

ppgmat

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ROSEMEIRE FAVARO LISSE TREVISOLLI

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ACERCA DO RACIOCÍNIO
MATEMÁTICO: VIVÊNCIAS DE UMA PROFESSORA DURANTE UM PROCESSO FORMATIVO

LONDRINA

2024

ROSEMEIRE FAVARO LISSE TREVISOLLI

**OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ACERCA DO RACIOCÍNIO
MATEMÁTICO: VIVÊNCIAS DE UMA PROFESSORA DURANTE UM PROCESSO FORMATIVO**

**PROFESSIONAL LEARNING OPPORTUNITIES ABOUT MATHEMATICAL REASONING:
EXPERIENCES OF A TEACHER DURING A FORMATIVE PROCESS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campi* Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

Coorientadora: Prof.^a Dra. Anna Flávia Magnoni Vieira

LONDRINA

2024



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Esta licença permite download e compartilhamento do trabalho desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-lo ou utilizá-lo para fins comerciais. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

FOLHA DE APROVAÇÃO



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina



ROSEMEIRE FAVARO LISSE TREVISOLLI

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ACERCA DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: VIVÊNCIAS DE UMA PROFESSORA DURANTE UM PROCESSO FORMATIVO

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 22 de Maio de 2024

Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Morgana Scheller, Doutorado - Instituto Federal Catarinense

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 22/05/2024.



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Esta licença permite download e compartilhamento do trabalho desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-lo ou utilizá-lo para fins comerciais. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

Dedico este trabalho à minha família, pelo apoio em todos os momentos, em especial aos meus filhos Luiz Antônio e Sofia, que sentiram minha ausência em várias ocasiões, mas compreenderam o quão significativo é o estudo em minha vida e a importância que essa pesquisa tem para mim.

AGRADECIMENTOS

Se paro para escrever essa esta página é porque Deus me sustentou, me capacitou e me permitiu estar aqui. Gratidão, Senhor, por me amparar em cada obstáculo desta jornada de estudos e por cada pessoa maravilhosa que cruzou meu caminho durante o mestrado.

Agradeço imensamente ao meu orientador Prof. Dr. André Luis Trevisan, por me permitir viver esta experiência, guiando-me com muita sabedoria, paciência e otimismo. Permitiu-me conhecer pessoas incríveis no grupo de estudos, dedicadas em levar o Raciocínio Matemático às salas da Educação Básica, por meio da formação continuada de professores.

Agradeço à minha coorientadora, Prof. Dr^a Anna Flavia Magnoni Vieira, por me trazer segurança na fase da defesa até o presente momento, ouvindo minhas angústias, lendo e sugerindo melhorias na escrita desta pesquisa.

À colega de grupo de estudos Prof. Ms. Giane Fernada Schneider Gross, minha eterna gratidão, nunca me permitiu desistir, sendo sempre prestativa e paciente. Ensinou-me detalhes importantes de escrita, de apresentação nos seminários e da importância do trabalho em equipe. Nos encontramos pessoalmente uma única vez, mas, virtualmente e nas trocas de mensagem, foram dois anos quase diários, sendo uma grande parceira no processo de formação continuada vivenciado e que levarei para sempre em meu coração.

Não posso deixar de mencionar a base do meu existir, meus pais Maria Aparecida e Luiz Waldir, que sempre valorizaram os estudos e nunca mediram esforços para me apoiar.

Ao meu esposo Marcelo de Almeida Trevisolli, pelo apoio e parceria, entendendo minha ausência e cuidando com tanto zelo dos nossos filhos, Luiz Antônio e Sofia. Minha gratidão a vocês, que me impulsionam a seguir em busca do eu acredito.

À Professora Dr^a Eliane Maria Araman e à Professora Dr^a Morgana Scheller, que, gentilmente, aceitaram fazer parte da minha banca examinadora, corroborando com importantes sugestões.

Um obrigada especial à minha amiga Neuza Aparecida Petrin Schuster, diretora do colégio em que trabalho e que sempre acreditou em mim e na possibilidade de realizar o mestrado, dando total apoio. E à minha amiga-irmã Kelly Cheron Yamasaki Zechner pelas orações e apoio em todos os momentos deste processo.

Por fim, agradeço aos professores que aceitaram o convite para participar do processo de formação continuada, permitindo-me vivenciar todas as etapas de uma formação continuada.

“Na formação permanente dos professores, o momento fundamental é o da reflexão crítica sobre a prática. É pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática”.
(Freire, 1996, p. 39).

TREVISOLLI, Rosemeire F. L. **Oportunidades de Aprendizagem Profissional acerca do Raciocínio Matemático:** vivências de uma professora durante um processo formativo. 2024. 122p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

RESUMO

Esta pesquisa se desenvolve a partir de um projeto de formação continuada, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – campus Cornélio Procópio e Londrina, destinado a professores que ensinam Matemática em diferentes níveis de escolaridade. O processo formativo foi organizado baseado no modelo PLOT (*Professional Learning Opportunities for Teacher*), por ser um modelo que viabiliza a promoção de oportunidades de aprendizagem a professores, e inserimos, neste contexto, o ciclo PDR (Planejamento, Desenvolvimento, Reflexão), no qual os participantes da formação acompanham todo o processo de Planejamento, Desenvolvimento e Reflexão de uma aula. O foco de estudo nesta formação, que se desenvolveu no primeiro semestre de 2023, foi a compreensão dos processos e entendimentos essenciais do Raciocínio Matemático (RM). Partindo desse contexto, a pesquisa teve por objetivo analisar as oportunidades de aprendizagem profissional (OAP) acerca do Raciocínio Matemático, seus processos e entendimentos, vivenciados por uma professora participante de um processo formativo, nas etapas de planejamento, desenvolvimento e reflexão de uma aula. A natureza do estudo é qualitativa, de cunho interpretativo, e a análise incidiu sobre os dados produzidos por uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, evidenciando diferentes OAP acerca do RM que foram declaradas por ela ou puderam ser inferidas dos dados em cada uma das etapas dos ciclos PDR. Essas OAP foram segmentadas em dois grupos: Conhecimento Especializado do RM e Conhecimento Pedagógico do RM, que foi organizado em duas categorias: Conhecimento do RM e do ensino e Conhecimento do RM e dos estudantes. Dessa forma, conclui-se que a promoção de ações formativas que privilegiam OAP em relação ao RM, podem resultar em um avanço no processo de aprendizagem dos estudantes e na melhoria da proficiência na aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Formação de professores; Oportunidades de aprendizagem profissional; Raciocínio matemático.

TREVISOLLI, Rosemeire F. L. **Professional learning opportunities about mathematical reasoning: experiences of a teacher during a formative process** 2024. 122p. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

ABSTRACT

This research develops on a continuing education project at the Federal Technological University of Paraná (UTFPR) – Cornélio Procopio and Londrina campus, aimed at teachers who teach mathematics at different levels of schooling. The training process was organized based on the PLOT model (Professional Learning Opportunities for Teachers), as it is a model that makes it possible to promote learning opportunities for teachers, in this context we included the PDR cycle (Planning, Development, Reflection), in which training participants follow the entire process of Planning, Developing and Reflecting of a class. The focus of study in this training, which took place in the first semester of 2023, it was on understanding the essential processes and understandings of Mathematical Reasoning (MR). Starting from this context, the research aimed to analyze the professional learning opportunities (PLO) about Mathematical Reasoning, its processes, and understandings, experienced by a teacher participating in a training process, in the stages of planning, developing, and reflecting on a class. The nature of this study is qualitative and interpretative, and the analysis focused on the data produced by a teacher of Primary School on Early Years, highlighting different OAPs about MR that were declared by her or could be inferred from the data in each of the stages of the PDR cycles. These OAPs were segmented into two groups: Specialized Knowledge of MR and Pedagogical Knowledge of MR, the latter being organized into two categories: Knowledge of MR and teaching and Knowledge of MR and students. In this way, it can be concluded that the promotion of training actions that focus on OAP about MR can result in progress in the student's learning process and improve the proficiency in learning mathematics.

Keywords: Teaching Mathematics; Teacher training; Professional learning opportunities; Mathematical reasoning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelo para o Raciocínio Matemático	22
Figura 2 – Situação problema “Duração da bateria”	24
Figura 3 – Diferentes frações representando $\frac{3}{4}$ de um retângulo	25
Figura 4 – Exemplo envolvendo o Entendimento Essencial 5	27
Figura 5 – Exemplo envolvendo a Conjectura de Maria	28
Figura 6 – Exemplo referente à justificativa da aluna 2	29
Figura 7 – Exemplo referente à justificativa da aluna 3	30
Figura 8 – Exemplo envolvendo o Entendimento Essencial 8	32
Figura 9 – Exemplo envolvendo o Entendimento Essencial 8	33
Figura 10 – Subdomínios do MKT	36
Figura 11 – Modelo PLOT seus domínios e dimensões.....	38
Figura 12 – Dimensões, componentes e características do modelo PLOT em seus três domínios	38
Figura 13 – Ciclo PDR	41
Figura 14 – Convite aos professores que ensinam Matemática	44
Figura 15 – E-mail enviado aos inscritos no curso de formação.....	46
Figura 16 – Tarefa matemática selecionada pela dupla durante o planejamento	56
Figura 17 – Tarefa matemática elaborada pelas professoras Érica e Paula durante o planejamento.....	61
Figura 18 – Capa do produto educacional.....	93
Figura 19 – Índice do produto educacional	94

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Definições para Raciocínio Matemático	21
Quadro 2 – Processos de Raciocínio Matemático e seus entendimentos essenciais	23
Quadro 3 – Exemplo envolvendo o Entendimento Essencial 6	29
Quadro 4 – Organização do processo formativo	47
Quadro 5 – Cinco práticas para orquestrar produtivamente as discussões matemáticas	48
Quadro 6 – Alteração do cronograma do processo formativo	50
Quadro 7 – Síntese das ações que são foco de análise na pesquisa	52
Quadro 8 – Oportunidades de Aprendizagem Profissional – OAP geradas durante o processo de formação continuada e a relação com os domínios do modelo PLOT	53
Quadro 9 – Planejamento elaborado durante o processo formativo	64
Quadro 10 – Síntese das OAP evidencias durante a etapa do planejamento	66
Quadro 11 – Síntese das OAP evidencias durante a etapa do desenvolvimento	77
Quadro 12 – Síntese das OAP evidencias durante a etapa da reflexão	84
Quadro 13 – OAP identificadas nas etapas do ciclo PDR durante do processo formativo	86
Quadro 14 – Aproximação das OAP no ciclo PDR com aquelas identificadas por Anjos (2023)	87
Quadro 15 – Novas OAP identificadas nas etapas do ciclo PDR de um processo de formação continuada	87
Quadro 16 – OAP segmentadas em conhecimento especializado e pedagógico	88

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CCK	Conhecimento Comum do Conteúdo
CK	Conhecimento Específico do Conteúdo
CPF	Cadastro de Pessoa Física
FECEA	Faculdade de Ciências Econômicas de Apucarana
HCK	Conhecimento do Conteúdo no Horizonte
IBD	Investigação Baseada em Design
IDP	Interações Discursivas entre os Participantes
KCC	Conhecimento do Conteúdo e do Currículo
KCS	Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes
KCT	Conhecimento do Conteúdo e do Ensino
LRCO	Livro de Registro de Classe On Line
MA	Matemática Acadêmica
ME	Matemática Escolar
MKT	Mathematical Knowledge for Teaching
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
OAP	Oportunidade de Aprendizagem Profissional
PAF	Papel e Ações do Formador
PCK	Conhecimento Pedagógico do Conteúdo
PDE	Programa de Desenvolvimento Educacional
PDR	Planejamento, Desenvolvimento, Reflexão
PLOT	Professional Learning Opportunities for Teacher
PPGECT	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia
PPGMAT	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
RG	Registro Geral
RM	Raciocínio Matemático
SCK	Conhecimento Especializado do Conteúdo
SEED	Secretaria de Estado da Educação
TAP	Tarefas de Aprendizagem Profissional
TCUISV	Termo de Consentimento para Uso de Imagem e Som de Voz

TME

Tarefa Matemática dos Estudantes

UTFPR

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
 1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	20
1.1 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO, SEUS ENTENDIMENTOS E PROCESSOS	20
1.2 OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL DO PROFESSOR.	35
1.3 CICLO PDR	41
 2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	43
2.1 CARACTERIZAÇÃO E CONTEXTO DA PESQUISA.....	43
2.2 ORGANIZAÇÃO DO PROCESSO FORMATIVO	47
2.3 DADOS PARA PESQUISA	50
2.4 PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DE DADOS	52
 3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS	55
3.1 O PLANEJAMENTO.....	55
3.1.1 Encontro 5	55
3.1.2 Encontro 6	61
3.1.3 Encontro 7	63
3.2 O DESENVOLVIMENTO DA AULA.....	688
3.2.1 A apresentação da tarefa pela professora	68
3.2.2 As discussões em pequenos grupos.....	73
3.2.3 Discussão em plenária	73
3.3 REFLEXÃO	77
3.3.1 Reflexão após o desenvolvimento da aula (individual).....	788
3.3.2 Reflexão: encontros 8 e 9	79
3.3.3 Reflexão: avaliação do processo formativo.....	82
3.4 DISCUSSÃO DOS DADOS	855
3.5 PRODUTO EDUCACIONAL	922

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	955
REFERÊNCIAS	98
 APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO PARA USO DE IMAGEM E SOM DE VOZ (TCUISV) PARA PROFESSORES	 102
 APÊNDICE B – FORMULÁRIO UTILIZADO NO ENCONTRO 5 PARA PLANEJAR UMA TAREFA MATEMÁTICA E O DESENVOLVIMENTO DE UMA AULA	 1055
 APÊNDICE C – FORMULÁRIO DE CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES DO PROCESSO FORMATIVO	 1077
 APÊNDICE D – AVALIAÇÃO DO PROCESSO FORMATIVO	 1155
 APÊNDICE E – TAREFA MATEMÁTICA PLANEJADA PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	 1199
 ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL.....	 120

INTRODUÇÃO

Minha brincadeira de infância preferida sempre foi “escolinha”. Dava aula para minhas bonecas com um quadro verde que minha mãe pendurava na parede da varanda. Cresci no comércio do meu pai, um bar e mercearia, sempre com um caderno e sentada nas cadeiras de ferro. Tenho a lembrança de um cliente que me passava “continhas” para eu resolver no caderno quadriculado. Os números sempre me chamavam atenção, pois, no bar, tinha um folheto com os bichos do famoso jogo do bicho e seus números correspondentes os quais ficava somando. Também relacionava os produtos da mercearia e colocava os preços na frente e dizia ao meu pai que era para que, quando eu precisasse atender, já saberia cada um deles. Gostava, também, de acompanhar, com minha família, as cotações dos produtos agrícolas e sempre ajudava meu pai nas anotações e no uso da calculadora. Na 7ª série, comecei a me distanciar da disciplina de Matemática, pois uma professora dizia que era uma disciplina muito difícil e que muitos alunos “bombavam” no final do ano. Então, passei a temer essa reprovação, não me atrevia a perguntar nada, apenas seguia o exemplo e acabava acertando, mas sem entender exatamente o que estava fazendo e, assim, segui no restante da Educação Básica.

Ao final do Ensino Fundamental, meu desejo era fazer o Ensino Médio integrado ao magistério, mas, no ano em que iniciaria, ocorreu uma mudança e os cursos profissionalizantes integrados foram cessados. Segui para o Ensino Médio regular, e, como teríamos um vestibular pela frente, as conversas sobre que curso fazer eram recorrentes. Recebíamos das universidades panfletos com a lista de cursos divididos por áreas. Os de exatas eu já pulava, pois dizia que não daria conta da Matemática.

Aos dezenove anos, trabalhei no setor financeiro de uma transportadora e a matemática passou a fazer parte do meu dia a dia. Fazia acerto com os motoristas, média de consumo dos caminhões, gráficos desses consumos, etc. Apesar deste trabalho, nunca pensei em fazer um curso superior nessa área, pois me sentia incapaz (resquícios da 7ª série). Nesse período, eu cursava Turismo, na Faculdade de Ciências Econômicas de Apucarana (FECEA), pois quando chegou minha vez de fazer o vestibular na Universidade Estadual de Londrina, me deparei com um período longo de greve. Ao escolher um curso para me inscrever no vestibular da FECEA, descartei logo os que tinham matemática na ementa e foi assim que optei por Turismo.

Ao finalizar minha apresentação do trabalho de conclusão de curso dessa graduação, senti um enorme vazio e aquela sementinha do magistério começou a crescer novamente em minha mente. Em 2006, indo para Londrina, recebi um panfleto de uma faculdade particular da cidade de Cambé, e, lá, ofertava o curso presencial de Pedagogia. Fiz o vestibular e iniciei esta

graduação nesse mesmo ano. Me deparei com a Matemática nas aulas de Didática dessa disciplina na graduação e na Pós-Graduação em Psicopedagogia. Foram aulas significativas, que me permitiram compreender como a criança se relaciona com o número, e como o professor tem um papel importante nesse processo de ampliar as possibilidades para apropriação e avanço no conhecimento matemático. Essas aulas me traziam lembranças já relatadas da minha infância e das oportunidades que o professor tem de inserir os conteúdos do currículo a partir das vivências que as crianças já trazem do seu dia a dia, favorecendo uma aprendizagem. E, assim, cheia de vontade de ensinar, depois de formada fui para a escola.

Comecei a trabalhar em um colégio particular de Londrina como auxiliar na Educação Infantil. No ano seguinte, assumi um 5º ano no município de Arapongas e um 2º ano no município de Cambé. Que desafio! Sem experiência, assumi dois concursos e fui recebida como se já tivesse anos de experiência. Fiquei perdida. Seguiu os materiais didáticos, perguntava a outras professoras e às coordenadoras como faziam e, assim, segui esse ano desafiador. Fui uma professora que, ao trabalhar a Matemática, levava a turma a repetir procedimentos, forma de ensino à qual eu tinha me preparado e sentia segurança, não explorando outras abordagens. Minha experiência em sala de aula encerrou-se aqui, pois, no ano seguinte, assumi um cargo, através de um concurso do Estado do Paraná, como pedagoga.

Dar continuidade aos estudos e fazer um mestrado sempre esteve em meus planos. Depois de dois anos trabalhando como pedagoga, senti a necessidade de avançar em minha prática e me inscrevi como aluna externa de um Programa de Mestrado (acadêmico) em Educação. Fui em busca de soluções para a prática do dia a dia, mas confesso que concluí essa disciplina frustrada, pois ela não atendeu aos meus anseios, uma vez que a teoria que estudei estava muito distante da prática que vivenciava.

O desejo de tentar o mestrado ficou adormecido e continuei meu trabalho como pedagoga. Em 2019, assumi aulas extraordinárias no contraturno da escola em que atuo como pedagoga, em um programa da Secretaria de Estado da Educação (SEED), chamado “Mais Aprendizagem”, destinado a estudantes do 6º ao 9º ano que apresentam defasagem de conteúdo, com foco em leitura, interpretação e resolução de problemas. Apesar do meu esforço em elaborar aulas contextualizadas, deparei-me novamente com a professora que, por insegurança e um sentimento de pouco domínio do conteúdo, optava por uma aula tradicional. Eu estudava bastante aquela aula, o conteúdo em si, mas uma eventual pergunta feita por algum aluno, fora do que eu havia me preparado, mostrava o quão despreparada eu estava.

Em 2021, conheci duas professoras que faziam mestrado profissional e que relataram associar a teoria à prática. Acendeu um alerta e a vontade de ingressar no mestrado voltou,

comecei a pesquisar para tentar entender um pouco mais a respeito do programa. Quando li sobre os produtos educacionais, fiquei encantada, pois fazia muito sentido com a prática e, então, quando as inscrições se abriram, resolvi fazer, mesmo com o “trauma” da Matemática e sabendo das minhas limitações. Senti a necessidade, como pedagoga, de conhecer mais a respeito do ensino da Matemática para poder dar suporte aos professores que acompanho, uma vez que, ao olhar para as avaliações externas, a disciplina de Matemática aparece com índices de proficiência abaixo do que se espera.

Em 2022, iniciei o mestrado profissional no PPGMAT e, a cada disciplina cursada, a cada troca de experiência com os colegas e professores, fui constatando que estava no lugar certo. Estava há algum tempo sem estudar e foi um recomeço difícil, com dois filhos pequenos, casa, marido e pais idosos para cuidar, mas, aos poucos, novos hábitos vão chegando e nos adaptamos ao novo. Meu orientador sempre dizendo que “vai dar tudo certo”, foi me motivando e quando parecia que não ia dar conta, essa frase vinha em minha mente. O Grupo de Estudos com os “irmãos” de orientação foi muito significativo. Aos poucos, fui conhecendo os autores que conduziram minha jornada no mestrado, a linha de pesquisa que meus “irmãos” estavam seguindo e a escrita de artigos em dupla ou trios com os orientandos do doutorado. Fui observando e aprendendo a cada semana. Neste ano de novas experiências, fui desafiada no trabalho também: aceitei um convite da direção do colégio para trabalhar em contraturno com aulas extraordinárias na sala de recursos em Altas Habilidades e Superdotação.

No ano seguinte, depois de ter cursado as disciplinas obrigatórias e já na fase de imersão na pesquisa do mestrado, continuei me desafiando profissionalmente e assumi 10h de aulas extraordinária como professora formadora dentro do grupo de estudos denominado Formação em Ação, destinado aos professores da Educação Básica do Estado do Paraná, ofertado pela SEED¹.

Como parte do trabalho pedagógico previsto no calendário escolar, temos momentos formativos ao longo do ano letivo. Esses momentos sempre me incomodaram, pois muito pouco (ou quase nada) mudou ao longo desses anos em que atuo como Pedagoga. Os materiais para a formação são enviados dias antes pela SEED às escolas, e cabe à equipe pedagógica “formar” os professores. No meu primeiro ano como pedagoga, fiquei toda empolgada para esse momento, mas logo vi no rosto dos professores que essa proposta não é bem aceita por eles, e o tempo dedicado a essa “formação” era pouco proveitoso. Tempos depois, comecei a refletir:

¹ São encontros síncronos com professores de diversos núcleos regionais de educação, totalizando 3 jornadas no ano, totalizando 120h. Semanalmente o professor formador recebe instruções e orientações a respeito do material da aula da Coordenação de Formação e Elaboração de Materiais.

como trabalhar uma formação com um material que vem de surpresa, com o qual, muitas vezes, não me identifico e precisa ser estudado mais, porém sem tempo hábil para tal? O que os professores que participam desses momentos aprendem? O que modifica a prática desses professores após a participação nesses encontros? Esses questionamentos me aproximaram da proposta do professor orientador, quando colocou que estava cogitando organizar um processo formativo atrelado à temática em estudo no grupo de pesquisa “Raciocínio matemático e formação de professores²”.

Nesses onze anos atuando como pedagoga, diversos professores de Matemática trabalharam no colégio, cada um na sua singularidade, com metodologias muito distintas. Alguns ainda me lembram a professora que cruzou meu caminho na 7ª série, com suas listas de exercícios “siga o exemplo” mecanizadas. Outros contextualizam, exploram diversos caminhos para se chegar ao resultado, estimulam o cálculo mental e passam, sim, a lista de exercícios, porém com interação entre pares e com discussão das resoluções coletivamente. Percebia a diferença entre os estilos de ensinar, mas não conseguia levar o professor à reflexão da sua ação. Mesmo quando o rendimento da aprendizagem era baixo, o professor argumentava que os estudantes eram os responsáveis, uma vez que não faziam os exercícios propostos. Isso é um dilema!

Estudar a respeito do Raciocínio Matemático³, seus processos e entendimentos, trazendo-o como centro de um processo formativo em que o professor assume um papel fundamental com a proposição de tarefas matemáticas que possibilitem aos estudantes elaborar, justificar ou refutar suas conjecturas (Lannin; Ellis; Elliot, 2011; Ponte, 2005; Stein; Smith, 2009; Rodrigues; Menezes; Ponte, 2018), vem me permitindo uma aproximação com os professores. Consigo olhar para as avaliações e tarefas matemáticas propostas em sala e instigá-los a não olhar apenas para o resultado final, mas que procurem entender o processo pelo qual o aluno está pensando para alcançar tal resultado, e, assim, gradativamente, o acompanhamento em hora atividade tem sido melhor direcionado, uma vez que um dos principais objetivos do ensino da Matemática é o desenvolvimento do Raciocínio Matemático (Mata-Pereira; Ponte, 2018).

Na etapa de revisão de literatura para elaboração das dissertações, fui percebendo que muitas das minhas indagações alinham-se a resultados de pesquisa, a medida em que o desenvolvimento profissional de um professor não se encerra na graduação, a formação

² <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/781023>

³ Para a expressão Raciocínio Matemático, utilizar-se-á a sigla RM.

continuada é uma parceira de caminhada ao longo da carreira docente. Assim, o saber do professor vai além do domínio do conteúdo, integrando, à sua formação acadêmica, conhecimentos pedagógicos, metodológicos, histórico-culturais, psicossociais, enfim, as demandas da formação continuada são definidas de acordo com os desafios sociais que refletem na educação. Dessa forma, os processos formativos que associam aspectos da prática e da teoria com ênfase na reflexão da ação permitem que os professores tenham mais segurança ao ensinar, pois não se distanciam da realidade docente (Gatti, 2019; Schön, 1992; Shulman, 1986-1987; Tardif, 2012; Novoa, 2019; Silva; Serrazina; Campos, 2014).

Em consonância com esse conceito de formação continuada, a proposta para elaboração desta dissertação surge do convite feito pelo orientador em integrar um processo formativo com foco no estudo do Raciocínio Matemático, seus processos e seus entendimentos. Manifestei interesse em participar desse processo, pois ele me possibilita pesquisar se e como acontece a aprendizagem profissional docente em contexto de formação continuada, o que permite modificar, dentro das possibilidades institucionais, a minha prática pedagógica.

Delimitamos⁴, então, o desenvolvimento da pesquisa a partir desse processo formativo, desenvolvido na forma de um curso de extensão na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Londrina, ofertado no primeiro semestre de 2023, que teve nove encontros virtuais (plataforma Google Meet), envolvendo professor formador (orientador da pesquisa), estudante de doutorado e mestrado autora desta dissertação (também foram formadoras) e professores que ensinam Matemática em diversos níveis de ensino, com o objetivo de promover discussões e reflexões envolvendo o Raciocínio Matemático e propiciando um ambiente gerador de oportunidades de aprendizagem profissional (OAP).

Assim, esta pesquisa tem, por objetivo, *analisar as oportunidades de aprendizagem profissional acerca do Raciocínio Matemático, seus processos e entendimentos vivenciados por uma professora participante de um processo formativo, nas etapas de planejamento, desenvolvimento e reflexão de uma aula.*

Afim de alcançar esse objetivo, elencamos, como foco de análise, os momentos de interação envolvendo uma professora participante, que atua nos anos iniciais do Ensino Fundamental, procurando respostas às indagações que nos levaram à essa pesquisa: quais OAP acerca do RM são declaradas pela professora participante ou podem ser inferidas pelos pesquisadores, nas etapas do ciclo PDR (Planejamento, Desenvolvimento e Reflexão) de uma

⁴ A partir desse momento, o texto passa a ser escrito na primeira pessoa do plural, pois deixa de descrever a trajetória individual da pesquisadora e passa a incluir a contribuição (direta ou indireta) de outras pessoas no desenvolvimento da pesquisa.

aula (Trevisan; Ribeiro; Ponte, 2020)? Como essas OAP articulam-se com o conhecimento matemático para o ensino (Ball; Thames; Phelps, 2008)?

Este texto organiza-se em quatro capítulos além desta introdução, que trouxe um relato do percurso educacional e profissional da autora, bem como as motivações que culminaram na investigação, a justificativa e os objetivos norteadores da pesquisa.

O Capítulo I, Fundamentação Teórica, aborda o Raciocínio Matemático, seus processos e entendimentos, as Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP) e o ciclo PDR.

O Capítulo II, Procedimentos Metodológicos, proporciona ao leitor a compreensão da forma como a pesquisa foi executada. Apresenta-se a caracterização e o contexto da pesquisa, a organização do processo formativo, os dados para pesquisa e os procedimentos para análise destes dados.

O Capítulo III, Análise de Dados, descreve, analisa e interpreta os dados provenientes das etapas do ciclo PDR ao qual a professora pesquisada participou, evidenciando as OAP provenientes desses momentos, categorizando-as, inspirada nos subdomínios do modelo do conhecimento matemático para o ensino (Ball; Thames; Phelps, 2008). Resultante da pesquisa, apresentamos, ainda, neste capítulo, como produto educacional, um guia caracterizado com um Recurso Educacional Digital, voltado para formadores de professores que ensinam Matemática, intitulado “As Oportunidades de aprendizagem profissional acerca do raciocínio matemático: um guia para formadores de professores que ensinam Matemática”.

Finalizando esta dissertação, apresentamos, no Capítulo IV, as considerações finais, momento em que salientamos os resultados obtidos durante a realização da pesquisa e alguns apontamentos de perspectivas futuras.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente capítulo apresenta, na primeira seção, definições referentes ao Raciocínio Matemático (RM) e aos processos, bem como seus entendimentos essenciais. A partir da literatura estudada, são citados exemplos que ilustram, a partir de exemplos práticos, cada um desses entendimentos essenciais.

Na segunda seção, abordamos a formação continuada de professores, em específico, os que ensinam Matemática e descrevemos o modelo PLOT (*Professional Learning Opportunities for Teacher*), apresentado como uma possibilidade para organizar processos formativos que promovam oportunidades de aprendizagem a professores e, consequentemente, contribuam para o processo de aprendizagem dos estudantes.

Na terceira seção, apresentamos o detalhamento das etapas do ciclo PDR, que consistem no Planejamento, Desenvolvimento e Reflexão de uma aula, o que permeou o processo de formação continuada gerando dados que foram analisados na pesquisa que culminou nesta dissertação.

1.1 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO, SEUS ENTENDIMENTOS E PROCESSOS

Na Educação Matemática, documentos como o NCTM (organizado pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática Norte-Americano no início dos anos 2000) salientam que “todos os estudantes devem ter a oportunidade e o apoio necessário para aprender matemática significativa com profundidade e compreensão” (NCTM, 2000, p. 50).

No âmbito da educação nacional, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância de desenvolver, nos estudantes, habilidades que envolvem a competência de raciocinar, destacando que “é necessário que os estudantes possam em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática” (Brasil, 2017, p. 529).

Ações que levem os estudantes a raciocinar matematicamente, segundo os pressupostos desses documentos, implicam uma dinâmica de sala de aula na qual o professor assume um papel fundamental com a proposição de “momentos de reflexão, discussão e análise crítica posteriores à realização de uma atividade prática” (Ponte, 2005, p. 15). Assim, o professor não foca apenas no resultado final da tarefa matemática, mas deve ser capaz de acompanhar o raciocínio que seus estudantes elaboram e incentivá-los a justificar ou refutar suas conjecturas.

Oferecer aos estudantes tarefas matemáticas com o potencial de gerar reflexões (Ponte, 2005; Stein; Smith, 2009) e proporcionar em sala de aula momentos que promovam discussões (Ponte, 2005; Stein, 2008; Rodrigues; Menezes; Ponte, 2018) são ações que permitem a eles ampliar a capacidade de pensar sobre conceitos matemáticos, mobilizando diferentes processos de RM. Ao propor reflexão e discussão (Ponte, 2005; Stein, 2008; Rodrigues; Menezes; Ponte, 2018), o professor estimula os estudantes a pensarem sobre a tarefa matemática, o que pode levá-los a expressarem sua compreensão dos conceitos matemáticos por meio de justificativas escritas ou orais (Lannin; Ellis; Elliot, 2011).

De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011, p.12), o RM “é um processo dinâmico envolvendo conjecturar, generalizar, investigar porquê, e desenvolver e avaliar argumentos”⁵. Os autores caracterizam o RM a partir de um conjunto de entendimentos essenciais (que são detalhados na continuidade desta seção) que possibilitam compreender porque certas ideias são, ou não, matematicamente apropriadas ao resolver tarefas matemáticas. Para eles, “entender o RM exige que você não apenas conheça ideias matemáticas importantes, mas também reconheça como essas ideias se relacionam e encontram novas conexões entre as conhecidas” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 3).

Jeannotte e Kieran (2017) relatam que há múltiplas visões a respeito do discurso sobre RM entre os pesquisadores, o que dificulta comparações entre as diversas abordagens, caracterizações e resultados de estudos sobre este tema. Elencamos as definições de RM de alguns autores que, apesar de diferentes, apresentam o mesmo contexto da linha que estamos trabalhando, detalhados no Quadro 1.

Quadro 1 - Definições para Raciocínio Matemático

Definição	Referência
“Processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos”.	Jeannotte; Kieran (2017, p. 7)
Processo de inferência como o que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões.	Stylianides (2009)
Processo que utiliza “informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”.	Mata-Pereira; Ponte (2018, p. 782)
Processo conjunto de conjecturar, generalizar, investigar porquê, argumentar e refutar se necessário.	Lannin; Ellis; Elliot (2011)
Um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas como verdadeiras (conhecimento prévio).	Morais; Serrazina; Ponte (2018)

Fonte: Araman e Serrazina (2020, p. 119)

⁵ Todas as citações referentes a esta obra, são traduções livres da autora.

Jeannotte e Kieran, (2017) apresentam um modelo para o RM, atendendo o ensino e aprendizagem da matemática escolar, constituído pelo aspecto estrutural e o aspecto processual, como mostra a Figura 1. Ambos os aspectos são importantes para compreender as características centrais do RM.

Figura 1 - Modelo para o Raciocínio Matemático



Fonte: Autora, baseado em Jeanotte e Kieran (2017)

Observamos na Figura 1 que os aspectos do RM são definidos pelas autoras como estruturais e processuais. Neste trabalho, nosso foco são os aspectos processuais que se apresentam divididos em duas categorias: a busca por semelhanças e diferenças e a validação. As autoras esclarecem que os nove processos são apresentados separadamente para um melhor entendimento, mas, na prática, estão interligados, pois “estimulam-se e influenciam-se mutuamente, permitindo o desenvolvimento de um discurso matemático cada vez mais complexo através da geração de novas narrativas sobre objetos discursivos já existentes” (Jeanotte; Kieran, 2017, p. 14).

De modo similar, Lannin, Ellis e Elliot (2011) apresentam um modelo de RM estruturado a partir dos processos de conjecturar, generalizar, investigar o porquê e justificar ou refutar, delimitando-os em três grupos, detalhados em nove entendimentos essenciais, como apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 - Processos de Raciocínio Matemático e seus entendimentos essenciais

Conjecturar e Generalizar	1	Conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras. Essas declarações são chamadas de conjecturas.
	2	Generalizar envolve identificar semelhanças entre os casos ou estendendo o raciocínio para além do intervalo em que se originou.
	3	Generalizar envolve identificar a aplicação da generalização, reconhecendo o domínio relevante.
	4	Conjecturar e generalizar envolve o uso e o entendimento do significado de termos, símbolos e representações.
Investigar o porquê	5	O Raciocínio Matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa.
Justificar e refutar	6	Uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas.
	7	Uma refutação matemática envolve mostrar que uma afirmação particular é falsa.
	8	Justificar e refutar envolve avaliar a validade dos argumentos.
	9	Uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral não é um argumento baseado em autoridade, percepção, consenso popular ou exemplos.

Fonte: Autora, adaptado de Lannin, Ellis e Elliott (2011)

No primeiro grupo, têm-se os processos de conjecturar e generalizar, compreendendo os entendimentos essenciais de 1 a 4; o grupo 2 contempla o processo de investigar o porquê, como o entendimento essencial 5; por fim, o último grupo abarca os processos de justificar e refutar e compreende os entendimentos essenciais de 6 a 9.

Como esse modelo do Quadro 2 é o adotado na pesquisa, descrevemos, a seguir, os entendimentos essenciais de modo a explicar e exemplificar cada um deles. Cabe ressaltar que, no trabalho com uma tarefa matemática, esses entendimentos podem se mostrar de forma interconectada, pois, ao interagir com a tarefa e buscar solucioná-la, o aluno pode perpassar por alguns dos entendimentos essenciais que acabam não seguindo uma ordem. Ele conjectura, generaliza, refuta, volta a conjecturar, generalizar etc. Em outros casos, a depender da estrutura da tarefa e do conhecimento matemático prévio que o aluno tem, pode não ocorrer

envolvimento com a tarefa proposta e, assim, os aspectos do RM apresentados não serem evidenciados.

Em relação ao primeiro grupo (conjecturar e generalizar), tem-se o entendimento essencial 1⁶: *conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras. Essas declarações são chamadas de conjecturas*. Para Lannin, Ellis e Elliot (2011), conjecturar é elaborar uma primeira hipótese matemática que é construída pelo aluno ao procurar solucionar a tarefa. É uma forma natural de se envolver no processo de raciocínio, sendo possível o desenvolvimento de conjecturas na maioria das tarefas matemáticas que ocorrem na sala de aula. Porém, as conjecturas iniciais podem ou não serem verbalizadas ou registradas, ficando apenas na mente dos estudantes e ainda podem levar a afirmações que podem ser demonstradas como verdadeiras ou falsas.

Apresentamos um exemplo⁷ de conjectura a partir de dada situação-problema apresentada na Figura 2, no qual, diante do questionamento final da professora, os estudantes conjecturam que a média aumentaria em 5 horas e que a mediana permanece a mesma.

Figura 2 – Situação problema “Duração da bateria”

Os estudantes do sexto ano na sala de aula da Sr^a Terry estavam examinando o impacto da alteração de valores específicos em seu conjunto de dados original para a vida útil de cinco baterias: 120 horas, 87 horas, 133 horas, 106 horas e 112 horas. Eles se perguntavam como as mudanças nos dados sobre a vida útil da bateria afetariam a média e a mediana para o conjunto. A Sr^a Terry perguntou: “Se o conjunto de dados incluísse uma bateria com uma duração de 92 horas, ao invés de 87 horas, como isso afetaria a média e a mediana dos dados?”.

Fonte: Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 15)

Notamos que a conjectura foi expressa por meio de uma declaração, sendo, assim, possível uma análise mais aprofundada. A partir da declaração dada, a turma do sexto ano pode examinar se essa é uma conjectura verdadeira ou falsa. Lannin, Ellis e Elliot (2011) ressaltam que a natureza provisória da declaração depende do conhecimento que o aluno tem sobre o assunto em discussão. Assim, enquanto para alguns uma conjectura torna-se uma afirmação provisória (que pode ou não ser verdadeira, mas que ainda requer investigação), outros, de imediato, veem a conjectura como verdadeira (ou falsa), mesmo que não consigam formular uma justificativa válida para explicar o seu motivo.

⁶Adotamos, como uma forma de “licença poética”, a opção em mencionar os nove entendimentos essenciais propostos por Lannin, Ellis e Elliot (2011) sem uso de citação direta, como forma de deixar o texto menos “poluído”. Estão destacados neste capítulo com itálico, e são traduções livres da autora.

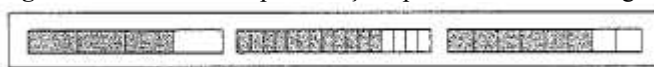
⁷ Todos os exemplos que se seguem foram retirados do livro de Lannin, Ellis, Elliot (2011), base dos nossos estudos. Ressaltamos que as séries escolares apresentadas no livro são referentes às do Estados Unidos, ao qual fizemos nesta dissertação, uma equivalência para os anos de escolaridade do nosso país.

No problema exemplificado acima, “Duração das baterias” (Figura 2), a partir de um exemplo específico (vida útil das baterias), os estudantes podem avançar em suas discussões com o auxílio da professora para afirmações gerais, como a investigação do que aconteceria se qualquer valor no conjunto de dados fosse aumentado em 5 horas ou um múltiplo de 5 horas. Com essas questões lançadas, outras conjecturas podem surgir, refutando a primeira afirmação que tiveram. A partir desses momentos de investigação com outras situações gerais, as conjecturas podem ou não ser generalizações, uma vez que Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 14) apontam que “podem ser expandidas para expressar situações matemáticas ou relações de maneira geral, para formar generalizações”

Na generalização, abordamos os entendimentos 2 e 3, sendo o entendimento essencial 2: *generalizar envolve identificar semelhanças entre os casos ou estendendo o raciocínio para além do intervalo em que se originou*. A generalização é um exercício de “concentrar-se em um aspecto particular de um problema ou de uma ideia e pensar mais amplamente sobre este aspecto” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 16). Diante de uma tarefa matemática, o aluno pode centrar-se em qualquer aspecto, que nem sempre revela uma propriedade matemática importante, e são, portanto, características que não levarão às generalizações corretas. Ao procurar avançar nesses processos do RM, o professor entra como um articulador, o qual questiona e procura compreender o que os estudantes estão generalizando.

Para ilustrar, a Figura 3 apresenta diferentes representações para $\frac{3}{4}$ de um retângulo. Quando o aluno reconhece essa semelhança, está focando em um aspecto de uma propriedade matemática e esse reconhecimento é uma forma de generalização.

Figura 3 – Diferentes representações para $\frac{3}{4}$ de um retângulo



Fonte: Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 17)

De acordo com Lannin; Ellis e Elliot (2011), a generalização pode assumir formas diferentes e nem sempre será facilmente reconhecida, pois não é um produto final facilmente reconhecido. Assim, para que o aluno avance para generalizações matemáticas, ele precisa ser direcionado para aprender, ao longo de sua escolarização, a reconhecer e selecionar propriedades que matematicamente importam e segregar as outras. Portanto, a generalização se caracteriza como um processo que precisa do envolvimento dos estudantes com a tarefa matemática para reconhecê-la.

Os autores descrevem dois aspectos relacionados à generalização: a identificação de elementos comuns e a extensão do raciocínio para além do intervalo em que esses elementos comuns foram originalmente identificados.

Identificar elementos comuns acontece quando o aluno reconhece semelhanças em diferentes problemas, exemplos, representações, contextos ou situações. Esse exercício de generalizar, em comparação com tais situações, pode ser uma porta de entrada ao processo do RM, levando ao aprofundamento de compreensões matemáticas (Lannin; Ellis; Elliot, 2011).

A ampliação do RM acontece quando o aluno pensa “sobre uma relação, ideia, representação, regra, padrão ou outra propriedade matemática” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 20) e é capaz de projetá-la em um domínio mais amplo. Por exemplo, ao definir uma estratégia para subtrair números de dois dígitos, o aluno pode ampliar essa estratégia para outras situações, como para números de três dígitos. Mesmo que se verifique mais adiante que essa ampliação não explica todas as situações, o aluno dá um passo a mais no RM quando consegue fazer esse movimento de generalizar ideias e relações matemáticas.

Ainda sobre a generalização, temos o entendimento essencial 3: generalizar envolve identificar a aplicação da generalização, reconhecendo o domínio relevante. Refletir sobre o domínio, ou seja, sobre um conjunto de objetos matemáticos ou sistema para o qual é válida uma relação matemática, leva o aluno a identificar os limites que suas generalizações apresentam. Assim, as intervenções do professor neste processo podem conduzir os estudantes a evidenciar que, para um determinado domínio, a generalização se aplica, mas, para outros casos mais amplos, podem não se aplicar. Logo, os “limites das generalizações devem ser explicitados para que os estudantes adquiram uma melhor compreensão de como raciocinar sobre a generalização e como validá-la ou refutá-la” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 24).

Essas intervenções auxiliam o aluno a compreender o limite de sua generalização e, assim, tomar decisões sobre quando usar uma determinada estratégia. Por isso, Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 25) afirmam que “discutir os limites de uma generalização é uma parte importante da generalização e do desenvolvimento de generalizações”.

Finalizando este primeiro grupo (conjecturar e generalizar), há o entendimento essencial 4: conjecturar e generalizar envolve o uso e o entendimento do significado de termos, símbolos e representações. Comunicar o pensamento por meio de palavras é um exercício que requer algumas habilidades, dentre elas, o esclarecimento da linguagem matemática, dos símbolos e representações. Desse modo, Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 26) destacam que “é por meio do raciocínio sobre termos que os estudantes desenvolvem entendimentos matemáticos que ajudarão na construção de justificativas válidas”.

Um exemplo deste avanço gradual das definições matemáticas é: no primeiro ano do Ensino Fundamental, a definição de quadrado apresentada a um aluno pode ser uma forma com quatro lados do mesmo tamanho, utilizando, portanto, linguagem cotidiana ao se familiarizar com as figuras matemáticas. Já no terceiro ano, os estudantes deixam de usar a palavra, eles desenvolvem uma definição de quadrado que o caracteriza como uma figura com lados de comprimento iguais, utilizando-se mais da linguagem matemática para expressar a definição. Também podem começar a se atentar às medidas do ângulo de um quadrado para distinguir quadrados de losangos. Assim, os estudantes avançam em “suas definições à medida que ganham novos entendimentos da matemática, comparando novas ideias com aquelas consideradas anteriormente” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 27).

As conjecturas e generalizações são processos que se movimentam em espiral, levando os estudantes a se depararem com termos que precisam ser entendidos, validando-os ou refutando-os e, assim, promovendo a construção do conhecimento.

O segundo grupo dos processos do RM (Investigando o porquê) apresenta o entendimento essencial 5: *o Raciocínio Matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa*. O avanço no RM acontece por meio de repensar ideias iniciais, com atenção às “características particulares que fornecem uma visão das relações que podem explicar se uma generalização é verdadeira ou falsa” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 30). Assim, os estudantes consideram várias explicações para ajudá-los a entender porque uma declaração é, ou não, verdadeira. Muitas vezes, isso envolve retornar ao significado de operações e termos para examinar se existe uma relação geral, verificar o que é semelhante em vários exemplos e examinar representações que podem fornecer a visão de uma declaração geral.

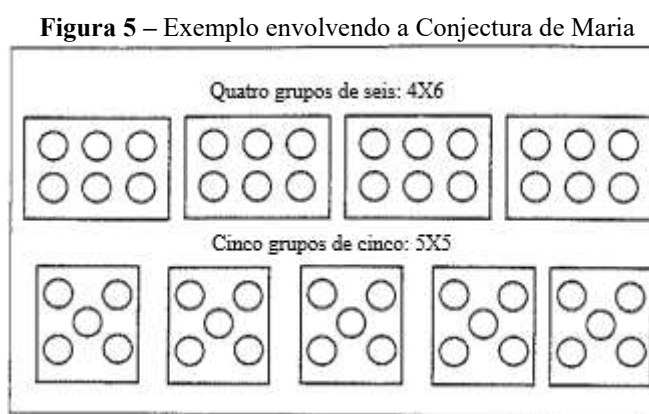
Exemplificando este entendimento, a Figura 4 mostra como uma aluna do 3º ano do Ensino Fundamental investiga uma relação que descobriu ao multiplicar números inteiros, desenvolvendo uma generalização sobre estes números.

Figura 4 – Exemplo envolvendo o Entendimento Essencial 5

Conjectura de Maria	
<i>Eu multipliquei 3×5 e percebi que o resultado é menos um de 4×4. Tentei isso com alguns outros números, e parece funcionar para todos os números.</i>	
$4 \times 6 = 24$, o resultado é um a menos de $5 \times 5 = 25$	
$7 \times 9 = 63$, o resultado é um a menos de $8 \times 8 = 64$	
$6 \times 8 = 48$, o resultado é um a menos de $7 \times 7 = 49$	
<i>Penso que sempre que se multiplicam dois números que se distanciam em duas unidades, o resultado é um a menos do que o próprio número no meio do intervalo multiplicado por ele mesmo.</i>	

Fonte: Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 31)

Nessa situação fictícia trazida pelos autores, a aluna se questionava a respeito da validade de sua conjectura e, assim, continuava testando outros exemplos com números cada vez maiores. Porém, não conseguia convencer seus colegas de sala apenas com os exemplos de que sua conjectura era verdadeira. Assim, a professora realizou intervenções, sugerindo que Maria pensasse o que sua conjectura significava, e a aluna afirmou que multiplicar 4 por 6 e 5 por 5 significava “quatro grupos de seis” e que multiplicar 5 por 5 significava “cinco grupos de cinco”, representando, por meio de desenhos, essa declaração (Figura 5).



Fonte: Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 32)

Por meio dessa representação, Maria percebeu outras relações, declarando que sempre terá um grupo com um elemento a menos ao tentar fazer mais um grupo. “Se você tiver 19 grupos de 21, poderá tirar um de cada um dos 19 grupos, deixando-o com 19 grupos de 20, mas você só tem 19 e não 20 para fazer o último grupo de 20” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 31). Assim, a conjectura apresentada por Maria seria verdadeira para qualquer um dos conjuntos que estavam analisando, pois observou que o primeiro conjunto sempre tem um a menos do que o segundo conjunto.

Investigar o porquê envolve explorar vários fatores, levando os estudantes a reconhecerem que as declarações gerais podem ser explicadas de diversas maneiras e que “a razão pela qual uma declaração geral é verdadeira ou falsa pode fornecer uma visão sobre novas relações matemáticas” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 34) Este processo torna possível o movimento de desenvolver novas generalizações ou refinar as já construídas, o que leva ao aprofundamento do entendimento dos estudantes sobre ideias matemáticas.

Por fim, o último grupo dos entendimentos essenciais (Grupo 3 – Justificando e Refutando), compreende os entendimentos essenciais de 6 a 9. Segundo Lannin, Ellis, Elliot (2011), ao estudarmos Matemática enquanto estudantes, a escola nos passou regras, sem que precisássemos raciocinar sobre elas, e, agora, enquanto professores que ensinam Matemática

com esse viés do RM, é preciso “avaliar a validade das justificativas e refutações dos estudantes, uma vez que reconhecer se uma justificativa matemática é válida, é um componente crítico do processo de raciocínio” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 35). Desse modo, olhar com atenção para esses processos do RM é uma oportunidade de aperfeiçoar o olhar para as declarações dos estudantes durante a realização de tarefas que permitam justificar seu RM.

Entendimento essencial 6: uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas. Ao elaborar uma justificativa, o aluno apresenta um conjunto de declarações baseado em ideais já compreendidas como verdadeiras, procurando, desta forma, convencer-se a si mesmo e aos outros que essa justificativa é válida. Assim, é importante considerar duas características para a validade dessa justificativa: “(1) linguagem que afirma uma relação geral e especifica um domínio, e (2) raciocínio que apoia a relação geral e mostra que ela se mantém para todas as instâncias no domínio” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 36).

Para exemplificar este entendimento, Lannin, Ellis, Elliot (2011) apresentam justificativas de três alunas, que explicam o porquê duas frações são equivalentes ($\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$) (Quadro 3).

Quadro 3 – Exemplo envolvendo o Entendimento Essencial 6

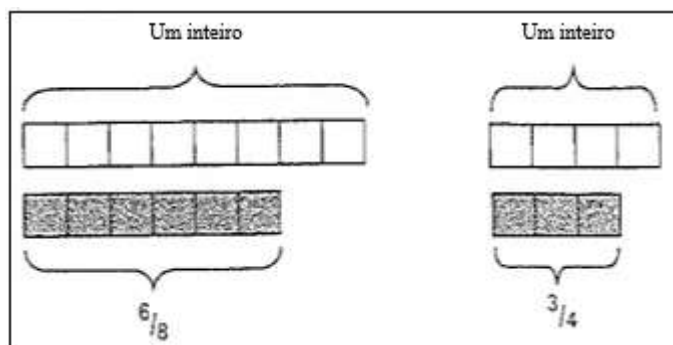
Aluna 1: “Para mostrar que duas frações são equivalentes, olhamos para o $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$. Três quartos é equivalente a $\frac{6}{8}$ porque pode dividir o numerador e denominador de $\frac{6}{8}$ por 2, fazendo de $\frac{3}{4}$ o mesmo número que $\frac{6}{8}$. Pode fazer isto para duas frações quaisquer”.

Aluna 2: Duas frações são equivalentes quando se pode dividir uma fração por algo para fazer a outra fração. Três quartos é equivalente a $\frac{6}{8}$ porque se pode dividir $\frac{6}{8}$ ao meio para fazer $\frac{3}{4}$. Olha o meu desenho [aponta para um desenho - apresentado abaixo na Figura 6] quando $\frac{6}{8}$ é dividido por 2 ou cortado ao meio é o mesmo que $\frac{3}{4}$.

Aluna 3: Três quartos é equivalente a $\frac{6}{8}$ porque se desenhar ambos os quadros, pode ver que dois dos oitavos são o mesmo que um quarto. Assim, pode-se ver que o $\frac{3}{4}$ sombreado é o mesmo que o $\frac{6}{8}$. Veja o meu desenho [aponta para o desenho - apresentado abaixo na Figura 7]. Para frações equivalentes, pode sempre dividir partes para generalizar a mesma fração. Por exemplo, $\frac{2}{3}$ é o mesmo que $\frac{6}{9}$ porque se pode dividir cada um dos terços em três partes, fazendo nonos.

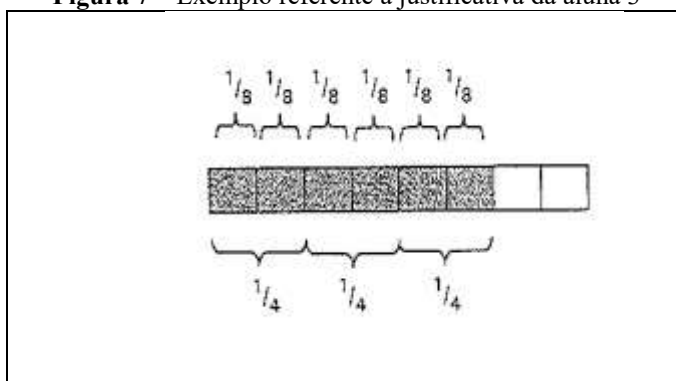
Fonte: Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 36-37)

Figura 6 – Exemplo referente à justificativa da aluna 2



Fonte: Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 37)

Figura 7 – Exemplo referente à justificativa da aluna 3



Fonte: Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 37)

Ao analisar cada uma dessas justificativas, percebemos que as alunas apresentaram argumentos lógicos baseados no que sabem. Assim, a aluna 1 apresentou uma conclusão válida, mas não foi além em sua explicação, por exemplo, limitando-se a descrever o processo que poderia ser utilizado para a simplificação da fração. Dessa forma, sem a explicação subjacente que descreve porque essa relação é verdadeira para todas as instâncias, esta justificativa é insuficiente. A aluna 2 apresentou uma justificativa inválida, pois, na sua representação, as duas partes sombreadas não estão relacionadas ao mesmo todo (ao mesmo inteiro). Pode ser que, neste caso, a aluna não compreendeu o significado de duas quantidades serem equivalentes. Já a aluna 3 apresentou uma justificativa válida e exemplificou por meio de outras frações, provando que sempre se pode dividir as partes para gerar a mesma fração, afirmando que o raciocínio para explicar o porquê $3/4$ é equivalente a $6/8$, pode ser aplicado a qualquer outra situação que envolva frações equivalentes.

Outro exemplo em que há uma limitação na justificativa é trazido por Lannin, Ellis e Elliot (2011), no qual uma aluna do 2º ano do Ensino Fundamental e seus colegas estão discutindo as relações quando acrescentam números inteiros. Essa aluna afirmou que “quando dois números são somados, o resultado é sempre um número que é maior do que qualquer um dos dois números que são adicionados. Assim, quando adicionam 5 e 7, o resultado é 12, que é

maior do que 5 e do que 7. Ainda, a aluna justificou que adicionar significa juntar, então, se juntarmos algo com outra coisa, obtemos mais”. (Lannin; Ellis e Elliot, 2011, p. 41).

Analisando esta justificativa, notamos que ela é válida apenas para um subconjunto do domínio da generalização, o que exclui casos com 0 (zero). Assim, a declaração deve ser revisada para incluir apenas números inteiros maiores que 0 (zero). Cabe ao professor evidenciar reflexões com os estudantes que os levem a perceber o limite de suas generalizações e, assim, explicitar com maiores detalhes seus argumentos para o caso específico.

Justificar também envolve mostrar que algumas declarações são falsas. Assim, refutar e validar declarações são ações importantes, pois as conjecturas produzem tanto afirmações verdadeiras quanto falsas.

A justificação matemática envolve componentes importantes, incluindo a criação de argumentos, explicando porque as conjecturas são verdadeiras, entendendo o papel das definições e contraexemplos, e demonstrando que as conjecturas são falsas (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 43).

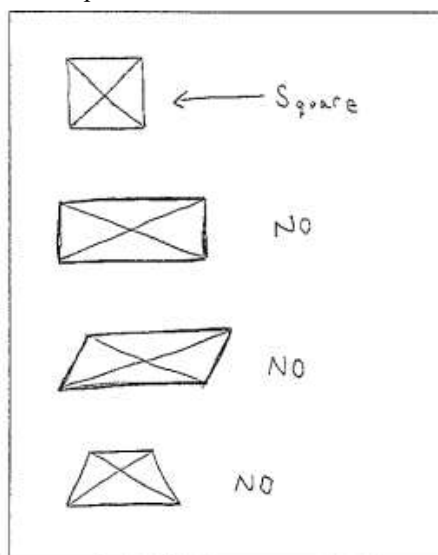
Nesse contexto, apresentamos o entendimento essencial 7: *Uma refutação matemática envolve mostrar que uma afirmação particular é falsa*. Um dos caminhos para verificar se uma conjectura é verdadeira ou não se dá por meio de contraexemplos, considerando que, na matemática, um único contraexemplo é o suficiente para invalidar uma conjectura. Além disso, contraexemplos podem proporcionar uma compreensão mais profunda dos princípios matemáticos a serem potencializados com a discussão, levando ao desenvolvimento de novas ideias ou *insights*. Desse modo, o entendimento essencial 8, *Justificar e refutar envolve avaliar a validade dos argumentos*, apresenta o quão importante é olhar para as declarações que são apresentadas e “envolve determinar se elas incluem suposições corretas ou equivocadas, conclusões válidas com lógica equivocada ou argumentos válidos que, no entanto, explicam apenas uma parte da declaração” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 43).

Para exemplificar esse entendimento, vamos voltar às três justificativas apresentadas na discussão do entendimento essencial 6, com estudantes explicando o porquê duas frações são equivalentes ($\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$). Especificamente, olharemos para a justificativa da aluna 1 e 3. Nessas justificativas, os argumentos sustentam conclusões corretas, no entanto, a aluna 1 apenas citou um procedimento, sem fornecer uma justificativa que validasse o porquê dividir tanto o numerador quanto o denominador por 2 indicou que duas frações são equivalentes. É preciso olhar além do resultado final para avaliar se os argumentos de outra pessoa dão suporte à sua conclusão. Assim, olhamos para a justificativa da aluna 3 e notamos que ela forneceu

informações sobre o método geral para criar frações equivalentes. Mesmo apresentando uma figura que representa apenas duas frações, a aluna citou em seu argumento que sempre pode dividir as partes para gerar a mesma fração. Essa afirmação aborda uma ideia geral de que cada parte sempre pode ser dividida em qualquer número de partes iguais. Ainda, a aluna apresentou um exemplo com frações diferentes das apresentadas na tarefa.

A avaliação de um argumento permite “desenvolver oportunidades para dar sentido à própria conjectura ou para revisar uma conjectura” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 48). Como exemplo trazido pelos autores, consideramos um contexto de uma aula do 6º ano do Ensino Fundamental, na qual um aluno apresenta à turma uma conjectura sobre quadriláteros ao dizer que os quadrados são os únicos quadriláteros que têm diagonais perpendiculares. Por meio de desenhos (Figura 8), explicou que as diagonais do quadrado são perpendiculares, mas isso não ocorre em outros quadriláteros. Segundo ele, o “retângulo não funciona porque dois dos lados são longos e dois dos lados são curtos, e isso faz com que as diagonais não sejam perpendiculares. O paralelogramo é da mesma forma, assim como o trapézio” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 48). Assim, o aluno conclui que um quadrilátero precisa ter todos os quatro lados com o mesmo comprimento para que as diagonais sejam perpendiculares.

Figura 8 – Exemplo envolvendo o Entendimento Essencial 8



Fonte: Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 48)

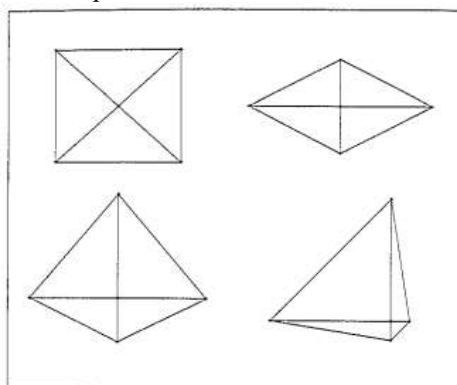
O aluno elaborou sua conjectura baseada na aparência de seus desenhos. Uma colega questionou o porquê de todos os quatro lados terem o mesmo comprimento, ao que ele respondeu que o quadrado tem diagonais perpendiculares e complementou exemplificando “digamos que eu pegue as pontas do quadrado e as puxe para fora, esticando o quadrado. Você

pode ver como as diagonais se moveriam então, e elas não seriam mais perpendiculares” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 48).

Essa afirmação levou os colegas de sala a elaborarem outras conjecturas sobre os lados do quadrado, trazendo um contraexemplo: se, ao invés de torná-lo comprido arrastando seus lados, apenas os inclinassem, tornando-o um losango, as diagonais ainda seriam perpendiculares. A partir dessa conjectura, registraram desenhos de vários losangos diferentes e notaram ter apenas diagonais perpendiculares, revisando a conjectura inicial apresentada pelo colega, concluindo que apenas os quadriláteros com quatro lados iguais terão diagonais que se dividirão ao meio.

O professor, ao perceber que os estudantes ainda estavam se baseando em percepções por meio dos desenhos, já que eles justificaram que os losangos e quadrados tinham diagonais perpendiculares pela sua aparência no desenho, apontou-lhes o inconveniente e solicitou que pensassem novamente o que seria um bom argumento para a conjectura revisada. Após essa ação do professor, uma aluna deu um argumento diferente, explicando que, ao invés de começar pelo desenho da forma, iniciou pelo desenho das diagonais que são perpendiculares, elencando dois grupos diferentes entre si. O primeiro era composto de diagonais que são perpendiculares e se dividem ao meio, e o segundo, de diagonais que são perpendiculares, mas que não se biseccionam, como mostra a figura 9. Assim, concluiu que “se as diagonais se dividem, você pode ter um quadrado, um losango ou uma pipa. E então, se você tiver diagonais que não se dividem, você pode obter todos os tipos de formas realmente estranhas que não parecem nada de especial” (Lannin, Ellis, Elliot, 2011, p. 50).

Figura 9 - Exemplo envolvendo o Entendimento Essencial 8



Fonte: Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 50)

A Figura 9 mostra quatro formas de representar as duas condições que a aluna tinha em mente. A partir deste desenho, os estudantes perceberam que, na verdade, existem muitas

formas diferentes com diagonais perpendiculares, e nem todas têm lados com o mesmo comprimento. Assim, apresentam uma nova conjectura: “retângulos e paralelogramos não têm diagonais perpendiculares, mas quadrados, losangos e alguns trapézios têm, assim como alguns outros quadriláteros” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 50). Essa conjectura ainda requer refinamentos, mas o que fica evidente é que a revisão das conjecturas e dos contraexemplos mostram um avanço no raciocínio matemático. Portanto, avaliar a validade de um argumento que sustenta uma conjectura pode levar os estudantes a refletirem sobre suas ideias iniciais, construir um argumento mais apropriado, com a oportunidade de refinar suas conjecturas.

Por fim, apresentamos o entendimento essencial 9: *uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral não é um argumento baseado em autoridade, percepção, consenso popular ou exemplos*. Ao justificar uma conjectura ou generalização, os estudantes podem apresentar declarações inválidas, pois baseiam-se em fontes externas como livros didáticos, a autoridade de um professor, a ideia de um colega, enfim, buscam por exemplos que não são suficientes para validar a generalização para um número infinito de casos. Assim, esse entendimento 9 evidencia a relevância do trabalho com a justificativa no sentido de apresentar aos estudantes “a importância de desenvolver argumentos matemáticos lógicos como meio de validar ideias dentro da disciplina de Matemática” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 53).

Trazemos, como exemplo proposto pelos autores, o contexto de uma turma de 3º ano do Ensino Fundamental, em que os estudantes estão discutindo uma generalização apresentada por um colega. Ele tenta justificar sua ideia baseado em evidências inválidas, e a intervenção da professora conduz os estudantes a testarem a justificativa levantada inicialmente e, assim, apresentarem um argumento válido.

Nesse contexto, Samuel generalizou que, ao somar os números em qualquer ordem das parcelas, obterá sempre a mesma resposta. A professora instigou-o a apresentar uma explicação mais completa e, então, ele diz que se lembrou que a professora da série anterior contou a ele. Relatou que fizeram muitos problemas desse tipo e, também, que uma colega que considerava muito esperta mostrou que a ordem dos números, com relação às parcelas, não importava. Ele concluiu dizendo que, depois dessa discussão, somou muitos números diferentes, modificando a ordem das parcelas e sempre obteve a mesma resposta, provando a si mesmo que essa ideia funcionava.

Outras justificações surgiram, mas ainda eram insuficientes para justificar a afirmação, uma vez que não explicavam o porquê a adição é comutativa. Um outro aluno pergunta se o uso dos blocos de base dez poderiam servir para explicar essa relação. A professora sugere que tentem, assim, uma aluna generaliza ao afirmar que a maneira de somar números é sempre a de

juntar as unidades, as dezenas e as centenas, não importando se começam a contar com o número maior ou menor, pois, ao final, obtém-se a mesma resposta e concluiu dizendo que “poderíamos fazer isso com qualquer tamanho de número, até mesmo de outras ordens. Penso que a conjectura de Samuel está certa, não importa quais números usamos, por causa da maneira como contamos” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 52).

Neste exemplo, podemos reconhecer que, ao conjecturar, os estudantes fazem declarações que consideram verdadeiras, baseadas em evidências que, para eles, pareciam provar a propriedade comutativa da adição. A condução da professora levou os estudantes “a reconhecerem a importância de fazer uma justificativa que pudesse ser aplicada a cada instância” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 54). Assim, os autores concluem que o desenvolvimento de justificativas a partir de “modelos ou ferramentas acessíveis para construir argumentos que validam uma generalização para todos os casos permite que aos estudantes racionar e justificar de maneiras que são fundamentais para a matemática” (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 54).

Compreender os processos do RM e os nove entendimentos apresentados por Lannin, Ellis e Elliot (2011) pode oferecer ao professor em formação oportunidades de aprendizagem por meio de reflexões a respeito da maneira como seu aluno raciocina. Como consequência, pode contribuir para que esse professor proporcione um ensino de Matemática que possibilite uma aprendizagem mais efetiva ao compreender como ele pode selecionar tarefas e realizar intervenções que levem os estudantes a mobilizarem processos de conjecturar e generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar, propiciando o desenvolvimento de habilidades que envolvem a competência de raciocinar (Brasil, 2017).

Assim, apresentamos, a seguir, uma possibilidade para organizar processos formativos que promovam oportunidades de aprendizagem a professores e, consequentemente, contribuam para o desenvolvimento do RM dos estudantes, foco do processo formativo desenvolvido nesta pesquisa.

1.2 OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL DO PROFESSOR

Ao escolher a profissão docente, temos, por objetivo, contribuir com a aprendizagem do aluno. Para tanto, faz-se necessária a formação adequada com relação aos saberes teóricos e orientação quanto à prática letiva (Ponte, 1999). A prática, sem a reflexão das ações, torna-se sem sentido para os envolvidos, distanciando-os do seu objetivo principal. Assim, a formação

continuada deve, entre outras coisas, propiciar uma “reflexão crítica sobre a prática” (Freire, 1996, p.36) na perspectiva de possibilitar ao professor tornar-se reflexivo (Schön, 1983).

Em sua prática, profissionais da educação deparam-se com uma série de problemas não previstos na formação inicial. Entre eles, o insucesso dos estudantes, uma matriz curricular que não atende às necessidades do público final, instituições educativas com poucos recursos e a incompreensão da sociedade sobre as reais condições de trabalho (Ponte, 2004). Propor momentos de discussão com caráter de formação por meio da pesquisa de sua prática (Stenhouse, 1975; Lüdke, 2001; Pereira, 1998) contribui para o exercício de refletir criticamente frente às adversidades, além de proporcionar o desenvolvimento profissional dos envolvidos e do ambiente em que trabalham (Nóvoa, 1992; Ponte, 2004).

Nesse cenário, o professor não é aquele que desempenha um papel de executor de um currículo e técnicas de ensino alheias à sua prática profissional. Ao contrário, os professores produzem e organizam o conhecimento pedagógico por meio da reflexão na e sobre a interação do conhecimento científico e a aprendizagem do aluno (Alarcão, 2005). Assim, além do conhecimento do conteúdo a ser ensinado, o professor precisa explorar metodologias que permitam a compreensão dos conteúdos pelos estudantes (Shulman, 1986, 1987).

Com base nos estudos de Shulman (1986, 1987), que propõe categorias que devem ser consideradas para o conhecimento profissional dos professores, diversos pesquisadores da área de Educação Matemática têm sugerido quadros teóricos para caracterizar o conhecimento que é específico ao trabalho docente nesta área do conhecimento. Elegemos, como foco desta pesquisa, o modelo proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), o Conhecimento Matemático para o Ensino, *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), para organizar oportunidades de aprendizagem profissional vivenciadas pela professora participante no processo formativo. De acordo com os autores, esse modelo apresenta os conhecimentos necessários ao professor que ensina Matemática, pois se baseia na prática docente (Conhecimento Pedagógico do Conteúdo) e no conhecimento específico da área (Conhecimento Específico do Conteúdo), organizados em seis subdomínios, como apresentado na Figura 10.

Figura 10 - Subdomínios do MKT



Fonte: Elias (2017, p. 32), traduzido de Ball, Thames e Phelps (2008)

O Conhecimento Específico do Conteúdo (CK) apresenta como subdomínios: o Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), utilizado por quem tenha estudado Matemática, sem compromisso com o ensino; o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), voltado ao ensino e dá suporte para que o professor possa realizar adaptações de modo a atender as especificidades dos estudantes; e o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK), que possibilita que o professor compreenda a relação existente entre os tópicos matemáticos e a sua evolução ao longo da escolaridade.

Já no Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) há: o subdomínio Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) diz respeito ao conhecimento matemático e o conhecimento dos estudantes, com relação a como aprendem e as dificuldades que geralmente apresentam; o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT) dá condições ao professor de planejar a aula considerando as dificuldades recorrentes no processo de ensino da Matemática, procurando definir uma estratégia metodológica que atenda a demanda conhecida; e o Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC) aponta o conhecimento da organização da Matemática ao longo do currículo, reconhecendo a ordem usual dos temas matemáticos usados para o ensino.

O professor de Matemática envolvido com as demandas do dia a dia da sala de aula pode se distanciar de estudos que privilegiam a reflexão sobre esses subdomínios de conhecimento propostos por Ball, Thames e Phelps (2008). Deste modo, proporcionar oportunidades de aprendizagem profissional na perspectiva do trabalho colaborativo (Ponte, 2004) tem se apresentado como uma estratégia promissora para o desenvolvimento profissional do professor por meio de processos de formação continuada que relacionam a teoria e a prática.

O modelo PLOT (*Professional Learning Opportunities for Teacher*), sugerido por Ribeiro e Ponte (2020), foi concebido com o propósito de fornecer parâmetros para organizar e desenvolver processos formativos que visem efetivar oportunidades de aprendizagem voltadas ao professor e, conseqüentemente, contribuam para o processo de aprendizagem dos estudantes.

Ele constitui-se como um modelo teórico-metodológico para “(i) organizar o design de processos formativos que objetivem promover aprendizagem aos professores e (ii) gerar oportunidades para os professores aprenderem durante processos formativos” (Ribeiro; Ponte, 2020, p.2). Organiza-se em torno de três diferentes domínios: (a) Papel e Ações do Formador (PAF), (b) Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) e (c) Interações Discursivas entre os Participantes (IDP). Cada um desses domínios é dividido em duas dimensões: a conceitual (referente à estrutura e à base teórica) e a operacional, que subsidia a implementação do modelo. As Figuras 11 e 12 ilustram as dimensões, os componentes e as características do modelo PLOT em seus três domínios.

Figura 11: Modelo PLOT seus domínios e dimensões



Fonte: Autora, baseado em Ribeiro e Ponte (2020).

Figura 12: Dimensões, componentes e características do modelo PLOT em seus três domínios

	<i>Dimensão Conceitual</i>		<i>Dimensão Operacional</i>	
	<i>Componente</i>	<i>Característica</i>	<i>Componente</i>	<i>Característica</i>
<i>Papel e Ações do Formador (PAF)</i>	<i>Aproximação</i>	Favorecer a aproximação da Matemática Acadêmica (MA) à Matemática Escolar (ME) e vice-versa.	<i>Gestão</i>	Promover o gerenciamento de um ambiente de ensino-aprendizagem exploratório, com as diferentes fases desta abordagem.
	<i>Articulação</i>	Estimular a articulação entre as dimensões matemática e didática do conhecimento profissional para ensinar.	<i>Orquestração</i>	Preparar e desenvolver a orquestração de discussões matemáticas e didáticas entre todos os participantes.
<i>Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP)</i>	<i>Conhecimento Profissional</i>	Explorar os conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores, relacionados à/s TME.	<i>Tarefa Matemática</i>	Contemplar tarefa/s matemática/s dos estudantes (TME), de alto nível cognitivo.
	<i>Ensino Exploratório</i>	Possuir estrutura que propicie um ambiente de ensino-aprendizagem exploratório.	<i>Registros de Prática</i>	Envolver diferentes tipos de registros de prática, organizados em forma de <i>Vignettes</i> .
<i>Interações Discursivas entre os Participantes (IDP)</i>	<i>Discussões Matemáticas e Didáticas</i>	Contemplar, de forma articulada, as discussões matemáticas e didáticas relacionados às TME.	<i>Linguagem mobilizada</i>	Contemplar a utilização de linguagem matemática e didática adequada e pertinente ao nível de ensino das TME.
	<i>Argumentação e Justificação</i>	Envolver argumentação e justificação matemáticas e didáticas válidas.	<i>Comunicação dialógica</i>	Promover a comunicação dialógica e integrativa entre todos os participantes.

Fonte: Ribeiro e Ponte (2020, p. 7).

O domínio Papel e Ações do Formador (PAF) apresenta como componentes a aproximação, a articulação, a gestão e a orquestração. A dimensão conceitual (que contempla as duas primeiras componentes) tem como intenção aproximar a Matemática Acadêmica da Matemática Escolar, articulando a matemática e a didática ao conhecimento que o professor necessita para ensinar. Na dimensão operacional (duas últimas componentes), o formador promove um ambiente de ensino e de aprendizagem exploratório com momentos de discussões matemáticas e didáticas que envolvam todos os participantes.

Quanto ao segundo domínio, Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), Ribeiro e Ponte (2020) viabilizam a construção e o desenvolvimento de tarefas voltadas para aprendizagem do professor no decorrer do processo de formação. Seus componentes são: conhecimento profissional, ensino exploratório, tarefa matemática e registros de prática. Na dimensão conceitual (duas primeiras componentes), as TAP propiciam, aos professores, reflexões a respeito do conhecimento profissional ao olharem para a prática em uma perspectiva de ensino exploratório. Na dimensão operacional (duas últimas componentes), busca-se por

tarefas matemáticas de alto nível cognitivo e diversos registros de prática dos estudantes no trabalho com tais tarefas, de modo que esse material favoreça “a exploração e a investigação matemática e didática, no desenvolvimento do processo formativo”. (Silva; Ribeiro; Aguiar, 2023, p.79).

Ainda, ressaltamos que o uso das TAP, num contexto colaborativo, podem oferecer oportunidades de aprendizagem profissional baseadas em práticas reais de ensino com a “seleção ou criação de materiais que descrevam de forma útil o trabalho do professor e possam ser selecionados, representados ou modificados para criar oportunidades tanto para professores iniciantes quanto para professores em atuação aprenderem” (Ball; Even, 2009, p. 13). De acordo com Ribeiro, Aguiar e Trevisan (2020, p. 55),

as TAP são tarefas elaboradas com a finalidade de propiciar aprendizagens aos professores em uma situação específica (Ball & Cohen, 1999) e são caracterizadas, dentre outros aspectos, pelo uso de registros de prática (Ball, Ben-Peretz & Cohen, 2014), tais como, protocolos de resoluções de estudantes, recortes de propostas curriculares, e planos de ensino. Ao combinar tais recursos na elaboração das TAP, diferentes autores destacam a importância de se levar em conta que tais tarefas se constituem em ferramentas poderosas para que se leve, para o contexto da formação de professores, aspectos da prática da sala de aula como integrantes destas TAP (Smith, 2001).

Por fim, o domínio Interações Discursivas entre os Participantes (IDP) tem os seguintes componentes: discussões matemáticas e didáticas, argumentação e justificação, linguagem mobilizada e comunicação dialógica. Na dimensão conceitual, as IDP têm, por finalidade, promover discussões matemáticas e didáticas como um meio para favorecer a aprendizagem profissional de professores, envolvendo-os em um ambiente que promova a argumentação e a justificação. Na dimensão operacional, considera-se o estímulo ao uso de linguagem matemática correta e adequada ao nível de escolaridade dos estudantes e permite que os professores reconheçam a importância de desenvolver aulas que favoreçam a comunicação dialógica.

No intuito de operacionalizar o modelo PLOT em um contexto formativo, Ribeiro e Ponte (2020, p.4) destacam três fases:

- (1) Organização: momentos em que o formador elabora o processo formativo (seja no todo ou em partes) e constrói o design da(s) TAP e das potenciais IDP.
- (2) Desenvolvimento: momentos em que os participantes (formador e formandos) passam a interagir entre si, mediados pelo uso da(s) TAP e pela concretização das IDP.
- (3) Finalização: momento em que, por meio processo aglutinador entre as três dimensões (PAF, TAP e IDP), se efetiva a(s) OAP.

Esse modelo vem sendo utilizado em diversas pesquisas realizadas tanto no âmbito do ForMatE (Formação Matemática para o Ensino), coordenado pelo Prof. Dr. Alessandro Jacques

Ribeiro, quanto no âmbito do grupo de pesquisa “Raciocínio matemático e formação de professores”, contexto no qual se insere a pesquisa que deu origem a esta dissertação⁸. Em geral, processos formativos desenvolvidos no âmbito desses grupos incluem o uso de diferentes TAP, sendo que as três últimas formam um ciclo interativo de planejamento, desenvolvimento e reflexão de aulas elaboradas coletivamente pelo grupo de professores – Ciclo PDR, detalhado na próxima seção.

1.3 CICLO PDR

Subsidiado pelo modelo PLOT, o ciclo PDR (Trevisan; Ribeiro; Ponte, 2020) vem sendo adotado em contextos de formação que tentam gerar, aos professores participantes, oportunidades de aprendizagem profissional, que envolvem três segmentos de atividades de prática docente: o Planejamento (P), o Desenvolvimento (D) e a Reflexão (R) sobre as aulas, conforme indica a Figura 13.

Figura 13 – Ciclo PDR



Fonte: A autora, baseado em Trevisan, Ribeiro e Ponte (2020)

Na etapa do planejamento, em pequenos grupos, os professores organizam uma proposta de aula envolvendo um conceito matemático particular, seguida de uma apresentação e uma discussão em plenária com todos os participantes do processo formativo.

⁸ Mais detalhes sobre pesquisas já realizadas no âmbito dos dois grupos mencionados podem ser consultados acessando a aba “Produções” no currículo Lattes de seus líderes, a constar: <http://lattes.cnpq.br/8469011549621156> e <http://lattes.cnpq.br/3166010229447391>.

No desenvolvimento, um (ou mais) professor(es) encena(m) o plano de aula em uma sala de aula e os outros professores e/ou o formador acompanham e coletam alguns registros de prática;

Por fim, a reflexão ocorre depois que o professor formador prepara episódios a partir dos registros da prática gerados na aula (ou aulas) encenada, permitindo que professores realizem uma análise detalhada desses episódios da aula e os discutam na sessão final com todo o grupo.

Estudos já realizados com o uso deste ciclo apontam resultados promissores em termos das OAP geradas. Trevisan, Ribeiro e Ponte (2020), por exemplo, identificaram oportunidades de aprendizagem profissional vivenciadas por duas professoras no que se refere aos conhecimentos matemáticos e didáticos para o ensino de função na Educação Básica em um contexto de aprendizagem baseado na prática. Os autores analisaram dados de um processo formativo na qual foi proposto o trabalho com o ciclo PDR sobre uma aula de Matemática para o Ensino Médio conduzida na perspectiva do ensino exploratório, com foco em duas vertentes do conhecimento profissional do professor de Matemática mobilizadas pelas professoras. A saber, eles são: (i) o conhecimento da Matemática para ensinar função e (ii) o conhecimento da prática letiva ao ensinar função.

Aguiar e Ribeiro (2022), por sua vez, buscaram identificar e compreender como oportunidades de aprendizagem profissional emergem quando professores discutem e analisam, coletivamente, aulas envolvendo padrões e regularidades na escola básica. Os resultados apontaram que TAP envolvendo o ciclo PDR favorecem a discussão entre professores a respeito do conhecimento dos estudantes e do ensino acerca de padrões e regularidades. Mostraram, ainda que “os professores participantes mobilizaram e ampliaram seus conhecimentos sobre a interpretação de diferentes formas de se generalizar um padrão matemático”, e também “ampliaram seus próprios conhecimentos matemáticos acerca deste importante tema a ser discutido na escola básica” (Aguiar; Ribeiro, 2022, p.274-275).

Inspirados nessas experiências, e a partir dos referenciais teóricos apresentados neste capítulo, um processo formativo voltado a professores que ensinam Matemática foi planejado e desenvolvido, que nos permitiu fazer um recorte dos encontros que possibilitaram responder a nossa pergunta de pesquisa. Os procedimentos metodológicos estão detalhados no próximo capítulo.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos a caracterização e o contexto da pesquisa, a organização do processo formativo, os dados para pesquisa e os procedimentos para análise destes dados.

2.1 CARACTERIZAÇÃO E CONTEXTO DA PESQUISA

Esta pesquisa adota uma perspectiva qualitativa de cunho interpretativo (Bogdan; Biklen, 1994), e se insere no âmbito de um projeto que pesquisa que se constituiu na elaboração e desenvolvimento de processos de formação continuada para professores que ensinam Matemática, seguindo os princípios metodológicos da Investigação Baseada em Design – IBD. O projeto inclui ciclos envolvendo três fases: preparação, realização e análise (Ponte *et al.* 2016). Estrutura-se em uma intervenção (Cobb *et al.*, 2003), com o objetivo de oportunizar aos professores em contexto de formação continuada compreensões acerca do RM, contribuindo assim com seu desenvolvimento profissional.

Assim, o processo de formação que gerou dados para pesquisa faz parte de um projeto cadastrado na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR – Campus Cornélio Procopio e Londrina), proposto por dois professores da instituição, sendo um deles orientador desta pesquisa, e teve como objetivo promover discussões e reflexões envolvendo o RM, seus processos e seus entendimentos, mediante as práticas de ensino de Matemática, propiciando um ambiente gerador de oportunidades de aprendizagem profissional por meio do uso de TAP (Tarefas de Aprendizagem Profissional). O projeto visou o estudo de ambientes educacionais e tarefas exploratórias para o ensino e a aprendizagem matemática, além de que foi pensado a partir de um conjunto de fatores com potencial para desenvolver o RM dos estudantes e, em consequência disso, a aprendizagem matemática. Como propósito, caracterizou o RM e seus processos, pensando em tarefas que o integrassem nas aulas de Matemática e promovendo a formação de professores que implementem tais ações em salas de aula ao investigar dados oriundos das aulas resultantes desses processos.

O primeiro ciclo deste contexto de formação foi elaborado e conduzido por um mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) no ano de 2022, e teve como participantes professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental da própria escola em que ele atuava. Foram realizados cinco encontros presenciais, contando com 10 participantes (Anjos, 2023).

Neste ano de 2023, o professor formador e orientador desta pesquisa, juntamente com sua orientanda de doutorado da UTFPR campus Ponta Grossa do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia (PPGECT) e a orientanda de mestrado da UTFPR campus Londrina do PPGMAT (autora desta dissertação), planejaram e organizaram o segundo ciclo do processo formativo, com o principal objetivo de oportunizar aos professores que ensinam matemática momentos de discussão e reflexão sobre os processos de RM.

Neste segundo ciclo, foram propostos mais encontros em relação ao primeiro desenvolvido por Anjos (2023), e um tempo maior foi disponibilizado para discutir os entendimentos essenciais do RM. Também implantamos o ciclo PDR e ampliamos o público-alvo, o que possibilitou maior diversidade de experiências. O processo formativo foi ofertado na modalidade de extensão e aprovado internamente na instância correspondente na UTFPR.

A carga horária certificada foi de 40 horas, sendo que inicialmente foram propostos oito encontros síncronos quinzenais (20 horas) às quartas-feiras, das 19h às 21h30min, por meio da plataforma *Google Meet* e atividades assíncronas (20 horas), disponibilizadas por um grupo de *WhatsApp*. Utilizamos como base deste 2º ciclo o produto educacional desenvolvido a partir do 1º ciclo, um caderno com orientações e TAP para formadores (Anjos, 2023). Assim, definiu-se o público-alvo (professores que ensinam Matemática em diferentes níveis de escolaridade) e se delimitou, inicialmente, um número máximo de 10 participantes.

A intenção em constituir um grupo relativamente pequeno foi a de oportunizar um maior envolvimento dos participantes nas discussões e contribuições dentro da proposta da formação. Um material de divulgação foi elaborado para que o convite acontecesse de maneira individual aos professores que fazem parte do contexto profissional/social dos formadores. Enviamos também um formulário de interesse para que se estabelecesse um primeiro contato e, a partir disso, criássemos um grupo no *WhatsApp*, formando o grupo de estudos (Figura 14).

Figura 14 - Convite aos professores que ensinam Matemática

Grupos de Estudos com PROFESSORES que ENSINAM MATEMÁTICA
DIFERENTES NÍVEIS DE ESCOLARIDADE

8 ENCONTROS QUINZENAIS VIA GOOGLE MEET

PERÍODO DE 01/03 A 14/06

Certificado de 40h
Quartas-feiras das 19h às 21h30min

COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS CONTRIBUIÇÕES COM O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL

Vagas limitadas!

UTFPR

COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS CONTRIBUIÇÕES COM O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL

Inscrição para Grupo de Estudos Online

A formação se configura em um grupo de estudos colaborativo, formado por professores que ensinam Matemática em diferentes níveis de escolaridade, uma mestranda em Ensino de Matemática da UTFPR, uma doutoranda em Ensino de Ciência e Tecnologia e professores do Departamento de Matemática da UTFPR. Nossa intenção é que vocês, professores que estão em sala de aula, compreendam os processos de Raciocínio Matemático e possam trazer para o grupo exemplos da prática vivenciada nas suas aulas. Temos a intenção de, em conjunto, estudar, planejar tarefas e desenvolvê-las, para que possamos compreender entendimentos essenciais do Raciocínio Matemático, visando o desenvolvimento profissional do professor.

Nossa proposta não é de um "curso pronto", mas uma formação que vai se construindo a partir das demandas dos professores participantes.

Ao se inscrever, está ciente que o grupo de estudos ocorrerá de maneira remota, sendo necessário internet compatível, equipamento que permita sua participação com câmera e áudio abertos. Para fins de pesquisa os encontros serão gravados, ficando as gravações em posse dos pesquisadores.

Fonte: Os pesquisadores responsáveis pela organização do 2º ciclo

Após a abertura do formulário, havia algumas perguntas do perfil do participante: nome completo, CPF, RG, e-mail, celular, qual(is) turma(s) está trabalhando este ano, além da modalidade de ensino em que atua em 2023. O número de interessados ultrapassou a nossa expectativa inicial, uma vez que recebemos 17 inscrições. Permanecemos com todos os interessados, pois a experiência do professor orientador desta pesquisa em outros processos formativos indicava que alguns participantes desistiam no decorrer da formação. Com os dados iniciais dos interessados, organizamos um e-mail de acolhimento e um grupo no aplicativo de conversas *WhatsApp*, permitindo uma interação mais direta com cada professor cursista, como mostra a Figura 15.

Figura 15 – E-mail enviado aos inscritos no curso de formação

E-mail para ser encaminhando aos participantes do GE

Caro participante, espero que se encontre bem e animado (a) para iniciar as tarefas do Grupo de Estudos: **compreensões sobre os processos de raciocínio matemático e as contribuições com o desenvolvimento profissional.**

Entramos em contato para repassar algumas informações iniciais dos encontros, são elas:

Datas e horários dos encontros síncronos:

Data	Horário	Link de Acesso
01/03/23	19h às 21h30min	https://meet.google.com/xdi-jkgk-bjb?pli=1&authuser=1
15/03/23		
29/03/23		
12/04/23		
26/04/23		
17/05/23		
31/05/23		
14/06/23		

A certificação de 40 h contará com tarefas síncronas (20 horas) e assíncronas (20 horas).

Para dar início a **Tarefa 1 (assíncrona)** é composta de um Questionário de Caracterização do participante a ser enviado até o dia 26/02/23, disponível no link: <https://forms.gle/hwbRKsBYNKBoSRmD8>

Para ficarmos mais próximos e uma comunicação mais rápida, criamos um grupo no WhatsApp do nosso GE - para fazer parte clique no link: <https://chat.whatsapp.com/Gr0wdETAAYX85T7Cqx9zFA>

Qualquer dúvida entre em contato conosco.

Fonte: Os pesquisadores responsáveis pela organização do 2º ciclo

A partir deste contato mais direto, iniciamos a formação com o envio da primeira atividade assíncrona, um formulário para identificarmos o perfil do professor participante e o seu aceite no Termo de Consentimento para participação na pesquisa (TCUISV)⁹.

⁹ O desenvolvimento desta pesquisa faz parte de um projeto mais amplo, o qual foi submetido e aprovado pelo Comitê de Ética. Segue, no Apêndice A, uma cópia do termo de consentimento para uso de imagem e som de voz (TCUISV).

2.2 ORGANIZAÇÃO DO PROCESSO FORMATIVO

Apresentamos, no Quadro 4, o cronograma de planejamento do processo formativo, com as atividades que foram desenvolvidas em cada encontro síncrono. As atividades assíncronas enviadas no decorrer da formação consistiram em tarefas matemáticas ou recortes de registro de prática (episódios de prática - transcrição, áudio ou vídeo), que possibilitavam uma reflexão antecipada acerca dos entendimentos essenciais do RM que seriam trabalhados no encontro, o que proporcionou discussões coletivas mais enriquecedoras.

Quadro 4 - Organização do processo formativo

Mês	Encontro	Data	Ações	Encaminhamento	Recursos
Março	1	01/03	Apresentação Geral Aspectos Gerais do Raciocínio Matemático		Material do 1º ciclo
	2	15/03	TAP 1 Registros escritos (Grupo de Estudo)	Relacionar a teoria e a prática de cada entendimento essencial	Registros de prática do 1º ciclo para discutir a parte teórica
	3	29/03	Processos do Raciocínio Matemático (conjectura, generalização, justificação)	Relacionar a teoria e a prática de cada entendimento essencial	
Abril	4	12/04	TAP 2 Registros de áudio e vídeo (plenária)	Selecionar registro de prática para os professores analisarem os entendimentos essenciais	
	5	26/04	Planejamento e apresentação	Implantar o Ciclo PDR	Planejamento, aplicação em sala de aula e análises dos protocolos.
Maio	6	17/05			
	7	31/05			
Junho	8	14/06			

Fonte: Os pesquisadores responsáveis pela organização do 2º ciclo

Em 01/03/2023, iniciou-se o primeiro encontro síncrono, com a participação de 13 professores, sendo dois deles licenciados em Pedagogia, um em Geografia (com especialização na área da Educação/Ensino) e os demais em Matemática, todos atuando em sala de aula e ensinando Matemática em diferentes níveis de escolaridade. Este foi um momento de acolhimento, apresentação dos participantes e da estrutura da formação com uma explanação dos aspectos gerais do RM.

Os encontros 2, 3 e 4 foram organizados para o estudo teórico dos 9 entendimentos essenciais do RM, apresentados pelos autores Lannin, Ellis e Elliot (2011). Para essas discussões, foram elaboradas TAP, promovendo investigações e discussões a partir dos registros de prática coletados no 1º ciclo do processo formativo, que havia sido desenvolvido

em 2022. Ao final destes encontros, 9 professoras dos 13 participantes iniciais permaneceram no grupo.

Uma tarefa assíncrona foi solicitada entre os encontros 4 e 5. Enviamos um formulário para que os professores anexassem uma tarefa matemática que reconhecessem como proveitosa para explorar os entendimentos essenciais estudados, e também para que fizessem uma reflexão ao comentar o potencial da tarefa e como ela poderia mobilizar diferentes processos do RM. Esse material serviu como base para o trabalho no quinto encontro.

O quinto encontro foi destinado ao planejamento de aulas (Etapa P do ciclo PDR). Iniciamos na sala principal, com todos os professores participantes presentes e com o professor formador apresentando o tema desse encontro e uma caracterização sobre o que é planejamento de modo geral, no âmbito escolar e para o ensino.

Na sequência, foram apresentadas as cinco práticas propostas por Stein *et al.* (2008) – Quadro 5 para orquestrar discussões matemáticas produtivas a partir do trabalho com tarefas matemáticas.

Quadro 5 – Cinco práticas para orquestrar produtivamente as discussões matemáticas

Antecipar	Adquirir confiança com a matemática da tarefa; precaver situações imprevistas; explorar todo o potencial da tarefa; desenvolver expectativas sobre a interpretação e o envolvimento dos estudantes na tarefa; elencar uma diversidade de estratégias – corretas e incorretas – que os estudantes poderão fazer com diferentes graus de sofisticação; relacionar essas interpretações e estratégias com os conceitos, representações, procedimentos, práticas, que deseje para o aprendizado dos estudantes.
Monitorar	Observar e ouvir os estudantes/grupos; avaliar a validade matemática das suas ideias e respostas; interpretar e dar sentido ao pensamento matemático dos estudantes e, mesmo que pareça estranho, ir ao seu encontro.
Selecionar	Identificar e selecionar os estudantes/grupos cujas respostas são importantes para partilhar com toda a turma na fase de discussão de modo a proporcionar uma diversidade de “peças matemáticas” adequadas ao propósito matemático da aula.
Sequenciar	A prática “Sequenciar” se refere à ordem das apresentações das resoluções dos estudantes e dos objetivos visados pelo professor. Os critérios para sequenciar é o professor que define, exemplo: a estratégia que a maioria da turma utilizou, resposta baseada em erro. A ideia de sequenciar é obter uma discussão matemática coerente.
Estabelecer Conexões	Há diversas maneiras de colaborar para estabelecer conexões e, ao analisar, comparar e confrontar as diferenças e semelhanças nas resoluções apresentadas, pode-se fazer alusões a partir de indagações, como: O que é semelhante ou diferentes entre si nas resoluções apresentadas? Identifique o que é semelhante ou diferente em duas ou mais resoluções apresentadas?

Fonte: Traduzido e adaptado de Stein *et al.* (2008)

Pautado nesta apresentação teórica, o professor formador explicou que a organização da formação continuada a partir deste encontro seguiria a proposta do ciclo PDR. Esclareceu que a proposta deste encontro era planejar propondo uma tarefa com características que permitissem aos estudantes trabalharem com estratégias diversificadas de resolução, levando-

os a se envolver em discussões matemáticas produtivas, que mobilizassem diferentes processos de RM, levando-se em consideração os Entendimentos Essenciais que haviam sido estudados nos quatro encontros anteriores.

O planejamento elaborado seria elaborado para a aplicação na própria sala de aula dos participantes, em duas aulas de 50 minutos. A tarefa matemática selecionada deveria propiciar discussões entre os estudantes, uma vez que estariam organizados em pequenos grupos durante o seu desenvolvimento. O planejamento deveria também prever, ao final, a realização de uma plenária, mediada pela professora.

Foi apresentado aos professores um roteiro adaptado de Serrazina (2017)¹⁰ para conduzir a elaboração do plano de aula, composto por 7 passos:

- **1º Passo** - Escolham uma boa tarefa e, ao mesmo tempo, os entendimentos essenciais que pretendem explorar;
- **2º Passo** - A partir da tarefa escolhida e, considerando os entendimentos essenciais, estabeleçam as habilidades que pretendam desenvolver;
- **3º Passo** – Busquem antecipar as dificuldades dos estudantes e suas possíveis estratégias de resolução para a tarefa.
- **4º Passo** - Antecipem possíveis perguntas do professor e respostas dos estudantes.
- **5º Passo** - Definam quais recursos (materiais e didáticos) serão necessários para a realização da aula; utilizem o questionamento como apoio à aprendizagem dos estudantes; estabeleçam que os estudantes trabalhem em grupo.
- **6º Passo** – Preparem, além da antecipação já realizada no 3º e 4º passos, as demais práticas propostas por Stein e colaboradores (2008): estratégias para monitoramento, seleção, sequenciamento e conexões entre respostas dos estudantes.
- **7º Passo** - Preparem o material a ser entregue impresso aos estudantes.

Para apoiar os professores com relação ao 1º passo, das cinco tarefas matemáticas que recebemos, quatro foram selecionadas pelos formadores, que fizeram um recorte deixando a tarefa mais aberta, dando aos professores a possibilidade de elaborarem a tarefa matemática de acordo com o ano de escolaridade em que atuavam (Apêndice B). Após a apresentação das orientações do planejamento, os participantes foram organizados em três grupos, de acordo com

¹⁰ Esse roteiro é originalmente proposto no grupo ForMatE, sob coordenação do Professor Alessandro Jacques Ribeiro.

o nível de escolaridade em que atuavam, sendo um grupo para elaboração de um plano de aula para os anos iniciais do Ensino Fundamental, outro para os anos finais, e um terceiro grupo para elaboração de um plano de aula para o Ensino Médio.

O sexto encontro foi usado para a apresentação dos planos elaborados no quinto encontro, com sugestões de adaptação sendo sugeridas por todos os professores. Como algumas modificações ainda precisariam ser realizadas nos planejamentos, um encontro extra para finalização das apresentações foi sugerido pelo formador, o que implicou em uma alteração no cronograma inicialmente proposto (Quadro 6).

Quadro 6 – Alteração no cronograma do processo formativo

Mês	Encontro	Data	Ações do Ciclo PDR
Maio	5	26/04	Planejamento
	6	10/05	
	7	17/05	
Junho	8	21/06	Reflexão
	9	28/06	

Fonte: A autora

Assim, na semana seguinte os grupos apresentaram os planos de aula finalizados e então, definiu-se as professoras que tinham disponibilidade para a aplicação dos planos de acordo com a série/ano que trabalhavam, com o acompanhamento de pelo menos um dos formadores para coleta de registros de prática, incluindo protocolos escritos dos estudantes e registros em áudio e vídeo (de discussões de alguns grupos de estudantes e da plenária mediada pela professora).

O oitavo e nono encontro foram momentos para a análise e reflexão acerca dos entendimentos essenciais que foram possíveis perceber em vários momentos das aulas desenvolvidas (ao todo, 5 aulas), por meio de TAP elaborada pelos formadores. Essa TAP foi organizada contemplando momentos iniciais da aula com a apresentação da tarefa, momentos de discussão nos pequenos grupos e, por fim, trechos de algumas plenárias. Nesse momento, contávamos com 7 professoras participantes que haviam permanecido até esse encontro final.

2.3 DADOS PARA PESQUISA

Ao longo do processo formativo, uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental foi se destacando por meio dos seus relatos sobre como estava mudando sua maneira de planejar e apresentar as tarefas matemáticas escolhidas para os seus estudantes, trazendo vários exemplos vivenciados durante suas aulas. Além disso, a professora, recorrentemente se mostrou interessada no tema e motivada a participar dos encontros, sempre engajada nas discussões e trazendo questionamentos pertinentes, demonstrando compreensão de cada um dos entendimentos essenciais do RM. Além disso, essa foi uma das professoras responsáveis pelo desenvolvimento das aulas planejadas, de modo que alguns registros de sua prática foram trazidos para as TAP do oitavo e nono encontro. Assim, ao final do processo formativo, mostrou-se pertinente que esta pesquisa focasse em reconhecer OAP vivenciadas por essa professora, e assim foi definido o objetivo de analisar as oportunidades de aprendizagem profissional acerca do RM, seus processos e entendimentos, vivenciados por tal professora durante a implementação do ciclo PDR.

Dessa forma, analisamos os dados produzidos em três momentos: i) no planejamento - discussões no pequeno grupo, formado pela professora Érica¹¹, foco nesta pesquisa, e pela professora Paula¹², e no grande grupo, com foco nas manifestações da professora Érica; ii) no desenvolvimento da aula da professora Érica e seus estudantes; e iii) na reflexão: foco nas manifestações da professora Érica, no pequeno grupo e no grande grupo.

Érica é professora da rede municipal desde 2012, atuando como docente nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Graduada em Pedagogia, é especialista em Alfabetização e Letramento e Mestre em Formação Científica, Educacional e Tecnológica. No ano de 2023, atuou como professora regente no 4º ano. Em resposta ao questionário inicial do processo formativo (Apêndice C), relatou que, no início de sua carreira profissional, tinha muito receio no ensino de Matemática e insegurança por não compreender alguns conceitos. Depois, com formação continuada, aprendeu que pesquisar é o melhor caminho para ensinar. Até o momento, não havia participado de nenhum curso que abordasse o tema RM.

Os dados da pesquisa consistem em gravações dos encontros síncronos e do desenvolvimento da aula da professora Érica, que foram transcritos e, posteriormente, analisados, a fim de identificar trechos em que a professora pesquisada manifestou declarações a respeito do RM e suas contribuições para o desenvolvimento de sua prática docente.

¹¹ A professora pesquisada optou por manter seu nome na presente pesquisa.

¹² Preservando a identidade da professora participante, usamos nome fictício.

2.4 PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DE DADOS

É da análise que “depende a obtenção de resultados consistentes e de respostas convincentes às questões no início da investigação” (Fiorentini; Lorenzato, 2012, p. 133).

Para a análise do material coletado nos encontros 5 a 9 e os registros de prática da professora Érica, durante o desenvolvimento da aula, as gravações foram analisadas e, após a transcrição, revisou-se, com foco analítico, trechos em que a professora Érica se manifesta com declarações a respeito do RM e suas contribuições para o desenvolvimento de sua prática docente (Quadro 7).

Quadro 7 - Síntese das ações que são foco de análise na pesquisa

Etapas do Ciclo PDR	Momento do processo formativo	Objetivo	Foco da análise
Planejamento coletivo de uma aula.	Encontro 5 (26/04) Encontro 6 (10/05) Encontro 7 (17/05)	Identificar manifestações da professora Érica acerca do RM ao planejar a aula e elaborar a tarefa matemática durante as discussões coletivas e no pequeno grupo.	Professora Érica, no contexto das discussões com a professora Paula no pequeno grupo e com os demais integrantes na discussão coletiva.
Desenvolvimento da aula pela professora Érica em sua turma de 4º ano.	Desenvolvimento da aula na escola em que a professora trabalha.	Identificar ações da professora, durante o desenvolvimento da aula, que propiciaram aos estudantes envolvimento com a tarefa matemática e estímulo para que avançassem nos processos do RM estudados durante a formação.	Professora Érica, no contexto das discussões com os seus estudantes durante a aplicação da tarefa matemática.
Reflexão e análise após a aula desenvolvida pela professora Érica.	Após a aula desenvolvida 26/05 (áudio).	Identificar manifestações acerca do RM durante a reflexão individual sobre a aula.	Professora Érica.
	Encontro 8 (21/06) Encontro 9 (28/06)	Identificar manifestações acerca do RM durante a análise coletiva sobre a aula ministrada.	Professora Érica, no contexto das discussões com os demais integrantes.

Fonte: A autora

Para uma análise inicial, baseamo-nos em algumas OAP identificadas por Anjos (2023), no primeiro ciclo deste contexto de formação, estruturado a partir do modelo PLOT, apresentadas no Quadro 8. Durante a análise, foram evidenciadas outras OAP acerca do RM que foram vivenciadas pela professora Érica e que serão apresentadas no próximo capítulo.

Quadro 8 – Oportunidades de Aprendizagem Profissional – OAP geradas durante o processo de formação continuada e a relação com os domínios do modelo PLOT

Domínios do Modelo PLOT	Dimensão Conceitual		OAP
	Componente	Característica	
Papel e Ações do Formador (PAF)	Aproximação	Favorecer a aproximação da Matemática Acadêmica (MA) à Matemática Escolar (ME) e vice-versa.	• Discussões e reflexões sobre os processos do RM, levando-se em consideração os aspectos dos Entendimentos Essenciais.
	Articulação	Estimular a articulação entre as dimensões matemática e didática do conhecimento profissional para ensinar.	• Identificação dos momentos em que seriam necessárias as intervenções do professor durante a resolução de uma tarefa matemática.
Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP)	Conhecimento Profissional	Explorar os conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores, relacionados à/s TME.	• Discussões e reflexões sobre as resoluções matemáticas dos estudantes, buscando compreender os raciocínios matemáticos desenvolvidos por eles; • Reconhecimento dos processos de RM a partir das resoluções dos estudantes; • Identificação de algumas das dificuldades em relação aos conceitos, propriedades e relações matemáticas apresentadas pelos estudantes durante a resolução de uma tarefa matemática; • Explorações e discussões sobre as dificuldades que o professor tem em relação à abordagem de um determinado conteúdo, discutindo, principalmente, sobre os conceitos para o ensino do respectivo conteúdo; • Identificação de características envolvendo os Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento dos RM.
	Ensino Exploratório	Possuir estrutura que propicie um ambiente de ensino-aprendizagem exploratório.	• Reconhecimento de que as resoluções (corretas e incorretas) dos estudantes podem apresentar argumentos que necessitam ser investigados, ou seja, exploração dos conceitos e ideias matemáticas utilizadas pelos estudantes para resolver uma determinada tarefa; • Argumentação utilizando os registros de prática para justificar a identificação dos processos de RM.
Interações Discursivas entre Participantes (IDP)	Discussões Matemáticas e Didáticas	Contemplar, de forma articulada, as discussões matemáticas e didáticas relacionados às TME.	• Reconhecimento, discussões e reflexões sobre os conteúdos que são essenciais para auxiliar o aluno durante o processo de aprendizagem; • Reflexões sobre as ações didáticas que podem ser desenvolvidas a partir das práticas de ensino, ou seja, as práticas realizadas em sala de aula.
	Argumentação e Justificação	Envolver argumentação e justificação	• Discutir sobre a forma de mostrar para um aluno que a resolução dele está incorreta, ou seja, utilizar a justificação matemática como um suporte para

		matemáticas e didáticas válidas	promover a aprendizagem e não apenas dizer para o aluno que está errado, mas, também, que é inválido o que ele fez.
--	--	---------------------------------	---

Fonte: Anjos (2023, p. 104-105)

No próximo capítulo, detalhamos a análise dos dados de cada um dos momentos do processo formativo analisados nesta pesquisa.

3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS

Este capítulo é organizado com intuito de evidenciar as oportunidades de aprendizagem profissional acerca do RM, seus processos e entendimentos, que foram vivenciados pela professora Érica no ciclo PDR.

Nas três primeiras seções, explicitamos quais OAP acerca do RM foram declaradas ou puderam ser inferidas pela professora em cada uma das etapas deste ciclo. Na quarta e última seção, discutimos como essas OAP articulam-se com o conhecimento matemático para o ensino (Ball; Thames; Phelps, 2008).

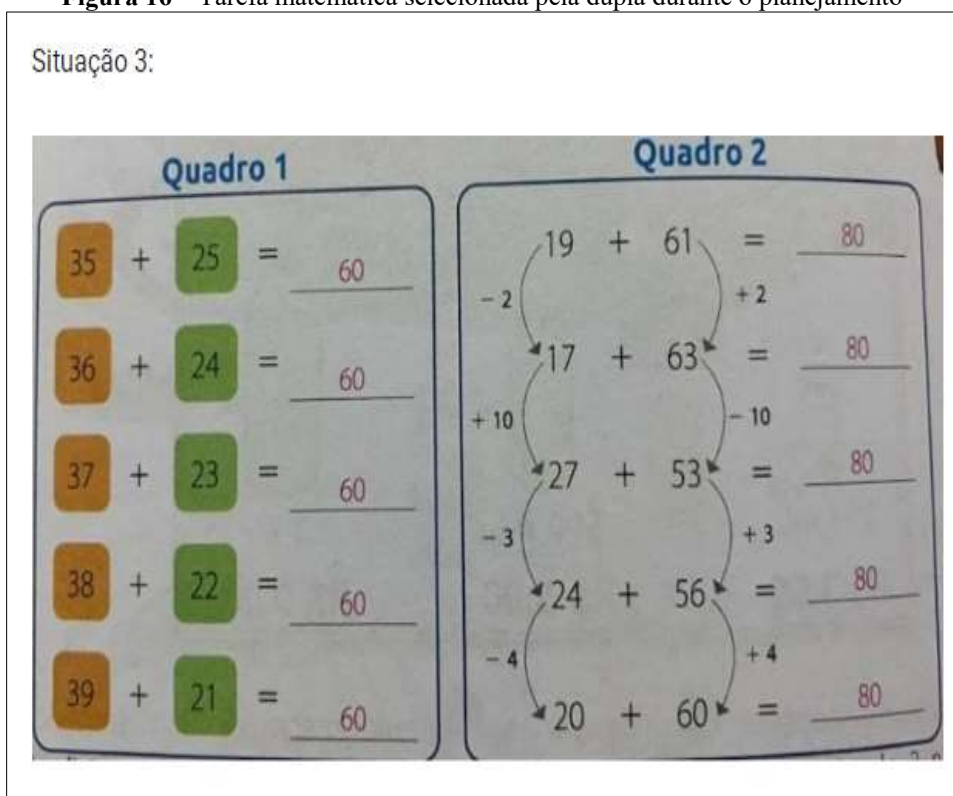
3.1 O PLANEJAMENTO

As OAP apresentadas nesta seção foram evidenciadas nos encontros 5, 6 e 7 do processo formativo, destinados ao planejamento coletivo de uma aula.

3.1.1 Encontro 5

Na sala temática (pequenos grupos), participaram do planejamento de aula destinada a turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental, a professora Érica e a professora Paula. Iniciaram falando sobre o conteúdo disponibilizado no currículo do 4º e 3º ano, respectivamente, as turmas em que atuavam, com o intuito de procurar algo em comum que pudessem considerar para planejar a tarefa.

Depois, abriram o material disponibilizado pelos formadores (Apêndice B) e conversaram sobre cada uma das tarefas, optando pela situação 3 (Figura 16) para a elaboração do planejamento.

Figura 16 – Tarefa matemática selecionada pela dupla durante o planejamento

Fonte: Material da pesquisa

A partir desta parte do planejamento, alguns diálogos foram transcritos e analisados, procurando evidenciar os momentos em que ocorreram oportunidades de aprendizagem profissional durante o processo formativo. Os indicativos dessas OAP foram destacados em *itálico* ao longo da análise.

Trecho 1: Discussões iniciais e adaptações na tarefa escolhida

Professora Érica: Daí a gente entregaria já com essas flechas ou a gente entregaria sem?

Professora Paula: Não, sem flecha.

Professora Érica: Uhum.

Professora Paula: Sem flecha para eles mostrarem. Isso aí eles montariam entendeu? Se de um lado diminuiu menos dois, o outro lado vai aumentar mais dois. Né? Porque do dezenove para o dezessete, diminuiu dois números, de sessenta e um para o sessenta e três, aumentou dois. Primeiro de tudo, eles iam ter que resolver a conta. Depois explicar porque que todos os resultados foram iguais. O que aconteceu com o resultado? Ah, o resultado foi igual!

Professora Érica: Uhum.

Professora Paula: Mas o que acontece de uma operação para a outra? O que eles observam? O que eles têm que observar é isso aí, que do número dezenove para o dezessete, diminui dois. Do sessenta e um para o sessenta e três, aumenta dois. Então o resultado é igual, porque o mesmo número que diminuiu na primeira parcela, na outra aumenta.

As professoras começaram a pensar sobre a tarefa matemática e as possibilidades de instigar os estudantes, propondo realizar alguns ajustes no enunciado original, como eliminar as setas que explicitavam as quantidades que estavam sendo adicionadas ou subtraídas de cada parcela da adição. A intenção é que os estudantes pudessem observar o que estava acontecendo de uma linha para a outra, e, por meio, de questionamentos poderiam levá-los a mobilizar processos de RM. Esse trecho evidencia como a OAP *reconhece a importância de o professor realizar questionamentos aos seus estudantes quando propõe uma tarefa*. Tal oportunidade de aprendizagem decorreu da interação com a professora Paula, que antecipou alguns questionamentos no diálogo, com os quais a professora Érica concordou.

Como um dos critérios para escolha da tarefa a ser inserida no planejamento, a professora Érica procurou amparo no currículo, relacionando-a aos objetos de aprendizagem propostos para o ano em que atuava. No trecho 2, trazemos um desses momentos em que a professora Érica realiza a leitura do referencial curricular do município em que atuava e buscou reconhecer objetivos a tarefa contemplava ou não:

Trecho 2: Articulação do conteúdo da tarefa com o currículo

Professora Érica: “Identifica as regularidades e constrói sequências recursivas compostas por múltiplo de um número natural”. [Esse objetivo] Não! Daí, “escreve diferentes sentenças de adições ou subtrações”. Está perfeito aqui ó! “Escreve diferentes sentenças de adições ou subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença, explorando regularidades. Exemplo, dez mais vinte, igual a nove mais vinte e um, igual oito mais vinte e dois”. Esse para o terceiro ano, eu acho que esse aqui entra, hein!

Professora Paula: Entra né.

[...]

Professora Paula: Ah tá! Ó dez mais vinte é igual a nove mais vinte e um. Diminui de um lado e aumentou um do outro. Ah, eu acho que a gente poderia trabalhar isso?

Professora Érica: Uhum. Aí na verdade a gente está trabalhando tanto a igualdade, quanto um critério porque lá no teu exemplo, ele tem um critério para dar aquela igualdade. Então a gente estaria trabalhando as duas coisas.

Professora Paula: Sim, ele só está disposto de forma diferente, né?

Neste trecho, a proposta do planejamento permitiu *reconhecer, discutir e refletir sobre os conteúdos que são essenciais para auxiliar o aluno durante o processo de aprendizagem*. Ao dialogarem sobre a tarefa que seria escolhida, transitaram entre o conteúdo do 3º e do 4º ano, evidenciando que estariam trabalhando com propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais, mais

especificamente, a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adição ou de subtração de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença (Brasil, 2017).

Ainda sobre a organização e elaboração da tarefa matemática, evidenciamos um trecho em que se verificou uma preocupação da professora Érica em ampliar os processos de RM dos estudantes, levando-os a justificarem os resultados que obtiveram.

Trecho 3: Preocupação com o processo de justificar

Professora Érica: Daí a gente entregaria sem este esquema, né? Entregaria cru, para eles verem que daria o mesmo resultado e daí eles tem que justificar, que é aquilo que a gente veio falando no curso inteiro, né? Que mais do que só fazer a conta eles têm que aprender a explicar, né!
Professora Paula: Sim, verdade!

Identificamos que a professora mostrou compreender a organização da tarefa, uma vez que, para ocorrerem avanços dos processos do RM, a tarefa precisa ter potencial para tal. Assim, elencamos, como uma OAP, a capacidade de *planejar e estruturar a tarefa matemática de tal modo que possibilite aos estudantes conjecturar, generalizar e justificar possibilitando envolvimento nos entendimentos essenciais para o desenvolvimento dos RM*.

Na sequência, conversaram sobre as cinco práticas para orquestrar discussões matemáticas em uma aula, temática que havia sido apresentada pelo professor formador no início daquele encontro. Então, iniciaram a escrita do planejamento da aula. Neste momento, o professor formador estava passando pelas salas temáticas e fez uma pergunta que instigou as professoras participantes a refletirem acerca dos processos e entendimentos do RM e como o enunciado da tarefa matemática deveria ser escrito para que os estudantes pudessem mobilizar esses processos.

Trecho 4: Professor formador instiga a pensar sobre os processos do RM

Professor formador: O que vocês imaginam que relacionado aos entendimentos essenciais esta tarefa possibilita?

Professora Érica: A gente pensou que, pode ser que eles verifiquem e consigam em grupos, ali discutindo, generalizar a questão que todas as sentenças vão ter a igualdade, mas aí eles vão ter que passar pelo processo, lá que a gente estudou, da questão das sequências, né. Como que eles vão passar pelo processo de justificar o que está acontecendo ali e, se eles vão perceber primeiro. Se eles vão perceber essa sequência e como eles vão justificar.

[...]

Professor formador: O que vocês vão dar de comando para os estudantes? Escrever diferentes sentenças de adições ou subtrações de dois números que resultem na mesma soma ou diferença, ou isso é só uma anotação para vocês pensarem depois no enunciado e levar para os estudantes?

Professora Paula: É só uma anotação.

Professora Érica: Essa aí é uma habilidade que a gente vai tentar desenvolver, então esse é o nosso foco ali de tentar desenvolver com toda essa tarefa aí, por meio dessa estratégia de raciocínio, né? Que ali no caso, estamos utilizando o critério do currículo de Curitiba e nesse currículo tem o critério de avaliação que seria que o aluno chegue a escrever diferentes sentenças, então a nossa tarefa seria a antecipação, vamos mudar a situação três um pouquinho, para fazer ele passar por todo esse processo de generalização lá, e tudo que a gente viu e quem sabe daí ele consiga escrever, vamos ver...

Professor formador: Tá, então pensem aí com cuidado como é que seria o comando para o aluno. Qual enunciado que ele vai receber? que tipo de entendimentos essenciais vocês reconheçam que dê para explorar?

Esses questionamentos levaram a professora Érica a retomar o quadro discutido durante os encontros 2 a 4 do processo formativo (Quadro 2), para juntas lembrarem os processos e entendimentos essenciais do RM. Assim, começaram a elaborar o enunciado da tarefa matemática, articulando-o a tais conceitos.

Entendemos que a interação que ocorreu com o professor formador levou Erica a retomar os conceitos discutidos nos primeiros encontros do processo formativo, reforçando a importância de *planejar e estruturar a tarefa matemática de tal modo que possibilite aos estudantes envolvimento nos entendimentos essenciais para o desenvolvimento dos RM*.

Os trechos ilustram como essa reflexão acerca da aprendizagem do aluno possibilitou que as professoras elaborassem a tarefa sem perderem de vista a mobilização de alguns processos do RM, em especial, o conjecturar e o generalizar.

Trecho 5: Articulando a elaboração da tarefa matemática com alguns processos do RM

Conjecturar

Professora Érica: Na nossa tarefa aqui, a gente poderia colocar ó [...] O quadro 1 está aumentando e diminuindo, né? Trinta e cinco mais um é trinta e seis; vinte e cinco menos um é vinte e quatro.

Professora Paula: Esse aí tá na mesma quantidade pra todos, né [referindo-se à variação de 1 unidade entre as parcelas]? O outro que muda um pouco, o outro é menos dois, mais dois, depois é menos dez, mais dez. Muda de um número para o outro. O primeiro não, tem uma...[regularidade]. Ele segue um determinado número.

Professora Érica: É... é complicado isso aqui para os pequenos. Assim de fazer chegar nesse raciocínio. A gente só entregar e pedir para eles resolverem é tão mais fácil, né... rrsrrs.

Professora Paula: É.

Professora Érica: Mas fazer eles pensarem sobre. Vamos ver aqui! Porque se a gente entregar o quadro 1 como a primeira parte da nossa tarefa. Porque ele primeiro vai conjecturar para ele pensar o que que está acontecendo ali. Então ele vai pensar que aqueles números somando vão dar o mesmo resultado.

Professora Paula: Certo.

Professora Érica: A gente está antecipando que eles vão conjecturar isso. Aí eles não terão certeza se é verdadeira ou falsa, vão ter que resolver. Tem que fazer a conta e aí, o passo dois, é identificar as semelhanças. Quando eles resolverem perceberão que todos deram o mesmo resultado.

Professora Paula: Certo.

Generalizar

Professora Érica: A outra parte que é generalizar, está escrito ali [referindo-se ao Quadro 2 estudado nos encontros anteriores] que envolve “identificar semelhanças entre os casos estendendo o raciocínio para além do intervalo que se originou”. Então a gente vai mostrar que é possível...

Professora Paula: Então ali, no generalizar, ele já vai identificar e aplicar uma generalização.

Professora Érica: Verificar que é possível que somas com diferentes números cheguem ao mesmo resultado.
[...]

Professora Paula: O conjecturar e generalizar é ele que faz. A conjectura né, que eu vejo ali, ele vai ao mesmo tempo que ele conjectura ele já generaliza. Ah, eu tenho que fazer uma adição e tudo deu o mesmo resultado! Aí, no investigar que ele vai descobrir o porquê.

[...]

Professora Paula: A primeira coisa que ele vai fazer, vai ver os números e vai somar, vai achar que é uma conta simples, vamos somar. Depois que ele somar, vai ter o enunciado, o enunciado que a gente tem que elaborar agora... o que que a gente vai perguntar para ele que além dele somar ele tem que observar para induzir a conjectura e a generalização. Para que ele faça depende muito das nossas perguntas, você entendeu agora?

Professora Érica: Sim. Então, por isso que eu perguntei dessa parte, se a gente vai nortear com perguntas ali na oralidade ou se a gente já vai deixar no enunciado.

Professora Paula: No enunciado tem que ter pra eles pensarem, depois a gente vai ver como que eles estão resolvendo e aí a gente questiona.

Nesse trecho do diálogo, percebemos que as professoras tiveram a oportunidade de refletir sobre a importância de *antecipar o que pensam os estudantes, quais suas dificuldades e como interpretam as tarefas matemáticas*, bem como reforçar *a importância de o professor realizar questionamentos aos seus estudantes quando propõe uma tarefa*. Erica e Paula discutem que introduzir alguns questionamentos no próprio enunciado da tarefa, após a resolução das “contas”, pode contribuir para que os estudantes mobilizem processos de conjecturar e generalizar.

Além disso, evidenciamos a ocorrência da OAP *estabelecer relações entre a tarefa e os processos de conjecturar e generalizar*, pois houve intencionalidade na elaboração do enunciado da tarefa, com o objetivo de levar os estudantes a se envolverem com a tarefa ao ponto de raciocinarem sobre as relações matemáticas ali existentes e, assim, conjecturarem

durante regularidades presentes nas operações do quadro 1 da tarefa (Figura 16). Assim, poderiam elaborar afirmações inicialmente provisórias, que poderiam ser confirmadas ao longo da execução da tarefa. Posteriormente, ao se depararem com o quadro 2 da tarefa (Figura 16), perceberam algumas semelhanças, porém, ainda era necessário ampliar o raciocínio para além do intervalo que deu origem à conjectura do quadro 1 da tarefa (Figura 16), uma vez que o valor adicionado ou subtraído de cada parcela já não era o mesmo em todas as operações.

Assim, ao final deste encontro, as professoras tinham uma ideia inicial das ações a serem desenvolvidas na sala de aula e um esboço inicial da tarefa matemática. Para o próximo encontro, deveriam apresentar a todo o grupo a proposta completa de planejamento da aula.

3.1.2 Encontro 6

No encontro 6, a professora foco desta pesquisa apresentou a tarefa matemática ao grupo (Figura 17) e evidenciou a reflexão sobre a inserção de práticas de ensino com sua turma que poderiam estimular a mobilização de processos do RM, enquanto OAP geradas a partir de discussões ocorridas nos encontros anteriores do processo formativo. Nos trechos 6 e 7, destacamos alguns trechos dessas reflexões.

Figura 17 – Tarefa Matemática elaborada pelas professoras Érica e Paula durante o planejamento

ESTUDANTES: _____

DATA: ____/____/____

A MATEMÁTICA É MESMO QUASE MÁGICA! SERÁ?
ATÉ MESMO QUANDO BRINCAMOS COM OS NÚMEROS
ESTAMOS SEMPRE APRENDENDO MAIS E MAIS. TENHO UM
DESAFIO. CALCULE AS SENTENÇAS A SEGUIR, PODE SER
COM CÁLCULO MENTAL, COM O CÁLCULO ESCRITO OU
COM DESENHOS. REGISTRE OS RESULTADOS E DEPOIS
ESCREVA O QUE VOCÊ PERCEBEU.



A PARTIR DESSE ENTENDIMENTO RESOLVA O
PRÓXIMO DESAFIO!

35	+	25	=	
36	+	24	=	
37	+	23	=	

19	+	61	=	
17	+	63	=	
27	+	53	=	
24	+	56	=	
20	+	60	=	

O QUE VOCÊS PERCEBERAM A
RESPEITO DAS ADIÇÕES DO DESAFIO?
ESCREVAM SOBRE A DESCOBERTA:

NO 2º DESAFIO O QUE ACONTECE COM ESSAS ADIÇÕES? DESCREVAM O QUE
PERCEBERAM:

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos, neste planejamento, que a tarefa matemática elaborada pelas professoras apresentava um nível de gradação em sua complexidade, mas que deveria ser explorado na condução da tarefa, pois o seu design e o enunciado não permitem que os estudantes realizem sozinhos essas inferências. Assim, o objetivo da tarefa que seria os estudantes explorarem e compararem as colunas com as adições, possibilitando avanço nos processos do RM, dependia da condução da aula e das intervenções que ocorressem no desenvolvimento desta aula pela professora.

Trecho 6: Inserção de práticas que estimulam processos do RM

Professora Érica: [...] Nem sempre eu faço uma tarefa tão enfeitadinha assim (Figura 16), até conversei com a Paula que a gente vai tentar puxar eles [motivar os estudantes] também pra essa questão aí, de estar bem colorido, de ser chamativo, de ser uma coisa diferente pra ver se eles se animam com essa proposta do raciocínio que é sempre expressar como que está pensando. Essa é uma dificuldade bem grande que eu tenho com as minhas crianças. Eles sempre respondem “eu fiz de cabeça”, “eu fiz assim porque eu contei” e expressar isso está sendo um pouquinho difícil. Eu tenho feito mais tarefas até com a ajuda das discussões que estamos tendo aqui, eu tenho proposto mais tarefas e tenho visto essa dificuldade que eles estão tendo de expressar. Às vezes oralmente até que eles fazem, mas na escrita trava mais ainda. Então começa aqui bem visual mesmo, fazendo uma brincadeira. Será que a matemática é mágica, né? E a gente propõe um desafio então de calcular as sentenças, daí, a gente coloca que pode ser com cálculo mental, cálculo escrito ou com desenhos e registrar os resultados.

Após a apresentação da tarefa matemática e do planejamento prevendo as antecipações de respostas e possíveis dificuldades, o professor formador fez uma pergunta ao grupo, gerando alguns apontamentos dos professores participantes. Segue o trecho em que a professora Érica se manifestou a respeito.

Trecho 7: A tarefa matemática e os processos do RM

Professor formador: Que entendimentos [essenciais] do raciocínio [matemático] que a gente discutiu vocês reconhecem que a tarefa tem potencial para que sejam explorados?

Professora Érica: Com relação aos entendimentos a gente colocou a conjectura, né? Que é um dos entendimentos que vai ser trabalhado; e na generalização a gente ficou em dúvida, porque aí é aquilo que a gente discutiu em encontros anteriores, generalizar, mas a partir de um determinado contexto. Porque aqui pode ser que eles se apeguem a esse contexto com esses números 60 e 80 [referindo-se aos valores constantes da soma em cada item da tarefa]. Se eles conseguirem passar disso, aí eu considero uma generalização?

[...]

Professor formador: Então poderia ser uma generalização que seria limitada a esse domínio aí, quando eu aumento um em uma parte da conta [referindo-se à parcela da adição], eu tenho que diminuir um da outra

[parcela]. Uma generalização mais ampla já seria perceber que, eu posso aumentar e diminuir o tanto que eu quiser. Então há vários graus de generalização que podem ser explorados.

A dúvida apresentada pela professora sinalizou que houve engajamento com conceitos teóricos discutidos durante o processo formativo, levando-a a relacioná-los com possíveis antecipações de resoluções dos seus estudantes, procurando, também, identificar quais entendimentos essenciais do RM estavam presentes na resolução da tarefa.

A análise dos trechos 6 e 7 evidencia, em suas falas, que a professora Érica manifestou *compreender a importância em selecionar tarefas que possibilitam explorar os entendimentos essenciais do RM* e a importância da gestão da aula com relação ao *conduzir a aplicação da proposta em sala de aula estimulando os estudantes a desenvolverem habilidades para elaborar e sistematizar seu pensamento*, a partir da seleção das tarefas matemáticas que tenham potencial para tal.

3.1.3 Encontro 7

Os professores participantes do processo formativo tiveram mais uma semana para refinar os planejamentos, e, no encontro 7, foi realizada mais uma rodada de apresentações e discussões. O Quadro 9 apresenta parte do planejamento elaborado pelas professoras Érica e Paula.

Quadro 9: Planejamento elaborado durante o processo formativo

OBJETIVO DA TAREFA: Quadro 1 Espera-se que os estudantes percebam que, todas as adições resultam em 60 e que dada uma adição de 2 números, se aumentarmos um deles em 1 unidade e diminuirmos o outro em 1 unidade, o resultado da adição não se altera.	OBJETIVO DA TAREFA: Quadro 2 Espera-se que os estudantes percebam que todas as adições resultam em 80 e que, dada uma adição de 2 números, se aumentarmos um deles de um número qualquer e diminuirmos o outro desse mesmo número, o resultado da adição não se altera.
PRÁTICA: ANTECIPAR O QUE PODE APARECER COMO RESULTADO: 1) Erros: resultados diferentes e com justificativas como: • Que são todas contas de adição (mais). • Justificar que <u>todas adições</u> na unidade, o resultado é 10 e na dezena dá resultado 5. • Podem inverter a ordem dos números ao montar a conta <u>como</u> colocar o primeiro número na dezena por estarem com a mesma cor azul ex: 35, o 3 e o 5 na dezena e o segundo número 25 na unidade por estarem com a cor verde. PRÁTICA: MONITORAR • As intervenções para os grupos que não conseguirem calcular podem ser entregue o material manipulável (palito ou material dourado). • Caso o grupo esteja montando a operação de modo equivocado, <u>perguntar</u> como fizeram para montar a continha.	PRÁTICA: ANTECIPAR O QUE PODE APARECER COMO RESULTADO: 1) Erros: resultados diferentes e com justificativas como: • Que <u>todas adições</u> do segundo quadro também são de adição. • Usar como justificativa que todos adições na unidade o resultado da soma <u>continua</u> 10 e na dezena o resultado é 7. • Podem inverter também a ordem dos números ao montar a conta para somar, como colocar o primeiro número na dezena e o segundo na unidade, como fizeram nas operações do quadro 1. Ou não utilizarem dessa estratégia pelo fato dos números estarem com a cor verde nas duas sentenças. PRÁTICA: MONITORAR • As intervenções para os grupos que não conseguirem calcular podem ser entregue o material manipulável (palito ou material dourado). • Caso o grupo esteja montando a operação de modo equivocado, <u>perguntar</u> como fizeram para montar a continha.
2) Acertos: resultados certos, mas com justificativas incorretas: • Justificativas em que todas as contas o resultado é 10 na unidade e sobe o número 1 na dezena. • Que todas as operações o resultado é 60, mas não conseguirem uma justificativa para o resultado além de descobrir que o resultado é 60. • Para os alunos que descobrirem que o resultado é 60, questionar se perceberam algo a mais nessas adições. • Aprofundar as indagações conforme vão dando suas respostas.	2) Acertos: resultados certos, mas com justificativas incorretas: • A mesma justificativa que utilizaram no quadro 1, <u>que todas</u> as operações, o resultado sempre será 10 na unidade e sobe o número 1 na dezena. • <u>Justificar</u> que as operações do quadro 2, o resultado é 60, mas não conseguirem dar uma justificativa fundamentada para o resultado além de descobrir que o resultado é 80. • Para os alunos que descobrirem que o resultado é 80, questionar se perceberam algo a mais nessas adições. • Aprofundar as indagações conforme vão dando suas respostas.
3) Acertos: resultados corretos e com justificativas esperadas. • Alunos que conseguirão atingir o objetivo da tarefa e que poderão além de justificar corretamente, relacionar a outros exemplos de operações de adição. • Podem aparecer também alunos que perguntem se só dá certo fazendo com adição. (estimulá-los a tentar ver se isso se aplica também a outra operação). • No caso do 3º ano só conhecem ainda a adição e subtração, podem mencionar se é possível que aconteça na subtração. • No caso do 4º ano, pelo fato de já conhecerem outras operações, podem mencionar a multiplicação e a divisão, o que tornaria o objetivo da tarefa totalmente alcançado.	3) Acertos: resultados corretos e com justificativas esperadas. • Alunos que conseguirão atingir o objetivo da tarefa e que poderão além de justificar corretamente, relacionar a outros exemplos de operações de adição. • Podem aparecer também alunos que perguntem se só dá certo fazendo com adição. (estimulá-los a tentar ver se isso se aplica também a outra operação). • No caso do 3º ano só conhecem ainda a adição e subtração, podem mencionar se é possível que aconteça na subtração. • No caso do 4º ano, pelo fato de já conhecerem outras operações, podem mencionar a multiplicação e a divisão, o que tornaria o objetivo da tarefa totalmente alcançado.

Fonte: Dados da Pesquisa

O objetivo da primeira parte da tarefa era o de que os estudantes percebessem que todas as adições resultaram em 60 e que, dada uma adição de 2 números, se aumentassem um deles em 1 unidade e diminuíssem o outro em 1 unidade, a soma não se alterava. Já o objetivo da segunda parte era o de que os estudantes percebessem que todas as adições resultaram em 80 e

que, dada uma adição de 2 números, se aumentassem em um deles um valor qualquer e diminuíssem o outro desse mesmo valor, o resultado da adição também não se alterava.

Com esses objetivos, as professoras sistematizaram, no planejamento, duas das cinco práticas para orquestrar produtivamente as discussões matemáticas propostas por Stein *et al.* (2008), que derivam da OAP *antecipar possíveis acertos e erros que poderiam surgir durante o desenvolvimento da aula*. Esta é uma etapa importante para trazer maior segurança na condução da tarefa e no desenvolvimento das outras práticas propostas para amparar as discussões matemáticas (Quadro 5). Dessa forma, Érica e Paula relataram em sua apresentação o objetivo que esperavam atingir com a tarefa matemática e compartilharam as antecipações de erros e acertos dos estudantes sobre as quais refletiram durante esta etapa, conforme os Trechos 8 a 10 transcritos a seguir.

Trecho 8: O objetivo da tarefa matemática

Professora Érica: A gente espera que os estudantes percebam que todas as adições resultam em 60 na primeira parte da tarefa e que dado uma adição de dois números, aumenta um deles na unidade, diminui o outro na unidade, o resultado não se altera. Para segunda parte da tarefa, a gente espera que eles observem que o resultado muda [em relação ao valor 60], que vai ser 80 e a gradação que a gente falou lá, que daí vai ser com a soma de dois números, com a soma de dez, depois a subtração.

Trecho 9: Antecipações de erros

Professora Paula: Eu pensei que eles podem justificar que todas as adições na unidade vão resultar em dez, porque acontece muito deles somarem a unidade e colocar o dez ali na unidade sem fazer a troca, né? Subiu um para a dezena, acrescentar uma dezena, na casa da dezena. E, aí na dezena, como ele não fez isso, vai ficar o dez ali embaixo, na unidade. A dezena ele vai somar e vai dar resultado cinco, vai falar que todos eles dão resultado dez na unidade, todos dão resultado cinco na dezena. É um possível erro. E também outra coisa que me chamou atenção é que lá na folhinha, as continhas da dezena estão, acho que de verde ou azul e na unidade está de outra cor [Figura 16]. Pode acontecer também, como já aconteceu em outras atividades, deles colocarem assim trinta e cinco. Se o trinta e cinco está no quadrinho verde então o trinta e cinco é na dezena. Então o três em cima e o cinco embaixo. Colocar o número na mesma casa, entendeu? E o outro que está em azul, colocar o vinte e cinco, o dois na unidade e o cinco embaixo. Pode acontecer isso também de erro. Aí, as intervenções é que vão fazer a diferença. Porque para mostrar para eles, talvez a gente não consiga, porque não vai poder dar a resposta, com que eles pensem diferente, mas um possível erro pode ser isso daí, das contas estarem em cores diferentes.

[...]

Professora Érica: Quando eles chegarem na segunda parte, pode ser que eles digam que todas as adições do segundo quadro, lá da segunda parte da tarefa, são adição também. Se ele fizer essa conjectura no primeiro, pode ser que ele permaneça no segundo. Daí ele pode usar como justificativa que todas as adições na unidade, no resultado continuam na soma dez, né?! E na dezena na soma sete [...]

Trecho 10: Antecipação dos acertos

Professora Paula: A gente espera que eles consigam, além de conseguir resolver a operação corretamente, relacionar o que está acontecendo nas operações e ainda, levá-los a pensarem se é só na adição que pode acontecer isso?

As oportunidades de aprendizagem acerca do RM evidenciados até aqui ocorreram durante a interação entre as professoras e, também, em alguns momentos pontuais em que houve intervenções do professor formador. O estudo teórico apresentado nos primeiros encontros com momentos destinados à análise de recorte de práticas, por meio de TAP, ampliou as possibilidades de reflexão para esse momento de elaboração do planejamento, pois as professoras sentiram-se instigadas a relacioná-las com processos de RM, como conjecturar, generalizar e justificar.

Esses trechos apresentados reforçam a importância do processo formativo estruturado com o viés gerador de Oportunidades de Aprendizagem Profissional, possibilitando que os professores participantes aprimorem o conhecimento teórico e tenham a chance de repensar a sua prática, o que pode levar a um maior engajamento com as etapas do ciclo PDR propostas como parte deste processo de formação.

Sintetizamos no Quadro 10 as OAP evidenciadas nesta etapa de Planejamento, sinalizadas pela letra P e ordenadas por números, para manter uma sequência em relação à etapa do ciclo PDR que foi gerada.

Quadro 10 – Síntese das OAP evidenciadas durante a etapa do planejamento

OAP	Evidências das OAP
- P1: Reconhecer a importância de o professor realizar questionamentos aos seus estudantes quando propõe uma tarefa.	Durante a interação com outra participante no pequeno grupo, discutiram sobre a elaboração da tarefa matemática e a importância de apresentá-la sem muitas pistas de resolução (sem as flechas), sendo que as intervenções do professor ocorreriam a partir de conjecturas iniciais elaboradas pelos estudantes, por meio de questionamentos que instiguem a ampliarem esse processo inicial do RM.
- P2: Reconhecer, discutir e refletir sobre os conteúdos que são essenciais para auxiliar o aluno durante o processo de aprendizagem.	O currículo é o documento norteador do professor, assim as professoras se amparam nele para buscar um conteúdo em comum para as séries/anos em que atuavam. Esse olhar para os conceitos e habilidades a serem desenvolvidas para o ano permitiu às professoras, no momento do planejamento, elaborar a tarefa matemática com um grau de dificuldade que não desestimule os estudantes e que proporcione às professoras revisitarem o conteúdo matemático e

	explorarem os diversos métodos e procedimentos para ensiná-lo.
<i>- P3: Planejar e estruturar a tarefa matemática de tal modo que possibilite aos estudantes conjecturar, generalizar e justificar possibilitando envolvimento nos entendimentos essenciais para o desenvolvimento dos RM.</i>	A professora Érica trouxe para a discussão a importância de levar os estudantes a justificarem o seu raciocínio, destacando que compreendeu a relevância dessa ação na seleção das tarefas para o avanço dos processos e entendimentos do RM.
<i>- P4: Antecipar o que pensam os estudantes, quais suas dificuldades e como interpretam as tarefas matemáticas.</i>	A intervenção do professor formador levou as professoras a uma discussão mais aprofundada sobre os processos e entendimentos do RM. Elas conversaram sobre estratégias que provavelmente os estudantes utilizariam para a resolução da tarefa proposta e relacionaram com alguns entendimentos do RM que poderiam chegar.
<i>- P5: Estabelecer relações entre a tarefa e os processos de conjecturar e generalizar.</i>	Ocorre intencionalidade na elaboração do enunciado da tarefa, assim como a seleção de tarefas matemáticas que permitam alcançar o objetivo de levar os estudantes a se envolverem com eles, reconhecendo as relações matemáticas ali existentes e avançando nos processos e entendimentos do RM.
<i>- P6: Compreender a importância em selecionar tarefas que possibilitam explorar os entendimentos essenciais do RM.</i>	
<i>- P7: Conduzir a aplicação da proposta em sala de aula estimulando os estudantes a desenvolverem habilidades para elaborar e sistematizar seu pensamento.</i>	Ao relatar que não tinha o hábito de realizar tarefas atraentes que animassem os estudantes a justificarem, a professora mostra ter reconhecido que, para estimular os estudantes a avançarem nos processos do RM, as tarefas matemáticas propostas precisam ter essa intencionalidade, em conjunto com suas ações na condução da proposta da aula.

Fonte: A autora (2024)

Na seção a seguir, realizamos a análise do desenvolvimento da aula com foco na identificação de ações da professora que proporcionaram, aos estudantes, o envolvimento com a tarefa matemática e o estímulo para que avançassem nos processos do RM estudados durante o processo formativo. Além disso, ocorreu reflexão e análise com base na identificação dos entendimentos essenciais do RM manifestados pelos estudantes durante a resolução da tarefa, na qual levantaram conjecturas e foram conduzidos pelas ações da professora a refletirem sobre

regularidades do quadro 1 e do quadro 2 da tarefa (Figura 17), levando-os a elaborarem generalizações por meio do reconhecimento da semelhança entre os casos.

3.2 O DESENVOLVIMENTO DA AULA

A análise do desenvolvimento da aula baseou-se no planejamento sistematizado pelas professoras (Quadro 9), na tarefa matemática (Figura 17) e na sua implementação.

A apresentação desta análise foi dividida em três momentos: (i) a apresentação da tarefa à turma do 4º ano pela professora Érica; (ii) as discussões de seus estudantes organizados em pequenos grupos; e (iii) a discussão em plenária, conduzida pela professora, com toda a turma. Trouxemos, para análise, trechos em que o direcionamento realizado pela professora proporcionou, aos estudantes, o envolvimento com a tarefa matemática e o estímulo para que avançassem nos processos do RM, delimitando possíveis oportunidades de aprendizagem profissional oriundas das vivências durante o processo formativo.

3.2.1 A apresentação da tarefa pela professora

A professora iniciou a aula apresentando à turma a professora pesquisadora que auxiliaria na coleta de dados. Em seguida, detalhou a proposta da tarefa, explicando aos estudantes que trabalhariam em trios já selecionados por ela na aula anterior, com um celular ao lado, que faria a gravação da discussão. Esclareceu que, depois de discutirem juntos neste pequeno grupo, explicariam para a turma toda como pensaram. Complementou dizendo que todos receberiam a mesma atividade e instigou os estudantes a expressarem como pensariam para solucionar a tarefa proposta e a justificarem, por meio do registro escrito, qual foi o percurso que fizeram para chegar às respostas, deixando evidente a intencionalidade da aula, como observamos no Trecho 11 a seguir.

Trecho 11: A importância da expressão do pensamento 1

Professora Érica: [...] A nossa dúvida é: será que nós todos vamos pensar igual? Será que algum grupo vai pensar diferente? Eu e a professora pesquisadora vamos passar nos grupos e ver como é que vocês estão pensando, pois nós ainda não conseguimos inventar uma máquina de pensamento, eu não consigo ainda só chegar ao lado do aluno e adivinhar o pensamento dele. Como é que a gente vai descobrir? Com o que vocês estão conversando e escrevendo da atividade e com o que vocês vão gravar no celular. É assim que nós vamos descobrir se todo mundo vai pensar igual.

Essa apresentação da proposta da aula aos estudantes mostrou que a professora compreendeu a importância de estimular e reconhecer diferentes estratégias de resolução da tarefa, pois transmitiu, aos seus estudantes, autoconfiança, permitindo que se expressassem de variadas formas, sem limitá-los a um único caminho. A experiência vivenciada no processo formativo, por meio da análise de registros da prática, pode ter contribuído para que a professora manifestasse essa segurança na condução de suas ações, valorizando as contribuições dos estudantes, o que identificamos como a OAP *reconhecer a importância de usar diferentes representações de um mesmo conceito matemático*.

Na sequência, a professora entregou a tarefa, fez a leitura e explicou que ela envolvia algumas adições, reforçando mais uma vez a importância do registro do pensamento, conforme o Trecho 12 a seguir.

Trecho 12: A importância da expressão do pensamento 2

Professora Érica: A gente quer ver o que mais que vocês vão perceber. Vocês já sabem fazer continha. [...] só que aí você vai ter que contar para mim o seu pensamento, pode ser escrevendo ou se você precisar pode desenhar. [A professora continua a leitura da atividade]. Escreva sobre sua descoberta. Tem um espacinho aqui ó [aprontando com o dedo o local], vocês vão escrever. Duas coisas importantes, se a continha fosse com esses dois números [escreve no quadro: $5 + 2$]. Eu ia ter que pensar como é que eu faço a adição.

Aluno A: É só somar $5 + 2$.

Professora Érica: Hoje nós vamos falar de adição. Ah, será que para mim é melhor fazer com palitinhos? Pensem, só que vocês vão ter que registrar e depois escrever. Como é que eu escrevo? Eu posso colocar lá somando, fazendo a continha de mais, somando eu percebi que o resultado é [...] Vocês vão ter que escrever como é que vocês pensaram, combinado? Mais ou menos assim. [...] Todo mundo pensa e registra junto. Pensa junto e registra junto.

Ao reforçar a importância de registrarem o passo a passo de como chegaram ao resultado, a professora mostra se preocupar com o processo e não apenas com o resultado final do algoritmo da adição e, ao dar outras possibilidades para que os estudantes pudessem solucionar o desafio proposto com a tarefa matemática, evidencia uma aproximação com o entendimento essencial 4, apresentado nos encontros iniciais do processo formativo, em que se discutiu que conjecturar e generalizar envolve o uso e o entendimento do significado de termos, símbolos e representações.

Essa atitude da professora encorajou os estudantes a avançarem de acordo com o seu nível de compreensão da Matemática e de aprendizagem e, por isso, usaram estratégias diferentes para solucionar uma mesma tarefa. Alguns usaram recursos mais avançados,

enquanto outros precisaram de material concreto ou se ampararam em exemplos. Essa ação foi discutida no momento do planejamento do encontro 5, quando a professora Érica manifestou uma preocupação em ampliar os processos de RM dos estudantes, desafiando-os a justificar os resultados que obtiveram. Assim, ficou evidente, na prática da professora, uma OAP na direção *de estimular os estudantes a entrarem nos processos de conjecturar, generalizar e justificar, mostrando que compreendeu características envolvendo os entendimentos essenciais para o desenvolvimento dos RM*, incorporando-se à sua ação durante a explicação da tarefa e reforçando a importância de expressarem o procedimento que usaram para chegar ao resultado final.

3.2.2 As discussões em pequenos grupos

Enquanto os estudantes se envolviam com a tarefa proposta, a professora Érica circulava pelos grupos, monitorando e selecionando aqueles que poderiam, durante a plenária, apresentar uma diversidade de estratégias de resolução e, conseqüentemente, propiciar discussões que levassem a explicitar diferentes processos e dos entendimentos do RM.

Cabe esclarecer que a proposta inicial do planejamento era aplicar toda a tarefa matemática (quadro 1, com resultado 60, e quadro 2, com resultado 80) e finalizar com as discussões em plenária englobando os dois quadros. Porém, a impressão da atividade saiu em folhas separadas e a professora reorganizou a aplicação, realizando as discussões, o monitoramento e o sequenciamento da plenária do quadro 1 e, depois, todo o mesmo processo com o quadro 2. Essa reorganização foi compatível com o tempo inicialmente programado para a duração da aula e foi importante para gerar as discussões em pequenos grupos durante a realização do quadro 2.

Assim, enquanto acompanhava as discussões nos grupos, a professora fez alguns apontamentos que permitia que os estudantes avançassem além dos resultados alcançados, procurando atingir o objetivo planejado para esta aula (conhecer a relação entre as várias adições presentes em cada quadro), como descrito no trecho abaixo:

Trecho 13: Questionamentos para além dos resultados 1

Professora Érica: Vocês colocaram que aqui tudo dá 80. Nem mais e nem menos, ótimo resultado! Mas vamos olhar um pouquinho além dos resultados? Vamos olhar os números. Quando a gente colocou, lá na primeira vez que o grupo discutiu [referindo-se a plenária da parte 1 da tarefa], nós percebemos uma coisa aqui, não percebemos?

Aluna B: Aqui dá menos [um] e aqui dá mais [um].

Professora: O que que dá menos e o que que dá mais?

Aluna B: Aqui [apontando para a segunda parcela das adições que resultam em 60].

Professora: Aqui está diminuindo? [Referindo-se à segunda parcela das adições que resultam em 60].

Aluna B: Sim.

Professora: E aqui está aumentando? [Apontando para a primeira parcela das adições que resultam em 60].

Aluna C: Isso!

Professora: Isso se confirma aqui também? [Apontando para as adições que resultam em 80].

Aluna C: Não.

Aluno D: Sim!

Professora: Por que sim?

Aluno D: Porque aqui é maior, aqui tem número a mais e aqui está aumentando.

[Nesse momento a professora e os estudantes conversam e a professora compreende que o aluno D está identificando que os números adicionados às segundas parcelas das adições que resultam em 80 são maiores que os números das adições que resultam em 60, então a professora questiona o grupo].

Professora: Mas se você olhar só esse lado, estão aumentando também? [Referindo-se ainda a essa segunda parcela das adições que resultam em 80].

Aluno D: O que você acha?

Aluna C: Acho que não.

Professora: Está do mesmo jeito que no primeiro desafio?

Aluna B: Não!

Professora: Então eu quero que vocês pensem um pouquinho nesses números aqui [Mostrando para as adições que resultam em 80].

Percebemos, nesse trecho, um movimento em instigar os estudantes a refletirem e refinarem conjecturas que haviam levantado na plenária do quadro 1 (que as primeiras parcelas estavam em ordem crescente e as segundas em ordem decrescente). Agora, olhando para o quadro 2, a professora relembra esta conjectura e instiga que os estudantes reconheçam alguma regularidade que possa estar ocorrendo, desafiando-os a generalizarem por meio da busca por semelhanças dos dois quadros.

Ainda neste trecho, destacamos a condução da professora em estimular a ampliação do RM por meio das respostas que os estudantes dão aos seus questionamentos e entendemos que essa valorização das contribuições dos estudantes na discussão encorajou-os a continuar investigando o porquê. Mesmo que, de imediato, não tenham percebido alguma regularidade, a professora os estimulou a continuarem analisando, direcionando-os para o quadro 2.

As ações da professora na condução desta discussão evidenciaram a valorização dos questionamentos como um apoio ao desenvolvimento do RM e destacamos, como OAP, a que é gerada em contexto de formação que já havia sido identificada por Anjos (2023), *reconhecer*

que as resoluções (corretas e incorretas) dos estudantes podem apresentar argumentos que necessitam ser investigados, ou seja, exploração dos conceitos e ideias matemáticas utilizadas pelos estudantes para resolver uma determinada tarefa. Em específico, nesta tarefa matemática, a professora levou os estudantes a refletirem acerca das conjecturas iniciais elaboradas sobre o quadro 1 e as compararem os resultados e as regularidades identificadas entre os dois quadros da tarefa, estimulando-os a apresentarem generalizações.

Destacamos, ainda, um diálogo que ocorreu entre a professora e um outro grupo de estudantes:

Trecho 14: Questionamentos para além dos resultados 2

Professora Érica: Agora nós vamos tentar ver um pouquinho além dos resultados. Vocês já fizeram a continha, perceberam que o resultado é 80. No primeiro desafio dois grupos perceberam uma coisa lá que nós discutimos. Lembram? Que vocês até falaram. Será que aqui continua?

Os três estudantes: Sim.

Professora: O que que continua?

Aluno E: Tudo o mesmo resultado.

Professora: Tudo o mesmo resultado, muito bem! Além do resultado, o que mais que você pode observar?

Aluno E: Os números.

Professora: O que que têm esses números?

Aluno E: Somando um de cada, vai somar, vai fazer um...

Aluna F: 19, 17, 27, 24, 20 [Referindo-se às primeiras parcelas das adições do quadro 2].

Aluno E: Um [uma dezena] mais seis [dezenas] fica sete [dezenas], o nove mais um fica dez, fica tudo 80, tudo a mesma coisa.

Professora: Mas aqui, eu entendi. Repete aqui o de baixo para mim.

Aluno E: Um mais o seis, sete. Três mais um sete, dez. 80. [Referindo-se à adição $19 + 61$ que resulta em 80].

Professora: Tá.

Aluno E: Ou seja, tudo o mesmo resultado.

Professora: OK, a Aluna F estava percebendo uma coisa diferente. O que você estava percebendo aqui?

Aluna F: 19, 17, 27, 24, 20 [primeiras parcelas]. 61, 63, 53, 56, 60 [segundas] parcelas.

Professora: E o que que você acha desses números? Por que que eles estão assim? [silêncio] Aluno G, por que que você acha que esses números estão assim?

Aluno G: Para dar tudo o mesmo resultado?

Professora: Para que dê tudo o mesmo resultado? Mas só com esses aqui que eu consigo que dê mesmo resultado

Aluno G: Não.

Professora: Não?

Aluno E: Aqui eu vi que tem uma sequência, tipo de um ou dois. [Se referindo às dezenas das primeiras parcelas das adições que resultam em 80].

Professora: Tem uma sequência.

Aluno G: Mas aí não tem o três e o quatro, e pula para o cinco, para o seis, para o seis e para o seis [Referindo-se às dezenas das segundas parcelas das adições que resultam em 80].

Professora: Tá. Mas por que que tem essa sequência?

Aluno G: Eu não sei, mas tudo tem o mesmo resultado, foi o que eu entendi.

Professora: Uhum.

Aluno E: Se um deu 80 e tudo deu 80.

Aluna F: Uma coisa que eu percebi agora é que a gente está do lado de outro que tem zero. Dois e zero, seis e zero [Referindo-se à $20 + 60$]

Professora: Muito bem. É uma boa percepção também.

Aluno G: Aaaaaa

Professora: Mas eu queria voltar aqui no que o Aluno G falou. Ele disse que está com esses números para dar 80. Será que só com esses números eu consigo que dê 80?

Aluno G: Não, eu percebi outra coisa.

Aluna F: Não, 40 mais 40 dá 40 [Propondo uma nova adição que não estava na tabela, mas resulta em 80].

Professora: Muito bem. Então eu vou colocar mais um desafio para vocês, porque vocês tão muito bons.

Aluno E: Eu pensei também em mais uma coisa, tipo 24. Quatro mais o seis, fica dez, né?

Professora: Aham.

Aluno E: Então, depois de dez vai para sessenta. [Referindo-se à segunda linha do quadro 1: $36 + 24$].

Professora: Tá. A Aluna F disse que se fizer 40 mais 40 também dá 80. E se vocês aumentassem essa lista colocando outras continhas que dão 80. Será que vocês conseguem esse desafio?

Nesses trechos, reconhecemos uma OAP atrelada a *desafiar os estudantes a irem além dos resultados, instigando-os a elaborarem uma generalização por meio da identificação de semelhanças entre os casos*. Outra OAP que surgiu a partir das discussões que ocorreram no momento de planejamento e que a professora Érica colocou em prática diz respeito a *reconhecer a importância do professor realizar questionamentos aos seus estudantes quando propõe uma tarefa*. Com essas ações, a professora conduziu as discussões dos grupos confirmando a conjectura de que todas as adições resultaram em 80, mas provocando-os a ampliarem os processos de RM, desafiando-os a generalizarem a partir de suas respostas e levando-os por meio desses questionamentos propositivos a refletirem sobre suas conjecturas e ampliarem as generalizações envolvendo os dois quadros da tarefa matemática.

Essas OAP deixam evidente a compreensão da professora com relação a aplicação e exploração da tarefa matemática, sendo que ela não se finda ao encontrarem o resultado das operações. Entendemos que processos formativos que abordam os segmentos de atividades de prática docente, como proposto pelo ciclo PDR, propiciam maior segurança ao professor com relação à aplicação de tarefas matemáticas e condução das discussões com os estudantes. Tal fato é evidenciado pelos questionamentos que a professora realizou a partir das colocações dos estudantes, para incentivá-los a justificarem suas conjecturas e para que pudessem avançar nos processos do RM. Ela propôs que refletissem sobre as parcelas das adições e criassem novas possibilidades de adições que resultam em 80.

3.2.3 Discussão em plenária

O terceiro e último momento da aula foi a apresentação em plenária. Como já citado anteriormente, a professora organizou uma plenária após as discussões do quadro 1 e outra ao final das discussões do quadro 2.

Percebemos que, ao monitorar os grupos, ela optou por sequenciar as resoluções e organizar a plenária, de modo que ela se iniciasse por resultados matematicamente inadequados,

para gerar uma discussão que levasse esses grupos a refutar suas conjecturas iniciais. Assim, a professora chamou um grupo que apresentou 50 como resultado das sentenças e pediu para a aluna registrar no quadro como chegou neste resultado: o algoritmo registrado foi $35+25=50$. Na sequência, a professora questionou se mais algum grupo chegou ao mesmo resultado e um grupo se manifestou dizendo que também chegou ao resultado 50. Os demais grupos explicaram suas estratégias de resolução, obtendo o resultado 60.

Após as apresentações sequenciadas pela professora, ela iniciou um diálogo a respeito de resultados divergentes que surgiram durante a apresentação do quadro 1 da tarefa:

Trecho 15: Discussão em plenária – Quadro 1

Professora Érica: Eu tenho uma coisa para perguntar para vocês. Dois grupos não apresentaram a mesma resposta. Estamos em sete grupos, dois grupos pensaram de um jeito, os outros grupos chegaram no resultado 60. Como a gente faz para comprovar qual que está certo? Como a gente faz? Cada grupo foi explicando do jeito que pensou, certo? Vamos ver então.... O Aluno H fez um cálculo mental, disse que pensou que o 30 mais 20, por que nós estamos aqui na dezena né? Três valendo 30 e o dois valendo 20, Aluno H qual que foi tua resposta?

Aluno H: 50... E cinco mais cinco é dez, daí depois soma, juntando os dois dá 60.

Professora: Isso. Agora eu quero colocar os três juntos aqui. (Professora apaga o registro $35 + 25 = 50$ de um dos grupos) Aluno I, diga o próximo.

Aluno I: 30 mais 20 é 50. Seis mais quatro é dez, juntando tudo, 60.

Professora: Todo mundo concorda?

Estudantes: Sim.

Professora: Os dois grupos que colocaram resposta diferente, pensando desse jeito vocês concordam?

Estudantes: Sim.

Professora: Então vamos deixar o resultado 60?

Estudantes: Sim.

Professora: Com essa contagem sessenta. Aluna C, responde a última.

Aluna C: É sessenta também.

Professora: Fez a continha armada? 37, vem aqui armar. (A aluna vai ao quadro e registra).

Aluna C: Sete mais três é dez né, coloca o zero aqui em baixo e aqui o um. Três mais dois é cinco mais o um, seis.

Professora: Então o resultado também ficou 60. Aluno H no grupo de vocês, vocês perceberam que todos deram o mesmo resultado, e você percebeu mais uma coisa, mostra aqui para os amigos.

Aluno H: Então, é que os números estão na ordem, aqui três, quatro, cinco, seis e sete.

Professora: Que ordem é essa?

Aluno H: Ordem crescente.

Professora: E qual é a ordem crescente?

Aluno H: A crescente, do menor para o maior.

Professora: Qual é o lado que está na ordem crescente?

Aluno H: (aponta para o quadro) aqui está na ordem crescente, e aqui na ordem decrescente.

Professora: a Aluno J também percebeu isso no grupo, né?

Aluna J: Eu percebi que o primeiro desse lado aqui é 35, depois 36 e depois 37. E do outro lado começa no 25, aí vai baixando.

Neste trecho, a professora Érica iniciou chamando a atenção dos estudantes para que refletissem sobre a conjectura que os dois grupos apresentaram (resultado 50) e incentivou-os a avaliarem a validade dos argumentos, de modo que o coletivo, incluindo os grupos que

chegaram a este resultado, validassem ou refutassem essa conjectura apresentada pelos dois grupos.

Após a apresentação dos demais grupos que chegaram ao resultado 60 e a explicação dos seus argumentos matemáticos, a professora perguntou se todos concordavam, e os grupos que haviam obtido 50 como resultado refutaram suas conjecturas iniciais, concordando com a justificativa dos demais colegas, mas sem verbalizar o que compreenderam.

Ao final deste trecho, a professora incentivou a turma a ampliar os processos de RM quando convidou o aluno H a apresentar uma generalização que havia levantado com relação às adições e o aluno J validou essa generalização ao afirmar que percebeu que, de um lado, as parcelas aumentavam 1 e, do outro, diminuía 1.

Durante a discussão da plenária do quadro 2, a professora continuou a instigar os estudantes, como podemos observar no trecho de discussão em plenária, referente ao quadro 2:

Trecho 16: Discussão em plenária – Quadro 2

Professora: Olha o que o Aluno H acabou de pensar... que para dar o mesmo resultado de 80, poderia fazer de outros jeitos. Então você pensou no oito vezes o dez, certo? E se ele fizesse 90 menos dez?

[...]

Professora: Um outro grupo fez algo parecido. Aluna F conta para a gente.

Aluna F: Que 40 mais 40 dá 80.

Professora: 40 mais 40 dá 80, vocês concordam?

Estudantes: Sim.

Aluno H: 50 mais 30, tem vários resultados.

Professora: [...] O que faz dar o resultado de 80?

Aluno H: Os números.

Professora: Quais números?

Aluno H: Agora você me pegou.

Professora: Quais números que fazem dar o resultado de oitenta? Então, aqui nessa sentença, nessa continha, 24 mais 56 deu 80, e concorda que esses números aqui fizeram dar 80 [grifando no quadro], nessa soma. O Aluno H pensou que também posso usar outros números. O oito é igual a 24? O oito aqui que ele usou, é igual a 24? É o mesmo número ou é número diferente?

Estudantes: Diferente.

Professora: Diferente, bem diferente né? O dez que o Aluno H usou é o mesmo número que 56?

Estudantes: Não.

Professora: Diferente! Como é que deu o resultado de 80? O que fez dar o resultado de 80?

Aluno K: De vezes.

Professora: A operação, né? O sinal da operação. Percebe que aqui esse sinal é da multiplicação e oito vezes dez dá oitenta? O que o grupo da Aluna L me contou quando eu fui aí a respeito desses números aqui? [Mostrando os números da quadro 2]. Vocês perceberam...

Aluna L: Tem... [silêncio]

Professora: Tem uma sequência?

Aluna L: Tem!? Não!

Professora: Tem ou não tem?

Aluna L: Não tem.

Professora: Que tipo de sequência que você poderia pensar?

Aluno K: É...um, três, cinco....

Aluna L: 61, 62, 63...

Aluno M: Três em baixo de três, seis embaixo de seis, cinco em baixo de cinco.

A professora provocou os estudantes a avançarem em suas conjecturas iniciais, levando-os a propor outras operações que resultam em 80, inclusive com sentenças multiplicativas. A professora, neste momento, aproveitou para fazer uma comparação entre os números e a operação que resultou em 80. Depois, a professora chama a Aluna L para conduzir uma discussão que pudesse levar ao objetivo da tarefa matemática delimitado na etapa de planejamento, mas a aluna e os colegas do seu grupo mostraram-se indecisos com relação à conjectura apontada inicialmente à professora e não conseguiram elaborar uma justificativa válida a respeito da sequência que a professora levantou.

Assim, percebemos que, apesar do espaço e da condução que a professora propiciou para promover as discussões, os estudantes não chegaram a explorar as regularidades que as adições apresentavam e nem a reconhecer a relação de igualdade entre elas. O que apresentaram de comparação entre as sentenças do quadro 1 foi a questão da ordem crescente e decrescente que envolve as parcelas das adições e, no quadro 2, perceberam que há uma “espécie” de sequência. Por outro lado, conseguiram perceber, como previsto no planejamento das professoras, que o uso de outros números naturais e outras operações poderiam resultar em 80, o que evidencia uma OAP relacionada à importância da professora *promover discussões que instiguem os estudantes a avançarem nos processos do RM*.

Apresentamos, no Quadro 11, as OAP evidenciadas no desenvolvimento da aula, identificadas pela letra D e ordenadas por números. Percebemos que muitas OAP se aproximam

das apresentadas na seção de planejamento, mostrando a importância dessa etapa para que o professor possa refletir sobre seus objetivos e conduzir a aula com mais segurança.

Quadro 11 – Síntese das OAP evidenciadas durante a etapa do desenvolvimento

OAP	Evidências das OAP
- D1: Reconhecer a importância de usar diferentes representações de um mesmo conceito matemático.	Durante a explicação da tarefa, a professora reforçou que há uma diversidade de encaminhamentos para solucioná-la, valorizando as contribuições dos estudantes e encorajando-os a compartilharem com o grupo o modo como pensaram, desafiando-os a justificarem suas conjecturas.
- D2: Estimular os estudantes a entrarem nos processos de conjecturar, generalizar e justificar, mostrando que compreendeu características envolvendo os entendimentos essenciais para o desenvolvimento dos RM.	
- D3: Reconhecer que as resoluções (corretas e incorretas) dos estudantes podem apresentar argumentos que necessitam ser investigados, ou seja, exploração dos conceitos e ideias matemáticas utilizadas pelos estudantes para resolver uma determinada tarefa.	No monitoramento dos grupos a professora estimulou a reflexão para que avançassem nos processos do RM, olhando para além do resultado. Durante a plenária reforçou com a turma essa ação, levando-os a justificarem e/ou refutarem ideias matematicamente inadequadas para a resolução da tarefa e assim, avançassem em suas conjecturas, estimulando à generalização através da busca por semelhanças.
- D4: Desafiar os estudantes a irem além dos resultados, instigando-os a elaborarem uma generalização por meio da identificação de semelhanças entre os casos.	
- D5: Reconhecer a importância de realizar questionamentos aos seus estudantes quando propõe uma tarefa.	
- D6: Promover discussões que instiguem os estudantes a avançarem nos processos do RM.	

Fonte: A autora (2024)

3.3 REFLEXÃO

Por fim, analisamos o relato gravado pela professora Érica sobre suas percepções após o desenvolvimento da aula, as reflexões que ocorreram nos encontros 8 e 9 e as respostas escritas de um questionário proposto para ser respondido ao final do processo formativo (APÊNDICE D).

3.3.1 Reflexão após o desenvolvimento da aula (individual)

Logo após o encerramento da aula, a pesquisadora solicitou à professora Érica que enviasse um áudio contando como foram suas impressões a respeito do desenvolvimento desta aula.

A professora iniciou relatando que ampliou sua maneira de trabalhar com os estudantes, solicitando, além de atividades em grupos que já eram uma prática comum, que justificassem o seu pensamento, de modo a verbalizar, aos demais, como resolveram a proposta da aula.

Trecho 17: Promoção de discussões para justificarem

Professora Érica: Na expectativa de trabalhar essa forma de realização de atividades onde os estudantes sejam mais incentivados a trabalhar essa questão de expor a sua forma de pensamento, eu ampliei a forma de trabalho que eu já tinha, que muitas vezes formam dupla ou grupo para realização das tarefas e eu fiz uma proposta uma semana antes de que eles teriam que, além de realizar a tarefa em grupo, também expor as suas ideias. A gente brincou que eles seriam os professores do dia.

Destacamos a última OAP, *promover discussões que instiguem os estudantes a avançarem nos processos do RM*, da seção anterior, que, neste trecho, foi reconhecida pela própria professora e, segundo ela, incorporada em sua prática. Essa OAP identificada no desenvolvimento da aula é fruto da participação da professora em processos formativos e, mais especificamente, contribuições decorrentes deste processo formativo em que se deu a pesquisa.

Com relação à condução da plenária e finalização deste momento, o relato da professora nos remete a uma fragilidade, que, para futuros processos formativos, deverá ser melhor abordada e explorada, pois não é uma prática rotineira dos professores e requer uma atenção maior por parte dos formadores para que o professor contemple as cinco práticas para orquestrar produtivamente as discussões matemáticas propostas por Stein *et al.* (2008) com maior segurança.

Trecho 18: Discussão em plenária: a condução poderia ser diferente 1?

Professora Érica: Quando eles terminaram o primeiro desafio devido a situação ali que é uma das primeiras vezes que eu estou trabalhando dessa forma de explorar mais o RM dos estudantes, eu fiquei um pouco indecisa na plenária de quanto eu poderia mediar, de até onde eu poderia mediar sem ter essa questão de apresentar, de colocar, de definir formas de resolução. [...] Eu não sabia no momento ali, se eu poderia apresentar ou não. Não apresentei na plenária né, quando foi aí discutido primeira parte ali do desafio. Depois que terminamos todo o trabalho até fiquei pensando se isso não teria dado alguma forma diferente para interpretação, para estruturação, para as conjecturas do segundo desafio e para generalizações.

Esse relato evidenciou a preocupação da professora com a condução da plenária e apontou uma autorreflexão sobre a sua própria prática. Assim, entendemos que o processo formativo contribuiu com a compreensão dos processos e entendimentos do RM, o que identificamos como a ocorrência da OAP *identificar características envolvendo os entendimentos essenciais para o desenvolvimento dos RM*. Entendemos essa preocupação como algo decorrente do processo formativo, uma vez que a professora relatou em formulário anterior ao primeiro encontro (APÊNDICE C) que não realizou nenhum estudo envolvendo o tema de processos de Raciocínio Matemático.

No Trecho 19, a professora retoma, em sua fala, a fragilidade que destacamos acima com relação à condução da plenária. Mas, além desse ponto, manifesta satisfação em trabalhar com tarefas “desafios”, como nomearam a tarefa matemática no planejamento, pois são tarefas abertas que permitem explorar os processos e entendimentos do RM estudados durante os encontros do processo formativo.

Trecho 19: Discussão em plenária: a condução poderia ser diferente 2?

Professora Érica: Como professora fiquei um pouco perdida de como eu estaria realizando a finalização daquele momento na plenária do segundo desafio. Nós fizemos todos esses levantamentos de conjectura, foi feito uma discussão, mas eu fiquei em dúvida se já deveria ali no fechamento apresentar todas as percepções, além da gente chegar na questão de que os resultados todos eram 80 [...] Esse primeiro desafio foi muito importante, essa primeira tarefa desafio como professora foi muito importante para explorar mais essa questão de trazer os elementos do raciocínio, de como explorar mais essa questão das conjecturas que as crianças fazem, como explorar e abordar essa questão da generalização, mas para mim, ficou uma questão de que precisaria de um complemento em uma próxima aula. Então depois que terminou eu fiquei em dúvida se eu fiz um fechamento adequado para aquele momento.

Essa dúvida que a professora apresentou foi em relação à discussão dos encontros 8 e 9, destinados ao momento de reflexão e serão retomados na próxima seção.

3.3.2 Reflexão: encontros 8 e 9

Para esses encontros de Reflexão, foi elaborado, pelos formadores, uma TAP, a partir dos protocolos coletados durante o desenvolvimento da aula da professora Érica, e também de outros quatro professores participantes do processo formativo, que se voluntariaram para tal. Havia sido elaborados durante a etapa de Planejamento três diferentes planos de aulas, contemplando tarefas matemáticas diferentes, cada um atendendo a uma etapa da educação básica: anos iniciais do Ensino Fundamental (com aulas desenvolvidas pelas professoras Érica,

responsável pelo 4º ano, e Paula, responsável pelo 3º ano), anos finais do Ensino Fundamental (com aula desenvolvida no 6º ano pela professora Serena) e Ensino Médio (a partir de aulas desenvolvidas nos 2º anos das professoras Beth e Fernanda). Nesse contexto, os professores participantes do processo formativo foram convidados a refletirem acerca de aspectos relacionados ao RM, seus processos e entendimentos essenciais, a partir de registros de práticas dessas aulas.

O encontro 8 iniciou com todos os professores reunidos em uma mesma sala para a explicação da proposta, e depois dois grupos foram organizados, contendo um representante de cada etapa da educação em uma sala, para participar das discussões a partir da TAP por cerca de 1 hora e 30 minutos. Os últimos 30 minutos do encontro foram destinados à reflexão pelo grande grupo, a partir das discussões ocorridas anteriormente. Neste encontro, o foco de reflexão foi a apresentação da tarefa pelas professoras, em algumas aulas, e parte das discussões que ocorreram em pequenos grupos, em outras aulas. O encontro 9 ocorreu de forma similar, sendo que nesse dia o foco se deu em torno de trechos das plenárias das aulas desenvolvidas.

Nosso foco de análise em ambos os encontros foi o grupo em que a professora Érica era uma das participantes e selecionamos recortes dos momentos que entendemos como indícios de OAP que podem ter sido gerados durante o processo formativo acerca da compreensão dos entendimentos e processos do RM.

Um primeiro trecho envolve uma discussão no grande grupo, sobre a apresentação da tarefa realizada pela professora dos Anos Finais do Ensino Fundamental (APÊNDICE E). Por se tratar de uma tarefa matemática que envolvia a sequência da construção de colares, levantou-se uma reflexão sobre o tema antes de introduzir a atividade, se seria necessário levar material para que os estudantes construíssem seus colares. O grupo entendeu que para essa proposta não haveria necessidade, pois seria uma brincadeira e não levaria a grandes avanços no processo de aprendizagem.

Após essa reflexão, a professora Érica se manifestou ao evidenciar que têm incorporado à sua prática cada vez mais tarefas matemáticas que permitam avanço nos processos do RM de seus estudantes, conforme o Trecho 20, a transcrito a seguir.

Trecho 20: Inserção na prática docente de tarefas que favoreçam o desenvolvimento dos processos do RM

Professora Érica: Vou dar um relato que eu estou realizando cada vez mais esse tipo de atividade. Gostei da brincadeira e estou realizando! Essa semana eu fiz uma parecida assim, só que intencionalmente eu levei materiais para os estudantes e eu percebi que deu diferença lá nos Anos iniciais... Só que a proposta, não eram todos com a mesma tarefa, cada grupo tinha uma tarefa e cada grupo estava com um material, e não sei se por

esse motivo também foi diferente, tem várias coisas para pensar. Mas como eles estavam com material concreto e cada um com um material eu achei que foi mais interessante para aparecer as ideias deles.

Ficou evidente que a professora vem incorporando ao seu planejamento tarefas matemáticas que propiciem explorar os processos e entendimentos do RM, realizando adaptações que melhor atendam à sua demanda com os estudantes dos anos iniciais. Neste relato, a professora fez uso de materiais concretos com a intenção de estimular ainda mais os estudantes a justificarem suas conjecturas e generalizações. Assim, evidenciamos como uma OAP pode *inserir em sua prática docente tarefas que favoreçam o desenvolvimento dos processos do RM*.

Trecho 21: Reflexão sobre a prática docente e a importância das trocas entre os participantes 1

Professora Érica: Por ser uma primeira vez mais oficial de usar os entendimentos, eu fiquei muito em dúvida de como abordar o erro do estudante. Então, foi colocado no nosso planejamento que primeiro seriam chamados os grupos que teriam resolvido de forma incorreta e teve esse grupo (se referindo ao recorte da prática discutido na TAP), eles estavam um pouco tímidos, não quiseram falar muito alto, aí a aluna perguntou se podia colocar no quadro e fala meio baixinho o jeito que ela resolveu. Depois a gente foi para o outro grupo que resolveu com cálculo mental e nessa hora eu falei agora vocês concordam que desse jeito como que ele falou está correto e ficou nisso. Eu poderia ter explorado melhor, mas realmente na hora ali eu fiquei muito em dúvida de como abordar para que ampliasse mais.[...] Na reflexão aqui, as meninas me deram uma sugestão, a Serena que semana passada deu um relato bem bom aí para me deixar mais segura para continuar o trabalho, colocou como sugestão de que primeiro, peça para criança conversar com a professora a forma que pensou para que ela se sinta mais segura para depois colocar para plenária. Então, de repente, se eu tivesse antes da plenária conversado um pouco mais com esse grupo sobre a forma que eles pensaram, talvez eles tivessem mais seguros ali.

Apontamos, a partir do Trecho 21, que o processo formativo possibilitou a ocorrência de duas OAP decorrentes da formação continuada: *refletir sobre a prática docente e gerar trocas relevantes entre os participantes, proporcionando repensar e modificar as ações docentes*. Essas mesmas OAP podem ser reconhecidas no Trecho 22, em que a professora Érica expõe a importância do estudo em grupo e das reflexões com análise da própria prática.

Trecho 22: Reflexão sobre a prática docente e a importância das trocas entre os participantes 2

Professora Érica: Mesmo a gente tendo feito todo esse trabalho antes [referindo-se ao processo formativo como um todo], que foi muito rico aqui, desde as primeiras discussões que a gente teve, planejar em conjunto aqui com o grupo, antecipar. Essa parte da antecipação foi muito boa, mas mesmo assim, a gente ainda se prende. Eu fiquei presa na questão de que eu queria que eles apresentassem um esquema, um raciocínio a partir de esquemas de que eles estavam percebendo a questão da relação de uma sentença para outra. Como vocês lembram, isso partiu de um exercício que a gente pegou e modificou algumas coisas para fazer o planejamento.

Então é muito forte isso, da gente ficar preso e acaba que no momento ali da realização eu fiquei muito em dúvida do quanto eu poderia avançar, colocando mais questionamentos e do quanto eu tinha que esperar deles, quanto eu poderia deixar que eles explorassem e envolve a expectativa do professor também.

A Serena¹³ trouxe uma questão aí de ampliar um pouquinho, voltar para o objetivo do planejamento e pedir mais exemplos, de que a ordem das parcelas não afetaria o resultado e colocando em relação a outras operações, extrapolando a soma, se a gente não ficasse focado nesse esquema de ligação ali de uma sentença para outra e sim a partir disso que o próprio aluno H trouxe de explorar a questão de diferentes parcelas, seja para soma ou subtração para o resultado 80 ou diferentes fatores, na multiplicação para o resultado 80.

E a Serena falou algo bem interessante para ampliar a discussão.

Professora Serena: Podemos terminar [referindo-se à plenária com os estudantes] reforçando que dentro da Matemática, ela oferece diferentes maneiras de resolver o problema e que a escolha da operação vai depender do contexto e do tipo de problema que está sendo abordado [...] bate muito com o que a gente está estudando, que a gente entrega a tarefa e o aluno tem vários caminhos para seguir, então também eu tenho várias operações que chegam no mesmo resultado.

Após reconhecer a importância de *continuar aprimorando a prática docente por meio de processos de formação continuada que integrem elementos da teoria e contexto reais da prática*, a professora Érica manifestou a necessidade da realização de mais uma etapa, após essas reflexões, reaplicando as etapas do ciclo PDR.

Trecho 23: Sugestão para mais uma rodada do ciclo PDR

Professora Érica: Eu até perguntei se não seria necessário mais uma etapa, porque agora vocês vão fazer as discussões e daí podem fazer uma retomada com a gente. Vamos fazer mais uma rodada, eu estou disposta! [...] Mais uma aula a partir da teoria que tivemos de todos os entendimentos e da prática, porque na prática como o professor disse, não é tão fácil, e depois fazemos mais uma rodada, vamos pensar?!

O pedido final da professora deixou subentendido que os processos formativos, como o proposto nesta pesquisa, apoiam e auxiliam os professores que ensinam Matemática a repensarem e incorporarem em sua prática de ensino estratégias que estimulem os estudantes a conjecturar, generalizar, explicar o porquê e justificar, explorando a tarefa como um todo e não apenas buscando pelo resultado final, sem compreensão do processo. Entendemos que nem todas as aulas de Matemática ocorrerão neste contexto, mas vivenciar que a mudança da prática docente é significativa para o professor e para o aluno nos motiva a continuar desenvolvendo e participando de processos formativos nessa configuração.

3.3.3 Reflexão: avaliação do processo formativo

¹³ Preservando a identidade da professora participante, usamos nome fictício.

Nesta avaliação do processo formativo, que ocorreu por meio de um relato gravado¹⁴ ficou evidente na fala da professora Érica que o designer da formação mostrou potencial para gerar OAP capazes de modificar a prática docente do participante. O Trecho 24, transcrito a seguir, nos remete às experiências vivenciadas ao longo do processo formativo que contribuíram para repensar aspectos de sua prática docente.

Trecho 24: Experiências vivenciadas ao longo do processo que contribuíram para repensar aspectos de sua prática docente

Professora Érica: A experiência de planejar considerando a diversidade de possíveis conjecturas a serem elaboradas pelos estudantes ao realizar as atividades propostas, contribuiu para qualificar a mediação durante o desenvolvimento das propostas planejadas.

Compreendemos que o planejamento coletivo proposto como parte do processo formativo, seguido da etapa de antecipar possíveis resoluções dos estudantes, *proporcionou à docente consciência na ação da mediação a ser realizada no desenvolvimento da aula planejada*. Entendemos que, por conta da participação dos professores neste processo de formação continuada não estar vinculado diretamente ao empregador de cada um, os docentes se motivaram pelo tema em busca de atualização teórica e melhoria da prática do ensino de Matemática. A professora foco desta pesquisa relatou, em sua experiência na avaliação da formação, os impactos em sua prática após passar por este processo, conforme Trecho 25.

Trecho 25: Impactos em sua prática após a vivência no processo formativo

Professora Érica: Um primeiro impacto foi o de ressignificação sobre as diferentes abordagens para resolução de problemas, saindo do contexto tradicional de respostas prontas como as que são dadas em gabaritos apresentados nos livros didáticos. [...] A questão do trabalho em grupo e do espaço para argumentação dos estudantes é uma estratégia possível para o conjecturar, mas na ânsia de "passar o conteúdo" por vezes não nos damos conta da importância dos demais processos e isso foi para mim desmistificado por meio da questão de que os processos não precisam ser trabalhados todos ao mesmo tempo, ou na mesma atividade.

Compreendemos, a partir das palavras da professora, como uma OAP permite a possibilidade de *ressignificar suas ações no processo de ensino da Matemática envolvendo atividades de caráter exploratório*. Por fim, sintetizamos as OAP destacadas nesta etapa de reflexão, seguidas pela letra R e uma sequência numérica (Quadro 12).

¹⁴ Foi solicitado que a professora contasse como foi a experiência do desenvolvimento da aula planejada no contexto de formação continuada, sem um roteiro específico para seguir.

Quadro 12 – Síntese das OAP e evidências durante a etapa da reflexão

OAP	Evidências das OAP
- R1: Promover discussões que instiguem os estudantes a avançarem nos processos do RM.	Em alguns momentos da reflexão a professora deixou evidente que inseriu em sua prática tarefas matemáticas de caráter mais aberto que permitiram gerar discussões que contribuíram na mobilização de diferentes processos do RM.
- R2: Identificar características envolvendo os Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento dos RM.	Após o desenvolvimento da aula planejada, a professora manifestou que poderia ter conduzido de maneira diferente sua plenária, estabelecendo conexões a partir do que os estudantes apresentaram. Entendemos que esse incômodo gerado parte da compreensão internalizada das características que envolvem os processos e entendimentos do RM e que não avançaram no decorrer da aula conforme o objetivo da tarefa planejada.
- R3: Inserir em sua prática docente tarefas que favoreçam o desenvolvimento dos processos do RM.	
- R4: Refletir sobre a prática docente.	A professora reconhece que as trocas entre os participantes enriqueceram as discussões e permitiram repensar ações para a prática docente.
- R5: Gerar trocas relevantes entre os participantes, proporcionando repensar e modificar as ações docentes.	
- R6: Continuar aprimorando a prática docente por meio de processos de formação continuada que integrem elementos da teoria e contexto reais da prática.	Manifestação em continuar participando de momentos formativos que permitam integrar teoria e as etapas do ciclo PDR, buscando aperfeiçoamento da prática docente.
- R7: Proporcionar consciência na ação da mediação a ser realizada no desenvolvimento da aula planejada.	A ação de antecipar as respostas dos estudantes trouxe segurança para o desenvolvimento da aula planejada, contribuindo para que a professora pudesse monitorar, selecionar e sequenciar as estratégias elaboradas nos pequenos grupos.
- R8: Ressignificar suas ações no processo de ensino da Matemática envolvendo atividades de caráter exploratório.	Em alguns momentos da reflexão, a professora deixou evidente que inseriu em sua prática elementos mais exploratórios.

Fonte: A autora (2024)

Finalizada a análise das OAP evidenciadas na etapa de reflexão, apresentamos uma última seção deste capítulo com uma discussão conjunta sobre as OAP identificadas e

analisadas durante as três etapas do ciclo PDR vivenciadas pela professora Érica com relação ao RM, estabelecendo aproximações com o modelo proposto por Ball, Thames e Phelps (2008).

3.4 DISCUSSÃO DOS DADOS

Uma síntese de todas as OAP identificadas é apresentada no Quadro 13, perpassando os três momentos (Planejamento, Desenvolvimento e Reflexão) do ciclo PDR. Esta organização é uma resposta à questão inicial de nossa pesquisa: quais OAP acerca do RM são declaradas pela professora participante ou podem ser inferidas pelos pesquisadores, nas etapas do ciclo PDR de uma aula?

Essas OAP evidenciam a importância do engajamento do professor em processos formativos que o coloquem como sujeito participante do processo, e não como um mero espectador de palestras. As OAP refletem também o envolvimento do professor com a proposta da formação continuada, sua assiduidade e a sua interação com os demais participantes. Reconhecemos que a professora foco dessa pesquisa se mostrou comprometida durante o processo formativo, o que possibilitou gerar as OAP evidenciadas no Quadro 13, contribuindo com reflexão de sua ação e inserção de práticas pedagógicas decorrentes de vivências durante o processo de formação continuada.

Diante da síntese das OAP identificadas neste processo formativo, retomamos o Quadro 8, ao qual Anjos (2023) apresenta as OAP evidenciadas no 1º ciclo do processo formativo e que nos motivou a identificar essas e outras OAP no decorrer desta pesquisa. Destacamos no Quadro 14 as OAP que se aproximaram nos dois processos formativos. Reiteramos que Anjos (2023) apresentou as OAP durante as discussões teóricas sobre os entendimentos essenciais do RM, relacionando-as com os domínios do modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020). Já a presente pesquisa analisou os dados gerados especificamente nas etapas do ciclo PDR (Trevisan; Ribeiro; Ponte, 2020), sendo várias delas inferidas pelos pesquisadores com base nas falas da professora. Assim, diversas dessas OAP são escritas de modo diferente, mas entendemos que se aproximam, em sua essência, daquelas identificadas por Anjos (2023), sendo que D3 foi idêntica em ambos. No Quadro 15, por sua vez, destacamos as novas OAP que surgiram deste processo de formação continuada.

Quadro 13 - OAP identificadas nas etapas do ciclo PDR durante do processo formativo

OAP	CICLO PDR		
	P	D	R
- P1: Reconhecer a importância de o professor realizar questionamentos aos seus estudantes quando propõe uma tarefa.	X	X	X
- P2: Reconhecer, discutir e refletir sobre os conteúdos que são essenciais para auxiliar o aluno durante o processo de aprendizagem.	X		X
- P3: Planejar e estruturar a tarefa matemática de tal modo que possibilite aos estudantes conjecturar, generalizar e justificar possibilitando envolvimento nos entendimentos essenciais para o desenvolvimento dos RM.	X		
- P4: Antecipar o que pensam os estudantes, quais suas dificuldades e como interpretam as tarefas matemáticas.	X	X	
- P5: Estabelecimento de relações entre a tarefa e os processos de conjecturar e generalizar.	X		X
- P6: Compreender a importância em selecionar tarefas que possibilitam explorar os entendimentos essenciais do RM.	X		X
- P7: Conduzir a aplicação da proposta em sala de aula estimulando os estudantes a desenvolverem habilidades para elaborar e sistematizar seu	X	X	
- P8: Antecipar possíveis acertos e erros que podem surgir durante o desenvolvimento da aula.	X		
- D1: Reconhecer a importância de usar diferentes representações de um mesmo conceito matemático.	X	X	X
- D2: Estimular os estudantes a entrarem nos processos de conjecturar, generalizar e justificar, mostrando que compreenderam características envolvendo os entendimentos essenciais para o desenvolvimento dos RM.	X	X	
- D3: Reconhecer que as resoluções (corretas e incorretas) dos estudantes podem apresentar argumentos que necessitam ser investigados, ou seja, exploração dos conceitos e ideias matemáticas utilizadas pelos estudantes para resolver uma determinada tarefa.		X	X
- D4: Desafiar os estudantes a irem além dos resultados, instigando-os a elaborarem uma generalização por meio da identificação de semelhanças entre		X	
- D5: Reconhecer a importância de realizar questionamentos aos seus estudantes quando propõe uma tarefa.	X	X	X
- D6: Promover discussões que instiguem os estudantes a avançarem nos processos do RM.		X	X
- R1: Promover discussões que instiguem os estudantes a avançarem nos processos do RM.		X	X
- R2: Identificar características envolvendo os entendimentos essenciais para o desenvolvimento dos RM.	X	X	X
- R3: Inserir em sua prática docente tarefas que favoreçam o desenvolvimento dos processos do RM.	X	X	X
- R4: Refletir sobre a prática docente.	X		X
- R5: Gerar trocas relevantes entre os participantes, proporcionando repensar e modificar as ações docentes.	X		X
- R6: Continuar aprimorando a prática docente por meio de processos de formação continuada que integrem elementos da teoria e contexto reais da			X

Fonte: A autora (2024)

Quadro 14 – Aproximação das OAP no ciclo PDR com aquelas identificadas por Anjos (2023)

Formação continuada – Ciclo PDR	Anjos (2023)
- P1/D5: Reconhecer a importância de o professor realizar questionamentos aos seus estudantes quando propõe uma tarefa. - D6/R1: Promover discussões que instiguem os estudantes a avançarem nos processos do RM.	• Reflexões sobre as ações didáticas que podem ser desenvolvidas a partir das práticas de ensino, ou seja, as práticas realizadas em sala de aula. • Identificação dos momentos em que seriam necessárias as intervenções do professor durante a resolução de uma tarefa matemática. • Discussões e reflexões sobre as resoluções matemáticas dos estudantes, buscando compreender os raciocínios matemáticos desenvolvidos por eles.
- D3: Reconhecer que as resoluções (corretas e incorretas) dos estudantes podem apresentar argumentos que necessitam ser investigados, ou seja, exploração dos conceitos e ideias matemáticas utilizadas pelos estudantes para resolver uma determinada tarefa.	
- R2: Identificar características envolvendo os entendimentos essenciais para o desenvolvimento dos RM.	• Reconhecimento dos processos de RM a partir das resoluções dos estudantes.

Fonte: A autora (2024)

Quadro 15 – Novas OAP identificadas nas etapas do ciclo PDR de um processo de formação continuada

Novas OAP identificadas nas etapas do ciclo PDR de um processo de formação continuada
- P2: Reconhecer, discutir e refletir sobre os conteúdos que são essenciais para auxiliar o aluno durante o processo de aprendizagem.
- P3: Planejar e estruturar a tarefa matemática de tal modo que possibilite aos estudantes conjecturar, generalizar e justificar possibilitando envolvimento nos entendimentos essenciais para o desenvolvimento dos RM.
- P4: Antecipar o que pensam os estudantes, quais suas dificuldades e como interpretam as tarefas matemáticas.
- P5: Estabelecimento de relações entre a tarefa e os processos de conjecturar e generalizar.
- P6: Compreender a importância em selecionar tarefas que possibilitam explorar os entendimentos essenciais do RM.
- P7: Conduzir a aplicação da proposta em sala de aula estimulando os estudantes a desenvolverem habilidades para elaborar e sistematizar seu pensamento.
- P8: Antecipar possíveis acertos e erros que podem surgir durante o desenvolvimento da aula.
- D1: Reconhecer a importância de usar diferentes representações de um mesmo conceito matemático.
- D2: Estimular os estudantes a entrarem nos processos de conjecturar, generalizar e justificar, mostrando que compreenderam características envolvendo os entendimentos essenciais para o desenvolvimento dos RM.
- D4: Desafiar os estudantes a irem além dos resultados, instigando-os a elaborarem uma generalização por meio da identificação de semelhanças entre os casos.
- R3: Inserir em sua prática docente tarefas que favoreçam o desenvolvimento dos processos do RM.
- R4: Refletir sobre a prática docente.
- R5: Gerar trocas relevantes entre os participantes, proporcionando repensar e modificar as ações docentes.
- R6: Continuar aprimorando a prática docente por meio de processos de formação continuada que integrem elementos da teoria e contexto reais da prática.

Fonte: A autora (2024)

Partindo das OAP decorrentes da análise dos dados nas etapas do ciclo PDR, avançamos ao responder a segunda pergunta de nossa pesquisa, “como essas OAP articulam-se com o conhecimento matemático para o ensino (Ball; Thames; Phelps, 2008)?”, assim, propomos uma categorização, organizando as OAP inspirados em subdomínios do modelo *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)*, categorizando-as a partir dos dois deles: Conhecimento Especializado do Conteúdo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Quadro 16).

Quadro 16 – OAP segmentadas em conhecimento especializado e pedagógico

OAP e o Conhecimento do RM para o Ensino				
Conhecimento Especializado do RM	OAP1 - Diferenciar uma conjectura de uma generalização.	Conhecimento do RM		OAP5 - Reconhecer que a condução da aplicação da tarefa matemática com foco nos processos e entendimentos do RM requer que o professor realize questionamentos aos seus estudantes.
	OAP2 - Reconhecer a importância do uso de contraexemplo.			OAP6 - Planejar e estruturar a tarefa matemática de tal modo que possibilite aos estudantes conjecturar, generalizar e justificar possibilitando envolvimento nos Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento dos RM.
	OAP3 - Reconhecer a importância de usar diferentes representações de um mesmo conceito matemático.			OAP7 - Continuar aprimorando a prática docente por meio de processos de formação continuada que integrem elementos da teoria e contexto reais da prática, possibilitando a aprendizagem entre pares possibilitando repensar e modificar as ações da prática docente.
	OAP4 - Compreender a possibilidade de generalizar por meio da identificação de semelhanças entre casos.	Conhecimento Pedagógico do RM		OAP8 - Reconhecer, discutir e refletir sobre os conteúdos que são essenciais para auxiliar o aluno durante o processo de aprendizagem.
				OAP9 - Antecipar o que pensam os estudantes, quais suas dificuldades e como interpretam as tarefas matemáticas, prevendo possíveis acertos e erros que podem surgir durante o desenvolvimento da aula.
				OAP10 - Estimular os estudantes a entrarem nos processos de conjecturar, generalizar e justificar, mostrando que compreenderam características envolvendo os Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento dos RM.
		Conhecimento do RM e dos estudantes		OAP11 - Reconhecer que as resoluções (corretas e incorretas) dos estudantes podem apresentar argumentos que necessitam ser investigados, ou seja, exploração dos conceitos e ideias matemáticas utilizadas pelos estudantes para resolver uma determinada tarefa.

Fonte: A autora (2024)

Destacamos, no Conhecimento Especializado, as OAP que a professora teve de aprofundar a sua compreensão sobre os processos e entendimentos do RM. Já no Conhecimento Pedagógico, destacamos as OAP que dizem respeito diretamente à prática docente, ou seja, à maneira como o professor geriu sua aula, ao buscar estimular a mobilização de diferentes processos do RM em seus estudantes.

A estrutura do processo formativo, baseado no modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), e a implementação da etapa do Planejamento do ciclo PDR (Trevisan; Ribeiro; Ponte, 2020) propiciou, aos professores, participarem de momentos de estudos coletivos e individuais, o que promoveu reflexões acerca do tema RM, por meio de TAP elaboradas com recortes da prática em sala de aula, atreladas a conteúdos especializados da Matemática, aproximando-se ao que Schulman (1986) descreve como saberes e competências da docência. Dessa forma, as OAP elencadas como pertencentes ao Conhecimento Especializado do Conteúdo fazem menção aos processos e entendimentos essenciais do RM e, por isso, eles foram categorizados no Quadro 16 como *Conhecimento Especializado do RM*.

Com o olhar voltado para o conhecimento profissional do professor (Shulman, 1986), concordamos com Chevallard (1991) ao apontar que o docente, além fazer uso dos saberes especializados do conteúdo (ou seja, o saber científico) para cumprir com seus objetivos de ensino, deve adaptar tais saberes, sendo essa prática denominada pelo referido autor como transposição didática. Partindo desse ponto, com relação aos domínios do modelo teórico Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball; Thames; Phelps, 2008), as OAP foram associadas ao Conhecimento Pedagógico do RM foram segmentadas em dois grupos: *Conhecimento do RM e do Ensino* e *Conhecimento do RM e dos Estudantes*.

Para que o ensino da Matemática ocorra de modo a proporcionar avanço nos processos do RM, faz-se necessário que o professor compreenda e identifique características que envolvam os entendimentos essenciais do RM. As OAP relacionadas ao Conhecimento Especializado do RM vem de encontro ao que Melhuish, Thanheiser e Guyot (2020) afirmam ao dizer que o professor precisa desenvolver as habilidades que o permitam perceber formas de RM, tais quais, por exemplo, generalizar ou justificar, como um pré-requisito para que o docente possa promover essas práticas no contexto de sala de aula (Lannin; Ellis; Elliot, 2011).

Nesse sentido, Rodrigues, Vieira, Serrazina (2021) afirmam que é imprescindível a compreensão de RM para que ocorra o desenvolvimento da prática pedagógica docente de modo a apoiar os estudantes a avançarem no desenvolvimento dos processos e entendimentos do RM (Lannin; Ellis; Elliot, 2011).

A OAP1, gerada neste processo formativo, vem ao encontro dessa afirmação, uma vez que a professora Érica reconheceu e diferenciou durante as etapas do ciclo PDR (Trevisan; Ribeiro; Ponte, 2020) as diferenças entre os processos de conjecturar e generalizar. A conjectura é a elaboração de uma primeira hipótese matemática construída pelo aluno ao tentar solucionar a tarefa. Já a generalização demanda um envolvimento maior do aluno com a tarefa matemática, e o professor tem um papel fundamental, e leva o aluno a identificar semelhanças entre os casos e reconhecer os limites de suas generalizações (Lannin; Ellis; Elliot, 2011). Nota-se que a OAP4 tem uma relação de dependência com a OAP1, uma vez que se faz necessário diferenciar os processos iniciais descritos por Lannin, Ellis e Elliot (2011) para compreender as possibilidades de avanço dos entendimentos essenciais relacionados à generalização.

Nesse cenário, reconhecer características do RM se torna imprescindível para que os professores planejem as tarefas matemáticas e as discussões durante o desenvolvimento de suas aulas considerando a promoção do RM (Davidson; Herbert; Bragg, 2019; Stein; Smith, 2009; Sullivan *et al.*, 2016), como é evidenciado na OAP2 e na OAP3 pois, ao reconhecer o contraexemplo (OAP2) como impulsionador do RM (Martins; Henriques; Caetano, 2023), o professor articula “conteúdos matemáticos específicos com questões que provoquem o desenvolvimento do RM” (Martins; Henriques; Caetano, 2023, p. 1130).

No caso da OAP3, na qual o professor reconhece a importância de usar diferentes representações de um mesmo conteúdo matemático, Anjos (2023) identifica a OAP em contexto de formação continuada:

Discutir sobre a forma de mostrar para um aluno que a resolução dele está incorreta, ou seja, utilizar a justificação matemática como um suporte para promover a aprendizagem e não apenas dizer para o aluno que está errado, mas, também, que é inválido o que ele fez (Anjos, 2023, p. 104).

Ao desenvolver essa consciência de explicar ao aluno que sua resolução está incorreta por meio de justificação matemática, como descrito por Anjos (2023), o professor pode inserir, em sua prática, o uso de diferentes representações para promover a aprendizagem dos conceitos e, consequentemente, estimular a mobilização dos processos de RM dos estudantes (Ponte; Mata-Pereira; Henriques, 2012). Em síntese, o processo de formação continuada se provou como um meio para fomentar essas discussões acerca de OAP promotoras do Conhecimento Especializado do Conteúdo (Shulman, 1986; Ball; Thames e Phelps, 2008) e, particularmente nesta pesquisa, do RM. (Lannin; Ellis; Elliot, 2011; Jeannotte; Kieran, 2017).

Com relação ao Conhecimento do RM e do ensino, as OAP5 e OAP6 apresentam ações conscientes com relação ao trabalho do professor, como afirma Alarcão (2005, p.176), ao dizer

que os professores têm um “papel ativo na educação e não um papel meramente técnico que se reduza à execução de normas e receitas ou à aplicação de teorias exteriores à sua própria comunidade profissional”. As vivências ao longo do processo formativo contribuíram para que a professora Érica repensasse suas práticas de sala de aula, reconhecendo a importância de propor questionamentos aos estudantes (Rodrigues; Menezes; Ponte, 2018), bem como reflexões sobre a condução e elaboração da tarefa matemática, sem deixar de manter seu nível de exigência cognitiva (Ponte, 2005; Stein; Smith, 2009). Esses são aspectos fundamentais da gestão da aula de Matemática (Ponte, 2005), com o objetivo de contribuir com o desenvolvimento do RM dos estudantes, por meio da mobilização de diferentes processos (Jeannotte; Kieran, 2017).

A OAP7 surge em decorrência de uma fragilidade identificada ao final deste processo formativo. Apesar da oferta do roteiro adaptado de Serrazina (2017, p. 24) para conduzir a elaboração do plano de aula, e da apresentação detalhada das cinco práticas propostas por Stein *et al.* (2008), a professora Érica relatou nos momentos de reflexão que sentiu dificuldade em compreender se sua prática estava de acordo com a proposta da orquestração das discussões matemáticas descrito por Stein *et al.* (2008).

Destacamos o uso do modelo PLOT, proposto por Ribeiro e Ponte (2020), para alicerçar o processo formativo, por meio de TAP, e a implantação do ciclo PDR (Trevisan; Ribeiro; Ponte, 2020), aproximando os elementos da teoria com contextos reais da prática, o que proporcionou a aprendizagem entre pares (Mazur, 1997), e a reflexão da prática docente (Rodrigues; Vieira; Serrazina, 2021), também evidenciada na OAP7.

O Conhecimento do RM e dos estudantes tem ligação com algumas OAP que decorrem dos momentos de planejamento (OAP8 e OAP9), por entendermos que a professora participante deste processo formativo sobre RM aprofundou sua compreensão sobre essa temática e a colocou em prática na elaboração do seu planejamento, levando em conta as especificidades dos seus estudantes.

Ele remete, também, às OAP que ocorreram durante o Desenvolvimento da aula (OAP10 e OAP11), em consonância com Rodrigues, Vieira e Serrazina (2021), que reforçam algumas ações do professor para promover o RM no contexto de sala de aula, como questionar, encorajar a partilha, valorizar contribuições dos estudantes, desafiar a justificar e a generalizar.

Debruçar o olhar em busca de OAP advindas de processos formativos com foco específico nos processos e entendimentos do RM se mostra uma atividade promissora, pois a amplitude do tema abrange os professores que ensinam Matemática, independentemente da modalidade de ensino em que atuam. Nesse sentido, o grupo de pesquisa “Raciocínio

matemático e formação de professores” vem desenvolvendo pesquisas que envolvem o contexto de formação continuada citado nessa pesquisa (ciclo 1 e 2), que possui a temática central do RM, utilizando o modelo PLOT como *design* que favorece a promoção de OAP atrelado ao ciclo PDR, que delimita as etapas do processo formativo. Resultados oriundos dessas pesquisas apontam que esse modelo de formação contribui para ressignificação do conhecimento de professores participantes, com relação aos seus diferentes subdomínios (Anjos, 2023; Gross *et al.*, 2023a,b; Ribeiro; Aguiar; Trevisan, 2020).

Por fim, ressaltamos que o modelo MKT, apresentado por Ball, Thames e Phelps (2008), mostrou-se promissor para pensar o *design* de processos de formação continuada para professores que ensinam Matemática voltados à discussões a respeito do RM, seus processos e entendimentos e por abranger tanto o conhecimento específico da área (no caso, do RM) quanto o conhecimento pedagógico do RM. Portanto, a categorização das OAP, evidenciadas no Quadro 16, mostra-se como um resultado relevante para que formadores de professores de Matemática possam organizar processos formativos que possibilitem a aprendizagem profissional docente. Nosso entendimento é o de que elas refletem, como consequência, na qualidade do ensino e favorecem a aprendizagem dos estudantes.

3.5 PRODUTO EDUCACIONAL

De acordo com o Art. 1¹⁵, da resolução do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - PPGMAT, um dos requisitos obrigatórios para a conclusão do mestrado profissional é a elaboração e/ou aplicação de um produto educacional.

O produto educacional apresentado é um relato, caracterizado como um Recurso Educacional Digital resultante da análise dos dados desta pesquisa, voltado para formadores de professores que ensinam Matemática, intitulado “As Oportunidades de aprendizagem profissional acerca do raciocínio matemático: um relato para formadores de professores que ensinam Matemática”.

O relato tem por objetivo ressaltar, nas etapas do ciclo PDR, os momentos da formação em que as OAP foram evidenciadas, o que possibilita aos formadores que os potencializem para que, dessa forma, essas ou novas OAP possam ocorrer. Ressaltamos como limitação a motivação intrínseca de cada participante.

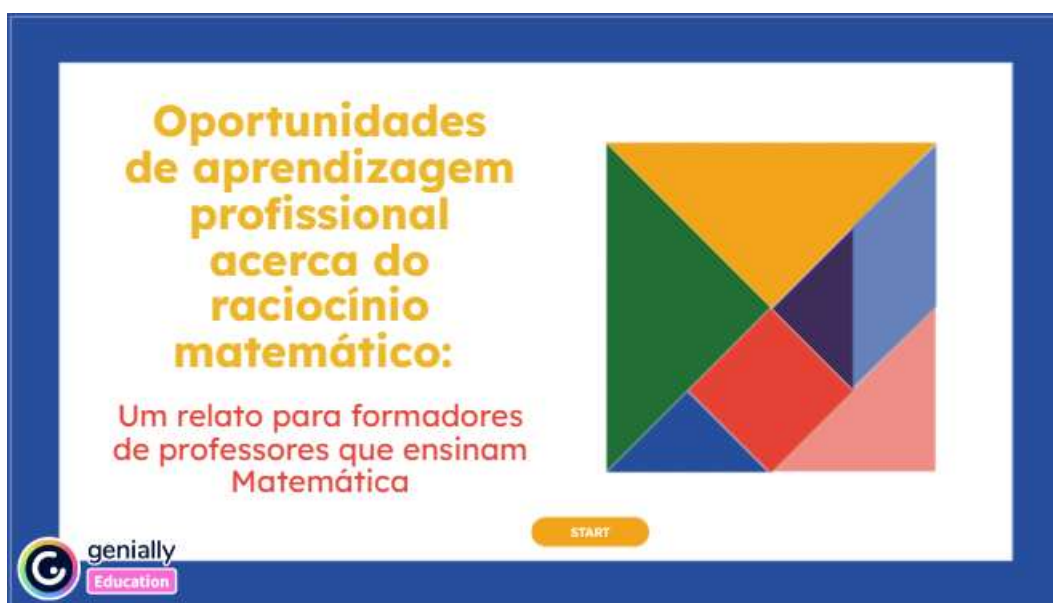
¹⁵ <https://www.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/stricto-sensu/ppgmat-multi>

Optamos por trabalhar com um material digital, pois a mestranda está matriculada no curso Gestão de Ambientes de Aprendizagens, dentro do Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) ofertado pelo Governo do Estado do Paraná, e os materiais estão disponibilizados em um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA). Além disso, a plataforma app.genial.ly apresenta de maneira interativa cada disciplina deste curso. Optamos por utilizar o mesmo recurso digital, por ser intuitivo e de fácil acesso, o que faz dele uma possibilidade promissora de disseminar e gerar OAP acerca do RM em outros contextos de formação continuada.

O produto educacional está disponibilizado no formato digital, por meio da plataforma app.genial.ly neste link <https://view.genial.ly/660b747d9bb0510014b71897/presentation-produto-educacional> e por meio do link <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2119> disponibilizado no PDF presente no Repositório Institucional da UTFPR.

A capa do produto educacional está apresentada na Figura 18.

Figura 18 - Capa do produto educacional



Fonte: A autora (2024)

Ao clicar no ícone start, ocorre o direcionamento para o índice (Figura 19), possibilitando percorrer por todo o produto educacional.

Figura 19 – Índice do produto educacional



Fonte: A autora (2024)

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Abrimos este capítulo com uma reflexão sobre os primeiros questionamentos apresentados na introdução e que levou a pesquisadora a seguir esse caminho da formação continuada de professores que ensinam Matemática, dentre eles: o que os professores que participam dos momentos formativos aprendem? O que modifica na sua prática? Ao longo do processo formativo, as questões norteadoras da pesquisa se delinearam, das quais, elencamos: quais OAP acerca do RM são declaradas pela professora participante ou podem ser inferidas pelos pesquisadores, nas etapas do ciclo PDR (Planejamento, Desenvolvimento e Reflexão) de uma aula? Como essas OAP se articulam com o conhecimento matemático para o ensino (Ball; Thames; Phelps, 2008)?

Após vivenciarmos o planejamento e o desenvolvimento deste processo formativo e concluirmos a análise dos dados, identificamos e analisamos OAP declaradas ou inferidas pela professora a partir dos dados de cada uma das etapas dos ciclos PDR. Os resultados evidenciaram OAP segmentadas em dois grupos: Conhecimento Especializado do RM e Conhecimento Pedagógico do RM. Em relação ao primeiro grupo, as seguintes OAP foram evidenciadas: diferenciar uma conjectura de uma generalização, reconhecer a importância do uso de contraexemplo, reconhecer a importância de usar diferentes representações de um mesmo conceito matemático e compreender a possibilidade de generalizar por meio da identificação de semelhanças entre casos.

No que tange ao segundo grupo, foram organizadas duas categorias. A primeira é relacionada ao conhecimento do RM e do ensino, com as seguintes OAP: reconhecer que a condução da aplicação da tarefa matemática com foco nos processos e entendimentos do RM requer que o professor realize questionamentos aos seus estudantes; planejar e estruturar a tarefa matemática de tal modo que ela permita que os estudantes conjecturem, generalizem e justifiquem, o que possibilita o envolvimento nos Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento dos RM; e continuar aprimorando a prática docente por meio de processos de formação continuada que integrem elementos da teoria e contexto reais da prática, o que possibilita a aprendizagem entre pares e a oportunidade de repensar e modificar as ações da prática docente. A segunda categoria, conhecimento do RM e dos estudantes, conta com as seguintes OAP: reconhecer, discutir e refletir sobre os conteúdos que são essenciais para auxiliar o aluno durante o processo de aprendizagem; estimular os estudantes a entrarem nos processos de conjecturar, generalizar e justificar, mostrando que compreenderam características

que envolvem os Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento dos RM; e reconhecer que as resoluções (corretas e incorretas) dos estudantes podem apresentar argumentos que necessitam ser investigados, ou seja, a exploração dos conceitos e ideias matemáticas utilizadas pelos estudantes para resolver uma determinada tarefa.

As OAP apresentadas são as respostas para os questionamentos iniciais, mas, como já salientamos na discussão dos dados, para que as respostas sejam positivas, cabe ao professor participante o engajamento com a proposta da formação continuada, assiduidade e interação com os demais participantes. Diante do exposto, podemos inferir que esta pesquisa contribui para a compreensão de que os processos de formação continuada que relacionam a teoria e a prática propiciam, aos professores, a ampliação de OAP, tanto em relação ao conteúdo matemático, em especial ao RM, quanto aos processos de ensino.

As OAP evidenciadas no ciclo PDR mostraram que a professora investigada compreendeu as características dos processos e entendimentos do RM ao incorporar, nas etapas do ciclo PDR, reflexões acerca das possíveis conjecturas e generalizações que a tarefa matemática proporcionou durante o desenvolvimento da aula e pensar como poderia ir além, avançando para outros entendimentos do RM. Reconheceu, também, que a escolha da tarefa matemática e sua ação na condução é essencial para o engajamento dos estudantes no avanço dos processos do RM.

O objeto de pesquisa limitou-se a uma única professora e entendemos que características intrínsecas, como a motivação pessoal e o interesse pelo tema, podem gerar OAP singulares a este sujeito analisado. Assim, deixamos para futuros pesquisadores um caminho para se olhar este mesmo processo formativo com foco em outros professores que desenvolveram suas aulas, a fim de verificarem se OAP evidenciadas serão recorrentes a outro público-alvo. Há, também, a possibilidade de analisar a estrutura do modelo PLOT com foco nos domínios PAF, IDP e TAP, evidenciando OAP decorrentes por um outro viés.

Além disso, apontamos que a fragilidade destacada pela professora, na ação de conduzir a plenária, pode ser melhor explorada em outros contextos de formação continuada, destinando um tempo maior à interação entre os participantes e o formador, para que possam sentir segurança nas ações quando estiverem desenvolvendo a aula e conduzindo as discussões matemáticas em plenária. A inserção de mais um processo de formação continuada com a implantação do ciclo PDR faz-se relevante para que o *design* apresentado seja aprimorado, atendendo essa demanda que inclusive foi um pedido da professora Érica, apresentado no trecho 23. Nesse sentido, outros subdomínios do conhecimento matemático para o ensino podem ser alcançados, em especial relacionados ao conhecimento do RM no horizonte do conhecimento

matemático, e do conhecimento do RM no âmbito dos currículos da disciplina de Matemática. Além disso, mostra-se pertinente refinar a categorização proposta para as OAP evidenciadas no processo formativo, confrontando-a com aquelas identificadas em trabalhos similares, procurando assim conceber um modelo teórico mais amplo e robusto.

Por fim, destacamos a relevância deste trabalho para formadores de professores em compreender o *design* de processos formativos com ênfase na promoção de OAP aos professores e deixamos o convite para conhecer nosso Produto Educacional, com o desejo de que ele possa auxiliar no planejamento e desenvolvimento de processos de formação continuada.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, M.; RIBEIRO, A. J. **Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores de matemática: experiências advindas de um processo formativo ancorado na prática docente.** Paradigma (Maracay), v. 43, p. 273-296, 2022.
- ALARCÃO, I. (Coord.). **Formação reflexiva de professores: estratégias de supervisão.** Porto: Porto Editora, 2005.
- ANJOS, L. Q. **Contribuições de um processo formativo para professores dos anos iniciais visando a compreensão dos entendimentos essenciais de raciocínio matemático.** 2023. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- ARAMAN, E.; SERRAZINA, L. **Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade.** RPEM, v. 9, n. 18, 2020.
- BALL, D. L.; EVEN, R. **Strengthening practice in and research on the professional education and development of teachers of mathematics: Next steps.** In: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Springer, Boston, MA, 2009. p. 255-259.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. **Content knowledge for teaching: What makes it special?.** Journal of teacher education, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Porto: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.
- CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado.** Traduzida por Claudia Gilman. Editora Aique: Buenos Aires, 1991.
- COBB, P. *et al.* **Design experiments in educational research.** Educational researcher, v. 32, n. 1, p. 9-13, 2003.
- DAVIDSON, A.; HERBERT, S.; BRAGG, L. A. **Supporting elementary teachers' planning and assessing of mathematical reasoning.** International Journal of Science and Mathematics Education, v. 17, p. 1151-1171, 2019.
- ELIAS, H. R. **Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática.** 2017. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigações em Educação Matemática.** Autores Associados, 3ª ed. rev., Campinas-SP, 2012.
- FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.** São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GATTI, B. A. *et al.* **Professores do Brasil: novos cenários de formação.** 2019.

GROSS, G. F. S. *et al.* **Uma Proposta para Elaboração e Análise de Tarefas de Aprendizagem Profissional.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 16, n. 42, p. 1-21, 2023a.

GROSS, G. F. S. *et al.* **Planejamento de uma tarefa matemática:** Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 12, p. 406-427, 2023b.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. **A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics.** Educational Studies in Mathematics, v. 96, p. 1-16, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A.; REBEKAH, E. **Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten-grade 8.** Reston: NCTM, 2011.

LÜDKE, M. **O professor, seu saber e sua pesquisa.** Educação & Sociedade, v. 22, p. 77-96, 2001.

MARTINS, M. A.; HENRIQUES, A. C. C. B.; CAETANO, J. J. **Conhecimento de Professores para Promover o Raciocínio Matemático:** uma experiência de formação continuada. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 37, p. 1126-1146, 2023.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. **Promover o raciocínio matemático dos alunos:** uma investigação baseada em design. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 32, p. 781-801, 2018.

MAZUR, E. **Peer Instruction:** a user's manual. Boston: Addison-Wesley, 1997.

MELHUIH, K.; THANHEISER, E.; GUYOT, L. **Elementary school teachers' noticing of essential mathematical reasoning forms:** justification and generalization. Journal of Mathematics Teacher Education, v. 23, p. 35-67, 2020.

NATIONAL Council of Teachers of Mathematics. **Principles and standards for school mathematics.** Reston: NCTM, 2000.

NÓVOA, A. **Os professores e a sua formação num tempo de metamorfose da escola.** Educação e Realidade, Porto Alegre, v. 44, n. 3, p. 1-15, 2019.

PEREIRA, E. M. A. **Professor como pesquisador:** o enfoque da pesquisa-ação na prática docente. Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a). Campinas: Mercado de Letras, p. 153-81, 1998.

PONTE, J. P. **Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional.** In: IV Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 1999. p. 59-72.

PONTE, J. P. **Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática.** Educar em revista, n. 24, p. 37-66, 2004.

PONTE, J. P. **Gestão curricular em Matemática**. O professor e o desenvolvimento curricular, p. 11-34, 2005.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. **O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior**. Prais Educativa, v. 7, n. 02, p. 355-377, 2012.

PONTE, J. P. *et al.* **Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas**. Quadrante, Lisboa, v. 25, n. 2, p. 77-98, 2016.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. **Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?**. Educação e Matemática, n. 156, p. 7-11, 2020.

RIBEIRO, A. J.; AGUIAR, M.; TREVISAN, A. L. **Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores ao discutir coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades**. Quadrante, v. 29, n. 1, p. 52-73, 2020.

RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. **Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática**. Zetetike, v. 28, p. e020027-e020027, 2020

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. **Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores**. Bolema, Rio Claro, v. 12, n. 61, p. 398-418, 2018.

RODRIGUES, M.; VIEIRA, W.; SERRAZINA, L. **O conhecimento didático de futuros professores sobre as ações promotoras do raciocínio matemático**. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, v. 14, n. 4, p. 404-414, 2021.

SCHÖN, D. A. **Formar professores como profissionais reflexivos**. In: NÓVOA, A. (Coord.). Os professores e sua formação. Lisboa: Publicações Dom Quixote. Instituto de Inovação Educacional, 1992. p. 77-92.

SCHÖN, D. A. **The reflective practitioner: How professionals think in action**. New York: Basic Books, 1983.

SERRAZINA, L. *et al.* **Planificação do ensino e aprendizagem da matemática**. A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula, p. 9-32, 2017.

SHULMAN, L. S. **Those who understand: Knowledge growth in teaching**. Educational researcher, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. **Knowledge and teaching: Foundations of the new reform**. Harvard educational review, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

SILVA, A. F. G.; SERRAZINA, M. L.; CAMPOS, T. M. M. **Formação Continuada De Professores que Lecionam Matemática desenvolvendo a prática reflexiva docente**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1505-1524, 2014.

SILVA, D. I. B.; RIBEIRO, A. J.; AGUIAR. **Aventura formativa acerca do pensamento algébrico nos anos iniciais: das aprendizagens planejadas àquelas que surpreendem**. Vidya, v. 43, n. 1, p. 77-97, 2023.

STEIN, M. K. *et al.* **Orchestrating productive mathematical discussions**: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, Adingdon, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. **Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão**: da investigação à prática. *Educação e Matemática*, v. 105, n. 5, p. 22-28, 2009.

STENHOUSE, D.; MACDONALD, D. G.; MACFARLANE, T. W. **Cervico-facial and intra-oral actinomycosis**: a 5-year retrospective study. *British Journal of Oral Surgery*, v. 13, n. 2, p. 172-182, 1975.

SULLIVAN, P.; BORCEK, C.; WALKER, N.; RENNIE, M. **Exploring a structure for mathematics lessons that initiate learning by activating cognition on challenging tasks**. *The Journal of Mathematical Behavior*, Amsterdam, v. 41, [s. n.], p. 159-170, 2016.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Editora Vozes Limitada, 2012.

TREVISAN, A. L.; RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. **Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-Based Teacher Education Program**. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, v. 15, n. 2, 2020.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO PARA USO DE IMAGEM E SOM DE VOZ (TCUISV) PARA PROFESSORES

Título da pesquisa: Compreensões sobre os processos do raciocínio matemático e as contribuições com o desenvolvimento profissional

Pesquisador(es/as) ou outro (a) profissional responsável pela pesquisa, com Endereços e Telefones:

Eliane Maria de Oliveira Araman, Avenida Alberto Carazzai, 1640 CEP 86300-000 – Cornélio Procópio – Pr, (43) 991453870

André Luis Trevisan, Avenida dos Pioneiros, 3131 CEP 86036-370 - Londrina – PR, (43) 996931595

Local de realização da pesquisa: Modalidade Híbrida (tarefas síncronas e assíncronas) - Google Meet

A) INFORMAÇÕES AO PARTICIPANTE

Gostaríamos de convidá-lo(a) a participar da pesquisa “Compreensões sobre os processos do raciocínio matemático e as contribuições com o desenvolvimento profissional”, a ser realizada em aulas de matemática, da escola participante. As informações sobre a pesquisa seguem abaixo:

1. Apresentação da pesquisa.

Esta pesquisa visa o estudo de ambientes educacionais e tarefas exploratórias para o ensino e a aprendizagem matemática, pensado a partir de um conjunto de fatores, com potencial para desenvolver o raciocínio matemático dos estudantes e, em consequência disso, a aprendizagem matemática. Nosso propósito é caracterizar o raciocínio matemático e seus processos, pensar tarefas que o integre nas aulas de matemática, promover formação de professores que implementem tais ações em salas de aula e investigar dados oriundos das aulas resultantes desses processos.

2. Objetivos da pesquisa.

Promover discussões e reflexões envolvendo os processos de raciocínio matemático mediante as práticas de ensino de matemática, tendo-se como foco o desenvolvimento profissional por meio de algumas TAP (Tarefas de Aprendizagem Profissional).

3. Participação na pesquisa.

Sua participação é muito importante e ela se dará em dois momentos. O primeiro deles, em um curso de formação continuada que ocorrerá em 8 encontros síncronos de 2 horas e 30 minutos cada, pela plataforma Google Meet, conforme informações detalhadas no convite de divulgação. Nesse contexto, em alguns momentos de discussão entre os participantes, os dados serão coletados por meio de gravação em vídeo, e esse material ficará de posse exclusiva dos pesquisadores participantes do projeto para análise de dados ao longo dos anos de 2023 a 2026. Portanto, os participantes deverão manter câmera aberta e microfone quando necessário. Os pesquisadores usarão de instrumentos, como diário de campo, gravações em vídeo e coleta de protocolos escritos gerados durante a realização do curso de formação. Durante esses processos formativos, serão planejadas aulas que envolvem o trabalho com tarefas exploratórias, que

poderão ser implementadas com alguma de suas turmas. Assim, um segundo momento, por iniciativa própria, você selecionará algumas das tarefas exploratórias desenvolvidas durante o curso de formação e irá aplicá-las juntos aos seus estudantes. Caso isso ocorra, a equipe proponente, juntamente com a direção da escola, entrará em contato com os estudantes e seus respectivos pais ou representantes legais, para esclarecê-las do projeto. A resolução das tarefas exploratórias será feita por todos os estudantes da sua turma, uma vez que se trata de tarefas usuais que normalmente todos os estudantes resolvem durante aulas de Matemática. Para os estudantes que concordarem em participar da pesquisa, as resoluções escritas, feitas durante as aulas, no próprio caderno serão fotocopiadas pelos professores e comporão os dados a serem analisados pelos pesquisadores. Esse material ficará restrito aos pesquisadores envolvidos no projeto e serão analisados ao longo dos anos de 2023 a 2026.

4. Confidencialidade.

Seu nome não será divulgado de forma alguma. Suas informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar sua identidade.

5. Riscos e Benefícios.

5a) Riscos: Considera-se um risco mínimo de constrangimento durante a coleta de dados, podendo o participante optar por sua não participação na pesquisa, sem prejuízo pedagógico.

5b) Benefícios: Os benefícios esperados são de contribuir de forma significativa para a aprendizagem dos estudantes e para a formação de professores, visto que envolve a implementação de tarefas exploratórias diferenciadas, que estimulam a participação ativa do aluno e desenvolvimento de habilidades como a formulação de hipóteses, a busca de soluções viáveis, o uso dos recursos com eficácia, a organização e o trabalho em grupos, enfim, vários componentes que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

6. Critérios de inclusão e exclusão.

6a) Inclusão: Professores que, por iniciativa própria, inscreverem-se nos projetos de formação continuada acima mencionados; estudantes desses professores, que, juntamente com seus responsáveis, autorizarem a coleta de dados durante as aulas (fotocópias do caderno com a resolução de tarefas).

6b) Exclusão: Não se aplica.

7. Direito de sair da pesquisa e a esclarecimentos durante o processo.

Esclarecemos que você pode deixar o estudo a qualquer momento assim como, pode solicitar esclarecimentos em qualquer etapa da pesquisa. Você tem a liberdade de recusar ou retirar o seu consentimento a qualquer momento sem penalização para seu aprendizado nem sua avaliação. Caso não deseje participar, ou interromper sua participação, você continuará participando das aulas normalmente, e não lhe serão tomadas fotos, gravações, áudios e nem seus apontamentos serão usados pelos pesquisadores. Os resultados da pesquisa poderão ser de seu conhecimento, bastando fazer a manifestação de interesse:

() Quero receber os resultados da pesquisa por e-mail.

() Não quero receber os resultados da pesquisa.

8. Ressarcimento e indenização.

A pesquisa não tem custo para os participantes e, portanto, não inclui ressarcimento, mas esclarecemos que o direito à indenização é obrigatório, se eventualmente a pesquisa ocasionar algum tipo de dano ao participante, comprovado por meio de provas e meios legais.

CONSENTIMENTO

Eu declaro ter conhecimento das informações contidas neste documento e ter recebido respostas claras às minhas questões a propósito da minha participação direta (ou indireta) na pesquisa e, adicionalmente, declaro ter compreendido o objetivo, a natureza, os riscos, benefícios, ressarcimento e indenização relacionados a este estudo.

Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo, permitindo que os pesquisadores relacionados neste documento obtenham fotografia, filmagem ou gravação de voz de minha pessoa para fins de pesquisa científica/ educacional. As fotografias, vídeos e gravações ficarão sob a propriedade do grupo de pesquisadores pertinentes ao estudo e sob sua guarda.

Concordo que o material e as informações obtidas relacionadas a minha pessoa possam ser publicados em aulas, congressos, eventos científicos, palestras ou periódicos científicos. Porém, não devo ser identificado por nome ou qualquer outra forma.

Estou consciente que posso deixar o projeto a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo.

Consentimento:

- ☐ Estou ciente e quero participar desta pesquisa.
- ☐ Não quero participar desta pesquisa.

Para todas as questões relativas ao estudo ou para se retirar do mesmo, poderão se comunicar com Eliane Maria de Oliveira Araman, via email: elianearaman@utfpr.edu.br ou telefone: (43) 991453870.

ESCLARECIMENTOS SOBRE O COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA:

O Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos (CEP) é constituído por uma equipe de profissionais com formação multidisciplinar que está trabalhando para assegurar o respeito aos seus direitos como participante de pesquisa. Ele tem por objetivo avaliar se a pesquisa foi planejada e se será executada de forma ética. Se você considerar que a pesquisa não está sendo realizada da forma como você foi informado ou que você está sendo prejudicado de alguma forma, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR). Endereço: Av. Sete de Setembro, 3165, Bloco N, Térreo, Bairro Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, Telefone: (41) 3310-4494, e-mail: coep@utfpr.edu.br.

Contato do Comitê de Ética em Pesquisa que envolve seres humanos para denúncia, recurso ou reclamações do participante pesquisado:

Comitê de Ética em Pesquisa que envolve seres humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR)

Endereço: Av. Sete de Setembro, 3165, Bloco N, Térreo, Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, Telefone: 3310-4494, E-mail: coep@utfpr.edu.br

Agradecemos sua participação.

APÊNDICE B – FORMULÁRIO UTILIZADO NO ENCONTRO 5 PARA PLANEJAR UMA TAREFA MATEMÁTICA E O DESENVOLVIMENTO DE UMA AULA

Tarefa 6 - Entendimentos Essenciais do Raciocínio Matemático Tarefa Matemática

A seguir, apresentamos recortes de quatro situações retiradas da tarefa assíncrona 5, apresentadas pelos professores participantes do GE.

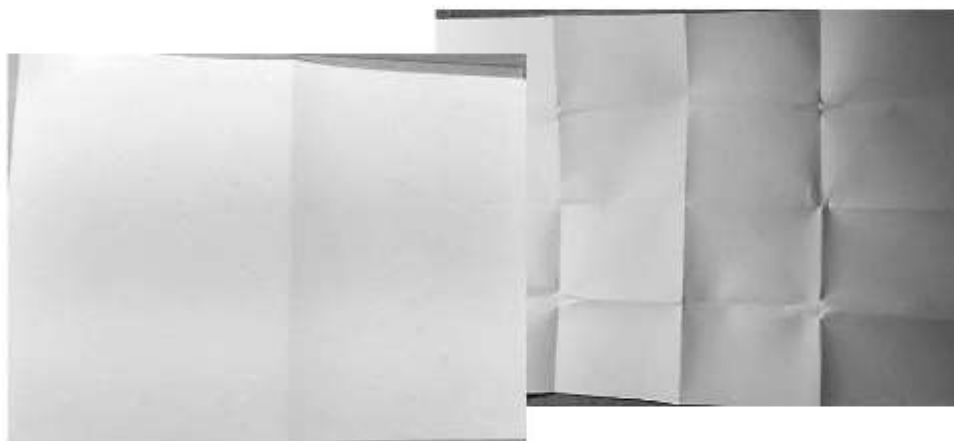
* A partir do que estudamos sobre *Entendimentos Essenciais do Raciocínio Matemático*, **selecione uma das situações** que veja com potencial para explorar esses entendimentos e **elabore uma tarefa matemática** de acordo com o ano de escolaridade em que atua.

Para nortear o trabalho:

- Quais estratégias o aluno poderia usar para solucionar a tarefa?
- Quais são as possibilidades de explorar os Entendimentos Essenciais do Raciocínio Matemático nessa tarefa que elaborou?

Situação 1:

Gosto de trabalhar aquela atividade na qual o aluno deve ir dobrando uma folha A4 ao meio. Essa atividade permite aos alunos criar várias conjecturas e que podem (ou não) ser generalizadas.



Nesta atividade a cada vez que você divide ao meio vão sendo criados novos retângulos, sempre com espessura equivalente à metade do tamanho anterior.

Situação 2:

2) ADRIANO TEM 18 ROSEIRAS E QUER FICAR COM A MESMA QUANTIDADE QUE SEU AMIGO ROBERTO. SABENDO QUE ROBERTO TINHA 36 ROSEIRAS E RETIROU 14 DELAS PARA CONSTRUIR UM CANIL,

Situação 3:

Quadro 1			Quadro 2		
35	+	25	=	60	
36	+	24	=	60	
37	+	23	=	60	
38	+	22	=	60	
39	+	21	=	60	

19	+	61	=	80	
-2			+2		
17	+	63	=	80	
+10			-10		
27	+	53	=	80	
-3			+3		
24	+	56	=	80	
-4			+4		
20	+	60	=	80	

Situação 4:

A Inês fez três colares, com contas pretas e brancas, conforme as figuras 1, 2 e 3.



Fig. 1

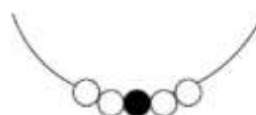


Fig. 2



Fig. 3

Nº contas
do colar

APÊNDICE C – FORMULÁRIO DE CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES DO PROCESSO FORMATIVO

GE - Tarefa 1

PREZADO(A) CURSISTA

Que satisfação tê-lo(a) fazendo parte desse grupo de estudos intitulado "COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS CONTRIBUIÇÕES COM O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL". O principal objetivo é oportunizar aos professores que ensinam matemática momentos de discussão e reflexão sobre os processos de raciocínio matemático.

-> A carga horária certificada é de 40 horas, sendo composta por encontros síncronos quinzenalmente (20 horas), às quartas-feiras, das 19h00 às 21h30, e atividades assíncronas (20 horas). Nosso cronograma inicial prevê as seguintes datas de atividades síncronas: 01.03, 15.03, 29.03, 12.04, 26.04, 17.05, 31.05 e 14.06

Para iniciarmos, queremos conhecer um pouco mais sobre você e assim, prepararmos encontros que possam oportunizar desenvolvimento profissional voltado à sua prática de ensino. Assim, preparamos esse questionário compondo uma primeira tarefa para contabilizar a carga horária assíncrona do grupo de estudos, para ser preenchido até o dia 26.02.

Qualquer dúvida durante o preenchimento, entre em contato.

Vamos lá!!!



**COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE
RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS
CONTRIBUIÇÕES COM O DESENVOLVIMENTO
PROFISSIONAL**

GE - Tarefa 1

rosyflisse@gmail.com [Mudar de conta](#) 

* Indica uma pergunta obrigatória

Questionário de Caracterização

Nome completo *

Sua resposta

RG *

Sua resposta

Data de Nascimento *

Sua resposta

Sexo *

☐ Masculino

☐ Feminino

Endereço Completo (Rua, número, Bairro, Cidade, Estado, CEP) *

Sua resposta

Formação *

- ☐ Licenciatura em Matemática
- ☐ Licenciatura em Pedagogia
- ☐ Especialização na área da Educação/Ensino
- ☐ Mestrado na área da Educação/Ensino
- ☐ Doutorado na área da Educação/Ensino
- ☐ Outro: _____

Qual o seu tempo de atuação como professor? *

Sua resposta

Qual ano/série você está trabalhando com a disciplina de Matemática em 2023? *

Sua resposta

Qual sua carga horária semanal? *

Sua resposta

Você gosta de ensinar Matemática? *

☐ Sim

☐ Não

Conte-nos sobre suas experiências positivas e negativas ensinando Matemática. *

Sua resposta

Com que frequência você realiza o planejamento de suas aulas de Matemática? *

- ☐ Diariamente
- ☐ Semanalmente
- ☐ Quinzenalmente
- ☐ Bimestralmente/Trimestralmente

Como você realiza o planejamento de suas aulas de Matemática? *

- ☐ Individualmente
- ☐ Coletivamente

Durante o planejamento você discute com outros professores sobre o conhecimento matemático da sua turma? *

- ☐ Sim
- ☐ Não

Ao escolher as tarefas matemáticas propostas aos seus alunos, você antecipa *
estratégias de resolução e possíveis dificuldades? Conte um pouco a respeito.

Sua resposta

Durante as práticas de ensino de Matemática, quais recursos pedagógicos você *
utiliza em sala de aula?

- ☐ Livro didático
- ☐ Material manipulável
- ☐ Atividades retiradas de páginas da internet
- ☐ Atividades retiradas de artigos científicos ou produtos educacionais
- ☐ Celular ou tablet
- ☐ Jogos
- ☐ Calculadoras
- ☐ Anotações no caderno
- ☐ Computadores
- ☐ Outro:

Durante as práticas de ensino de Matemática, você propõe a realização de tarefas em grupos? Conte um pouco a respeito dessa prática.

Sua resposta

Durante as práticas de ensino de Matemática, você oportuniza momentos para os alunos expressarem os seus entendimentos e compreensões sobre as tarefas? Conte um pouco a respeito. *

Sua resposta

Você considera que as atividades matemáticas que você propõe, envolvem com mais frequência: *

- ☐ Resolução de exercícios de fixação do conteúdo
- ☐ Resolução de problemas
- ☐ Resolução de tarefas exploratórias (investigação matemática)

Você já ouviu falar a respeito de "Ensino exploratório"? *

- ☐ Sim
- ☐ Não

Você já fez algum curso ou estudo envolvendo o tema "Processos de Raciocínio Matemático"? *

- ☐ Sim
- ☐ Não

APÊNDICE D – AVALIAÇÃO DO PROCESSO FORMATIVO



**COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE
RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS
CONTRIBUIÇÕES COM O DESENVOLVIMENTO
PROFISSIONAL**

GE - Avaliação da formação

PREZADO(A) CURSISTA

Nossa caminhada no grupo de estudos intitulado "COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS CONTRIBUIÇÕES COM O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL" está chegando ao fim. Nosso principal objetivo foi oportunizar a vocês, professores que ensinam matemática, momentos de discussão e reflexão sobre os entendimentos essenciais do raciocínio matemático. Para entender se os objetivos planejados foram alcançados, gostaríamos de saber um pouco sobre a sua experiência na participação deste projeto.

E-mail *

Seu e-mail

Nome completo *

Sua resposta

CPF *

Sua resposta

Qual nome fictício você gostaria de ter nos registros da pesquisa? *

Sua resposta

Em que aspectos as suas expectativas para o grupo de estudos foram alcançadas? *

Sua resposta

Quais experiências vivenciadas ao longo do curso puderam contribuir para você repensar aspectos de sua prática letiva? *

Sua resposta

Que impactos em sua prática percebe que ocorreu a partir das discussões ocorridas no curso?

Sua resposta

A partir do que foi discutido no curso, de que forma sua compreensão a respeito dos processos do raciocínio matemático foi modificada? *

Sua resposta _____

Como a maneira como foram apresentadas e discutidos os entendimentos essenciais do raciocínio matemático pode vir a influenciar a sua prática letiva? *

Sua resposta _____

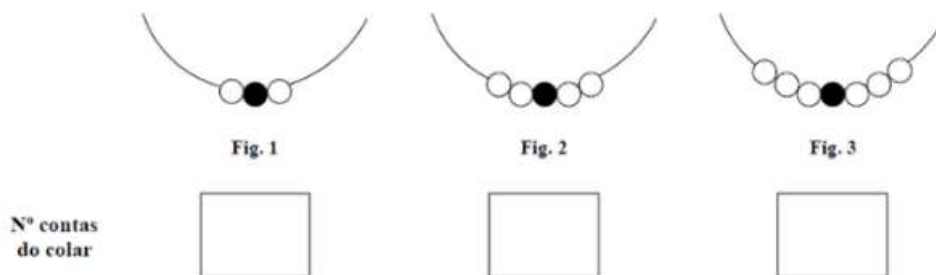
Indique os três principais pontos positivos e os três principais pontos negativos que você vivenciou ao longo do curso? *

Sua resposta _____

**APÊNDICE E – TAREFA MATEMÁTICA PLANEJADA PARA OS ANOS
FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Tarefa “Os colares”

Ana fez três colares, com miçangas pretas e brancas, conforme as figuras 1, 2 e 3.



1. Indique acima o número total de miçangas de cada figura.

 2. Continuando essa sequência de colares, quantas miçangas teriam, no total, o colar correspondente à figura seguinte (figura 4).

 3. E quantas miçangas teria o colar correspondente a figura 8?

 4. Descubra quantas miçangas teria, no total, o colar correspondente à figura 19, sem desenhar.

 5. Existe algum colar na sequência que tenha 55 miçangas? Explique detalhadamente o teu raciocínio ou (Explique como você pensou):
-
-
-
6. Descreva uma regra que lhe permita determinar o número total de contas de qualquer figura da sequência.
-
-

ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ACERCA DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: VIVÊNCIAS DE UMA PROFESSORA DURANTE UM PROCESSO FORMATIVO
Título do Produto/Processo Educacional	Oportunidades de aprendizagem profissional acerca do raciocínio matemático: um relato para formadores de professores que ensinam Matemática
Autores do Produto/Processo Educacional	Discente: ROSEMEIRE FAVARO LISSE TREVISOLLI
	Orientador: ANDRÉ LUIS TREVISAN
	Coorientadora: ANNA FLÁVIA MAGNONI VIEIRA
Data da Defesa	22/05/2024

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u> Linhas de Pesquisa do PPGMAT: <i>L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático</i> (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);	() Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

<i>L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u> A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	() PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. () PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). () PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. <u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u>	() Local () Regional (X) Nacional () Internacional Justificativa (<i>obrigatória</i>): Produto escrito em língua portuguesa e acessível a formadores de professores de Matemática interessados na temática.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u>	() PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada	() Econômica;

<u>*Apenas um item pode ser marcado.</u>	() Saúde; (X) Ensino; () Cultural; () Ambiental; () Científica; () Aprendizagem.								
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. <u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u>	(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (X) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. (X) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.								
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	() PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). () PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).								
Membros da banca examinadora de defesa <table border="1" style="width: 100%;"> <thead> <tr> <th style="width: 60%;">Nome</th> <th style="width: 40%;">Instituição</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>André Luis Trevisan</td> <td>UTFPR</td> </tr> <tr> <td>Eliane Maria de Oliveira Araman</td> <td>UTFPR</td> </tr> <tr> <td>Morgana Scheller</td> <td>IFSC</td> </tr> </tbody> </table>		Nome	Instituição	André Luis Trevisan	UTFPR	Eliane Maria de Oliveira Araman	UTFPR	Morgana Scheller	IFSC
Nome	Instituição								
André Luis Trevisan	UTFPR								
Eliane Maria de Oliveira Araman	UTFPR								
Morgana Scheller	IFSC								