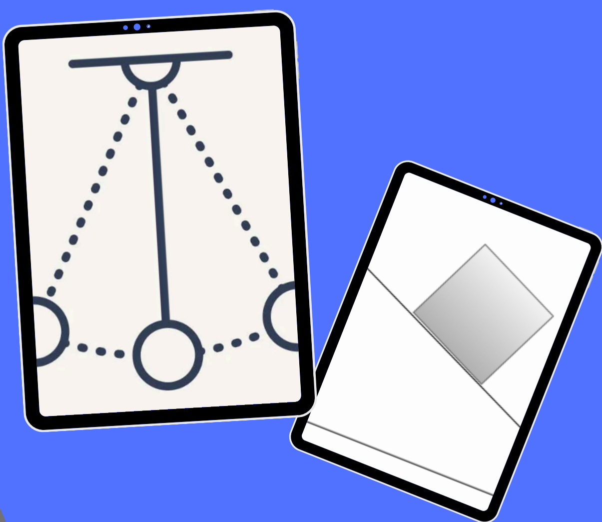
ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

GEPMIT
Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática, Investigação Matemática e Tecnologias

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM ANÁLISE DE MODELOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

MATHEMATICAL MODELING ACTIVITIES WITH ANALYSIS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION MODELS



Nabila Iasbik Giroti
Adriana Helena Borssoi

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

NABILA IASBIK GIROTI

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM ANÁLISE DE MODELOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

MATHEMATICAL MODELING ACTIVITIES WITH ANALYSIS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION MODELS

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campi Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Adriana Helena Borssoi

Londrina
2024

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

NABILA IASBIK GIROTI

MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA ANÁLISE DE MODELOS: INDÍCIOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO NO ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 19 de Abril de 2024

Dra. Adriana Helena Borssoi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Debora Da Silva Soares, Doutorado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Ufrgs)

Dr. Henrique Rizek Elias, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

IMPORTANTE

PARA GARANTIR A INTERATIVIDADE DESTE PRODUTO EDUCACIONAL, SUGERIMOS ACESSAR O LINK DO CANVA:

Ou acesse pelo QrCode:

SCAN ME!

CONHEÇA TAMBÉM A DISSERTAÇÃO QUE TEVE COMO UM DOS RESULTADOS ESTE PRODUTO:

SCAN ME!

https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/211

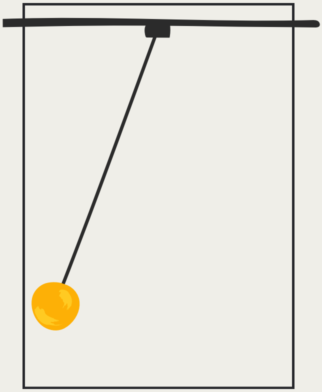
Este Produto Educacional está estruturado em:

- APRESENTAÇÃO;
- PARTE 1: Modelo Matemático, Modelagem Matemática, Análise de Modelos; Pensamento Matemático Avançado;
- PARTE 2: Informações Gerais para as Atividades Desenvolvidas; Planejamento das Atividades;
- PARTE 3: Plano Inclinado e Pêndulo Simples;
- PARTE 4: Potenciais das atividades para mobilização do PMA; Recursos Digitais;
- PARTE 5: Desenvolvimento do grupo - Plano Inclinado e Pêndulo Simples;
- PARTE 6: Considerações e Referências.

APRESENTAÇÃO

Este material foi concebido para apresentar atividades de Modelagem Matemática com o intuito de propiciar o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado dos alunos. O enfoque é na análise de modelos clássicos da literatura, sobretudo aqueles pertinentes aos cursos de Engenharia. Este Produto é destinado a professores de ensino superior.

É importante ressaltar que a coleta de dados que embasou a criação deste produto foi conduzida por meio da aplicação de atividades em um ambiente presencial, com interatividade remota. Essas atividades estavam em constante aprimoramento e desenvolvimento desde o primeiro semestre de 2022, quando foram iniciadas durante o estágio de docência da autora, permitindo uma imersão no contexto educacional pertinente. Até o momento atual da divulgação deste Produto, duas atividades foram aplicadas entre duas a três vezes em turmas distintas de Equações Diferenciais Ordinárias. Os modelos que foram incluídos no Produto Educacional englobam o modelo do Plano Inclinado e o modelo do Pêndulo Simples.



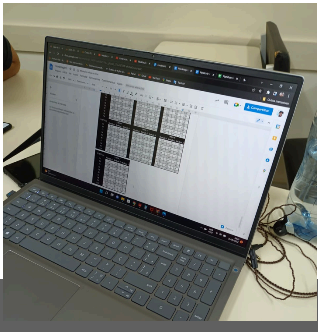
LET'S TALK ABOUT

PARTE 1

MODELO MATEMÁTICO

Como o Modelo Matemático é entendido neste texto? Trazemos nosso entendimento amparado na literatura sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática.

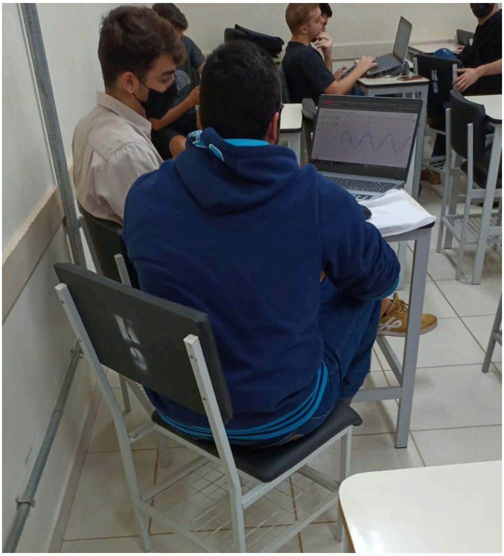
Consideramos que modelos, especialmente os matemáticos, são simplificações da realidade feitas para descrever características ou dados de diferentes maneiras. Em algumas situações, usamos modelos para tornar a realidade mais compreensível, principalmente quando ela é complexa. Esses modelos simplificam muitas situações, tornando a análise e compreensão de sistemas complexos mais acessíveis.

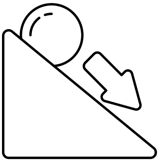


MODELO MATEMÁTICO

Modelos Matemáticos são definidos como conjuntos de símbolos e relações matemáticas que representam um fenômeno ou problema real.

De acordo com Maaß (2010, p. 287), um modelo é uma representação simplificada da realidade, com uma intenção específica, considerando alguns aspectos da realidade em questão.

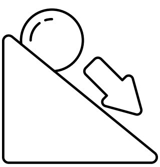




MODELO MATEMÁTICO

Segundo Bassanezi (1994, p. 40), o uso de Modelos Matemáticos no ensino não apenas amplia o conhecimento, mas também estrutura a forma de pensar e agir. O autor destaca a Modelagem Matemática como uma abordagem crucial para aplicar a matemática em problemas do mundo real, enfatizando a importância de traduzir situações reais em termos matemáticos.

E, a partir disso, é importante compreendermos o papel da Modelagem Matemática, que se caracteriza, por vezes, como uma atividade que busca a solução de determinados problemas.



MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática aborda a solução de problemas do mundo real aplicando conceitos matemáticos. Os alunos são estimulados a formular perguntas, coletar dados, criar modelos matemáticos, analisar resultados e apresentar conclusões. Esse processo proporciona o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, pensamento crítico e raciocínio matemático, enquanto destaca a presença da matemática em situações práticas.

A Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica que tende a despertar o interesse dos alunos por tópicos matemáticos desafiadores. Ao adotar a Modelagem em sala de aula, os professores oferecem aos alunos a chance de explorar conceitos matemáticos reais de forma envolvente, podendo trazer mais significado à aprendizagem.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática é uma abordagem que explora situações do cotidiano, envolvendo os alunos ativamente na construção do conhecimento ao investigarem questões do mundo real. Essa prática utiliza a Matemática como ferramenta para resolver problemas reais, destacando a conexão da Matemática com o cotidiano e a necessidade de currículos, especialmente aqueles que são voltados para as Engenharias, contextualizados que estabeleçam ligações entre a matemática, outras áreas de conhecimento e do contexto de vida dos envolvidos.

Com base em Borssoi e Almeida (2004), uma atividade de modelagem tende a exercer influências sobre a disposição do aluno para aprender, incentivando-o a se engajar de forma mais ativa na construção de seu conhecimento. Já para Almeida, Silva e Vertuan (2016), a modelagem como uma alternativa pedagógica para o professor de matemática, pode ser compreendida como:

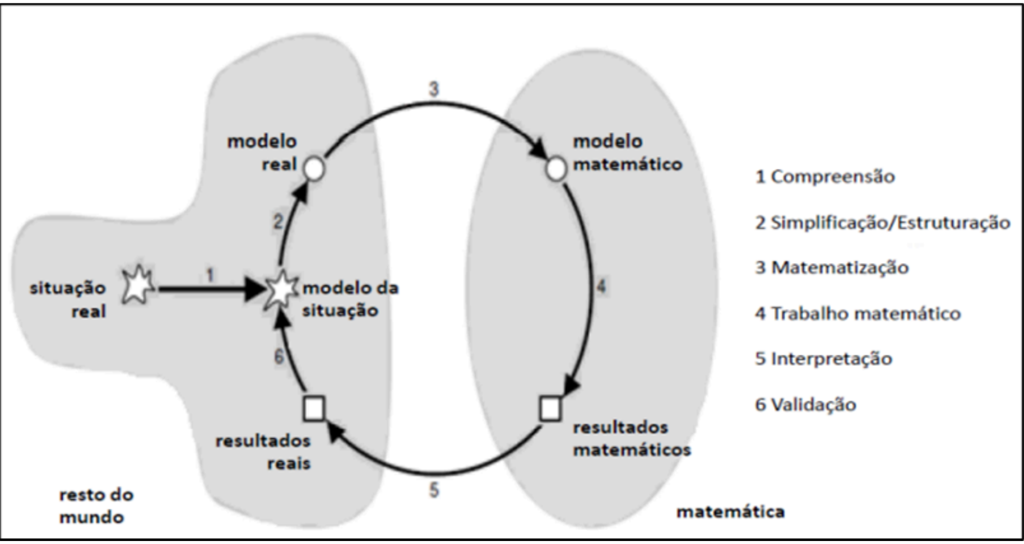
MODELAGEM MATEMÁTICA

[...] uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Nesse sentido, relações entre realidade (origem da situação inicial) e matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados), servem de subsídio para que os conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam adicionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático (Almeida; Silva; Vertuan, 2016, p. 12).

MODELAGEM MATEMÁTICA

Concordamos com o ciclo de Blum e Leiβ (2005), pois, ele pode ser um orientador da ação do professor.
Observemos o Ciclo de Modelagem Matemática adotado neste estudo:

FIGURA 1 – CICLO DE MODELAGEM MATEMÁTICA DE BLUM E LEIB (2005)



FONTE: BLUM E LEIB (2005)

MODELAGEM MATEMÁTICA

O Ciclo subentende a presença de uma atividade de Modelagem Matemática atribuída ao estudante, em um contexto de sala de aula.

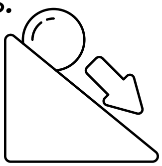
O diagrama dá atenção especial à necessidade do modelador de entender a tarefa antes de simplificá-la e estruturá-la, primeiro, em um modelo de situação - ou seja, uma imagem mental das características fundamentais da situação e seus elementos essenciais - e, segundo, em um modelo real, todos processos cognitivos referentes ao domínio da realidade. Por fim, o resultado de uma tarefa definida de fora para dentro é ampliado pela presença da última etapa do ciclo, "apresentar" o trabalho a um público ou destinatário, por exemplo, uma classe ou um professor (Niss; Blum, 2020, p. 17).

MODELAGEM MATEMÁTICA

Cada etapa, de modo resumido, pode ser compreendida como:

1. *Compreensão: Seleciona uma situação oriunda da realidade.*
2. *Simplificação/Estruturação: Delimita essa situação para ser estudada.*
3. *Matematização: A realidade simplificada será representada por um modelo.*
4. *Trabalho matemático: Resolver o modelo usando as ferramentas da matemática.*
5. *Interpretação: Discriminação das variáveis matemáticas em torno do modelo.*
6. *Validação: Verifica a coerência da resposta do modelo com a realidade e pode levar o modelador a refazer o ciclo.*

Associado ao fazer Modelagem Matemática, outro conceito fundamental que queremos evidenciar é o de Análise de Modelos.



ANÁLISE DE MODELOS

Conforme Soares e Javaroni (2013), a Análise de Modelos constitui uma abordagem fundamentada em uma série de questões que direcionam a aplicação de modelos matemáticos em contextos educacionais. O propósito dessa abordagem é examinar um fenômeno específico dentro de uma área de estudo determinada, visando introduzir novos conceitos matemáticos aos alunos. O modelo utilizado nesse processo pode ser tanto um modelo clássico reconhecido na literatura quanto um modelo derivado de pesquisas recentes, ainda não amplamente reconhecido.

As autoras sugerem que a Análise de Modelos deve contemplar as seguintes etapas:

ANÁLISE DE MODELOS

> *[...] (i) estudo do fenômeno em questão; (ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo; (iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno; (iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas; (v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno; (vi) análise das limitações do modelo (p. 199).*

Essas etapas fornecem um roteiro abrangente para a análise e interpretação de modelos matemáticos em relação aos fenômenos que pretendem representar. Elas ajudam a compreender as implicações do modelo e sua aplicabilidade no contexto investigado. De modo mais específico, cada uma dessas etapas se refere à:

ANÁLISE DE MODELOS

-Estudo do fenômeno em questão: Nesta etapa, o foco está na compreensão do fenômeno que se deseja modelar. Isso envolve a coleta de dados, observações e informações relevantes sobre o fenômeno em estudo. O objetivo é adquirir um conhecimento sobre como o fenômeno se manifesta na realidade.

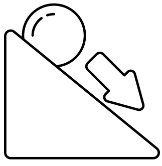
-Estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo: Aqui, é necessário identificar as hipóteses que foram utilizadas para construir o modelo matemático. Isso inclui entender as simplificações e pressupostos feitos para tornar o modelo viável.

-Entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno: Cada termo no modelo matemático representa uma parte do fenômeno em estudo. Nesta etapa, é crucial interpretar o significado de cada termo em relação ao fenômeno real. Isso ajuda a relacionar as equações matemáticas com o comportamento do fenômeno.

ANÁLISE DE MODELOS

-Estudo do comportamento das soluções do modelo: O foco está nas soluções do modelo matemático. É importante entender como essas soluções se comportam e como esse comportamento se relaciona com o fenômeno real e as hipóteses do modelo.

-Estudo da influência dos parâmetros do modelo nas soluções: Os parâmetros em um modelo matemático desempenham um papel fundamental na modelagem. Nesta fase, é necessário examinar como a variação dos parâmetros afeta o comportamento das soluções do modelo. Isso permite fazer previsões e entender como intervenções ou mudanças nos parâmetros afetam o fenômeno.



ANÁLISE DE MODELOS

-Análise das limitações do modelo: Por fim, é importante reconhecer as limitações do modelo. Nenhum modelo matemático é perfeito, e compreender suas limitações é essencial para interpretar os resultados de maneira adequada. Isso envolve reconhecer as simplificações feitas, as condições em que o modelo é válido e as situações em que pode não ser aplicável.

Agora, passamos aos conceitos acerca do Pensamento Matemático Avançado, que é parte do embasamento teórico.

PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

O Pensamento Matemático Avançado (PMA) abrange um amplo conjunto de habilidades cognitivas empregadas para compreender, explorar e aplicar conceitos matemáticos complexos em contextos educacionais. Essa capacidade é essencial tanto em níveis mais avançados de ensino, como no Ensino Superior, quanto em fases iniciais de aprendizado.

A essência do PMA está intimamente conectada aos processos cognitivos que fundamentam o conhecimento matemático, sendo a representação e a abstração conceitos-chave nesse contexto. Esses elementos desempenham um papel crucial na maneira como os indivíduos aprendem, compreendem e aplicam conceitos matemáticos.

PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Consideremos aqui a análise da abordagem de Dreyfus (1991), que concebe o PMA como um processo composto por diversos subprocessos de aprendizagem que interagem entre si. Dreyfus ressalta que a representação, visualização, classificação, conjectura, análise, síntese, generalização e abstração são elementos cruciais, o que podemos considerar, serem intrínsecos à Análise de Modelos, e isto torna essa abordagem de particular relevância.

Compreender o PMA requer uma análise detalhada, conforme proposto por Dreyfus (2002). O PMA é uma complexa estrutura de processos cognitivos que envolvem:

PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

-Representação Simbólica: Isso envolve a capacidade de expressar objetos ou processos matemáticos por meio de símbolos, notações ou qualquer outra forma que permita representação visual ou abstrata. Esses símbolos são usados como ferramentas para manipular conceitos matemáticos.

-Representação Mental: Nesse estágio, o objetivo é representar mentalmente um objeto ou processo matemático, incorporando suas características e propriedades. Isso inclui a capacidade de sintetizar e resumir conhecimentos complexos para se concentrar em detalhes específicos, criando uma espécie de "objeto mental".

-Visualização: A visualização é a criação de imagens mentais para representar conceitos matemáticos, tornando abstrações mais concretas e compreensíveis.

PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

-Mudança de Representações e Alternância Entre Elas: Aqui, os indivíduos devem ser capazes de usar e alternar entre várias representações de um mesmo conceito, adaptando-se conforme a necessidade. Isso implica em saber quando e como aplicar diferentes processos de representação em um problema prático.

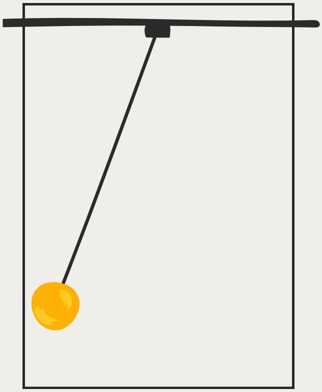
-Modelação: O processo de modelação envolve a criação de estruturas ou teorias matemáticas que imitem as características de objetos ou situações físicas. O resultado é um modelo que reflete uma estrutura mental.

-Generalização: A generalização implica em derivar ou induzir informações a partir de dados específicos, com o objetivo de identificar padrões e expandir a aplicação dos conceitos em domínios mais amplos.

PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Em suma, o Pensamento Matemático Avançado abrange um amplo conjunto de habilidades cognitivas utilizadas para compreender, explorar e aplicar conceitos matemáticos complexos em contextos educacionais, sendo fundamental tanto em níveis mais avançados de ensino, como no Ensino Superior, quanto em estágios anteriores de aprendizado.

A seguir, apresentamos uma contextualização para a aplicação das atividades.



LET'S TALK ABOUT

PARTE 2

INFORMAÇÕES GERAIS PARA AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS:

Os estudantes que desenvolveram essas atividades já estavam familiarizados com as expressões "Modelagem Matemática" e "Modelo Matemático", pois haviam participado de outras atividades que seguiam a mesma abordagem. Além disso, eles já tinham tido contato com a problemática em questão durante a aula de Física.
Nessa ocasião, eles conduziram um experimento de laboratório, coletaram dados e os analisaram para compreender o movimento harmônico, além de estimar parâmetros como o valor da gravidade no laboratório de Física e o período do pêndulo. No entanto, a abordagem de Equações Diferenciais Ordinárias não havia sido incorporada à essa experiência anterior.

Em ambas as atividades, os alunos receberam orientações para expressar clareza na dedução do Modelo Matemático que descreve a Aceleração no Plano Inclinado e o Movimento que rege um Pêndulo Simples. Além disso, foram incentivados a desenvolver a Análise do Modelo sob a perspectiva teórica, aplicando os princípios das Equações Diferenciais Ordinárias. Eles também foram orientados a realizar interpretações e validar os resultados obtidos por meio da comparação com os dados experimentais.

INFORMAÇÕES GERAIS PARA AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS:

O E2 registrava a aceleração em cada inclinação por meio de um software. No E1, os alunos optaram por registrar o movimento do cavaleiro no trilho de ar em diferentes inclinações por meio de gravações em vídeos.

Figura 7 – (a) Trilho de ar e cavaleiro (E1) e (b) conjunto com acelerômetro (E2)

Fonte: arquivo das autoras

INFORMAÇÕES GERAIS PARA AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS:

Ao se estudar um Modelo Matemático, é importante que os estudantes abordem:

i)Estudo do fenômeno em questão;

ii)Estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo;

iii)Entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno;

iv)Estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas;

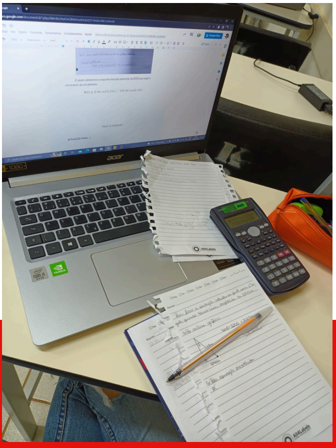
v)Estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno;

vi) *Análise das limitações do modelo.*

NA AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE SERÃO CONSIDERADOS OS SEGUINTES ASPECTOS:

- *Clareza na dedução do modelo matemático;*
- *Análise do modelo do ponto de vista teórico com abordagem de EDO;*
- *Interpretação e validação dos resultados com uso de dados experimentais;*
- *Como se deu o trabalho em grupo, inclusive participação individual.*

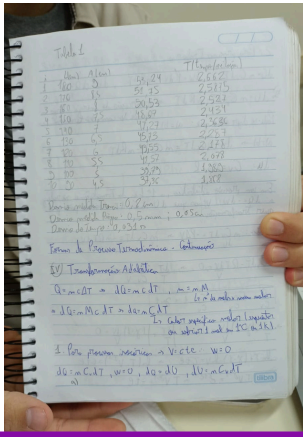
Ao se estudar um Modelo Matemático, na maioria das vezes se faz necessário a utilização de recursos digitais , adaptados a necessidades e objetivos de cada estudo.



ESTRUTURAÇÃO DAS ATIVIDADES

Um dos objetivos da realização das atividades se baseia em compreender como os alunos analisam um Modelo Matemático; inicialmente, buscamos identificar quais fases da Modelagem Matemática e da Análise de Modelos os estudantes realizaram e quais processos do Pensamento Matemático Avançado foram identificados.

Para tal, apresentamos o quadro que se refere a estruturação do Tratamento dos Resultados da Atividade Plano Inclinado (1) e do Pêndulo Simples (2) pautado nas fases de Modelagem Matemática de Almeida, Silva e Vertuan (2016).



ESTRUTURAÇÃO DAS ATIVIDADES

https://www.canva.com/design/DAGLa1PCHSo/M6YYKVD91fXKeD5KSqA3LQ/view?utm_content=DAGLa1PCHSo&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=editor

CLICK

Análise das Fases de Modelagem Matemática:

A Modelagem Matemática envolve a resolução de problemas do mundo real por meio da aplicação de conceitos matemáticos. Os alunos são incentivados a formular questões, coletar dados, criar modelos matemáticos, analisar resultados e apresentar conclusões. Esse processo oferece oportunidades para que os estudantes desenvolvam habilidades de resolução de problemas, pensamento crítico e raciocínio matemático, ao mesmo tempo em que demonstra como a matemática está presente em situações práticas.

Deste modo, apresentamos um Quadro com as Análises das Fases da Modelagem Matemática:

ESTRUTURAÇÃO DAS ATIVIDADES

Análise das Fases de Modelagem Matemática:

ATIVIDADE	FASES DA MODELAGEM MATEMÁTICA	CONTEMPLOU		
		Realizou	Realizou parcialmente	Não Realizou
1	Interação (MM1)			
	Matematização (MM2)			
	Resolução (MM3)			
	Interpretação e validação dos resultados (MM4)			
2	Interação (MM1)			
	Matematização (MM2)			
	Resolução (MM3)			
	Interpretação e validação dos resultados (MM4)			

A abordagem pedagógica conhecida como Análise de Modelos (Soares; Javaroni, 2013) se concentra na utilização de modelos matemáticos preexistentes, os quais são estudados, aplicados e utilizados como referência para a compreensão do conteúdo curricular. E, diante disso, apresentamos o Quadro que se refere a análise das fases de Análise de Modelos

ESTRUTURAÇÃO DAS ATIVIDADES

Análise das Fases de Análise de Modelos:

ATIVIDADE	FASES DA ANÁLISE DE MODELOS	CONTEMPLOU		
		Realizou	Realizou parcialmente	Não Realizou
1	Estudo do fenômeno em questão (AM1)			
	Estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo (AM2)			
	Estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas (AM3)			
	Estudo da influência da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar as influências de possíveis intervenções no fenômeno (AM4)			
	Análise das limitações do modelo (AM5)			

ESTRUTURAÇÃO DAS ATIVIDADES

https://www.canva.com/design/DAGLa1PCHSo/M6YYKVD91fXKeD5KSqA3LQ/view?utm_content=DAGLa1PCHSo&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=editor

CLICK

Análise das Fases de Análise de Modelos:

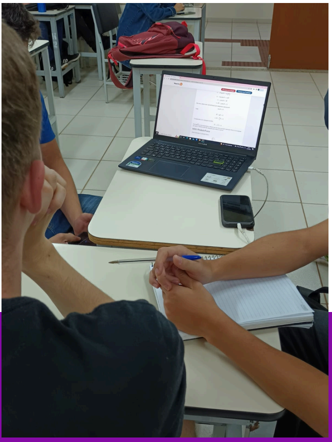
2	Estudo do fenômeno em questão (AM1)			
	Estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo (AM2)			
	Estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas (AM3)			
	Estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar as influências de possíveis intervenções no fenômeno (AM4)			
	Análise das limitações do modelo (AM5)			

ESTRUTURAÇÃO DAS ATIVIDADES

https://www.canva.com/design/DAGLa1PCHSo/M6YYKVD91fXKeD5KSqA3LQ/view?utm_content=DAGLa1PCHSo&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=editor

CLICK

O ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Superior têm suscitado preocupações, principalmente devido às dificuldades na compreensão de diversos tópicos, como ocorre na disciplina de EDO, conforme é apresentado por Domingos (2003). O autor destaca que grande parte dessas dificuldades têm origem na falta de compreensão de conceitos matemáticos que deveriam ter sido consolidados anteriormente. Além disso, dada a complexidade do conteúdo estudado no nível superior, surge a necessidade de recorrer ao PMA para a superação dessas dificuldades. Diante disso, apresentamos uma análise dos processos de PMA:



ESTRUTURAÇÃO DAS ATIVIDADES

https://www.canva.com/design/DAGLa1PCHSo/M6YYKVD91fXKeD5KSqA3LQ/view?utm_content=DAGLa1PCHSo&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=editor

CLICK

Análise dos Processos de Pensamento Matemático Avançado:

ATIVIDADE	PROCESSOS DO PMA	ETAPAS DO PMA	CONTEMPLOU		
			Apresentou	Apresentou parcialmente	Não Apresentou
1	Representação	Simbólica (PMA1)			
		Mental (PMA2)			
		Visualização (PMA3)			
		Mudança de representações e alternâncias entre elas (PMA4)			
		Modelação (PMA5)			
	Abstração	Generalização (PMA6)			
		Sintetização (PMA7)			
2	Representação	Simbólica (PMA1)			
		Mental (PMA2)			
		Visualização (PMA3)			
		Mudança de representações e alternâncias entre elas (PMA4)			
		Modelação (PMA5)			
	Abstração	Generalização (PMA6)			
		Sintetização (PMA7)			

ESTRUTURAÇÃO DAS ATIVIDADES

Ao final de cada atividade, é interessante que cada integrante do grupo responda a uma autoavaliação.

A autoavaliação aqui considerada foi elaborada com objetivo de incentivar o aluno a desenvolver a capacidade de organizar suas ideias, estruturar as atividades desenvolvidas, organizar seus pensamentos e relatar o que foi estudado. De acordo com Santos (2002, p. 2), “a autoavaliação é o processo por excelência da regulação, dado ser um processo interno ao próprio sujeito”. Bernardes e Miranda (2003, p. 21), consideram que “[...] com a autoavaliação, o aluno conquista a competência de pensar, a capacidade de exercer o controle das suas ações bem como de tomar decisões face às suas aprendizagens”.

ESTRUTURAÇÃO DAS ATIVIDADES

A relação a seguir é uma sugestão de questões que podem contribuir para a avaliação de cada participante do grupo.

- Você conhecia todos os integrantes do grupo?
- Houve integrantes que não interagiu com o grupo?
- De 0 a 10, como você avalia sua participação em grupo no desenvolvimento da atividade?
- Qual foi o Modelo Matemático proposto no estudo desta atividade?
- O grupo fez o estudo do modelo por meio de EDO? Relacionou os resultados do modelo teórico com os resultados experimentais?
- Considerando o experimento realizado em laboratório, você acredita que o modelo teórico estudado tem limitações?
- Houve aprendizagem de algo em especial que você gostaria de mencionar?
- Você acredita que poderiam ter sido implementadas ações para melhorar os resultados do trabalho em grupo? Quais?

ESTRUTURAÇÃO DAS ATIVIDADES

Para concluir, concordamos com Melo e Bastos quanto a autoavaliação:

> *Na autoavaliação o aluno participa de maneira mais ampla e ativa no processo de aprendizagem, uma vez que tem a oportunidade de analisar seu progresso nos estudos, suas atitudes e comportamentos diante do professor e colegas. (MELO E BASTOS, 2012, p. 192).*

Especialmente porque através dessa ferramenta, o professor conseguirá entender as dificuldades dos estudantes, ajudando-os a rever seu percurso e aprimorar sua prática em uma próxima atividade similar.

LET'S TALK ABOUT

PARTE 4

PLANO INCLINADO

O plano inclinado é um conceito importante e fundamental em diversas áreas, especialmente na física e na matemática, muito utilizado para compreender e analisar o movimento de objetos em um plano inclinado em resposta à gravidade. O plano inclinado é um exemplo clássico presente em diversas literaturas, que ilustra como forças, como a gravidade e a normal, atuam sobre um objeto. Isto porque quando determinado objeto é colocado em um plano inclinado, a gravidade no decorrer desse plano é responsável pelo movimento do objeto; o que permite estudar as forças envolvidas e as relações entre a inclinação do plano e a aceleração do objeto.

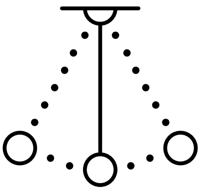
Pode-se compreender o plano inclinado como sendo representado por equações que descrevem as forças atuantes sobre o objeto, baseando-se em conceitos de trigonometria e cálculo, desenvolvendo equações que descrevem o movimento do objeto ao longo do plano inclinado, considerando fatores que interferem nos resultados, tais como massa, ângulo de inclinação e coeficientes de atrito.

Com base no plano inclinado, Galileu desenvolveu uma representação aproximada da queda livre dos corpos. Quando a inclinação era reduzida, a esfera descia de forma mais lenta. Ao aumentar a inclinação do plano, a esfera acelerava progressivamente, aproximando-se, assim, dos efeitos da queda livre à medida que o ângulo aumentava.

PLANO INCLINADO

Esse experimento que Galileu realizou se baseou em deixar uma esfera rolar por um sulco na superfície de uma tábua de madeira, medindo o tempo que a esfera levava para a percorrer diferentes distâncias. Ele cronometrou o tempo que a esfera percorria todo o comprimento da tábua, a metade desse percurso, um quarto, dois terços etc.
Ao refazer esse experimento cerca de cem vezes, Galileu observou que a queda livre dos corpos seguia um movimento uniformemente variado. A partir dessas observações, ele teria percorrido a relação entre a distância percorrida e o tempo de queda, formulando a lei da queda livre dos corpos, que foi descrita por Rival (1997).

Consideraremos que, planos inclinados são superfícies que possuem um ângulo com relação horizontal e, desta maneira, ao analisar modelos físicos, vamos levar em conta os efeitos da inclinação. De modo geral, como exemplo aplicado, podemos considerar rampas, esteiras rolantes, morros, escadas apoiadas etc, isto porque todas as superfícies possuem um ângulo em relação a horizontal.



PLANO INCLINADO

Ao se resolver problemas envolvendo o Plano Inclinado, é importante ter fundamentação e compreender aplicação de conceitos matemáticos e físicos, como trigonometria e leis fundamentais da física, como as Leis de Newton. O Plano Inclinado representa uma superfície inclinada em relação à horizontal.

Para resolver a EDO que rege o movimento de um objeto em um Plano Inclinado, precisamos considerar as equações do movimento em duas direções: uma ao longo do plano inclinado e outra perpendicular a ele. Consideraremos como posição do objeto ao longo do plano inclinado (ao longo do eixo da rampa) e como a posição perpendicular à rampa. A aceleração do objeto ao longo do plano inclinado é , e a aceleração na direção perpendicular à rampa é . A segunda lei de Newton nos dá as seguintes equações para o movimento do objeto:

$$F^{x}_{resultante} = m \, . \, a_x$$

$$F^{y}_{resultante} = m \, . \, a_y$$

PLANO INCLINADO

A componente da força peso ao longo do plano inclinado é:

$$F_{peso}^{x} = m \,.\, g \,.\, sen\ (\theta)$$

onde θ é o ângulo de inclinação da rampa, e a componente da força peso perpendicular à rampa é

$$F_{peso}^{y} = m \,.\, g \,.\, cos\ (\theta)$$

Então, as equações de movimento tornam-se:

$$m \,.\, a_x = m \,.\, g \,.\, sen\ (\theta)$$

$$m \,.\, a_y = m \,.\, g \,.\, cos\ (\theta)$$

Simplificando essas equações:

$$a_x = \ g \,.\, sen\ (\theta)$$

$$a_y = g \,.\, cos\ (\theta)$$

De modo geral, essas são as EDOs que descrevem as acelerações do objeto ao longo e perpendicular à rampa em função do ângulo de inclinação e da aceleração devido a gravidade. Mas, poderíamos resolvê-las por outros métodos, como o método de Euler: vamos supor que começamos com uma velocidade inicial e uma posição inicial . Então, podemos iterativamente calcular a velocidade e a posição em relação ao tempo :

$$v_{n+1} = v_n + a.\, d_t$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n.\, d_t$$

PLANO INCLINADO

Onde n é o índice de iteração.

Através desse método, obtém-se uma solução aproximada para a posição do objeto ao longo do tempo. Concluindo que, quanto menor for a intervalo de tempo, mais precisa será a solução, mas também mais cálculos serão necessários.

Ainda, vale considerar que, a EDO que descreve a aceleração de um objeto em um plano inclinado em função do Ângulo de inclinação e da aceleração, pode ser resolvida considerando que ângulo é uma função de t então podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$\frac{da}{dt} = g \cdot \frac{d \,.\, sen\,(\theta)}{dt}$$

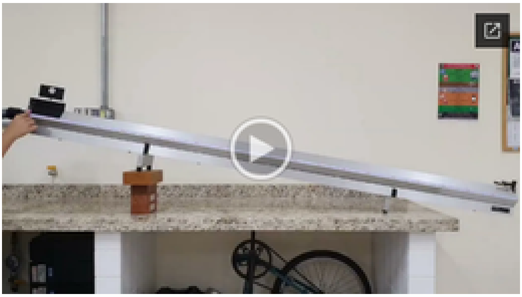
Para resolver essa EDO, precisamos de uma relação entre θ e t. De modo geral, essa relação é dada ou pode ser deduzida a partir das condições iniciais ou das leis físicas que regem esse sistema. Se tivermos uma função θ(t), podemos substituí-la na equação acima e resolver a EDO resultante para encontrar a função a(t). Por exemplo, se θ(t) for uma função linear do tempo, digamos que θ(t) = ω . t, onde ω é uma constante angular, poderíamos substituir isso na equação e resolver.

PLANO INCLINADO

E, como um dos objetivos dessa atividade é realizar a análise do modelo da equação diferencial que descreve o Movimento de um Objeto sobre um Plano Inclinado, é desejável que os alunos realizem comparação dos resultados teóricos com os obtidos experimentalmente. Assim, disponibilizamos a gravação do experimento realizado com dois comprimentos de fio para quatro ângulos diferentes.

PLANO INCLINADO

Deste modo, apresentamos os vídeos expostos na pasta abaixo, que estão disponibilizados a seguir, de modo detalhado:



https://drive.google.com/file/d/1cpIb_LwEHvBmtYmM3j_HKy8W5Xnp6NRJ/view?t=1

INFORMAÇÕES GERAIS PARA AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS:

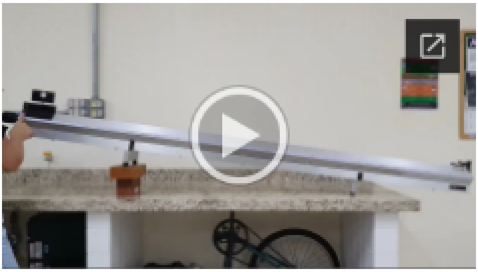
Para realizar a atividade de Modelagem Matemática, os alunos contaram com acesso a um laboratório de Física, onde tinham o apoio de um técnico e a disponibilidade da professora responsável pela turma para receber orientações quando necessário. Nesse ambiente, os estudantes tinham à disposição dois equipamentos que representavam um plano inclinado:

- Equipamento 1 (E1): Consistia em um trilho de ar com um corpo deslizante chamado de "cavaleiro" (Figura 7a).

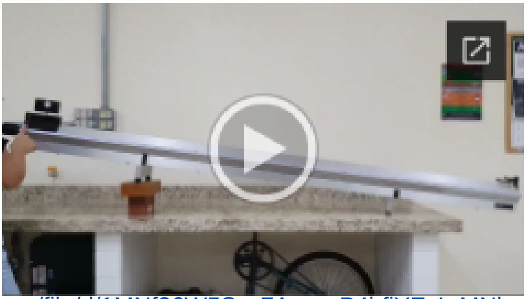
- Equipamento 2 (E2): Era composto por um conjunto que incluía uma rampa ajustável a diferentes ângulos de inclinação, à qual estavam acoplados um carrinho e um acelerômetro.

O E2 registrava a aceleração em cada inclinação por meio de um software. No E1, os alunos optaram por registrar o movimento do cavaleiro no trilho de ar em diferentes inclinações por meio de gravações em vídeos.

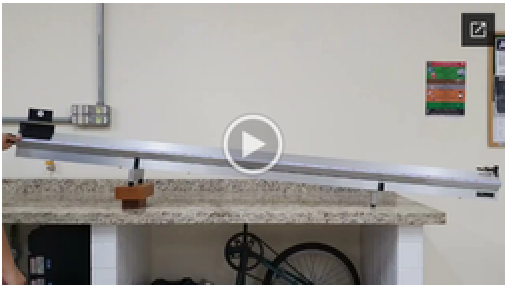
PLANO INCLINADO



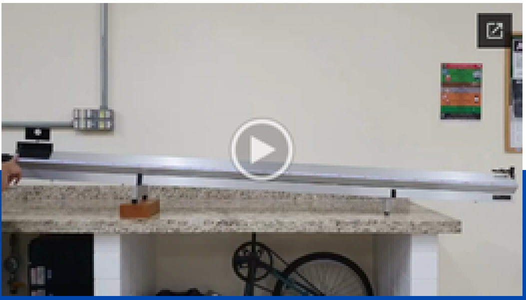
https://drive.google.com/file/d/1jPii4LRzHykc7W2VUGj4k9iaR_Op9GLI/view?t=1



https://drive.google.com/file/d/1MNf36W5Svv7AsssoP4i-fjYExLrMNlqa/view



https://drive.google.com/file/d/1cpIb_LwEHvBmtYmM3j_HKy8W5Xnp6NRJ/view?t=1



https://drive.google.com/file/d/1U_mL6CwCzSiAsKQatV40LdKOBsoJB4_0/view

PÊNDULO SIMPLES

Como objetivo deste experimento, vamos considerar: estudar o movimento oscilatório e da força peso, na determinação da aceleração da gravidade da Terra Em outras palavras, vamos estudar e modelar um pêndulo simples a partir de testes e simulações que serão realizadas a fim de equacionar esse comportamento.

Um pêndulo é um sistema físico composto por uma massa presa a um ponto fixo por meio de um fio ou haste, o que permite que a massa se mova livremente sob a influência da gravidade. Há diversos tipos de pêndulo, mas iremos trabalhar com o pêndulo simples, que é um caso específico no qual a massa está concentrada em um ponto e é capaz de oscilar em movimento linear no decorrer de uma trajetória considerada previsível.
Ainda, vamos considerar resolver analiticamente a EDO que rege o modelo do pêndulo simples, levando em conta o tempo e a modelagem de um pêndulo real, com auxílio de softwares que tendem a aproximar o modelo ao comportamento real do que desejamos. Em relação ao coeficiente de amortecimento, este diz respeito aos efeitos da resistência do ar sobre as peças do pêndulo, fazendo com que o mesmo pare seu movimento depois de um determinado tempo (Arnold et al., 2011).

PÊNDULO SIMPLES

Para compreendermos um pouco mais, inicialmente, consideremos o movimento de oscilação do pêndulo simples, que é dada por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Com T sendo período, L comprimento, g gravidade.

Segue que, a velocidade média será dada por:

$v = \frac{2L}{T}$ ou ainda $v = \frac{1}{\pi}\sqrt{Lg}$

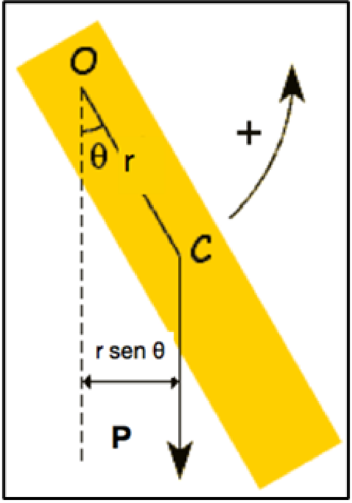
Mas, considerando agora um pêndulo simples, segue que o período de oscilação será:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}}$ então $v = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\pi}\sqrt{Lg}$

Agora, consideremos a energia mecânica do pêndulo simples para qualquer ângulo θ, abordando o conceito de conservação de energia, temos que:

$E = K + U$ onde $K = \frac{1}{2}mv^2$ e $U = mgL(1 - cos\theta)$

PÊNDULO SIMPLES



Disto, temos:

$$I_0\alpha = -r\ m\ g\ sen\theta$$

De tal maneira que, quando o corpo é deslocado de sua posição de equilíbrio, o torque restaurador vai ser proporcional ao produto da força (mg) pela distância s do ponto onde ela é aplicada (centro de massa) até o eixo. Logo, o τ se refere ao torque. Ainda, em que θ é o ângulo entre o braço de alavanca . Portanto, a equação de movimento é dada por uma EDO, onde:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{r\ m\ g}{I_0}\ sen\ \theta$$

E, retornando agora ao pêndulo simples, a sua EDO será:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{rmg}{I_0}\theta$$

E, então, é possível observar uma solução periódica, que é considerada um Movimento Harmônico Simples (MHS), dado por:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

PÊNDULO SIMPLES

e, também, a frequência natural será obtida por:

$$\omega_0^2 = \frac{r\,m\,g}{I_0}$$

O que nos leva agora ao período de oscilação. De modo geral, vamos considerar um período (T), que é, basicamente, o intervalo de tempo em que o pêndulo leva para completar sua trajetória, retornando ao ponto onde o mesmo partiu inicialmente, logo, o movimento é considerado periódico. Dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{r\,m\,g}}$$

A abordagem para a resolução analítica da EDO que rege o movimento de um Pêndulo Simples, portanto, envolve conceitos de seno e cosseno, a depender da escolha das coordenadas. A equação geral do pêndulo simples, considerando que o ângulo é θ e a aceleração devido à gravidade g, é dada por:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen(\theta) = 0,$$

onde l é o comprimento do pêndulo.

PÊNDULO SIMPLES

E, como um dos objetivos dessa atividade é realizar a análise do modelo da equação diferencial que descreve o movimento do Pêndulo Simples, é desejável que os alunos realizem comparação dos resultados teóricos com os obtidos experimentalmente. Assim, disponibilizamos a gravação do experimento realizado com dois comprimentos de fio para quatro ângulos diferentes.

PÊNDULO SIMPLES

Os vídeos expostos na pasta acima estão disponibilizados a seguir, de modo detalhado:

Para o Fio 1, com 1720mm, temos que:

FIO 1, ÂNGULO 1

https://drive.google.com/file/d/13iRwZqF0-dFjIFAIVnMTLXuA1HctYB-9/view

FIO 1, ÂNGULO 2

https://drive.google.com/file/d/15FcJ7WXjz7I9Zu0SApECKYsiv03flnqz/view

PÊNDULO SIMPLES

FIO 1, ÂNGULO 3

https://drive.google.com/file/d/1pZi7evDAlmd8BaoWjI3eHPFdiA_Hw8VF/view

FIO 1, ÂNGULO 4

https://drive.google.com/file/d/1if_3oXoJI-0Tcy9CatGzP1Irikg1WeGk/view

PÊNDULO SIMPLES

Considerando agora o Fio 2, com 1549mm:

FIO 2, ÂNGULO 1

https://drive.google.com/file/d/11x-dn6NT1n7moSq4rOYpgocMzuLD7Z5w/view

FIO 2, ÂNGULO 2

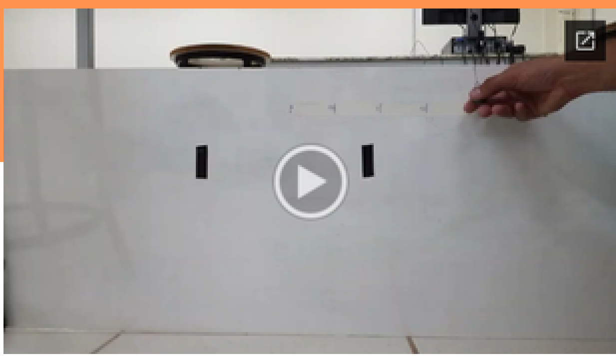
https://drive.google.com/file/d/11x-dn6NT1n7moSq4rOYpgocMzuLD7Z5w/view

PÊNDULO SIMPLES

FIO 2, ÂNGULO 3

https://drive.google.com/file/d/1Vm7kCSRGBJ0jjlvx7mC1IH8JrJMjiT78/view

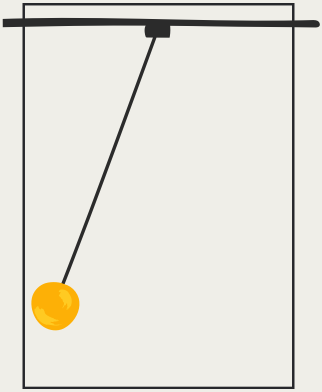
FIO 2, ÂNGULO 4



https://drive.google.com/file/d/1zVBuvnL2uG97fm2_reIwkklDkKjw4zxl/view

PÊNDULO SIMPLES

Observemos que, na Figura ao lado, a "esfera" acoplada ao fio, próxima ao piso, tem diâmetro de 13,1mm e a distância entre os dois pedaços de fita preta, entre os quais está o pêndulo, é de 24cm.



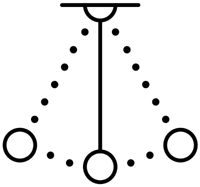
LET'S TALK ABOUT

PARTE 5

POTENCIAL DAS ATIVIDADES PARA MOBILIZAÇÃO DO PMA

No contexto das disciplinas de cursos de graduação, o propósito é que os alunos aprendam a resolver uma EDO, na maioria das vezes, analiticamente, por métodos de separação de variáveis, método de expansão em séries ou transformada de Laplace e tudo depende da complexidade do sistema que está sendo estudado.

Para desenvolver qualquer uma das duas atividades, fez-se necessário utilizar conceitos já estudados em outras disciplinas ou em níveis de escolaridade anteriores. Dreyfus (2002) afirma que os estudantes têm sido ensinados a partir do resultado final das atividades dos matemáticos, em vez de serem orientados pelos processos que os matemáticos seguiram para construir esses resultados. Segundo o autor, alcançar a compreensão de um objeto matemático não se resume simplesmente a definir e exemplificar um conceito abstrato.



POTENCIAL DAS ATIVIDADES PARA MOBILIZAÇÃO DO PMA

É desejável construir propriedades do conceito estudado por meio de deduções a partir da sua definição. Levando isso em consideração, buscamos orientar o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática na perspectiva da Análise de Modelos de modo a desenvolver ou mobilizar os aspectos do PMA no estudo de EDO, que podem ser evidenciados da seguinte maneira:

Manifestações do PMA nas duas atividades

PROCESSOS DO PMA	**BREVE EXPLICAÇÃO**	**QUANDO PODE MANIFESTAR**	
		PLANO INCLINADO	**PÊNDULO SIMPLES**
Simbólica	Expressar um objeto ou processo matemático através de símbolos, notações ou outras formas; e/ou manipular esses símbolos como se fossem objetos mentais.	Momento em que os alunos tendem a se basear em conceitos anteriormente estudados, como força, aceleração da gravidade, leis de Newton etc., a fim de representar um processo matemático por meio equação por meio de símbolos matemáticos.	Momento em que os alunos tendem a se basear em conceitos anteriormente estudados, como Torque, Segunda Lei de Newton, Força Peso etc., a fim de representar um processo matemático por meio equação por meio de símbolos matemáticos.

POTENCIAL DAS ATIVIDADES PARA MOBILIZAÇÃO DO PMA

Mental	Representar visualmente um objeto ou processo matemático juntamente com algumas de suas propriedades;	Compreender como atua a Força em um Plano Inclinado, o papel do ângulo de inclinação etc., através de representações mentais, pautando-se em propriedades anteriormente estudadas, utilizando-se representações mentais para se obter ou compreender uma equação.	Compreender como ocorre a decomposição de Forças de corpo livre a fim de escrever o modelo para um Pêndulo Simples, isto é, se utilizar de representações mentais para se obter ou compreender uma equação.
Visualização	Utilizar uma imagem para criar uma representação mental.	Após a compreensão de como atua a Força em um Plano Inclinado, saber ilustrar esse conceito, por exemplo, através de uma imagem, demonstra domínio sobre o processo em questão.	Após a compreensão de como ocorre a decomposição da Força Peso, saber ilustrar essa representação demonstra domínio sobre o processo em questão.
Mudança de representação e alternâncias entre elas	Ter múltiplas representações de um conceito e saber integrá-las de forma cooperativa, alternando quando apropriado para uma representação mais eficaz (auto regulação).	Momento em que o estudante consegue fazer inferência entre as equações, aplicando uma equação em outra etc. Por exemplo, quando o estudante realiza manipulações algébricas que envolve a segunda Lei de Newton e substitui a	Momento em que o estudante consegue fazer inferência entre as equações, aplicando uma equação em outra etc. Por exemplo, quando o estudante consegue perceber que a primeira derivada do Ângulo em relação ao tempo representa a

POTENCIAL DAS ATIVIDADES PARA MOBILIZAÇÃO DO PMA

Modelação	Desenvolver uma estrutura ou teoria matemática que represente as características de um objeto ou situação física. O modelo resultante também funciona como uma estrutura mental.	Momento em que o estudante busca conceitos estudados, a fim de se analisar matematicamente uma equação, trabalhando, por exemplo, com variáveis separáveis e métodos de integração para representar um valor geral para a velocidade, obtendo como modelo resultante uma solução particular para a EDO.	Momento em que o estudante busca conceitos estudados, como o de linearização, a fim de se obter uma EDO de segunda ordem e homogênea, o que representa uma estrutura mental.
Generalização	Derivar ou induzir informações para identificar pontos em comum e expandir os domínios de validade.	Momento em o estudante consegue escrever a EDO em sua forma normal e, ao resolvê-la, através de métodos específicos (como o de variáveis separáveis), obtém-se outras equações, que representam a expansão de domínios de validade.	Momento em o estudante consegue escrever a EDO em sua forma característica e observar, por exemplo, que os parâmetros encontrados serão compostos por números complexos. Chegando a uma solução geral na forma real, isto é, expandindo os domínios de validade.
Sintetização	Combinar ou compor partes de forma a criar um todo, uma entidade.	Por exemplo, quando os estudantes são capazes de inferir sobre como a equação da aceleração pode ser representada de outras maneiras, proporcionando ajustes interessantes para as equações requeridas, por meio de softwares, o que enfatiza importância de se combinar partes para formar um todo coeso.	Ao se obter soluções particulares para o modelo solicitado, realizar análise em softwares e compará-los com os obtidos algebricamente representam, a combinação de partes do trabalho a fim de formar o todo.

POTENCIAL DAS ATIVIDADES PARA MOBILIZAÇÃO DO PMA

Quando o estudante cria múltiplas representações para entender um conceito de forma abstrata, é essencial gerenciá-las de modo a estabelecer conexões entre elas. Isso implica integrá-las e, quando necessário, alternar entre essas representações para alcançar os objetivos desejados (Dreyfus, 2002). Isto porque a solução de problemas não apenas promove o aprimoramento dos processos de PMA dos estudantes, mas também é fundamental para o desenvolvimento de habilidades e competências do que se busca.

Uma maneiro estudante criar múltiplas representações, se apoiar em materiais anteriormente disponibilizados e desenvolver as habilidades que se busca, é recorrer a Recursos Digitais.

RECURSOS DIGITAIS

É importante que seja possível compreender alguns conceitos necessários antes de observarmos as atividades e suas potencialidades ao necessitarem da utilização de recursos digitais. Para tal, apresentamos algumas definições, que podem ser encontradas de modo mais aprofundado na dissertação da autora.

PARA BAIXAR O TRACKER E OBTER MAIS INFORMAÇÕES, ACESSE:

https://physlets.org/tracker/

RECURSOS DIGITAIS

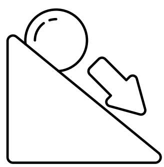
Diante das atividades propostas para o desenvolvimento da pesquisa, foi apresentado o software Tracker, que possibilita que os estudantes realizem uma videoanálise, de modo a evidenciar conceitos matemáticos e propiciando que eles compreendam o modelo como um todo, visualizando sua representação gráfica e comparando-a com dados empíricos.

O Tracker é um software livre que pode ser executado em qualquer sistema operacional, desde que ele tenha o programa Java, em que é utilizado para coleta de dados referentes a sistemas físicos, por meio da videoanálise. O procedimento requer que o usuário realize a filmagem do fenômeno físico em que deseja estudar e o carregue no software e este se encarrega de registrar os dados e plotar gráficos relativos ao vídeo, além de oferecer ferramentas para realizar sua análise detalhada.

RECURSOS DIGITAIS

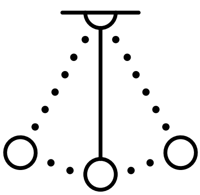
Isto envolve a filmagem do fenômeno desejado e a subsequente análise no Tracker, destaca a facilidade de uso e a praticidade da ferramenta. A capacidade do software de registrar dados e gerar gráficos automaticamente simplifica o processo para os usuários, permitindo uma análise eficiente e rápida dos resultados.

Além disso, o Moodle como ambiente virtual também foi utilizado e possibilitou que professoras e estudantes trocassem arquivos e dúvidas, tal como a visualização e feedback durante o período de realização da atividade dos grupos, sem a necessidade de se ter um material físico. Sem o uso de tais tecnologias, estimamos que a compreensão dos modelos poderia ser dificultada.



RECURSOS DIGITAIS

A observação, obtenção e compreensão de modelos clássicos que interessam aos cursos de Engenharia são de fundamental importância. E, para tal, o uso de tecnologia dentro e fora de sala de aula se torna algo útil, prático e acessível à maioria dos estudantes no contexto em que se deu a pesquisa. Além disso, ela tende a aproximar situações do mundo real a modelos teóricos, de modo rápido e prático. Possibilitando, assim, que o estudante consiga entender Modelos Matemáticos presentes no seu meio, com auxílio da Análise de Modelos, tal como é possível notar e evidenciar indícios do Pensamento Matemático Avançado.



RECURSOS DIGITAIS

Nesse cenário, o uso de tecnologias desempenha um papel fundamental, pois possibilita que tanto professores quanto estudantes aprofundem seu entendimento sobre o conteúdo programático de uma disciplina, especialmente no contexto do ensino superior. Isso resulta em uma abordagem mais abrangente e eficaz, permitindo uma compreensão mais sólida dos conceitos matemáticos e suas aplicações práticas. Para Ferreira, Campos e Wodewotzki (2013, p. 163), "a tecnologia é essencial no processo de visualização, e ela, por sua vez, ocupa um papel pedagógico fundamental na compreensão de conteúdos matemáticos".

Ao adotar estrategicamente as tecnologias, tanto os educadores quanto os alunos podem explorar os aspectos teóricos de forma mais envolvente e aplicar esses conhecimentos na resolução de problemas do mundo real, contribuindo para a formação de profissionais qualificados. Para Sá e Machado,

RECURSOS DIGITAIS

“o uso das tecnologias na sala de aula vem se tornando uma ferramenta de grande importância, pois consegue auxiliar tanto o professor quanto o aluno na explicação e na compreensão dos conteúdos. Com a tecnologia na aula os alunos sentem-se mais motivados a aprender e a partir disso o docente consegue ensinar de forma mais dinâmica e criativa” (Sá; Machado, 2017, p. 1).

Com intuito de apresentar e explicar noções gerais de utilização do Tracker, foi apresentado e disponibilizado às turmas o seguinte tutorial, que estava disponível na aba da disciplina no Moodle, no projetor da sala e no grupo de WhatsApp destinado a discussões e informações rápidas e de fácil acesso a todos os alunos matriculados na turma de EDO:

FIGURA 2 - ORIENTAÇÕES DISPONIBILIZADAS PARA UTILIZAR O TRACKER

ORIENTAÇÕES PARA UTILIZAR O TRACKER

DICA: baixe o Tracker através do link: https://physlets.org/tracker/

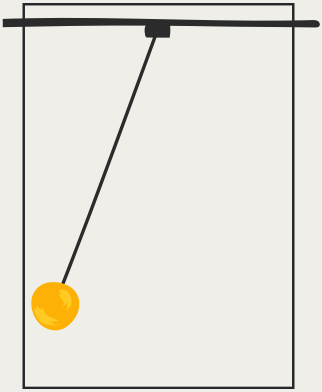
Para utilizar o Tracker, considere a área de transferência:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

- Na área de transferência, clique em 1 e, depois, em Abrir e escolha o vídeo que deseja;
- Ajuste o início e o final do vídeo na barra inferior da tela de rodagem, localizada na parte esquerda;

- Adicione os eixos coordenados, ao clicar na barra de ferramentas item 7, na opção representada por eixos e, ao clicar no vídeo, selecione e arraste para a posição que desejar, de modo a estar coerente com a o pêndulo físico e o objeto;
- Ainda na barra de ferramenta, clique no bastão de medicação, ao selecionar o item 6, e clique no vídeo, posicionando-o sobre o objeto. E, ao clicar no vídeo, será aberto um tipo de cursos para ser digitado o tamanho do objeto, e então clique em Enter;
- Em seguida, adicione um ponto de massa, ao clicar em 8, e em Novo e, depois, em Ponto de Massa e em Massa A, podendo alterar o nome se preferir;
- E, então, clique em Trajetória Automática com o botão direito do mouse;
- Será aberto uma tela sobre o Tracker e, pressione simultaneamente, os botões Ctrl e Shift, e clique sobre o objeto do vídeo. A seguir, ajuste o quadro vermelho central à figura do objeto e, clique sobre o quadradinho lateral inferior direito, de modo a ajustar a tela de filmagem;
- Na tela de Trajetória Automática, clique em Pesquisar, então será iniciado a marcação dos pontos durante o movimento;
- O processo anterior capturou dados e então é possível fechar a tela de trajetória automática e, já será possível ver o gráfico e a tabela de dados no lado direito da tela;
- E, ao clicar no diagrama do gráfico, é possível escolher os eixos que serão trabalhados ao clicar no eixo y, e então selecione todos os dados obtidos da tabela, dê um clique duplo e o movimento será visualizado em uma tela maior;
- Clique sobre o botão Analyze e, depois, em Curve Fits, no inferior da tela aparecerá a opção Line, é possível adequar a curva obtida.

FONTE: A AUTORA (2022)



LET'S TALK ABOUT

PARTE 6

DESENVOLVIMENTO DO GRUPO - PLANO INCLINADO

A seguir, apresentamos o desenvolvimento das atividades segundo um dos grupos que as realizaram, a partir de recortes do relatório entregue como produto final.
No caso, o grupo que foi analisado para a dissertação.

- *PLANO INCLINADO*

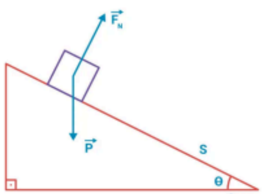
RESUMO

O estudo da aceleração em um plano inclinado sem atrito, utilizando tanto o método de equações diferenciais ordinárias (EDO) quanto a análise gráfica. O cálculo da aceleração foi realizado em um ângulo experimental de 2,8º, e a análise comparativa entre os resultados mostrou que a aceleração calculada pelo gráfico é mais precisa do que a obtida pela EDO, apresentando uma diferença de apenas 7,9%, enquanto a EDO apresentou uma variação de quase 20%.

1. INTRODUÇAO

Um plano inclinado é uma superfície plana que forma um ângulo com o eixo horizontal. A partir de um diagrama de forças é possível escrever uma equação para a aceleração.

Figura 1 - Diagrama de Força em um plano inclinado



Fonte: PREPARA ENEM (2021)

No plano inclinado sem atrito, a aceleração será constante, e dependerá da noção do que é força peso, que é uma força que surge da atração gravitacional entre dois corpos constituídos de massa. Assim ela é calculada pelo produto da aceleração da gravidade com a massa.

Para determinar a aceleração, utilizando essas concepções deve-se decompor a força peso na direção do eixo x (1) e na direção do eixo y (2), e aplicar às relações trigonométricas.

$$Px = P.sen(\theta) \tag{1}$$

$$Py = P.cos(\theta) \tag{2}$$

Fazendo uso da segunda lei de Newton, que diz que a força (F) é o produto da massa (m) com a aceleração (a), e substituindo a força pela força peso, é possível obter uma nova equação (3).

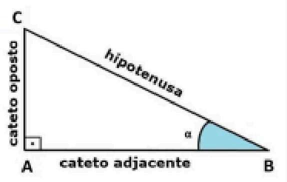
$$m.g.sen(\theta) = m.a \tag{3}$$

DESENVOLVIMENTO DO GRUPO - PLANO INCLINADO

Assim, a aceleração no plano inclinado sem atrito é calculada pelo produto da aceleração da gravidade pelo seno do ângulo que a superfície faz com o eixo horizontal e tem como unidade de medida no sistema internacional (SI) o [m/s²].

Para o cálculo do ângulo, retorna-se a Figura 1 e retoma-se as relações trigonométricas em um triângulo retângulo. Tais relações referem-se a seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante. O seno será suficiente para encontrar o ângulo da inclinação do plano.

Figura 2 -Relações trigonométricas



Fonte: TODA MATÉRIA (2022)

A partir do triângulo da Figura 2, é possível calcular o seno do ângulo (alfa) com a equação (4).

$$Sen(\alpha) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \quad (4)$$

A fim de isolar o ângulo (α) aplica-se a equação (5).

$$(\alpha) = arcsen(\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}) \quad (5)$$

No experimento realizado no plano inclinado, utilizamos conceitos físicos do Movimento Retilíneo Uniformemente Variável (MRUV) para determinar a posição em relação ao tempo. O MRUV é caracterizado pela variação constante da velocidade em todo o percurso. Dessa forma, em todas as posições, a aceleração é constante e diferente de zero. De forma que para realizar o cálculo, utiliza-se a equação (6).

$$S = So + Vo.t + \frac{at^2}{2} \quad (6)$$

No contexto da Física, é possível estabelecer que, considerando uma posição inicial e uma velocidade inicial igual a zero, a posição final pode ser expressa pela equação (7).

$$S = \frac{at^2}{2} \quad (7)$$

DESENVOLVIMENTO DO GRUPO - PLANO INCLINADO

2. MATERIAIS E MÉTODOS

O experimento de Física em questão foi conduzido utilizando um trilho de ar, inicialmente em uma posição reta. Utilizando uma trena, mediu-se a distância entre as fitas, localizadas em ambos os apoios do trilho. Em seguida, o trilho foi posicionado inclinado, e a nova altura foi medida com a trena e registrada para posterior cálculo. Para permitir a análise computacional do experimento, uma câmera foi cuidadosamente alinhada com o eixo horizontal. Após a preparação, o cavaleiro foi colocado na posição inicial (posição zero) do trilho de ar e o soprador de ar foi acionado, permitindo que o cavaleiro descesse o trilho com aceleração constante. É importante mencionar que o trilho de ar minimiza o atrito até atingir valor zero.

Ainda foi utilizado um experimento de acelerômetro inclinável para ajudar com a coleta de dados, de tal forma que era possível colocar manualmente um carrinho anexado ao acelerômetro por um fio em um ângulo. O acelerômetro continha os dados do carinho e com auxílio de um programa computadorizado fornecia a aceleração que estava sendo exercida no ponto a cada período de tempo.

3. RESULTADOS

A partir da equação (3) da aceleração no plano inclinado, e sabendo que a aceleração é uma variação de velocidade (dv) em um período de tempo (dt), foi possível escrever a equação (8) na forma normal de uma EDO.

$$\frac{dv}{dt} = g.sen(\theta) \qquad (8)$$

Analisando matematicamente, é possível trabalhar pelo método de variáveis separáveis, deixando dv de um lado e dt de outro, e integrando ambos os lados, como mostra a equação (9).

$$\int dv = \int (g.sen\theta)dt \qquad (9)$$

Essa igualdade de integrais proporcionou a equação (10), que representa o valor geral da velocidade.

$$v(t) = (g.sen\theta)t + C \qquad (10)$$

Utilizamos o Problema de Valor Inicial (PVI) para obter uma solução particular da Equação Diferencial Ordinária (EDO), tendo como condição v(0) = 0. Como consequência, o valor de ‘C’ foi igualado a zero, permitindo que a solução particular da EDO fosse expressa pela equação (11).

$$v(t) = (g.sen\theta).t \qquad (11)$$

DESENVOLVIMENTO DO GRUPO - PLANO INCLINADO

Com base na solução particular obtida e utilizando o conceito de que a velocidade é a variação da posição (dS) em relação ao tempo (dt), foi possível obter uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) em sua forma normal.

$$\frac{dS}{dt} = (g.sen\theta).t \tag{12}$$

Resolvendo a equação (12) da mesma forma que a anterior (9), pelo método de variáveis separáveis, encontrou-se uma nova equação (13) para posição.

$$S(t) = \frac{g.sen\theta.t^2}{2} + C \tag{13}$$

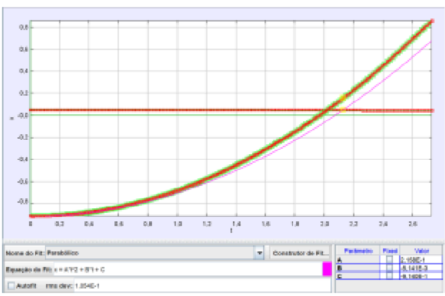
A fim de determinar a constante C, foi utilizado um Problema de Valor Inicial (PVI) com a condição de que S(0) é igual a zero. Isso nos permitiu concluir que a constante C é igual a zero. Como resultado, obtivemos uma solução particular para a Equação Diferencial Ordinária (EDO), dada pela equação (14).

$$S(t) = \frac{g.sen\theta.t^2}{2} \tag{14}$$

Ao igualar a solução particular obtida com a equação (7) da posição inicial, foi possível obter a equação da aceleração no plano inclinado (3). Durante o experimento, foi medido um ângulo de 2,8º em relação ao eixo horizontal. Utilizando esse valor na equação da aceleração, calculou-se um valor de 0,4738 [m/s²].

A equação em questão foi obtida através da resolução de equações diferenciais. Agora, discutiremos como a equação da aceleração pode ser determinada de forma gráfica. Para isso, utilizamos um software de análise de vídeo (Tracker), que permitiu a criação do gráfico (Figura 3) de posição em função do tempo, com ajuste polinomial, a partir do vídeo gravado durante o experimento.

Figura 3 - Distância pelo tempo do cavaleiro



Fonte: Autoria Própria (2023)

O ajuste proporcionou uma equação (15) com parâmetros A, B e C e seus respectivos valores.

$$X(t) = A.t^2 + B.t + C \tag{15}$$

Tabela 1 - Valores obtidos graficamente para A, B e C.

A	B	C
2.158 e -1	-5,14 e -3	-9,140 e -1

Fonte: Autoria Própria (2023)

Essa equação (15) foi comparada com a equação (6) e observou-se que o parâmetro A é igual à metade da aceleração. Assim, tirou-se a equação (16) da aceleração de forma gráfica.

$$a = 2.A \quad (16)$$

Substituindo o valor de A na equação (16), foi obtido um resultado de 0,4316 [m/s²].

Dessa forma, é possível analisar todos os valores de encontrados com o valor da aceleração obtido no experimento com o acelerômetro, como está disposto na tabela (2).

Tabela 2 - Valores para aceleração.

'a' pela EDO	'a' pelo Gráfico	'a' pelo acelerômetro
0,4738	0,4316	0,40

Fonte: Autoria Própria (2023)

4. CONCLUSÃO

Ao comparar os valores de aceleração obtidos através da Equação Diferencial Ordinária (EDO), do gráfico de posição por tempo e do acelerômetro, pode-se notar uma diferença significativa entre eles. Isso pode ser resultado de diversos fatores, como possíveis erros de medição ou imprecisões nos cálculos realizados.

Por outro lado, é interessante notar que a aceleração calculada pelo gráfico é a que mais se aproxima da correta, medida pelo acelerômetro. Isso demonstra a importância de utilizar equipamentos precisos e confiáveis para a coleta de dados experimentais, uma vez que eles são fundamentais para validar ou refutar hipóteses e teorias na física.

Por fim, é válido ressaltar que o confronto entre diferentes resultados obtidos por diferentes métodos é essencial para aprimorar a compreensão dos fenômenos físicos e para identificar possíveis fontes de erros experimentais, levando a um refinamento contínuo das teorias científicas.

DESENVOLVIMENTO DO GRUPO - PÊNDULO SIMPLES

- *PÊNDULO SIMPLES*

Para a análise do modelo do pêndulo simples será necessário apresentar o conceito de torque. De acordo com (HELERBROCK, 2023) o torque é o agente dinâmico das rotações, ou seja, é a tendência que uma força tem de rotacionar um corpo. O torque é um vetor que pode ser calculado por meio do produto vetorial entre força e distância.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{1}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\, F Sen\theta \tag{2}$$

Na cinemática angular, o torque terá a mesma função que a força na cinemática linear. Assim, quando comparada com a Segunda Lei de Newton, encontra-se uma equivalência.

$$F = ma \tag{3}$$

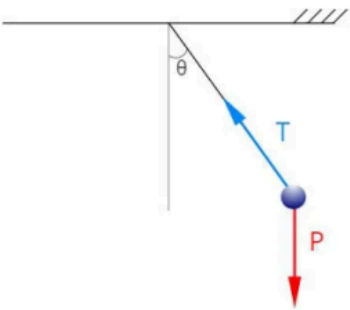
$$\tau = I\alpha \tag{4}$$

Na equação (4), *I* é o momento de inércia, que dependerá da massa e da distância dessa massa do eixo de rotação, e α é a aceleração angular.

$$I = m.L^2 \tag{5}$$

A partir desses conceitos apresentados e da figura (1), é possível escrever o modelo para um pêndulo simples.

Figura 1 - Diagrama de corpo livre de um pêndulo simples.

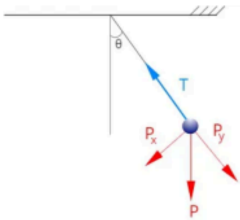


Fonte: Mundo Educação (2023)

DESENVOLVIMENTO DO GRUPO - PÊNDULO SIMPLES

No pêndulo simples, a oscilação ocorre com base nas forças peso e tração. Decompondo a força peso nos eixos x e y, adquire a seguinte figura e equações.

Figura 2 - Decomposição de Forças no Diagrama de corpo livre.



Fonte: Mundo Educação (2023)

$$Px = PSen\theta \tag{6}$$

$$Py = PCos\theta \tag{7}$$

Na equação (2), o raio para o sistema do pêndulo simples será igual ao comprimento da corda (L) e a força (F) será a força peso (P). Sabe-se ainda que a força peso é o produto da massa com a aceleração da gravidade.

$$\tau = \ - LmgSen\theta \tag{8}$$

Retomando a equação (4), a qual foi obtida a partir dos conceitos da Segunda Lei de Newton, e aplicando a equação (5), se obtém:

$$\tau = mL^2\alpha \tag{9}$$

Se igualar as equações obtidas para o torque, obtém-se uma equação para a aceleração angular (α).

$$\alpha =- (\frac{g}{L})Sen\theta \tag{10}$$

Percebe-se que a primeira derivada de θ em relação ao tempo (t) representa a velocidade angular. Já a segunda derivada representa a aceleração angular. Assim a equação 10 pode ser reescrita

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} =- (\frac{g}{L})Sen\theta \tag{11}$$

Para a resolução dessa equação, serão utilizados conceitos aprendidos durante a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

DESENVOLVIMENTO DO GRUPO - PÊNDULO SIMPLES

RESULTADOS

A EDO presente na equação 11 é de segunda ordem e não linear. A fim de resolvê-la, toma-se o conceito de linearização. Para isso, assume-se os valores de θ como pequenos, pequenos o suficiente para que a aproximação do seno de theta seja aproximadamente theta. Dessa forma, a equação 11 é simplificada.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{L}\right)\theta \qquad (12)$$

Assim, encontra-se uma equação de segunda ordem e homogênea. Agora, escreve-se a EDO na forma caraterística.

$$\lambda^2 + \frac{g}{L} = 0 \qquad (13)$$

Encontrando $\lambda_1 = \sqrt{-\frac{g}{L}}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{-\frac{g}{L}}$, nota-se que a solução geral será composta por números complexos. Realizando algumas manipulações algébricas na fórmula de Euler, e aplicando os valores encontrados λ, chega-se a uma solução geral na forma real.

$$\theta(t) = K_1 Cos(\sqrt{\frac{g}{L}}t) + K_2 Sen(\sqrt{\frac{g}{L}}t) \qquad (14)$$

A partir dos dados oferecidos, fez-se a escolha de valores para as variáveis g, L, θ.

Tabela 1 - Escolha dos valores.

g (m/s²)	*L (m)*	θ *(º)*
9,792	0,1549	2,5

Fonte: Autoria Própria (2023)

Com base na tabela (1), realiza-se um PVI a fim de encontrar as constantes K_1 e K_2. Sabe-se, a partir dos vídeos ofertados pela professora responsável, que o ângulo θ vale 2,5º quando o tempo t é nulo (0). Além disso, denota-se que a derivada de θ, o qual denomina-se como θ', vale 0º quando t também vale 0.

Com esse problema de valor inicial, encontra-se que $K_1 = 2,5$ e $K_2 = 0$. Aplicando esses valores na equação 14, finaliza-se com a solução particular.

$$\theta(t) = 2,5\, Cos(7,951t) \qquad (15)$$

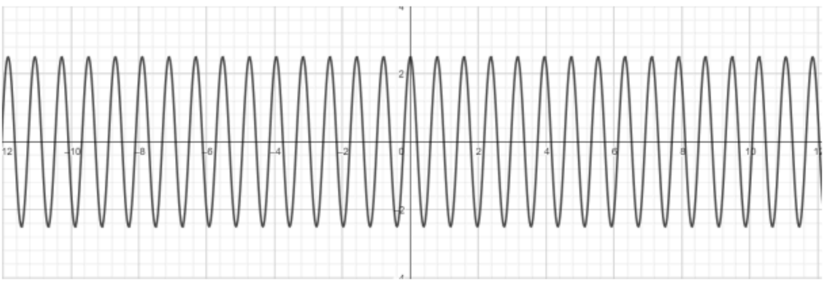
DESENVOLVIMENTO DO GRUPO - PÊNDULO SIMPLES

Por este mesmo processo, trocando somente o valor do ângulo e do comprimento do fio para 5,0º e 0,1720 m respectivamente, encontra-se uma outra solução particular.

$$\theta(t) = 5,0\, Cos(7,546t) \tag{16}$$

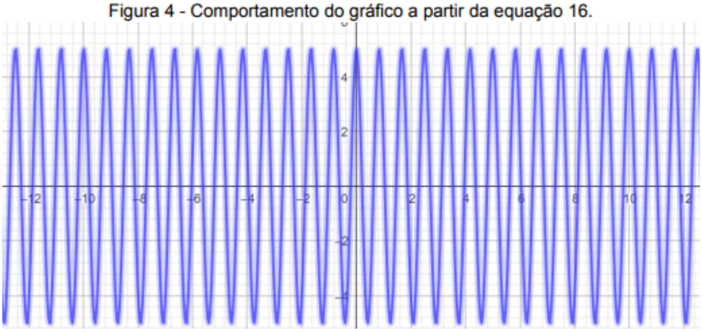
Foi realizado com o software GeoGebra os gráficos para as funções descritas nas equações 15 e 16.

Figura 3 - Comportamento do gráfico a partir da equação 15.



Fonte: Autoria Própria (2023)

Figura 4 - Comportamento do gráfico a partir da equação 16.

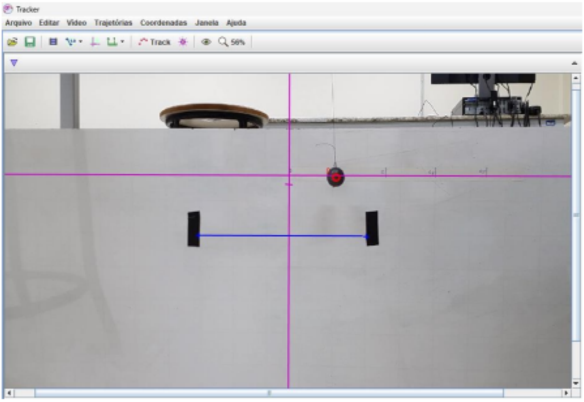


Fonte: Autoria Própria (2023)

Além da análise através da resolução da EDO, foi realizado uma vídeo análise para uma condição, L= 0,1549 m e θ=2,5º. Após inserir o vídeo no software, definiu-se uma medida de referência no vídeo. Sabendo que a distância entre as duas fitas é de 24cm, utiliza-se a ferramenta bastão de medição (linha azul) para evidenciar essa distância. Em seguida foi definido um eixo de coordenadas como referencial (linha roxa) e um ponto de massa que será objeto de análise do software.

DESENVOLVIMENTO DO GRUPO - PÊNDULO SIMPLES

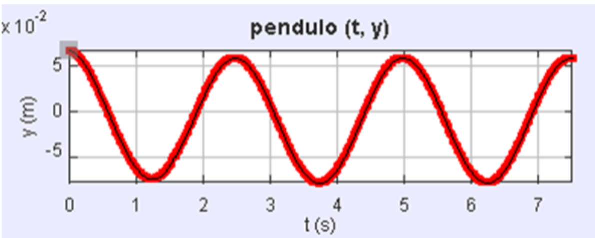
Figura 5 - Análise pelo Tracker.



Fonte: Autoria própria (2023)

O software então analisa o movimento do ponto de massa em todos os quadros selecionados do vídeo, fornecendo um gráfico da posição no eixo Y por tempo.

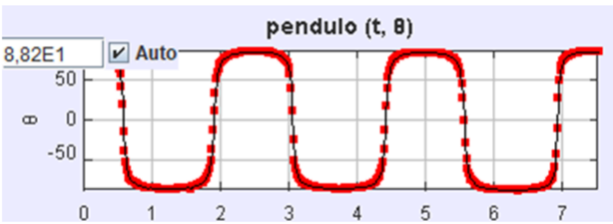
Figura 6 - Análise do eixo Y pelo tempo.



Fonte: Autoria Própria (2023)

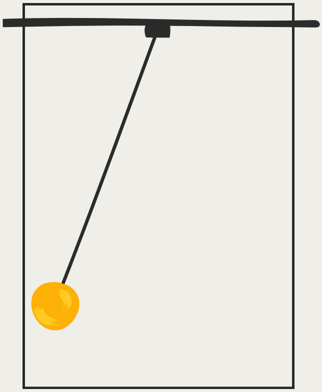
Para evidenciar o ângulo do fio do pêndulo, rotaciona-se o eixo X do ponto de referência de modo que ele fique vertical, e modifica-se os parâmetros do gráfico apresentado.

Figura 6 - Análise do eixo X pelo tempo.



Fonte: Autoria Própria (2023)

Denota-se então uma semelhança entre a Figura (3) e a Figura (6), indicando que o modelo encontrado pelo método de resolução de EDO está coerente com o modelo obtido pela vídeo análise.



LET'S TALK ABOUT

PARTE 7

CONSIDERAÇÕES

Esperamos que esse Produto Educacional norteie a prática do professor de graduação, de disciplinas que envolvam Equações Diferenciais Ordinárias, ao trabalharem com Modelagem Matemática, Modelos Matemáticos Clássicos, Análise de Modelos e Pensamento Matemático Avançado.

Nossa objetivo, ao apresentar essas atividades, é proporcionar a você, educador(a), diferentes opções e recursos que possam orientar a implementação de atividades de Modelagem Matemática na perspectiva da Análise de Modelos.

Esperamos que tais atividades incentivem sua criatividade, induzindo a várias inovações em sala de aula, propiciando um ensino e aprendizagem que supram as necessidades de cada turma.

Vale ressaltar que apresentamos algumas sugestões e estamos abertas a discutir, aprender e desenvolver essas atividades de modo inovador e que atendam as necessidades de cada turma e curso, considerando suas particularidades.

Portanto, convidamos você a dividir suas experiências conosco:

ALGUMA DÚVIDA? SUGESTÃO?

Entre em contato e nos conte o que achou do Produto Educacional!

CONHEÇA AS PESQUISADORAS

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL) e em Pedagogia, com foco em metodologias de ensino que possibilitem um desempenho maior ou melhor frente ao ensino e aprendizado do aluno. E, atualmente aluna regular do Mestrado Profissional, intitulado Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT), pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) campus Londrina e Cornélio Procópio, desde março de 2022.

NIASBEKGIROTI@GMAIL.COM

ALGUMA DÚVIDA? SUGESTÃO?

Entre em contato e nos conte o que achou do Produto Educacional!

CONHEÇA AS PESQUISADORAS

A pesquisadora é licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE) e tem mestrado e doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). É docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) desde 2006 e atualmente atua como coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) campi Cornélio Procópio e Londrina. Participa do Grupo de Estudo e Pesquisa em Ensino e Aprendizagem de Matemática (GEPEAM), nas linhas de pesquisa: Modelagem Matemática e Investigação Matemática e Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática. É membro da Sociedade Brasileira de Educação Matemática e participa, desde 2003, do GT10 da SBEM: Modelagem Matemática, sendo coordenadora adjunta no periodo de 2021 à 2024.

ADRIANABORSSOI@UTFPR.EDU.BR

- # Referências

ALBARELLO, S. G.; PEREIRA, R. F. **O uso de ambientes virtuais e tecnologias como motivadores e facilitadores da aprendizagem das Leis de Newton.** Paraná: Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE, 2013.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. **Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática:** um olhar sobre os modos de inferência. Ciência e Educação (UNESP. Impresso), v. 18, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. 1. ed. São Paulo: Contexto, p. 156, 2012.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. **Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando:** Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes? Acta Scientiae, Canoas, v. 14, n. 2, p. 215-239, maio/ago. 2012.

ARNOLD, F. J.; ARTHUR, R.; BRAVO-ROGER, L. L.; GONÇALVES, M. S.; OLIVEIRA, M. J. G. D. **Estudo do amortecimento do pêndulo simples:** uma proposta para aplicação em laboratório de ensino. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, p. 4311, 2011.

BASSANEZI, R. C. E**nsino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. **Modelagem matemática e aprendizagem significativa:** uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 91-121, 2004.

BIEMBENGUT, M. S. **Qualidade no ensino de matemática na engenharia:** uma proposta metodológica e curricular. 1997. 305 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

BLUM, W.; LEIß, D. **How do students and teachers deal with modeling problems?** In: HAINES, C. R.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (Eds.). Mathematical modeling (ICTMA–12): Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood Publishing, 2005.

• Referências

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. **Modelagem matemática e aprendizagem significativa:** uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 91-121, 2004.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. **Percepções sobre o uso da tecnologia para a aprendizagem significativa de alunos envolvidos com atividades de modelagem matemática**. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (En línea), v. 10, p. 36-45, 2015.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Rio de Janeiro: LTC, xv, 663 p. ISBN 978-85-216-2735-7, 2015.

BORROMEO FERRI, R. **Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process.** ZDM - The International Journal on Mathematics Education, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

BLOMHØJ, M.; NISS, M. **Decoding, understanding, and evaluating extant mathematical models: what does that take?** Quadrante, v. 30, n. 2, p. 9-36, 2021. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/24129/18995. Acesso em: 19 jul. 2024.

DREYFUS, T. **Advanced mathematical thinking processes.** In: TALL, D. (Ed.). Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, p. 25-41, 1991.

DREYFUS, T. **Advanced mathematical thinking processes.** In: TALL, D. (Ed.). Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, p. 25-41, 2002.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. **Análise de modelos: possibilidades de trabalho com modelos matemáticos em sala de aula.** In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Org.). Tecnologias digitais e educação matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.