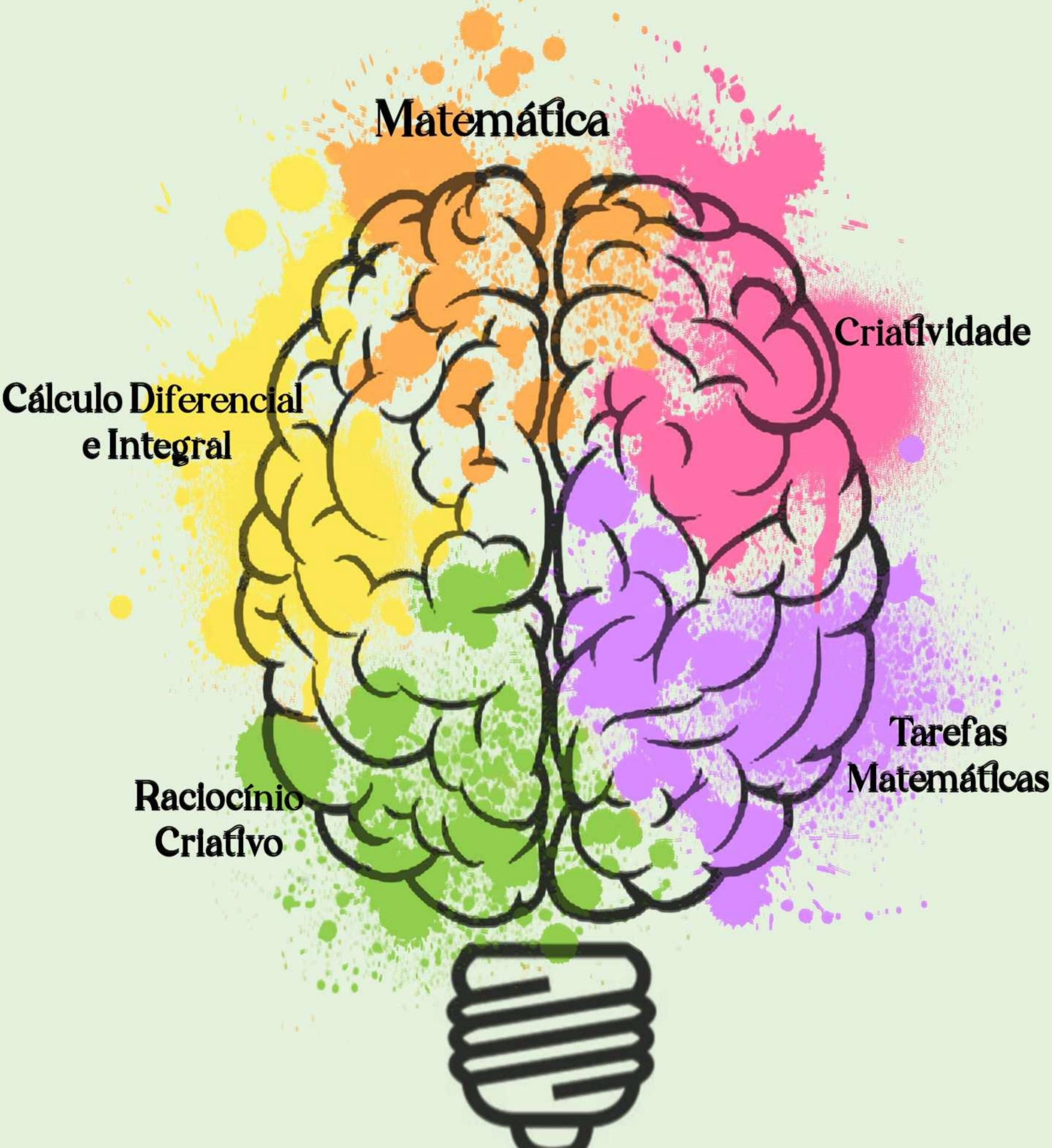
Explorando o Raciocínio Criativo no Ensino Superior: análise de tarefas no Cálculo Diferencial e Integral de mais de uma variável



Leandra Letícia de Lima
André Luis Trevisan
Rodolfo Eduardo Vertuan

LEANDRA LETICIA DE LIMA

EXPLORANDO O RACIOCÍNIO CRIATIVO NO ENSINO SUPERIOR: ANÁLISE DE TAREFAS NO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

EXPLORING CREATIVE THINKING IN HIGHER EDUCATION: ANALYSIS OF TASKS IN DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS OF MORE THAN ONE VARIABLE

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campi Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

Coorientador: Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan

LONDRINA
2024

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

LEANDRA LETICIA DE LIMA

MANIFESTAÇÕES DO RACIOCÍNIO CRIATIVO DE ESTUDANTES DE CÁLCULO DE MAIS DE UMA VARIÁVEL AO LIDAR COM TAREFAS MATEMÁTICAS.

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 15 de Março de 2024

Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Adriana Helena Borssoi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Elenice Josefa Kolancko Setti, Doutorado - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná (Ifpr)

APRESENTAÇÃO

Seja bem-vindo ao nosso produto educacional, resultado de uma pesquisa de Mestrado realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Intitulada "Manifestações do raciocínio criativo de estudantes de Cálculo de mais de uma variável ao lidar com tarefas matemáticas". Essa pesquisa foi conduzida entre os anos de 2022 e 2023, sob orientação do Prof. Dr. André Luis Trevisan e coorientação da Prof.ª Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan.

O desenvolvimento da pesquisa ocorreu na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 2 (CDI2), envolvendo funções de mais de uma variável real, em duas turmas regulares dos cursos de Engenharias da UTFPR, no câmpus Londrina.

Com o objetivo de compartilhar conhecimento e práticas inovadoras, organizamos este material para professores de CDI ou para aqueles que ensinam Matemática em diferentes níveis de escolaridade. Nosso objetivo é discutir e exemplificar aspectos do raciocínio criativo (RC) mobilizados por estudantes a partir do trabalho com tarefas matemáticas.

INTRODUÇÃO

O CDI desempenha um papel fundamental no ensino de ciências exatas, sendo uma disciplina presente em diversos cursos superiores. O desempenho dos estudantes nessa disciplina frequentemente é insatisfatório, resultando em altas taxas de reprovação e desistência em cursos de Licenciatura e Engenharia.

A abordagem tradicional de ensino de CDI tem sido objeto de investigação em Educação Matemática, uma vez que seu formato convencional pode não ser eficaz para promover a aprendizagem. Como mencionado por Cabral (2015), é necessário repensar as estratégias de ensino para alinhar melhor o processo de aprendizagem às competências e habilidades esperadas dos futuros profissionais.

De acordo com as Diretrizes Curriculares para Cursos de Engenharia (Brasil, 2019), espera-se que os egressos desses cursos desenvolvam, dentre outras, a capacidade de resolver problemas de forma criativa e inovadora.

No entanto, a literatura ainda discute amplamente o que significa ser "criativo" no contexto educacional, especialmente em disciplinas como o CDI.

Além de buscar abordar a necessidade de promover o RC em aulas de CDI 2, em consonância com os objetivos das Diretrizes Curriculares Nacionais para cursos de Engenharia, este trabalho também busca investigar estratégias de ensino que já vêm sendo implementadas na disciplina de CDI da UTFPR ao longo de alguns anos.

CRIATIVIDADE

A trajetória histórica da criatividade mostra como ela foi entendida de diferentes maneiras ao longo do tempo. Inicialmente, era vista como algo místico e divino, mas começou a ser estudada cientificamente no século XX. Algumas pessoas pensavam que apenas gênios eram criativos, enquanto outras viam a criatividade como uma habilidade natural de todo ser humano, envolvendo a sensibilidade para identificar problemas e encontrar soluções originais. Mas foi no século XXI que o tema tomou mais força. Na Matemática a criatividade também é vista de formas diversas, mas, basicamente, significa ser capaz de produzir algo novo e valioso nesse campo ou em qualquer outro.

Baseados em Gontijo (2006, 2007), o desenvolvimento da criatividade Matemática destaca a capacidade de apresentar múltiplas soluções apropriadas para um problema, enfocando diferentes aspectos do problema ou formas de solucioná-lo. Ele identifica diversas estratégias para estimular o pensamento criativo, que incluem apreciação, animação, associação, alteração e abdicação.

Segundo Gontijo (2007, p. 67), a apreciação inclui

> técnicas usadas para fazer conhecer um ou mais aspectos ou atributos de uma situação, produto ou problema que está sendo considerado. Essas técnicas podem ser usadas para auxiliar os alunos a focalizar características importantes do problema, perceber padrões e traçar uma variedade de possíveis soluções.

No caso da animação, "as técnicas relacionadas a esta categoria podem ser usadas em atividades para envolver os estudantes de forma interativa com os problemas, situações ou produtos" (Gontijo, 2007, p 68). Por sua vez, o uso de técnicas de associação

> pode favorecer os estudantes na realização de comparações e no estabelecimento de conexões entre um problema que de forma imediata não se tem um método para resolvê-lo com conceitos, algoritmos e estratégias já conhecidas. Essas técnicas de criatividade auxiliam focalizando a atenção no estabelecimento dessas conexões (Gontijo, 2007, p 69).

Já com as técnicas de alteração

> os estudantes mudam sistematicamente partes de um produto, situação ou problema. Questões do tipo "e se..." estão presentes na maioria das investigações e dos insights matemáticos. Estas técnicas possibilitam um aprofundamento nas concepções matemáticas a partir de modificações sistemáticas em partes do problema ou de sua solução, levando a novas e interessantes questões ou problemas para serem explorados (Gontijo, 2007, p 70).

Por fim, "as técnicas de abdicação têm por objetivo permitir ao subconsciente refletir sobre o problema quando não se está ativamente trabalhando sobre ele" (Gontijo, 2007, p71).

RACIOCÍNIO CRIATIVO

O RC, conforme proposto por Lithner (2006), é uma abordagem inovadora no processo de resolução de problemas matemáticos. Enquanto o raciocínio imitativo simplesmente reproduz modelos ou exemplos sem originalidade, o RC vai além, explorando novas sequências de raciocínio e adaptando-se flexivelmente às situações.

O RC proposto por Lithner (2006) atende aos seguintes critérios: (i) novidade, com uma nova sequência de raciocínio sendo criada ou uma sequência esquecida sendo recriada; (ii) flexibilidade, admitindo com fluência diferentes abordagens e adaptações à situação, sem "fixação" de universo de conteúdo ou busca de soluções memorizadas ou algorítmicas; (iii) plausibilidade, considerando argumentos que sustentam a escolha e/ou a execução da estratégia, e que permitem considerar se as conclusões são verdadeiras ou plausíveis e (iv) fundamentos matemáticos, com os argumentos ancorados nas propriedades matemáticas intrínsecas dos componentes envolvidos no raciocínio.

O TERMO “RACIOCÍNIO CRIATIVO”

Optamos, neste produto educacional, em utilizar a expressão RC proposta por Lithner (2006), por contemplar características fundamentais da criatividade, conforme descritas na literatura. Isso nos permite destacar não apenas as ações dos estudantes de resolver problemas matemáticos de maneira inovadora, mas também a integração dos critérios de novidade, flexibilidade, plausibilidade e fundamentos matemáticos em nosso processo de ensino e aprendizagem.

CONTEXTO E MÉTODO DE COLETA DE DADOS

O contexto deste estudo envolveu a participação de estudantes dos cursos de Engenharia Mecânica e Engenharia de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Londrina, durante a disciplina de CDI 2, ministrada no segundo semestre de 2022. Essa disciplina teve como objetivo proporcionar um ambiente de aprendizagem baseado em tarefas matemáticas, visando estimular o RC dos estudantes.

A coleta de dados foi realizada durante as aulas semanais da disciplina. Os estudantes trabalharam em grupos na resolução de tarefas matemáticas com potencial para desenvolver o RC. O material coletado incluiu registros escritos, imagens, vídeos e áudios dos estudantes durante as atividades em grupo.

Os participantes foram separados em trios e contavam com um dos estudantes gravando o áudio das discussões, que eram posteriormente enviadas para a pesquisadora. Após a coleta de dados, foram selecionadas para análise as tarefas matemáticas 1, 2 e 3, que foram o foco da pesquisa.

CLASSIFICAÇÃO DAS TAREFAS

Tarefa matemática 1

Deseja-se construir uma caixa aberta, sendo que o material da base custa R$10,00 por metro quadrado, ao passo que o material das laterais custa R$ 6,00 por metro quadrado.

a) Como vocês imaginam ser a aparência dessa caixa, para que o custo de sua produção seja mínimo?

b) Construa uma expressão matemática do custo total do material para fabricação da caixa.

c) O que muda (ou não) em suas respostas anteriores, se considerarmos que a caixa deve ter volume de $10m^3$?

d) E se consideramos que, além do volume de $10m^3$, a base da caixa deve ser retangular, com um dos lados igual ao dobro do outro?

Tipo de tarefa → Nuances de problema e investigação

Problema
Caracterizada pela descoberta e desafio que envolvem a aplicação de conhecimentos matemáticos para chegar a uma conclusão.

Investigação
Oferece desafios e permite aos estudantes a elaboração e discussão de diferentes estratégias, construindo aprendizagem principalmente a partir dos erros.

Grau de estrutura → Aberta → Não possui uma solução única ou um caminho específico para ser resolvida, permitindo diversas abordagens.

Grau de desafio → Elevado → Requer aplicação de conhecimentos matemáticos de forma criativa para solucionar o problema.

Contexto → Semi- realidade → Apresenta uma situação com aspectos realistas, relacionados à construção de uma caixa com características específicas, mas dentro do contexto acadêmico da disciplina.

Duração da tarefa → Média → Demandou tempo suficiente para explorar diferentes abordagens e discutir estratégias, mas não foi uma atividade prolongada.

Possível resolução
Tarefa matemática 1

Possível resolução utilizando o método de otimização do cálculo diferencial:

a) Aparência da caixa para minimizar o custo de produção:

Para minimizar o custo de produção, precisamos maximizar a eficiência do uso do material mais barato (as laterais a R$6,00 por metro quadrado). Isso sugere que a caixa deve ter uma base quadrada ou quase quadrada, com as laterais sendo altas o suficiente para formar um volume de 10m³.

b) Expressão matemática do custo total do material:

Seja x o comprimento da base da caixa e y a altura das laterais.

A área da base é x^2 e o custo do material da base é $10x^2$.

A área total das laterais é $4xy$ (já que a caixa é aberta), e o custo do material das laterais é $6 \,.\, 4xy = 24xy$.

Portanto, o custo total C é dado por:

$$C = 10x^2 + 24xy$$

c) Mudanças com o volume de 10m³:

Se a caixa deve ter um volume de $10m^3$, $x^2y = 10$. Esta é a restrição adicional que vamos usar para otimizar o custo.

d) Base retangular:

Se a base da caixa deve ser retangular, com um dos lados igual ao dobro do outro, então a base tem dimensões x e $2x$, e assim $x^2 .\, 2x = 10$.

Agora, vamos usar cálculo diferencial para otimizar o custo C em função de x e y. Primeiro, vamos isolar y na restrição de volume $x^2y = 10$, e substituir na expressão do custo C. Em seguida, vamos encontrar os valores de x e y que minimizam C utilizando técnicas de minimização.

Para otimizar a função $C = 10x^2 + 24xy$ sujeita à restrição $x^2y = 10$, podemos usar o método dos multiplicadores de Lagrange. Vamos definir a função Lagrangeana L da seguinte forma:

$$L(x, y, \lambda) = 10x^2 + 24xy - \lambda(x^2y - 10)$$

Agora, vamos calcular as derivadas parciais de L em relação a x, y e λ e igualá-las a zero para encontrar os pontos críticos.

- Derivada parcial de L em relação a x:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 20x + 24y - 2\lambda xy = 0$$

- Derivada parcial de L em relação a y:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 24x - \lambda x^2 = 0$$

- Derivada parcial de L em relação a λ:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2y - 10 = 0$$

Agora, resolvemos esse sistema de equações para encontrar os valores de x, y e λ.

A solução para esse sistema de equações fornece os valores otimizados de x, y e o multiplicador de Lagrange λ, que minimizam o custo C. Esses valores nos darão a aparência da caixa e o custo total mínimo de produção.

Para resolver o sistema de equações, podemos começar isolando λ da terceira equação:

$$x^2 - 10 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{x^2y}{10}$$

Agora, podemos substituir λ nas duas primeiras equações:

- Substituindo λ na primeira equação:

$$20x + 24y - 2\left(\frac{x^2y}{10}\right) = 0$$
$$20x + 24y - \frac{2x^2y}{10} = 0$$
$$20x + 24y - \frac{x^2y}{5} = 0$$
$$20x + 24y = \frac{x^2y}{5}$$
$$100x + 120y = x^2y$$

- Substituindo λ na segunda equação:

$$24x - \left(\frac{x^2y}{10}\right) = 0$$
$$24x - \frac{x^2y}{10} == 0$$
$$240x = x^2y$$

Agora, podemos igualar as duas expressões para x^2y:

$$100x + 120y = 240x$$
$$120y = 140x$$
$$y = \frac{7}{6}x$$

Agora, substituímos y na restrição de volume $x^2y = 10$

$$x^2.\frac{7}{6}x = 10$$
$$\frac{7}{6}x^3 = 10$$
$$x^3 = \frac{60}{7}$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{60}{7}}$$

Agora, podemos encontrar y:

$$y = \frac{7}{6} . \sqrt[3]{\frac{60}{7}}$$

Esses valores de x e y nos darão as dimensões da base e da altura da caixa que minimizam o custo de produção. Vamos calcular esses valores.

Para calcular x, usamos $x = \sqrt[3]{\frac{60}{7}}$

$$x \approx \sqrt[3]{\frac{60}{7}} \approx 2.301$$

Agora, substituímos $x$em $y = \frac{7}{6} . \sqrt[3]{\frac{60}{7}}$:

$$y \approx \frac{7}{6} . 2.301 \approx 2{,}681$$

Portanto, as dimensões otimizadas da caixa são aproximadamente x e y.

Para calcular o custo total, usamos as dimensões otimizadas da caixa, x e y, e a expressão para o custo total $C = 10x^2 + 24xy$.

Substituindo os valores encontrados:

$$C = 10 . (2.301)^2 + 24 . 2.301 . 2.681$$
$$C \approx 10 . 5.294 + 24 . 15.514$$
$$C \approx 52.94 + 372.336$$
$$C \approx 425.276$$

Portanto, o custo total aproximado para produzir a caixa com as dimensões otimizadas é de aproximadamente R$425,28. Isso representa o custo mínimo de produção para a caixa com volume de $10m^3$.

Tarefa matemática 2

Tipo de tarefa

Nuances de problema e investigação

Problema

Concentra-se na aplicação de conceitos matemáticos específicos para resolver um problema com uma solução única e um caminho específico para chegar a essa solução.

Investigação

Permite aos estudantes explorar diferentes estratégias e abordagens para resolver o problema, colaborando entre si e experimentando ideias.

No início da disciplina, vocês trabalharam com a seguinte situação:

"Deseja-se construir uma caixa aberta, sendo que o material da base custa R$ 10,00 por metro quadrado, ao passo que o material das laterais custa R$ 6,00 por metro quadrado".

Agora, com as ferramentas com a qual teve contato na disciplina, proponha duas formas de resolver o problema de determinar as dimensões dessa caixa, assumindo uma base retangular e que seu volume deve ser de $10 m^3$.

Grau de estrutura

Fechada

Possui uma solução única e restrições específicas, embora permita alguma margem de escolha dentro desses limites.

Grau de desafio

Elevado

Requer aplicação de conhecimentos matemáticos de forma criativa e aprofundada para solucionar o problema, envolvendo otimização e restrição.

Contexto

Semi- realidade

Baseada em uma situação prática (determinar dimensões ideais de uma caixa), mas também envolve elementos abstratos e conceituais da matemática.

Duração da tarefa

Média

Demandou tempo suficiente para explorar diferentes estratégias e abordagens, mas não foi uma atividade prolongada.

Possível resolução
Tarefa matemática 2

Possível resolução utilizando o cálculo diferencial para encontrar as dimensões que minimizam o custo total da caixa, considerando a restrição do volume fixo de 10m³ e as relações entre comprimento, largura e altura.

Vamos denotar as dimensões da base retangular da caixa como x e $2x$ (comprimento e largura, respectivamente), e a altura da caixa como y. Assim, o volume da caixa é dado por $V = x\,.\,2x\,.\,y = 2x^2y = 10$.

Agora, vamos expressar o custo total C em termos de x, y e minimizá-lo usando cálculo diferencial.

O custo total C é dado por:

$$C = 10xy + 6(2x + 2y)(x)$$
$$C = 10xy + 12x^2 + 12xy$$
$$C = 12x^2 + 22xy$$

Agora, usamos a restrição do volume para eliminar uma das variáveis. Substituímos y em termos de x:

$$2x^2y = 10$$
$$y = \frac{10}{2x^2}$$
$$y = \frac{5}{x^2}$$

Agora, substituímos y na expressão para C:

$$C = 12x^2 + 22x\left(\frac{5}{x^2}\right)$$
$$C = 12x^2 + \frac{110}{x}$$

Agora, para encontrar o valor mínimo de C, calculamos a derivada de C em relação a x, igualamos a zero e resolvemos para x.

$$\frac{dC}{dx} = 24x - \frac{110}{x^2} = 0$$

Agora, para encontrar o valor mínimo de C, calculamos a derivada de C em relação a x, igualamos a zero e resolvemos para x.

$$\frac{dC}{dx} = 24x - \frac{110}{x^2} = 0$$

Agora, resolvemos essa equação para x:

$$24x = \frac{110}{x^2}$$
$$24x^3 = 110$$
$$x^3 = \frac{110}{24}$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{110}{24}}$$

Depois de calcular x, podemos encontrar y usando a relação $y = \frac{5}{x^2}$.

Para calcular x, usamos $x = \sqrt[3]{\frac{110}{24}}$

$$x \approx \sqrt[3]{\frac{110}{24}} \approx 1.979$$

Agora, podemos encontrar y usando a relação $y = \frac{5}{x^2}$:

$$y = \frac{5}{(1.979)^2}$$
$$y \approx \frac{5}{3.916}$$
$$y \approx 1.274$$

Portanto, as dimensões otimizadas da base retangular da caixa são aproximadamente $x \approx 1.979$ metros, $2x \approx 3.958$ metros (largura) e $y \approx 1.274$ metros (altura). Esses valores fornecem a aparência da caixa e minimizam o custo de produção.

Agora, podemos calcular o custo total usando esses valores de x e y. Para calcular o custo total, usamos as dimensões otimizadas da caixa, x e y, e a expressão para o custo total $C = 12x^2 + \frac{110}{x}$.

Substituindo os valores encontrados:

$$C = 12\,.\,(1.979)^2 + \frac{110}{1.979}$$
$$C \approx 12\,.\,3.916 + \frac{110}{1.979}$$
$$C \approx 46.992 + 55.587$$
$$C \approx 102.579$$

Portanto, custo total aproximado para produzir a caixa com as dimensões otimizadas é de aproximadamente R$102,58. Isso representa o custo mínimo de produção para a caixa com volume de $10m^3$, com base retangular.

Tarefa matemática 3

DENSIDADE E MASSA DE UMA HASTE UNIDIMENSIONAL (part. 1)

A densidade linear é a medida de uma quantidade de qualquer valor característico por unidade de comprimento. Considere uma haste longa e fina de massa m e comprimento Δx, a densidade deste objeto unidimensional, é expressa por $p = \frac{m}{\Delta x}$. Logo a massa desse objeto é dada pela fórmula $m = \Delta x . p$.

i. Qual é a massa de uma haste homogênea com comprimento 1,5m e densidade igual 2,5kg/m?

ii. A equação anterior define a massa desde que a densidade seja constante. Mas o que acontece se a densidade for variável? Ou seja, $m = \Delta x . p$ (x). Suponha que este objeto unidimensional esteja posicionado, ao longo de um eixo coordenado, entre $x = a$ e $x = b$, com densidade variável ρ(x). Explique como encontrar a massa total do objeto, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

DENSIDADE E MASSA DE UMA LÂMINA NÃO HOMOGÊNEA (part. 2)

Consideremos um objeto achatado idealizado suficientemente fino para ser imaginado como sendo uma região plana bidimensional. Dizemos que tal objeto é uma lâmina. Uma lâmina é dita homogênea se sua composição for inteiramente uniforme, caso contrário é dita não-homogênea. A densidade ρ de uma lâmina homogênea de massa m e área A é dada por $\rho = \frac{m}{A}$. Já em uma lâmina não-homogênea, a composição pode variar de ponto para ponto, uma definição apropriada de "densidade" deve refletir essa condição. Para estabelecer tal definição, suponha que a lâmina seja colocada em um plano xy. A densidade no ponto (x, y) pode ser especificada por uma função $\rho(x, y)$, chamada de função densidade.

Considere uma lâmina de vértices (0, 0), (0, 4), (4, 4) e (4, 0), com densidade variável, ou seja, uma lâmina não-homogênea, com densidade $\rho(x, y) = x + y$ kg/m.

1. Considere essa lâmina subdividida em 4 retângulos, conforme figura abaixo. Admitindo que em cada retângulo a densidade é constante e igual ao valor no ponto representativo indicado, determine a massa total aproximada da lâmina.

2. Considere agora subdivisão dessa lâmina, em 8 retângulos, a sua escolha. Admitindo que em cada retângulo a densidade é constante e igual ao valor em um ponto representativo também da sua escolha, determine a massa total aproximada da lâmina.

3. Suponha agora um caso mais geral, em que a densidade da lâmina no ponto (x, y) pode ser especificada por uma função densidade $\rho(x, y)$. Explique como encontrar a massa total dessa lâmina não-homogênea, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

DENSIDADE E MASSA DE UM SÓLIDO (part. 3)

Considere um sólido tridimensional G. Se G for homogêneo de massa m e volume V, então sua densidade é dada por $\rho = \frac{m}{V}$. Se G for não-homogêneo e estiver em um sistema de coordenadas xyz, então sua densidade no ponto genérico (x, y, z) é especificada por uma função $\rho(x, y, z)$.

Explique como encontrar a massa total desse sólido não-homogênea, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

Tipo de tarefa

Nuances de problema e investigação

Problema
Apresenta questões específicas e bem definidas sobre densidade e massa em três contextos distintos (haste unidimensional, lâmina não homogênea, sólido tridimensional), exigindo a aplicação de fórmulas específicas e conceitos matemáticos para resolvê-las

Investigação
Requer dos estudantes compreensão e aplicação de conceitos específicos para resolver os problemas propostos, possibilitando diferentes abordagens e estratégias para lidar com a variação da densidade..

Grau de estrutura

Fechada

Possui questões bem definidas e estruturadas sobre densidade e m assa em diferentes contextos, sugerindo um enfoque mais direcionado para a aplicação de fórmulas e conceitos matemáticos definidos.

Grau de desafio

Elevado

Requer dos estudantes um esforço intelectual e criativo considerável para compreender e aplicar os conceitos de densidade variável e integração em três contextos distintos (haste unidimensional, lâmina não homogênea, sólido tridimensional).

Contexto

Semi- realidade

Baseada em situações práticas (determinação de massa em diferentes objetos) mas também envolvendo conceitos matemáticos abstratos e integração para lidar com a variação da densidade ao longo de objetos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

Duração da tarefa

Média

Demandou um tempo de média duração (duas aulas de 50 minutos) para ser concluída, envolvendo análise e resolução de problemas em três contextos diferentes.

Possível resolução
Tarefa matemática 3

Parte 1: Massa de uma haste com densidade variável

Para calcular a massa de uma haste homogênea com comprimento $1{,}5m$ e densidade igual a $2{,}5kg/m$, podemos usar a fórmula da densidade linear:

$$Densidade\ linear\ (\rho) = \frac{massa\ total\ (m)}{comprimento\ total\ (\Delta x)}$$

Dada a densidade linear $\rho = 2{,}5kg/m$ e o comprimento total$\Delta x = 1{,}5m$, podemos reorganizar a equação para encontrar a massa total:

$$massa\ total\ (m) = Densidade\ linear\ (p).comprimento\ total\ (\Delta x)$$

Substituindo os valores dados, obtemos:

$$massa\ total\ (m) = 2{,}5kg/m\ .\ 1{,}5m = 3{,}75kg$$

Portanto, a massa total da haste homogênea é de $3{,}75\ kg$.

Quando a densidade de uma haste é variável, a massa total da haste pode ser encontrada integrando a densidade ao longo do comprimento da haste. Matematicamente, isso pode ser expresso como:

$$m = \int_a^b \rho(x)\, dx$$

Onde:

- mé a massa total da haste.
- $\rho(x)$ é a densidade da haste em função de x.
- a e b são os limites de integração que representam as posições inicial e final da haste.

Parte 2: Massa de uma lâmina não homogênea

- Para resolver o primeiro item, em que a lâmina é subdividida em 4 retângulos, podemos calcular a massa de cada retângulo individualmente e, em seguida, somar todas as massas para obter a massa total aproximada da lâmina.

Retângulo 1: Com vértices (0, 0), (0, 2), (2, 2) e (2, 0)

Área: $A_1 = 2 \,.\, 2 = 4m^2$

Densidade: $\rho(1{,}1) = 1 + 1 = 2\ kg/m^2$ (valor no ponto médio)

Massa: $\rho \,.\, A = 2 \,.\, 4 = 8kg$

Retângulo 2: Com vértices (0, 2), (0, 4), (2, 4) e (2, 2)

Área: $A_2 = 2 \,.\, 2 = 4m^2$

Densidade: $\rho(1{,}3) = 1 + 3 = 4\ kg/m^2$ (valor no ponto médio)

Massa: $\rho \,.\, A = 4 \,.\, 4 = 16kg$

Retângulo 3: Com vértices (2, 0), (2, 2), (4, 2) e (4, 0)

Área: $A_3 = 2 \,.\, 2 = 4m^2$

Densidade: $\rho(3{,}1) = 3 + 1 = 4\ kg/m^2$ (valor no ponto médio)

Massa: $\rho \,.\, A = 4 \,.\, 4 = 16kg$

Retângulo 4: Com vértices (2, 2), (2, 4), (4, 4) e (4, 2)

Área: $A_4 = 2 \,.\, 2 = 4m^2$

Densidade: $\rho(3{,}3) = 3 + 3 = 6\ kg/m^2$ (valor no ponto médio)

Massa: $\rho \,.\, A = 6 \,.\, 4 = 24kg$

Agora, somamos todas as massas para encontrar a massa total aproximada da lâmina:

$$massa_{total} = m1 + m2 + m3 + m4 = 8 + 16 + 16 + 24 = 64\ kg$$

Portanto, a massa total aproximada da lâmina é de 64 kg.

- Vamos supor que a densidade em cada ponto representativo seja igual ao valor da função densidade $\rho(x,y) = x + y$.

A área de cada retângulo pode ser determinada multiplicando-se a largura pela altura.

Agora, vamos calcular a massa de cada retângulo:

Retângulo 1

Ponto representativo: Ponto médio no lado esquerdo: (1, 2)

Área: $2 \,.\, 4 = 8m^2$

Densidade: $\rho(1, 2) = 1 + 2 = 3$ kg/m

Massa = $Densidade\ .\ Área =\ 3\ kg/m\ .8m^2 = 24kg$

Retângulo 2

Ponto representativo: Ponto médio no lado direito: (3, 2)

Área: $2\ .\ 4 = 8m^2$

Densidade: $\rho(3, 2) = 3 + 2 = 5$ kg/m

Massa= $Densidade\ .\ Área =\ 5\ kg/m\ .8m^2 = 40kg$

Retângulo 3

Ponto representativo: Ponto médio na parte superior: (2, 3)

Área: $2\ .\ 4 = 8m^2$

Densidade: $\rho(2, 3) = 2 + 3 = 5$ kg/m

Massa = $Densidade\ .\ Área =\ 5\ kg/m\ .8m^2 = 40kg$

Retângulo 4

Ponto representativo: Ponto médio na parte inferior: (2, 1)

Área: $2\ .\ 4 = 8m^2$

Densidade: $\rho(2, 1) = 2 + 1 = 3$ kg/m

Massa = $Densidade\ .\ Área =\ 3\ kg/m\ .8m^2 = 24kg$

Retângulo 5

Ponto representativo: Ponto médio no canto superior esquerdo: (1, 3)

Área: $1\ .\ 1 = 1m^2$

Densidade: $\rho(1, 3) = 1 + 3 = 4$ kg/m

Massa = $Densidade\ .\ Área =\ 4\ kg/m\ .\ 1m^2 = 4kg$

Retângulo 6

Ponto representativo: Ponto médio no canto superior direito: (3, 3)

Área: $1\ .\ 1 = 1m^2$

Densidade: $\rho(3, 3) = 3 + 3 = 6$ kg/m

Massa = $Densidade\ .\ Área =\ 6\ kg/m\ .\ 1m^2 = 6kg$

Retângulo 7

Ponto representativo: Ponto médio no canto inferior direito: (3, 1)

Área: $1 . 1 = 1m^2$

Densidade: $\rho(3, 1) = 3 + 1 = 4$ kg/m

Massa = $Densidade \, . \, Área = \; 4 \, kg/m \, . \, 1m^2 = 4kg$

Retângulo 8

Ponto representativo: Ponto médio no canto inferior esquerdo: (1, 1)

Área: $1 . 1 = 1m^2$

Densidade: $\rho(1, 1) = 1 + 1 = 2$ kg/m

Massa = $Densidade \, . \, Área = \; 2 \, kg/m \, . \, 1m^2 = 2kg$

Agora, somamos todas as massas individuais para obter a massa total aproximada da lâmina quando subdividida em 8 retângulos:

$$massa_{total} \approx m1 + m2 + m3 + m4 + m5 + m6 + m7 + m8$$
$$massa_{total} \approx 24 + 40 + 40 + 24 + 4 + 6 + 4 + 2$$
$$massa_{total} \approx 144 \, kg$$

- No caso geral, em que a densidade da lâmina é uma função $\rho(x, y)$ que varia em relação a x e y, a massa total da lâmina pode ser encontrada somando as massas de pequenos elementos de área da lâmina, cada um com uma densidade diferente. Isso pode ser feito utilizando uma integração dupla sobre a região da lâmina, como:

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$

Onde:

- m é a massa total da lâmina.
- D é a região da lâmina no plano xy.
- $\rho(x, y)$ é a densidade da lâmina em função de x e y.
- dA representa um elemento de área infinitesimal.

Essa integração dupla calcula a massa infinitesimal dm de um elemento de área dA da lâmina (com densidade $\rho(x, y)$), e então soma todas essas massas infinitesimais sobre a região da lâmina para obter a massa total.

Parte 3: Massa de um sólido não homogêneo

Para encontrar a massa total de um sólido não homogêneo G, onde a densidade no ponto genérico (x, y, z) é especificada por uma função densidade $\rho(x, y, z)$ podemos usar uma integração tripla sobre o volume do sólido.

Matematicamente, a massa total m é dada por:

$$\iiint_V \rho(x, y, z) dV$$

Onde:

- mé a massa total do sólido G.
- Vé o volume do sólido.
- $\rho(x, y, z)$é a densidade do sólido em função de x, y e z.
- dVrepresenta um elemento de volume infinitesimal.

Essa integração tripla calcula a massa infinitesimal dmde um elemento de volume dVdo sólido (com densidade $\rho(x, y, z)$), e então soma todas essas massas infinitesimais sobre o volume do sólido para obter a massa total.

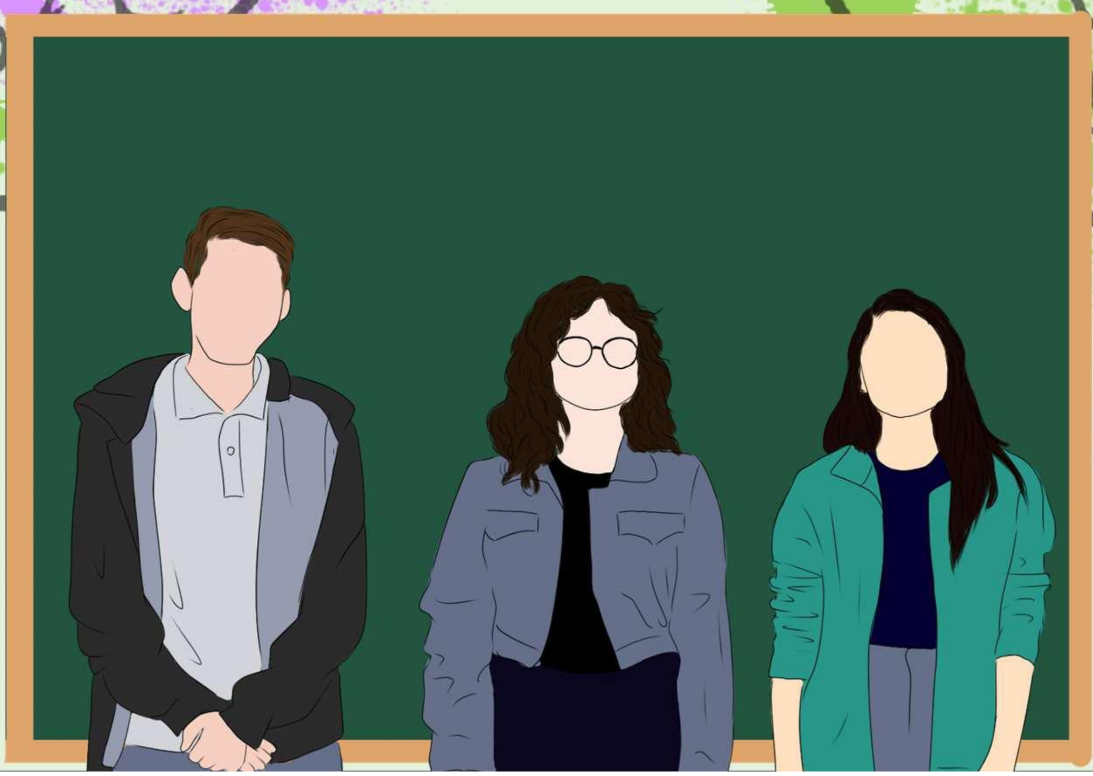
ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Com base na análise realizada na dissertação, foram selecionados três grupos de diferentes participantes em três tarefas distintas para a investigação. As análises foram conduzidas a partir dos áudios dos estudantes enquanto eles resolviam as tarefas, proporcionando uma compreensão mais aprofundada dos processos envolvidos.

As falas dos estudantes foram transcritas e divididas em trechos que possibilitaram a identificação dos critérios propostos por Lithner (2006) acerca do RC, mais especificamente, (i) novidade, (ii) flexibilidade, (iii) plausibilidade e (iv) fundamentação matemática.

Tarefa matemática 1

A tarefa matemática 1 foi aplicada em 18 de agosto de 2022, antes mesmo de o conceito de função de duas ou mais variáveis ser apresentado aos estudantes. Nesse cenário, os estudantes ainda não estavam familiarizados com uma definição formal desse conceito. A análise foi realizada em um grupo composto por três estudantes (cursando a disciplina pela segunda vez consecutiva com o mesmo professor orientador da pesquisa), identificados como A, J e T.



No trecho 1, os estudantes discutem sobre o item “a” da tarefa, que solicitava como deveria ser a aparência da caixa, para que o custo de sua produção fosse mínimo.

Trecho 1

A: O material da lateral é mais barato que o material da base.
A: Na letra a, pra que o custo seja o mínimo a gente tem que pensar o seguinte, o metro quadrado do material das laterais é 40% mais barato que o material da base, mas pensa tipo aqueles copos de balada, eles fazem um copo alto uma lateral maior uma base pequena e o volume dele é pequeno, não cabe quase nada.
Os outros integrantes concordam.
A: Por outro lado, a gente tem que pensar que pra ter o menor custo possível essa caixa tem que ter uma base pequena, sei lá 1 m² e dependendo do volume que a gente quer a gente varia a altura da lateral.
T: Manteria a base igual e aumentaria a lateral.
A: Então uma caixa quadrada mais simples, com a base 1 m² e a altura 1m² também de material.
A: Nossa, mas olha a base a gente tem apenas uma, a lateral a gente tem quatro. Na verdade, faz mais sentido usar mais material na base só que nas laterais.
J: Então a base tem que ser maior que a lateral.
A: Exatamente.
T: Então um retângulo, não um quadrado.
A: É, por que o que vai acontecer? O material da lateral não vai impactar tanto assim o volume.
A: Então seria uma caixa cuja maior parte do material está proporcionalmente concentrado na base.
A: A aparência seria uma caixa com laterais baixas e base maior.
[..]

No decorrer da discussão, foi possível identificar os critérios (ii) flexibilidade e (iii) plausibilidade. A flexibilidade foi reconhecida uma vez em que eles viram duas formas diferentes para a caixa (quadrada e retangular) e a plausibilidade na medida em que justificaram e argumentaram que a melhor opção seria a caixa retangular, já que independente das laterais serem mais baratas, são quatro laterais e a base apenas uma. Assim, os estudantes concluíram que a melhor opção em relação ao formato da caixa para que o custo fosse mínimo, seria uma caixa de base maior com as laterais de altura menor.

No trecho 2, os estudantes discutem sobre o item “b” da tarefa, que solicitava a construção de uma expressão matemática do custo total do material para fabricação da caixa. Essa resolução poderia envolver conceitos matemáticos, como por exemplo uma expressão algébrica.

Trecho 2

[..]
J: Na “b”, seria duas coisas pra expressão, a lateral e a base.
A: Nossa, seria uma expressão de duas variáveis? Por que a gente tem que fazer a soma do tanto de material usado nas laterais multiplicado por seis, quanto o tanto de material usado na base multiplicado por dez.
T: Faz sentido, mas ainda seria mais quatro lados de laterais.
A: Sim, mas aí a gente usa o material direto, tipo 10 m² pra fazer as laterais vezes 4.
A: z=x.6 + y. 10
T e J: Isso.
[..]

Na discussão foi possível identificar os critérios (i) novidade e (iv) fundamentos matemáticos. A novidade, a partir dos questionamentos sobre ser uma expressão de duas variáveis em relação ao custo das laterais e da base, uma vez em que os estudantes expressam surpresa, já que para formar a expressão seriam duas variáveis, as laterais e a base.

E a fundamentação matemática se mostrou quando os estudantes utilizaram expressões algébricas para representar a situação, ou seja, utilizaram letras, números e símbolos das operações matemáticas (adição e multiplicação) para expressarem o custo total do material usado na caixa e denominam *x* a quantidade de material usada nas laterais e *y* a usada na base.

No trecho 3, por sua vez, os estudantes discutem sobre o item "c" da tarefa, na qual era esperado que eles justificassem se mudariam (ou não) suas respostas anteriores, se a caixa tivesse volume de 10m³.

Trecho 3

[..]
A: O que vai mudar?
J: Aí é que está a questão, se a gente pega.
Interação com outros trios (conversas aleatórias)
A: Então, o que vai mudar se a caixa tiver 10 m³ de volume.
A: A caixa com 10m³ de volume é uma caixa que multiplica o comprimento, a largura e a altura.
T: Da 10m³.
A: O comprimento é a base, a largura é da base também, o único fator que influencia as laterais é a altura, então a base influencia duas vezes mais que a altura no volume total.
J: Então a gente podia fazer uma base de 3 de comprimento e de largura e 4 de altura.
A: Mas é soma ou multiplicação? Acho que é a base vezes.
T: É vezes.
[..]
A: Para fazer uma caixa com 10m³, tem que ser uma caixa com 2 metros de comprimento, 5 de largura e 1 de altura.
J: Ou 4; 2,5 e 1.
T: Ou 2; 2; e 2,5.
[..]

A: O que muda é o seguinte, tipo na nossa resposta "a" ela continua sendo verdade, porém não é o mínimo de material nas laterais, porque às vezes é melhor jogar um pouco na lateral do que na base, mesmo que a base influencie mais, certo?
J e T: Certo.
J: Então não muda nada, porque por exemplo aqui a gente tá usando 5m² na base mas estamos usando 12 na lateral e a lateral continua baixa.
T: Tem outra coisa, a lateral é 4 vezes.
A: É verdade, a lateral é quatro vezes, então não muda nada. Continua sendo uma caixa com laterais baixas e uma base maior.
A: Então na "a" não muda nada e na "b" também não, a expressão continua valendo.
T: O que muda então é nada.
A: Com o volume de 10m³ o material utilizado na base influenciará mais no volume por menos dinheiro, mesmo ele sendo mais caro, 66% mais caro.
[..]

Enquanto os estudantes discutem, é possível identificar os critérios (iii) plausibilidade e (iv) fundamentos matemáticos.

A plausibilidade foi reconhecida quando eles retornaram aos itens “a” e “b” de forma a argumentar e validar suas escolhas. Já a fundamentação matemática foi reconhecida quando eles discutem qual a operação matemática e que medidas deveriam ser usadas para que o volume fosse igual a $10m^3$. Foi possível observar em suas falas a construção de uma expressão para o volume com as variáveis altura, comprimento e largura.

No trecho 4, finalmente, os estudantes discutem sobre o item “d” da tarefa. Nesse item era necessário que além do volume ser de $10m^3$, a base da caixa deveria ser retangular, com um dos lados igual ao dobro do outro.

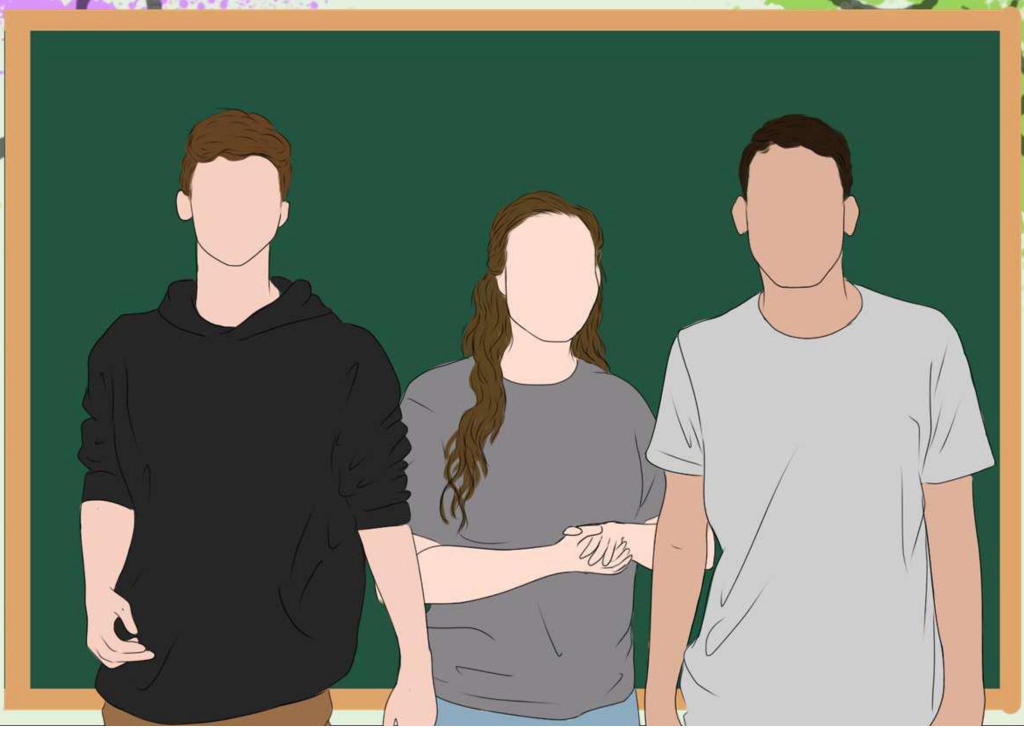
Trecho 4

[..]
J: Agora, além do volume de $10m^3$, a base da caixa deve ser retangular, com um dos lados igual ao dobro do outro.
A: Aí as coisas mudam, porque se a gente tiver uma caixa que na base tem $8m^2$ de material, na altura não tem como, pra dar $10m^3$.
T: 1,5 e 3.
A: É, mas 1,5 e 3 vai da 4,5 vezes 2 dá 9.
J: A base 2 por 4 e 1,25.
A: É a melhor configuração possível?
A: Alguma coisa muda? Porque 4 vezes 1,25 da 5 e 5 vezes 4 dá 20.
J: Vezes 2, dá 10.
T: Por que às vezes 2?
A: Porque é um retângulo, os lados são diferentes.
A: É, acho que é a melhor configuração possível.
J: Por ser o dobro né.
[..]

Durante a discussão foi possível identificar o critério (iii) plausibilidade, quando os estudantes elaboraram argumentos e realizaram testes para validar a escolha da estratégia do trio em relação ao formato da caixa e as restrições da alternativa “d”, ou seja, se de acordo com a estratégia escolhida, além do volume ser de 10m³, funcionaria se a base da caixa fosse retangular, com um dos lados igual ao dobro do outro, a fim de chegarem a uma conclusão juntos.

Tarefa matemática 2

A tarefa matemática 2 foi aplicada em 05 de outubro de 2022. Neste momento da disciplina, os estudantes já haviam sido introduzidos ao conteúdo de função de duas ou mais variáveis, trabalhado com processos de derivação e estudado otimização com restrições, por meio do método dos Multiplicadores de Lagrange. O grupo que participou da análise era composto por três estudantes, todos cursando a disciplina pela primeira vez, denominados P, L e R.



Trecho 1

[..]
P: A gente tem informação. O bom de ter essas informações de restrições é que a gente vai saber pra onde ir.
R: Mas restrição? Ahh, só o volume que tem que ser igual a 10.
P: Ele vai ter base, altura e largura. Posso colocar como x, y e z?
P: A gente vai ter que restringir a duas, a gente transforma uma variável na outra e consegue uma equação.
P: É tipo, se a gente tem que z é igual a dois y, toda vez que tiver z você troca por dois y, pra facilitar a vida.
R: Então fica x vezes z vezes y.
[...]

No trecho 1, os estudantes primeiro organizaram as informações do enunciado da tarefa e, em seguida, discutiram sobre a restrição em relação ao volume. Foi possível reconhecer que eles trouxeram uma estratégia de resolução a partir de algumas expressões algébricas. Logo, foi possível identificar nesses trechos a presença do critério (iv) fundamentos matemáticos, pois eles utilizaram conceitos e propriedades matemáticas para tentar encontrar uma relação entre as dimensões da caixa.

No trecho 2, os estudantes questionam as ideias e possibilidades para determinar as dimensões da caixa.

Trecho 2

[...]
Aluno P pede licença para tirar uma dúvida com o professor.
L: Aproveita e pergunta se pode fazer com três variáveis.
Aluno P volta para a mesa.
R: O que você perguntou?
P: Eu fui perguntar outra coisa, inclusive ele disse que o objetivo é fazer com três variáveis.
R: Ah ta.
L: Então faremos com três variáveis.
P: Então a gente pode colocar que tem a função c custo.
L: Olha, eu isolei z e deu esse negócio aqui.
P: Não isola mais z não. "estudantes riem"
L: Então, sei lá, ficou gigante.
P: É que o professor disse que tanto dá pra fazer com z, mas que o objetivo era fazer com três.
R: Vamos tentar fazer, porque aí fica mais fácil.
P: Acho que dá pra aplicar Lagrange porque não tem uma restrição de área né, só tem a restrição de volume.
L: Verdade, vamos tentar.
[..]

Neste trecho há a presença de dois critérios. Um deles é a (ii) flexibilidade, já que os estudantes vêm ao longo da discussão tentando chegar a um resultado por uma estratégia com o uso de três variáveis, procurando escrever uma em função de outra. Reconheceram que também poderiam utilizar o Método de Multiplicadores de Lagrange. Logo, os estudantes pensaram em duas abordagens para resolver a tarefa, ambas plausíveis.

Reconhecemos também o critério de (iii) plausibilidade, quando um dos estudantes pensa na possibilidade de aplicar o Método dos Multiplicadores de Lagrange e justifica que não tem restrição na área e, sim, no volume.

A plausibilidade também foi observada no Trecho 3.

Trecho 3

[..]
R: Eu não sei fazer isso. Tipo assim, eu tentei isolar xy.
P: Espera aí.
L: Nossa! E pra escalonar isso aqui?
P: Tem que escalonar?
R: Ele pensou em matriz mas eu acho que...
L: Não vai dar por causa dessa multiplicação.
[..]

Aqui, é possível reconhecer o critério de (ii) plausibilidade, já que ao tentar resolver a tarefa por uma matriz e, em seguida, escaloná-la, um dos estudantes justifica que não é possível escalonar por conta de uma multiplicação. Logo, não se tratava de um sistema de equações lineares.

Destacamos que, no decorrer das discussões, não foi possível identificar o critério de (i) novidade, o que já era esperado, uma vez que a tarefa era a continuação de outra, aplicada no início do semestre, e também por ser realizada após os estudantes serem apresentados ao conteúdo (Método dos multiplicadores de Lagrange).

Resolução detalhada dos estudantes

Tarefa 2

05 : 10 : 22

Proposta de trabalho 2º

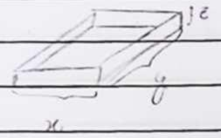
• Custos:

Base baixa: 10,00 \$/m²

Base lateral: 6,00 \$/m²

• Imposições:

Base retangular com $V = 10\,m^3$ (sem tampa)



$V = x \cdot y \cdot z$

Áreas laterais:

$6(2yz + 2xz)$

Área da base:

$10xy$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Custo} = 12yz + 12xz + 10xy \\ 10 = x \cdot y \cdot z \end{array}\right\} \text{restrição igual}$$

$C_x = 12z + 10y \qquad V_x = yz$

$C_y = 12z + 10x \qquad V_y = xz$

$C_z = 12y + 12x \qquad V_z = xy$

$$(12z + 10y,\ 12z + 10x,\ 12y + 12x) = \lambda(yz,\ xz,\ xy)$$

$$\begin{cases} 12z + 10y = yz\lambda \\ 12z + 10x = xz\lambda \\ 12y + 12x = xy\lambda \\ xyz = 10 \end{cases}$$

$12z + 10y = yz\lambda \rightarrow \dfrac{12z}{yz} + \dfrac{10y}{yz} = \lambda = \dfrac{12}{y} + \dfrac{10}{z}$

$\rightarrow 12z + 10x = xz\left(\dfrac{12}{y} + \dfrac{10}{z}\right) \rightarrow$

$\to 12z + 10x = \dfrac{22xz + 10x}{y} \to 12 = \dfrac{12xz}{yz} \to 12y = 12x$ $\boxed{y = x}$

Em III

$12y = 12x = xy\lambda$

$24x = x^2\lambda$

$\dfrac{24x}{xx} = \lambda$

$\boxed{\dfrac{24}{x} = \lambda}$

Iguala λ

$\dfrac{12}{y} + \dfrac{10}{z} = \dfrac{24}{x}$

$\dfrac{12}{x} + \dfrac{10}{z} = \dfrac{24}{x}$

$\dfrac{10}{z} = \dfrac{12}{x}$

$12z = 10x \to \boxed{z = \dfrac{5x}{6}}$

Em IV

$xyz = 10$

$x \cdot x \cdot \dfrac{5x}{6} = 10$

$\dfrac{5x^3}{6} = 10$

$x^3 = 12$

$x = \sqrt[3]{12}$

$\boxed{x = 2{,}28}$

$z = \dfrac{5 \cdot 2{,}28}{6}$

$\boxed{z = 1{,}9}$

Transcrição da Resolução detalhada dos estudantes
Tarefa 2

Proposta de trabalho

Custos:

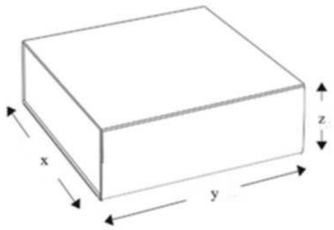
Base caixa: 10,00 $\$/m^2$

Base lateral: 6,00 $\$/m^2$

Suposições:

Base retangular com $\vartheta = 10\ m^3$ sem tampa.

ϑ=x.y.z



Área lateral	Área Da base
$6(2yz + 2xz$	$10xy$

$Custo$: $12yx + 12xz + 10xy$ $\rightarrow$ Restrição igud

$10 = xyz$

$Cx = 12z + 10y$	$\vartheta x = yz$
$Cy = 12z + 10x$	$\vartheta y = xz$
$Cz = 12y + 12x$	$\vartheta z = xy$

$$(12z + 10y, 12z + 10x, 12y + 12x) = \lambda\,(yz,xz,xy)$$

$12z + 10y = yz\lambda \rightarrow 12z + 10y + \lambda = 12 + 10$

$yz \quad yz \quad\quad y \quad z$

$12z + 10x = xz\lambda \rightarrow 12z + 10x = xz \begin{pmatrix} 12 + 10 \\ y \quad\; z \end{pmatrix} \rightarrow$

$12y + 12x = xy\lambda$

$xyz = 10$

$$12z + 10x + 12xz + 10x \rightarrow 12 = 12xx \qquad 12y = 12x$$

$$y \qquad yz \qquad y = x$$

Em III	λ
$12y + 12x = xy\lambda$	$12 + 10 = 24$
$24x = x^2\lambda$	$y \quad z \quad x$
xx	$12 + 10 = 24$
$\frac{24}{x} = \lambda$	$x \quad z \quad x$
	$10 = 12$
	$z \quad x$
	$12z = 10x \rightarrow z = \frac{5}{6}x$

Em IV

$$xyz = 10$$

$$x.x.\frac{5}{6}x = 10$$

$$\frac{5}{6}x^3 = 10$$

$$x^3 = 12$$

$$x = \sqrt[3]{12}$$

$$x = 2{,}28$$

$$z = \frac{5}{6}.2{,}28$$

$$z = 1{,}9$$

Tarefa matemática 3

Na tarefa 3, os estudantes são desafiados a fazer a extensão do conceito de integral de uma variável para mais variáveis. É importante ressaltar que a tarefa matemática foi aplicada antes do conteúdo ser apresentado aos estudantes. Para realizar essa análise, foram transcritos trechos das falas dos integrantes do grupo, composto por três estudantes (M, V e A), todos cursando a disciplina pela primeira vez. A tarefa foi aplicada em 20 de outubro de 2022, e foi proposta por Araújo (2023).

No trecho 1 e 2, os estudantes discutem sobre a parte 1 da tarefa, no qual é explorado brevemente o conceito de massa de um objeto unidimensional e é sugerido que calculem a massa de uma haste unidimensional e, posteriormente, que expliquem como encontrar a massa total da haste unidimensional não homogênea, ou seja, com densidade variável.

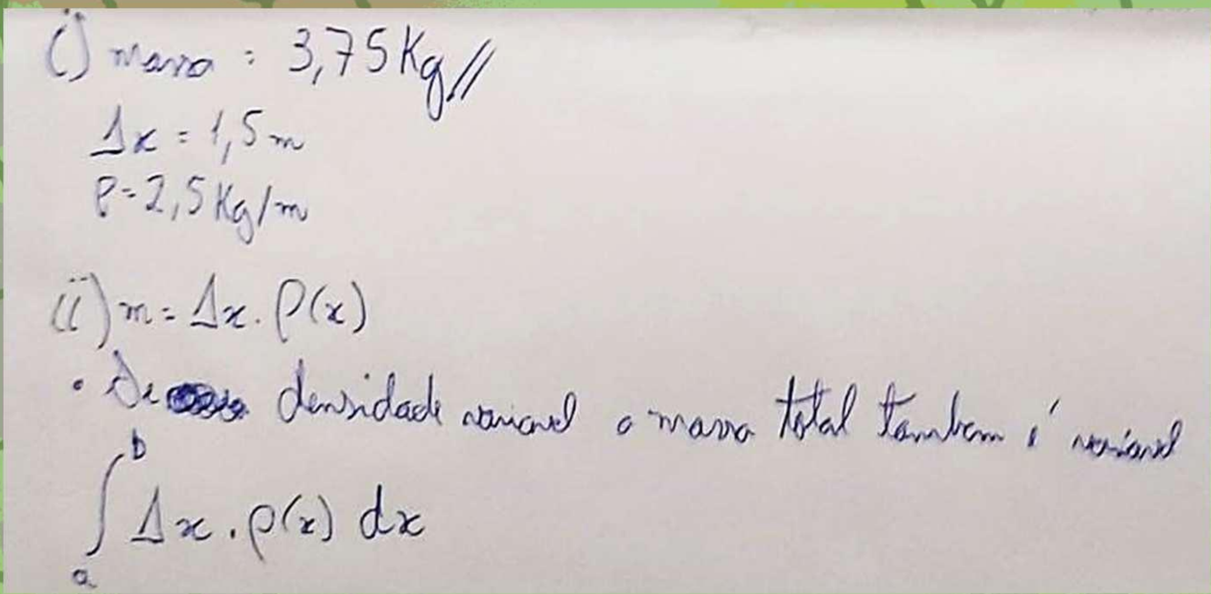
Trecho 1

[..]
M: A primeira quer saber quanto pesa 1,5, certo?
A: Então a gente pega 1,5, né? Então em um já tem 2, 5; 1,5 vezes 2,5. Aí o total dessa barra, né? Dessa haste é 3,75 kg.
A: Na 2, o que acontece se a densidade for variável? Ou seja, massa é igual delta x vezes p de x. Suponha que o objeto único dimensional esteja posicionado…
V: Ah é integral.
M: Vai ser dessa fórmula aqui.
A: Acho que não, acho que é assim.
A: Aqui é massa, vai ser o resultado da integral.
M: Mas olha.
V: Eu também acho que é essa, vamos testar.
[..]

Trecho 2

V: Dá pra validar ela com a primeira opção pra gente conferir se tá certo, a gente tem a massa 3,75 na primeira, a variação ali seria a integral né…
M: Não, ma...
A: A gente só vai validar se a primeira expressão tá correta.
V: Entendi.
M: A primeira não varia.
A: Claro que varia.
M: É 2,5 kg.
A: Por metro, certo? Então a gente vai ter um intervalo de x, que seria o da integral de 0 a 1,5.
A: É só pra ver se tá certo.
[..]
V: Dá certo, fica só o delta.
A: Como vai virar constante só tinha um delta em cima, vai sumir o x e vai ficar só o delta, que é a variação.
V: É dá certo.
A: Sim, fica só ele, como ele vira constante você pode tirar ele pra fora.
[..]

No trecho 1, o critério (ii) flexibilidade foi identificado quando os estudantes discutem duas abordagens diferentes para resolver a questão. Embora no áudio não tenha ficado claro quais são essas duas formas, podemos reconhecer que a tarefa possibilitou que eles pensassem pelo menos em duas estratégias distintas. Uma delas foi o uso de uma integral conforme o registro apresentado pelos estudantes na figura a seguir.



Transcrição da figura:

i)	Massa= 3,75 Kg $1x = 1{,}5\ m$ $\rho = 2{,}5\ Kg/m$
ii)	$m = \Delta x.\rho(x)$ Se a densidade varia a massa total também é variável $\int_a^b \Delta x.\rho(x)dx$

Outro critério identificado foi o de (iii) plausibilidade, pois para decidirem qual estratégia adotar optaram por "testar" a fórmula que supostamente seria a correta, para assim chegarem a um consenso. Esse critério também se fez presente no trecho 2, em que os estudantes discutem argumentos de forma a validar a escolha da estratégia selecionada pelo trio a fim de chegarem a uma conclusão juntos.

No trecho 3, um dos estudantes explica aos colegas seu raciocínio.

Trecho 3

[..]
V: A segunda situação, ele pede como que ficaria para calcular a massa, sendo que a densidade é variável, essa densidade ta entre o x= a e o x= b. Pensando no conceito de integral, a gente pode falar que a gente vai dividir isso em pequenas partes, que ela vai ser todas iguais, então essas partes vão ser consenso, a gente vai somando todas elas e a gente vai chegar no resultado total. Como não tem um valor numérico, não tem como fazer isso, mas a gente pode ter por essa expressão que vai ser a integral definida de a à delta x vezes p de x dx
[..]

Nessa fala, há elementos do critério (iv) fundamentos matemáticos, quando o estudante faz uma relação da situação com a ideia de integral, baseado em conhecimentos de propriedades matemáticas já estudadas em CDI 1.

Em geral, a parte 1 da tarefa foi resolvida sem dificuldade, os estudantes chegaram a discutir sobre duas formas de resolver a questão e como forma de consenso testaram qual seria mais plausível, reconhecendo o uso da integral.

No trecho 4, os estudantes resolvem a parte 2 da tarefa.

Trecho 4

[..]
V: Seria a integral de xa e xb da massa, depois fazer uma integral de ya e yb e soma elas?
Professor: Uma soma dentro de outra soma.
V: Rapaz, não é que tá certo.
V: Calma, então se a gente não pode somar todas as densidades e depois multiplicar elas pela área. Olha só, pensa comigo, a gente vai ter que multiplicar ela pela área uma de cada vez e somar no final.
A: Então a gente pega a área de cada um vezes a densidade daquela área e...
(Trecho inaudível)
V: Eu não acredito, tô impressionado da nossa capacidade mental de descobrir uma integral dupla.
[..]

Na parte 2, foi apresentado um texto explicativo sobre o conceito de uma lâmina bidimensional não homogênea e foi solicitado que considerassem três itens. Ao serem questionados pelo professor, um dos estudantes sugere tratar-se de uma integral dupla, aparentemente elaborando uma hipótese sobre a integral com duas dimensões e considerando o conceito já estudando anteriormente em CDI 1. Podemos reconhecer aqui o critério (i) novidade.

Resolução da Parte 2 da tarefa

Tarefa matemática 3

não-homogênea, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro

i) $\rho(x,y) = x+y$ Kg/m ; delimitado $(0,0); (0,4), (4,4); (4,0)$

$A: 2.2 = 4m^2$ $P1(1,1); P2(3,1); P3(1,3); P4(3,3)$

$At: 16m^2$ 2kg/m 4 4 6

$mt = \Sigma(\rho.A) = (4.2)+(4.4)+(4.4)+(6.4) =$ 64 Kg

iii) $\rho(x,y) = x+y$ Kg/m

$$\int_{xa}^{xb}\int_{ya}^{yb} \rho(x,y)\, dA$$ //

ii)

pontos x	y	ρ	mass (A.ρ) Kg
0,5	1	1,5	0,75
1,5	1	2,5	3,75
2,5	1	3,5	8,75
3,5	1	4,5	15,75
0,5	2,5	3	3,75
1,5	2,5	4	15
2,5	2,5	5	31,25
3,5	2,5	6	52,5
Σ			131,5 Kg //

Transcrição da Resolução da Parte 2 da tarefa
Tarefa matemática 3

i) $\rho(x,y) = x + y\frac{kg}{m}$; delimitado (0,0); (0,4); (4,4); (4,0)

$\rho1\ (1,1);\ \rho2\ (3,1);\ \rho3\ (1,3);\ \rho4\ (3,3)$

$A = 2.2 = 4m^2$

$At = 16m^2$

$mt = \{(\rho.A) = (4,2) + (4,4) + (4,4) + (6,4) = 64\ Kg$

ii) Ponto p massa $(A.\rho)$

X	Y		Kg
0,5	1	1,5	0,75
1,5	1	2,5	3,75
2,5	1	3,5	8,75
3,5	1	4,5	15,75
0,5	2,5	3	3,75
1,5	2,5	4	15
2,5	2,5	5	31,25
3,5	2,5	6	52,5
$\sum$			131,5 Kg

iii) $\rho(x,y) = x + y\ \frac{Kg}{m}$

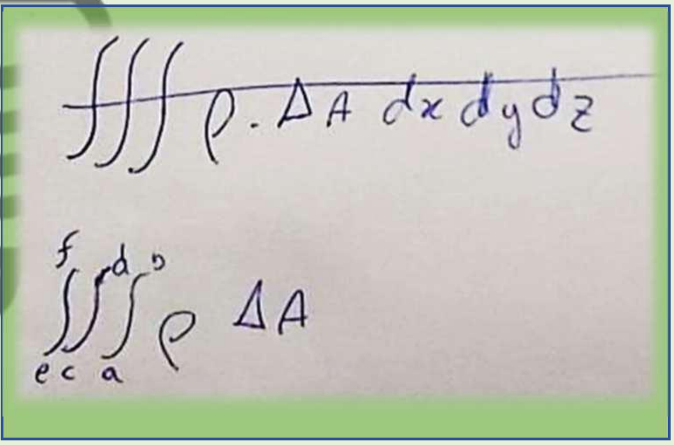
$$\int_{xa}^{xb}\int_{ya}^{yb} \rho(x,y)\, dA$$

No trecho 5, por sua vez, os estudantes discutem sobre a parte três da tarefa.

Trecho 5

[..]
A: Espera, isso aqui vai ser de três? Pode? Existe isso?
Autora: Porque você pensa que pode ser?
A: Porque é um sólido certo? Tridimensional, três dimensões x, y e z, teve uma, duas..
M: Nossa..
[..]

Após lerem o enunciado e observarem o fato de ser um sólido tridimensional, um dos estudantes questionou se poderia ser uma integral tripla. O professor ainda não tinha apresentado formalmente esse conteúdo à turma, já que a tarefa tinha justamente esse objetivo, de fazer com que os estudantes explorassem de forma intuitiva as ideias de integral dupla e tripla. Ao perceberem que sim, seria uma integral tripla, ficam surpresos e registram na tarefa como podemos observar na figura a seguir. Portanto, nesse trecho, foi possível identificar o critério de (i) novidade.



Transcrição da figura

$$\iiint \rho \,.\, \Delta A \; dx\, dy\, dz$$

$$\int_e^f \int_c^d \int_a^b \rho \; \Delta A$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base na análise realizada na dissertação e apresentada no produto educacional, foi possível identificar e compreender manifestações do RC dos estudantes diante das tarefas matemáticas apresentadas no contexto da disciplina CDI 2. Ao longo desta pesquisa, foram investigados dois aspectos principais: os aspectos do RC manifestados pelos estudantes e as características das tarefas matemáticas que podem ter desencadeado essas manifestações.

Nossas análises revelaram uma diversidade de aspectos relacionados ao RC manifestado pelos estudantes ao resolver as tarefas matemáticas. Eles demonstraram flexibilidade ao explorar diferentes abordagens, plausibilidade ao justificar suas estratégias e fundamentação matemática ao aplicar conceitos e propriedades matemáticas. Além disso, em alguns casos, os estudantes apresentaram novidade ao identificar novas variáveis e propor soluções originais.

As tarefas matemáticas selecionadas para análise tinham um perfil desafiador, o que contribuiu para a manifestação do RC dos estudantes. Sua natureza aberta permitiu a exploração de diferentes caminhos para a resolução, incentivando a flexibilidade e a criatividade. O contexto de semirrealidade presente nas tarefas também ofereceu um ambiente propício para a manifestação do RC, conectando os problemas matemáticos a situações práticas do mundo real.

Embora tenha sido desafiador classificar as tarefas entre problemas e investigação de acordo com as definições propostas por Ponte (2005), essa dificuldade evidenciou a complexidade e a riqueza das tarefas que foram propostas.

As tarefas matemáticas analisadas foram promissoras para a manifestação do RC dos estudantes. A otimização das dimensões da caixa desafiou os estudantes com estratégias matemáticas, enquanto a análise da densidade variável permitiu a exploração de diferentes perspectivas, aplicando intuitivamente conceitos de integração ainda desconhecidos.

Em suma, a proposição de tarefas com um desafio elevado e a aplicação de diferentes estratégias estimularam o desenvolvimento do RC dos estudantes. Esse tipo de abordagem mostra-se promissor para o ensino de CDI, pois permite que os estudantes desenvolvam habilidades criativas e fortaleçam seu RC ao resolver problemas matemáticos desafiadores.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Tainá Taiza de. **Integrais definidas de uma e mais variáveis: uma proposta de intervenção com tarefas exploratória**s. 2023. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

BRASIL. Parecer CNE/CES no 1/2019. **Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia**. Brasília: MEC, 2019.

CABRAL, T. C. B. Metodologias Alternativas e suas Vicissitudes: ensino de matemática para engenharias. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, p. 208-245, 2015.

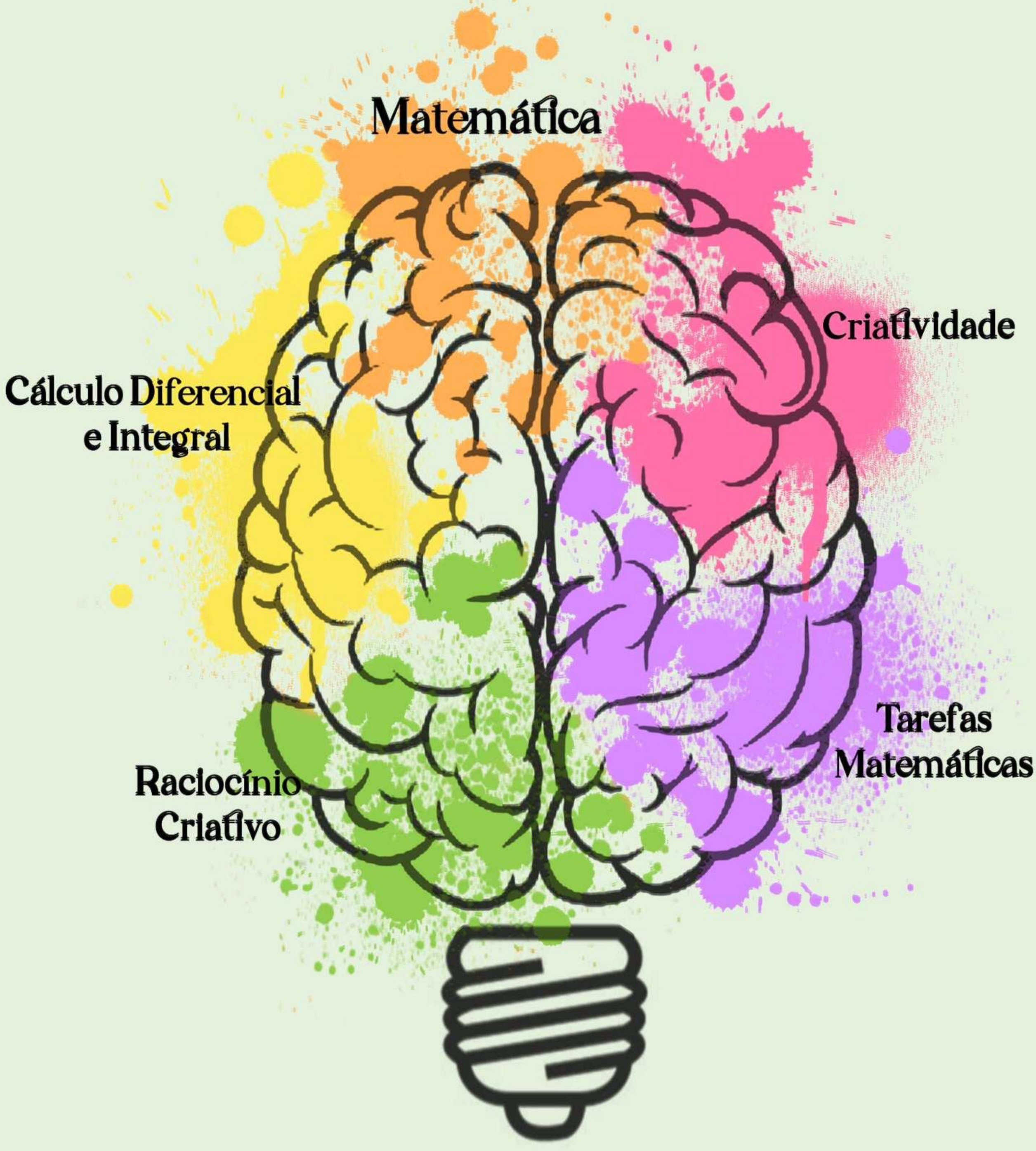
LITHNER, J. **A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning**, 2006. Disponível em https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=1190a2dc1bacd94fb92ba51c67365d158f8ded5a. Acesso em 15 jan. 2024.

GONTIJO, C. H. **Relações entre criatividade, criatividade em Matemática e motivação em Matemática de alunos do Ensino Médio.** 2007. 194f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

GONTIJO, C. H. Estratégias para o desenvolvimento da criatividade em matemática. **Linhas Críticas**, v. 12, n. 23, p. 229-244, dez. 2006.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.): **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

Explorando o Raciocínio Criativo em Matemática: Análise de Tarefas na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 2



Leandra Letícia de Lima
André Luis Trevisan
Rodolfo Eduardo Vertuan