder. Na sequência, solicite que façam as atividades de comparação de fração utilizando o jogo de régua mostrado a seguir.

Atividades comparando frações com denominadores iguais

5) Comparar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

Oriente os estudantes para que representem as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, utilizando o jogo de réguas. O esperado é que eles representem-as como ilustra a Figura 24. É importante questionar os estudantes sobre os tamanhos obtidos, indagando-os sobre qual fração é maior. Espera-se que a resposta seja que dois terços é maior do que um terço.

Figura 24 – Representação figural (atividade 5)



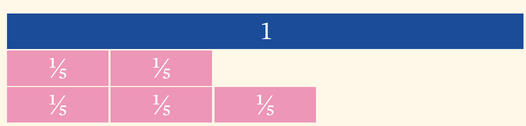
Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$.

6) Comparar as frações $2/5$ e $3/5$.

Como no exemplo anterior, solicitar aos estudantes que representem as frações $2/5$ e $3/5$, utilizando o jogo de réguas. O esperado é que eles as representem como ilustra a Figura 25.

Figura 25 – Representação figural (atividade 6)



Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$.

Pode-se propor outros exemplos desse tipo. Ao final das atividades, com os estudantes, recomenda-se que seja concluído que:

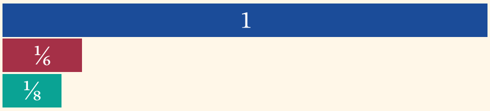
→ Nos casos em que os denominadores das frações são iguais, a quantidade de réguas tomadas é que determina qual será a fração maior, ou seja, considerando duas frações com denominadores iguais, a maior fração será aquela que tiver o maior numerador.

Atividade comparando frações com numeradores iguais

7) Comparar as frações $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{8}$.

Espera-se que os estudantes representem como ilustra a Figura 26 e que concluam que a fração um sexto é maior do que a fração um oitavo.

Figura 26 – Representação figural (atividade 7)



Fonte: Autoria própria.

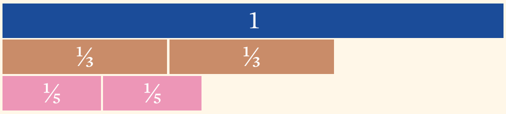
Representação numérica: $\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$.

Nesse momento o professor pode retornar à atividade 4 referente à quantidade de pizza.

8) Comparar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{5}$.

O esperado é que eles as representem como ilustra a Figura 27 e que entendam que a fração dois terços é maior do que a fração dois quintos.

Figura 27 – Representação figural (atividade 8)



Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$.

Outros exemplos como esses podem ser repetidos, sendo importante, com os estudantes, concluir que:

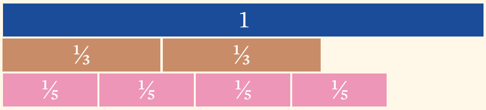
→ Nos casos em que os numeradores das frações são iguais, a maior fração será aquela que tiver o menor denominador.

Atividades comparando frações com numeradores e denominadores distintos

9) Comparar as frações $2/3$ e $4/5$.

Solicitar aos estudantes que representem as frações $2/3$ e $4/5$, utilizando o jogo de réguas, questionando-os sobre qual fração é maior. Espera-se que eles as representem como ilustra a Figura 28 e, por meio do material, concluam que dois terços é menor do que quatro quintos.

Figura 28 – Representação figural (atividade 9)



Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$.

Pode-se propor outras atividades como essas com denominadores e numeradores diferentes, chamando a atenção dos estudantes de que não é difícil perceber qual fração é maior, utilizando o jogo de réguas, mas que nesses casos em que temos numeradores e denominadores diferentes não é possível verificar qual é maior, comparando os numeradores (como no caso das frações com denominadores iguais), nem comparando os denominadores (como no caso de frações com numeradores iguais).

Nesse momento é importante perguntar aos estudantes como eles fariam para comparar frações como $18/24$ e $15/30$, por exemplo.

Comente com eles que o uso do jogo de réguas nesse caso se torna inviável, e que será estudada uma outra forma para compararmos as frações, usando frações equivalentes, como veremos na sequência.

FRAÇÕES EQUIVALENTES

O conceito de frações equivalentes é fundamental no estudo das frações, pois elas são úteis para entendermos as operações com frações, assim como para compará-las e simplificá-las. Com intuito de compreender tal conceito, apresentamos algumas atividades.

10) Utilizando o jogo de réguas, sobreponha à unidade a fração um meio. Feito isso, encontrem réguas da mesma cor, diferentes da amarela, que possam cobrir a fração um meio.

Dentre as possíveis representações, espera-se que os estudantes apresentem uma igual a que ilustramos na Figura 29.

Figura 29 – Representação figural (atividade 10)

Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Devemos questionar quantas réguas cada um utilizou para representar a fração “um meio”, e que frações da unidade essas réguas representam.

Nessa representação, o esperado é que os estudantes respondam que foram utilizadas duas réguas que representam quartos da unidade.

→ É importante explicar que, apesar das representações numéricas das duas frações serem diferentes, elas representam a mesma quantidade e essas frações que representam a mesma quantidade são chamadas de frações equivalentes.

O professor deve chamar a atenção dos estudantes de que para se obter a fração $\frac{1}{2}$ é necessário tomar uma parte das duas em que foi dividida a unidade.

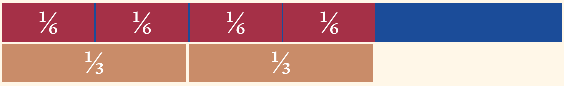
E que para se obter a fração $\frac{2}{4}$ toma-se duas partes das quatro em que foi dividida a unidade, ou seja, multiplicando o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{2}$ por 2, obtemos a fração $\frac{2}{4}$, isto é,

$$\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}.$$

11) Utilizando o jogo de réguas, sobreponha à unidade a fração quatro sextos. Em seguida, encontrem réguas da mesma cor, diferente das de quatro sextos, que possam cobrir a fração quatro sextos.

Dentre as representações possíveis, espera-se que os estudantes apresentem uma igual a que ilustramos na Figura 30.

Figura 30 – Representação figural (atividade 11)



Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Como na atividade 10, é importante perguntar aos estudantes quantas réguas cada um utilizou para cobrir a fração quatro sextos, e que frações da unidade essas réguas representam. Na representação ilustrada na Figura 30, espera-se que eles respondam que foram utilizadas duas réguas que representam dois terços da unidade.

→ Novamente, chame a atenção dos estudantes que, apesar das representações numéricas das frações serem diferentes, elas representam a mesma quantidade.

Assim como na atividade 10, é importante comentar com os estudantes que, neste caso, para obtermos a fração $\frac{2}{3}$ tomamos duas partes das três em que foi dividida a unidade e que para obtermos a fração $4/6$ tomamos quatro partes das seis em que foi dividida a unidade, ou seja, dividindo o numerador e o denominador da fração $4/6$ por 2, obtemos a fração $2/3$ isto é,

$$\frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}.$$

De maneira análoga, como foi discutido nas atividades 10 e 11, recomenda-se discutir com os estudantes as outras respostas apresentadas por eles e, se for necessário, proponha outros exemplos com o objetivo de que compreendam que:

→ Para encontrarmos frações equivalentes a uma fração dada, multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador por um mesmo número natural diferente de zero.

Na próxima atividade vamos responder à questão feita no final da atividade 9.

12) Qual das frações $18/24$ e $15/30$ é maior?

Recomenda-se iniciar essa atividade solicitando aos estudantes que determinem uma fração equivalente à fração $18/24$ com o menor denominador possível. Espera-se que eles encontrem a fração $3/4$. Em seguida, peça aos estudantes que determinem uma fração equivalente à fração $15/30$ com o menor denominador possível. O esperado é que encontrem a fração $1/2$. É importante explicar que ao determinarmos tais frações equivalentes, estamos simplificando as frações $18/24$ e $15/30$. Conclua com eles que

$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4} \; e \; \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

e explique que para comparar as frações $18/24$ e $15/30$ basta comparar as frações $3/4$ e $1/2$. Oriente para que eles façam isso usando o jogo de réguas e pergunte como eles poderiam fazer a comparação sem usar o material concreto. Chame a atenção dos estudantes ao fato de que eles poderiam ter representado as frações encontradas com o mesmo denominador, isto é,

$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4} \; e \; \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4},$$

logo poderiam apenas comparar os numeradores, concluindo que $3/4 > 2/4$ e assim concluir que $18/24 > 15/30$.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

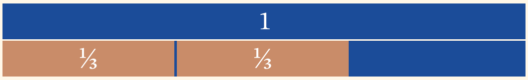
Atividades de adição e subtração com denominadores iguais

13) Utilizando o jogo de réguas, determine as operações:

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$ b) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} =$ c) $\frac{2}{8} + \frac{7}{8} =$

Para responder o item (a) o professor deve orientar os estudantes para que encontrem duas réguas que representam terços da unidade e sobreponham à régua azul (unidade). Espera-se que eles representem como na Figura 31.

Figura 31 – Representação figural (atividade 13a)



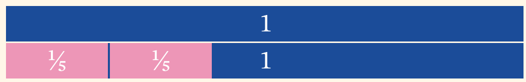
Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Em seguida, deve-se perguntar que fração da unidade estas duas réguas juntas representam. Espera-se que eles respondam dois terços.

Para responder o item (b), orientar os estudantes para que peguem duas réguas que representam quintos da unidade e sobreponham à régua azul (unidade). Espera-se que eles sejam representados como na Figura 32.

Figura 32 – Representação figural (atividade 13b)



Fonte: Autoria própria.

Feito isso, solicite que retirem uma das réguas que representam quintos e pergunte que fração restou. O esperado é que eles respondam que sobrou um quinto (Figura 33).

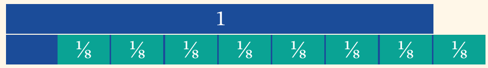
Figura 33 – Representação figural (atividade 13b)

Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$.

No item (c) o professor deve orientar os estudantes para que encontrem as réguas que representam oitavos da unidade e sobreponham à régua azul (unidade), como fizeram no item (a). O esperado é que eles sobreponham dois oitavos e que busquem mais sete réguas de um oitavo e percebam que faltará uma. Espera-se ainda que cheguem à conclusão de que a soma será a fração que representa nove oitavos da unidade (Figura 34). O professor deve concluir junto deles que nesse caso o resultado é um número maior que a unidade, isto é, o resultado representa uma fração imprópria.

Figura 34 – Representação figural (atividade 13c)



Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{2}{8} + \frac{7}{8} = \frac{9}{8}$.

Chame a atenção dos estudantes ao fato de que o numerador é maior que o denominador.

Outros exemplos poderão ser propostos a fim de que os estudantes consigam responder a seguinte pergunta:

→ Se você tivesse que escrever uma fórmula (regra) para indicar como somar/subtrair frações com denominadores iguais, explique o que você escreveria.

O objetivo dessa pergunta é saber se eles entenderam que:

→ Na soma ou subtração de frações com denominadores iguais, deve-se manter o denominador e somar/subtrair os numeradores.

Na sequência, recomenda-se trabalhar mais atividades sobre soma/subtração de frações com denominadores iguais, incentivando os estudantes a resolver sem utilizar o jogo de réguas.

Atividades de adição e subtração com denominadores diferentes

14) Utilizando o jogo de réguas, determine as operações:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} =$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$ c) $\frac{4}{9} - \frac{1}{3} =$ d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{7} =$ e) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} =$

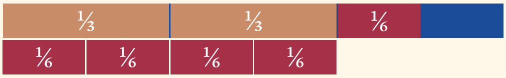
Para iniciar a resolução do item (a) recomenda-se orientar os estudantes para que encontrem duas réguas que representam terços da unidade e sobreponham à régua azul (unidade), em seguida sobreponham uma régua que representa um sexto da unidade. Espera-se que eles façam a representação como na Figura 35.

Figura 35 – Representação figural (atividade 14a)

Fonte: Autoria própria.

Na sequência, é importante perguntar que fração da régua azul (unidade) foi coberta pelas três réguas. Nesse momento deve-se chamar a atenção dos estudantes ao fato de que as réguas têm tamanhos diferentes, e concluir, com eles, que isso significa que as frações têm denominadores diferentes. Em seguida, o professor deve orientar os estudantes a encontrar réguas de tamanhos iguais que cubram a mesma parte da unidade coberta pelos dois terços seguidos de um sexto. O esperado é que eles percebam que dois terços é equivalente a quatro sextos e que façam a representação como a da Figura 36.

Figura 36 – Representação figural (atividade 14a)



Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Concluindo, somar dois terços com um sexto é equivalente a somar quatro sextos com um sexto, onde obtemos cinco sextos.

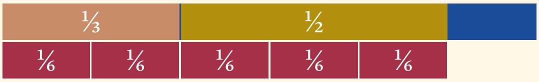
Assim como na resolução do item (a), para resolver o item (b) recomenda-se orientar os estudantes para que sobreponham à régua azul (unidade) uma régua que representa um terço da unidade, seguida de uma régua que representa um meio da unidade. O esperado é que eles façam a representação como na Figura 37.

Figura 37 – Representação figural (atividade 14b)

Fonte: Autoria própria.

Como no item anterior devemos perguntar que fração da régua azul (unidade) foi coberta pelas duas réguas, chamando a atenção dos estudantes ao fato de que, novamente, as réguas têm tamanhos diferentes, o que significa que as frações têm denominadores diferentes. Da mesma maneira como foi feito no item (a), o professor deve orientar os estudantes a encontrar réguas de tamanhos iguais que cubram a mesma parte da unidade coberta pelo um terço seguido do um meio e espera-se que eles observem que um terço é equivalente a dois sextos e que um meio é equivalente a três sextos e que façam a representação como a da Figura 38.

Figura 38 – Representação figural (atividade 14b)



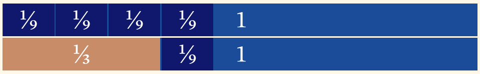
Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$.

Deve-se concluir com isso que somar um terço com um meio é equivalente a somar dois sextos com três sextos, que resultará em cinco sextos.

No item (c), chame a atenção dos estudantes ao fato de que o exercício pede para subtrair um terço de quatro nonos. Oriente-os que sobreponham à régua azul (unidade) quatro réguas que representa um nono, em seguida peça que, sobre as quatro réguas de um nono, coloquem uma régua que representa um terço, como mostra a Figura 39.

Figura 39 – Representação figural (atividade 14c)



Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{4}{9}-\frac{3}{9}=\frac{1}{9}$.

Em seguida, peça para que eles observem a representação das réguas e questione-os sobre que fração da unidade restará se retirarmos um terço dos quatro nonos. Espera-se que eles respondam um nono. Após isso, é importante chamar a atenção dos estudantes pelo fato de que as réguas que representam terços têm tamanhos diferentes das réguas que representam nonos, isto é, têm denominadores diferentes. Feito isso, solicite que façam a representação das frações por meio de frações equivalentes que tenham o mesmo denominador. A intenção é que eles percebam que a fração um terço é equivalente à fração três nonos, sendo assim, subtrair um terço de quatro nonos é equivalente a subtrair três nonos de quatro nonos, concluindo com eles que o resultado da subtração será a fração um nono.

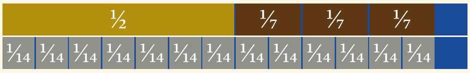
Para resolver o item (d), o procedimento é o mesmo utilizado no item (b), isto é, os estudantes deverão sobrepor à régua azul (unidade) uma régua que representa um meio da unidade, seguida de três réguas que representam um sétimo da unidade, como ilustra a Figura 40.

Figura 40 – Representação figural (atividade 14d)

Fonte: Autoria própria.

Neste caso devemos perguntar que fração da régua azul (unidade) foi coberta pelas quatro réguas sobrepostas à unidade, chamando a atenção dos estudantes ao fato de que, novamente, as réguas têm tamanhos diferentes e que, portanto, as frações têm denominadores diferentes, orientando-os a encontrar réguas de tamanhos iguais que cubram a mesma parte da unidade. Ao buscarem as réguas de mesmo tamanho, espera-se que eles percebam que um meio é equivalente a sete quatorze avos e que três sétimos são equivalentes a seis quatorze avos, como ilustra a Figura 41.

Figura 41 – Representação figural (atividade 14d)



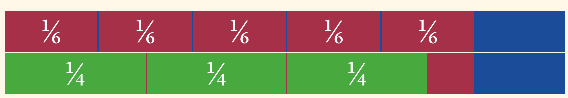
Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{1}{2}+\frac{3}{7}=\frac{7}{14}+\frac{6}{14}=\frac{13}{14}$.

Assim, concluimos que somar um meio com três sétimos é equivalente a somar sete quatorze avos com seis quatorze avos, cujo resultado será treze quatorze avos.

Para resolver o item (e), solicitar aos estudantes que sobreponham à régua azul (unidade) cinco réguas que representam um sexto da unidade, em seguida peça que, sobre as cinco réguas de um sexto, coloquem três réguas que representam um quarto da unidade, como mostra a Figura 42, alertando-os para que observem que as réguas que representam quartos da unidade têm tamanhos diferentes das réguas que representam sextos da unidade e mais uma vez estamos subtraindo frações com denominadores diferentes.

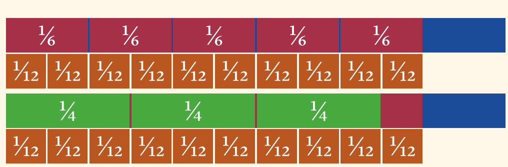
Figura 42 – Representação figural (atividade 14e)



Fonte: Autoria própria.

Os estudantes deverão identificar que fração da unidade restará ao retirarem três quartos dos cinco sextos. Peça a eles que procurem entre as réguas uma que represente o pedacinho que sobrou das cinco réguas vermelhas. A intenção é que eles respondam que a fração que restou foi um doze avos. Se eles não perceberem sozinhos, o professor deve orientá-los a identificar por meio do jogo de réguas que a fração cinco sextos é equivalente à fração dez doze avos e que a fração três quartos é equivalente à fração nove doze avos, como ilustra a Figura 43.

Figura 43 – Representação figural (atividade 14e)



Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$.

Assim, concluimos que subtrair três quartos de cinco sextos é equivalente a subtrair nove doze avos de dez doze avos, o que resultará em um doze avos.

Se o professor julgar necessário, outros exemplos poderão ser propostos a fim de que os estudantes estejam aptos a responder a seguinte pergunta:

→ Se você tivesse que escrever uma fórmula (regra) para indicar como somar/subtrair frações com denominadores diferentes, explique o que você escreveria.

O objetivo dessa pergunta é saber se os estudantes entenderam que:

→ Na soma ou subtração de frações com denominadores diferentes, devemos encontrar frações equivalentes a cada uma das frações que queremos somar/subtrair, todas com o mesmo denominador, e em seguida proceder como na soma/subtração de frações com denominadores iguais.

Após trabalhar com o material manipulável, recomenda-se resolver outras atividades sobre soma/subtração de frações com denominadores diferentes incentivando os estudantes a fazerem sem utilizar o jogo de réguas.

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

É sempre importante partir do conhecimento que os alunos já tenham construído. Assim, a multiplicação de frações pode ser iniciada pelo caso em que se multiplica um número natural por um número fracionário, como a atividade 15 a seguir.

15) Determine os produtos:

a) $3 \cdot \frac{1}{5} =$ b) $4 \cdot \frac{2}{3} =$

No item (a), a intenção é que os estudantes percebam que, como na multiplicação de números naturais, três vezes um quinto da unidade significa somar três frações de um quinto da unidade, cujo resultado pode ser encontrado como foi feito na soma de frações com denominadores iguais, isto é, somando-se os numeradores e mantendo o denominador, cuja representação numérica é:

$$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Procedemos da mesma maneira para resolver o item (b), quatro vezes dois terços da unidade significam somar quatros frações de dois terços da unidade, cujo resultado será oito terços e cuja representação numérica é:

$$4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

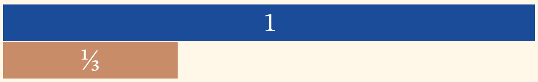
16) Utilizando o jogo de réguas, determine as operações e faça as representações numérica e figural em seu caderno:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} =$ b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} =$ c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} =$ d) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} =$

Antes de iniciar a resolução, é importante chamar a atenção dos estudantes para a maneira de ler a multiplicação, o que é essencial para entender o significado da operação.

No item (a), calcular a multiplicação ½ . ⅓ significa calcular metade de um terço. O professor deve orientar os estudantes para que represente a fração um terço, utilizando o jogo de réguas, como mostra a Figura 44.

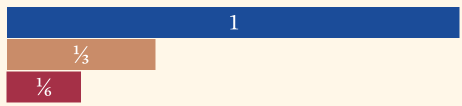
Figura 44 – Representação figural – atividade 16a



Fonte: Autoria própria.

Em seguida, pedir para que eles encontrem a fração que representa metade do tamanho da régua salmão (um terço da unidade). Eles deverão concluir que a fração procurada é um sexto, como ilustra a Figura 45.

Figura 45 – Representação figural (atividade 16a)



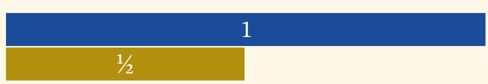
Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Assim concluímos que, ao multiplicarmos um meio por um terço obteremos um sexto.

Na resolução do item (b), chamar a atenção dos estudantes para o fato de que agora a multiplicação é ⅓ . ½, que significa determinar um terço de um meio da unidade. Primeiramente, os estudantes deverão representar a fração um meio, utilizando o jogo de réguas, como mostra a Figura 46.

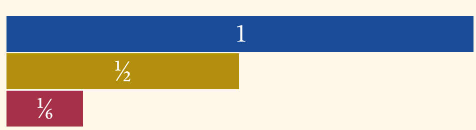
Figura 46 – Representação figural (atividade 16b)



Fonte: Autoria própria.

Em seguida, os estudantes precisam encontrar a fração que representa um terço da régua amarela. Eles deverão concluir que a fração procurada é um sexto da unidade, como ilustra a Figura 47.

Figura 47 – Representação figural (atividade 16b)



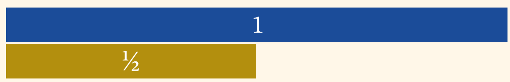
Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Dessa forma, concluímos que, ao multiplicarmos um terço por um meio obteremos um sexto.

O item (c) pede para resolver a multiplicação ¾ . ½, que significa determinar três quartos de um meio da unidade. Assim como no item (b), os estudantes deverão representar a fração um meio, utilizando o jogo de réguas, como mostra a Figura 48.

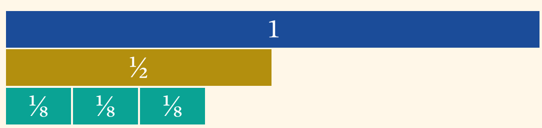
Figura 48 – Representação figural (atividade 16c)



Fonte: Autoria própria.

Em seguida, os estudantes precisam encontrar a fração que representa três quartos da fração um meio. Eles deverão concluir que a fração procurada é três oitavos da unidade, como ilustra a Figura 49.

Figura 49 – Representação figural (atividade 16c)



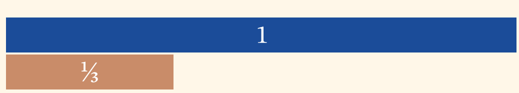
Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

Portanto, ao multiplicarmos três quartos por um meio obteremos três oitavos.

No item (d) devemos determinar dois quintos de um terço, para isso, como no item (a), os estudantes devem representar a fração um terço, utilizando o jogo de réguas, como mostra a Figura 50.

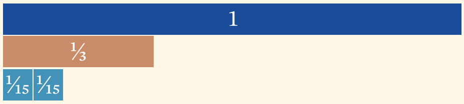
Figura 50 – Representação figural (atividade 16d)



Fonte: Autoria própria.

Na sequência, eles deverão encontrar a fração que representa dois quintos do tamanho da régua salmão (um terço da unidade). Espera-se que eles percebam que a fração é dois quinze avos, como ilustra a Figura 51.

Figura 51 – Representação figural (atividade 16d)



Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

Assim, concluímos que ao multiplicarmos dois quintos por um terço obteremos dois quinze avos.

Em cada uma das atividades, o professor pode chamar a atenção dos estudantes para que observem os numeradores e os denominadores das multiplicações realizadas. E ao final das atividades, solicitar que respondam à pergunta:

→ Na multiplicação de frações, como você escreveria uma fórmula (regra) para representar essa operação?

Após os comentários dos estudantes, o professor deve concluir, junto deles, que:

→ Na multiplicação de frações, devemos multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador.

Por exemplo: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2.1}{5.3} = \frac{2}{15}$.

Após trabalhar com o material manipulável, recomenda-se propor outras atividades sobre multiplicação de frações para serem resolvidas sem utilizar o jogo de réguas.

Além de entender a fórmula (regra) para calcular a multiplicação de frações, é importante ver outras formas de realizar a operação sem precisar do material manipulável. Durante as atividades, o professor pode chamar a atenção para isso. Por exemplo, calcular $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ significa determinar metade de três quartos. Nesse caso, pode-se escrever a quantidade $\frac{3}{4}$ como a fração equivalente $\frac{6}{8}$, que é divisível por dois, ou seja, metade de $\frac{6}{8}$ é $\frac{3}{8}$.

DIVISÃO DE FRAÇÕES

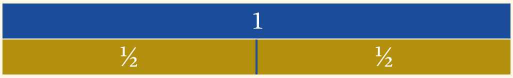
Para a divisão de duas frações, ou de uma fração por um número natural, ou um número natural por uma fração, é fundamental que os alunos entendam o significado da divisão. A seguir, veremos como o professor poderá conduzir a atividade para que isso aconteça.

17) Utilizando o jogo de réguas, determine as operações e faça as representações numérica e figural em seu caderno:

a) $1 \div \frac{1}{2} =$ b) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} =$ c) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} =$

No item (a), queremos determinar a divisão "um inteiro dividido por um meio", isso significa descobrir quantas vezes a fração um meio "cabe" dentro de um inteiro. No material manipulável, para entender esse significado, os estudantes deverão verificar quantas réguas que representam um meio da unidade são necessárias para "cobrir" a régua azul (unidade). Eles perceberão que são necessárias duas réguas, como ilustra a Figura 52.

Figura 52 – Representação figural (atividade 17a)



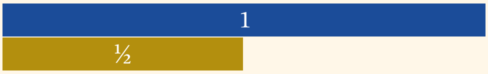
Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $1 \div \frac{1}{2} = 2$.

Desse modo, concluímos que ao dividirmos um inteiro por um meio, obteremos dois inteiros.

Na resolução do item (b), o professor deve explicar aos estudantes que para dividir a fração um meio pela fração um terço será preciso responder à pergunta: Quantas vezes a fração um terço "cabe" dentro da fração um meio? Para responder essa pergunta, utilizando o jogo de réguas, os estudantes devem ser orientados a representar a fração um meio, como ilustra a Figura 53.

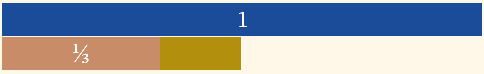
Figura 53 – Representação figural (atividade 17b)



Fonte: Autoria própria.

Em seguida, para saber quantas vezes um terço "cabe" na fração um meio, o professor deve orientá-los a sobrepor à régua amarela (um meio) a fração um terço como mostra a Figura 54.

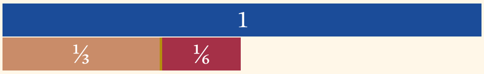
Figura 54 – Representação figural (atividade 17b)



Fonte: Autoria própria.

Assim, eles devem perceber que um terço "cabe" uma vez e mais um pedacinho. Nesse momento, o professor deve reformular a pergunta feita anteriormente, perguntando: Quanto de um terço "caberá" em um meio? Para obter a resposta a essa pergunta, é preciso orientá-los que busquem nas peças do jogo de réguas, a fração que representa esse pedacinho que sobrou e espera-se que eles encontrem a fração um sexto da unidade (régua vermelha), como a ilustração na Figura 55.

Figura 55 – Representação figural (atividade 17b)



Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$.

Feito isso, o professor deverá instruí-los a verificar que um sexto da unidade representa metade da fração um terço (régua salmão). E assim, concluir, junto aos estudantes, que a fração um terço "cabe" uma vez, mais metade dela e, de acordo com o que já foi estudado na soma de frações, eles devem concluir que "caberá" três meios da fração um terço na fração um meio, o que significa que ao dividirmos um meio por um terço, obteremos três meios.

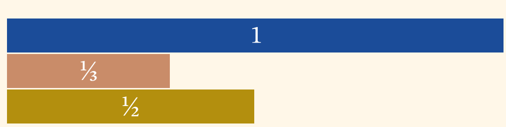
O procedimento para resolver o item (c) é análogo ao realizado no item (b), ou seja, o professor deve explicar aos estudantes que para dividir a fração um terço pela fração um meio será preciso responder à pergunta: quantas vezes a fração um meio "cabe" dentro da fração um terço? Ou que fração de um meio "cabe" na fração um terço? Eles perceberão que a pergunta a ser respondida será a segunda e para respondê-la, utilizando o jogo de réguas, os estudantes devem ser orientados a representar a fração um terço, como ilustra a Figura 56.

Figura 56 – Representação figural (atividade 17c)

Fonte: Autoria própria.

Na sequência, para saber que fração de um meio "cabe" na fração um terço, o professor deve orientá-los a comparar as frações, para isso eles podem posicionar a régua que representa um meio (régua amarela) abaixo da fração um terço, como mostra a Figura 57.

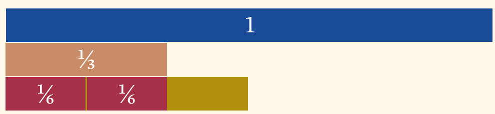
Figura 57 – Representação figural (atividade 17c)



Fonte: Autoria própria.

Desse modo, eles devem perceber que "caberá" apenas um pedaço da fração um meio na fração um terço. E para saber que fração de um meio essa parte representa é necessário orientá-los que busquem nas peças do jogo de réguas a fração equivalente à fração que representa tal parte. O esperado é que eles encontrem a fração dois sextos, como a ilustração na Figura 58 (se eles encontrarem outra fração, como, por exemplo, quatro doze avos, o professor deve orientá-los a simplificar a fração ao final).

Figura 58 – Representação figural (atividade 17c)



Fonte: Autoria própria.

Representação numérica: $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

Em seguida, os estudantes devem perceber que dois sextos da unidade representam dois terços de um meio (régua amarela). Concluindo assim, junto aos estudantes, que "caberá" dois terços da fração um meio na fração um terço, o que significa que ao dividirmos um terço por um meio obteremos dois terços.

Ao final das atividades referentes à divisão de frações com o material concreto, solicitar que os estudantes respondam à pergunta:

→ Na divisão de frações, como você escreveria uma fórmula (regra) para representar essa operação?

Após ouvir os estudantes, o professor deve concluir, com eles, que:

→ Na divisão de frações devemos multiplicar a primeira fração pela segunda invertendo o numerador com o denominador.

Por exemplo: $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1.2}{3.1} = \frac{2}{3}$.

Após trabalhar com o material manipulável, recomenda-se propor outras atividades sobre divisão de frações para serem resolvidas sem utilizar o jogo de réguas.

REFERÊNCIAS

BERTONI, N. E. **Pedagogia**: educação e linguagem matemática, frações e números fracionários. Brasília: Unb, 2009. v. 4. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/fracoes.pdf. Acesso em: 2 jul. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 27 out. 2020.

CALDEIRA, M. F. T. H. S. **A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da matemática**. 2009. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidad de Málaga, Málaga, 2009. Disponível em: http://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/2240. Acesso em: 27 out. 2020.

CANOVA, R. F. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental com relação à fração**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11093. Acesso em: 27 out. 2020.

GARCÍA, M. V. S. Dificultades específicas en el aprendizaje de las fracciones, estudio de casos: implicaciones para la formación de maestros. *In:* GÓMEZ, J. M. B.; CHAMORRO, M. C.; GONZÁLEZ, E. F. **Dificultades del aprendizaje de las matemáticas**. Espanha: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2003, p. 13-27.

IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. 8. ed. São Paulo: Globo, 1996.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MOURA, M. O. de. *et al*. Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010. Disponível em: https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/3094/3022. Acesso em: 27 out. 2020.

NOGUEIRA, C. M. I.; ANDRADE, Doherty. **Conceitos básicos em educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**. Maringá: Eduem, 2011.

PERLIN, P. **A formação do professor dos anos iniciais do ensino fundamental no movimento de organização do ensino de frações**: uma contribuição da atividade orientadora de ensino. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/7129/PERLIN%2c%20PATRICIA.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 27 out. 2020.

{03}

GEOMETRIA

Thelma Pretel Brandão Vecchi*

De acordo com Vargas-Vargas e Gamboa-Araya (2013, p. 75, tradução nossa), "A geometria é para o ser humano o idioma universal que o permite descrever e construir seu mundo, assim como transmitir a percepção que tem deste ao resto da humanidade".

* Doutora em Engenharia Química pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Federal do Paraná (UFPR) e especialista em Educação Matemática pela Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão. Licenciada em Matemática pela UEM. Professora titular da UTFPR, campus Campo Mourão. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática e Otimização. Participa como membro dos Grupos de Pesquisa Ensino de Matemática e Sistemas e Processos em Engenharia Química.

INTRODUÇÃO

Para iniciarmos o assunto, poderíamos tentar responder a essa pergunta inicial:

O que é Geometria?

Bem, de forma simplificada, **Geometria** é a parte da Matemática que estuda rigorosamente o espaço e as formas (figuras e corpos) que nele podem estar. A Geometria, junto do Cálculo e da Álgebra, formam as três grandes áreas da Matemática. Segundo Ferreira (1999, p. 983), Geometria é:

> [...] a ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos, ou um ramo da matemática que estuda as formas, plana e espacial, com as suas propriedades, ou ainda, ramo da matemática que estuda a extensão e as propriedades das figuras (geometria plana) e dos sólidos (geometria no espaço).

Você sabia que a origem da palavra "geometria" é grega, e a sua tradução literal é "medir a terra"?

A partir da origem da palavra Geometria pode-se ter uma ideia de como ela surgiu, com que finalidade. Heródoto atribui aos egípcios a origem dessa ciência, pois no antigo Egito o imposto pago pelos proprietários de terra era proporcional a área de cada lote e, devido às frequentes enchentes ocorridas no rio Nilo, as áreas dos lotes que margeavam o rio tinham que ser frequentemente recalculadas.

Porém, o desenvolvimento e a organização sistemática da Geometria ocorreram a partir dos trabalhos de Euclides, em sua extensa obra denominada *Os elementos*. Euclides, matemático grego que viveu em Alexandria, no Egito, por volta de 323-283 a.C., é considerado o pai da Geometria. Nesta obra de 13 volumes, são apresentados os princípios da Geometria, tendo como sustentação os axiomas e o método dedutivo, que ficou conhecida como Geometria Euclidiana (Figura 1).

Figura 1 – Fragmento original da obra de Euclides

Fonte: Oxyrhynchus (2022).

O modelo euclidiano tornou-se referência tanto no campo da ciência como no campo do ensino. Sua sustentação é uma verdade, ou seja, nada é passível de questionamento. Isso se deve a consistência do seu método dedutivo, com os axiomas, postulados e teoremas. Nas escolas do mundo todo esse modelo desenvolvido por Euclides foi muito utilizado, aliás grande parte do conhecimento que temos até hoje na área da Geometria se deve a ele. No Brasil, o ensino da Geometria passou por algumas fases. Até 1960 ele se baseou nos trabalhos de Euclides. Porém, entre 1970 e 1980, ele recebeu influências do movimento da Matemática Moderna, em que o ensino tinha ênfase principalmente na linguagem, dificultando a compreensão dos conceitos. Os professores encontravam certa dificuldade em ensinar e, para completar, os conteúdos relacionados à Geometria encontravam-se nos capítulos finais dos livros didáticos, o que muitas vezes colaborava para que não fossem trabalhado com os alunos. Este fato contribuiu para que o ensino da Geometria no Brasil se tornasse insatisfatório, muitas vezes sendo abandonado nas escolas (Santos; Nacarato, 2014).

Desta forma, a grande maioria dos professores da educação básica brasileira tiveram pouco contato com a Geometria em sua formação, o que favoreceu para que a sua prática docente se tornasse deficitária também nesta área do conhecimento. Mesmo com algumas mudanças nos livros didáticos, muitos se sentem inseguros para ensinar Geometria, o que evidencia que os dois termos do binômio aprender-ensinar estão intimamente interligados, ou seja, só temos condições de ensinar aquilo que conhecemos.

Levando em consideração a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que determina as competências, habilidades e aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas pelos alunos em cada etapa da educação básica no Brasil, a Geometria clássica continua sendo trabalhada, porém a Geometria das transformações ganha espaço, desde os anos iniciais até os finais do Ensino Fundamental. A Base sugere ainda o desenvolvimento de habilidades como "[...] identificar movimentações de pessoas e objetos no espaço e suas representações no plano" (Brasil, 2017), algo que não aparecia nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Nos PCNs, documento anterior à BNCC, a geometria era focada na geometria clássica, axiomática e suas relações internas, enfatizando os temas "Espaço e Forma". Não havia qualquer ênfase às aplicações e relações da geometria com o espaço vivenciado pelos alunos (Brasil, 2017).

Segundo a BNCC, para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental I, deve-se considerar que:

> Os alunos devem ser preparados para identificar e estabelecer pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, além de estimar e representar usando mapas (inclusive em suportes digitais) e croquis, por exemplo.
> Os estudantes sejam capazes de observar e comunicar características tridimensionais e bidimensionais das formas geométricas, assim como de associar figuras espaciais a suas representações bidimensionais e vice-versa.
> Nas aulas de geometria, reconhecer lados, vértices e ângulos também é fundamental para nomear e comparar polígonos.
> Os estudantes possam trabalhar com representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano e com softwares de geometria dinâmica para chegar aos objetivos esperados na unidade temática (Brasil, 2017).

A geometria, quando bem trabalhada, ajuda o indivíduo a desenvolver habilidades mentais de diversos tipos, como a intuição espacial, a integração da visualização com a conceitualização, e a manipulação e a experimentação com a dedução, pois, por mais simples que seja a situação geométrica enfrentada, ela oferece grandes possibilidades de exploração, análise e formulação de conjecturas, independentemente do nível em que se encontra (Vargas-Vargas; Gamboa-Araya, 2013).

Objetivando trabalhar a Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando as novas práticas propostas na BNCC, discutiremos a seguir alguns pontos relevantes para um melhor processo de ensino aprendizagem de Geometria nessa fase da educação escolar.

A GEOMETRIA NOS ANOS INICIAIS

Segundo Pavanello (1995), a maioria das Propostas Curriculares de Matemática elaboradas a partir da década de 1980 já ressaltavam a importância da aprendizagem dos conceitos geométricos nos anos iniciais do Ensino Fundamental. No entanto, a partir de pesquisas realizadas em escolas de

Ensino Fundamental, constatou-se que, na prática, os professores desse nível de ensino preocupam-se somente com o estudo dos números e das operações e deixam de lado o trabalho com a geometria.

> O trabalho com a álgebra pode conduzir à execução mecânica de operações, pois as transformações algébricas são determinadas somente por um sistema de leis formais que indicam o que se pode fazer em determinada situação. O realizado com a geometria, no entanto, pode favorecer a análise de fatos e de relações, o estabelecimento de ligações entre eles e a dedução, a partir daí, de novos fatores e novas relações (Pavanello, 1995, p. 139).

Historicamente, o ensino da Geometria seguia os princípios da Geometria Euclidiana, em que deveria ser trabalhado inicialmente a geometria plana (figuras bidimensionais) e depois a geometria espacial (figuras tridimensionais). Porém, as novas tendências para o ensino da Geometria apontam para um trabalho simultâneo entre a geometria plana e a espacial, pois essa abordagem possibilita aos alunos, principalmente em início de escolarização, maior enriquecimento na elaboração dos conceitos geométricos (Andrade, 2004 *apud* Santos; Nacarato, 2014).

Vale ainda ressaltar, como já mencionado na introdução deste capítulo, que o estudo da geometria apresenta algumas dificuldades em seu desenvolvimento formal. Basicamente isso ocorre a partir das concepções e crenças dos alunos e professores, manifestadas em sala de aula. O corpo docente, devido às concepções e experiências adquiridas em seu período de formação escolar, planeja as atividades e usa os mesmos recursos que experimentou na época como estudante. Muitas vezes sua experiência pessoal impede uma experiência de aprendizado que oriente o aluno a descobrir a geometria como gerador de conhecimento (Vargas-Vargas; Gamboa-Araya, 2013).

Um fator muito importante que contribui para um processo mais eficiente no ensino da Geometria é o uso de recursos didáticos em sala de aula. A diversidade de materiais que o professor pode disponibilizar aos alunos durante as aulas para que eles possam manipular, visualizar, desenhar, entre outros, propiciará um aumento no nível de conhecimento sobre os sólidos geométricos e as figuras planas que o compõem. Desta forma, o aluno poderá estabelecer algumas propriedades entre as formas estudadas e, sobretudo, poderá formar uma imagem mental sobre o objeto estudado (Santos; Nacarato, 2014).

A seguir, apresentam-se algumas possibilidades para o trabalho da Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

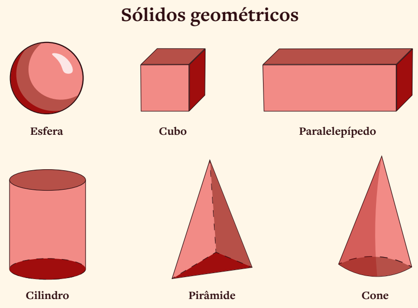
Sólidos geométricos

Considerando as novas tendências para o ensino da Geometria na educação básica, como apresenta Santos e Nacarato (2014), o trabalho com as figuras espaciais e planas deve ser feito de forma simultânea, propiciando aos educandos uma maior compreensão das formas que o rodeiam.

→ É importante ressaltar que as figuras **geométricas espaciais** são aquelas que têm três dimensões: **comprimento**, **largura** e **altura**. É na geometria espacial que estudamos o conceito de **volume**, que é a medida de capacidade dos sólidos geométricos. Esses sólidos são limitados por faces planas ou curvas.

Os principais sólidos geométricos que devem ser trabalhados no Ensino Fundamental (Figura 2) são: esfera, cubo, paralelepípedo, cilindro, pirâmide e cone.

Figura 2 – Principais sólidos geométricos



Fonte: Autoria própria.

Guillen (2013) sugere que o professor leve à sala de aula, ou peça que seus estudantes levem, objetos (embalagens) que tenham relação com as formas geométricas mais usuais, como o cone de lã, casquinha de sorvete e chapéu de palhaço para lembrar o cone; latas de azeite, latas de cera e rolos de papel higiênico para lembrar o cilindro; embalagens e enfeites para lembrar as formas de pirâmides, entre outros. Após manipular os objetos, os alunos poderão traçar o contorno das suas faces (figuras planas triangulares, quadrangulares, circulares, entre outras) sem dissociá-las dos sólidos que as originaram.

→ O professor deve procurar representar figuras que estimulem a percepção visual dos objetos tridimensionais representados em planos, sem prejuízo da diferenciação entre sólido e plano, entre objeto e representação.

A planificação das figuras espaciais, que pode ser feita, por exemplo, montando e desmontando as embalagens utilizadas na fase anterior de manipulação, é também de suma importância. É preciso que os educandos explorem situações que levem à ideia de "forma" como atributo dos objetos. Para isto, pode-se usar vários materiais, entre eles, tangram, massa de modelar, argila, entre outros. Portanto, o trabalho de Geometria tem a finalidade de reconhecer-se dentro do espaço e a partir deste localizar-se no plano (Guillen, 2013).

Considerando ainda as planificações dos sólidos geométricos, pode-se propor atividades simples que apresentem as formas planificadas dos sólidos (Figura 3) para que o educando possa construir as respectivas figuras tridimensionais (Figura 2). Ao final do trabalho é fundamental que o estudante conclua, a partir das atividades com as indagações que o professor deve fazer, que:

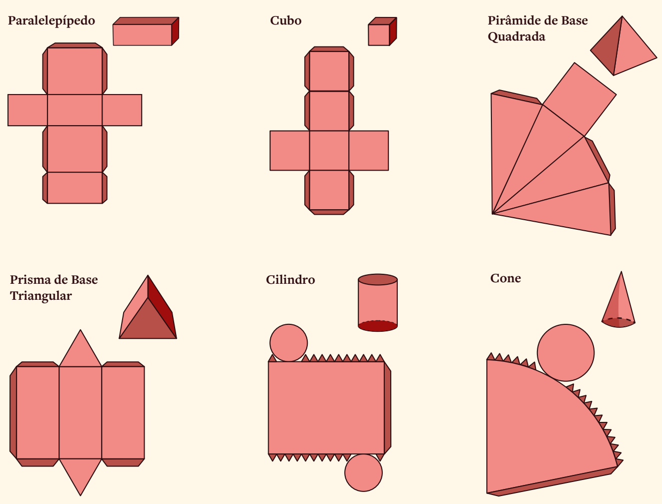
→ Um cubo tem seis faces quadradas.
Já o paralelepípedo tem seis faces retangulares, podendo algumas vezes ter algum par de faces quadradas.
O cone tem uma face circular e a outra é um setor circular.

→ O cilindro tem duas faces circulares e uma face retangular. A pirâmide tem faces triangulares e a sua base pode variar, podendo ser quadrada, triangular, pentagonal, entre outras.

E a esfera? Por que é difícil planificá-la? E se for possível, que figura geométrica seria sua planificação?

Perguntas como essas devem instigar o estudante a procurar as respostas. Desta forma, pode-se começar a perceber quais as características próprias de cada forma geométrica, tanto das figuras espaciais como das planas.

Figura 3 – Planificações de alguns sólidos geométricos



Fonte: Autoria própria.

Devem ser propostas atividades que despertem a curiosidade e a vontade de buscar as respostas dos estudantes. Para isso, é fundamental a manipulação dos sólidos geométricos, seguido de um trabalho de investigação que o aluno deverá fazer para responder aos questionamentos feitos pelo professor. Essa manipulação pode ser feita a partir das planificações dos sólidos, como exemplifica a Figura 3, mas também pode-se utilizar softwares computacionais que permitem a construção de figuras geométricas, como, por exemplo, o GeoGebra.[1]

→ **Você conhece o GeoGebra?**

O GeoGebra é um software livre que pode ser utilizado por professores e alunos para trabalhar com muitas atividades relacionadas com a matemática.

Faça o download do software no seu computador para poder realizar as atividades propostas na sequência desse material.

No que diz respeito à geometria, é possível trabalhar no GeoGebra com os sólidos geométricos e suas planificações, possibilitando ao estudante girar, mover, rotacionar, variar o número de lados do polígono da base do sólido geométrico, entre outros, de tal forma que o estudante consegue perceber todo o contexto existente entre os sólidos geométricos e as figuras geométricas planas que o formam.

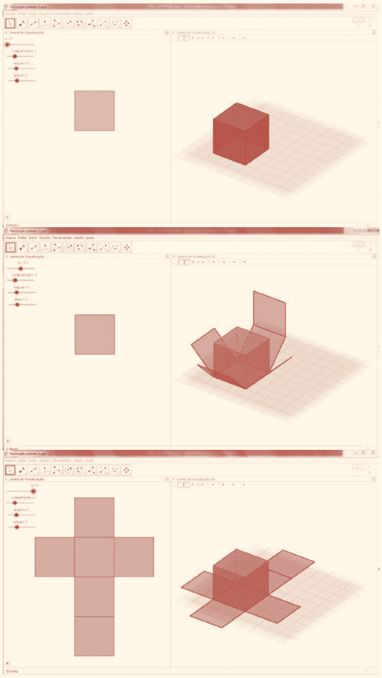
De acordo com Gravina e Basso (2012, p. 13), a tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que descortinam na tela do computador objetos dinâmicos e manipuláveis. As aulas de matemática podem se tornar mais atraentes quando transformadas em ambientes mais dinâmicos, lúdicos e representativos; e ainda,

> [...] as mídias digitais se tornam realmente interessantes quando elas nos ajudam a mudar a dinâmica da sala de aula na direção de valorizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas com a concomitante aprendizagem da Matemática. (Gravina; Basso, 2012, p. 34).

1 Disponível em: www.GeoGebra.org.

A seguir, são disponibilizadas algumas sugestões de atividades no GeoGebra referentes a sólidos geométricos e suas planificações. A primeira refere-se à planificação do cubo e do paralelepípedo, na mesma atividade. Isso porque é possível variar as medidas das três dimensões (largura, comprimento e altura) do sólido geométrico. Se as três dimensões são iguais, trata-se do cubo e sua planificação, como mostra a Figura 4. Essa figura apresenta três imagens diferentes, variando o valor de p (primeiro controle deslizante à esquerda da imagem). Se p é igual a zero, temos o cubo (primeira imagem); ao aumentarmos o valor de p, o cubo começa a ser planificado, como mostra a segunda imagem ($p = 0{,}5$). E quando fazemos o valor de p máximo ($p = 1$) o cubo está planificado, como mostra a terceira imagem.

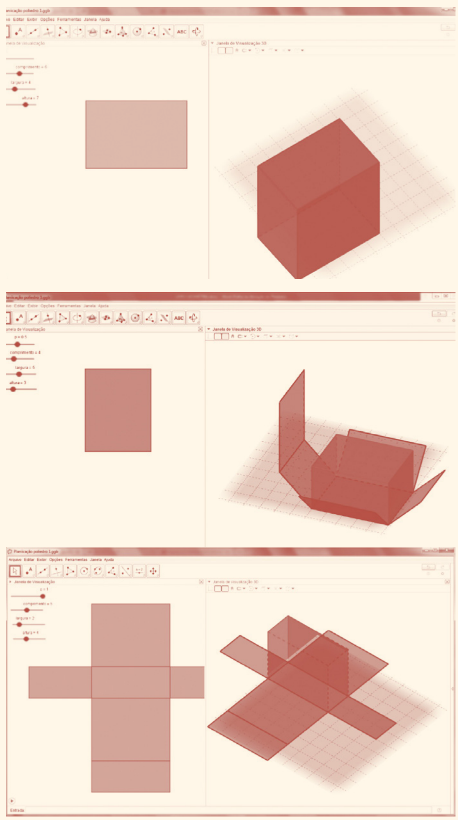
Figura 4 – Planificação do cubo no GeoGebra



Fonte: Autoria própria.

Ao alterar os valores de comprimento, largura e altura, utilizando os controles deslizantes disponíveis para tal, é possível variar o tamanho das dimensões do paralelepípedo. Alguns exemplos são apresentados na Figura 5, a seguir. Essa figura apresenta três imagens diferentes, variando tanto as dimensões do paralelepípedo, como também o valor de *p*, o que altera a planificação do sólido. Perceba que é possível também, a partir dessa atividade, alterar a posição do sólido, girando-o em várias direções.[2]

Figura 5 – Planificação do paralelepípedo no GeoGebra



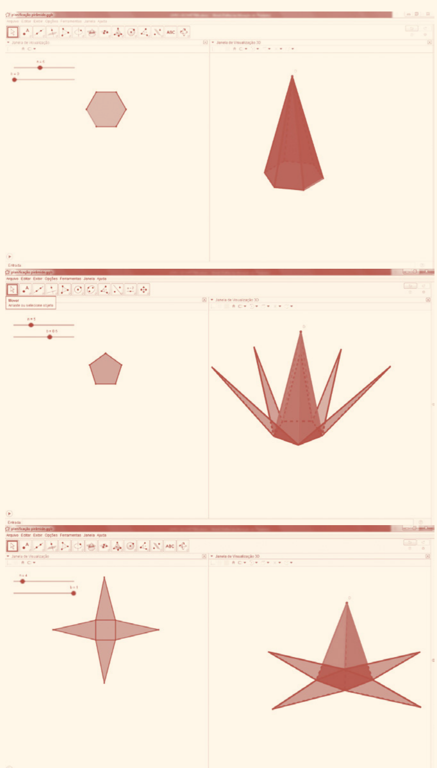
Fonte: Autoria própria.

A segunda atividade proposta no GeoGebra refere-se à pirâmide e sua planificação. Nela, dois controles deslizantes (*n* e *b*, que anteriormente era

2 O link dessa atividade foi disponibilizado na internet: https://www.GeoGebra.org/m/hfbqjpbb.

expressa pela variável *p*) permitem alterar o número de lados do polígono da base da pirâmide e a planificação do sólido respectivamente. A Figura 6 apresenta três variações possíveis a partir dessas alterações. A primeira imagem mostra a pirâmide hexagonal (controle deslizante $n = 6$ e $b = 0$). A segunda apresenta a pirâmide pentagonal sendo planificada ($n = 5$ e $b = 0{,}6$). A última imagem mostra a pirâmide quadrangular totalmente planificada ($n = 4$ e $b = 1$). Essa atividade também permite que o sólido geométrico seja girado em várias direções, o que favorece uma melhor visualização por parte do estudante.[3]

Figura 6 – Planificação da pirâmide no GeoGebra

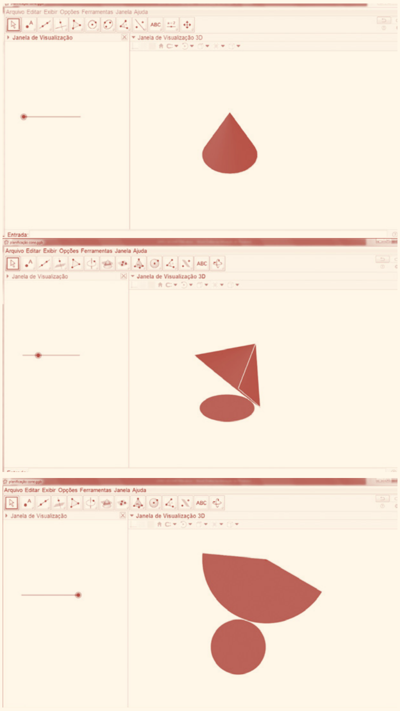


Fonte: Autoria própria.

3 O link para esta atividade está disponível na internet: https://www.GeoGebra.org/m/mrvzjpgh.

A última atividade proposta no GeoGebra refere-se ao cone e sua planificação. Nela, apenas um controle deslizante permite variar a planificação do sólido. A Figura 7 apresenta três imagens, o cone na primeira e duas etapas da sua planificação nas duas imagens seguintes. Assim como as outras, essa atividade também permite que o sólido geométrico seja girado em várias direções.

Figura 7 – Planificação do cone no GeoGebra



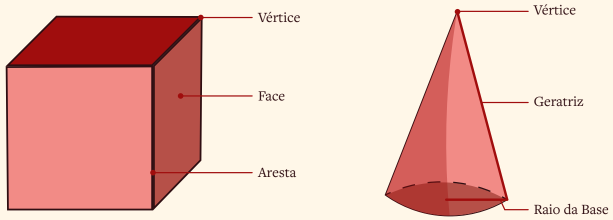
Fonte: Autoria própria.

Ainda no que diz respeito aos sólidos geométricos, é importante que os estudantes conheçam os seus elementos: vértices, faces e arestas. As faces são figuras geométricas planas que delimitam o sólido. As arestas são os segmentos de reta resultantes da intersecção entre duas faces, quando se trata de um poliedro. No caso do cone, o segmento que une o vértice a qualquer ponto da circunferência da base denomina-se geratriz. Os vértices, dos poliedros, são os pontos resultantes da intersecção de três ou mais arestas, já no cone, o vértice é a intersecção entre as geratrizes. A Figura 8 exemplifica esses elementos. A partir daí é possível destacar os entes geométricos fundamentais, que são entidades que não apresentam definição, apesar de as pessoas geralmente saberem o que elas são (noções primitivas).

→ Você sabia que o **ponto**, a **reta** e o **plano** são os três **entes geométricos fundamentais da geometria clássica** (euclidiana)?

É possível comparar o vértice do sólido geométrico a um ponto, a aresta a uma parte de uma reta (segmento de reta) e a face como sendo parte de um plano, de tal forma que a infinitude da reta e do plano sejam discutidas com os estudantes.

Figura 8 – Elementos de um sólido geométrico



Fonte: Autoria própria.

As dimensões do espaço[4] estão ligadas à menor quantidade de medidas que podem ser feitas em uma figura geométrica para obter informações completas sobre o seu tamanho. Assim, como não é possível obter comprimento, largura ou profundidade de um ponto[5], ele é uma figura geométrica de dimensão zero (adimensional).

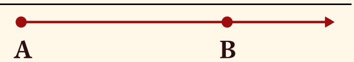
A reta[6], por sua vez, é uma figura geométrica que tem uma dimensão, pois apresenta comprimento infinito, mas é impossível medir sua largura ou pro-

4 Ver mais em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/dimensoes-espaco.htm
5 Ver mais em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/ponto-reta-plano-espaco.htm
6 Ver mais em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/retas.htm

fundidade, pois é uma figura que não tem esses elementos. A reta também pode ser considerada um espaço dentro do qual podem ser definidas algumas figuras geométricas de uma dimensão: a semirreta e o segmento de reta.

→ Você sabe diferenciar reta, semirreta e segmento de reta? A Figura 9 mostra a diferença, analise-a!

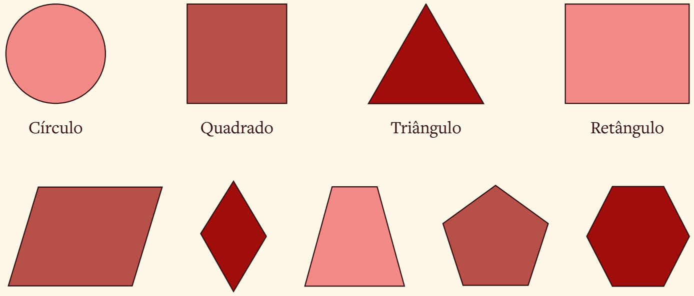
Figura 9 – Reta, segmento de reta e semirreta

Reta $\overline{AB}$	
Segmento $\overline{AB}$	
Semirreta $\overline{AB}$	

Fonte: Autoria própria.

Já o plano é uma figura geométrica que tem duas dimensões, pois tem comprimento e largura infinitos, mas é impossível medir sua profundidade, porque ele não a tem. O plano é também um espaço dentro do qual podem ser definidas todas as figuras que também apresentam duas dimensões ou menos, como é o caso das figuras geométricas planas, demonstradas na Figura 10.

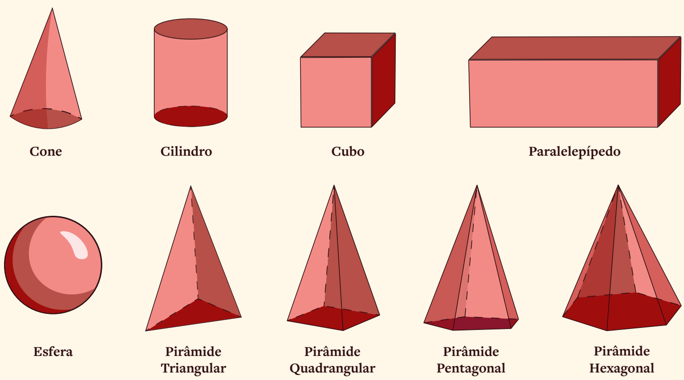
Figura 10 – Figuras geométricas planas



Fonte: Autoria própria.

O espaço é também uma figura geométrica. Ele tem três dimensões, pois seu comprimento é infinito, assim como sua largura e profundidade. Dessa maneira, dentro desse "lugar" chamado de espaço, é possível definir qualquer figura que tenha três dimensões (figuras geométricas espaciais) ou menos, como, por exemplo, os sólidos geométricos apresentados na Figura 11.

Figura 11 – Figuras geométricas espaciais

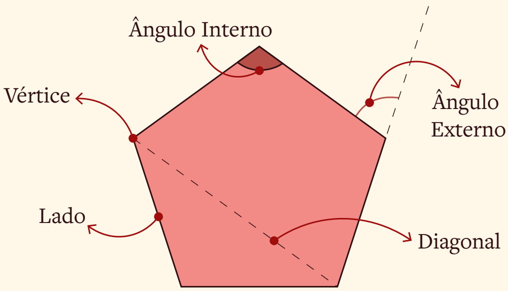


Fonte: Autoria própria.

Figuras geométricas planas

Os **polígonos** são figuras geométricas planas fechadas, formadas por segmentos de reta. Os elementos de um polígono são (Figura 12):

Figura 12 – Elementos de um polígono

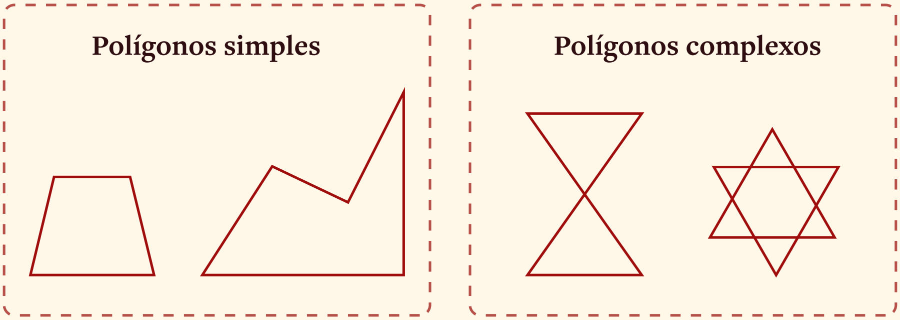


Fonte: Autoria própria.

→ **Vértice:** ponto de encontro dos segmentos que formam o polígono.
Lado: cada segmento de reta que une vértices consecutivos.
Ângulos: podem ser internos ou externos. Os internos correspondem aos ângulos formados por dois lados consecutivos. Os externos são os ângulos formados por um lado e pelo prolongamento do lado sucessivo a ele.
Diagonal: segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos.

Os polígonos podem ser **simples** ou **complexos**. Os simples são aqueles cujos segmentos consecutivos que o formam (lados) não são colineares, não se cruzam e se interceptam apenas nas extremidades. Quando existe intersecção entre dois lados não consecutivos, o polígono é chamado complexo. A Figura 13 exemplifica essas duas situações.

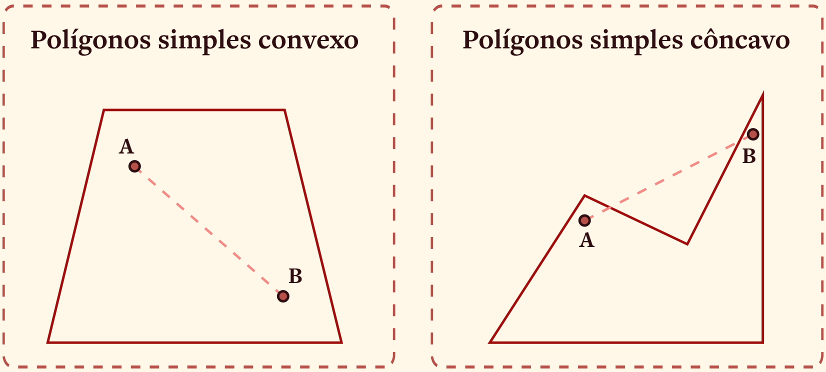
Figura 13 – Polígonos simples e complexos



Fonte: Autoria própria.

Os polígonos simples são chamados de **convexos** quando qualquer reta que une dois pontos, pertencente à região poligonal, fica totalmente inserida nesta região. Esse fato não acontece para os polígonos **côncavos** (ou não convexos). A Figura 14 dá um exemplo, veja a diferença que ocorre entre os dois casos da Figura 14 com o segmento que une os pontos A e B e os pontos C e D.

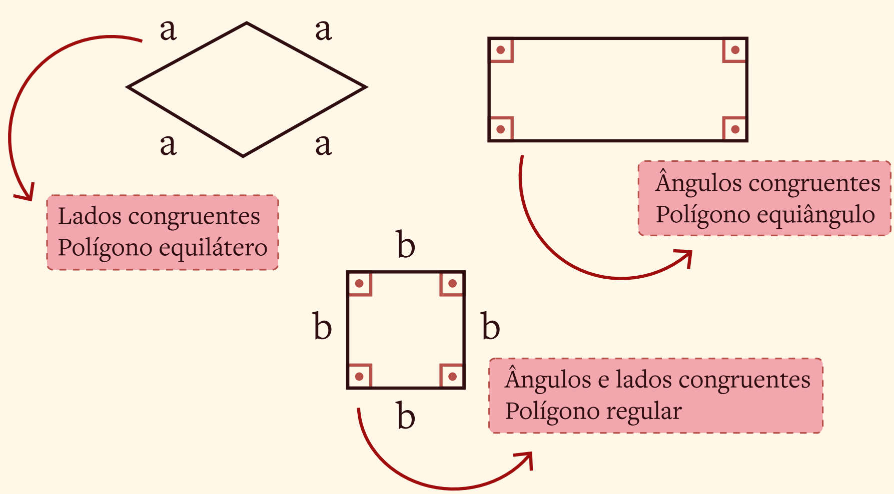
Figura 14 – Polígonos simples convexo e côncavo



Fonte: Autoria própria.

Quando um polígono apresenta todos os lados congruentes entre si (têm a mesma medida), tem-se um **polígono equilátero**. Quando todos os ângulos têm mesma medida (congruentes), tem-se um **polígono equiângulo**. Os polígonos convexos são **regulares** quando são equiláteros e equiângulos ao mesmo tempo. A Figura 15 exemplifica as três situações definidas neste parágrafo.

Figura 15 – Classificação dos polígonos



Fonte: Autoria própria.

Porém, todo polígono tem um nome específico quando se refere ao seu número de lados. A seguir, o Quadro 3 apresenta alguns desses nomes:

Quadro 3 – Nomenclatura dos polígonos quanto ao número de lados

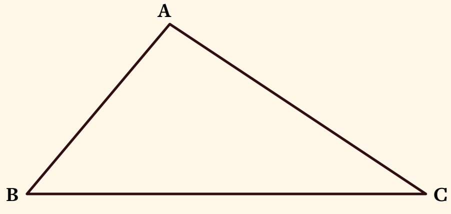
Número de lados do polígono	Nomenclatura
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
20	Icoságono

Fonte: Autoria própria.

Os **triângulos** e os **quadriláteros** são os polígonos apresentados no Quadro 3 que merecem destaque especial nos anos iniciais de formação dos estudantes. Desta forma, serão detalhados a seguir.

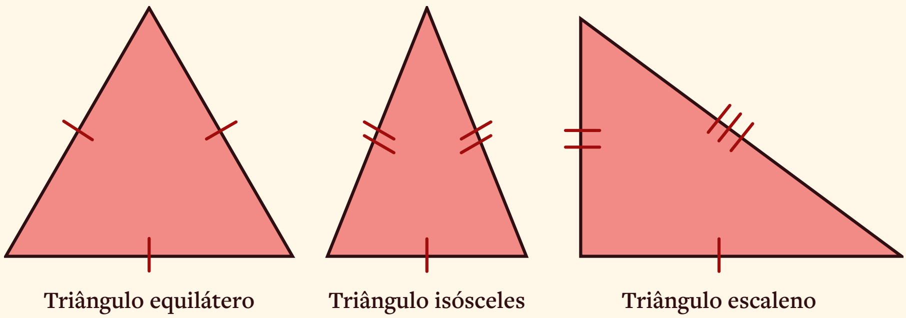
Triângulos

Dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{(AB)}$, $\overline{(BC)}$ e $\overline{(CA)}$ chama-se triângulo ABC.



É possível classificar os triângulos quanto aos lados e os ângulos. Quanto aos lados, os triângulos são classificados como (Figura 17):

Figura 17 – Classificação quanto aos lados do triângulo

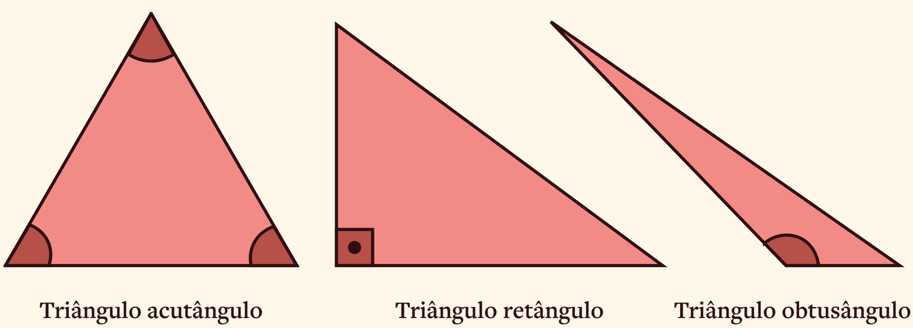


Fonte: Autoria própria.

→ **Equiláteros**, se e somente se os três lados têm a mesma medida (congruentes).
Isósceles, se e somente se tem dois lados com a mesma medida.
Escalenos, quando nenhum dos lados tem a mesma medida, isto é, quando os três lados têm medidas diferentes.

Quanto aos ângulos, os triângulos se classificam em (Figura 18):

Figura 18 – Classificação quanto aos ângulos do triângulo



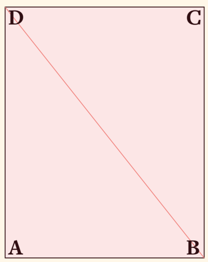
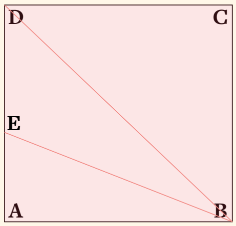
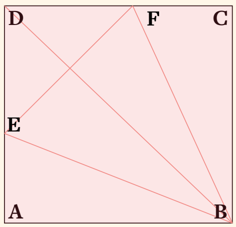
Fonte: Autoria própria.

→ **Retângulos**, se e somente se tem um ângulo reto, isto é, com medida igual a 90º.
Acutângulos, se e somente se os três ângulos internos são agudos, ou seja, com medidas inferiores a 90º.
Obtusângulos, se e somente se um dos ângulos internos é obtuso, ou seja, sua medida é maior do que 90º.

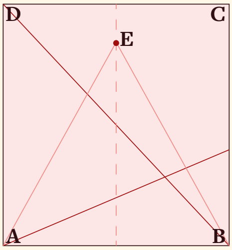
A partir de uma atividade simples utilizando dobraduras de papel, é possível trabalhar os diferentes tipos de triângulos com os alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental.

O Quadro 4 ilustra algumas situações possíveis de serem feitas em sala de aula para que os alunos possam saber construir e diferenciar os tipos de triângulos, tanto com relação aos lados, como com relação aos ângulos.

Quadro 4 – Atividades envolvendo dobraduras na construção de triângulos

Para construir um **triângulo retângulo**, pegue um pedaço de papel quadrado e denomine seus vértices A, B, C e D. Dobre-o de tal forma que o ponto A coincida com o C, marcando a diagonal BD, e em seguida desdobre. Os dois triângulos originados dessa construção (ABD e BDC) são retângulos, pois os ângulos B e C são retos (vértices do quadrado). Além de serem triângulos retângulos, eles são também **triângulos isósceles**, pois têm dois lados com mesma medida (lados do quadrado).	
Em seguida, dobre novamente o lado AB sobre a diagonal BD, e desdobre, marcando o segmento BE. O triângulo ABE originado desta construção também é um **triângulo retângulo** (ângulo A é reto) e o triângulo BED é um **triângulo obtusângulo** (o ângulo E é maior do que 90°). Esses dois triângulos (ABE e BDE) também são **triângulos escalenos**, pois têm os três lados com medidas diferentes.	
Uma possibilidade para construirmos um **triângulo acutângulo** ainda na mesma atividade seria repetir a construção anterior, dobrando o segmento BC sobre o BD e traçando o segmento BF. Em seguida, ligar os pontos E e F, originando assim o triângulo BEF, que é um triângulo acutângulo (todos os ângulos menores que 90°). Esse triângulo BEF é também um triângulo isósceles, pois os lados BE e BF têm a mesma medida.	

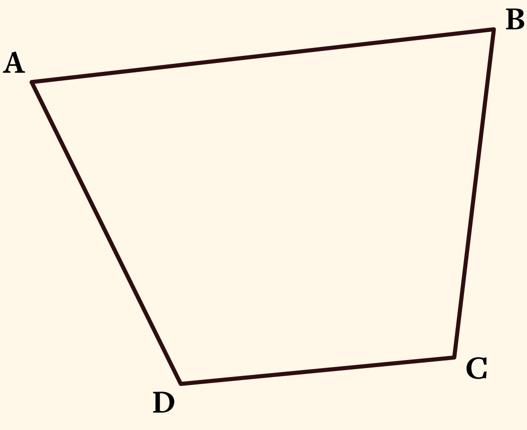
«Continuação na página seguinte»

Um triângulo equilátero pode também ser originado a partir de dobraduras, utilizando o verso das construções anteriores. Identifique novamente os vértices do quadrado A, B, C e D e dobre ao meio, sobrepondo o lado AD sobre o lado BC, marcando a linha pontilhada. Em seguida, dobre o lado AB de tal forma que o vértice B fique sobre a linha pontilhada, identificando o ponto E. Ligue os pontos A e E, e os pontos B e E. O triângulo ABE originado na construção é um **triângulo equilátero**, pois os três lados têm a mesma medida. Esse triângulo também é um triângulo acutângulo, pois os três ângulos tem medida inferior a 90°.	

Fonte: Autoria própria.

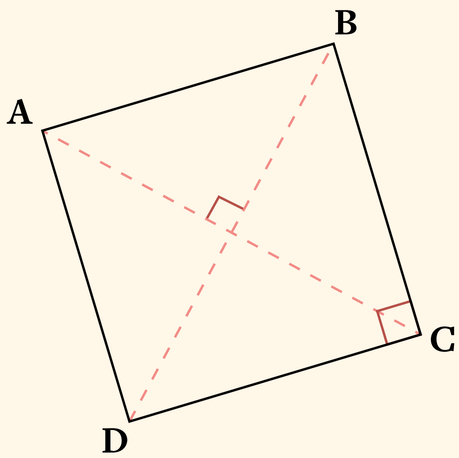
Quadriláteros

Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares (não estão em uma mesma reta). Se os segmentos $\overline{(AB)}$, $\overline{(BC)}$, $\overline{(CD)}$ e $\overline{(DA)}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero. É um polígono simples de quatro lados.

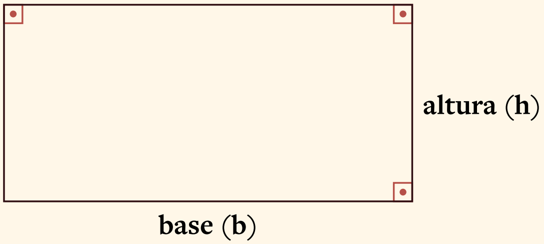


Os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, losangos e os quadrados. A seguir, suas definições:

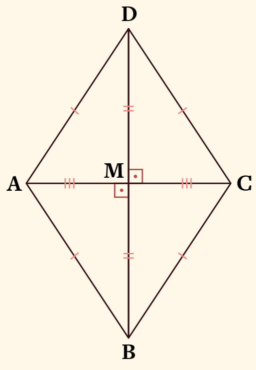
a) **quadrado:** um quadrilátero plano e convexo é um quadrado se, e somente se, tem os quatro ângulos retos (ângulos que medem 90°) e os quatro lados congruentes (de mesma medida);



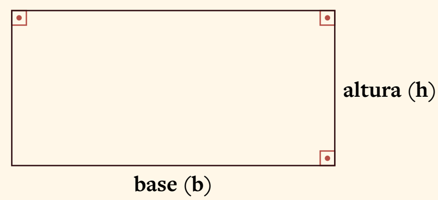
b) **retângulo:** um quadrilátero plano e convexo é um retângulo se, e somente se, tem os quatro ângulos retos;



c) **losango:** um quadrilátero plano convexo é um losango se, e somente se, tem os quatro lados congruentes;



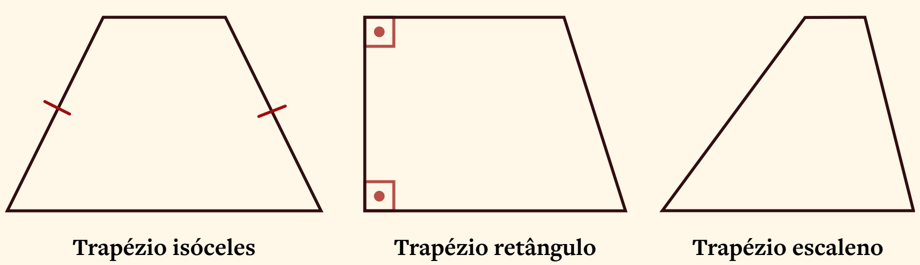
d) **paralelogramo:** um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, tem os lados opostos paralelos (dois pares de lados paralelos);



e) **trapézio:** um quadrilátero plano e convexo é um trapézio se, e somente se, tem dois lados paralelos, de maneira que esses lados são as bases do trapézio. Classifica-se um trapézio em (Figura 19):

→ **Trapézio isósceles**, se os lados não correspondentes às bases são congruentes;
Trapézio retângulo é um trapézio que tem dois ângulos retos;
Trapézio escaleno, se os lados não correspondentes às bases não são congruentes.

Figura 19 – Tipos de trapézios



Fonte: Autoria própria.

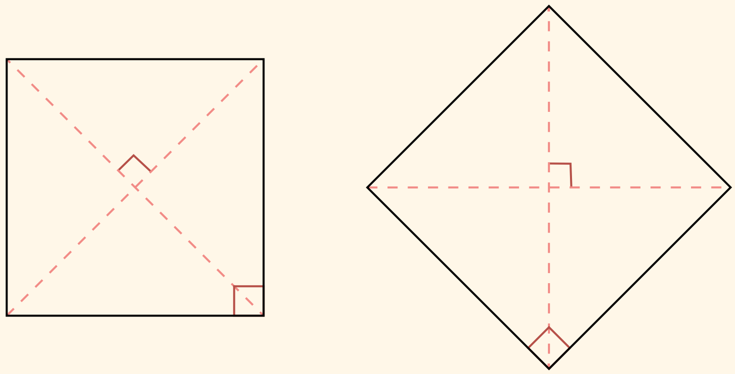
A partir das definições apresentadas anteriormente é possível trazer à tona alguns questionamentos a respeito dos quadriláteros. Como, por exemplo:

1) Todo quadrado é um retângulo?
2) Todo retângulo é um paralelogramo?
3) Todo retângulo é um quadrado?
4) Todo quadrado é um losango?
5) Todo losango é um quadrado?
6) Todo losango é um paralelogramo?

Para responder a essas questões é necessário voltar às definições para verificar as características de cada quadrilátero. A resposta para a questão 1 é sim, pois o quadrado é um quadrilátero que tem os quatro ângulos retos, logo, pela definição, é um retângulo; a resposta para a questão 2 também é sim, pois o retângulo tem lados opostos paralelos, sendo então um paralelogramo; já a resposta da questão 3 é não, pois o retângulo não tem necessariamente os quatro lados com a mesma medida, então não é um quadrado; A resposta da 4 é sim, pois o quadrado tem os quatro lados com a mesma medida, sendo então um losango; Já a 5 é não, pois o losango não tem necessariamente os quatro ângulos retos, logo não é um quadrado; A última questão tem resposta sim, pois todo losango tem lados opostos paralelos, sendo então um paralelogramo. Desta forma, pode-se concluir que um retângulo é um caso particular de paralelogramo. O quadrado é um caso particular de retângulo e também é um caso particular de losango. O losango é um caso particular de paralelogramo.

É importante trabalhar questionamentos como esses para que os alunos possam desenvolver a habilidade de raciocinar logicamente, valorizando as definições e não apenas as imagens das figuras geométricas. Isto é fundamental para evitar que situações muito comuns de erros ocorram em sala de aula, como, por exemplo, achar que uma simples mudança de posição altera um quadrado, transformando-o em um losango, como mostra a Figura 20. Essa situação geralmente causa equívocos por parte de alunos, e até mesmo de professores, ao pensar que a primeira imagem é um quadrado, enquanto a segunda representa um losango (na verdade as duas figuras são iguais, apenas estão em posições diferentes). Esse fato pode ocorrer devido às imagens que geralmente são apresentadas nos livros didáticos referentes ao quadrado e ao losango, muito semelhantes às apresentadas na Figura 20.

Figura 20 – Exemplo de quadrado em duas posições diferentes



Fonte: Autoria própria.

Uma atividade bem simples que pode ser realizada com os alunos para diferenciar o quadrado do losango é construir um quadrilátero com quatro palitos de sorvete de mesma medida, colocando percevejos nos quatro cantos para fixar os palitos, conforme mostra a Figura 21.

Figura 21 – Quadrilátero feito de palitos de sorvete

Fonte: Autoria própria.

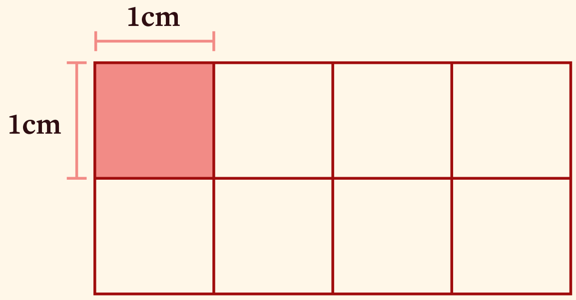
Como os quatro palitos têm a mesma medida, o quadrilátero formado é um losango. Os percevejos permitem variar os ângulos internos do losango, e assim pode-se chamar a atenção dos alunos que, quando os ângulos internos são retos (90°), o losango passa a ser também um quadrado; quando os ângulos internos não são retos, a figura representa apenas o losango. Dessa forma, pode-se perceber que o quadrado é um caso particular do losango.

Cálculo de área e perímetro de figuras geométricas planas

De forma bem simplificada pode-se dizer que o perímetro é a medida do contorno (soma das medidas dos lados) da figura geométrica plana e a área é a medida da sua superfície, ou seja, a quantidade de espaço que ela ocupa.

Para fazermos esses cálculos é fundamental escolhermos uma unidade de medida. Se a ideia é utilizar a régua, a unidade de medida para o cálculo do perímetro será o cm, e a unidade para a área será o cm², que representa a área de um quadrado de 1 cm de lado. A Figura 22 ilustra um retângulo com 4 cm de comprimento e 2 cm de largura. Desta forma, o perímetro desse retângulo é de 12 cm e a área é de 8 cm², que representa a quantidade de quadrados de 1 cm² de área que existem no interior da figura.

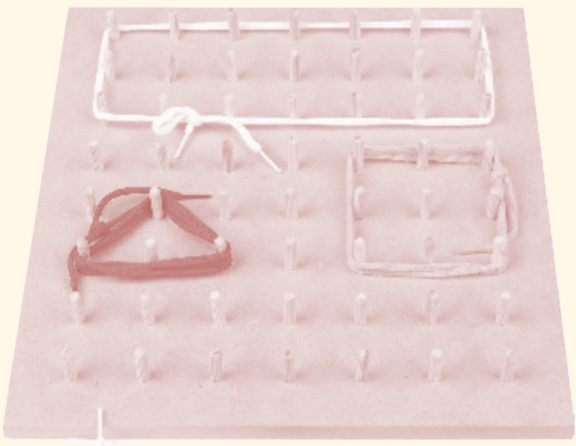
Figura 22 – Retângulo com 12 cm de perímetro e 8 cm² de área



Fonte: Autoria própria.

Um material bem interessante que pode ser utilizado com as crianças dos primeiros anos do Ensino Fundamental para trabalhar com o cálculo de área e perímetro de figuras geométricas é **Geoplano**. Este material consiste de um tabuleiro quadriculado, com pinos ou pregos nos seus vértices, que servem de sustentação para formar figuras geométricas com a utilização de elásticos ou barbantes. A Figura 23 mostra um exemplo de Geoplano.

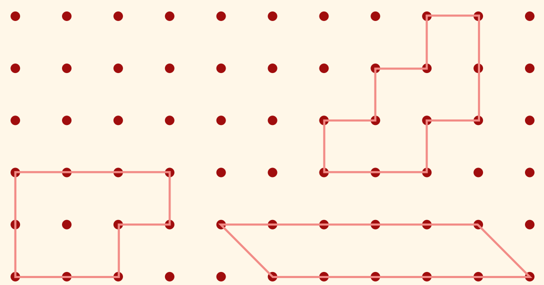
Figura 23 – Exemplo de Geoplano



Fonte: Parmegiani (2017).

A partir das construções realizadas no Geoplano é possível perceber que figuras geométricas de mesmo perímetro podem ter áreas diferentes e figuras com mesma área também podem ter perímetros diferentes. E ainda, figuras geométricas com formas diferentes podem ter mesma área, ou ainda mesmo perímetro. A Figura 24 exemplifica uma situação em que três polígonos diferentes têm a mesma área (cinco unidades de área), porém perímetros diferentes. Ainda nessa situação pode-se chamar a atenção para o cálculo do perímetro, na dificuldade em determinar a medida do lado do paralelogramo que é a diagonal do quadrado do Geoplano. No caso de crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental, pode-se trabalhar com um valor aproximado, pois ainda não tiveram contato com o Teorema de Pitágoras para a determinação do valor exato. Assim, o perímetro aproximado do paralelogramo, considerando o valor de 1,5 unidades de comprimento, o valor aproximado da diagonal do quadrado, seria de 13 unidades de comprimento. Já para o cálculo da área do paralelogramo, é possível perceber que os dois triângulos formados nas duas extremidades da figura formam juntos um quadrado, o que resulta em uma área exata de cinco unidades de área.

Figura 24 – Polígonos de mesma área



Fonte: Parmegiani (2017).

→ Essas questões de valores exatos e aproximados são importantes para o aprendizado dos alunos nos anos iniciais, e materiais como esse (Geoplano) permitem que o aluno compreenda na prática como solucionar tais situações.

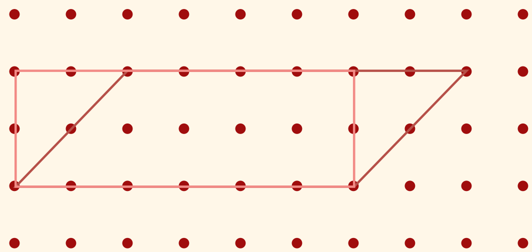
Inúmeras atividades podem ser propostas utilizando o Geoplano para o cálculo de área e perímetro. Inclusive, pode-se trabalhar com situações que permitam ao aluno concluir as fórmulas para o cálculo de área de cada polígono.

Para a dedução da fórmula da área do retângulo, pode ser solicitado aos alunos que criem, no Geoplano, diferentes retângulos. Depois, ele deve verificar a medida da base e da altura de cada um, bem como a sua área (a partir da contagem das unidades de área contidas na figura) e descobrir uma relação entre os números. Desta forma, é fácil concluir que a área do retângulo é dada por:

$$\text{Área}_{retângulo} = base \cdot altura$$

Para o paralelogramo, denomina-se base a dois lados paralelos e altura à distância entre as bases. O aluno deve construir um paralelogramo no Geoplano e, utilizando outro elástico, construir um retângulo sobreposto ao paralelogramo em que um dos lados coincida com uma base, tal como mostra a Figura 25:

Figura 25 – Área do paralelogramo



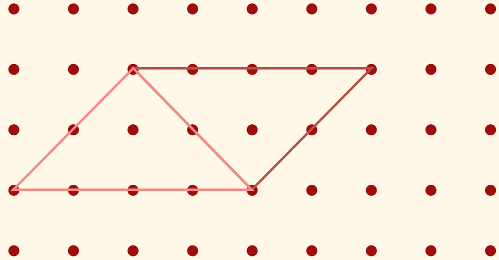
Fonte: Parmegiani (2017).

Então, o aluno pode observar que a medida do lado do retângulo é igual à medida da altura do paralelogramo. Na sobreposição das figuras, um triângulo fica fora, mas é compensado por outro. Então, não é difícil concluir que a área do paralelogramo é igual à área do retângulo, ou seja:

$$\text{Área}_{\textit{paralelogramo}} = \textit{base} \cdot \textit{altura}$$

Na sequência, os alunos podem construir um triângulo qualquer no Geoplano e, com outro elástico, construir outro triângulo igual ao primeiro, tal como mostra a Figura 26:

Figura 26 – Área do triângulo



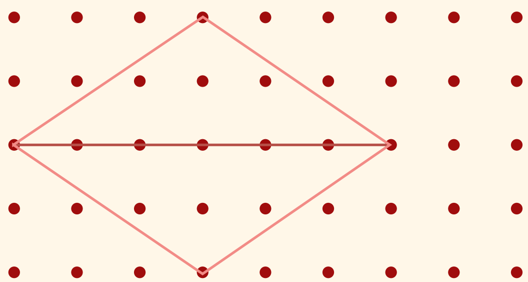
Fonte: Parmegiani (2017).

Observa-se que a figura formada é um paralelogramo. Como o triângulo é a metade do paralelogramo e ambos têm a mesma base e a mesma altura, é possível concluir que a área do triângulo é a metade da área do paralelogramo, ou seja:

$$\text{Área}_{triângulo} = \frac{base \cdot altura}{2}$$

Para o losango, pede-se que o aluno construa um losango no Geoplano, identificando a sua diagonal maior, como mostra a Figura 27.

Figura 27 – Área do losango



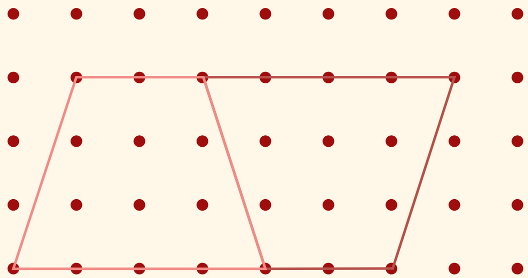
Fonte: Parmegiani (2017).

A partir da identificação da diagonal maior do losango, percebe-se que a figura ficou dividida em dois triângulos, cujas bases coincidem com essa diagonal. A altura dos dois triângulos coincide com a metade da diagonal menor do losango. Dessa forma, pode-se perceber que a área do losango é o dobro da área do triângulo, ou seja:

$$\text{Área}_{losango} = 2 \; x \; \frac{Diagonal\ maior \cdot \frac{Diagonal\ menor}{2}}{2} = \frac{Diagonal\ maior \cdot Diagonal\ menor}{2}$$

E, para finalizar, a área do trapézio pode ser deduzida também utilizando o Geoplano. Basta pedir aos alunos que construam dois trapézios de mesmas medidas, um ao lado do outro, como ilustrado na Figura 28.

Figura 28 – Área do trapézio



Fonte: Parmegiani (2017).

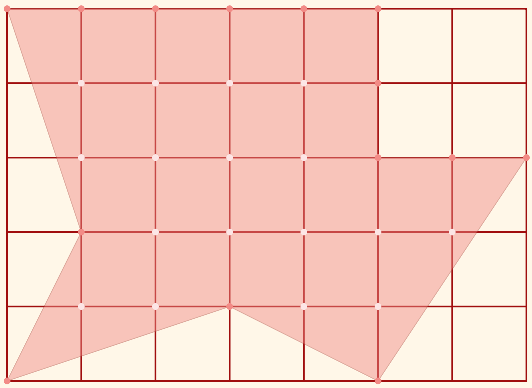
Os dois trapézios formam um paralelogramo cuja base maior é a soma da base maior com a base menor do trapézio, e a altura do paralelogramo é a mesma do trapézio. Desta forma, pode-se perceber que a área do trapézio é a metade da área do paralelogramo, ou seja:

$$\text{Área}_{triângulo} = \frac{(Base\ maior + Base\ menor) \cdot altura}{2}$$

- → Além dessas atividades para cálculo de área das figuras geométricas, o Geoplano também pode ser utilizado para muitas outras situações.
- → Por exemplo, pode-se trabalhar com o conceito de ângulos, com **retas** e **curvas**, com **frações** (construa um quadrado que seja um terço de um retângulo, por exemplo), **construção de polígonos com mesma área e perímetros diferentes**, ou vice-versa, entre outras possibilidades. Para isso, basta utilizar a criatividade para propor atividades diferentes com o Geoplano que poderão proporcionar um aprendizado significativo e duradouro aos alunos.

Para finalizar esse tema, vale a pena ressaltar a Fórmula de Pick para o cálculo de área de polígonos simples. Essa fórmula advém de um teorema, **Teorema de Pick**, que considera um polígono simples com seus pontos de fronteira (pontos sobre as arestas do polígono) e pontos interiores (pontos no interior do polígono). Para isso, o polígono deve ser construído em material quadriculado (que pode ser o Geoplano), com vértices nos pontos do reticulado, como mostra a Figura 29.

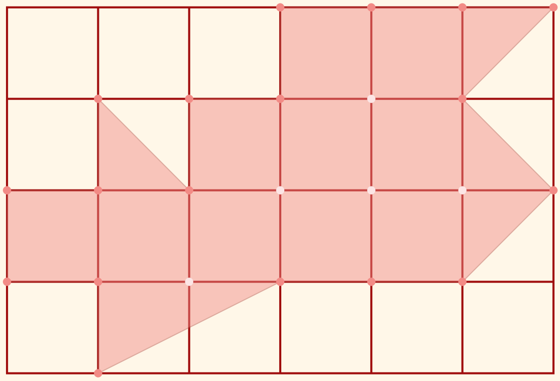
Figura 29 – Polígono simples



Fonte: Atz (2015).

Então, o Teorema de Pick diz que a área do polígono simples é dada pela soma da metade do número de pontos de fronteira (F) e o número de pontos interiores (I), subtraindo 1 ao final, ou seja: Área = ½ F+*I*-1. A unidade de área é a unidade do quadriculado onde está traçado o polígono. Como exemplo, considere o polígono simples da Figura 30.

Figura 30 – Teorema de Pick para o cálculo de área de polígono simples



Fonte: Silva Junior (2018).

Esse polígono tem 18 pontos de fronteira (F, pontos vermelhos) e 5 pontos interiores (I, pontos brancos). Desta forma, a área desse polígono, segundo o Teorema de Pick, é calculada da seguinte forma:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 18 + 5 - 1 = 9 + 5 - 1 = 13 \textit{ unidades de área.}$$

Vale a pena comparar esse resultado com a área da figura ao somarmos os quadrados interiores a ela. Para isso é necessário fazer a soma das regiões triangulares, considerando que cada duas delas formam um quadrado. E ainda, na última linha da figura, percebe-se também que a soma das duas regiões é um quadrado. Sendo assim, por comparação, os 2 cálculos resultam em 13 unidades de área.

Para uma abordagem interdisciplinar, pode-se propor atividades que envolvam o cálculo de área de territórios, como, por exemplo, área do município, estado ou país dos estudantes. Para isso basta utilizar o mapa do território, quadriculado numa escala que seja possível o cálculo real da área da região. Nesse caso, o Teorema de Pick pode ser facilmente utilizado, numa prática interessante e importante para a aplicação dos conceitos matemáticos no dia a dia dos alunos.

→ Um material bastante interessante que pode auxiliar o professor na construção do conhecimento nesta área da Geometria é o livro de Cargnin *et al*. (2019), intitulado *O ensino prático da Geometria: da formação à atuação*.

Esse livro trata da Geometria de forma prática, sem deixar de lado os aspectos teóricos, objetivando facilitar o seu aprendizado, tanto por parte de alunos, como também de professores que lecionam no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio.

São apresentadas definições, teoremas, proposições, demonstrações de fórmulas matemáticas, tais como as de cálculo de área dos polígonos, atividades práticas envolvendo materiais manipuláveis e softwares, como o GeoGebra, sites de jogos e outros tipos de atividades que podem ser realizadas com os alunos.

Apenas como um exemplo, a Figura 31 apresenta um trecho do livro no qual os polígonos são definidos. Veja que questionamentos são feitos com o intuito de instigar o aluno a pensar de forma lógica, interpretando as definições e comparando-as entre si, para que a Geometria possa ser entendida com maior profundidade.

Figura 31 – Trecho do livro O *ensino prático da Geometria: da formação à atuação*

Proposição: se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo. (BARBOSA, 1985, p.89)

Pergunta para discutir: É possível que um paralelogramo seja um trapézio? Se sim, em quais condições? Se não, justifique.

Espera-se que os estudantes concluam que uma diferença entre um trapézio e paralelogramo é que neste último há a obrigatoriedade de lados opostos serem paralelos. No trapézio não, basta haver dois lados paralelos (os quais serão as bases do trapézio). Logo, podemos dizer que todo paralelogramo é um trapézio no qual as bases têm mesma medida e em particular os outros dois lados (as laterais) do trapézio também são paralelos.

Fonte: Cargnin *et al.* (2019).

REFERÊNCIAS

ATZ, D. Teorema de pick e o estudo de área e perímetro no geoplano online. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 13, n. 2, p. 1-10, dez. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

CAIXINHA de palitos de picolé passo a passo. **Como fazer em casa**, [*s. l.*], 2013. Disponível em: https://comofazeremcasa.net/caixinha-de-palitos-de-picole-passo-a-passo/. Acesso em: 20 jun. 2020.

CARGNIN, C. *et al*. **O ensino prático da Geometria**: da formação à atuação. 1. ed. Curitiba: CRV, 2019.

FERREIRA, A. B. H. **Novo dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 2. ed. Curitiba: Nova Fronteira, 1999.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. A. Mídias digitais na educação matemática. *In*: GRAVINA, M. A. *et al*. (org.). **Matemática, mídias digitais e didática**: tripé para formação de professores de matemática. 1. ed. Porto Alegre: Evangraf, 2012. p. 11-35. Disponível em: https://www.ufrgs.br/espmat/livros/livro2-matematica_midiasdigitais_didatica.pdf. Acesso em: 2 jul. 2020.

GUILLEN, J. D. A importância do ensino da geometria nas séries iniciais: compartilhando a experiência com os professores. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais** [...]. Guarapuava: SBEM, 2013. p. 1-8.

OXYRHYNCHUS papyrus. **Wikipedia**, [*s. l.*], 2022. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/File:P._Oxy._I_29.jpg. Acesso em: 20 jun. 2022.

PARMEGIANI, R. Ensinando geometria com o geoplano. **Ensinando matemática**, [*s. l.*], 2017. Disponível em: https://www.ensinandomatematica.com/ensinando-matematica-geoplano. Acesso em: 2 jul. 2020.

PAVANELLO, R. M. **Formação de possibilidades cognitivas em noções geométricas**. 1995. Tese (Doutorado em Metodologia do Ensino) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

SANTOS, C. A. NACARATO, A. M. **Aprendizagem em geometria na educação básica**: a fotografia e a escrita na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

SILVA JUNIOR, F. S. *et al*. Teorema de Pick: auxílio no ensino de geometria. **Revista Brasileira de Educação Básica**, [*s. l.*], v. 9, 2018. Disponível em: http://rbeducacaobasica.com.br/teorema-de-pick-auxilio-no-ensino-de-geometria. Acesso em: 20 jun. 2022.

VARGAS-VARGAS, G.; GAMBOA-ARAYA, R. El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. **Uniciencia**, Heredia, v. 27, n. 1, p. 74-94, jan./jun. 2013.

{04}

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Diogo Heron Macowski*

Segundo Itacarambi (2013, p. 5), "[...] se queremos que os alunos usem os seus conhecimentos para resolver problemas, partimos do pressuposto de que é necessário ensinar-lhes Matemática resolvendo problemas".

* Doutor em Engenharia Química pela Universidade Estadual de Maringá (UEM) e mestre em Métodos Numéricos em Engenharia pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Especialista e licenciado em Matemática pela FECILCAM. Professor do Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Campo Mourão. Leciona a disciplina de Matemática para o Curso Técnico em Informática e as disciplinas da área de Estatística nos cursos superiores da instituição.

INTRODUÇÃO

Em muitos países do mundo, incluindo o Brasil, as dificuldades encontradas no ensino e na aprendizagem da matemática em todos os níveis constituem-se foco de constantes debates, pesquisas e controvérsias. Porém, ainda assim, esta área carece de ações concretas por parte de pesquisadores, docentes de universidades, professores da educação básica entre outros, para buscar alternativas e suas implementações de modo que, de fato, cheguem até a sala de aula. Para tanto, cursos de extensão voltados para a formação de professores parecem ter potencial para o enfrentamento da citada problemática de forma integrada, de modo que todos os envolvidos na formação inicial ou continuada possam repensar sua práxis no ensino da matemática, enquanto, simultaneamente, aprendem e analisam novas metodologias de forma teórica, prática e crítica. Esta proposta encontra respaldo em pesquisas como a de Gutiérrez Zuluaga, Aristizabal Zapata e Rincón Penagos (2020, p. 121 , tradução nossa), quando dizem que:

> Os docentes de hoje têm o desafio de ressignificar suas práticas pedagógicas, buscando fazer com que seus alunos se apropriem dos conceitos e entendam a importância da matemática. Já os pesquisadores em Educação Matemática devem saber interpretar o significado que o ensino e a aprendizagem da matemática têm para os participantes, ao vivenciar o processo de instrução/educação dentro das salas de aula.

Coerentemente com a citação acima, o presente capítulo é resultado das necessidades sentidas durante um curso proposto como projeto de extensão por docentes do Departamento de Matemática da UTFPR, campus de Campo Mourão, para formação de professores do Ensino Fundamental I da Rede Municipal de Ensino deste município.

Temos como objetivos apresentar, discutir, de forma teórica e prática, a metodologia denominada Resolução de Problemas (RP) como possível alternativa, tanto para inovar quanto para tentar enfrentar algumas dificuldades encontradas no ensino da matemática. Propomos introduzir esta metodologia, casando a experiência vivida durante o curso antes citado com a teoria produzida nesta área, buscando facilitar sempre a compreensão por meio de uma linguagem simples e objetiva, ilustrando com situações de uso em anos iniciais do ensino fundamental.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA NAS AULAS DE MATEMÁTICA

De acordo com Arteaga-Martínez, Macías e Pizarro (2020), a RP tem sido a metodologia mais estudada e a que mais tem evoluído no campo da Educação Matemática, buscando atender às demandas sociais. Por esta razão, muitos são os currículos que incluem a resolução de problemas de diversas naturezas como social, laboral e interdisciplinar.

> Portanto, a resolução de problemas na didática da matemática emerge pela necessidade de estudar sua funcionalidade como recurso para a aprendizagem dos objetos de conhecimento da área e pela sua relação com o desenvolvimento de habilidades e capacidades: a análise, a síntese, a extração de informação, a confrontação das ideias, a argumentação, a reflexão e a comunicação dos resultados. Isto a converte em uma potente ferramenta para conhecer como o aluno aprende, compreende e organiza seu conhecimento (Arteaga-Martínez; Macías; Pizarro, 2020, p. 5, tradução nossa).

Conceituando e definindo a resolução de problemas

Embora já conhecida e praticada entre gregos e romanos, foi somente a partir da década de 1990 que a RP passa a ser entendida como ponto de partida e como meio de ensino da matemática, tornando-se, deste modo, uma metodologia de ensino na qual o problema é considerado como elemento desencadeador do processo de construção do conhecimento, além de ser aceita como uma investigação matemática (Zimer *apud* Paraná, 2010).

No intuito de facilitar a compreensão da RP e, ao mesmo tempo, analisar a práxis dos professores em formação continuada na área da matemática, damos início, apresentando uma diferenciação entre os termos "exercício", "problema" e "investigação", muito utilizados no ensino da matemática, sobretudo no trabalho com a RP.

→ **Exercício, problema, investigação?**

O termo **"exercício"**, muito utilizado nas aulas de matemática, sobretudo até o início da década de 1990, tem sido entendido como uma atividade selecionada pelo docente e realizada pelo aluno para chegar a uma determinada resposta. Metodologicamente, este ensino é conhecido como dedutivo: o professor explica o conceito ou o conteúdo, dá alguns exemplos, pedindo, em seguida, aos alunos que resolvam exercícios similares.

Já o termo **"problema"**, muito utilizado quando o suporte para o ensino advém da teoria socioconstrutivista, traz na sua concepção as seguintes ações: o professor apresenta uma situação que pode conter uma ou mais dificuldades para as quais não há uma solução evidente. Em outras palavras, os alunos não têm acesso antecipado a um método, conceito, teoria, ou exemplo que lhes permitam encontrar a solução. Para Mastroianni e Oliveira (2013, p. 18), a RP é mais do que uma atividade, exercício ou tarefa. É "[...] um eixo metodológico nas aulas de matemática, permeando vários momentos didáticos e situações que permitam alguma problematização".

Por **"investigação"**, tem-se uma situação mais aberta na qual o problema ou questão a ser solucionada não está bem definida logo de início. Esta linha tem sido muito utilizada na abordagem sociointeracionista, tendo como base estudos do pesquisador soviético Vygotsky.

Coerente com esta linha, ou seja, tendo suporte teórico advindo da teoria sociointeracionista e no campo de estudos filosóficos, os pesquisadores Leal Júnior e Oniuchic (2015, p. 958), posicionam-se sobre a RP como sendo:

> [...] a metodologia [...] que aponta o problema como objeto que inicia e fomenta a construção e a formação de um novo conceito matemático, por meio da sua produção ativa e da constituição da Matemática através da sua prática. Nesta concepção os estudantes passam a ter participação efetiva na constituição de sua aprendizagem, ou seja, são coautores da mesma e os professores são os incentivadores e mediadores desse processo através das atividades de ensino.

Desta forma, resolver um problema na linha investigativa torna-se uma atividade complexa que necessariamente terá como primeiro passo fazer uma análise qualitativa do todo, de modo que os discentes possam compreender e interpretar a situação proposta para, em seguida, pensar em possíveis aproximações, nas tomadas de decisão para o caso e sua concretização.

→ Em outras palavras, é preciso:
1. ter ideia da situação toda;
2. delimitar a situação;
3. propor os objetivos;
4. buscar caminhos para alcançá-los.

Seja a RP moldada pela teoria construtivista, seja interacionista ou ainda por outras teorias de ensino da matemática, os estudos e pesquisas apontam que muitos professores, principalmente os dos anos iniciais, têm pouco conhecimento desta metodologia e menos ainda sabem como utilizá-la em sala de aula (Fávero; Neves, 2009; Gutiérrez Zuluaga; Aristizabal Zapata; Rincón Penagos, 2020). Muitas vezes, eles atribuem aos alunos alguns erros encontrados em atividades e provas, mas, ao explicar o que eles deveriam ter feito, conseguem chegar à resposta certa, mas não conseguem definir os conceitos, teorias e metodologia utilizados ou que deveriam ter sido usados, recaindo, portanto, na abordagem tradicional de dar uma única resposta encontrada por um único caminho. Além do problema citado acima, a prática da RP tem apresentado outras dificuldades a serem enfrentadas no cotidiano das salas de aula, muitas das quais de natureza interdisciplinar (Basso; Tognato; Macowski, 2015), principalmente nas áreas discutidas a seguir.

Com relação aos alunos, um bom exemplo interdisciplinar fica evidenciado frente ao pouco domínio e habilidade de leitura que eles normalmente têm. Isso influencia a compreensão da situação e o levantamento dos problemas a serem solucionados, muitos dos quais advindos pela estrutura linguística e/ou pela linguagem utilizadas no enunciado, como termos técnicos, por exemplo, ou ainda pelo desconhecimento dos significados matemáticos dos termos e no que isso implica para a resolução do problema.

Relacionadas aos professores, como já mencionado anteriormente, é preciso dizer que muitos deles nem sempre têm o domínio e o conhecimento da área a ser trabalhada e, por esta razão, acabam por recair no ensino tradicional. Vale lembrar que a maioria dos professores dos anos iniciais tem formação em Pedagogia, cuja graduação não contempla, na maioria das vezes, disciplinas envolvendo a Matemática com carga horária suficiente e, quanto à Língua Portuguesa, esta desapareceu da maioria dos currículos. Assim, é muito comum ouvir dos professores que o aluno:

→ 1. não compreende o que lê e se limita a juntar os dados numéricos do enunciado;
2. compreende o enunciado como um todo, mas não observa detalhes importantes para a solução do problema;
3. não domina o conteúdo de matemática necessário à resolução do problema.

Buscando suporte para o enfrentamento dos problemas mencionados, faremos a seguir um levantamento de estudos e pesquisas na área de RP especificamente nos anos iniciais da educação básica.

Das dificuldades encontradas no uso da resolução de problemas nos anos iniciais

De acordo com Mastroianni e Oliveira (2013), a RP tem sido muito estudada e proposta nos documentos nacionais que foram e são os norteadores do ensino no Brasil como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as Diretrizes Curriculares, bem como apregoada nos livros didáticos de Matemática que fazem parte do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Os autores reafirmam que nem sempre a práxis dos professores ao trabalhar com a RP revela conhecimento teórico e prático necessários. “[...] entendemos que na maioria das vezes a teoria é desenvolvida na sala de aula como exercícios repetitivos, procedimentos padronizados já previstos pelo aluno e professor” (Mastroianni; Oliveira, 2013, p. 18). Por terem sido ensinados no modelo tradicional, os professores buscam conduzir o processo de aprendizagem de matemática, auxiliando os alunos a chegarem à resposta certa, normalmente seguindo o caminho dado pelo livro didático (do professor). Os alunos, então, veem se acertaram ou se erraram e, no último caso, apagam e copiam o exercício resolvido no quadro.

Outra forma de ensinar já utilizada por alguns professores seria a de apresentar um problema e deixar que os alunos descobrissem como resolvê-lo, com o pressuposto de que o conhecimento adviria para o aluno de modo espontâneo só por terem (os professores) apresentado a situação-problema. Outras vezes, a introdução de um problema na aula vem amarrada à descoberta de um conceito novo, porém, na maioria das vezes, passada a fase da motivação, o trabalho com a RP desaparece das aulas. Finalmente, o problema pode entrar nas aulas como conteúdo, aparecendo na lista ou programa a ser desenvolvido e, por falta de conhecimento ou domínio teórico e/ou metodológico, acaba sendo trabalhado de forma tradicional, perdendo totalmente sua essência e finalidade.

Segundo Polya (2006), Selva e Brandão (2000), o professor precisa incentivar a autonomia dos alunos para resolver os problemas. Para tanto, tem que ter a noção exata do seu papel e seus limites, pois, se ele não oferecer o suporte mínimo necessário, os alunos podem desanimar, mas, se, por outro lado, ensinar como fazer, toda a metodologia do RP terá perdido seu maior objetivo. É evidente que para o professor dos anos iniciais permanecer na sua zona de conforto: ensinar como aprendeu, é muito mais fácil e seria até aceitável, não fossem os resultados obtidos nos testes que indicam que a aprendizagem de matemática tem deixado muito a desejar. Portanto, pensamos que mudar é preciso, porém, mais necessário ainda é entender porquê, quando e como mudar. É preciso fazer pensar, é preciso querer um aluno-agente na aprendizagem e depois na vida pela matemática. Parece-nos que a RP preenche os requisitos para ser um dos caminhos para iniciar este processo. Itacarambi (2013, p. 5) embasa nossa conclusão, informando-nos sobre resultados de pesquisas e os estudos que indicam que "[...] quanto maior a relação entre a situação-problema apresentada e os conhecimentos de Matemática, maiores são as possibilidades de que o aluno faça uso desse conhecimento que está sendo trabalhado em outras situações do cotidiano".

Almeida e Almeida (1998), em estudo com crianças dos anos iniciais da educação básica, com foco nas habilidades em adição e subtração e envolvendo resolução de problemas de acordo com o nível de conhecimento escolar já adquirido pelos alunos, concluíram que os mais novos usam mais estratégias manipulativas (contagem nos dedos) e o recurso a materiais concretos (fazer riscos, bolinhas...), e são induzidos a escolher as estratégias pela linguagem (sinais, palavras, ilustrações...) presente no enunciado do problema, tais como mais; menos; juntos; cada um; com quanto, entre outros. Já os alunos com mais idade, baseiam-se, sobretudo, em estratégias mentais, orientando-se mais pelos procedimentos formais adquiridos pelo ensino escolar e pela memorização já ocorrida.

Estas conclusões levaram os autores a apontar para a necessidade de a aprendizagem de matemática ser mais significativa, partindo da vivência dos alunos e por meio de linguagem clara e precisa, coerente com suas experiências cotidianas. Alertam para o fato de que, por vezes, o uso de palavras como as citadas, relacionadas às operações matemáticas, podem induzir ao erro na solução do problema. O estudo revelou também a importância decisiva do papel do professor no ensino formal para o alcance das competências matemáticas das crianças mais novas, tais como tarefas envolvendo valor posicional, na escrita de números ou empréstimo e transporte.

Brandão e Selva (1999), por sua vez, analisaram 12 coleções de livros didáticos, utilizados nos anos iniciais da educação infantil, a partir de quatro eixos: a forma de introdução aos conceitos de adição e subtração; os tipos de problemas propostos; a utilização das ilustrações nos enunciados problemas; e o tipo de registro solicitado às crianças. As autoras constataram que nos livros analisados a variedade em relação à estrutura dos problemas era muito pequena, limitando-se às estruturas de combinação e transformação para a adição, enquanto que a maioria dos problemas de subtração ficaram restritos à estrutura de transformação. Segundo as autoras, em apenas 5% dos problemas de adição e de subtração, a criança tinha um pouco mais de liberdade para escolher a forma de resolver o problema. O espaço reservado para o registro da solução era também previamente definido. Ou seja, após o enunciado do problema, era comum apresentar o padrão de registro necessário, tais como: ...... + ... = ... (Brandão; Selva, 1999).

Foi observado também que o recurso "ilustração" tem sido bastante utilizado para fornecer os dados no enunciado do problema, muitas vezes fornecendo inclusive a resposta para a solução procurada. Quanto à parte do aluno nos livros didáticos avaliados, os autores chegaram à conclusão de que esta ficava limitada à solicitação da escrita dos dados e da resposta do problema em espaços previamente determinados. Normalmente aparecia o sinal da operação esperada para a solução do problema. Finalmente concluíram que os livros analisados tiveram a pretensão de trabalhar com a RP, contudo as situações propostas são repetitivas e não estimulam o desenvolvimento e o confronto de estratégias diversas por parte das crianças.

Confirmando os estudos anteriores, os resultados da pesquisa feita por Bispo, Ramalho e Henriques (2008) revelaram que a grande maioria das tarefas propostas aos alunos não usam contextos realistas e, predominantemente, conduziam os estudantes a selecionar procedimentos e algoritmos de resolução predefinidos, confirmando os estudos já citados. De acordo com os autores, o ensino da Matemática na educação básica tem sido marcado por um domínio quase absoluto de "[...] objetivos cognitivos de níveis mais baixos, [...] associados a conteúdos rigidamente pré-fixados e 'puramente' matemáticos, com pouca ou sem qualquer ligação com problemas do mundo atual" (2008, p. 13). Concluem que, apesar de ser esta uma realidade difícil, ela precisa ser mudada.

Com foco nos professores, outro problema detectado por Spinillo *et al.* (2017) em sua pesquisa é que os docentes encontram muita dificuldade em formular problemas que envolvam diferentes relações especialmente no âmbito das estruturas multiplicativas, fazendo-se necessário desenvolver nos professores do ensino fundamental a habilidade de formular problemas. Endossando os autores, acreditamos que o alcance desta intenção ao suporte de docentes das licenciaturas em Matemática, Educação e Letras, ou da pós-

-graduação em Educação Matemática e áreas afins é fundamental, inclusive das áreas interdisciplinares e aqueles ligados a projetos de formação de docentes. É crucial que se voltem para esta dificuldade de modo a minimizar o fraco desempenho dos alunos em Matemática em todos os níveis.

Os docentes da educação básica precisam trazer propositadamente problemas para a sala de aula que incentivem seus estudantes a mobilizar os conhecimentos matemáticos que já têm para resolvê-los, fazendo com que entendam os motivos para seu uso. Isso requer "[...] planejamento, propósito bem definido e embasamento teórico" (Mastroianni; Oliveira, 2013, p. 19).

A título de ilustração, podemos discutir um caso verídico. Em um curso de extensão para professores dos anos iniciais, foi solicitada a elaboração de um problema para alunos do 2º ano, levando-se em consideração a necessidade de se trabalhar com as operações elementares com números naturais – assunto que os professores estavam trabalhando no momento do curso. Uma das sugestões foi:

→ Fernando está lendo um livro de 48 páginas. Ele já leu 25 páginas desse livro. Quantas páginas faltam para ele terminar a leitura?

Este é um problema que pode ter mais de uma forma de ser resolvido – justamente o que pede a teoria da RP – e por esta razão deve ser bem explorado pelo professor nos anos iniciais. Após dar o tempo necessário para os alunos resolverem o problema, solicita que alguns alunos venham ao quadro para mostrar como fizeram. Se todos tiverem resolvido da mesma forma, poderia perguntar: "Quem fez de um jeito diferente?" Se ninguém tiver feito, ele próprio poderia fazer. Isso poderia servir de estímulo e de desafio ao estudante que tivesse resolvido o problema de forma diferente, não tendo que apagar o que havia feito, como usualmente acontece.

Como visto, o uso da RP implica em que o aluno seja desafiado a encontrar novas soluções para o problema, mesmo erradas. Para tanto, ele precisa sempre de "novos" problemas, porque não há razão alguma em procurar o novo se com o antigo a resposta é encontrada. Nesta perspectiva, o professor deixa o papel de transmissor para assumir o de mediador de conhecimentos (Freire, 2006).

Outro aspecto importante, reafirmando aqui os estudos de Gutiérrez Zuluaga, Aristizabal Zapata e Rincón Penagos (2020, p. 121), quanto à necessidade de se colocar a visualização a serviço da RP, tomando-a como um procedimento, mas também como capaz de inspirar uma solução geral e criativa, uma vez que as representações de formas visuais são elementos legítimos e de grande valia nas demonstrações matemáticas, além de contribuir para uma compreensão significativa das ideias matemáticas e as relações entre os conceitos matemáticos. Os autores afirmam que o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) como forma de ampliar o leque de problemas acessíveis aos estudantes, além de lhes permitir executar rotinas de modo rápido e preciso, dá-lhes mais tempo para conceitualizar e modelar. Citando Marmolejo e González, (2013, p. 90), os autores dizem que especialmente na área de RP, há a firme intenção de privilegiar os processos de visualização cuja função entre outras está a de "[...] dar suporte ou guiar o desenvolvimento de um problema planejado ou permitir que sua compreensão se desgrude de um dado procedimento".

Para Jaime e Gutiérrez (2018, p. 42 *apud* Gutiérrez Zuluaga; Aristizabal Zapata; Rincón Penagos, 2020, p. 123 , tradução nossa): "O ensino da matemática na Educação Básica inclui o uso permanente de representações visuais de conceitos, relações e operações, por meio de materiais manipulativos, desenhos, diagramas etc., tanto reais quanto digitais".

Frente ao exposto, percebemos que é preciso iniciar a caminhada do ensino e aprendizagem de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental pela RP, porém de forma segura e consciente. O professor precisa entender a razão de usar esta metodologia, quando e como. Para tanto, propomos a seguir alguns exemplos analisados sob a ótica de "problema" como conceituada no início deste capítulo, para, em um segundo momento na formação destes professores, podermos adentrar na RP como um processo investigativo.

SUGESTÕES E ENCAMINHAMENTOS PARA O TRABALHO COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Buscando encontrar possíveis soluções ou alternativas para minimizar as dificuldades mencionadas com o uso da metodologia RP, propomos algumas recomendações que poderão servir para nortear o trabalho pedagógico nesta linha. Elaborar problemas significativos para os alunos implica em:

- → utilizar linguagem do cotidiano;
- → procurar não induzir o aluno por meio das palavras utilizadas no enunciado;
- → fazer uma leitura cuidadosa dos enunciados dos problemas;
- → usar diferentes tipos de linguagens, inclusive a do teatro (dramatização);
- → avaliar os erros dos alunos e, a partir deles, preparar outras perguntas para ajudar na busca de solução para o problema;
- → aproveitar e expandir o raciocínio lógico-matemático e o raciocínio linguístico do aluno;
- → utilizar processos de visualização para facilitar o trabalho com a RP;
- → utilizar as tecnologias da informação e da comunicação (TICs), se possível, como apoio e suporte para a aprendizagem de RP pela internet;
- → utilizar RP casada com jogos como dominó (real ou virtual), o jogo do resto, entre outros;
- → incentivar diferentes formas de registro dos procedimentos em busca da solução;
- → deixar um espaço mais livre destinado ao rascunho das crianças;
- → incentivar o desenvolvimento de estratégias como desejável no processo de aprendizagem da matemática;
- → ensinar o aluno a registrar suas estratégias para resolver o problema.

A título de ilustração, apresentamos (Quadro 1) a visão de um aluno sobre o que é necessário para resolver um dado problema e que estratégias ele utilizou:

Quadro 1 – A concepção de RP e as estratégias para resolução na visão de um aluno

RP na visão do aluno	Estratégias para a RP
Para resolver um problema é necessário - Ler o enunciado - Compreender o enunciado - Apresentar o raciocínio - Rever a estratégia/raciocínio	Estratégias Fazer uma lista ou uma tabela. → Tentativa e erro → Do fim pra o início → Fazer uma simulação/desenho

Fonte: Adaptado de Sousa (2015).

É importante destacar que, ao trabalharmos com a RP, é preciso estarmos mais preocupados com o **processo de resolução** do que com a solução final, embora esta última seja importante e deva ter sua validade atestada. É nesse caminhar em busca de uma solução que o raciocínio lógico-matemático se desenvolve. Cardoso e Oliveira (2019, p. 75), alertam que:

> Resolver um problema pressupõe que o aluno elabore um ou vários procedimentos de resolução; compare seus resultados com os de outros alunos; valide seus procedimentos. Nesta forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução.

Talvez o professor possa se perguntar: "E se eu não souber avaliar se o que meu aluno fez está certo?". Ao que poderíamos responder que, ao iniciarmos um trabalho com uma nova metodologia, sempre ocorre certa insegurança que pode ser minimizada pelas sugestões antes apresentadas, mas, principalmente, podemos pensar previamente no problema que será trabalhado e nas possíveis formas de resolução. Isso nos dá segurança para mediar as discussões coletivas em sala de aula.

A resolução de problemas na sala de aula: problemas sob análise

A seguir, apresentamos alguns problemas, tecendo alguns comentários sobre eles, visando a encorajar os professores a fazerem uso das estratégias e ações em situações-problema semelhantes.

Quadro 2 – Questão proposta para alunos do 4º ano do ensino fundamental

Isabel tem 07 notas na carteira, num total de R$ 30,00. Que notas são essas? Mostrar várias possibilidades.

Fonte: Medeiros e Carvalho (2013, p. 158).

Este tipo de problema (Quadro 2) é indicado por ter várias maneiras de juntar as cédulas para alcançar o valor de R$ 30,00: 1) 1 nota de R$ 20 e 1 de R$ 10; 3 notas de R$ 10; 6 notas de R$ 5; 5 notas de R$ 2 e 2 notas de R$ 10, entre outras.

As autoras antes citadas afirmam que:

> [...] o problema analisado, de certa forma, apresenta informações sobre o sistema monetário e que requer conhecimento de cédulas e moedas para manuseá-lo; sistema de numeração decimal, que é importante explorar, desde os anos iniciais, pois as relações lógicas e numéricas estão presentes nas situações que envolvem situações do cotidiano (Medeiros; Carvalho, 2013, p. 159).

Além disso, o problema é significativo para o aluno, faz uso da linguagem do cotidiano, não usa palavras que possam "induzir" o aluno a concluir se deve fazer uma "conta de mais ou de menos". O enunciado também é claro, sendo esta característica essencial para a compreensão do problema para, enfim, chegar à adequada resolução. Cada aluno pode resolver o problema de um modo diferente, conforme sua habilidade com o sistema monetário, o sistema decimal e as operações numéricas.

Souto (2018), por sua vez, sugere que a elaboração de problemas de acordo com um tema de interesse da turma é benéfica, podendo contribuir com o envolvimento dos estudantes com a atividade e em todo o processo de resolução do problema. Sua pesquisa trata de problemas para o 4º ano, usando uma investigação policial como pano de fundo. Um excerto desse trabalho pode ser visto em Souto e Guérios (2020).

Oliveira e Mastroianni (2015, p. 464-465) discutem o problema abaixo (Quadro 3), pensado para o 5º ano:

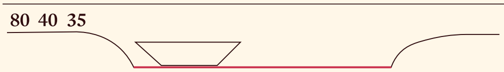
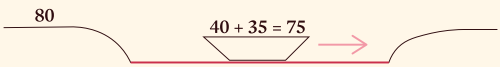
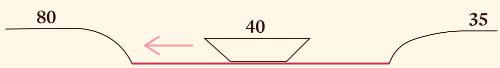
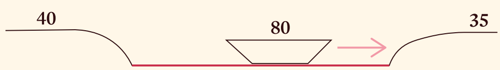
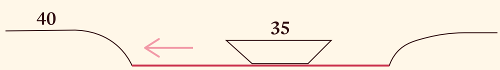
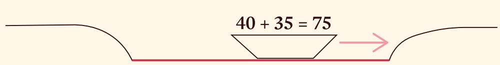
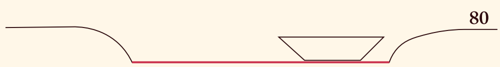
Quadro 3 – Resolução de problemas para o 5º ano

> Era uma vez um pai e dois filhos. O pai tinha 80 kg, o menino, 40 kg e a menina, 35 kg. Eles tinham de atravessar um rio. Por sorte, os três sabiam remar e encontraram um bote na margem. Só que, junto ao bote, havia um aviso assustador: Não se afogue! O bote suporta, no máximo, 85 kg. Faça deduções, elabore hipóteses e descubra: nessas condições, de que maneira os três poderão atravessar o rio utilizando o bote? Escreva e explique sua resposta.

Fonte: Oliveira e Mastroianni (2015).

Para resolver o problema acima colocado, os autores enfatizam a importância da mediação docente para "[...] estimular ou desbloquear possíveis entraves" (Oliveira; Mastroianni, 2015, p. 478). A seguir apresentamos um exemplo para a resolução do problema (Quadro 4).

Quadro 4 – Exemplo de resolução para o problema proposto

	A família toda está na margem esquerda.
	As duas crianças atravessam o rio.
	O filho deixa a irmã na margem direita e retorna sozinho.
	O filho desce na margem esquerda e aguarda enquanto o pai atravessa o rio sozinho.
	O pai desce na margem direita e aguarda enquanto a filha atravessa o rio sozinha.
	Ao chegar na margem esquerda, o filho embarca e as duas crianças atravessam o rio novamente.
	Enfim a família toda cruzou o rio sem exceder o limite de peso do barco.

Fonte: Autoria própria.

Também para este nível, Santos e Andrade (2020) utilizaram a RP em situações que envolviam Análise Combinatória com uma turma de 5º ano, durante 4 encontros de 4 horas e 1 encontro de 2 horas. Os autores relataram diversificação das estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos no decorrer do período, e concluíram "[...] que a Resolução potencializa a capacidade de os alunos pensarem matematicamente, tendo em vista que conseguiram utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas" (Santos; Andrade, 2020, p. 13). Seguem abaixo alguns exemplos (Quadro 5):

Quadro 5 – Problemas envolvendo análise combinatória aplicados em um 5º ano

Encontros	Problemas
1° encontro	1. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes serão obtidos no concurso?
2° encontro	2. Para a festa de São João da escola tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luiza, Clara e Beatriz)que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes serão formados?
3° encontro	3. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos do meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que eles fiquem lado a lado?
4° encontro	4. Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representane e o vice representante?

Fonte: Santos e Andrade (2020, p. 11).

Bortolucci *et al.* (2018) trabalharam o seguinte problema com um 1º ano (Quadro 6):

Quadro 6 – Resolução de problemas para o 1º ano

Meu avô cria no quintal do sítio porcos e galinhas. Ontem, quando fui visitá-lo contei no quintal 5 cabeças e 14 pés de animais. Quantos porcos e quantas galinhas estavam no quintal do meu avô?

Fonte: Bortolucci *et al.* (2018).

É previsível que as crianças tenham alguma dificuldade na compreensão do enunciado, porém os autores ressaltam a importância da discussão coletiva para essa elucidação e o tempo necessário para que a criança consiga conversar a respeito e elaborar um registro da sua resolução. Note-se que, nesta fase, mesmo que a criança não tenha domínio da escrita, ela pode fazer um registro pictórico.

Sousa e Mendes (2017) seguiram as 4 etapas de resolução de um problema estabelecidos por Polya (2006), a saber: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, realização do plano, análise retrospectiva e analisaram as estratégias usadas por alunos de uma turma de 2º ano para resolver os problemas apresentados no Quadro 7, cujos enunciados adaptamos para a língua portuguesa do Brasil para minimizar as dificuldades em sua compreensão.

Quadro 7 – Problemas para o 2º ano envolvendo operações de adição e subtração

→ Tomé queria comprar uma escova de dentes com pasta dental que custava R$ 37. Ele guarda em seu cofrinho o dinheiro que seu pai lhe dá quando se comporta bem e reparou que já tem R$ 18. Quanto dinheiro lhe falta para poder comprar a escova e pasta dental?

→ O automóvel da Senhora Redondinha partiu da estação com alguns passageiros. Na primeira parada entraram dois passageiros; na segunda saíram cinco passageiros e na terceira entrou apenas um, tendo chegado ao destino com doze passageiros. Quantos passageiros iniciaram a viagem?

→ Com a proximidade do Natal, Jéssica preparou alguns biscoitos para oferecer aos seus amigos da turma. Quando chegou deu 8 às amigas e no intervalo deu 6 a alguns rapazes. Ao regressar para casa, ainda haviam sobrado 6 biscoitos. Quantos biscoitos Jéssica preparou para este dia?

→ Papai Noel resolveu fazer uma festa em sua casa para comemorar a chegada do Natal. Convidou três amigos, a rena Rudolfo, o duende Miguel e o coelho Vasco. Quando chegaram, todos cumprimentaram uns aos outros com um abraço. Quantos abraços foram dados?

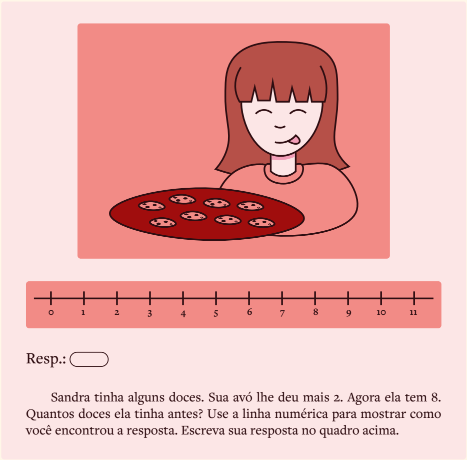
Fonte: Sousa e Mendes (2017).

Ao seguir as etapas de Polya (2006), as autoras supracitadas consideraram que o aluno passaria da compreensão do enunciado à validação da sua resposta. Nas suas análises, Sousa e Mendes (2017 , p. 249) destacam a importância da argumentação e conhecimentos matemáticos, mas também enfatizam que "[...] as suas dificuldades ao nível da língua materna podem influenciar a compreensão e interpretação dos enunciados e a justificação e explicação dos raciocínios efetuados".

As autoras também concluíram que as representações icônicas (os desenhos) aparecem com muita frequência nos registros dos alunos desse nível de ensino, com a representação simbólica (numérica), o que mais uma vez indica a importância de sempre utilizar mais de uma representação semiótica (seja icônica – desenho ou gráfico, numérica, ou em língua materna) nas aulas de matemática.

Um exemplo de problema que utiliza uma representação icônica é apresentado por Justo (2012, p. 12) e demonstrado na Figura 1. O autor comenta que problemas que envolvem uma transformação aditiva com início desconhecido tem sido fonte de dificuldade para alunos de 3º e 4º anos, talvez pela impossibilidade de usarem as figuras como recurso para resolução de problemas.

Figura 1 – O uso da reta numérica na resolução de problemas

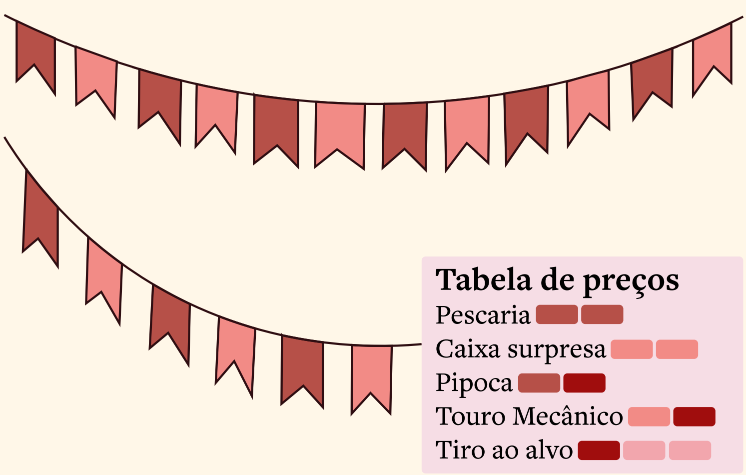


Fonte: Justo (2012).

Independentemente do problema proposto e da estratégia utilizada pelo aluno para resolvê-lo, é sempre importante que o professor o incentive a registrar no papel, à sua maneira, seu modo de resolução, inclusive para que o docente possa perceber o processo como um todo e intervir em eventuais erros processuais. Com o passar do tempo, registros mais formais e simplificados podem ser ensinados ou adotados, sem que isso se apresente como uma imposição (Jacobik, 2010).

A Figura 2 apresenta outro exemplo em que a representação icônica é utilizada, porém, nesse caso, as operações serão executadas em problema envolvendo noções financeiras, ainda que sem o uso do dinheiro:

Figura 2 – Representação icônica em problema envolvendo finanças



Fonte: Autoria própria.

1. Desenhe as fichas que cada criança gastou.
a) Pedro brincou 2 vezes na pescaria. Ele gastou: ...
b) Lara comprou 1 caixa surpresa e 1 pipoca. Ela gastou: ...
c) Luiza brincou 3 vezes no touro mecânico. Ela gastou: ...
d) Edilson atirou 2 vezes no tiro ao alvo. Ela gastou: ...
2. Desenhe as fichas que as crianças gastaram, ao todo.

Este tipo de problema estimula a criança a refletir, a operar matematicamente e a estabelecer comparações. Infelizmente, não são comuns nem nos livros e nem nas aulas. Parece haver uma tendência simplificadora nas atividades pensadas para crianças, como se não fossem capazes de ter raciocínios mais complexos ou elaborados. Vale lembrar que mais adiante, no segundo ciclo do ensino fundamental, ela será cobrada, sem ter sido exposta e acostumada a isso.

De modo geral, podemos dizer que ao trabalhar com RP, alguns cuidados devem ser tomados, antes, durante e após a utilização, os quais vão desde uma leitura atenta ao enunciado proposto, para evitar interpretações dúbias e certificar-se do contexto e de que o aluno entendeu, até uma revisão mais aprofundada da atividade em si, para corrigir erros e apontar melhorias. O quadro a seguir sintetiza esses cuidados:

→ **Que cuidados o professor deve ter ao usar a Resolução de Problemas em sala?**

1. Antes de dar o problema para o aluno:
a) leia cuidadosamente o enunciado, para evitar falsas interpretações;
b) certifique-se que ele faz parte do contexto do seu estudante.
2. Durante a resolução do problema pelo aluno:
a) certifique-se que o aluno compreendeu o enunciado como um todo e não está apenas usando os dados numéricos;
b) certifique-se que o aluno tem o repertório técnico necessário para a resolução ou tenha formas de obtê-lo;
c) incentive diferentes **formas de registro dos procedimentos em busca da solução** e de linguagens (entre elas a dramatização);
d) avalie os erros dos alunos e, a partir deles, faça **novas perguntas** para ajudá-los a buscar a solução do problema, aproveitando o raciocínio deles.
3. Depois da resolução:
a) avalie o que funcionou bem e o que precisa melhorar;
b) reformule o que for necessário;
c) tente outra vez.

Sugerimos a leitura de Dante (2009) tanto para conhecimento e aprofundamento da teoria da RP nos anos iniciais quanto para encontrar um grande número de situações-problemas possíveis de serem trabalhadas neste nível de ensino. Também inserimos no Apêndice uma lista de problemas elaborados pelos professores cursistas ao longo do curso de formação, objeto do presente capítulo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluindo, reiteramos que desde a pré-escola pode haver um trabalho com situações-problema de estruturas variadas, de modo a possibilitar às crianças a aquisição de conceitos mais flexíveis sobre as operações. Tais situações devem ser significativas e exploradas em suas soluções possíveis, estimulando as crianças a formularem hipóteses, trocarem ideias, comparando diferentes estilos de solução e de registros, construindo, relacionando e aplicando os seus conhecimentos matemáticos. Assim como há inúmeras possibilidades para que a escrita ocorra dentro de um contexto de significados, também há diversas situações do dia a dia que podem representar excelentes oportunidades para resolver problemas. Para isto, é essencial que o educador reconheça o valor deste trabalho para o desenvolvimento da criança, bem como identifique as diferentes estruturas de problemas, considerando a importância de se explorar as estratégias de resolução de problemas.

Para Itacarambi (2013, p. 5) "Analisar e compreender como pensam os alunos e gerar seu entusiasmo e curiosidade são atitudes do professor, essenciais para o sucesso na resolução de problemas". Ainda afirma a autora que os professores devem partir do pressuposto de que é necessário ensinar matemática aos alunos resolvendo problemas, se quiserem que eles utilizem tais conhecimentos, ou seja, a matemática para resolver problemas com os quais se depararão no cotidiano.

No trabalho com a resolução de problemas em sala de aula nos anos iniciais, é importante destacar, como afirmam Bortolucci *et al.* (2018, p. 72), o papel de mediador do professor, "[...] estabelecendo uma relação dialógica na qual aluno e professor respeitem as estratégias apresentadas, sem que estas sejam consideradas apenas certas ou erradas". Elaborar boas perguntas, instigar os alunos a pensarem faz parte da estratégia do docente que trabalha ou quer trabalhar com a resolução de problemas. As pesquisas indicam que quanto mais se trabalhar nessa perspectiva, melhores são os resultados obtidos com os alunos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. M. B.; ALMEIDA, L. S. Aprendizagem da matemática: proposta de avaliação de dificuldades específicas na adição e subtracção no 1º Ciclo do Ensino Básico. **Análise Psicológica**, Lisboa , v. 16, n. 2, p. 301-319, jun. 1998. Disponível em: http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0870-82311998000200009&lng=pt&nrm=iso. Acesso em: 3 dez. 2020.

ARTEAGA-MARTÍNEZ, B.; MACÍAS, J.; PIZARRO, N. La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. **Uniciencia**, Heredia , v. 34, n. 1, p. 263-280, jun. 2020. Disponível em: http://www.scielo.sa.cr/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2215-34702020000100263&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 1 dez. 2020.

BASSO, E. A.; TOGNATO, M. I. R.; MACOWSKI, D. H. Interdisciplinaridade e desenvolvimento na sociedade contemporânea. *In*: BASSO, E. P.; TOGNATO, M. I. R. (org.). **Sociedade e desenvolvimento**: diálogos interdisciplinares. Campo Mourão: Fecilcam, p. 15-30. 2015.

BISPO, R.; RAMALHO, G.; HENRIQUES, N. Tarefas matemáticas e desenvolvimento do conhecimento matemático no 5º ano de escolaridade. **Análise Psicológica**, Lisboa , v. 26, n. 1, p. 3-14, jan. 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/262721733_Tarefas_matematicas_e_desenvolvimento_do_conhecimento_matematico_no_5_ano_de_escolaridade. Acesso em: 3 dez. 2020.

BORTOLUCCI, M. S. *et al*. Problemas não convencionais: estratégias de resolução de alunos dos anos iniciais do ensino fundamental. **Cadernos Cenpec**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 54-77, jan./jul. 2018.

BRANDÃO, A. C. P.; SELVA, A. C. V. O livro didático na educação infantil: reflexão versus repetição na resolução de problemas matemáticos. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 25, n. 2, p. 69-83, jul./dez. 1999.

CARDOSO, M. R. G.; OLIVEIRA, G. S. A resolução de problemas para o ensino de Matemática nos anos iniciais. **Cadernos da FUCAMP**, v. 18, n. 36, p. 68-94, 2019.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009.

FÁVERO, M. H.; NEVES, R. S. P. Competências para resolver problemas e para analisar a resolução de problemas: um estudo junto a professores, licenciandos, pedagogos e psicólogos. **Psicologia Escolar e Educacional**, Campinas, v. 13, n. 1, p. 113-124, jun. 2009. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-85572009000100013&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 4 dez. 2020.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 34. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2006.

GUTIÉRREZ ZULUAGA, H.; ARISTIZABAL ZAPATA, J. H.; RINCÓN PENAGOS, J. A. Procesos de visualización en la resolución de problemas de matemáticas en el nivel de básica primaria apoyados en ambientes de aprendizaje mediados por TIC. **Sophia**, Armenia , v. 16, n. 1, p. 120-132, 2020. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7764830. Acesso em: 4 dez. 2020.

ITACARAMBI, R. R. Resolução de problemas, primeiro ciclo do ensino fundamental, construindo uma metodologia. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba: SBEM, 2013. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/1067_133_ID.pdf. Acesso em: 4 dez. 2020.

JACOBIK, G. S. Problemas matemáticos e modelos mentais de resolução: possibilidade de reflexão e aprendizagem. **Ciências & Cognição**, Rio de Janeiro, v. 15, n. 2, p. 173-183, 2010. Disponível em: http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?pid=S1806-58212010000200016&script=sci_abstract. Acesso em: 17 dez. 2020.

JUSTO, J. C. R. Resolução de problemas matemáticos aditivos: um ensaio teórico. **Em Teia**, Recife, v. 3, n. 2, p. 1-18, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/download/2161/1730. Acesso em: 17 dez. 2020.

LEAL Júnior, L. C.; ONUCHIC, L. R. Ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas como prática sociointeracionista. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 955-978, dez. 2015. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/nLsFMY58vc7767N6RV9rGcb/?lang=pt&format=pdf. Acesso em: 17 dez. 2020.

MARMOLEJO A. G. A.; GONZÁLEZ A. M. T. Función de la visualización en la construcción del área de figuras. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. **Revista Integración**, Bucaramanga, v. 31, n. 1, p. 87-106, 2013.

MASTROIANNI, M. T. M. R., OLIVEIRA, G. P. Resolução de problemas nas aulas de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental: a influência das concepções dos professores na prática observada. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 2, n. 2, p. 18-27, 2013.

MEDEIROS, J. S.; CARVALHO, M. Professoras dos anos iniciais e a resolução de problemas matemáticos. **Revista Eletrônica de Educação de Alagoas**, Alagoas, v. 1, n. 1, p. 154-165, 2013. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/ebrapem/2011/197719bb2af22be984a499bab7b885ab.pdf. Acesso em: 14 dez. 2020.

OLIVEIRA, G. P.; MASTROIANNI, M. T. M. R. Resolução de problemas matemáticos nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma investigação com professores polivalentes. **Revista Ensaio**, Belo Horizonte, v. 17, n. 2, p. 455-482, 2015. Disponível em: https://www.scielo.br/j/epec/a/GkqWNWzBv89F6wj3vcq9xsG/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 14 dez. 2020.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Ensino Fundamental de nove anos**: orientações pedagógicas para os anos iniciais. Curitiba: SEED-PR, 2010.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SANTOS, E. V.; ANDRADE, S. Resolução, exploração e proposição de problemas nos anos iniciais do Ensino Fundamental: contribuições para o ensino e aprendizagem da combinatória. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 17, p. 1-22, 2020. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/205. Acesso em: 15 dez. 2020.

SELVA, A. C. V.; BRANDÃO, A. C. P. A notação escrita na resolução de problemas por crianças pré-escolares. **Psicologia**: Teoria e Pesquisa, [*s. l.*], v. 16, n. 3, p. 241-249, set./dez. 2000. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ptp/a/CcY8qbqycwFLQYTSYMZHwws/?lang=pt&format=pdf. Acesso em: 4 dez. 2020.

SOUSA, C.; MENDES, F. Aprender a resolver problemas no 2.° ano do Ensino Básico. **Bolema**, Rio Claro , v. 31, n. 57, p. 243-265, abr. 2017 . Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/7B9N5FB7Rr5xJcLvMQmYsZd/?format=pdf. Acesso em: 4 dez. 2020.

SOUSA, C. **Aprender a resolver problemas**: um estudo com alunos do 2° ano de escolaridade. 2015. Relatório de Projeto de Investigação (Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1° Ciclo do Ensino Básico) – Instituto Politécnico de Setúbal, Setúbal, 2015.

SOUTO, F. C. F. **Contribuições do ensino da matemática por meio da resolução de problemas contextualizados nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/58296. Acesso em: 15 dez. 2020.

SOUTO, F. C. F.; GUÉRIOS, E. Resolução de problemas contextualizados: análise de uma ação didática para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática Regional São Paulo**, São Paulo, v. 17, p. 1-19, 2020. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/198. Acesso em: 15 dez. 2020.

SPINILLO, A. G. *et al*. Formulação de problemas matemáticos de estrutura multiplicativa por professores do Ensino Fundamental. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 59, p. 928-946, dez. 2017. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2017000300928&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 4 dez. 2020.

APÊNDICE

APÊNDICE

Problemas elaborados pelos professores participantes do curso de formação.

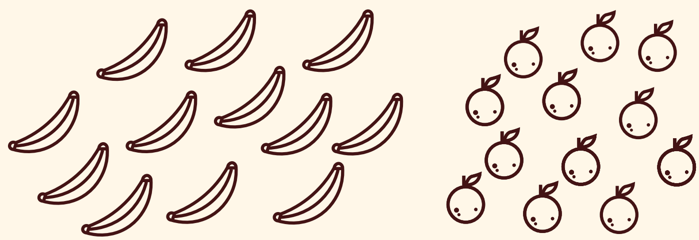
1) Ryan tem uma coleção com 36 figurinhas. Em seu aniversário, ele ganhou mais 12 figurinhas. Com quantas figurinhas ele ficou, juntando com as que ele já tinha?
2) Magali foi à feira e comprou 12 laranjas, 5 maçãs e 4 mamões. Quantas frutas ela comprou na feira?
3) José tem 45 figurinhas e ganhou de seu irmão outras 45 figurinhas. Com quantas figurinhas José ficou?
4) Maria comprou 30 ovos, no caminho para casa quebraram 12 ovos. Quantos ovos restaram?
5) Maria tem 12 anos e Sofia, sua irmã, tem 4 anos. Qual a diferença de idade entre Maria e Sofia?
6) No estacionamento de um mercado, Mateus contou 2 motos e 2 carros estacionados. Quantas rodas há no total desses veículos de transporte?
7) Chico Bento saiu para pescar em um lago perto de sua casa. Neste lago há 36 peixes dos quais ele pescou 10. Quantos peixes ficaram no lago?
8) Uma centopeia tem 100 pés. Quantos pares de sapatos ela precisa comprar?
9) Em um estacionamento tem 48 carros estacionados. Considerando que cada carro tem 4 pneus, quantos pneus todos os carros têm?
10) A professora foi ao mercado e comprou um pacote de balas contendo uma centena de balas. Distribuiu meia centena de balas para seus alunos. Quantas balas sobraram dentro do pacote?
11) Julia ganhou uma dúzia de adesivos de sua mãe e meia dúzia de adesivos de seu pai. Quantos adesivos Julia ganhou de seus pais?
12) Em um pomar havia 64 laranjas, das quais sr. João colheu 2 dúzias. Quantas laranjas restaram no pomar?
13) No sítio havia 5 dezenas de cavalos, uma dezena e meia de carneiros e 17 galinhas. Quantos animais havia no sítio?

14) No aniversário da professora, os alunos compraram 2 centenas de coxinhas, 1 centena de pastéis e meia centena de quibes. Quantos salgados foram comprados para a festa?

15) Maria e Pedro estavam brincando com bolinhas de gude. Maria tem 26 bolinhas de gude e Pedro tem 23. Quantas bolinhas de gude Maria e Pedro têm juntos?

16) Ana tinha 48 bolinhas de gude. Em um jogo com seus amigos ela perdeu 23. Quantas bolinhas de gude sobraram para Ana?

17) Maria Clara comprou uma dúzia de bananas e uma dúzia de laranjas. Quantas frutas ela comprou?



18) Em uma escola tem somente duas turmas do segundo ano. Na turma do 2º A estão matriculados 26 alunos e do 2º B estão matriculados 23 alunos. Quantos alunos do segundo ano tem nessa escola?

Resposta: Nessa escola estão matriculados ______ alunos do 2º ano.

19) Ana foi ao mercado com R$ 68,00, comprou dois quilos de carne que custaram R$ 25,00. Quantos Reais restaram para Ana?

Resposta: Restaram para Ana _______ Reais.

20) Marcos ganhou de seu pai R$ 60,00. Ganhou mais R$ 35,00 do seu avô. Quanto Marcos ganhou ao todo?

21) Vera foi ao banco sacar R$ 20,00. Ela sacou essa quantia em cédulas de R$ 5,00. Quantas cédulas ela sacou? Ilustre as cédulas.

22) Gisele tinha 49 livros. Ganhou mais 20 livros de aniversário. Com quantos livros Gisele ficou?

23) Na biblioteca da escola a professora pegou 53 livros emprestados. Os alunos leram 25 livros. Quantos livros ainda faltam para serem lidos?

24) Fernando está lendo um livro de 48 páginas. Ele já leu 25 páginas desse livro. Quantas páginas faltam para ele terminar a leitura?

25) Amanda leu 8 gibis de manhã e 12 à tarde. Quantos gibis ela leu nesse dia?

26) Em uma fazenda havia 22 galinhas, 10 patos e 15 vacas. Quantas aves há nessa fazenda?

27) No aquário da casa de Lucas tem somente 15 peixes amarelos e 17 peixes vermelhos. Quantos peixes ele tem no aquário?

28) A jardineira colheu 17 flores coloridas para colocar num vaso de vidro. 6 delas murcharam e foram jogadas fora. Quantas flores sobraram no vaso?

29) Os alunos da escola juntaram latinhas para reciclar. Observe a tabela e responda:

Turma	Número de latas
1º ano	10
2º ano	22
3º ano	14
4º ano	16
5º ano	27

a) Quantas latas as turmas do 1º ano e do 2º ano conseguiram trazer juntas?
b) Quantas latas as turmas do 3º ano e do 4º ano conseguiram trazer juntas?
c) Quantas latas as turmas do 4º ano e do 5º ano conseguiram trazer juntas?
d) Quantas latas faltam para o 1º ano ter a mesma quantidade do 2º ano?
e) Quantas latas todas as turmas juntaram?

30) De manhã, o leiteiro entregou 36 litros de leite na padaria. Até o meio-dia, foram vendidos 15 litros de leite. Quantos litros sobraram?

31) Num pote havia 57 balas, das quais dei 9 para meu irmão e ninguém mais pegou balas desse pote. Quantas balas sobraram no pote?

Título Ensino de matemática para os anos iniciais do ensino fundamental: aspectos teóricos e práticos
Formato 18 x 24 cm
Tipografia FreightText Pro | Joshua Darden
Licença CC BY-NC-ND

EDUTFPR

Este livro, produzido pela EDUTFPR, é financiado com recurso público e visa à ampla e democrática disseminação do conhecimento. Esta edição promove o ODS 4 Educação de qualidade, que tem o intuito de assegurar a educação inclusiva, equitativa e de qualidade para todos, envolvendo docentes e discentes em sua produção e promovendo diversas oportunidades de aprendizagem ao longo da vida. Além disso, é favorável à preservação de árvores e diminuição da pegada de carbono global.

Curitiba
25°26′20.4″S 49°16′08.4″W
Feito no Brasil
Made in Brazil
2024

Este livro aborda temas que fazem parte do arcabouço de conteúdos a serem trabalhados no Ensino Fundamental I, os quais também estão contemplados na atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC) dessa etapa, indo além, todavia, do que este documento propõe. Considerando as especificidades de cada ano, os conteúdos e atividades aqui propostos são tratados em seus aspectos teóricos e práticos e apresentam diferentes níveis de complexidade, a fim de que possa ser desenvolvido pelos professores de acordo com o nível/ano em que atuam. É um recurso didático tanto para a formação quanto para a prática pedagógica docente na educação básica.