

ppgmat

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

EDUARDO CESAR TONIN

ANÁLISE DE MODELOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA
COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

LONDRINA

2024

EDUARDO CESAR TONIN

**ANÁLISE DE MODELOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA
COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**

**MODEL ANALYSIS IN MATHEMATICAL MODELING ACTIVITIES WITH HIGH
SCHOOL STUDENTS.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Adriana Helena Borssoi

LONDRINA

2024



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



EDUARDO CESAR TONIN

**ANÁLISE DE MODELOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM
MATEMÁTICA COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 26 de Abril de 2024

Dra. Adriana Helena Borssoi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Barbara Nivalda Palharini Alvim Sousa, Doutorado - Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp)

Dra. Karina Alessandra Pessoa Da Silva, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que tornaram possível a realização deste trabalho. Em primeiro lugar, agradeço à minha família pelo apoio incondicional, paciência e incentivo ao longo desta jornada acadêmica. Suas palavras de encorajamento foram fundamentais para minha motivação.

Agradeço a Deus por me conceder força, sabedoria e perseverança para superar os desafios enfrentados durante este processo. Sua orientação foi essencial em cada etapa deste caminho.

À minha orientadora, Prof.^a Dra. Adriana Helena Borssoi, pela orientação, dedicação e valiosos *insights* que enriqueceram este estudo. Sua orientação e apoio foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Grupo de Estudos e Pesquisa em Modelagem Matemática, Investigação Matemática e Tecnologias (GEPMIT), cuja colaboração e troca de conhecimentos foram essenciais para o enriquecimento das ideias apresentadas neste estudo. Suas contribuições foram de grande valia para a elaboração deste trabalho.

Agradeço também às membras da banca examinadora por sua atenção, tempo e valiosas contribuições durante a avaliação deste trabalho, que certamente enriqueceram e permitiram aprimorar este texto, para sua versão final.

Aos professores do curso, cujo ensino sólido e inspirador foi fundamental na minha formação acadêmica. Seus conhecimentos e dedicação deixaram uma marca profunda em meu percurso acadêmico.

A todos os que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho, meu sincero obrigado. Este trabalho não teria sido possível sem o suporte e colaboração de cada um de vocês.

A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza.

Stephen Hawking (1942–2018)

TONIN, Eduardo Cesar. **Análise de Modelos em atividades de Modelagem Matemática com alunos do Ensino Médio**. 2024. 85. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

RESUMO

Esta pesquisa, realizada no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, adota a abordagem da Modelagem Matemática e Análise de Modelos como uma alternativa pedagógica para investigar como os alunos analisam e avaliam criticamente modelos matemáticos. Para este fim, foram planejadas e implementadas três atividades de modelagem matemática em que alunos do 3º ano do Ensino Médio coletaram dados a partir da Experimentação e disponibilidade de tecnologias digitais. A análise dos dados coletados do desenvolvimento de uma das atividades foi analisada a partir de uma abordagem qualitativa fundamentada na Análise de Conteúdo. A discussão dos resultados se deu a partir de três categorias de análise: intervenção do professor, recursos utilizados e manipulação e experimentação, decorrentes da análise e codificação dos dados coletados pelo pesquisador. Ficou evidente a sinergia existente entre as duas alternativas pedagógicas: Modelagem Matemática e Análise de Modelos potencializando a análise e avaliação crítica dos modelos matemáticos estudados. A análise mostra que os alunos se envolveram de modo a desenvolver um modelo matemático, analisá-lo, compará-lo com um modelo clássico da literatura e refiná-lo, o que possibilitou estudar novos conteúdos matemáticos e dar mais significado a matemática aprendida em sala de aula. Um importante resultado da pesquisa é o Produto Educacional “Atividades de Modelagem Matemática com Análise de Modelos para o Ensino Médio”, que consiste em um site destinado a orientar professores de Matemática e áreas afins fornecendo atividades de Modelagem Matemática com ênfase na Análise de Modelos. O material tem como objetivo proporcionar aos alunos a oportunidade de aplicar seus conhecimentos em situações do cotidiano, avaliando criticamente os modelos matemáticos e evidenciando suas potencialidades e limitações.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Análise de Modelos. Modelo Matemático. Tecnologias Digitais. Experimentação.

TONIN, Eduardo Cesar. **Model Analysis in Mathematical Modeling Activities with High School Students**. 2024. 85. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

ABSTRACT

This research, conducted within the scope of the Graduate Program in Mathematics Education at the Federal University of Technology - Paraná, adopts the approach of Mathematical Modeling and Model Analysis as a pedagogical alternative to investigate how students analyze and critically evaluate mathematical models. For this purpose, three mathematical modeling activities were planned and implemented in which 3rd-year high school students collected data through experimentation and the availability of digital technologies. The analysis of the data collected from the development of one of the activities was carried out using a qualitative approach based on Content Analysis. The discussion of the results was based on three categories of analysis: teacher intervention, resources used, and manipulation and experimentation, arising from the analysis and coding of the data collected by the researcher. The synergy between the two pedagogical alternatives—Mathematical Modeling and Model Analysis—was evident, enhancing the analysis and critical evaluation of the studied mathematical models. The analysis shows that students were engaged in developing a mathematical model, analyzing it, comparing it with a classical model from the literature, and refining it, which allowed them to study new mathematical content and give more meaning to the mathematics learned in the classroom. An important outcome of the research is the Educational Product "Mathematical Modeling Activities with Model Analysis for High School," which consists of a website aimed at guiding Mathematics teachers and related fields, providing Mathematical Modeling activities with an emphasis on Model Analysis. The material aims to offer students the opportunity to apply their knowledge in everyday situations, critically evaluating mathematical models and highlighting their potentialities and limitations.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modeling. Model Analysis. Mathematical Model. Digital Technologies. Experimentation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação de como se chegar no modelo matemático	17
Figura 2 – Esquema de etapas de uma atividade de Modelagem Matemática	21
Figura 3 – Fases da Modelagem Matemática	22
Figura 4 – Ciclo para Análise de Modelos	32
Figura 5 – Fases da Análise de Conteúdo	39
Figura 6 – Coleta de dados pelos alunos da atividade desenvolvida.....	46
Figura 7 – Dados obtidos e gráficos do movimento do objeto gerado pelo aplicativo.	47
Figura 8 – Ajuste de curvas realizado pelos alunos no GeoGebra.....	49
Figura 9 – Comparação do comportamento das representações gráficas das funções.....	57
Figura 10 – Síntese do ciclo das fases/etapas	61
Figura 11 – Sinergia existente entre as duas alternativas pedagógicas	62
Figura 12 –Relação das categorias de análise com códigos de análise	66
Figura 13 – Capa do Produto Educacional.....	70
Figura 14 – Página da “Atividade do Arco e Flecha”	71
Figura 15 – Página da “Atividade das Roldanas”	71
Figura 16 – Página da “Atividade do Deslocamento do carrinho”	72

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	10
2 REFERENCIAL TEÓRICO	14
2.1 MODELO MATEMÁTICO	14
2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA	18
2.2.1 Modelagem Matemática como método científico de investigação.....	18
2.2.2 Modelagem Matemática no contexto educacional.....	20
2.2.3 Modelagem Matemática e a integração da tecnologia digital.....	23
2.2.4 Experimentação em atividades de Modelagem Matemática.....	25
2.3 ANÁLISE DE MODELOS.....	28
3 ASPECTOS METODOLÓGICOS	35
3.1 DELINEAMENTO DA PESQUISA	35
3.2 CONTEXTO EDUCACIONAL DA PESQUISA	37
3.3 COLETA DE DADOS.....	38
3.4 ANÁLISE DE CONTEÚDO COMO METODOLOGIA DE PESQUISA	38
4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE DESENVOLVIDA	43
4.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE “DESLOCAMENTO DO CARRINHO”	43
4.1.1 Algumas reflexões sobre a atividade “Deslocamento do Carrinho”.....	60
5 PRODUTO EDUCACIONAL	69
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
REFERÊNCIAS.....	76

APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA PESQUISA.....	80
APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	81
ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO	
EDUCACIONAL	82

1 INTRODUÇÃO

Essa pesquisa foi impulsionada diante do meu histórico acadêmico e profissional com a Educação Matemática. Inicialmente, por minha formação acadêmica¹ e os obstáculos que nela vivenciei como discente de uma das áreas que, para a maioria, é taxada como difícil e muitas vezes como impossível de ser compreendida. Já profissionalmente, como professor, a motivação para a pesquisa se deve ao fato de, no dia a dia, estar acompanhado do desafio de aproximar os alunos da disciplina, de modo que possam usufruir de seus conceitos de forma proveitosa e prazerosa.

Em especial, como mestrando, menciono também a minha participação no Grupo de Estudos e Pesquisa em Modelagem Matemática, Investigação Matemática e Tecnologias (GEPMIT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, que contribuiu para maior conhecimento sobre a Modelagem Matemática e Análise de Modelos, como também aumentou meu interesse pelo tema. Neste grupo, dialogamos e discutimos as pesquisas em andamento, compartilhamos nossos próprios projetos desenvolvidos no decorrer do curso.

Muito se vê na literatura sobre o constante empenho em realizar pesquisas em Educação Matemática visando apresentar estratégias que despertem o interesse e a curiosidade dos alunos para aprender Matemática. Assim como nos documentos oficiais norteadores da prática educacional no nosso país, conforme visto nos objetivos estabelecidos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os quais propõem que os alunos desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades para aplicar a Matemática em suas vidas cotidianas.

Entre as diversas temáticas e abordagens, a Modelagem Matemática emerge como uma alternativa pedagógica que visa oportunizar a compreensão da Matemática, além de enriquecer a formação abrangente dos alunos. Acreditamos que a Modelagem Matemática possui um potencial significativo para contribuir com a formação dos alunos, pois sua versatilidade permite integrar conteúdos matemáticos à vida cotidiana, razão pela qual a adotamos em nossa pesquisa no contexto da Educação Matemática.

Sem dúvida, o panorama educacional tem passado por mudanças significativas, com uma transição notável do ensino tradicional para abordagens envolventes e contextualizadas. O desafio de despertar o interesse dos alunos para a Matemática é fundamental e impulsiona a busca por metodologias educacionais inovadoras. Dessa forma, a pesquisa adota uma posição

¹ O uso da primeira pessoa do singular está atrelado ao fato de que está falando da trajetória do autor. Ao longo do texto o mesmo passará a ser referenciado como professor/pesquisador.

crucial ao explorar duas abordagens diferentes, mas que intuímos desde o início desta pesquisa serem complementares: a Modelagem Matemática e a Análise de Modelos como ferramentas para motivar e envolver os alunos no aprendizado da Matemática.

Passei da intuição às evidências iniciais, no ano de 2022, ao planejar e implementar a primeira prática, vivenciada no mestrado a partir da proposta feita na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva do Ensino para elaboração e aplicação, se possível, de uma atividade de Modelagem Matemática. Aqui, esta será apresentada como a atividade piloto, pois dela surgiu a possibilidade de que, como docente eu experimentasse diretamente os encaminhamentos da Modelagem Matemática, como também, permitiu o estudo de um modelo matemático e assim pude evidenciar os princípios da Análise de Modelos. Com esta experiência, conduzida com uma turma do 1º ano do Ensino Médio, tive a percepção de que a combinação da Modelagem Matemática com a Análise de Modelos pode enriquecer a experiência com os alunos, como foi relatado no artigo, Modelagem Matemática em um Contexto Interdisciplinar: o lançamento oblíquo utilizando arco e flecha, apresentado no Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (Tonin; Borssoi; Silva, 2022).

Para fomentar minha base teórica na pesquisa, realizei, no primeiro semestre de 2023, uma busca no banco de teses e dissertações sobre o tema, em todo o acervo, sem especificar um período. Nela, foi possível perceber que existem poucas produções sobre a Análise de Modelos em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Médio. Na busca realizada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações com os termos “Modelagem Matemática” and “Análise de Modelos”, foram identificados 31 resultados. Dentre estes, apenas uma tese (Sousa, 2019) estava diretamente relacionada à Educação Matemática. Esta constatação sugere uma possível escassez de estudos nesta área específica no acervo da biblioteca digital, apontando para oportunidades de investigação mais aprofundada ou a identificação de lacunas de pesquisa a serem exploradas. Portanto, uma das finalidades da pesquisa é de colaborar com a literatura no que se diz a respeito à associação da Modelagem Matemática com a Análise de Modelos.

Para combinar a teoria matemática com a investigação de fenômenos, é crucial seguir o objetivo fundamental do uso da Matemática, conforme definido por Bassanezi (2010, p. 18): “extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser expresso de forma extremamente eficiente”. É nesse contexto de integração entre teorias matemáticas e estudo de fenômenos que a Modelagem Matemática entra em cena.

A Modelagem Matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la (Bassanezi, 2010). Essa abordagem não apenas envolve os alunos em projetos práticos, mas também os capacita a examinar criticamente os modelos matemáticos que eles próprios desenvolvem, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Aqui podemos entender modelo matemático como sendo:

Um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 13).

Durante a realização de uma atividade de Modelagem Matemática e ao elaborar um modelo matemático para alguma situação-problema específica, é importante verificar potencialidades e limitações do modelo que está sendo criado, analisar quais hipóteses e variáveis foram utilizadas, verificar o comportamento das soluções com dados empíricos, além de analisar e comparar modelos já existentes, tendo em vista que eles são relevantes para a elaboração de um novo modelo (Sepúlveda; González-Gómez; Villa-Ochoa, 2020). Portanto, a Análise de Modelos se torna útil para essa situação, pois está diretamente relacionada com a Modelagem Matemática.

Soares e Javaroni (2013), propõem um trabalho de “análise” que busca o estudo de modelos matemáticos já existentes a fim de introduzir conceitos novos aos alunos, que, de alguma forma têm relação com os modelos em estudo. Esse tipo de trabalho é denominado pelas autoras de Análise de Modelos.

A Análise de Modelos, tem sido proposta como uma abordagem pedagógica para o ensino e aprendizagem da Matemática. Esta abordagem se sustenta no fato de que, no estudo de uma situação específica não é apenas necessário produzir um modelo matemático, mas também conhecer, utilizar e analisar os modelos existentes construídos para aquela situação.

Para contextualizar o delineamento da pesquisa, menciono que ainda em 2022, uma nova atividade de Modelagem Matemática foi planejada e implementada com a mesma turma do 1º ano, esta segunda atividade, consistia em investigar um sistema de polias móveis, e o que acontecia com força peso de um objeto, conforme se aumentava o número de polias, trazendo ainda mais aprimoramento e percepções para mim enquanto pesquisador, tal atividade, foi intitulada como Modelagem Matemática e Análise de Modelos a partir de uma atividade sobre sistemas de polias e foi apresentada no Encontro Paranaense de Educação Matemática (Tonin; Giroti; Borssoi, 2022).

Após as experiências com duas implementações e o aprimoramento da pesquisa, uma nova atividade de Modelagem foi planejada para ser implementada em 2023. A turma selecionada para implementação da atividade foi a única turma do 3º ano do Ensino Médio no ano de 2023, para a qual eu (professor/pesquisador) ministrava a disciplina de Matemática. As reflexões decorrentes da análise dos dados coletados durante a realização desta atividade visam responder ao objetivo da pesquisa e contribuir para aprimorar o planejamento das atividades que constituem o Produto Educacional vinculado à dissertação.

Deste modo, definimos o objetivo geral do trabalho, que consiste em investigar *como alunos do Ensino Médio desenvolvem a Análise de Modelos em atividades de Modelagem Matemática?* Tendo ainda como objetivos específicos: planejar e implementar atividades de Modelagem Matemática com alunos do Ensino Médio aliada com tecnologias digitais, analisar a contribuição da experimentação ao desenvolver atividades de Modelagem Matemática e Análise de Modelos e investigar como os alunos analisam e avaliam criticamente um modelo matemático.

Quanto ao Produto Educacional, este é característico do mestrado profissional e, nesta pesquisa, será disponibilizado na forma de um site voltado para professores da disciplina de Matemática e Física, formadores de professores e interessados em articular Modelagem Matemática e Análise de Modelos e para alunos do Ensino Médio. O site contém a descrição das experiências realizadas, além dos dados coletados pelo autor, como também reflexões e possibilidades sobre as atividades de Modelagem Matemática com ênfase na Análise de Modelos.

O texto da dissertação está organizado em 6 capítulos: introdução, com breve ambientação sobre o tema e anseios da pesquisa; referencial teórico sobre Modelagem Matemática e Análise de Modelos; Aspectos metodológicos, trazendo uma descrição de como se deu a pesquisa; Descrição e análise da atividade de Modelagem Matemática e Análise de Modelos, apresentando uma descrição e análise da atividade desenvolvida com os alunos; Produto Educacional, apresentando possibilidades e recursos para professores do Ensino Médio utilizarem as atividades e, por fim, Considerações Finais, trazendo as reflexões e considerações do autor acerca da pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, exploramos aspectos relacionados aos modelos matemáticos, à Modelagem Matemática como método científico e na perspectiva da Educação Matemática, bem como à Análise de Modelos. Compartilhamos nossa compreensão e a concepção adotada em nossa pesquisa, apresentando definições e caracterizações de modelo matemático, Modelagem Matemática e Análise de Modelos.

2.1 MODELO MATEMÁTICO

Em nossa pesquisa, o modelo matemático tem papel de destaque e, para tal, vamos agora discutir as principais concepções sobre o que é um modelo em um contexto geral, modelo matemático, de forma mais abrangente, para então defini-lo diante da perspectiva da Modelagem Matemática.

Ao pesquisar o significado da palavra “modelo” no dicionário da língua portuguesa Michaelis on-line, encontramos, dentre outras expressões: “Coisa ou pessoa que serve de exemplo ou padrão a ser imitado” (Modelo, 2024). Já ao perguntar ao ChatGPT² 3.5 “Como os dicionários da língua portuguesa definem a palavra ‘modelo’?” a resposta foi:

Os dicionários da língua portuguesa definem a palavra "modelo" de várias maneiras, dependendo do contexto em que é utilizada. Aqui estão algumas definições comuns: Padrão ou exemplo a ser seguido: ‘Aquilo que serve de padrão, exemplo ou norma a ser seguido por outros; protótipo’; Representação ou descrição simplificada de algo: ‘Representação simplificada de algo real ou idealizado, que serve para estudo, análise ou reprodução’; Indivíduo que serve de exemplo ou padrão: ‘Indivíduo que serve como exemplo a ser seguido; protótipo de comportamento ou aparência’; Conjunto de características ou elementos que definem algo: ‘Conjunto de características ou elementos que definem um objeto, processo, teoria, etc.’.

Quanto à etimologia da palavra, em resposta à pergunta “Qual é a etimologia da palavra ‘modelo’?”, a resposta do ChatGPT 3.5 foi:

A palavra ‘modelo’ tem origem no latim ‘modellus’, que por sua vez é derivado de ‘modus’, que significa ‘modo’, ‘maneira’, ‘forma’. Em português, ‘modelo’ é usado para descrever um padrão ou exemplar a ser seguido ou reproduzido, seja em termos de *design*, comportamento, ou qualquer outro aspecto que represente uma norma ou ideal.

Nesse sentido, vemos que o contexto é que define o uso adequado, podemos compreender que um modelo atua como uma generalização para um fenômeno, uma situação

² O ChatGPT (do inglês: Chat Generative Pre-trained Transformer) é um chatbot desenvolvido pela OpenAI e lançado em 30 de novembro de 2022 (<https://pt.wikipedia.org/wiki/ChatGPT>).

ou uma pessoa. Portanto, o modelo é utilizado para representar o comportamento ou as características de algo. Capra (1989), professor e Físico teórico, em seu livro diz que através da educação, a humanidade busca seu pleno desenvolvimento e a capacidade de dominar a natureza e os processos de produção de maneira sustentável. Para atingir este objetivo, é essencial que as pessoas compreendam e conheçam a realidade ao seu redor. Neste sentido, os seres humanos criam modelos que buscam formalizar o universo, usando meios de expressão controláveis, simplificados e compreensíveis. Estes modelos permitem representar as características essenciais de um domínio ou campo de estudo.

Modelos são amplamente utilizados em diversas áreas do conhecimento, muitos problemas práticos requerem o uso de modelos matemáticos, e às vezes, mesmo que as situações sejam diferentes, a abordagem e a filosofia subjacentes permanecem as mesmas.

Capra (1989), sobre ciência e modelos, afirma que:

O que torna a ciência tão bem-sucedida é a descoberta de que podemos utilizar aproximações. Se nos satisfizermos com uma ‘compreensão’ aproximada da natureza, podemos descrever grupos selecionados de fenômenos, negligenciando outros que se mostrem menos relevantes. Assim, podemos explicar muitos fenômenos em termos de poucos e, conseqüentemente, compreender diferentes aspectos da natureza de forma aproximada sem precisar entender tudo ao mesmo tempo. Esse é o método científico: todas as teorias e modelos científicos são aproximações da verdadeira natureza das coisas; o erro envolvido na aproximação é, não raro, suficientemente pequeno para tornar significativa essa aproximação (1989, p. 215).

Nesse sentido, um modelo é uma criação, que representa uma pequena parcela da realidade, com a finalidade de torná-la passível de descrição tanto qualitativa quanto quantitativa e em algumas ocasiões, observável. A necessidade de modelos surge quando as limitações humanas se tornam evidentes na tentativa de descrever de maneira perfeita os objetos de estudo.

Conforme afirmam Gibas e Jambeck (2001, p. 27), “um modelo é uma forma abstrata de descrever um sistema complexo”. O ser humano, em sua busca por compreender melhor os fenômenos naturais, identificam o que permanece constante em transformações não lineares e, em última análise, entendem a si mesmo, busca constantemente maneiras de simplificar as coisas e tornar a vida mais acessível. Neste processo, desenvolvemos modelos que nos permitem analisar de forma simplificada a situação em questão e encontrar soluções apropriadas para os problemas que estudamos.

Para Bassanezi (2010), um modelo pode ser definido como um sistema artificial que busca representar uma parte da realidade com o propósito de explicá-la, compreendê-la e agir sobre ela. Este modelo é concebido como uma representação de diversas situações e é aplicável em todas as áreas do conhecimento.

Bassanezi (2010), ainda traz a distinção entre modelos que pode ser categorizada em dois tipos principais: o Modelo Objeto, que pode ser representado por meio de diversas formas, como imagens (desenhos, fotografias, esquemas, mapas, etc.), fórmulas matemáticas (equações, inequações, etc.) ou símbolos (como representações de átomos e moléculas de DNA); e o Modelo Teórico, que está intrinsecamente vinculado a uma teoria geral preexistente.

Este último é construído em torno de um Modelo Objeto e opera com um código de interpretação. Para o autor, o Modelo Teórico é projetado para representar as mesmas variáveis essenciais presentes no fenômeno em estudo, e suas relações são estabelecidas por meio de hipóteses abstratas ou experimentos reais.

Já para Niss e Blum (2020), o que é um modelo?

Um modelo é um objeto (que muitas vezes é em si mesmo uma agregação de objetos), que deve significar – representar – outra coisa. O modelo destina-se a capturar apenas certas características da realidade que representa e, portanto, é uma representação simplificada dessa realidade (Niss; Blum, 2020, p. 6).

De fato, os modelos são utilizados nas mais diversas áreas do conhecimento, como Engenharia, Arquitetura, Matemática, Ciências da Natureza, Indústria, Economia, Moda, Artes, Literatura, entre outras. Além de servirem como representações, esses modelos também desempenham um papel crucial na interpretação de fenômenos e na resolução de situações-problema em suas respectivas áreas.

Na perspectiva da Modelagem Matemática, conforme observado por Biembengut (2016), essa representação é articulada através de um conjunto de enunciados mais simples em comparação com a complexidade da realidade que serve como base, mas é capaz de proporcionar uma aproximação suficiente da realidade que se deseja compreender, emular ou inferir. Nas palavras da autora, trata-se de:

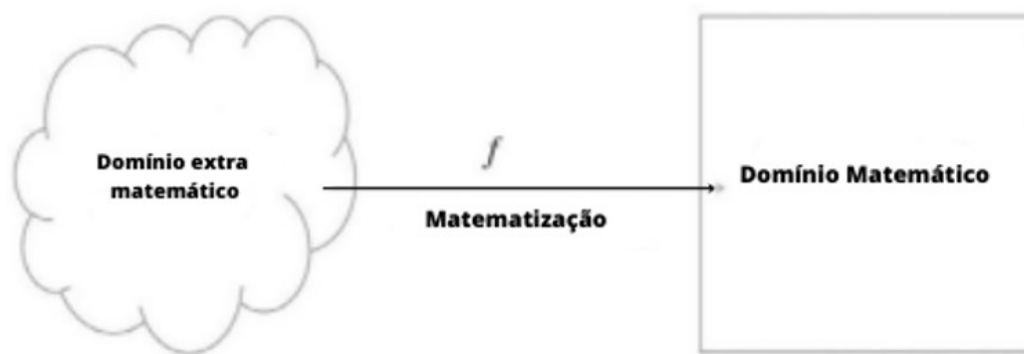
Modelo que nos permite processar informações, estimular novas ideias e compreensões, prover de uma visão estruturada e global o que inclui relações abstratas. Capacita-nos ainda a observar e a refletir sobre um propósito, um fenômeno e, mais, a comunicar as ideias a outrem [...]. O valor de um modelo está na utilidade, na adequação ao fenômeno observado, na aplicação de dados que conduza a uma solução, a um resultado, a um produto, a uma teoria (Biembengut, 2016, p. 66).

A autora enfatiza que um modelo pode desempenhar um papel duplo: estimular o processo mental e cognitivo, facilitando a percepção e a construção do conhecimento, ao mesmo tempo que serve como uma ferramenta para interpretar fenômenos em diversas áreas do conhecimento e resolver problemas práticos. Isso ressalta sua utilidade tanto na vida cotidiana quanto nas ciências, incluindo a Matemática. A autora ainda define que:

O modelo matemático de algum fenômeno das Ciências reflete propriedades intrínsecas deste fenômeno e permite prever novas propriedades, organizar teorias mais gerais [...]. E também nos permite compreender o fenômeno que o gerou, fazer uso para solucionar uma situação-problema; encadeia muitas revelações significativas (Biembengut, 2016, p. 83).

Niss e Blum (2020), dizem que um modelo matemático é uma representação que utiliza entidades matemáticas e suas interações para descrever aspectos de um contexto que não é, em si, matemático. De maneira mais elementar, podemos visualizar essa situação através do diagrama da Figura 1:

Figura 1 – Representação de como se chegar no modelo matemático



Fonte: Niss e Blum (2020, p. 7)

Neste contexto, a “bolha amebiana”, como é descrita pelos autores, à esquerda, representa o domínio que não é matemático, a partir do qual é necessário selecionar e representar certos aspectos por meio de entidades matemáticas pertencentes a um domínio matemático específico, representado pela caixa à direita. Essa representação matemática é realizada por meio de um processo de “matematização”, simbolizado como “ f ”, representado pela seta que conecta as duas caixas, traduzindo assim objetos selecionados do domínio original em objetos correspondentes no domínio matemático escolhido (Niss; Blum, 2020).

Para Almeida, Tortola e Merli (2012, p. 217), “o modelo matemático é o que ‘dá forma’ à solução do problema e a Modelagem Matemática é a ‘atividade’ de busca por esta solução”.

Como vemos, não existe uma única definição para modelo matemático, diversos autores oferecem diferentes perspectivas, embora compartilhem, essencialmente, um fundamento comum: um modelo matemático é uma representação matemática de uma determinada situação no mundo real. Desta forma, conceitualmente, um modelo matemático,

pode ser definido como uma representação de um sistema real. Isso implica que um modelo deve retratar um sistema e como as mudanças ocorrem dentro dele.

Os modelos matemáticos desempenham uma função central, na prática da Modelagem Matemática, tema que será abordado em maior profundidade na seção seguinte.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

O uso da Modelagem Matemática está associado a duas vertentes distintas, uma como método científico e outra como oportunidade no campo do ensino e da aprendizagem, especialmente no que diz respeito a conceitos matemáticos (Bassanezi, 2010).

2.2.1 Modelagem Matemática como método científico de investigação

Independentemente da perspectiva adotada, é importante notar que a Modelagem Matemática tem suas raízes na Matemática Aplicada. É a partir dessa ótica que começaremos a discutir em nosso texto.

A expressão “Matemática Aplicada” abrange diversas interpretações. Por exemplo, Pollak (1979, p. 233) apresenta quatro perspectivas distintas: (1) Matemática aplicada clássica, que envolve ramos tradicionais da análise, embora sem conexão direta com problemas físicos; (2) Toda a matemática com aplicação prática significativa, sendo mais abrangente em conteúdo, mas ainda limitada aos ramos matemáticos; (3) Iniciar com uma situação de outro campo ou da realidade, onde a Matemática entra em cena, mas está interligada com outros campos do conhecimento; (4) Matemática aplicada como um meio de subsistência, incorporando situações da realidade que abrangem não apenas a Matemática, mas também o mundo circundante.

Para combinar a teoria matemática com a investigação de fenômenos, é crucial que sigamos o objetivo fundamental do uso da Matemática. Como Bassanezi (2010, p. 18), define: “extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser expresso de forma extremamente eficiente”. É nesse contexto de integração entre teorias matemáticas e estudo de fenômenos que a Modelagem Matemática entra em cena, conforme descrito por Bassanezi (2010):

A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la (Bassanezi, 2010, p.17).

Burak (1992), define a Modelagem Matemática como um conjunto de procedimentos, cujo objetivo é criar um paralelo para explicar fenômenos do cotidiano do ser humano de forma matemática, auxiliando na previsão e tomada de decisões.

Consideramos então que a Modelagem Matemática é o processo de empregar estratégias adequadas para abordar um problema ou fenômeno que não tem origem na Matemática, mas que requer a aplicação de conceitos matemáticos para sua resolução. Nesse contexto, a Modelagem Matemática está intrinsecamente ligada à investigação de fenômenos reais, usando modelos baseados em conceitos matemáticos para analisar, responder ou inferir sobre esses fenômenos.

A consistência na aplicação de métodos matemáticos nos estudos de fenômenos se estabelece ao empregar materiais e métodos que representem de maneira eficaz o caso em questão, mantendo uma linguagem acessível e fiel às interpretações dos dados reais. Nesse sentido, seguimos as premissas da Modelagem Matemática, um processo dinâmico que envolve a obtenção e validação de modelos matemáticos. O objetivo é analisar e prever situações do fenômeno, começando pela interpretação dos dados.

Portanto, a Modelagem Matemática depende do uso de modelos matemáticos. O modelo matemático é a ferramenta que estabelece a conexão entre a situação real e a Matemática, fornecendo um caminho para resolver o problema e gerando oportunidades para formular hipóteses, discutir, e apresentar soluções ou interpretações viáveis. Como destacado por Bassanezi (2010, p. 20), “A importância do modelo matemático reside na sua capacidade de proporcionar uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades”.

Para conduzir um estudo de fenômenos por meio da Modelagem Matemática, é essencial realizar uma investigação prévia tanto do ambiente e suas características quanto do conteúdo matemático relevante, para resolver a questão formulada com base na análise do fenômeno. Isto nos permite atribuir significado aos processos matemáticos e oferecer interpretações realistas do fenômeno em questão. Como destacado por Pollak (1979), “construção de modelos requer uma compreensão da situação fora da Matemática e do processo de matematização, bem como da própria Matemática” (Pollak, 1979, p. 11). O processo de matematização é o momento que se dará a tradução do fenômeno investigado para a linguagem matemática.

Outra reflexão importante do trabalho de Pollak (1979, p. 4), é que “uma característica significativa das aplicações da matemática é que os conceitos e estruturas matemáticas têm uma

utilidade importante que vai além de simplesmente serem técnicas matemáticas”. Em outras palavras, ao estudar modelos matemáticos, deve ser possível obter interpretações qualitativas além do aspecto puramente quantitativo. Isto significa que diferentes estruturas matemáticas desenvolvidas podem conter significados qualitativos relacionados ao fenômeno estudado, e não apenas resultados matemáticos abstratos e sem relevância para a situação investigada.

Podemos afirmar que a Modelagem Matemática desempenha um excelente papel na matemática aplicada como método científico de investigação. Na próxima seção, apresentaremos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica para o ensino da Matemática.

2.2.2 Modelagem Matemática no contexto educacional

Embora a Modelagem Matemática tenha suas raízes na Matemática Aplicada, educadores matemáticos têm, há algum tempo, trabalhado para introduzi-la nas salas de aula, desde a Educação Básica. No entanto, é importante destacar que essa integração é feita com uma perspectiva diferente da sua origem.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) conceituam a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica que utiliza a matemática para explorar situações-problema que não são necessariamente de natureza matemática.

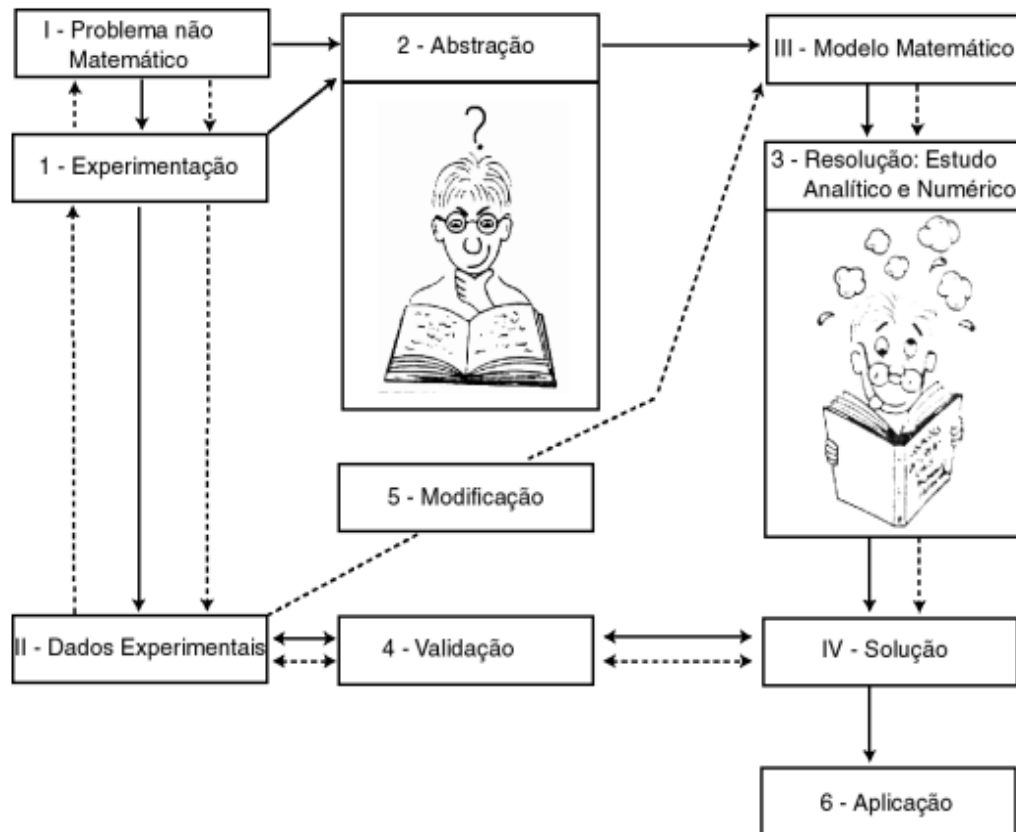
Segundo Bassanezi (2010), a Modelagem Matemática aplicada ao ensino pode ser um caminho para despertar maior interesse, ampliar o conhecimento do aluno e auxiliar na estruturação de sua maneira de pensar e agir. Pode-se considerar que a Modelagem Matemática é eficaz como um método científico, tal como uma metodologia ou uma estratégia pedagógica de ensino e aprendizagem assumindo que:

A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. [...] pressupõe multidisciplinaridade. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa. [...] é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos (Bassanezi, 2010, p. 16).

De modo geral, o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática segue procedimentos organizados em fases/etapas. Como dito por Bassanezi (2010), uma atividade de Modelagem Matemática pode ser estruturada nas seguintes etapas: *Experimentação*: na qual ocorre a obtenção de dados; *Abstração*: procedimentos que levam à formulação de modelos matemáticos e à seleção de variáveis, a formulação de uma problemática, formulação de

hipóteses, e simplificação das informações; *Resolução*: nessa etapa é feita a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática; *Validação*: essa etapa diz respeito à aceitação do modelo deduzido na etapa anterior, de modo que seja satisfatório, conforme a Figura 2:

Figura 2 – Esquema de etapas de uma atividade de Modelagem Matemática



Fonte: Bassanezi (2010, p. 27)

Já para Almeida, Silva e Vertuan (2012), a Modelagem Matemática, é uma alternativa pedagógica que utiliza a matemática para abordar problemas ou situações inicialmente não matemáticas. Uma atividade de Modelagem Matemática segue um conjunto de procedimentos com o objetivo de fornecer uma resposta matemática para uma situação inicial problemática, transformando-a na situação final. Durante essa transição, os alunos passam por várias fases: *inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação*, conforme a Figura 3.

Figura 3 – Fases da Modelagem Matemática

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15)

Na fase de *inteiração* da atividade, os participantes se familiarizam com o objeto de estudo, que geralmente é um tema sugerido pelo professor ou escolhido pelos alunos, com base em seus interesses. Nessa fase, ocorre a seleção e coleta de dados, bem como a formulação do problema pelo grupo.

Em muitos casos, os dados coletados pelos alunos são apresentados em linguagem natural e, portanto, requerem uma transformação matemática para facilitar a investigação sob uma perspectiva matemática. Essa transição da linguagem natural para uma linguagem matemática apropriada caracteriza a fase de *matematização*.

A fase de *resolução* envolve a descrição da situação inicial por meio de uma representação matemática que permite reflexões e a solução das questões formuladas na investigação. Essa representação, conhecida como modelo matemático, tem várias finalidades, incluindo a descrição da situação, a resposta às perguntas da investigação, a análise das dimensões levantadas e, em alguns casos, a capacidade de fazer previsões sobre o fenômeno em estudo. Os alunos podem desenvolver uma variedade de modelos, seja na forma algébrica ou por meio de outras formas de representação.

As fases de *interpretação de resultados e validação* ocorre, quando os alunos analisam as respostas que construíram, comparando os resultados e avaliando a adequação do modelo em relação às proposições feitas no início da atividade.

Embora essas fases não ocorram de linearmente, como descrito anteriormente, os movimentos constantes de ida e volta entre essas fases caracterizam a dinâmica da atividade, conforme Almeida, Silva e Vertuan (2012). A caracterização da atividade está mais relacionada à maneira como os alunos a conduzem do que à aderência a um ciclo definido ou programa rígido, já que nas atividades de Modelagem, os alunos decidem sobre os rumos a serem seguidos, e os conteúdos matemáticos emergem à medida que se tornam necessários, sendo orientados pelo professor ao longo desse processo.

A Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica valiosa que oferece uma série de vantagens, permitindo compreender, prever e otimizar sistemas em diversas áreas, como também a possibilidade de realizar diferentes articulações com outras concepções teóricas, tal como é apresentado no artigo de Aguiar, Figueiredo e Sousa (2023):

Uso de mapas conceituais, os registros de representação semiótica, a articulação as tecnologias digitais como Google Earth, Youtube, GeoGebra, Arduino, o uso do lúdicos e da sala de aula invertida, bem como a construção de experimentos, entre outros (Aguiar; Figueiredo; Sousa, 2023, p. 419)

A próxima seção irá apresentar como as tecnologias digitais podem potencializar significativamente a Modelagem Matemática, permitindo o uso de softwares, aplicativos entre outros recursos.

2.2.3 Modelagem Matemática e a integração da tecnologia digital

Segundo Silva, Barone e Basso (2016), abordagem isolada e descontextualizada dos conceitos matemáticos no ambiente escolar frequentemente resulta em uma percepção da matemática como uma ciência desconectada da realidade vivenciada pelo estudante. Acredita-se que explorar fenômenos da realidade por meio da Modelagem Matemática oferece um cenário propício para desenvolver e aprimorar o pensamento abstrato e hipotético. Isso se caracteriza pela criação, validação ou refutação de hipóteses, promovendo uma interação significativa do sujeito com o conhecimento.

Nesse contexto, Silva, Barone e Basso (2016), ressaltam que o uso das tecnologias digitais surge como uma oportunidade para que os alunos interajam com o conhecimento matemático, estabelecendo conexões que facilitam a compreensão e a apropriação dos conceitos.

Dentre vários trabalhos encontrados para a Modelagem Matemática podemos destacar o trabalho de Barbosa (2001), que diz que o aluno é convidado a se integrar e pesquisar, inserindo-se no ambiente de aprendizagem que a Modelagem Matemática proporciona. E para muitos pesquisadores, a inserção de recursos tecnológicos representa um recurso essencial nesse procedimento de integração do aluno, como enfatizado por Pereira et al. (2017). No trabalho, os autores buscaram correlacionar as contribuições das tecnologias digitais Educacionais com a prática da Modelagem Matemática, destacando as potencialidades dessas interações para os processos de ensino e aprendizagem em matemática.

Pode-se perceber diversos argumentos favoráveis para o uso das Tecnologias Digitais Educacionais no trabalho com a Modelagem Matemática. Os resultados das pesquisas investigadas apontam elementos como a motivação dos estudantes, potencialização

de discussões e para o pensar juntos com a tecnologia, facilitação da aprendizagem, multiplicidades de possibilidades para o envolvimento dos alunos com a resolução das atividades (Pereira et al., 2017, p. 13).

A integração entre Modelagem Matemática e tecnologias digitais educacionais frequentemente se harmoniza, como já sugeria Araújo (2002), visto que há uma inclinação natural para o emprego das tecnologias no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.

Ao investigar a aprendizagem de estudantes ao desenvolver atividades de modelagem com tecnologias digitais e evidenciar potencialidades das mesmas, Borssoi (2013, p. 152), diz que “oferecer um ambiente, desde as aulas, que disponha de tais recursos, bem como propor atividades que provoquem os alunos a lançar mão da tecnologia, pode promover a motivação ao uso”. A autora sugere que as atividades de modelagem parecem provocar os alunos a buscar tais recursos.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) ressaltam várias justificativas para a utilização das tecnologias digitais educacionais, sobretudo as relacionadas à informática, em conjunto com a prática da Modelagem Matemática.

A dinamicidade de inúmeros softwares livres, hoje disponíveis no mercado, pode auxiliar alunos e professor na construção de gráficos e na observação da influência dos parâmetros bem como na realização de cálculos. Nesse sentido, a possibilidade de experimentar, de visualizar e de coordenar de forma dinâmica as representações algébricas, gráficas e tabulares, são vantagens da interação de atividades de modelagem com as mídias informáticas (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 31).

Silva (2019) diz que a integração entre tecnologias digitais e a Educação Matemática, sobretudo por meio da Modelagem Matemática, pode resultar em uma aprendizagem mais efetiva. A utilização dos recursos tecnológicos permite não apenas o acesso, organização e produção de novos conhecimentos, mas também a conexão dos conteúdos discutidos em sala de aula com o cotidiano dos alunos, transformando a Matemática em uma linguagem mais usual para os alunos.

Assim, considerando a significativa influência das tecnologias digitais na vida contemporânea e sua atratividade para os alunos, espera-se que os educadores busquem alternativas em sua prática pedagógica. Isso envolve integrar o conteúdo programático com as tecnologias disponíveis, sendo uma realidade presente na vida dos alunos. Ao fazê-lo, é possível utilizar esses recursos a favor do ensino e da aprendizagem de Matemática, minimizando assim as dificuldades enfrentadas pelos educandos (Silva, 2019).

Outro trabalho que podemos destacar é Carvalho e Klüber (2021), que discutem como se deu a implementação de uma tarefa de Modelagem Matemática com alunos do Ensino Médio

utilizando recursos tecnológicos e destacam que a programação de computadores e a Modelagem Matemática se retroalimentam em um ambiente dialógico, reflexivo e colaborativo. Ainda segundo os autores, a utilização das tecnologias digitais como recurso pedagógico pode favorecer a exploração e experimentação por parte dos alunos de uma forma que só é possível quando esses recursos são utilizados.

A experimentação é uma possibilidade da Modelagem Matemática, e quando aliada aos recursos tecnológicos, torna-se uma ferramenta para o ensino e aprendizagem da matemática. Exploraremos mais detalhadamente esta combinação na próxima seção, evidenciando como a Modelagem Matemática, impulsionada pelas tecnologias, proporciona um ambiente propício para experimentação e análise de fenômenos.

2.2.4 Experimentação em atividades de Modelagem Matemática

A experimentação no ensino está relacionada à promoção de habilidades processuais, tais como “observar, classificar, questionar e levantar hipóteses”, consideradas fundamentais para o desenvolvimento de habilidades mais avançadas, como planejar, prever e interpretar dados (Ward et al., 2010). No entanto, Espinoza (2010, p. 83), acredita que o experimento “constitui um artifício didático que não é proposto com o intuito de motivar, imitar ou mostrar como se produz conhecimento científico, mas que representa uma estratégia para favorecer o aprendizado, principalmente a cargo do aluno”.

Emden e Sumfleth (2014) consideram que, em contextos de ensino e de aprendizagem, se requerem três etapas para a experimentação: (1) os estudantes precisam ter uma ideia e estruturar uma hipótese para resolver um problema; (2) a partir dessa ideia ou hipótese eles planejam e executam um experimento (físico, computacional, geométrico ou algébrico); e (3) os resultados da experimentação são apresentados, podendo levar à revisão da hipótese inicial, se necessário.

Ao se referir a atividades de Modelagem Matemática, Bassanezi (2010), caracteriza a experimentação como:

Uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados. Os métodos experimentais, quase sempre são ditados pela própria natureza do experimento e objetivo da pesquisa. Entretanto, a contribuição de um matemático nesta fase, muitas vezes, pode ser fundamental e direcionar a pesquisa no sentido de facilitar, posteriormente, o cálculo dos parâmetros envolvidos nos modelos matemáticos. A adoção de técnicas e métodos estatísticos na pesquisa experimental podem dar maior grau de confiabilidade aos dados obtidos. Muitas vezes, novas técnicas de pesquisa empírica exercem pressão sobre o foco de interesse da teoria e permitem uma melhor seleção das variáveis essenciais envolvidas no fenômeno, (Bassanezi, 2010, p. 26).

Essa abordagem experimental oferece uma perspectiva que sugere a Modelagem Matemática como uma oportunidade para a inclusão da experimentação no ambiente da sala de aula.

Ao elaborar atividades de Modelagem Matemática como oportunidades para a aprendizagem somos levados a considerar as condições necessárias para esse processo e como elas podem ser integradas no desenvolvimento dessas atividades. No artigo de Almeida, Silva e Borssoi (2021), é abordado esse aspecto, apontando a experimentação e sua associação com a tecnologia digital como meio para gerar ideias, proporcionar ações e conduzir à utilização de ferramentas que podem colaborar para a aprendizagem.

Segundo as autoras,

Dirigindo-se à experimentação dos estudantes e sua associação com a tecnologia digital, lança luz sobre a relevância de, na dinâmica de uma atividade de modelagem matemática, proporcionar meios para que o estudante se engaje nas ações, tome decisões, esteja em interação com o professor, com os colegas e com os meios que lhe permitem experimentar no desenvolvimento de atividades de modelagem (Almeida; Silva; Borssoi, 2021, p. 143).

Greefrath (2011), descreve a experimentação como uma função essencial da tecnologia em atividades de modelagem matemática. A manipulação e integração de dados de um software com informações de uma planilha, por exemplo, representam, nesse contexto, uma forma de experimentação. O autor enfatiza que a simulação se assemelha significativamente à experimentação facilitada pela tecnologia, permitindo a condução de experimentos virtuais com o modelo matemático.

Na visão de Birta e Arbez (2007), durante atividades de modelagem, os modelos matemáticos são desenvolvidos e, posteriormente, empregados como ferramentas para a simulação. Isso possibilita a avaliação da adequação do modelo e oferece ideias para novas considerações em relação ao problema em análise.

Na sequência, destacamos alguns trabalhos que se utilizam da experimentação em atividades de Modelagem Matemática no seu desenvolvimento, tanto na perspectiva da manipulação de materiais físicos, quanto na manipulação de dados a partir de um software.

Campos e Araújo (2009), delinearão em sua pesquisa, um conjunto de atividades de Modelagem Matemática associadas a fenômenos cinemáticos, abarcando grandezas físicas a partir da coleta de dados experimentais entre alunos de um curso de licenciatura em Matemática. Os autores destacam que, ao empregar a Modelagem Matemática aliada às atividades experimentais, conseguiram promover uma abordagem de ensino que integra

distintas áreas do conhecimento, utilizando as atividades experimentais como um meio para a construção do conhecimento em Matemática e Física.

Carreira e Baioa (2011), desenvolveram tarefas associadas à Modelagem Matemática que envolvem a manipulação e experimentação de objetos reais. Enfatizam a importância dessas atividades no desenvolvimento dos alunos, destacando que esse tipo de abordagem pode promover a capacidade de resolver problemas, fomentar atitudes indagativas, estimular a criatividade, fortalecer o raciocínio matemático e aprimorar as habilidades de comunicação.

Heinen *et al.* (2016), descrevem a Modelagem Matemática como uma abordagem metodológica no ensino, e apresentam os resultados de uma atividade experimental realizada com alunos do Ensino Médio. Os autores observaram o interesse dos alunos durante o desenvolvimento das atividades experimentais no laboratório de Química, especialmente na coleta de dados. Através dessas atividades, foram identificados modelos matemáticos representados por funções lineares. Destacam, ainda, que as atividades experimentais facilitaram a compreensão de diversos conteúdos e defendem seu trabalho como uma maneira eficaz de promover a interdisciplinaridade.

Carreira, Baioa e Almeida (2020), conduziram uma atividade de Modelagem Matemática abordando o reconhecimento biométrico das mãos. As autoras identificaram que a experimentação e a simulação desempenharam papéis fundamentais na construção de significado pelos alunos ao longo da atividade. Além disso, destacam que a experimentação permitiu a transformação de ideias e pensamentos em ações concretas, viabilizando a construção e avaliação de modelos matemáticos.

A pesquisa de Araki (2020) sugere que a realização de atividades experimentais investigativas dentro de uma atividade de Modelagem Matemática permite aos alunos atribuir significados aos objetos matemáticos. A experimentação conecta conceitos abstratos da matemática com fenômenos do mundo real, facilitando a compreensão dos alunos e tornando a aprendizagem mais significativa. Os significados foram observados em situações como familiaridade com conceitos matemáticos, uso de conceitos para criar modelos, tentativas de explicação de fenômenos, previsão de consequências futuras e experiências anteriores dos alunos.

Na pesquisa de Rocha (2021), o autor identificou que a experimentação é fundamental para promover a generalização de conceitos entre disciplinas. A coleta de dados durante experimentos permitiu a dedução de modelos teóricos, explorando novas situações investigáveis tanto matematicamente quanto experimentalmente. Esses modelos oferecem

múltiplos rumos e soluções possíveis, evidenciando a importância da experimentação na pesquisa interdisciplinar.

Evidenciamos que as atividades que envolvem experimentação promoveram o desenvolvimento da capacidade de se efetuar generalizações alinhando conceitos de diferentes disciplinas. Nota-se que o momento experimentação proporcionou a coleta de dados que possibilitou a dedução de modelos capazes de explorar novas situações possíveis de serem investigadas matematicamente e experimentalmente e que poderiam tomar diferentes rumos e possuir diferentes soluções (Rocha, 2021, p. 132).

Podemos notar que interação entre Modelagem Matemática e atividades experimentais, evidenciada nos estudos mencionados, destaca o papel ativo do estudante na construção do próprio conhecimento.

De fato, segundo Borges, Toniazzi e Silva (2009), a concepção e execução de experimentos, juntamente com a interpretação dos resultados, a construção e aplicação de conceitos, e a utilização de recursos tecnológicos, representam uma metodologia desafiadora no ensino da Matemática. Essa abordagem considera as demandas por conhecimento, habilidades e criatividade necessárias para que os alunos possam enfrentar os desafios científicos e tecnológicos.

Carreira (2019, p. 54), menciona que, este tipo de metodologia é “especialmente relevante para apoiar processos como experimentar, explorar, simular, visualizar, calcular, estimar”, pois, a interação entre múltiplas representações, viabilizada pela tecnologia e experimentação, fomenta a interligação entre os aspectos empíricos, oriundos da observação e experiência, e os aspectos teóricos dos objetos matemáticos. Essa sinergia enriquece a compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos, aproximando a teoria da prática de forma mais eficaz na Modelagem Matemática.

Na próxima seção, exploraremos a Análise de Modelos como uma abordagem pedagógica proeminente, uma vez que desempenha um papel de destaque em nosso trabalho, além disso, a experimentação desempenha um papel crucial nesse processo, pois permite aos alunos testarem suas hipóteses e verem na prática como os modelos se comportam.

2.3 ANÁLISE DE MODELOS

No âmbito da Educação Matemática, especialmente em trabalhos que envolvem o uso de modelos matemáticos, como na Modelagem Matemática, onde se incentiva a participação dos alunos e a tomada de decisões sobre os temas a serem estudados, o termo “análise” pode ser uma abordagem pedagógica valiosa. Mesmo que essas situações envolvam conteúdos matemáticos que os alunos ainda não tenham estudado, a Análise de Modelos matemáticos

existentes pode ser uma maneira eficaz de introduzir conceitos novos que se relacionam com os modelos em estudo. Esse tipo de trabalho é denominado como Análise de Modelos, conforme proposto por Soares e Javaroni (2013).

O trabalho de Kapczynski, Bueno e da Silva Soares (2023), discute a análise de uma tarefa proposta em um ambiente de ensino de Cálculo Diferencial e Integral, que utiliza a Análise de Modelos e tecnologias digitais. Os resultados da análise destacam a capacidade do ambiente em facilitar a transição entre diferentes representações mentais, promover a tradução dos fenômenos matemáticos para modelos e induzir o raciocínio generalizado.

Segundo Kapczynski, Bueno e da Silva Soares (2023), a evolução contínua da proposta, com base em experiências anteriores, sugere sua adaptação para diferentes contextos de ensino. Pois, conclui-se que o ambiente de Análise de Modelos com uso de tecnologias digitais tem potencial para transformar e impactar positivamente as práticas de sala de aula nas disciplinas de CDI, oferecendo oportunidades enriquecedoras para os estudantes explorarem conceitos matemáticos de forma dinâmica e significativa.

E ao elaborar um modelo matemático para uma situação-problema específica, é essencial avaliar as potencialidades e limitações do modelo em questão. Isso envolve a análise das hipóteses e variáveis utilizadas, a verificação do comportamento das soluções com dados empíricos e a comparação com modelos já existentes, uma vez que estes são relevantes para a criação de um novo modelo (Sepúlveda; González-Gómez; Villa-Ochoa, 2020). Portanto, a Análise de Modelos desempenha um papel fundamental nesse processo, estando diretamente relacionada à Modelagem Matemática.

A Análise de Modelos, conforme destacado por Sepúlveda, González-Gómez e Villa-Ochoa (2020), é uma abordagem pedagógica proposta para o ensino e aprendizagem da Matemática. Essa abordagem se baseia na compreensão de que, ao estudar uma situação específica, não basta apenas criar um modelo matemático; é igualmente importante conhecer, usar e analisar os modelos existentes desenvolvidos para aquela mesma situação.

Deste modo, de acordo com Soares e Javaroni (2013), para várias das perspectivas de modelagem nos processos de ensino e de aprendizagem, a obtenção de um modelo apropriado não é o mais importante, e sim o “caminho” percorrido pelo aluno para compreender o fenômeno estudado ao tentar representá-lo matematicamente. Elaborar um modelo matemático que represente o fenômeno estudado fielmente não é uma tarefa rotineira.

A dificuldade de elaboração de um modelo conforme afirmam Soares e Javaroni (2013) está vinculada, em parte, à exigência de um conhecimento amplo sobre o fenômeno e

também sobre a Matemática, dessa forma conhecer potencialidades e limitações do modelo pode facilitar a compreensão sobre o fenômeno em estudo, além de proporcionar um refinamento do modelo obtendo um modelo mais condizente com a realidade. Portanto, pode-se considerar algumas etapas na hora de analisar e avaliar um modelo matemático:

- (i) estudo do fenômeno em questão; (ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo; (iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno; (iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas; (v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno; (vi) análise das limitações do modelo (Soares, Javaroni, 2012, p. 271).

Este encaminhamento, segundo Soares e Javaroni (2013), podem ser utilizadas nos processos de ensino e aprendizagem de matemática, embasando a discussão de conceitos matemáticos.

Além de destacar a relação entre o modelo e o fenômeno, bem como as limitações dos modelos e a compreensão da evolução do fenômeno, essas atividades possibilitam que modelos mais representativos do fenômeno sejam explorados pelos alunos desde cedo em sua educação matemática. Isso significa que situações mais próximas das experiências profissionais futuras dos alunos podem ser discutidas em sala de aula desde o início da disciplina de Matemática, conferindo a ela um *status* especial (Soares; Javaroni, 2013).

Além disso, Soares e Javaroni (2013) dizem que, os alunos podem analisar diferentes modelos de uma mesma situação, quando disponíveis, permitindo a compreensão do papel das hipóteses utilizadas e das nuances do fenômeno. Essa abordagem também cria um ambiente propício para a avaliação crítica dos modelos matemáticos, destacando suas potencialidades e limitações individuais.

Já para Blomhøj e Niss (2021), para analisar e avaliar criticamente os modelos existentes, em geral, são necessárias as seguintes etapas:

- (i) identificar os elementos básicos do modelo; (ii) identificar, as informações e dados utilizados no modelo; (iii) identificar as hipóteses e simplificações; (iv) identificar a matematização utilizada no modelo; (v) identificar os procedimentos matemáticos, inferências realizadas e os resultados obtidos; (vi) realizar uma avaliação crítica do modelo; (vii) chegar a uma conclusão somativa sobre a formulação, relevância e confiabilidade do modelo (Blomhøj; Niss, 2021, p. 28).

Blomhøj e Niss (2021) também trazem os ciclos reversos da Modelagem Matemática para a análise de um modelo matemático dos quais eles denominam de “Arqueologia de Modelos”, que caracterizaremos em seguida.

Formulação do problema reverso – Para uma análise crítica de um modelo existente, o primeiro passo é compreender os propósitos pelos quais o modelo foi desenvolvido. É importante identificar os tipos de problemas que o modelo se destina a resolver ou investigar. Muitas vezes, esses propósitos não estão claramente expressos na descrição do modelo, e é possível que o modelo não inclua declarações explícitas das perguntas que se destinam a responder (Blomhøj; Niss, 2021).

Reconstrução da pré-matematização do modelador – O próximo passo envolve compreender como o modelo foi construído e os princípios subjacentes à sua criação. Durante o processo de modelagem construtiva, o modelador inicia com a pré-matematização. Nessa etapa, o modelador antecipa as opções relevantes de matematização e possíveis abordagens matemáticas para o modelo, que levarão a respostas matemáticas para as questões colocadas (Blomhøj; Niss, 2021).

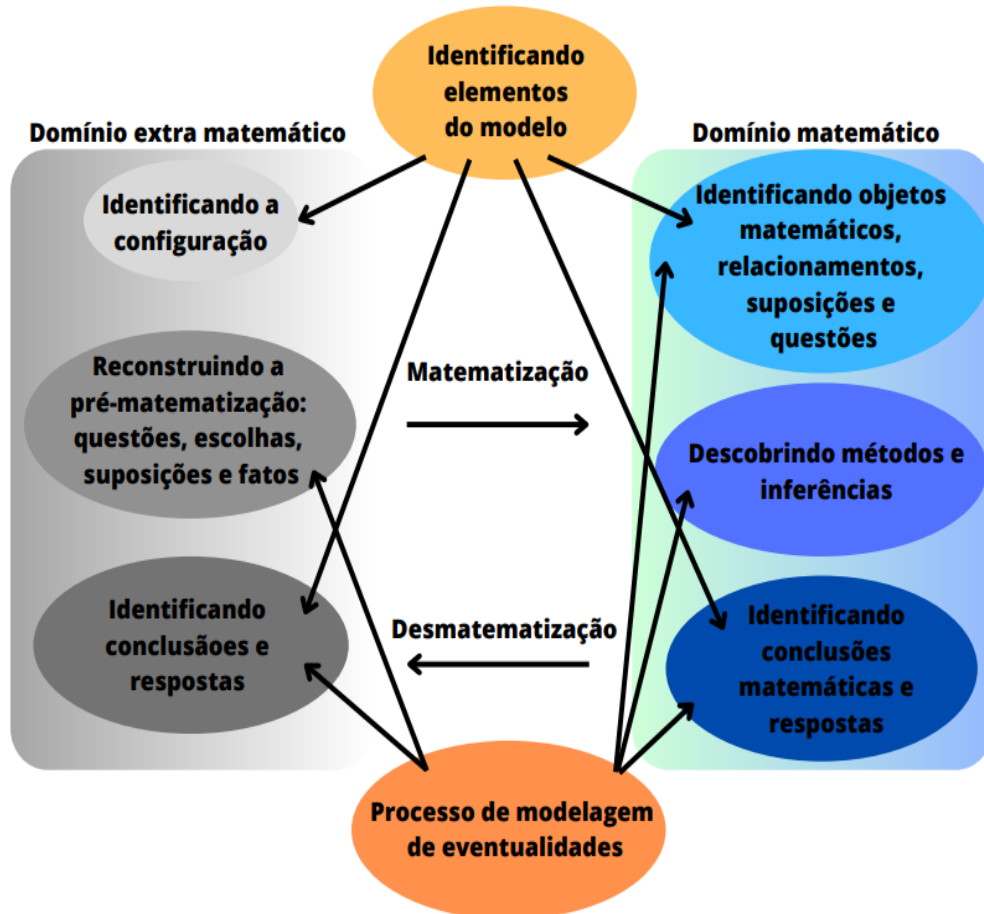
Em algumas situações, o analista de modelos pode temporariamente se colocar no lugar do modelador para compreender a pré-matematização realizada. Isso envolve considerar as escolhas e decisões que teria feito como modelador para abordar essa tarefa (Blomhøj; Niss, 2021).

Reconstrução da matematização do modelador – Após reconstruir a pré-matematização presente no modelo, o analista de modelos precisa identificar a matematização subjacente. Enquanto partes explícitas da matematização podem ser deduzidas da apresentação do modelo, elementos implícitos também podem estar envolvidos. Isso pode ocorrer quando nem todos os detalhes da matematização são explicados, muitas vezes porque são aceitos tacitamente pelo modelador, ou se as perguntas que o modelo visa responder não foram completamente traduzidas para o domínio matemático escolhido (Blomhøj; Niss, 2021).

De forma mais geral, se todas as etapas do ciclo de modelagem estiverem presentes na exposição do modelo, toda a análise do modelo pode ser considerada um espelhamento do ciclo de modelagem. Para as etapas de modelagem que não estejam claramente representadas na exposição do modelo, o analista de modelos terá que mudar para o modo de modelagem construtiva correspondente a essas etapas. Contrariamente ao ciclo de modelagem construtiva, sendo um ciclo porque permite a possibilidade de passar por várias etapas caso o modelo original precise ser alterado ou substituído por outro modelo, essa ciclicidade não está em jogo

na análise de um modelo. Portanto, o ciclo de modelagem pode ser substituído por um diagrama para análise do modelo conforme a Figura 4 ³ (Blomhøj; Niss, 2021).

Figura 4 – Ciclo para Análise de Modelos



Fonte: Blomhøj e Niss (2024, tradução nossa)

De acordo com Blomhøj e Niss (2021), os modelos existentes podem ser analisados por meio das etapas de análise listadas acima, com o auxílio de um conjunto de reflexões espelhadas dos estágios do processo de modelagem chamado Arqueologia de Modelos. Em algumas situações, pode ser necessário executar partes desse processo diretamente para uma análise mais aprofundada.

³ Segundo Blum e Niss (2020), os domínios extra-matemáticos podem ser outras disciplinas acadêmicas ou campos profissionais; podem ser vocações, profissões ou outras áreas de atuação; podem pertencer a esferas societárias e sociais; ou podem fazer parte da vida cotidiana com familiares e amigos. Já o domínio matemático refere-se ao conjunto de valores que faz sentido dentro do contexto da equação ou do modelo matemático que está sendo usado para representar um fenômeno ou sistema.

Embora seja essencial que os alunos desenvolvam todas as etapas da Modelagem Matemática, Blomhøj e Niss (2021) dizem que não é menos importante que os alunos também desenvolvam a parte da análise crítica sobre a qualidade de um modelo matemático. Pois, segundo eles, pode-se argumentar que a maioria dos alunos em suas vidas atuais e futuras encontrarão e farão o uso de modelos existentes, como, por exemplo, para fins de decisão, com mais frequência do que serão colocados em uma posição em que devam realizar todas as etapas da Modelagem Matemática.

Segundo Abada (2015), a compreensão e avaliação de diversos tipos de modelos são fundamentais para os alunos, pois esses modelos desempenham um papel significativo em suas futuras carreiras profissionais.

No artigo Blomhøj e Niss (2021) é apresentado dois modelos que os alunos podem fazer uso nas suas carreiras futuras. O primeiro utilizado na economia, o modelo da Lei de Gravitação do Varejo de Reilly é uma heurística desenvolvida por William J. Reilly em 1931. Segundo essa "lei", os clientes tendem a percorrer distâncias maiores para acessar grandes centros varejistas devido à sua maior atratividade. Na formulação de Reilly, a atratividade do centro varejista é análoga ao conceito de massa na lei física da gravidade.

Esse modelo presume que a geografia da região é plana, sem a presença de rios, estradas ou montanhas que possam influenciar a decisão do cliente sobre onde realizar suas compras. Além disso, pressupõe-se que os consumidores não têm preferências específicas entre as cidades reais.

Segundo a teoria da interação geral existem 2 eixos fundamentais na determinação da atratividade de um centro em relação a outro, a população que funciona como elemento de atração e a distância que funciona como repulsão. Assim, os consumidores seriam atraídos por cidades maiores e de melhor acesso.

$$\text{Distância da cidade } B = \frac{\text{distância entre as cidades}}{1 + \sqrt{\frac{\text{população da cidade } A}{\text{população da cidade } B}}}$$

O segundo modelo apresentado por Blomhøj e Niss (2021), o modelo Michaelis-Menten é uma descrição matemática da cinética enzimática, proposto por Leonor Michaelis e Maud Menten em 1913. Ele descreve a taxa na qual as reações enzimáticas ocorrem em função da concentração dos substratos. Essencialmente, o modelo descreve como a velocidade de uma

reação enzimática muda à medida que a concentração de substrato muda. A equação de Michaelis-Menten é expressa da seguinte forma:

$$V = \frac{V_{max} \cdot [S]}{K_m + [S]}$$

Onde, V é a velocidade da reação enzimática, V_{max} é a velocidade máxima da reação, ou seja, a velocidade na saturação de substrato, quando a enzima está trabalhando a uma capacidade máxima, S é a concentração do substrato, K_m é a constante de Michaelis-Menten, que representa a concentração de substrato na qual a taxa de reação é metade da velocidade máxima. Segundo os autores, o modelo Michaelis-Menten tem sido fundamental para entender a cinética enzimática e é amplamente utilizado em bioquímica e biologia molecular para caracterizar o comportamento das enzimas em diferentes condições experimentais.

De acordo com Blomhøj e Niss (2021), ser capaz de relacionar, analisar e avaliar criticamente tais modelos são uma competência importante para a vida, profissional, social e cívica dos indivíduos em sociedade.

Embora a Análise de Modelos possa ser independente da Modelagem Matemática, optamos por desenvolver ambas, pois consideramos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica que se justifica pelas propostas apresentadas por Almeida, Silva e Vertuan (2012), as quais são relevantes tanto para o ensino quanto para a aprendizagem na Educação Matemática.

Portanto, acreditamos que a Análise de Modelos possui uma intersecção com a Modelagem Matemática e ambas as abordagens podem ser desenvolvidas de forma conjunta ou complementar.

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, começamos por reiterar a questão de pesquisa, o objetivo principal e a categorização do estudo. Apresentamos os participantes da pesquisa, delineamos o contexto em que ela foi conduzida e fornecemos uma breve visão geral das atividades de Modelagem Matemática com Análise de Modelos. Em seguida, apresentamos o cronograma das atividades, bem como os recursos utilizados para coleta de dados. Discutimos os procedimentos para a organização das análises, esclarecendo a metodologia escolhida para esta pesquisa, e, por fim, introduzimos o Produto Educacional resultante.

3.1 DELINEAMENTO DA PESQUISA

Para a realização dessa pesquisa visamos responder à questão: *como alunos do Ensino Médio desenvolvem a Análise de Modelos em atividades de Modelagem Matemática?* Com este intuito, elencamos como objetivos específicos: planejar e implementar atividades de Modelagem Matemática com alunos do Ensino Médio aliadas com tecnologias digitais; analisar a contribuição da experimentação ao desenvolver atividades de Modelagem Matemática e Análise de Modelos; e, investigar como os alunos analisam e avaliam criticamente um modelo matemático.

Na busca pela compreensão do objeto de investigação, conduzimos uma pesquisa qualitativa na qual o pesquisador está particularmente interessado em compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências (Bogdan; Biklen, 1994).

Nesse sentido, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), os princípios qualitativos da pesquisa enfatizam uma metodologia que visa obter dados descritivos, onde os participantes da investigação são estudados em suas circunstâncias naturais, especialmente no contexto escolar. Eles destacam que, na pesquisa qualitativa, a fonte direta de dados é o ambiente natural.

A pesquisa qualitativa, embora envolva a subjetividade do pesquisador como intérprete da problemática em questão, destaca-se pelo seu valor científico, que depende essencialmente da minuciosa descrição do que é observado. A imersão do pesquisador na pesquisa proporciona a oportunidade de explicar de forma significativa e embasada os fenômenos estudados.

Como já antecipamos na Introdução, foram desenvolvidas três atividades de Modelagem Matemática com a Análise de Modelos, das quais a terceira (Deslocamento do

Carrinho) será objeto de análise no Capítulo 4. A primeira atividade (Arco e Flecha), a qual foi chamada de piloto na introdução desse trabalho, foi a atividade que ajudou a delinear o contexto da pesquisa, essa atividade consistia nos disparos de arco e flecha, para a qual o intuito era investigar o comportamento e distância percorrida pelas flechas em diferentes ângulos de lançamento.

A segunda atividade desenvolvida (Roldanas), onde o intuito, definido em conjunto com os alunos, foi investigar um sistema de roldanas construído pelo professor e entender qual relação que existia entre o peso do objeto e o número de roldanas. As atividades Arco e Flecha e Roldanas foram desenvolvidas em uma turma do 1º ano do Ensino Médio composta por 24 alunos, para a qual o professor/pesquisador ministrava as disciplinas de Matemática e Física e serão detalhadas apenas no Produto Educacional.

A partir da experiência de conduzir duas atividades, bem como das reflexões realizadas sobre elas ao escrever artigos para o Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (Tonin; Borssoi; Silva, 2022) e para o Encontro Paranaense de Educação Matemática (Tonin; Giroti; Borssoi, 2022), tornou-se evidente a contribuição da Análise de Modelos quando integrada ao processo de Modelagem Matemática. Observando atentamente a participação dos alunos, os recursos empregados e os conteúdos matemáticos que emergiram dessas experiências, bem como a percepção de outros que poderiam ainda serem explorados, foi possível implementar uma terceira atividade (Deslocamento do Carrinho). Esta última foi realizada com a turma da 3º ano do Ensino Médio, representando uma continuidade significativa em nosso processo de pesquisa.

A experiência adquirida nas atividades anteriores proporcionou uma base para aprimorar o planejamento e implementação da terceira atividade. A integração da Análise de Modelos com a Modelagem Matemática não apenas ampliou nossa compreensão dos conceitos matemáticos, mas também ofereceu *insights* valiosos sobre o engajamento dos alunos, a eficácia dos recursos utilizados e o surgimento de novas perspectivas na abordagem de conteúdos matemáticos no contexto do Ensino Médio.

Dessa forma, os procedimentos para o desenvolvimento das atividades foram planejados de maneira a enfatizar tanto o processo quanto o produto final, destacando a relevância do contato direto do pesquisador com os participantes da pesquisa.

3.2 CONTEXTO EDUCACIONAL DA PESQUISA

A implementação das atividades de Modelagem Matemática com Análise de Modelos foi realizada durante os períodos letivos de 2022 e 2023 em um Colégio Cívico-Militar situado no interior do Paraná. Este colégio oferece tanto o Ensino Fundamental quanto o Ensino Médio, e conta com aproximadamente seiscentos alunos distribuídos em dois períodos de estudo. Além disso, a instituição dispõe de um laboratório de informática e um laboratório de Ciências. O professor/pesquisador atua neste colégio há dois anos, lecionando disciplinas como Matemática e Física.

A turma selecionada para implementação da atividade analisada na dissertação, foi a única turma do 3º ano do Ensino Médio no ano de 2023, para a qual o professor/pesquisador ministrava a disciplina de Matemática. Essa turma era composta por 24 alunos, dos quais 20 participaram do desenvolvimento. Eles tinham idades variando entre dezessete e dezoito anos. Ao longo da descrição e análise da atividade os alunos serão identificados com códigos de A_1 a A_{20} em ordem alfabética e o professor/pesquisador pela notação P. Outro ponto que pode ser destacado é que os alunos nunca haviam estudado sobre Modelagem Matemática ou Análise de Modelos, nem desenvolvido atividades dessa natureza. A escolha da turma foi baseada no fato de já ter trabalhado a disciplina de Matemática com essa turma no 2º ano do Ensino Médio.

Essas aulas eram distribuídas da seguinte forma: uma aula de 50 minutos na segunda-feira, uma aula de 50 minutos na terça-feira e duas aulas de 50 minutos na quinta-feira. Além disso, a escolha foi influenciada pela natureza comunicativa dos alunos durante o desenvolvimento das atividades em sala de aula. A temática escolhida foi planejada pelo professor, com o objetivo de se trabalhar os conteúdos da matriz curricular, tais conteúdos como funções, representação gráfica de funções e comportamento de parâmetros e variáveis em funções.

A atividade do “Deslocamento do Carrinho” ocorreu da seguinte maneira: o professor/pesquisador levou para a sala de aula uma tábua de madeira, um carrinho, um objeto de massa de 1 kg e uma balança digital, a partir desses materiais os alunos decidiram qual problemática iriam investigar, atividade essa que será detalhada no Capítulo 4.

Após decidirem a problemática a ser estudada, a inteiração e coleta de dados do fenômeno em estudo foram realizadas em conjunto com a sala toda, só para as fases de matematização, validação e análise do modelo obtido que os alunos se dividiram em grupos.

Para a análise dos dados foram observados todos os grupos, mas, por se tratar de uma turma pequena, a qual apresentava um perfil colaborativo, todos os grupos desenvolveram suas atividades semelhantemente, sempre trocando informações, descobertas e possibilidades entre si.

3.3 COLETA DE DADOS

Cientes de que fariam parte de uma pesquisa cujos dados seriam coletados por meio de registros escritos do professor/pesquisador, dos alunos, e de registros audiovisuais, os responsáveis pelos alunos assinaram um Termo Livre e Esclarecido de autorização, além de um Termo Livre e Esclarecido de Autorização assinado pela direção do colégio (Apêndices A e B).

Ao longo da descrição e análise dos dados, utilizamos imagens, transcrições das falas e registros escritos. As imagens foram capturadas por meio de fotos tiradas com um aparelho celular, assim como capturas de tela de momentos específicos dos vídeos. Os vídeos e áudios foram registrados por meio de câmeras filmadoras que permaneceram ligadas durante o desenvolvimento da atividade, para tais gravações, houve o auxílio de um professor que também trabalha no colégio.

Como a pesquisa é baseada no processo comunicativo durante o desenvolvimento da atividade, as gravações em áudio, em vídeo, as imagens e os registros escritos dos alunos foram considerados documentos no contexto da pesquisa, sendo que as gravações dos áudios foram transcritas. Esses documentos formam o *corpus*, que, conforme a definição de Bardin (2011, p. 126), é o conjunto de documentos submetidos aos procedimentos analíticos.

3.4 ANÁLISE DE CONTEÚDO COMO METODOLOGIA DE PESQUISA

Minayo, Deslandes e Gomes (2001) afirmam que, nos dias de hoje, a análise de conteúdo é compreendida como um conjunto de técnicas com duas funções principais em sua aplicação: a verificação de hipóteses e a descoberta do que está por trás dos conteúdos manifestos. Essas técnicas têm uma variedade de aplicações, incluindo a análise de textos, a identificação do estilo de um escritor, a análise de depoimentos, entre outros, destacando-se particularmente na análise e interpretação de fenômenos sociais (Minayo; Deslandes; Gomes, 2001).

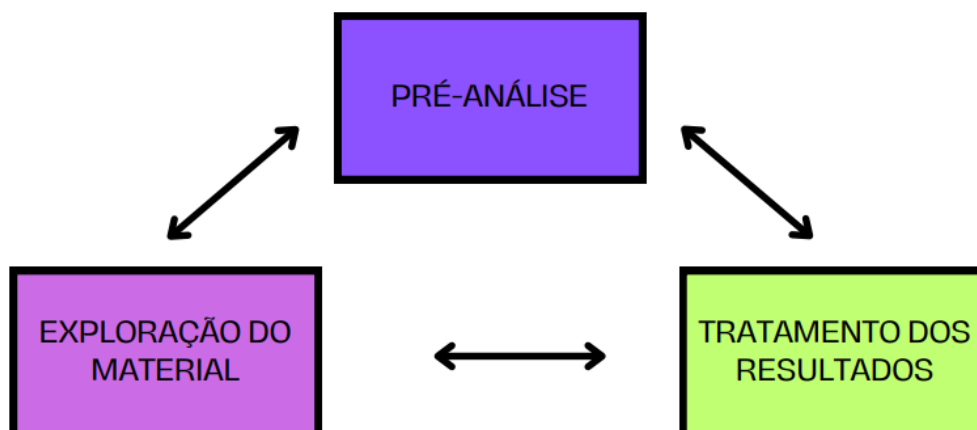
Nesse contexto, Gomes (2007) enfatiza que, ao buscar interpretar e compreender os fenômenos sociais, é crucial reconhecer que a análise e interpretação na pesquisa qualitativa têm como objetivo explorar o conjunto de representações sociais sobre o tema de estudo. O autor também destaca que, ao analisar e interpretar as informações resultantes da pesquisa qualitativa, é importante prestar atenção tanto ao que é homogêneo quanto ao que é heterogêneo dentro de um mesmo contexto social (Gomes, 2007).

A análise de conteúdo, segundo Bardin (2011), é definida como um conjunto de técnicas de análise de comunicações, visando a obtenção de indicadores (quantitativos ou não) que permitem a inferência de conhecimentos relacionados às condições de predição/recepção dessas mensagens, por meio de procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição de conteúdo das mensagens.

Portanto, o método da Análise de Conteúdo demonstra ser valioso ao lidar com a comunicação, uma vez que busca compreender não apenas os significados imediatos, mas também os subentendidos. O enriquecimento da interpretação proporcionado pela Análise de Conteúdo pode esclarecer elementos e significados que, inicialmente, não compreendemos.

A Análise de Conteúdo, conforme definida por Bardin (2011), envolve o uso de métodos sistemáticos e objetivos para descrever o conteúdo das mensagens. Esses métodos são organizados em fases - *Pré-Análise*, *Exploração do Material* e *Tratamento dos Resultados*. Embora essas fases possam ser flexíveis, o pesquisador deve exercer cuidado ao descrevê-las durante o processo de organização dos dados da pesquisa, conforme a Figura 5.

Figura 5 – Fases da Análise de Conteúdo



Fonte: dos autores adaptado de Bardin (2011)

A primeira fase, conhecida como *Pré-Análise*, envolve a organização do material. Bardin (2011) a descreve como um período de intuições, mas com o objetivo de tornar operacionais e sistematizar as ideias iniciais, criando um esquema preciso para o desenvolvimento das etapas subsequentes na análise. Além disso, essa fase envolve a seleção dos documentos a serem analisados, a formulação de hipóteses e objetivos, bem como a elaboração de indicadores que sustentarão a interpretação final.

Em nossa pesquisa, na fase de *Pré-Análise*, realizamos uma leitura inicial dos diálogos gravados e transcritos das aulas durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática com Análise de Modelos. Nessa etapa, também examinamos os vídeos e imagens dos registros dos alunos. Após a leitura inicial, na mesma fase, procedemos à seleção do *corpus* da pesquisa, preparando assim o material que seria posteriormente analisado.

A segunda fase, chamada de *Exploração do Material*, envolve a definição de categorias (sistemas de codificação) e a identificação das unidades de registro (segmentos de conteúdo a serem considerados como unidades-base para categorização e contagem frequencial). Também inclui a identificação das unidades de contexto nos documentos, sendo unidades de compreensão usadas para codificar os segmentos de mensagem e entender seu significado preciso.

Essa fase é essencial para enriquecer as interpretações e inferências. É a etapa da descrição analítica, na qual o *corpus* (conjunto do material textual coletado) é submetido a um estudo aprofundado com base em hipóteses e referenciais teóricos. Portanto, a codificação, classificação e categorização desempenham um papel fundamental nessa fase (Bardin, 2011). Em nossa pesquisa os códigos serão destacados em negrito, em cada fase/etapa.

Nesta fase da nossa pesquisa, a partir do *corpus* selecionado, identificamos as unidades de registro, que são partes significativas das transcrições das falas dos alunos. Essas unidades podem ser um tema, uma palavra, uma frase ou até mesmo uma expressão, ou gesticulação.

A terceira e última fase da Análise de Conteúdo segundo Bardin (2011) é o *Tratamento dos Resultados*, na qual os resultados brutos são processados de forma a tornarem-se significativos e válidos. Nesse estágio, o pesquisador realiza uma análise crítica e reflexiva, propondo inferências e análises de acordo com o referencial teórico adotado. É o momento de buscar respostas para os objetivos estabelecidos e identificar novas dimensões teóricas sugeridas pela análise do material. Na nossa pesquisa, nessa fase, buscamos evidenciar como alunos do Ensino Médio desenvolvem a Análise de Modelos em atividades de Modelagem Matemática.

Assim, a Análise de Conteúdo, de acordo com Bardin (2004) parece uma opção adequada para analisar os dados de nossa pesquisa.

Para responder à questão de pesquisa, precisamos entender em quais fases da Modelagem Matemática e da Análise de Modelos os alunos estão envolvidos. Desenvolveremos o Quadro 1 para o tratamento dos resultados da atividade “Deslocamento do Carrinho” de acordo com as fases realizadas de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Soares e Javaroni (2013):

Quadro 1 – Quadro de análise

Unidade de contexto	Unidade de registro
Modelagem Matemática	Inteiração
	Matematização
	Resolução
	Interpretação de resultados e validação
Análise de Modelos	Estudo do fenômeno em questão
	Estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo
	Entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno
	Estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas
	Estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno
	Análise das limitações do modelo

Fonte: Autoria própria (2024).

As unidades de contexto corresponderão à Modelagem Matemática e à Análise de Modelos. Para as unidades de registro, identificaremos a fase em que o aluno está envolvido na unidade de contexto. Finalmente, para codificá-las, verificaremos se a fase foi concluída, realizada parcialmente ou se o aluno não a realizou, verificando quais recursos eles utilizaram e como utilizaram, além dos conteúdos matemáticos que emergiram.

O próximo capítulo detalharemos a atividade desenvolvida contando como ela ocorreu além de analisar seu desenvolvimento visando atender aos propósitos da pesquisa.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE DESENVOLVIDA

Neste capítulo, descrevemos o desenvolvimento da atividade por meio das transcrições das falas dos alunos e do professor, juntamente com imagens capturadas por fotos e vídeos. Esses materiais compõem o *corpus* para as análises e são essenciais para a reflexão sobre o objeto de estudo. Durante a descrição e análise da atividade, os códigos de análise, que irão emergindo, estarão destacados em negritos.

4.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE “DESLOCAMENTO DO CARRINHO”

Seguindo o referencial teórico adotado, realizamos a descrição e análise da atividade de Modelagem Matemática com Análise de Modelos. A análise das transcrições dos áudios, vídeos e imagens foi baseada na identificação das fases de desenvolvimento da atividade.

A definição da problemática iniciou-se após o professor levar para a sala de aula, uma tábua de madeira com um carrinho, sendo solicitado aos alunos que decidissem sobre quais possibilidades aquela situação poderia ser investigada. Após alguns debates entre a turma, as possibilidades de investigação que surgiram foram: estudo da aceleração do objeto em relação ao ângulo; ou se o peso do carrinho fazia diferença na sua velocidade de movimento; ou se o ângulo da rampa (tábua de madeira) influenciava em sua velocidade de movimento.

Dentre as opções, foi decidido em consenso pelos alunos, investigar o comportamento da velocidade de deslocamento do carrinho em diferentes ângulos de inclinação da rampa. Esse momento caracterizamos *inteiração*, que consiste na primeira fase do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática sugerido por Almeida, Silva e Vertuan (2012), a qual se refere ao contato inicial dos alunos com a situação-problema a ser investigada.

P: *E então pessoal, com esses materiais que eu trouxe, o que vocês acham que dá para gente investigar?*

A₁₁: *Com a tábua né e o carrinho nela?*

P: *São vocês que decidem!*

A₆: *Podíamos fazer uma rampa para o carrinho com os livros.*

A₂: *Acho que dava para ver se peso do carrinho faz diferença.*

A₆: *E se amarrarmos pesos nele, ele vai ficar mais “pesadinho” daí a gente testa.*

A₈: *Tem aquele negócio da aceleração na física, dava para ver isso também!*

A₁: E se a gente medir velocidade dele na rampa?

A₁₁: Ué, mas que jeito?

A₇: Para calcular velocidade é tanto que andou pelo tempo né.

A₇: Mas ele vai mais rápido se a rampa for maior.

A₁: Isso! Então só medir ângulo e contar o tempo.

P: Então você acha que se aumentarmos a inclinação da rampa, vai aumentar a velocidade dele? Mas o quanto será que aumenta?

A₁: É só a gente ir medindo ângulo da rampa e contar tempo que demora.

A₂: Verdade aí vamos saber...

Inicialmente, os alunos se inteiraram sobre a temática e decidiram o que iam investigar, em momento inicial eles queriam medir a velocidade de deslocamento do carrinho, mas para responder a tal pergunta mudaram a estratégia para coletar o tempo de deslocamento em diferentes ângulos. Portanto, os alunos realizaram a inteiração com a temática. Aqui podemos evidenciar os surgimentos de dois códigos de análise: Conhecimentos Prévios, pois os alunos trouxeram conhecimentos de Física já aprendidos para decidirem o que iriam investigar (*A₇: Para calcular velocidade é tanto que andou pelo tempo né.*) e Experimentação, pois, para decidir o que iriam investigar no fenômeno de estudo, realizaram diversos testes observando o que ocorria e quais possibilidades haviam de estudo (*A₆: Podíamos fazer uma rampa para o carrinho com os livros; A₁: É só a gente ir medindo ângulo da rampa e contar tempo que demora.*).

Após decidirem o problema, a próxima etapa da atividade foi a de coleta de dados da situação-problema. Primeiro os alunos pegaram alguns de seus livros para apoio da rampa, como mostra a Figura 6 (a) assim, com a inclinação gerada, soltaram o carrinho e depois mudando o ângulo da rampa fizeram mais alguns testes.

P: E então o que vocês acham? Foi a mesma velocidade?

A₅: Bom acho que foi, não sei.

A₃: Se teve diferença, foi muito pequena.

P: E como vocês acham que poderíamos testar para ver se há diferença?

A₂: Poderíamos medir o tempo com celular né.

A₇: Mas que ângulo é esse professor? Que soltamos o carrinho?

Os alunos tentaram medir o ângulo com um transferidor e vários alunos tentaram cronometrar o tempo de descida com o cronômetro do celular, mas como havia muita imprecisão entre eles e não estavam chegando a um acordo, o professor então sugeriu o uso de dois aplicativos. O primeiro era o *Protractor* para coletar o ângulo no qual a rampa se encontrava (Figura 6 (c)), posicionando o celular sobre a rampa e o segundo foi *Arduino Science Journal* esse que a partir dos sensores do celular, com ele preso ao carrinho (Figura 6 (b)) durante a descida, podia-se capturar o tempo de deslocamento a partir da análise de seus gráficos. E também foi apresentado aos alunos outras funções que o aplicativo oferece. Conforme mostrado nos diálogos dos alunos a seguir.

P: *E aí pessoal, como vamos medir o tempo e ângulo da rampa?*

A₅: *O tempo podíamos usar cronômetro do celular e ângulo podíamos usar o truque das mãos que você nos ensinou.*

P: *Certo vamos começar então.*

A₂: *Tem o transferidor no meu estojo também.*

A₂: *Vamos usar ele também.*

Destacamos nesse momento o início da *matematização*, segunda fase do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática proposta por Almeida, Silva e Vertuan (2012), onde os alunos sugeriram uma estratégia para coleta do tempo de deslocamento do objeto em estudo e o ângulo da rampa, ou seja, determinaram estratégias de resolução partindo de uma situação inicial não necessariamente matemática.

Figura 6 – Coleta de dados pelos alunos da atividade desenvolvida



Fonte: Arquivo do professor-pesquisador (2023).

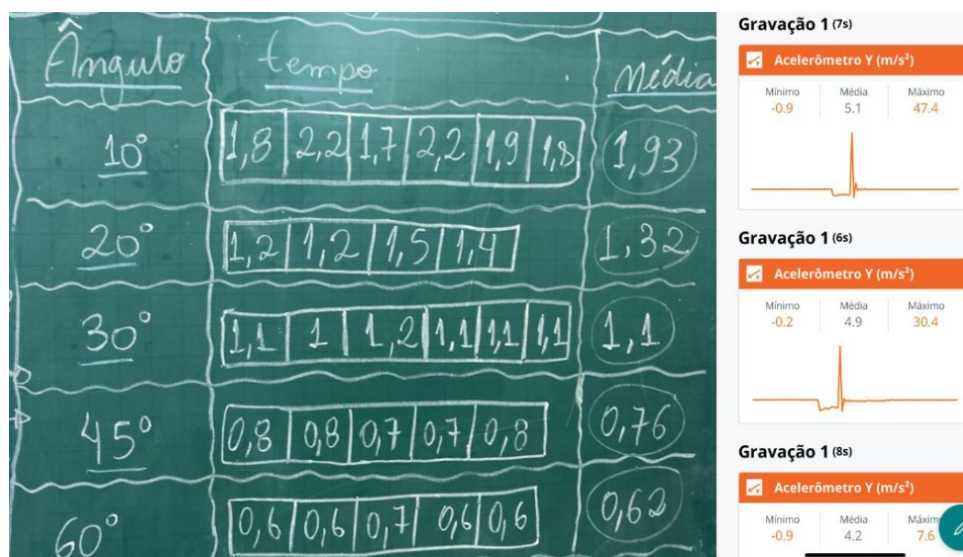
Foi sugerido aos alunos que escolhessem alguns ângulos de inclinação da rampa, para a coleta dos dados, e então foram definidos os ângulos: 10° , 20° , 30° , 45° e 60° . Foram realizadas diversas descidas para cada valor de ângulo escolhido e foram registrados todos os dados obtidos. Também foi coletada a massa do carrinho com o celular preso a ele e a coletado o valor da gravidade no local da sala para que pudesse ser trabalhado com esses dados em outro momento.

Para verificar a fase de *matematização*, a segunda fase do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática conforme proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2012), os alunos sugeriram estratégias para coletar dados sobre o tempo de deslocamento do objeto em estudo e o ângulo da rampa a partir de uma indagação feita pelo professor “*E aí pessoal, como vamos medir o tempo e ângulo da rampa?*”. Isso significa que eles desenvolveram estratégias de resolução partindo de uma situação inicial que não era necessariamente matemática, realizando assim a segunda fase de *matematização*.

Nessa fase podemos destacar 4 códigos de análise que emergiram, **Experimentação**, os alunos se utilizaram dela, para a realização da coleta de dados, **Recursos Analógicos**, inicialmente tentaram realizar a coleta de dados utilizando recursos tais como transferidor e régua, **Intervenção do Professor**, foi necessária a intervenção do professor para auxiliarem os alunos na coleta de dados, apresentando tecnologias que refinaria os dados coletados, **Recursos Digitais**, os alunos utilizaram dois aplicativos do *smartphone* para facilitar a coleta de dados.

Após a coleta, o professor organizou os alunos em grupos, pois até esse momento a atividade estava sendo realizada em conjunto. Cada grupo ficou responsável por um ângulo, para realizar uma síntese dos dados obtidos e analisar os gráficos que o aplicativo gerou, analisando o tempo de deslocamento do carrinho com o auxílio do professor. Também foi sugerido a eles que, para manter um rigor no tratamento dos dados, usassem média aritmética do tempo em cada um dos ângulos. No final, cada grupo foi ao quadro e colocou o tempo em segundos encontrado a partir do gráfico que o aplicativo gerou e média dos tempos, conforme Figura 7.

Figura 7 – Dados obtidos e gráficos do movimento do objeto gerado pelo aplicativo.



Fonte: foto da lousa e captura de tela do app Arduino (2023)

Na aula seguinte, com a média do tempo de descida do carrinho em cada ângulo escolhido, o professor propôs aos alunos que analisassem se era possível encontrar o valor do tempo de um ângulo que não tinha sido coletado a partir dos dados que eles possuíam. Os alunos começaram então a calcular a diferença de tempo entre cada ângulo, buscando encontrar um padrão entre eles, em seguida, tentaram ver qual era o tempo de descida se o ângulo fosse de um grau (1°) para que pudessem multiplicar esse valor para o ângulo que desejassem e, também, utilizaram a regra de três inversamente proporcional, pois perceberam que conforme o ângulo aumentava o tempo diminuía, conforme a transcrição a seguir:

P: *Então galera, conseguimos obter os dados sobre o fenômeno que estamos investigando, mas apenas para cinco ângulos diferentes... mas, e se eu quiser saber o tempo de descida do nosso carrinho em um ângulo diferente do que gente coletou?*

A₁: *Então é só medir de novo profe!*

P: *Mas toda vez que eu quiser saber um ângulo do qual eu não tenho vou ter que coletar os dados? Será que não tem uma forma da gente descobrir isso a partir dos dados que a gente tem?*

A₁: *Acho que sim, sei lá...*

A₃: *É só a gente ver se não tem um padrão entre eles.*

P: *E como faríamos isso? (Ficaram algum tempo olhando para tabela).*

A₁: *Do primeiro para o segundo tem 61 de diferença e do 45 graus pro 30 graus tem 22 de diferença... dá pra usar isso também.*

A₅: *E se a gente descobrir o tempo pro ângulo 1 depois só multiplicar para o que queremos.*

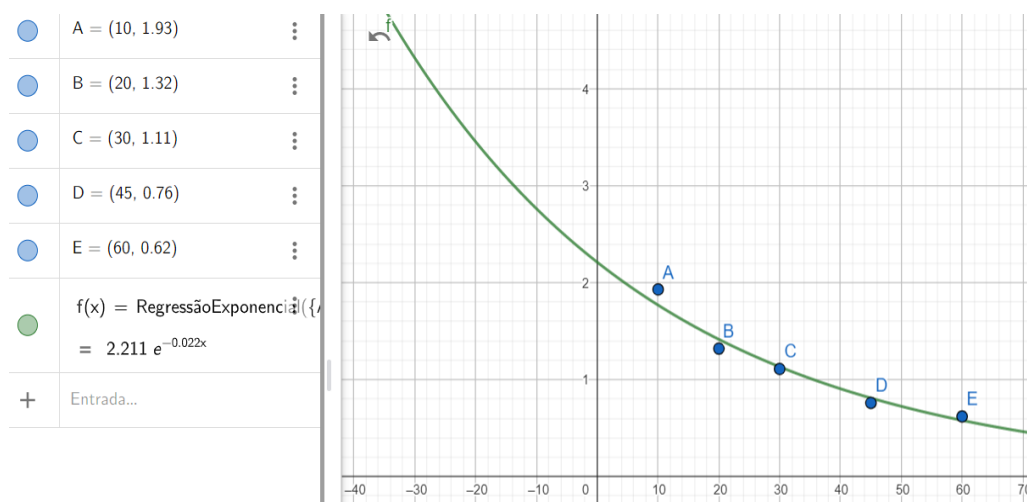
A₄: *Tem regra de três que dá para usar também.*

P: *Legal, gente! Várias ideias, vamos testar elas!*

Outras estratégias surgiram também, mas como era o intuito do professor apresentar o software *GeoGebra* para os alunos, este que eles ainda não conheciam, lhes foi sugerido irem ao laboratório de informática. Após algum tempo, com o professor explicando como se usava o *GeoGebra* e quais eram suas potencialidades, foi apresentado aos alunos a regressão de curvas sendo explicado qual era o objetivo com essa ferramenta.

Dando sequência à *matematização*, a próxima orientação foi que plotassem os pontos de coordenadas $A(10; 1,93)$, $B(20; 1,32)$, $C(30; 1,11)$, $D(45; 0,76)$ e $E(60; 0,62)$, onde o eixo x representava o ângulo de inclinação da rampa e o eixo y o tempo de deslocamento do carrinho sobre a rampa. Após os alunos inserirem os pontos, foi debatido com eles em conjunto sobre qual das funções representava bem o comportamento do fenômeno em estudo e entre as possibilidades disponíveis de funções, eles decidiram que era a função $y = 2,211^{-0,022x}$, tal que o termo dependente (y) era o tempo de deslocamento e o independente (x) o ângulo de inclinação da rampa, conforme a Figura 8:

Figura 8 – Ajuste de curvas realizado pelos alunos no GeoGebra



Fonte: Captura da tela do aluno A_2 (2023).

Neste momento, podemos evidenciar a *resolução*, terceira fase do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, conforme destacam Almeida, Silva e Vertuan (2012), pois os alunos com auxílio do professor desenvolveram meios necessários para responder à situação problemática inicial.

A fase de *resolução* somente ocorreu após uma intervenção do professor, pois para os alunos a pergunta sobre o problema inicial já estava respondida. De fato, eles sabiam que o tempo de deslocamento, com dados coletados de cinco ângulos, iria diminuindo conforme o ângulo de inclinação aumentava, a partir dos dados que eles haviam coletado.

Pode-se, de fato, afirmar que a fase de *resolução* não iria ocorrer, e somente ocorreu devido à seguinte intervenção do professor: “*Então galera, conseguimos obter os dados sobre o fenômeno que estamos investigando, mas apenas para cinco ângulos diferentes... mas, e se eu quiser saber o tempo de descida do nosso carrinho em um ângulo diferente do que gente coletou?*”, isso teve o efeito de instigá-los a continuarem a atividade, emergindo assim o código de análise **Intervenção do Professor**. Outro ponto que vale a ser destacado é que os alunos ainda não tinham desenvolvido atividades de Modelagem Matemática, nem realizado Análise de Modelos, sendo essa a primeira atividade que eles realizam utilizando tais abordagens metodológicas. Vale destacar, nesse momento, os conteúdos matemáticos que foram emergindo, pois quando os alunos sugeriram generalizar buscando um modelo a partir da regra de três, o professor pode discutir com eles sobre a diferença de funções lineares e funções não lineares. Isso foi observado com mais atenção, posteriormente, no laboratório de informática, no software *GeoGebra*. Dessa forma, podemos destacar mais dois códigos de análise,

Conhecimentos Prévios, pois os alunos buscaram formas já conhecidas por eles para realizarem a resolução do problema (A_4 : *Tem regra de três que dá para usar também.*) e **Recursos Digitais**, pois sem o auxílio do software *GeoGebra*, os alunos não chegariam a um modelo mais adequado para representar o fenômeno investigado.

Por fim, uma última questão que merece ser mencionada é a escolha da função para representar o fenômeno. Os alunos optaram por uma função de grau 4, acreditando que esta se ajustaria melhor aos cinco pontos plotados. Entretanto, logo perceberam que essa função não captava adequadamente o fenômeno em sua totalidade. Essa constatação só ocorreu após uma intervenção do professor, reafirmando mais uma vez o código de análise **Intervenção do Professor**.

Para a fase de *interpretação de resultados e validação* novamente ocorreu após algumas intervenções do professor, conforme podemos notar no recorte de fala a seguir.

A₁: *Então essa fórmula vai nos dar a resposta para qualquer ângulo professor?*

P: *Exato! Essa fórmula que chamaremos de modelo, ela descreve o comportamento do nosso fenômeno, apresentando valores de tempo de descida para os ângulos que queremos.*

A₁: *Entendi.*

A₃: *Então como vamos saber se ela funciona professor?*

P: *Temos que testar.*

A₁: *Pelo que entendi então, vamos ver se valores que ela dá é igual as que gente tem né?*

P: *Exatamente.*

Para conferir o tempo de deslocamento que o modelo apresentava, o professor interveio dando algumas sugestões de como realizar isso, então eles utilizaram os resultados que o modelo apresentava, e comparando esses resultados com dados empíricos que possuíam, eles perceberam uma pequena diferença, então o professor explicou que foi devido ao ajuste de curva que tinha sido utilizado para se obter a função. Portanto, podemos dizer que a fase de *interpretação de resultados e validação*, ocorreu em partes, pois foi necessária a intervenção do professor. Emergindo, assim, nesse momento, mais três códigos de análise, **Intervenção do Professor**, já que foi necessária a intervenção do professor para dar continuidade à atividade, **Dados Empíricos**, pois os alunos recorreram a dados que possuíam sobre o fenômeno e

Comparação, pois de fato os alunos tiveram que comparar os resultados que o modelo apresentava aos dados empíricos que possuíam.

Outro ponto que vale a pena destacar são os conteúdos matemáticos que surgiram a partir dessa fase, pois podemos nomear corretamente quem eram as variáveis, os parâmetros e as constantes.

Até esse ponto, os alunos haviam passado por todas as fases da Modelagem Matemática, e o modelo havia sido validado, pois atendia bem ao seu propósito. No entanto, o professor/pesquisador desejava que os alunos avaliassem o modelo que acabaram de criar, assim, ele pediu aos alunos que refletissem sobre se o modelo era eficaz, se poderia ser aprimorado e se já existiam modelos prontos para aquela situação. Assim, o professor passou a dar atenção às etapas da Análise de Modelos, de acordo com o sugerido por Soares e Javaroni (2013).

Para a etapa (i) *identificar os elementos básicos do modelo*, o professor fez alguns questionamentos sobre o modelo, conforme o recorte de falas a seguir:

P: *Galera antes de tudo, vocês entendem nosso modelo? Vocês sabem o que acabaram de criar? O que cada letra aí nessa fórmula quer dizer?*

A₂: *Acho que sim professor, é função exponencial né igual as que gente estava estudando para a prova Paraná.⁴*

P: *Sim é uma função exponencial, e o que cada termo quer dizer?*

A₂: *Ahhh o y é o valor do tempo né, e x o valor que colocamos para o ângulo que queremos. (pausa) E os números são sempre esses, não vai mudar (aponta para o valor de e anotado no caderno).*

A₅: *Mas não entendi por que o é esse “ e ”.*

P: *Sobre esse “ e ” eu nunca comentei com vocês, ele é uma constante do número de Euler, e o GeoGebra usou ele como base para nosso modelo, e mais para frente vamos discutir melhor sobre esse número.*

Nessa etapa, os alunos devem compreender a função de cada elemento básico do modelo e o papel que esses elementos desempenham. Como eles desenvolveram o modelo e

⁴ A Prova Paraná é uma ferramenta avaliativa, elaborada pela Secretaria de Estado da Educação (Seed-PR), utilizada para instrumentalizar professor, equipe gestora das instituições de ensino, secretário municipal de educação e sua equipe elaborarem, a partir de evidências, ações de melhoria da aprendizagem.

com a orientação do professor/pesquisador, a partir das transcrições das falas, é possível perceber que os alunos entenderam os elementos do modelo.

Nessa etapa emergiram dois códigos de análise, **Modelagem Matemática**, pois como os alunos haviam desenvolvido o modelo eles próprios e já haviam avaliado o modelo, assim, eles tinham conhecimento dos elementos básicos do modelo, e **Conhecimentos Prévios**, pois, percebe-se também que ao avançar para essa etapa foi possível retomar elementos já trabalhados do conteúdo de função exponencial, além de conteúdos novos como a constante de Euler (e).

Para a etapa (ii) *identificar as informações e dados utilizados no modelo*, assim como ocorreu na etapa (i), aconteceu de forma natural, já que os próprios alunos que desenvolveram o modelo. A identificação de dados e informações utilizados no modelo ocorreu na fase da *matematização* da Modelagem Matemática, associamos, assim, o código de análise, **Modelagem Matemática**. Pois, no momento da coleta de dados, os alunos decidiram que iam coletar o ângulo de inclinação da rampa e o tempo de deslocamento do carrinho na rampa e na fase de *resolução* utilizaram tais informações no ajuste de curvas para desenvolverem o modelo matemático, já que o propósito do modelo era de calcular o tempo de descida do carrinho para qualquer ângulo de inclinação.

A etapa (iii) *entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno*, a partir do recorte das transcrições de fala, pode-se notar que os alunos têm o entendimento sobre qual papel cada termo do modelo representa.

Na fala “*ahhh o y é o valor do tempo né, e x o valor que colocamos para o ângulo que queremos. (pausa) E os números são sempre esses, não vai mudar (aponta para o valor de e anotado no caderno)*” nesse momento o aluno já tinha o entendimento sobre parâmetro e sobre variável, e a dúvida era sobre a constante, o que foi esclarecida pelo professor/pesquisador, facilitada pois os próprios alunos haviam desenvolvido o modelo, emergindo novamente o código de análise, **Modelagem Matemática**.

Pode-se dizer que as três etapas iniciais apesar de independentes, ocorreram de certa forma simultaneamente, ou de forma natural, isso se deve ao fato de ser um modelo criado pelos próprios alunos, facilitando a compreensão sobre o modelo, tal como é mencionado por Soares e Javaroni (2013), “Acreditamos que a Análise de Modelos possui uma intersecção com a Modelagem Matemática e ambas as abordagens podem ser desenvolvidas de forma conjunta ou complementar.”

Para a etapa (iv) *estudo do comportamento das soluções do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas*, o estudo do comportamento das soluções do modelo ocorreu durante a fase de *validação* da Modelagem Matemática, os alunos perceberam que o modelo apresentava pequenas diferenças no resultados se comparado aos dados empíricos que possuíam, momento esse que foi oportuno para o professor explicar brevemente quais processos matemáticos estavam por trás do ajuste de curvas que o software *GeoGebra* havia realizado, emergindo assim o código de análise **Modelagem Matemática e Dado Empíricos**.

Mas o que vale destacar é que, os alunos notaram após alguns testes que o modelo apresentava um valor para ângulos maiores que 90° e menores do que 0° , o que para eles não fazia sentido, então solicitaram que professor trouxesse novamente a rampa para verificarem o comportamento do carrinho novamente conforme as transcrições de fala a seguir, associado mais uma vez ao código de análise, **Experimentação**.

A₃: Professor tem alguma coisa estranha, eu coloquei o valor de 130 graus para x e deu que carrinho desce a rampa em 0,12 segundos, e conforme vou aumentando ele vai descendo mais rápido. O que é estranho porque depois de 90 graus ele cai né, não tem como descer de ponta cabeça.

P: Você tem razão, não tem como isso acontecer...

A₂: Professor, você podia buscar a rampa de novo pra gente testar mais umas vezes.

P: Posso fazer isso sim!

Após vários testes perceberam que o carrinho começava a se movimentar a partir do ângulo de 3° e que para ângulos maiores que 75° o carrinho descia praticamente em queda livre, chegaram então à conclusão que o modelo se mostrava confiável apenas utilizando valores para o ângulo da rampa entre $3^\circ \leq x \leq 75^\circ$, destacando a importância dessa etapa, pois os alunos perceberam haver limitações do modelo a ser consideradas, levando assim a um refinamento do modelo.

A etapa (v) *estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno*, ocorreu simultaneamente com a etapa (iv) pois os alunos ao testarem resultados do modelo, questionando em que os parâmetros influenciavam na solução do modelo, e comparando seus resultados, realizaram uma intervenção adicionando o intervalo

para o ângulo no modelo e adicionaram uma hipótese não considerada antes nas fases da Modelagem Matemática, assim, atribuímos dois códigos de análise, **Comparação e Modelagem Matemática**.

Para a etapa (vi) *análise das limitações do modelo*, a partir das transcrições das falas a seguir, podemos notar alguns indícios de quais limitações os alunos perceberam do modelo criado por eles.

P: *Pessoal, será que podemos usar nosso modelo em outras situações como essa?*

A₁: *Esse modelo foi criado com tempo que a gente coletou né, então acho que não...*

A₃: *Verdade, se a tábua fosse mais lisa, o carrinho ia mais rápido, se fosse igual a mesa do professor.*

A₁: *Dá impressão que a tábua segura o carrinho um pouco.*

A₆: *Quando eu testei o carrinho sem o celular amarrado, ele ia mais devagar, acho que porque estava bem mais leve.*

P: *Isso mesmo, pessoal! E o que mais?*

A₄: *O tamanho da rampa, se fosse uma rampa muito grande iria levar muito mais tempo.*

A₃: *Se fosse duas vezes maior ia levar duas vezes mais tempo e assim por diante.*

A₁: *Não sei se daria certo para calcular assim, tem muita coisa envolvida, acho que nossa função só funciona no nosso caso mesmo.*

Os alunos perceberam também a partir de um questionamento do professor, que o modelo em questão era único para aquele fenômeno em estudo, pois, caso fosse alterado o tamanho da rampa, o modelo apresentaria resultados não condizentes a realidade, ou mesmo o fato que o material da rampa influenciava no tempo de descida, pois segundo eles, uma rampa mais lisa, que não fosse de madeira, teria menos atrito, diminuindo assim o tempo de descida. Isso traz indícios de que lembravam conteúdos já aprendidos nas aulas de Física, sendo que o também o próprio peso do carrinho poderia alterar esse valor. Neste caso, dois códigos de análise foram associados: **Intervenção do Professor e Conhecimentos Prévios**.

O modelo, portanto, foi validado pelos alunos, pois, para os alunos, ele descrevia bem o comportamento do carrinho e respondia à problemática inicial proposta por eles. No entanto, concluíram ser válido apenas para aquela situação de estudo e para os ângulos entre $3^\circ \leq x \leq$

75°. Esse tipo de discussão possibilitou a busca por outro modelo que não apresentasse essas limitações e permitisse uma generalização para diferentes variações daquele fenômeno em estudo.

No final da aula foi solicitado aos alunos, considerando o que é sugerido por Sepúlveda, González-Gómez e Villa-Ochoa (2020) - a análise e comparação de modelos já existentes - que realizassem uma pesquisa e relatassem na próxima aula se encontraram um modelo teórico clássico para o fenômeno, para então, compará-lo com modelo obtido a partir do *GeoGebra*. Como resultado, os alunos não encontraram tal modelo, provavelmente porque tal modelo não se encontra em materiais didáticos da Educação Básica, então foi necessário que o professor apresentasse para os alunos o seguinte modelo $t(\theta) = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g \cdot \sin(\theta)}}$, onde θ é o ângulo de inclinação da rampa, $t(\theta)$ é o tempo de deslocamento do objeto no plano inclinado para um ângulo θ , s a distância a ser percorrida pelo objeto e g a gravidade do local.

Como se tratava de um modelo novo para o fenômeno, todas as etapas da Análise de Modelos foram retomadas para este modelo e foi sugerido aos grupos identificar o que cada termo representava nesse modelo e como ele poderia ter sido obtido.

Para etapa (i) *identificar os elementos básicos do modelo*, os alunos questionaram o professor sobre quem eram aqueles elementos do modelo e o que eles representavam, então, o professor/pesquisador explicou qual era o papel de cada elemento daquele modelo, conforme as transcrições de fala a seguir.

A₁: *Professor, não sei nem por onde começar, não tô entendendo esse modelo.*

P: *Bom primeiro passo é entender cada elemento desse novo modelo.*

A₁: *Tá, mas como? O que é o “t” e o “s” e o “zero cortado”?*

P: *O t representa o tempo, nosso “s” é o comprimento em metros da rampa e o “zero cortado” o teta é o valor do ângulo que desejamos saber. Ou seja, é um modelo que nos entrega o tempo de deslocamento de um objeto sobre uma rampa.*

A₁: *Espera vou anotar isso!*

Pode-se observar que, como é um modelo novo, o qual eles não construíram como o modelo anterior com a Modelagem Matemática, eles inicialmente estavam mais perdidos, mas com auxílio do professor e relacionando a conteúdos que eles já haviam aprendido, os alunos conseguiram identificar elementos básicos do modelo, assim, dois códigos de análise foram associados: **Intervenção do Professor e Conhecimentos Prévios**.

Para a etapa (ii) *identificar, as informações e dados utilizados no modelo*, o auxílio do professor foi indispensável, pois tal modelo é obtido a partir da equação horária da posição, para tal é realizada uma manipulação algébrica que compreende conhecimentos de equações diferenciais ordinárias. Como a matemática utilizada para tal dedução está além do alcance dos alunos do Ensino Médio, o professor optou por mostrar as manipulações algébricas a partir da equação horária da posição, $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$ no movimento retilíneo uniformemente variado, e quais termos tinham sido utilizados. Explicou, ainda, que para o plano inclinado (rampa), a Física mostra que a aceleração é constante e dada por $a = g \cdot \sin(\theta)$.

Na etapa (iii) *entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno* os alunos analisaram o que cada termo dizia sobre o modelo, como indicam as transcrições de falas a seguir.

P: *Gente já sabe o que é cada termo do modelo, vamos analisar eles agora, pode ser?*

A₂: *O certo é entender o que acontece com eles, né.*

P: *Isso!*

A₃: *O nosso g vai ser sempre 9,8 que é a gravidade aqui da Terra, então n vai mudar, e o "s" vai ser tamanho da tabua que n vai ficar mudando também.*

A₃: *O único que vai variar é o valor do seno, mas a gente pega ele em uma tabela ou na calculadora.*

Os alunos fizeram uma análise mais voltada para o comportamento de cada elemento do modelo, a partir de conhecimentos que eles já tinham, mas nessa etapa o ideal seria entender o comportamento que cada elemento desempenha no modelo e como cada elemento interfere no resultado final, assim, vinculamos o código de análise, **Conhecimentos Prévios**.

Para a etapa (iv) *estudo do comportamento das soluções do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas*, no modelo obtido pelo GeoGebra essa etapa pode permitir acrescentar hipóteses, então os alunos com mesmo intuito de enxergar hipóteses não consideradas, começaram a verificar quais soluções o modelo apresentava conforme a transcrições das falas a seguir.

P: *E então pessoal o que vocês encontraram?*

A₂: Bom professor faz sentido os resultados, conforme aumenta o ângulo o tempo diminui, igual tem que ser!

P: E o que mais?

A₃: Só que usando esse modelo na nossa tábua da bastante diferença nas repostas do nosso modelo.

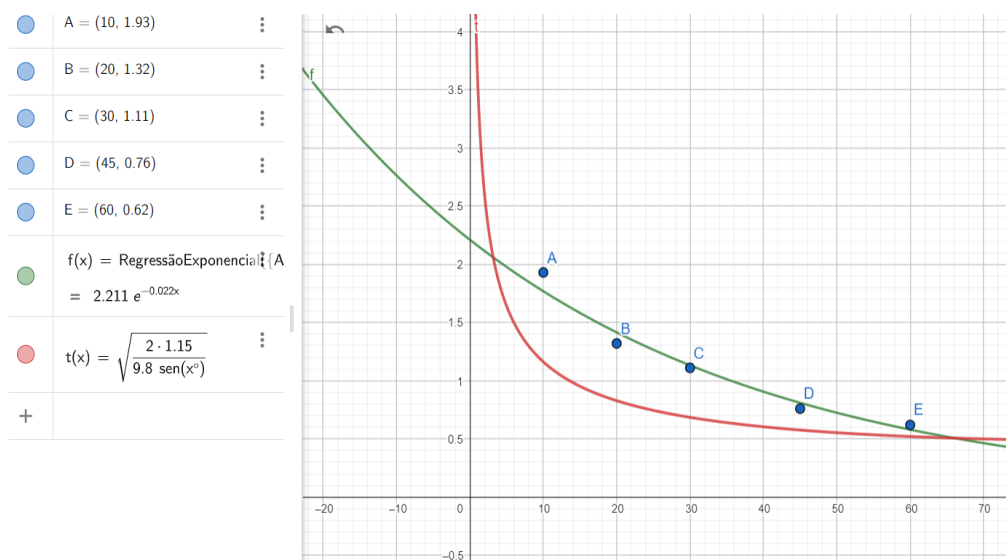
P: Você está dizendo que esse modelo apresenta valores diferentes se comparado ao nosso modelo?

A₃: Isso!

P: Vamos analisar isso olhando as representações gráficas do modelo no laboratório

Como o intuito do professor era realizar a comparação dos modelos, ele sugeriu aos alunos a se dirigirem ao laboratório de informática para que analisassem as representações gráficas de ambos os modelos, já que naquele momento o próprio estudante realizou uma comparação dos resultados. Para auxiliar na dúvida dos alunos, o professor sugeriu o uso do *GeoGebra*, novamente, para observar o comportamento das duas funções, como mostra a Figura 9.

Figura 9 – Comparação do comportamento das representações gráficas das funções.



Fonte: captura da tela da de A₃ (2023)

Os alunos, no laboratório, ao observarem as representações gráficas de ambos os modelos, as soluções que os modelos apresentavam e em diálogo com professor chegaram à conclusão que essa diferença de valor entre modelos se dava pela ausência de um elemento no

modelo, o atrito, conforme as transcrições de fala a seguir, por isso, atribuímos os códigos de análise **Recursos Digitais, Comparação, Dados Empíricos e Modelagem Matemática**.

P: *Galera por que vocês acham que tem essa diferença?*

A₁: *Esse modelo professor, os resultados de tempo são sempre menores do que no nosso modelo, no nosso é mais lento.*

P: *Por que você acha que isso acontece?*

A₁: *Eu acho que é por que a tábua é áspera e segura o carrinho, quando soltamos na sua mesa que é lisa ele vai mais rápido né.*

P: *Exatamente! E o que é isso que segura o carrinho?*

A₃: *É a madeira que não é lisa, né.*

P: *Sim, você está certo, mas na Física como chamamos isso?*

A₃: *Ahhhhh é o atrito, né?*

Então puderam acrescentar uma hipótese, a qual não a enxergaram inicialmente, de que naquele modelo o atrito era desprezado, e que isso podia gerar diferenças nas soluções do modelo, ao que associamos o código de análise, **Conhecimentos Prévios**.

Para a etapa (v) *estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno*, novamente, como no modelo anterior, essa etapa ocorreu simultaneamente com a etapa (iv).

A etapa (vi) *análise das limitações do modelo* foi propiciada quando os alunos realizaram a comparação de ambos os modelos, isso parece ter sido um facilitador para os alunos perceberem suas limitações, emergindo assim dois códigos de análise, **Comparação e Modelagem Matemática**, conforme se observa nas transcrições de fala a seguir.

P: *E agora o que vocês enxergam de limitações e potencialidades nesse modelo?*

A₄: *Ahh, ele é melhor pois não é único né, posso usar ele em várias situações e tamanho de rampa. Mas por outro lado nunca vai existir uma situação que não existe atrito....*

A₃: *Sim o carrinho não vai descer flutuando, hahaha.*

A₁: *Se tivesse como gente colocar atrito na fórmula aí ficava perfeito.*

A₂: *Sim, mas como vamos medir isso? Acho que não tem como.*

A₁: Ainda assim nosso modelo é melhor que esse pra nossa tábua e carrinho, o resultado dele é bem mais perto do que a gente coletou.

A₃: Sim, concordo.

[...]

A₃: Esse modelo clássico não tem movimento no ângulo zero, o que faz sentido, e no nosso tem!

A₁: É igual professor falou se for dar zoom no gráfico, ele nunca toca o eixo y.

A₂: Exatamente! O nosso é ruim nisso! Ele anda no ângulo zero, sendo que na realidade ele só se mexe no ângulo três para frente.

A₃: Sim, mas ainda acho nosso melhor, a falta do atrito nesse clássico deixa os resultados muito longe da do nosso carrinho.

Quando os alunos compararam ambos os modelos ficaram mais evidentes as limitações desse modelo clássico, o qual ele não possui o atrito em seus resultados, e que dependendo da situação, se fosse uma rampa com muito atrito, as soluções apresentadas seriam muito distantes da realidade, gerando assim código de análise, **Recursos Digitais**. Outro ponto que os alunos observaram como uma limitação que podia ser melhorada era adicionar um parâmetro de atrito no modelo, mas por conta do tempo não foi realizado, mas que pode ser trabalhada no futuro.

Outra questão que a análise permite salientar, é que o professor poderia ainda instigar os alunos a realizarem simulações para complementar o que foi realizado na análise do modelo a partir do modelo clássico. Para isso, poderia, no laboratório, solicitar que os alunos alterassem os valores dos parâmetros e realizassem comparações gráficas, por exemplo.

Em diálogo, pode-se notar algumas conclusões interessantes dos alunos, ao afirmarem que, apesar do modelo clássico apresentar um melhor comportamento, pelo fato da função não passar pelo zero no eixo x e o ponto mínimo da função ser no ângulo de 90° . Isso se dá pelo fato de não poder existir movimento do carrinho se o ângulo for de 0° , e o tempo de deslocamento atingir o menor valor no ângulo de 90° .

Outro ponto que foi discutido, é o fato da diferença maior do tempo de deslocamento nos ângulos iniciais entre os dois modelos, pois nos ângulos menores a aceleração é menor e conforme aumenta o ângulo a aceleração aumenta, tornando cada vez mais desprezível o atrito, fato esse possibilitado pelo uso do GeoGebra, assim, o código de análise, **Recursos Digitais**

foi associado. Neste aspecto, fica a possibilidade de um estudo mais detalhado sobre o comportamento da aceleração.

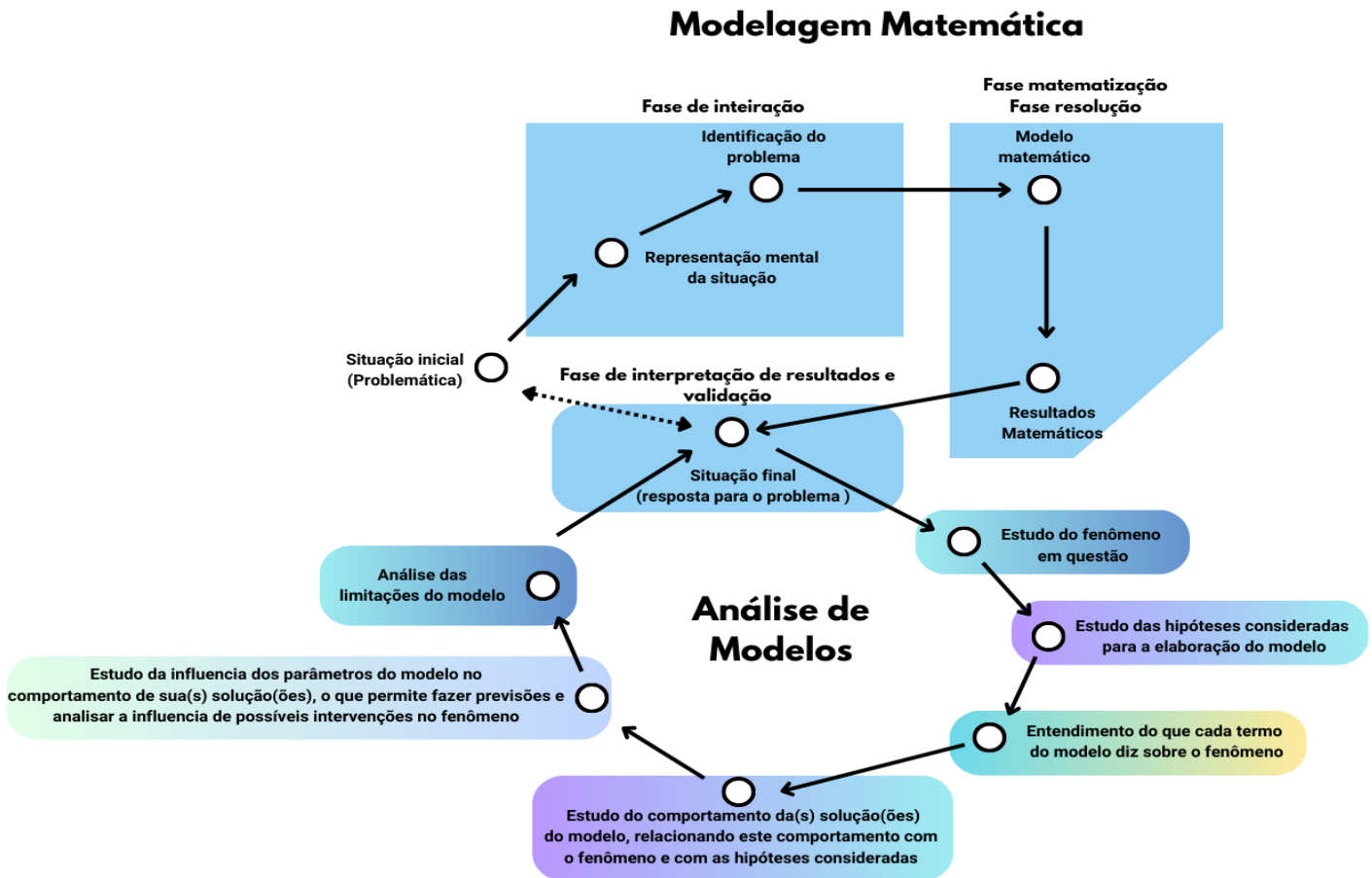
Os alunos concluíram que a diferença de tempo entre os dois modelos se dava pela ausência de atrito no modelo clássico, e que para o fenômeno em estudo o modelo obtido a partir do *GeoGebra* ainda o representava melhor ao concluírem que, apesar do modelo clássico ter uma generalização para qualquer tamanho de rampa inclinada e ângulo entre $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$, nunca de fato teriam uma situação da qual não houvesse o atrito.

4.1.1 Algumas reflexões sobre a atividade “Deslocamento do Carrinho”

Nesta seção, realizamos a análise geral da atividade de Modelagem Matemática com Análise de Modelos, abordando as percepções e considerações do pesquisador sobre o tema investigado, além de todos os códigos e categorias de análise que emergiram.

A Figura 10 apresenta um esquema de como se deu a implementação da atividade “Deslocamento do Carrinho” em termos das fases/etapas da Modelagem Matemática com Análise de Modelos desenvolvida com os alunos.

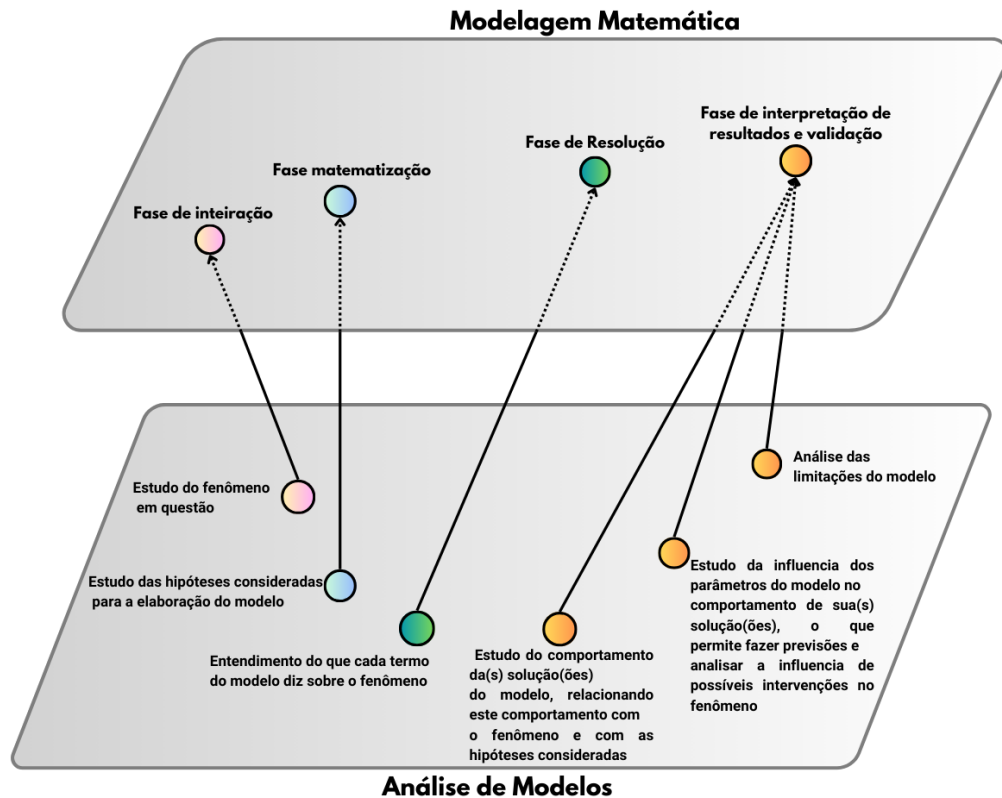
Figura 10 – Síntese do ciclo das fases/etapas



Fonte: Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Soares e Javaroni (2012)

O esquema da Figura 10 apresenta uma ordem linear com a Análise de Modelos sendo um apêndice da fase final de Modelagem Matemática, ao desenvolver a atividade com os alunos, foi seguido exatamente essa ordem para dar sequência à atividade, porém vale a pena citar que várias das fases/etapas estão interligadas, tal como é representado na Figura 11.

Figura 11 – Sinergia existente entre as duas alternativas pedagógicas



Fonte: Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Soares e Javaroni (2012)

Por exemplo a etapa da Análise de Modelos, *(i) estudo do fenômeno em questão* está diretamente ligada a fase de *inteiração* da Modelagem Matemática, os alunos ao coletarem os dados, eles próprios, já tinham conhecimento sobre o fenômeno em questão.

Enquanto as etapas *(ii) estudo das hipóteses consideradas para elaboração do modelo* e *(iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno*, está ligada a fase *matematização* e *resolução*, os alunos ao avaliarem o modelo matemático por eles desenvolvidos, já tinham conhecimento sobre o modelo, então ocorreu um aprofundamento sobre conteúdos matemáticos utilizados.

Por fim, as três etapas finais da Análise de Modelos, *(iii) estudo do comportamento das soluções do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas*, *(v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno* e *(vi) análise das limitações do modelo*, nesse momento durante a análise da atividade é possível perceber que essas etapas foram facilitadas para os alunos, devido a fase de *interpretação de resultados e validação* da Modelagem Matemática, além de que houve um refinamento do modelo em estudo, agregando hipóteses não percebidas anteriormente.

Portanto, podemos concluir que apesar de serem, alternativas pedagógicas distintas, elas apresentam uma sinergia entre si, fato já sugerido por Sepúlveda, González-Gómez e Villa-Ochoa (2020).

A seguir, o Quadro 2, apresenta uma síntese dos códigos de análise que foram associados a cada Unidade de Registro.

Quadro 2 – Síntese dos códigos de análise

Unidade de Registro	Códigos
Inteiração.	Experimentação; Conhecimentos Prévios.
Matematização.	Experimentação; Recursos Digitais; Recursos Analógicos; Intervenção do Professor.
Resolução.	Intervenção do Professor; Recursos Digitais; Conhecimentos Prévios.
Interpretação de resultados e validação.	Intervenção do Professor; Dados Empíricos; Comparação.
(i) estudo do fenômeno em questão.	Conhecimentos Prévios; Modelagem Matemática.
(ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo.	Modelagem Matemática.
(iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno.	Modelagem Matemática; Recursos Digitais.
(iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas.	Modelagem Matemática; Recursos Digitais; Dados Empíricos; Experimentação.
(v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno.	Comparação; Modelagem Matemática.
(vi) análise das limitações do modelo.	Conhecimentos Prévios; Modelagem Matemática.

(i) estudo do fenômeno em questão. (Modelo Clássico)	Conhecimentos Prévios; Intervenção Professor.
(ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo. (Modelo Clássico)	Intervenção Professor.
(iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno. (Modelo Clássico)	Conhecimentos Prévios.
(iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas. (Modelo Clássico)	Modelagem Matemática; Recursos Digitais; Dados Empíricos; Comparação; Conhecimentos Prévios.
(v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno. (Modelo Clássico)	
(vi) análise das limitações do modelo. (Modelo Clássico)	Comparação; Experimentação; Recursos Digitais.

E o Quadro 3 traz os códigos que emergiram da análise, seus significados que foram evidenciados durante a análise.

Quadro 3 – Códigos de análise e seus significados

Código	Significado do código
Experimentação	Os alunos utilizaram dos preceitos da experimentação para desenvolver/ analisar o modelo.
Conhecimentos Prévios	Os alunos utilizaram conhecimentos já adquiridos de matemática e áreas afins.

Recursos Digitais	Os alunos utilizaram recursos digitais, tais como softwares, aplicativos entre outras tecnologias.
Recursos Analógicos	Os alunos utilizaram de recursos tais como régua, transferidor, trena entre outros.
Intervenção do Professor	O professor/pesquisador teve que dar suporte, orientações para o prosseguimento da atividade.
Dados Empíricos	Os alunos utilizaram de dados coletados por eles durante o desenvolvimento da atividade.
Comparação	Os alunos realizaram uma comparação entre os modelos matemáticos para alcançarem a análise e avaliação de ambos.
Modelagem Matemática	A Modelagem Matemática facilitou as fases da análise de modelo por ter sido desenvolvida primeira.

Fonte: Autoria própria (2024).

Ao observarmos todos os códigos e seus significados com o intuito de responder nossa questão de pesquisa: *como alunos do Ensino Médio desenvolvem a Análise de Modelos em atividades de Modelagem Matemática?* pensamos que três categorias podem ser estruturadas a partir da Análise de Conteúdo de todas as Unidades de Registro da atividade: *recursos utilizados; manipulação e experimentação; e, intervenção do professor*. Cada uma delas será discutida, a Figura 12, apresenta um esquema de como foi relacionado cada código de análise com as categorias de análise.

Figura 12 –Relação das categorias de análise com códigos de análise



Fonte: Autoria própria (2024).

A primeira categoria é *recursos utilizados*: para realizar tanto a Modelagem Matemática quanto a Análise de Modelos, os alunos utilizaram desde recursos analógicos, como régua, transferidor entre outros objetos, quanto recursos digitais tais como aplicativos de *smartphone* e software de computadores.

Tais recursos foram indispensáveis na realização da atividade, pois a partir dos aplicativos de *smartphone* foi possível realizar uma coleta de dados mais precisa, pode-se realizar a interpretação de gráficos que o GeoGebra apresentava, oferecendo a possibilidade da retomada de conteúdo, por exemplo.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 31) os softwares “podem auxiliar alunos e professor na construção de gráficos e na observação da influência dos parâmetros, bem como na realização de cálculos”. Nesse sentido, a possibilidade de experimentar, de visualizar e de coordenar de forma dinâmica diferentes representações, como a algébrica e as gráficas, “[...] são vantagens da interação de atividades de modelagem com as mídias informáticas” (p. 31). O

software *GeoGebra* facilitou a compreensão dos dados, pois a partir do ajuste de curvas e a observação da representação gráfica dos modelos em estudos, os alunos chegaram a conclusões interessantes de como melhorar, adicionar parâmetros e refinar o modelo em estudo.

A segunda categoria que emergiu que podemos destacar é a *manipulação e experimentação*. Na atividade analisada, os alunos tiveram a possibilidade de observar o fenômeno em estudo, coletar os dados a partir da manipulação dos materiais que eles tinham disponíveis, testar resultados que os modelo matemáticos apresentavam com a prática deu um significado maior à atividade matemática que eles realizaram.

Além do que, a partir da experimentação e comparação de dados empíricos, possibilitados a partir dos materiais e softwares disponíveis a eles, os alunos chegaram a algumas conclusões de como melhorar o modelo em estudo, perceberam a ausência de um parâmetro, o “atrito” no modelo matemático, cenário esse que talvez sem a experimentação não fosse possível.

De fato, como mencionado por Carreira (2019, p. 54) a experimentação é “especialmente relevante para apoiar processos como experimentar, explorar, simular, visualizar, calcular, estimar”, pois, a interação entre múltiplas representações, viabilizada pela tecnologia e experimentação, fomenta a interligação entre os aspectos empíricos, oriundos da observação e experiência, e os aspectos teóricos dos objetos matemáticos.

A terceira categoria que emergiu do nosso estudo é *intervenção do professor*, em diversos momentos foi necessária a intervenção do professor para o prosseguimento da atividade, além de que os alunos apresentavam conteúdos prévios que eles já haviam aprendidos, o direcionamento desses conhecimentos a partir da intervenção do professor foi de suma importância para o enriquecimento da atividade realizada.

Pois em atividades de Modelagem Matemática, Almeida, Silva e Vertuam (2012), destacam o papel do professor como orientador durante todo o processo de desenvolvimento dessas atividades. Atribuir ao professor essa função implica reconhecer a necessidade de abandonar o papel de expositor de conteúdo e centralizador do conhecimento.

Nesse contexto, Veronez (2013, p. 28) destaca que, na Modelagem Matemática, os alunos “estabeleçam relações entre seus conhecimentos, seja da situação em estudo, seja da matemática, ou entre ambos”. Para isso, a autora ressalta a importância de proporcionar momentos de discussão ao longo da atividade, visando facilitar a superação de dificuldades, estimular a motivação diante de desafios e enriquecer a investigação sobre o problema em

questão. Durante essas discussões, é crucial que o professor esteja atento para valorizar igualmente as opiniões dos alunos e considerar todos os resultados obtidos.

De fato, encontramos ressonância no que traz Veronez (2013) com Blomhøj e Niss (2021), segundo os quais é de vital importância estimular o senso crítico e investigativo dos alunos, fazendo com que assumam o papel de protagonistas em vez de meros expectadores. Isso não apenas contribui para o desenvolvimento acadêmico, mas também para a formação cívica e social dos estudantes. Nesse contexto, o papel do professor transcende o de detentor absoluto do conhecimento, assumindo a função de orientador, cujo objetivo principal é guiar os alunos no processo de descoberta e aprendizagem.

No próximo capítulo, detalharemos o Produto Educacional resultante da pesquisa realizada.

5 PRODUTO EDUCACIONAL

O Mestrado Profissional do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR nos dá a possibilidade de disponibilizar um Produto Educacional que é resultante ou que deu origem à pesquisa de Mestrado.

Esta pesquisa deu origem ao Produto Educacional intitulado “Atividades de Modelagem Matemática com Análise de Modelos para o Ensino Médio”, Pensamos no desenvolvimento de um material que tem como característica sugerir atividades de Modelagem Matemática e Análise de Modelos com a integração da experimentação e recursos digitais.

Esse material tem uma estrutura flexível, que possa ser analisada, adequada e utilizada por professores de Matemática ou de áreas afins da Educação Básica, ou adaptada para o desenvolvimento no Ensino Superior de acordo com as necessidades do professor, dos alunos e da matriz curricular.

Ao considerar o artigo de Aguiar, Figueiredo e Sousa (2023), que aborda uma revisão de literatura referente aos Produtos Educacionais desenvolvidos para a Educação Básica, cujo foco incide nos usos da Modelagem Matemática, e os autores verificam

[...] as diferentes contribuições da Modelagem Matemática e suas aplicações em variados contextos e suas aplicações nos produtos educacionais, destaca-se também a diferença nas produções entre os estados pesquisados e uso das tecnologias digitais tanto como recurso pedagógico como forma de produção dos produtos educacionais que apesar de difundido nas pesquisas aparecem em poucas produções (Aguiar; Figueiredo; Sousa, 2023, p. 419)

Podemos observar que o uso de tecnologias digitais nos Produtos Educacionais, bem como o uso para a produção dele, aparece em poucas produções. Aliando à esta constatação, nos motivamos a traçar uma abordagem estratégica para a criação de um site, o qual é de fácil acesso e o torna mais interativo, por permitir a agregação de vários recursos digitais diferentes. Espera-se que o Produto Educacional atenda de maneira eficiente às necessidades e expectativas dos Professores.

Dessa forma, a análise trazida nesta dissertação e as reflexões decorrentes dela proporcionaram uma base para a elaboração da versão final, na qual o objetivo é de contribuir significativamente para o contexto educacional.

Vale ressaltar que o Produto Educacional apresenta sugestões para o desenvolvimento das três atividades planejadas, todas elas implementadas em sala de aula ao longo da pesquisa.

Após o planejamento, implementação e análise da terceira atividade, o site foi concebido com o propósito de compartilhar o relato sobre como essas três atividades foram conduzidas com os alunos. Além disso, tem como objetivo fornecer orientações para aprimorar a realização da análise dos modelos das duas atividades anteriores, trazendo percepções novas que anteriormente não haviam sido percebidas.

O Produto Educacional se encontra na forma de um site e pode ser acessado a partir do link: <https://sites.google.com/alunos.utfpr.edu.br/produtoeducacional/pagina-inicial>. Outra forma de acesso ao site é a partir da área do PPGMAT no Repositório Institucional da UTFPR, no link: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2119>. O site está organizado em quatro páginas da web. Nas próximas figuras, ilustramos o topo de cada página que compõem o Produto Educacional e a descrição do que buscamos contemplar em cada uma delas.

Figura 13 – Capa do Produto Educacional



Fonte: Autoria própria (2024).

A página inicial do site traz informações introdutórias, apresentando o propósito do site, além de caracterizar a Modelagem Matemática e a Análise de Modelos. Há uma explicação concisa sobre cada um desses conceitos, juntamente com recortes relacionados aos dois temas abordados nesta dissertação. Isso permitirá que o leitor se aprofunde no assunto, caso deseje explorá-lo mais detalhadamente também encontrar indicação de referências.

Figura 14 – Página da “Atividade do Arco e Flecha”



Fonte: Autoria própria (2024).

A página "Atividade do Arco e Flecha"⁵ apresenta uma descrição completa de como realizar a atividade, incluindo todos os passos necessários e dicas úteis, seu objetivo central é realizar disparos de flechas em distintos ângulos de inclinação do arco, visando analisar as distâncias percorridas em cada tiro e desenvolver um modelo que descreva o comportamento dessa variável. Além disso, é fornecido detalhe sobre a coleta de dados realizada pelos alunos durante a atividade. O site também disponibiliza o artigo publicado no evento (Tonin; Borssoi; Silva, 2022), o qual contém uma descrição abrangente da atividade, oferecendo aos interessados acesso a informações detalhadas sobre a mesma.

Figura 15 – Página da “Atividade das Roldanas”



Fonte: Autoria própria (2024).

A página "Atividade das Roldanas"⁶ apresenta uma descrição completa de como realizar a atividade, incluindo todos os passos necessários e dicas úteis, seu objetivo central

⁵ <https://sites.google.com/alunos.utfpr.edu.br/produtoeducacional/atividade-do-arco-e-flecha>

⁶ <https://sites.google.com/alunos.utfpr.edu.br/produtoeducacional/atividade-das-roldanas>

é de investigar um sistema de roldanas móveis (ou também chamado de polias móveis), e o que acontece com a força peso de um objeto, conforme se aumenta o número de roldanas móveis no qual esse objeto está suspenso. Além disso, é fornecido detalhe sobre a coleta de dados realizada pelos alunos durante a atividade. O site também disponibiliza o artigo publicado no evento (Tonin; Giroti; Borssoi, 2022), o qual contém uma descrição abrangente da atividade, oferecendo aos interessados acesso a informações detalhadas sobre a mesma.

Figura 16 – Página da “Atividade do Deslocamento do carrinho”



Fonte: Autoria própria (2024).

A página "Atividade do Deslocamento do Carrinho"⁷ apresenta uma descrição completa de como realizar a atividade, incluindo todos os passos necessários e dicas úteis, seu objetivo central é investigar o que acontece com tempo de deslocamento de um carrinho, em uma rampa com vários ângulos de inclinações diferentes. Além disso, são fornecidos detalhes sobre a coleta de dados realizada pelos alunos durante a atividade. O site também disponibiliza o artigo publicado no evento (Tonin; Rosa; Borssoi, 2023), o qual contém uma descrição abrangente da atividade, oferecendo aos interessados acesso a informações detalhadas sobre a mesma.

Convidamos a todos os professores e as professoras que queiram desenvolver um trabalho semelhante ao apresentado nessa pesquisa, a fazerem uso do nosso Produto Educacional que estará disponível na íntegra, podendo ser acessado a qualquer momento no Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (RIUT).

⁷ <https://sites.google.com/alunos.utfpr.edu.br/produtoeducacional/atividade-deslocamento-do-carrinho>

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar esta dissertação, vamos retomar o objetivo geral do trabalho: investigar *como alunos do Ensino Médio desenvolvem a Análise de Modelos em atividades de Modelagem Matemática?* e os objetivos específicos: planejar e implementar atividades de Modelagem Matemática com alunos do Ensino Médio aliada com tecnologias digitais, analisar a contribuição da experimentação ao desenvolver atividades de Modelagem Matemática e Análise de Modelos e investigar como os alunos analisam e avaliam criticamente um modelo matemático.

A partir dos objetivos específicos, com a implementação da atividade de Modelagem Matemática, aliando tais atividades a recursos digitais, utilizando a experimentação no desenvolvimento da atividade e observando nuances de como os alunos analisam e avaliam criticamente modelos matemáticos a partir da Análise de Modelos e observando as três categorias de análise, *intervenção do professor, recursos utilizados e manipulação e experimentação*, foi possível responder o objetivo geral do trabalho.

De forma geral, foi possível perceber o entusiasmo dos alunos no desenvolvimento da atividade, pois do início ao fim da atividade assumiram uma postura investigativa, se tornando o sujeito ativo na construção do seu próprio conhecimento, trazendo assim significância para a categoria de pesquisa, *intervenção do professor*, evidenciando a importância de conduzir a atividade assumindo um papel de orientador, auxiliando para que os alunos realizassem suas próprias descobertas.

Enfatizamos também, a relevância da apresentação de recursos digitais, como, por exemplo, os utilizados na atividade analisada: os aplicativos *Protractor*, *Arduino Science Journal* e o *GeoGebra* em sala de aula ou no laboratório de informática. Reforçando assim, categoria de pesquisa *recursos utilizados*, pois o “novo” já instiga os alunos para investigarem suas funcionalidades e ainda, para passarem a dar outro significado às ferramentas que eles têm em mãos todos os dias, mas agora, com um viés pedagógico para auxiliar em suas formações (Niss; Blum, 2020).

Outro ponto, que podemos destacar é a experimentação, que desempenhou um papel crucial no desenvolvimento e na compreensão do fenômeno em investigação, reforçando mais uma vez a categoria de pesquisa, *manipulação e experimentação*. A experimentação permitiu que os estudantes identificassem padrões em dados, ajudando na formulação de conjecturas

matemáticas, pode ser usada para verificar a validade de resultados teóricos, ajudando a confirmar ou refutar hipóteses matemáticas. Em resumo, a experimentação em atividades de Matemática não apenas fortalece o entendimento teórico, mas também desenvolve habilidades práticas, intuição matemática e um entendimento mais profundo do fenômeno em estudo.

Quanto a análise do modelo criado pelo *GeoGebra*, os alunos avaliaram as potencialidades do modelo percebendo suas utilidades e limitações, podendo assim, agregar hipóteses ao modelo as quais não haviam considerado antes. Além de notarem que o modelo é válido apenas para o contexto em questão, pois apresentava inconsistências quanto à sua generalização. Como indicam Soares e Javaroni (2013), assim como Blomhøj e Niss (2021), tais constatações são cruciais para que os alunos percebam que um modelo tem limitações e pode ser refinado.

E a partir de todas essas constatações, vale destacar a sinergia existente percebida entre a Modelagem Matemática e Análise de Modelos, ambas alternativas pedagógicas se forem trabalhadas individualmente conforme apresentada por Almeida, Silva e Vertuan (2012), e Soares e Javaroni (2013), apresentam resultados interessantes, porém a sinergia entre elas enriquece ainda mais o estudo de um fenômeno, como buscamos representar na Figura 10 e na Figura 11.

De fato, podemos observar a partir da análise da atividade que diversas fases/etapas dessas alternativas pedagógicas facilitaram a compreensão sobre o problema pelos alunos, porque os alunos já haviam realizado a modelagem do fenômeno. Constatação essa já observada por Soares e Borba (2011, p. 231) que mencionam em seu trabalho a sinergia existente entre essas duas abordagens.

[...] a perspectiva de análise de modelos, considera o estudo de um ou mais modelos matemáticos já existentes de um fenômeno, com enfoque na análise do comportamento de suas soluções e da influência dos parâmetros neste comportamento, e o entendimento dos dados fornecidos pelo modelo com relação ao fenômeno, como ações do fazer modelagem (Soares; Borba, 2011, p. 231).

Apesar da proposta inicial da Análise de Modelos visar a análise de modelos matemáticos já prontos, sem que todo o processo de modelagem necessariamente seja vivenciado pelos alunos, entendemos que esta abordagem vem complementar a atividade de Modelagem Matemática. Na investigação que discutimos aqui, os alunos tiveram a oportunidade de refletir mais sobre os dados do experimento e resgatar ou aprender sobre conceitos da Física que mencionaram inicialmente ao se depararem com um modelo clássico apresentado pelo professor.

A partir dessa sinergia os alunos puderam desenvolver um modelo matemático, analisá-lo, compará-lo e refiná-lo, proporcionando assim a possibilidade de estudar novos conteúdos matemáticos e dar mais significado a matemática aprendida em sala de aula.

A análise dessa atividade, combinada com a reflexão sobre a implementação das duas primeiras atividades que compõem o Produto Educacional, desempenhou um importante papel na condução do processo de estruturação da versão final do Produto Educacional. Essa progressão sequencial nas atividades de pesquisa fortalece nosso compromisso com a investigação acadêmica, fornecendo possibilidade para explorar as interseções entre a Análise de Modelos e a Modelagem Matemática. O aprendizado contínuo dessas experiências contribui para o desenvolvimento e aprimoramento constante de nossa abordagem pedagógica, ampliando a pesquisa em Educação Matemática.

A análise permitiu uma compreensão aprofundada dos desafios encontrados, das oportunidades identificadas e dos ajustes necessários para aprimorar a qualidade do produto em questão.

Também, queremos mencionar que, se as três atividades fossem desenvolvidas com os mesmos alunos, poderíamos inferir sobre a progressão dos alunos quanto a análise crítica dos modelos, enquanto investigadores de uma atividade para outra. Mas, devido à condição de professor contratado como PSS⁸, o pesquisador não teve a possibilidade de escolher quais turmas pegaria em 2023, quando se deu a coleta de dados da pesquisa.

Por fim, deixamos em aberto uma possível direção para estudos futuros, que consiste em investigar qual a relação e contribuição da simulação em atividades que se utilizam da Modelagem Matemática com Análise de Modelos. Visto que a simulação tem uma forte conexão com a Modelagem Matemática, Análise de Modelos, tecnologias digitais e experimentação.

⁸ Processo Seletivo Simplificado do Paraná

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. **Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes?/Mathematical Modeling–What We’re Dealing with: Different Models or Different Languages?**. Acta Scientiae, v. 14, n. 2, p. 215-239, 2012.
- ALMEIDA, L.; DA SILVA, K. P.; BORSSOI, A. **Um estudo sobre o potencial da experimentação em atividades de modelagem matemática no ensino superior**. Quadrante, v. 30, n. 2, p. 123-146, 2021.
- ABADA, S. *et al.* **Safety Focused Modeling of Lithium-ion Batteries: A review**, Journal of Power Sources, França, Dezembro, 2015.
- AGUIAR, G. N.; FIGUEIREDO, T. B.; SOUSA, B. N. P. A. **Modelagem Matemática na Educação Básica: um estudo a partir dos produtos educacionais da região Sul do Brasil**. Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática, v. 7, n. 3, p. 404-420, 2023.
- ARAÚJO, J. de L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos**. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2002.
- ARAKI, P. H. H. **Atividades experimentais investigativas em contexto de aulas com Modelagem Matemática: uma análise semiótica**. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. 2020.
- BASSANEZZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3 ed., São Paulo: Contexto, 2010.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70. Tradução de: Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro, 2011.
- BARBOSA, J. **Modelagem Matemática: Concepções e Experiências de Futuros Professores**. Doutorado. Universidade Estadual Paulista, 2001.
- BIRTA, L. G. et al. **The Modelling and Simulation Process**. Modelling and Simulation: Exploring Dynamic System Behaviour, p. 21-58, 2007.
- BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.
- BOGDAN, ROBERT C.; BIKLEN, SARI KNOPP. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORSSOI, A. H. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Londrina (UEL), 2013.

BORGES, P. A.; TONIAZZO, N. A.; DA SILVA, J. C. **Equilíbrio no espaço: experimentação e modelagem matemática**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, p. 2309.1-2309.6, 2009.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino aprendizagem**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

BLOMHØJ, M.; NISS, M. **Descodificar, compreender e avaliar modelos matemáticos existentes: o que é que isso requer?**. Quadrante, 30(2), 9–36, 2021.

CARREIRA, S.; BAIOA, A. M. **Students modelling routes in the context of object manipulation and experimentation in mathematics**. p. 211 – 220, 2011.

CARREIRA, S. **Modelação Matemática e simulação no contexto escolar: conexões entre mundos**. In Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (pp. 47-62), 2019.

CARREIRA, S.; BAIOA, A. M.; ALMEIDA, L. M. W. **Mathematical models and meanings by school and university students in a modelling task**. AIEM Avances de Investigación en Educación Matemática, v. 17, p. 67 – 83, 2020.

CAPRA, F. **O Tão da Física: um paralelo entre a física moderna e o misticismo oriental**. São Paulo: Cultrix, 1983.

CARVALHO, F. J. R.; KLÜBER, T. E. **Modelagem Matemática e programação de computadores: uma possibilidade para a construção de conhecimento na educação básica**. EMP, São Paulo, v. 23, n.1, p.297-323, 2021.

CAMPOS, L. S.; ARAÚJO, M. S. T. de. **A Modelagem Matemática e a Experimentação aplicadas ao ensino de Física**. In: Encontro nacional de pesquisa em educação em ciências, VII, 2009, Florianópolis. p. 1 – 12, 2009.

EMDEN, M.; SUMFLETH, E. **Assessing students' experimentation processes in guided inquiry**. International journal of science and mathematics education, v. 14, p. 29-54, 2016.

ESPINOZA, A. M.; **Ciências na escola: novas perspectivas para a formação dos alunos**. São Paulo: Ática, 2010.

GIBAS, C.; JAMBECK, P. **Desenvolvendo bioinformática: ferramentas de software para aplicações em biologia**. Rio de Janeiro: Campus, 2001.

GOMES, R. **Análise e interpretação de dados de pesquisa qualitativa**. Pesquisa social: teoria, método e criatividade, 2007.

GREEFRATH, G. **Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling—Overview.** Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA14, p. 301-304, 2011.

HEINEN, C. A.; REHFELDT, M. J. H; NEIDE, I. G.; BÖCKEL, W. J; KÖNIG, R. I. **Atividades experimentais e modelagem matemática: uma prática realizada com alunos do ensino no médio politécnico.** Revista Caderno Pedagógico, Lajeado, v. 13, n. 1, p. 139 – 155, 2016.

KAPCZYNSKI, E. R.; BUENO, B. H. C.; SOARES, D. S. **Construção do conceito de integral definida em um ambiente de análise de modelos com uso de tecnologias digitais.** Revista BOEM, v. 11, p. e0004-e0004, 2023.

MINAYO, M. C.; DESLANDES, S. F.; GOMES, R. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade.** Editora Vozes Limitada, 2001.

MODELO. In: MICHAELIS, **Dicionário Online de Português.** Editora Melhoramentos Ltda, 2024. Disponível em: < <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/>>. Acesso em: 24/02/2024.

NISS, M.; BLUM, W. **Learning and Teaching of Mathematical Modelling.** Routledge, England, 2020.

POLLAK, H. O. **The interaction between mathematics and school subjects. In: new trends in mathematics teaching IV.** Paris: UNESCO, p. 232-248, 1979.

PEREIRA, R. D. S.; SEKI, J. T.; PALHARINI, B. N.; COELHO, J.; SILVA, A. C.; DAMIN, W.; MARTINS, B. **Modelagem Matemática e Tecnologias Digitais Educacionais: Possibilidades e Aproximações por meio de uma Revisão Sistemática de Literatura.** RENCIMA - Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v. 8, n. 2, p. 80-94, 2017.

ROCHA, R. A. R. **Uma análise semiótica da comunicação em atividades de Modelagem Matemática com experimentação.** Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. 2021.

SEPÚLVEDA, E.; GONZÁLEZ-GÓMEZ, D.; E VILLA-OCHOA, J.A. **Analysis of a mathematical model: opportunities for the training of food engineering students.** Mathematics, 8, 1339, 2020.

SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A. **Modelagem matemática e tecnologias digitais: uma aprendizagem baseada na ação.** Educação Matemática Pesquisa, v. 18, n. 1, p. 421-446, 2016.

SILVA, A. D. P.; et al. **Modelagem matemática e tecnologias digitais para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.** Tese de Doutorado. Universidade Federal do Oeste do Pará, 2019.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. **Análise de Modelos: possibilidades de trabalho com Modelos Matemáticos em sala de aula.** In: Borba, M C; Chiari, A (Org). Tecnologias Digitais e Educação Matemática, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

SOARES, D. S.; BORBA, M. C. **Fenômeno Biológico, Sistema Dinâmico e Noções de Cálculo I: uma proposta.** In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Londrina: Eduel, 2011. p.227-247.

SOUSA, Emerson Silva de. **Análise de modelos como um método de ensino de matemática na educação básica.** Revista Práxis Educacional, v. 17, n. 45, p. 316-337, 2021.

SEED, **Prova paraná, o que é?** 2024. Disponível em:
<https://www.educacao.pr.gov.br/prova_parana> Acesso em: 10 fev. de 2024

TONIN, E. C.; BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P. **Modelagem Matemática em um Contexto Interdisciplinar: o lançamento oblíquo utilizando arco e flecha.** V In: IX Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, 2022, União da Vitória. Anais do IX Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática. União da Vitória: SBEM, 2022.

TONIN, E. C.; GIROTI, N. I.; BORSSOI, A. H. **Modelagem Matemática e Análise de Modelos a partir de uma atividade sobre Sistemas de Polias.** XVI Encontro Paranaense de Educação Matemática, Foz do Iguaçu, 2022.

TONIN, E. C.; ROSA, E. A.; BORSSOI, A. H. **Modelagem Matemática e Análise de Modelos no estudo da rampa inclinada no Ensino Médio.** XII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, Porto Alegre, 2023.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática.** Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

WARD, H.; RODEN, J.; HEWLETT, C.; FOREMAN, J. **Ensino de Ciências.** 2 ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

YAMAMOTO, K.; FUKU, L. F. **Física para o Ensino Médio**, vol. 1: mecânica. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA PESQUISA

Senhora diretora,

Eu, Eduardo Cesar Tonin, mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Londrina/Cornélio Procópio, venho por meio desta solicitar a sua autorização para a realização da pesquisa intitulada “Análise de Modelos em Atividades de Modelagem Matemática: Estratégias e Impacto no Ensino Médio”, a ser conduzida nesta escola.

O objetivo geral do trabalho admite-se em investigar *como alunos do Ensino Médio desenvolvem a Análise de Modelos em atividades de Modelagem Matemática?*

Na oportunidade, solicitamos autorização para que realize a pesquisa através de coleta de dados provenientes de observação, registros escritos e audiovisuais. Queremos informar que o caráter ético desta pesquisa assegura a preservação da identidade das pessoas participantes, comprometendo-nos com o anonimato.

Agradecemos vossa compreensão e colaboração no processo de desenvolvimento desta pesquisa. Em caso de dúvida entrar em contato com a orientadora da pesquisa Adriana Helena Borssoi pelo e-mail: adrianaborssoi@utfpr.edu.br

Jataizinho, ____ de _____ 2023

.....
Diretora do Estabelecimento de Ensino

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu _____

responsável pelo aluno (a) _____
autorizo sua participação na pesquisa intitulada “Análise de Modelos em Atividades de Modelagem Matemática com alunos do Ensino Médio”, sob responsabilidade do discente Eduardo Cesar Tonin, sob orientação da docente Adriana Helena Borssoi. Declaro que permito que obtenha fotografia, filmagem ou gravação no decorrer das atividades em sala de aula, para fins de pesquisa científica. Autorizo que o material e as informações obtidas possam ser utilizados parcial ou integralmente, sem restrições de prazos, desde a presente data, para a apresentação na presente pesquisa ou em publicações, seminários, congressos ou periódicos científicos, sem a identificação por nome em qualquer via de publicação ou uso. Declaro que fui informado acerca da investigação que pode ser desenvolvida.

ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Análise de Modelos em atividades de Modelagem Matemática com alunos do Ensino Médio
Título do Produto/Processo Educacional	Atividades de Modelagem Matemática com Análise de Modelos para o Ensino Médio
Autores do Produto/Processo Educacional	Discente: Eduardo César Tonin
	Orientador/Orientadora: Adriana Helena Borssoi
	Outros (se houver): - não há.
Data da Defesa	26 de abril de 2024.

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u> Linhas de Pesquisa do PPGMAT: <i>L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático</i> (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); <i>L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para	() Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (#) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u> A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	() PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. () PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (#) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e /tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). () PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. <u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u>	() Local () Regional () Nacional (#) Internacional Justificativa (<i>obrigatória</i>): O fato de o produto educacional ficar disponível a partir do repositório institucional da UTFPR, na Web, garante seu amplo alcance, nacional e internacionalmente.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u>	() PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (#) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.

Área impactada <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u>	☐ Econômica; ☐ Saúde; ☐ Ensino; ☐ Cultural; ☐ Ambiental; ☐ Científica; ☐ Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. <u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u>	☐ O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. ☐ A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. ☐ Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. ☐ Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	☐ PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). ☐ PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ☐ PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
Adriana Helena Borssoi	UTFPR
Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa - UENP	UENP
Karina Alessandra Pessoa da Silva	UTFPR