

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**NAYANE LAIS SCHRAN GARBIN**

**ANÁLISE DA RESPOSTA DINÂMICA DE UM SISTEMA  
MECÂNICO COM AMORTECEDOR DE MASSA PASSIVO: UM  
ESTUDO EXPERIMENTAL E NUMÉRICO**

**PATO BRANCO**

**2018**

NAYANE LAIS SCHRAN GARBIN

ANÁLISE DA RESPOSTA DINÂMICA DE UM SISTEMA  
MECÂNICO COM AMORTECEDOR DE MASSA PASSIVO: UM ESTUDO  
EXPERIMENTAL E NUMÉRICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como parte dos requisitos de obtenção do título de Mestra em Engenharia Civil.

Área de concentração: Materiais e Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogerio Novak.

Coorientador: Prof. Dr. Francisco Augusto Aparecido Gomes.

Pato Branco

2018



G213a Garbin, Nayane Lais Schran.

Análise de resposta dinâmica de um sistema mecânico com amortecedor de massa passivo: um estudo experimental e numérico / Nayane Lais Schran Garbin. -- 2018.

100 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogerio Novak

Coorientador: Prof. Dr. Francisco Augusto Aparecido Gomes

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Pato Branco, PR, 2018.

Bibliografia: f. 98 - 100.

1. Dinâmica estrutural. 2. Vibração - Medição. 3. Análise estrutural (Engenharia). I. Novak, Paulo Rogerio, orient. II. Gomes, Francisco Augusto Aparecido, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. IV. Título.

CDD 22. ed. 624

Ficha Catalográfica elaborada por  
Suélem Belmudes Cardoso CRB9/1630  
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco



---

---

## TERMO DE APROVAÇÃO Nº 23

### Título da Dissertação

***Análise da resposta dinâmica em um sistema mecânico com amortecedor de massa passivo: um estudo experimental e numérico***

### Autora

***Nayane Lais Schran Garbin***

Esta dissertação foi apresentada às 9 horas do dia 30 de maio de 2018, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL- Linha de pesquisa em Análise de Estruturas, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. A autora foi arguida pela Banca Examinadora abaixo assinada, a qual, após deliberação, considerou o trabalho aprovado.

*Prof. Dr. Paulo Rogerio Novak*

UTFPR/PB  
Presidente

*Prof. Dr. Prof. Dr. Fábio Rodrigo Mandello Rodrigues*

UTFPR/PB  
Examinador

*Prof. Dr. Giovanni Bratti*

UTFPR/PB  
Examinador

*Prof. Dr. Key Fonseca de Lima*

PUC/PR  
Examinador

Visto da Coordenação

**Prof. Dr. Ney Lyzandro Tabali**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação  
Engenharia Civil- PPGEC

**O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do PPGEC**

Nome: Nayane Lais Schran Garbin

Título: Análise da resposta dinâmica de um sistema mecânico com amortecedor de massa passivo: um estudo experimental e numérico.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR/PB para a obtenção do título de Mestra em Engenharia Civil.

Aprovada em: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_.

### **Banca Examinadora**

Assinatura: \_\_\_\_\_

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogerio Novak, UTFPR/PB  
Doutor pela Instituição: Universidade Federal de Santa Catarina.

Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Fábio Rodrigo Mandello Rodrigues, UTFPR/PB  
Doutor pela Instituição: Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Giovanni Bratti, UTFPR/PB  
Doutor pela Instituição: Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Key Fonseca de Lima, PUC-PR  
Doutor pela Instituição: Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

## **AGRADECIMENTOS**

À CAPES pela concessão da bolsa de mestrado e o apoio financeiro prestado para a realização desta pesquisa.

Agradeço em especial ao orientador desse projeto, o Professor Dr. Paulo Rogerio Novak, pela paciência, competência em e conduzir essa jornada, desde o alvorecer da ideia durante os últimos anos do curso de Bacharel em Engenharia Mecânica, onde me orientou no Trabalho de Conclusão de Curso, até a síntese do processo que culminou com a presente dissertação.

Ao Professor Dr. Francisco Augusto Aparecido Gomes, por todos os sábios ensinamentos e contribuições valiosas no Exame de Qualificação e ao longo de toda a minha formação acadêmica.

Aos Professores: Dr<sup>a</sup>. Paola Regina Dal Canal, Dr. Fábio Rodrigo Mandello Rodrigues, Prof. Dr. Key Fonseca de Lima e Prof. Dr. Giovanni Bratti, pelas importantes considerações no Exame de Qualificação e na Banca de Defesa final.

Aos meus colegas e amigos de toda a vida, pelo suporte psicológico e apoio prestados em todo o percurso, bem como à minha família, por todo amor e compreensão.

*“Sua tarefa é descobrir seu trabalho,  
e então, dedicar-se a ele.”*

---

Buda



GARBIN, NAYANE L. S. **Análise da resposta dinâmica de um sistema mecânico com amortecedor de massa passivo: um estudo experimental e numérico [dissertação]**. Pato Branco, Paraná-BR. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR/PB, 2018.

## RESUMO

O controle dinâmico de vibrações é fundamental na redução de ruídos e vibração estrutural causadas por carregamentos externos, uma vez que quando a vibração é excessiva pode comprometer a integridade física da estrutura, por meio de uma falha por fadiga ou simplesmente gerar um desconforto e interferir na segurança das pessoas. Uma das formas de controle dinâmico é por meio da utilização de neutralizadores dinâmicos, os quais utilizam-se de parâmetros concentrados de massa, rigidez e amortecimento capazes de absorver a energia vibracional da estrutura principal onde são posicionados, utilizando das possíveis configurações como os neutralizadores do tipo massa e mola, visco elásticos e pêndulo, por exemplo. Esta dissertação visou a análise da resposta de um sistema mecânico reduzido à uma estrutura de dois graus de liberdade e modelado como um sistema barra e mola, tendo a dissipação da vibração com um neutralizador dinâmico pendular. A resposta do sistema foi analisada numericamente pelo modelo analítico e a implementação em Matlab das equações de movimento do sistema e foram medidos os sinais experimentais da resposta à um deslocamento inicial aleatório e à excitação harmônica externa, resultando na análise do sistema em duas situações distintas: em vibração livre e em vibração forçada. Foram verificados percentuais satisfatórios de redução da amplitude de vibração da barra utilizando o pêndulo e observou-se que tanto numérica quanto experimentalmente o pêndulo foi eficiente e amorteceu a vibração do modelo, com parâmetros de 0,121 kg de massa e um comprimento de haste de 0,041 m, apresentando a redução da amplitude de vibração na barra e o aumento da amplitude de vibração do pêndulo, para cada caso analisado, em percentuais consideráveis e satisfatórios.

**Palavras-chave:** Neutralizadores Dinâmicos; Controle dinâmico de vibração; Redução da amplitude de vibração.

GARBIN, NAYANE L. S. **Dynamic response analysis of a mechanical system with a passive tuned mass: An experimental and numerical study [dissertation]**. Pato Branco, Paraná-BR. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR/PB, 2018.

## ABSTRACT

Dynamic vibration control is fundamental in noise reduction and structural vibration caused by external loads. If the vibration is excessive it can compromise the physical integrity of the structure, through a fatigue failure or simply generate discomfort and interfere in the safety of people. One of the methods of dynamic control is through the use of dynamic neutralizers, which use concentrated parameters of mass, rigidity and damping capable of absorbing the vibrational energy of the main structure where they are positioned, using the possible configurations as the neutralizers of the type mass and spring, viscoelastic and pendulum, for example. This dissertation aimed at the analysis of the response of a mechanical system reduced to a structure of two degrees of freedom and modeled as a bar and spring system, having the dissipation of the vibration given by the use of a dynamic pendulum neutralizer. The system response was analyzed numerically by the analytical model and the Matlab implementation of the system motion equations and the experimental signals of the system response to a random initial displacement and the external harmonic excitation were measured, resulting in the analysis of the system in two situations in free vibration and forced vibration. Satisfactory percentages of reduction of bar vibration amplitude were observed using the pendulum and it was observed that both numerically and experimentally the pendulum was efficient and dampened the vibration of the model using the pendulum mass parameters of 0.121 kg and a length of with a reduction of the amplitude of vibration in the bar and the increase of the amplitude of vibration of the pendulum, in each case, in considerable and satisfactory percentages.

**Keywords:** Dynamic absorbers; Dynamic vibration control; Reduction of vibration amplitude.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>12</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>14</b>
<b>LISTA DE SIGLAS.....</b>	<b>15</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS .....</b>	<b>16</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>18</b>
1.1 Objetivo Geral .....	22
1.2 Objetivos Específicos .....	22
<b>2 REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO .....</b>	<b>23</b>
<b>3 FUNDAMETAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>41</b>
3.1 Otimização e seleção dos parâmetros.....	41
3.2 Métodos e equações de movimento.....	44
<b>4 MODELAGEM MATEMÁTICA .....</b>	<b>48</b>
4.1 Modelo Analítico: CASO 1.....	48
4.2 Modelo Analítico: CASO 2.....	52
<b>5 METODOLOGIA.....</b>	<b>59</b>
5.1 Metodologia Numérica.....	59
5.2 Metodologia Experimental.....	61
<b>6 ANÁLISE DE RESULTADOS.....</b>	<b>66</b>
6.1 Parâmetros do pêndulo.....	66
6.2 Resultados do caso 1.....	71
6.2.1 Resultados Numéricos do Caso 1.....	71
6.2.2 Resultados Experimentais do Caso 1.....	78
6.3 Resposta numérica: Caso 2.....	85
6.4 Comparação dos resultados numéricos e experimentais .....	92
6.4.1 RESULTADOS DO CASO 01.....	92
6.4.2 RESULTADOS DO CASO 2.....	96
<b>7 CONCLUSÃO.....</b>	<b>98</b>
<b>8 REFERÊNCIAS .....</b>	<b>101</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Princípio e localização do Amortecedor de Massa Sintonizado Pendular - AMSP.	30
Figura 2: Edifício John Hancock Tower, Boston – EUA.	31
Figura 3: Diagrama esquemático do AMS instalado no edifício John Hancock Tower.	31
Figura 4: Shanghai World Financial Center.	32
Figura 5: AMS instalado no Shanghai World Financial Center.	33
Figura 6: Edifício Taipei 101.	34
Figura 7: a) Amortecedor de Massa Sintonizado tipo pêndulo instalado no Edifício Taipei – representação esquemática; b) Imagem do dispositivo AMSP instalado.	35
Figura 8: Fator de amplificação da frequência de excitação ( $R$ ) com a frequência natural do sistema ( $\beta$ ).	37
Figura 9: Modelo analítico do problema de estudo dos Casos 1 e 2.	45
Figura 10: Modelo analítico do sistema do Caso 1.	49
Figura 11: Modelo analítico do sistema do Caso 1 com AMSP.	50
Figura 12: Modelo analítico do sistema do Caso 2.	52
Figura 13: Modelo analítico do sistema do Caso 2 com AMSP.	55
Figura 14: Fluxograma da solução numérica desenvolvida em Matlab.	61
Figura 15: Medição experimental do sistema do Caso 1.	62
Figura 16: Posicionamento do motor de excitação no sistema.	64
Figura 17: Variação do comprimento da haste do AMSP em relação à variação da massa.	69
Figura 18: Valores experimentais e suas respectivas medições.	70
Figura 19: Resposta no domínio do tempo do modelo em vibração livre do Caso 1.	72
Figura 20: Resposta no domínio da frequência do modelo em vibração livre do Caso 1.	72
Figura 21: Resposta no domínio do tempo do Caso 1 com AMSP em vibração livre.	73
Figura 22: Resposta no domínio da frequência do modelo em vibração livre do Caso 1 com AMSP.	74
Figura 23: Gráficos da comparação da frequência natural do Caso 1 com AMSP em vibração livre.	74
Figura 24: Resposta no domínio do tempo do Caso 1 em vibração forçada.	75
Figura 25: Resposta no domínio da frequência do Caso 1 em vibração forçada.	75
Figura 26: Resposta no domínio da frequência do Caso 1 com AMSP em vibração forçada.	76
Figura 27: Resposta no domínio da frequência do Caso 1 em vibração forçada com AMSP.	77

Figura 28: Gráfico da comparação da frequência de excitação do sistema com AMSP. ....	77
Figura 29: Montagem e medição experimental sistema do Caso 1. ....	78
Figura 30: Sinal Experimental no domínio do tempo do Caso 1 em vibração livre.....	79
Figura 31: Frequência natural experimental do sistema do Caso 1 em vibração livre.....	80
Figura 32: Resposta no domínio do tempo do Caso 1 com ASMP em vibração livre. ....	80
Figura 33: Resposta no domínio da frequência do Caso 1 com ASMP em vibração livre. ....	81
Figura 34: Bancada experimental do Caso 1 com AMSP para medição do sistema em vibração forçada. ....	82
Figura 35: Resposta Experimental no domínio do tempo do Caso 1 em vibração forçada.....	83
Figura 36: Resposta experimental no domínio da frequência do Caso 1 em vibração forçada. ....	83
Figura 37: Resposta no domínio do tempo do Caso 1 com AMSP . ....	84
Figura 38: Resposta em frequência do Caso 1 com AMSP.....	85
Figura 39: Resposta numérica no domínio do domínio do tempo do Caso 2 em vibração livre. ....	86
Figura 40: Resposta numérica no domínio da frequência do Caso 2 em vibração livre. ....	86
Figura 41: Resposta numérica no domínio do tempo do Caso 2 com AMSP em vibração livre. ....	87
Figura 42: Resposta no domínio da frequência do Caso 2 com AMSP em vibração livre. ....	88
Figura 43: Comparação das respostas no domínio da frequência do Caso 2 com AMSP em vibração livre. ....	88
Figura 44: Resposta numérica no domínio do tempo do Caso 2 em vibração forçada. ....	89
Figura 45: Resposta numérica no domínio da frequência do Caso 2 em vibração forçada.....	89
Figura 46: Resposta numérica no domínio do tempo do Caso 2 com AMSP em vibração forçada. ....	90
Figura 47: Resposta no domínio da frequência do Caso 2 com AMSP em vibração forçada. ....	91
Figura 48: Comparação das respostas no domínio da frequência para o Caso 2 em vibração forçada. ....	91

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Vantagens e Desvantagens dos diferentes tipos de Amortecedores Dinâmicos de Vibração (ADV) .....	24
Tabela 2: Valores e unidades de medida dos dados de entrada dos algoritmos do Matlab.....	57
Tabela 3: Propriedades da barra, pêndulo e mola.....	60
Tabela 4: Itens utilizados na medição experimental.....	60
Tabela 5: Massas e comprimentos de haste experimentais .....	61
Tabela 6: Parâmetros de otimização do AMSP.....	63
Tabela 7: Valores de massa do AMSP e seus respectivos comprimentos numéricos, experimentais e o percentual de diferença entre eles.....	65
Tabela 8: Valores de frequência de excitação e amplitudes medidas experimentalmente pelos Canais 1 e 2.....	68
Tabela 9: Comparação dos resultados numéricos do Caso 1 em vibração livre.....	91
Tabela 10: Análise dos resultados experimentais do Caso 1 em vibração livre.....	92
Tabela 11: Análise dos resultados numéricos do Caso 1 em vibração forçada.....	92
Tabela 12: Análise dos resultados experimentais do Caso 1 em vibração forçada.....	93
Tabela 13: Análise dos resultados numéricos do Caso 2 em vibração livre.....	94
Tabela 14: Análise dos resultados numéricos do Caso 2 em vibração forçada.....	94

## **LISTA DE SIGLAS**

- ADV - Absorvedor Dinâmico de Vibração;
- ALS - Amortecedor Líquido Sintonizado;
- ADVM – Absorvedor Dinâmico de Vibração Múltiplo;
- AMSPM- Absorvedor Dinâmico de Vibração Múltiplo Pendular;
- ADVP – Absorvedor Dinâmico de Vibração Passivo;
- ADVA – Absorvedor Dinâmico de Vibração Ativo;
- AMS- Amortecedor de Massa Sintonizado;
- AMSA - Amortecedor de Massa Semi-Ativo;
- AMSP – Amortecedor de Massa Sintonizado Pendular;
- AMSM - Amortecedor de Massa Sintonizado Múltiplo;
- AMSS- Amortecedor de Massa Sintonizado Simples;
- AMA - Amortecedores de Massa Ativos;
- NDV - Neutralizadores Dinâmicos Viscoelásticos;
- SHM – Monitoramento da Saúde Estrutural;
- FFT- Transformada Rápida de Fourier;

## LISTA DE SÍMBOLOS

$m_1$  = Massa da barra do modelo (sistema principal) [kg];

$k_1$  = Coeficiente de rigidez da mola do modelo [N/m];

$d_1$  = Coeficiente de amortecimento do modelo [N/m/s];

$y_1 = y_1(t)$  Deslocamento da massa do sistema principal [m];

$F = F(t)$  = Força externa atuando na massa  $m_1$ ;

$m_2$  = Massa do neutralizador dinâmico [kg];

$k_{eq}$  = Rigidez equivalente do ADVP [N/m];

$d_1$  = Distância do centro de giro do sistema até o centro de massa da barra [m];

$y_2(t)$  = Deslocamento do ADV [m];

$\mu$  = Coeficiente de Massa;

$L$  = Lagrangeano: Equação de Lagrange, relacionando as energias potencial e cinética;

$J$  = momento de inércia de corpo retangular;

$\gamma_{st}$  = deslocamento estático da estrutura;

$R$  = Fator de amplificação dinâmica ou resposta em frequência normalizada;

$B$  = razão de frequência forçada do sistema principal;

$\xi_a$  = razão de amortecimento do AMS;

$\alpha_{ótimo}$  = Coeficiente de Frequência Ótimo;

$\zeta_{ótimo}$  = amortecimento ótimo;

$t_d$  = período natural do pêndulo

$y_{max}$  = deslocamento máximo do sistema principal;

$y_{st}$  = deslocamento estático;

$\alpha$  = razão de frequência;

$\omega_a$  = frequência natural do AMS;

$\omega_{sp}$  = frequência natural do sistema principal ou estrutura;

$c_c$  = amortecimento crítico do AMS;

$h_s$  = Distância entre o centro de giro do sistema e o suporte do pêndulo;

$d_M$  = Distância entre o centro de giro do sistema e o posicionamento do motor na barra;

$I_1$  = Momento de inércia da barra [m<sup>4</sup>];

$I_M$  = Momento de inércia do motor [m<sup>4</sup>];



$I_s$ = Momento de inércia do suporte de massa do pêndulo [ $m^4$ ];

$I_t$ = Momento de inércia total do sistema [ $m^4$ ];

$\ddot{\theta}_1$ = Aceleração angular da barra [ $m/s^2$ ];

$\ddot{\theta}_2$ = Aceleração angular do pêndulo [ $m/s^2$ ];

$\dot{\theta}_1$ = Velocidade angular da barra [ $m/s^2$ ];

$\dot{\theta}_2$ = Velocidade angular do pêndulo [ $m/s^2$ ];

$\theta_1$ = Deslocamento angular da barra [ $m/s^2$ ];

$\theta_2$ = Deslocamento angular do pêndulo [ $m/s^2$ ];

$m_s$ = Massa do suporte [kg];

$m_M$ = Massa do motor [kg];

# 1 INTRODUÇÃO

Uma das grandes evoluções na engenharia de construção civil nas últimas décadas resultou das melhorias no desenvolvimento das propriedades dos materiais de construção, o que culminou com a possibilidade de obtenção de um melhor índice de aproveitamento das propriedades físicas dos materiais na construção de estruturas mais leves e esbeltas. Contudo, mesmo podendo haver uma economia no custo total da obra, a rigidez da estrutura se torna menor, tornando-a suscetível a maiores problemas de vibração sob ação de carregamentos dinâmicos, quando esses são em grau relevante em relação às concepções do projeto de engenharia, e que muitas vezes são responsáveis pelo colapso total da estrutura, em função de que seus efeitos podem ocasionar solicitações superiores aos da constituição estática com amplitudes de vibração superiores aos valores admissíveis.

As estruturas modernas, principalmente nas megalópoles mundiais, são obras de requintada arquitetura, cada vez mais esbeltas, flexíveis e com maiores vãos, apresentando então frequências naturais de vibração cada vez mais baixas e, quando as estruturas são muito flexíveis, as vibrações com maiores amplitudes são transmitidas às pessoas que utilizam deste espaço, causando intenso desconforto e interferindo em suas atividades cotidianas prejudicando, por exemplo, a visão e comprometendo parcialmente o movimento das mãos e pés. (HARRI, PIERSOL, 2002, p. 42.1).

Lourenco (2011, p. 01) afirma que em estruturas muito altas e estreitas a ocorrência de carregamentos dinâmicos locais geram uma amplitude alta de deslocamento no topo da estrutura que, por consequência, em uma estrutura não projetada para suportar solicitações externas extremas, apresenta menor rigidez no ponto mais alto e maior amplitude de vibração local. Consequentemente quanto maior a amplitude do deslocamento do topo maior será a tensão ao longo da extensão da estrutura.

O processo de análise numérica inicia na análise modal com a determinação dos modos de vibração e frequências naturais da estrutura. Com a análise dinâmica são determinados os valores dos deslocamentos e acelerações, os quais podem ser comparados com os limites de projeto. O problema da vibração estrutural não ocorre apenas quando a frequência de excitação se iguala com a frequência natural da estrutura, ponto de frequência no qual a mesma entra em ressonância e essa seria a principal situação a ser evitada ou prevista. Porém, quando a frequência se aproxima da frequência natural do sistema ou do local onde a excitação está ocorrendo e também são visualizados danos físicos ao material e consequentemente à estrutura.

A solução das equações que governam o comportamento dinâmico de um sistema mecânico passa, via de regra, por um problema de autovalores e autovetores, sendo esses as frequências naturais e os modos de vibração do sistema, respectivamente. O efeito combinado das características de inércia, amortecimento e rigidez resulta em uma redução da rigidez dinâmica da estrutura, tornando-a mais suscetível às excitações externas, o que consiste em algo indesejável para diversas estruturas, que então necessitam de controle de vibração.

Estima-se que um total de quinhentos mil terremotos sejam detectados anualmente e os índices de maior incidência são da Califórnia e Alasca nos Estados Unidos, El Salvador, México, Guatemala, Chile, Peru, Indonésia, Irã, Paquistão, Açores em Portugal, Turquia, Nova Zelândia, Grécia, Itália, Índia e Japão. A simulação das amplitudes de vibração de uma estrutura submetida a eventos sísmicos pode-se proceder de duas maneiras distintas e principais: a primeira é recorrer a acelerogramas de sismos que ocorreram nas proximidades geográficas de implantação da estrutura, e a segunda opção surge devido a não haver registros de sismos em diversas regiões, o que leva à simulação de um registro de excitação sísmica, considerando as características do solo do local onde a estrutura será implantada. (ROSSATO; MIGUEL, 2016, p. 02-04).

O controle estrutural é uma alternativa atraente para um melhor desempenho das estruturas de engenharia sujeitas a cargas sísmicas e de vento, tremores terrestres, movimentação excessiva de pessoas, veículos e equipamentos desbalanceados em funcionamento, por promover uma alteração nas propriedades de rigidez e amortecimento da estrutura, seja pela adição de dispositivos externos ou pela ação de forças externas reativas.

Borges (2008, p. 01) cita como aplicações práticas dos dispositivos de absorção e controle dinâmico os estabilizadores de navios, mecanismos de absorção de vibração em linhas de transmissão de potência, sistemas de redução de vibração em estruturas rígidas contínuas de grande porte, como torres de antenas de transmissão de ondas de rádio e os dispositivos de proteção de construções civis contra abalos sísmicos.

A teoria do controle dinâmico é dividida em clássica e moderna. A teoria clássica consiste na análise das entradas e saídas de forças a fim de determinar a função transferência dos sistemas, por meio de transformadas de Laplace. Por outro lado, a teoria moderna utiliza a representação no domínio do tempo e uma representação matemática espacial, a qual considera o estado do sistema com os dados de entrada e saída em forma de equações diferenciais de primeira ordem. (PFISTER, 2012, p. 03).

Hoje existem várias metodologias de controle de vibrações em estruturas e um tipo de controle estrutural muito utilizado é o Absorvedor Dinâmico de Vibração (ADV), o qual tem-se revelado robusto, confiável e econômico e a partir de suas propriedades de massa, rigidez e amortecimento, é responsável por fazer com que o efeito realizado pelas forças externas distribuídas na estrutura principal seja reduzido.

Segundo Avila e Gonçalves (2009), os ADV são posicionados estrategicamente no topo do edifício, uma vez que dessa forma a eficiência do dispositivo é maximizada. Mesmo um carregamento harmônico aplicado à estrutura pode tornar-se insignificante quando o absorvedor está relacionado, ou seja, sintonizado com a frequência de excitação da estrutura. A utilização de um único absorvedor dinâmico tem seus benefícios superados quando dispõe de múltiplos dispositivos neutralizadores, tornando-o um sistema mais robusto e eficaz.

Os dispositivos de controle de vibração são adicionados na estrutura principal e auxiliam na dissipação e absorção da energia em excesso, a qual deformaria plasticamente o edifício. A expansão dos sistemas de controle em aplicações na construção civil tornou o processo mais complexo, uma vez que um edifício muito alto possui inúmeros graus de liberdade e, com isso, muitos componentes de frequência, o que difere dos sistemas mecânicos. A partir da década de sessenta do século XX surgiram as primeiras aplicações de Amortecedor de Massa sintonizada (AMS) em estruturas da construção civil e ampliou-se o estudo e utilização dos amortecedores secundários devido à necessidade da utilização de uma alternativa em áreas de grande incidência de cargas sísmicas e de vento. (CARNEIRO, 2004, p. 07).

Um sistema de controle de vibrações tem por objetivo a redução da amplitude de vibração através da instalação de dispositivos à estrutura. Para realizar o controle dessas vibrações, existem diversas opções como a alteração da massa da estrutura e da rigidez, a qual geralmente é feita em fase de projeto, até a implantação de dispositivos externos como, por exemplo, sistemas ativos, passivos, semi-ativos e híbridos. (ROSSATO, MIGUEL, 2016).

Durante os abalos sísmicos a energia da movimentação excessiva do solo é absorvida pelo edifício e dissipada ao longo de toda sua extensão, sendo transformada em energia potencial e cinética, podendo ser absorvida ou dissipada em forma de energia térmica. Quando em situações de abalos sísmicos com elevado grau na escala Richter, uma grande parte dessa energia transmitida para as construções será responsável por causar danos estruturais nas mesmas. Geralmente, uma das medidas mais comuns a serem tomadas para evitar danos estruturais é o acréscimo de rigidez na estrutura. Todavia este método não é sempre efetivo,

principalmente em ambientes que promovam a amplificação das forças sísmicas e ressonância. (RAS, 2014, p. 01).

No presente trabalho foi estudado numérica e experimentalmente um sistema representado por uma estrutura massa-mola utilizando de uma aproximação linear para que seja possível a modelagem e a posterior obtenção da resposta aproximada do sistema, com a finalidade de verificar a aplicabilidade do Absorvedor de Massa Sintonizado Pendular (AMSP) como dispositivo secundário de amortecimento do modelo. Para isso, é de fundamental importância o conhecimento de tópicos relacionados com o assunto, como por exemplo: ADV, AMSP, sistemas lineares e não lineares, otimização e seleção de parâmetros de amortecimento, entre outros. Esses tópicos estão apresentados no Capítulo 2.

No Capítulo 3 constam os equacionamentos utilizados como referências de cálculo, formando a base teórica utilizada na modelagem matemática presente no Capítulo 4. No desenvolvimento analítico do Capítulo 4 é apresentada a análise do modelo denominado Caso 1 em duas situações: em vibração livre e vibração forçada, contendo ambas as equações de movimento do modelo sem o pêndulo e do sistema com o pêndulo para ambas as situações analisadas, onde o pêndulo foi modelado como pêndulo rígido.

Além do Caso 1, foi analisado o modelo do Caso 2, que consiste em um sistema barra e mola com a utilização de um pêndulo simples para o amortecimento da estrutura, a qual também foi analisada em vibração livre e vibração forçada. A diferença significativa entre os modelos é o tipo de pêndulo utilizado: no Caso 1 foi um pêndulo rígido, modelado como um sistema massa e rigidez equivalente, e no segundo, um pêndulo simples. Por esse motivo, o Caso 1 utilizou o Método de Newton para a obtenção das equações de movimento lineares e o Caso 2 as equações de Lagrange e o Método de Energia, considerando as energias cinética e potencial envolvidas em cada componente do sistema.

O problema de estudo consiste na análise dinâmica do modelo barra e mola do sistema principal do Caso 1, sendo que a análise em vibração livre consiste na determinação da resposta numérica e experimental do comportamento do sistema com relação à frequência natural da barra, relacionando-a com os efeitos gerados pela utilização do pêndulo. A diferença da análise em vibração livre para vibração forçada é a presença da excitação externa, cujas especificações constam no Capítulo 5, a qual será neutralizada com a utilização do pêndulo no sistema. A solução numérica foi obtida utilizando o programa Matlab e o protótipo do modelo experimental montado na Bancada de Vibrações do Laboratório de Dinâmica da Universidade

Tecnológica Federal do Paraná, Campus de Pato Branco (UTFPR-PB), e ambos os processos se encontram descritos no Capítulo 5, na metodologia numérica e experimental.

Os resultados obtidos estão apresentados no Capítulo 6, juntamente com algumas imagens dos sistemas experimentais, os gráficos da resposta no domínio do tempo e da frequência e os parâmetros analisados. Na sequência segue a conclusão e referências bibliográficas nos Capítulos 7 e 8, respectivamente.

## **1.1 OBJETIVO GERAL**

Analisar o comportamento dinâmico de uma estrutura mecânica modelada como um sistema barra e mola, com a utilização de um Amortecedor de Massa Sintonizado Pendular (AMSP).

## **1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

O objetivo geral será obtido por meio dos seguintes objetivos específicos:

- Avaliar numericamente os Casos 1 e 2;
- Avaliar experimentalmente o comportamento do modelo do Caso 1;
- Comparar os resultados numéricos e experimentais do Caso 1 e analisar os resultados numéricos do Caso 2;
- Formar um parecer conclusivo sobre a utilização do AMSP em cada situação, apresentando um percentual de redução de vibração nos sistemas com amortecimento secundário.

## 2 REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

O modelo dinâmico requer a combinação de resistência e flexibilidade para que a estrutura responda às solicitações dentro da faixa de deformação elástica para casos de terremotos de baixa intensidade. Quando for o caso de um terremoto de moderada a alta intensidade, a estrutura depende diretamente da flexibilidade para prevenir os danos permanentes na mesma e conseqüentemente prevenir o colapso da estrutura e garantir a sua segurança. (SAAED *et al.*, 2015, p. 919).

Rossato e Miguel (2016, p. 02) afirmam que sistemas ativos de controle são utilizados quando a estrutura necessita de adaptação à diferentes tipos de frequências de excitação. De acordo com a ação à qual a estrutura está submetida, o sistema de controle efetua o processamento sensorial e a verificação instantânea da melhor força e amortecimento para o controle ideal dessa ação. Porém, os sistemas ativos necessitam de monitoramento, grande quantidade de energia e controle externo permanente. Sistemas de controle passivos são dispositivos que não necessitam de energia externa para um bom funcionamento e são dimensionados para um tipo de ação que utiliza da própria movimentação da estrutura para dissipar a energia devida à ação dinâmica e, dessa forma são vantajosos em relação aos sistemas ativos por razões de custo, instalação, manutenção e facilidade de controle. Os sistemas semi-ativos, por sua vez, são uma solução intermediária entre os sistemas de controle ativos e passivos, não necessitando de fornecimento de energia externa ao sistema, devido a sua capacidade de ajustar-se frente às respostas da estrutura. Uma combinação entre sistema ativo e passivo são os dispositivos híbridos, os quais são mais eficientes que os ativos e mais econômicos que os passivos.

Conforme consta em Avila, Perroni e Brito (2006), a adição de um ADV tem como objetivo reduzir a amplitude do pico de ressonância para seu mais baixo valor possível, a fim de que amplificações menores ao longo de uma faixa de frequência próxima à de ressonância possam ser atingidas. Classificam os absorsores dinâmicos de vibrações em: passivos (onde a magnitude das forças de controle é dependente das propriedades do próprio sistema auxiliar); adaptativos (que são aqueles cujos parâmetros físicos de massa, rigidez e amortecimento podem ser ajustados instantaneamente); híbridos (que dispõem de um elemento ativo, isto é, um atuador disposto paralelamente aos elementos passivos) e semi-ativos (onde o dispositivo é considerado como um sistema passivo controlável por não precisar de grandes quantidades de energia como os ativos e possuem propriedades otimizadas como os passivos).

Por consistir em um sistema de funcionamento complexo, os dispositivos ativos são mais caros que os dispositivos passivos, e esse é um dos principais fatores que limitam a sua utilização. Sistemas complexos requerem manutenção especializada e periódica, dependem de fontes de energia externa, precisam de um espaço geográfico considerável, fatores esses que restringem a sua utilização, porém em contrapartida os tornam extremamente eficientes. Por necessitarem de alimentação externa de energia, em situações de emergência não apresentam a mesma confiabilidade e segurança de funcionamento quanto o sistema passivo, que por ser mais simples, é mais eficaz. (AVILA, 2002, p. 37).

Uma das classificações quanto ao tipo do ADV é a de Amortecedor de Massa Ativo (AMA), dispositivo esse que possui uma força de controle aplicada sobre o amortecedor por intermédio de um atuador que recebe a informação da excitação através dos sensores em contato direto com a estrutura, avaliando em tempo real e instantaneamente a magnitude de força de reação necessária a ser aplicada em resposta, melhorando e garantindo o bom desempenho do amortecedor. (GÓMEZ, 2007, p. 05).

Bueno (2007, p. 25) constata que o sucesso e a efetividade das técnicas de controle ativo são função de diversos fatores como, por exemplo: o posicionamento estratégico dos sensores e atuadores na estrutura, o tipo do controlador selecionado, o parâmetro a ser controlado e o tipo de sensor e atuador usados na medição dos parâmetros. Afirma ainda que grande parte da evolução científica na prática e utilização desse mecanismo deve-se à evolução dos algoritmos que começaram a ganhar soluções a partir da década de noventa.

Sistemas de controle semi-ativo não adicionam energia ao sistema estrutural e possuem propriedades controladas por parâmetros otimizados que reduzem a resposta do sistema. Possuem a vantagem da adaptabilidade dos controladores ativos sem demandar grandes quantidades de energia, podendo, em muitas aplicações, operar com baterias de emergência no caso de falta de energia. Em suma, são uma espécie de dispositivos passivos controláveis. (AVILA, 2002, p. 41).

Uma forma de controle alternativa ao controle ativo e passivo é uma combinação desses dois tipos, gerando então o controle híbrido. A vantagem está no fato deste sistema exigir forças de magnitudes bem menores nos atuadores, o que gera uma considerável redução no custo quando comparado com o custo do controle ativo, além de um desempenho mais eficiente comparado ao sistema passivo dado exclusivamente pela ampliação da faixa de frequência de funcionamento. (AVILA, 2002, p. 40).



Liu e Shao (2001, p. 4983-4984) desenvolveram um estudo de aplicação de ADV combinando os efeitos de mola e amortecimento aplicado nas vias férreas rápidas da China e, para absorver as vibrações dos trilhos do trem e dissipar essa energia, foram utilizadas camadas de borracha junto às chapas de aço do qual os trilhos são constituídos. Ao final dos testes dinâmicos laboratoriais foram comparados os resultados do trilho com e sem as camadas de borracha e verificou-se uma efetividade considerável na redução de vibrações do sistema principal. O máximo deslocamento vertical e a aceleração do trilho, onde foi utilizada uma camada do absorvedor de vibração dinâmico, foram reduzidos em cerca de 68% enquanto que com três camadas do absorvedor foi reduzido em 72%. O deslocamento vertical máximo e a aceleração da pista em que um único ADV é instalado foi reduzido em cerca de 65%; o deslocamento vertical máximo e a aceleração da pista onde foi aplicado um ADV amortecido com três camadas obteve uma redução de cerca de 70%. Portanto com um sistema simples de amortecimento, apenas acrescentando uma camada de borracha ao material utilizado nos trilhos do trem, já se observava uma redução considerável dos efeitos indesejáveis de ruídos e vibração excessiva.

Com o desenvolvimento de inovações tecnológicas computacionais foi possibilitada a utilização de dispositivos especiais de amortecimento que vêm apresentando efeito imediato de acréscimo de 20% a 30% no coeficiente de amortecimento crítico, o qual geralmente apresenta um valor próximo a 5% em metais estruturais, reduzindo simultaneamente as forças e tensões resultantes dos terremotos dissipando assim a energia do sistema por meio da absorção dos esforços externos sem comprometer a estrutura e garantindo a segurança das pessoas. (RAS, 2014, p. 02).

Os neutralizadores dinâmicos não lineares foram classificados em três grupos: Neutralizadores de Rigidez não-linear, Neutralizadores de Rigidez e de Amortecimento não linear e Absorvedor com Amortecimento não linear. De acordo com as diferentes propriedades de rigidez e amortecimento nos elementos, podem ser divididos em duas categorias: amortecedores lineares, que seriam os dispositivos dissipativos lineares de energia e os dispositivos não lineares de dissipação de energia, conhecidos como amortecedores não lineares. Dentre os lineares, encontra-se o AMS, o qual é um dos mais utilizados juntamente com o ALS, sendo que ambos são extremamente sensíveis as variações de excitação externa, uma vez que são acoplados à frequência natural da estrutura e têm sua eficiência reduzida quando a frequência natural da solicitação supera a faixa de frequência de trabalho do dispositivo. Por meio de estudo experimental e numérico, o modelo ótimo é simplificado com

o controle crítico dos parâmetros que influenciam em larga escala a eficiência da redução da vibração dos mesmos, como a massa auxiliar, amortecimento e rigidez não linear. Para controlar o dispositivo não linear, é proposto a utilização de um dispositivo semi-ativo no lugar de um passivo, preferindo assim o controle instantâneo da resposta da estrutura de acordo com a variação da força de excitação e o ajuste contínuo das características do dispositivo. (LU, *et al*, 2018).

Segundo Carneiro (2004, p. 06), o objetivo do acoplamento de um AMS em uma estrutura é o de reduzir a dissipação de energia nos elementos estruturais sob a ação constante ou não, de cargas dinâmicas pela transferência parcial desta energia ao neutralizador.

Avila (2002) afirma que no Absorvedor Dinâmico de Vibração Passivo (ADVP) a magnitude das forças de controle depende de suas propriedades de massa, rigidez e amortecimento que são, respectivamente, os parâmetros de inércia, amortecimento e rigidez e atuam na sintonização de sua frequência natural à frequência de excitação harmônica, cujo valor é admitido como fixo e geralmente é o primeiro modo de vibração da estrutura. Os ADVP destacam-se dos demais por não necessitarem de energia e não causarem instabilidade, sendo considerados dispositivos simples e confiáveis. Entretanto, há limitações quanto ao uso dessa tecnologia, já que são projetados de forma a funcionar eficientemente dentro de uma determinada e restrita faixa de frequência. Caso a estrutura seja excitada fora da faixa de frequência especificada pelo fabricante do dispositivo, o controle reduz sua eficiência, sendo esse considerado como um dos principais pontos negativos da utilização do ADVP quando comparado ao ativo, o qual dispõe de um controle instantâneo e sensorial de adaptação à frequência de excitação externa atuante.

Marra (2007, p. 20) cita a existência de duas formas de atuação dos dispositivos passivos: uma sobre a excitação e outra sobre o sistema. Na primeira o intuito é o de reduzir a amplitude de excitação, como acontece no balanceamento, ou apenas obter uma alteração do seu aspecto, de sua composição harmônica. Quanto a atuação sobre o sistema recorre-se à alteração de rigidez, massa, introdução de amortecimento, dessintonização, isolamento e neutralização.

Avila (2002, p. 34) comparou os sistemas de controle passivo aos sistemas de controle ativo e verificou que os passivos apresentam uma série de vantagens em sua aplicação. Os ADV passivos são estruturas simples e fáceis de serem aplicadas e, por não requererem uso de alta tecnologia, não necessitam de algoritmos complexos para determinação do efeito de controle e sistemas de geração de forças de controle, como na implementação do controle ativo. Em vez

disso, recaem em soluções estruturais convencionais e também, não necessitam de um sistema de manutenção permanente com equipe especializada. Possuem eficiência e confiabilidade comprovada, além de serem independentes de fontes externas de energia e tendo sua eficiência comprovada sob o efeito de fortes terremotos em um grande número de casos estudados. Entretanto, a maior das limitações no uso desta tecnologia é a faixa de frequência na qual os dispositivos trabalham. Se a estrutura projetada com controle passivo for excitada fora da faixa de frequência de projeto do mesmo, esse tipo de controle tem a eficiência reduzida.

A Tabela 1 mostra as principais vantagens e desvantagens dos dispositivos passivos, ativos, híbridos, e semi-ativos, possibilitando e facilitando a comparação entre os mesmos.

**Tabela 1: Vantagens e Desvantagens dos diferentes tipos de Amortecedores Dinâmicos de Vibração (ADV).**

	<b>Ativos</b>	<b>Passivos</b>	<b>Semi-ativos</b>	<b>Híbridos</b>
<b>Vantagens</b>	Controle instantâneo da força aplicada; Adaptação às diferentes variações de frequência.	Baixo custo; Simples funcionamento e instalação; Não necessita de fontes externas de energia; Maior confiabilidade na falta de energia elétrica.	Não necessitam de grandes quantidades de energia para funcionamento, como os passivos; Adaptativos como os dispositivos ativos; Propriedades do dispositivo otimizadas.	Confiabilidade no caso de falta de energia; Redução do custo; Forças de magnitudes menores nos atuadores comparando com o ativo. Faixa de frequência de funcionamento maior que do passivo.
<b>Desvantagens</b>	Custo elevado; Necessitam de muita energia; Ocupam maiores espaços na estrutura principal.	Faixa de frequência de trabalho restrita; Eficiência reduzida quando trabalhar fora da faixa de frequência do dispositivo.	Dispositivos passivos controláveis.	Supre as principais desvantagens do dispositivo passivo e ativo.

Fonte: Autora, 2018.

Colherinhas e Morais (2016) implementaram um controle estrutural do tipo ADV com massa ajustada, o qual é um dispositivo de controle passivo, visando a redução da resposta vibracional e a criação de uma metodologia para auxiliar projetos futuros de turbinas eólicas com a seleção de uma configuração de pêndulo ótima, minimizando assim os picos de frequência. Iniciando pela análise modal completa da torre, compreendeu-se o comportamento dinâmico da mesma com relação às frequências de ressonância e suas formas modais foram

reduzidas a um modelo de dois graus de liberdade. Na sequência foram definidas as variáveis de rigidez e amortecimento, considerando que o amortecimento influi apenas na amplitude da curva de resposta à excitação na torre, sendo desconsiderado esse como um fator de decisão e sim de seleção arbitrária. Para valores baixos de rigidez a amplitude de resposta é baixa, então a seleção segue esse indicativo como principal direcionamento. Determinados os parâmetros modais da estrutura, utilizando das configurações de pêndulo previamente determinadas, é aplicado um fator de correção na aproximação analítica da curva e a comparação dos dois sistemas resulta no índice de absorção do sistema analisado. Os resultados esperados foram obtidos com um erro máximo de 1,11% entre o modelo de elementos finitos e o modelo de dois graus de liberdade.

Marra (2007, p. 20) aponta a constituição como sendo uma das grandes vantagens do tipo passivo de controle. Tal afirmação consta no seguinte trecho:

Sua ação é consequência da interação mecânica natural de componentes físicos. Isso restringe bastante a possibilidade de falhas, pois são mínimas as margens para variações comportamentais desses componentes, quando se trabalha em ambientes estáveis. Essa vantagem implica, naturalmente, uma limitação: a reduzida flexibilidade quando da ocorrência ou necessidade de alterações. Há ainda que se apontar que, via de regra, soluções de controle passivo são de baixo custo. (MARRA, 2007, p. 20).

Dentro do sistema de controle passivo encontram-se os AMS, cujas pesquisas iniciais surgiram no século XX e eram limitadas à aplicação em sistemas de engenharia mecânica, uma vez que a principal característica do dispositivo é a de atuar apenas na frequência natural da máquina. Estes são os dispositivos de controle mais utilizados na prática, pois são estruturados em função de uma única frequência natural da estrutura principal e são responsáveis pela redução das vibrações para qualquer carregamento que possua essa frequência. Contudo, o absorvedor pode apresentar o efeito contrário, amplificando a resposta, dependendo da estrutura, localização da mesma e da frequência de atuação. (GÓMEZ, 2007, p. 04).

Quanto ao posicionamento do dispositivo passivo, de acordo com Maurer (2011, p. 04), este deve ser posicionado no local de maior vibração da estrutura garantindo assim a maior eficiência com o menor esforço possível, uma vez que para os parâmetros fixos de massa, rigidez e amortecimento do sistema principal existe um conjunto ideal de massa, rigidez e amortecimento do absorvedor secundário que será definido para àquelas configurações do sistema principal.

Uma vez modelado analiticamente o dispositivo passivo, é feita a análise geral do sistema sob a ação de carregamentos dinâmicos. Os dispositivos de controle podem somente ser sintonizados a uma única frequência estrutural. Quando o primeiro modo de vibração

domina a resposta de um sistema com muitos graus de liberdade, é esperado que o TMD seja efetivo. (CONSTANTINOU; SOONG; DARGUSH, 1998, p. 167).

Ao longo da segunda metade do século XX e da primeira década do século XXI, foram utilizados absorvedores secundários em diversos projetos de engenharia, assim como em situações emergenciais temporárias. Dentre as aplicações, algumas destacam-se por diversos motivos distintos: por seu modelo arrojado, funcionalidade, custos expansivos, dentre outras inúmeras características. Os registros das primeiras aplicações notórias em construção civil constam a partir da segunda metade do século XX, de acordo com os registros de Oliveira (2012, p. 16-17), iniciando no Canadá, com a aplicação de um Amortecedor de Massa Passivo em uma edificação de 553 m de altura, denominada Tower TV Antena, no ano de 1973.

A principal utilização dos AMS é na prevenção do desconforto sentido pelas pessoas que diariamente estão no local e, quando necessário, aumentar a vida em fadiga do sistema. Quando o AMS for posicionado próximo ao modo de vibração na estrutura principal, o dispositivo irá vibrar em ressonância fora de fase em relação à estrutura primária, quando excitado na frequência natural, resultando em dissipação em energia térmica. A seleção dos parâmetros do AMS, considerada como a sintonização entre os sistemas, consiste no ajuste da frequência natural de vibração do amortecedor com a frequência natural selecionada da estrutura. (LOURENCO, 2011, p. 06).

As limitações dos absorsores dinâmicos de vibração para aplicações sísmicas são os elevados níveis de amortecimento requeridos e a dificuldade de controle de elevados modos de resposta. Com o acréscimo de amortecimento do AMS em uma estrutura sem a presença do amortecimento estrutural, a resposta à amplitude é infinita a duas frequências de ressonância resultantes da combinação de estrutura primária com o absorvedor acoplado. Quando o amortecimento do AMS se torna infinito, virtualmente ocorre o efeito de soma das massas do sistema resultando em um sistema com um grau de liberdade e massa resultante da soma consequentemente gerando uma amplitude infinita na ressonância. Contudo, deve existir um valor entre estes extremos infinitos para o qual os picos de frequência sejam mínimos. (CONSTANTINOU; SOONG; DARGUSH, 1998, p. 102-106).

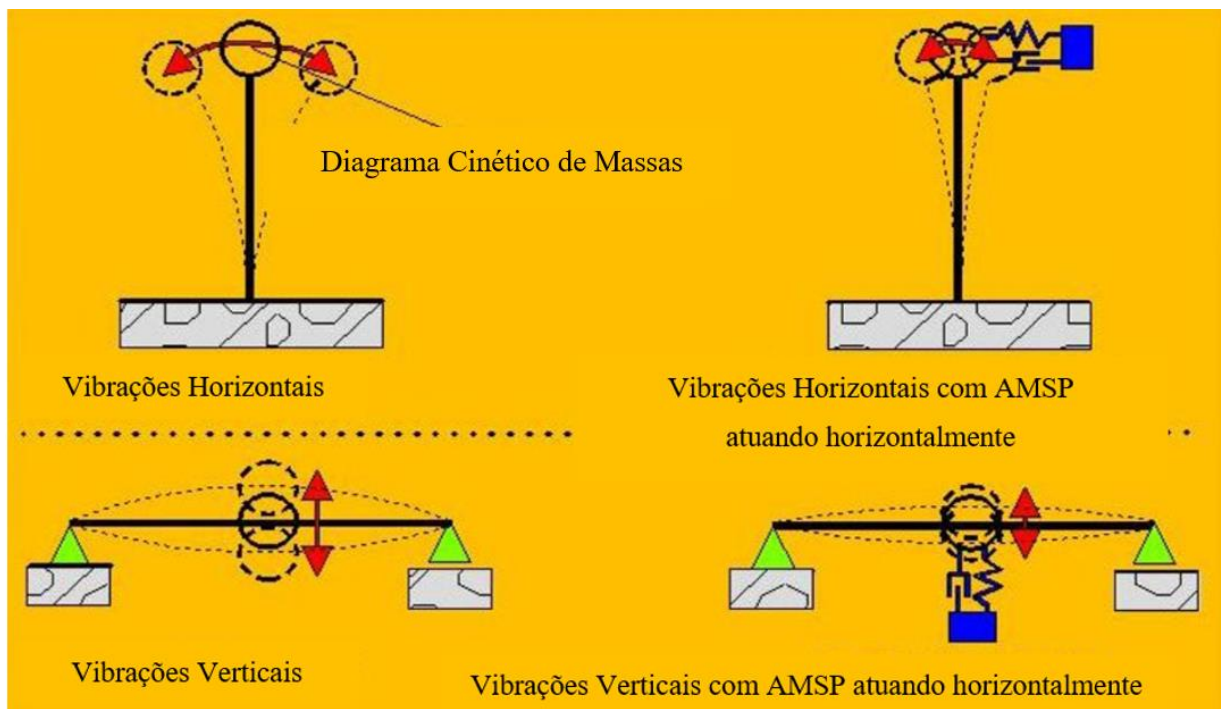
Um único AMS é mais sensível às variações de frequência na estrutura ou até mesmo na razão de absorção considerada no projeto. Com o passar do tempo e o avanço dos estudos científicos, observou-se que as limitações do controle passivo são minimizadas quando são dispostas mais que uma unidade de AMS na estrutura, cada uma sintonizada em uma determinada frequência de vibração, referente ao local na estrutura em que está localizada e

suas características físicas e propriedades modais como fator de amortecimento e frequência natural. Este método dinâmico de controle mostra-se mais eficiente que o AMS simples, uma vez que é responsável pelo controle e proteção contra cargas aleatórias de vento e abalos sísmicos. (CARNEIRO, 2004, p. 12-19).

Avila e Gonçalves (2009, p. 81) afirmam que a conexão entre as massas, no caso de um Absorvedor Dinâmico de Vibração Múltiplo (ADVM), tem uma influência considerável no desempenho do sistema, culminando com a flexibilidade de modelos possíveis na hora de disporem de grandes ou pequenas quantidades de massa no topo de qualquer estrutura, as quais ocupam um espaço considerável e que deve contar nos parâmetros de projeto da estrutura.

A Figura 1 apresenta os princípios de vibração vertical e horizontal, simulando o posicionamento dos amortecedores nos pontos de maior vibração na estrutura, para que seja utilizada a maior eficiência possível com o menor esforço. Partindo do diagrama cinético de massas na posição horizontal dada na Figura 1, uma vez aplicado um deslocamento inicial a estrutura inicia seu movimento estando agindo a força da gravidade sob a massa, a amplitude de movimento varia proporcionalmente ao deslocamento aplicado. Utilizando um AMSP atuando horizontalmente sobre a massa, a amplitude de movimento é reduzida e limitada dentro de uma faixa de segurança, variando a direção de atuação nos sistemas horizontal e vertical, de acordo com a direção e sentido da movimentação.

**Figura 1: Princípio e localização do Amortecedor de Massa Sintonizado Pendular - AMSP.**



Fonte: Maurer, 2011, p. 04. (Adaptada).

Um dos primeiros dispositivos de controle dinâmico aplicados em edifícios altos foi no John Hancock Tower, em Boston nos Estados Unidos da América (EUA), onde foram adicionados dois absorvedores com peso de 2.700 kN no sexagésimo pavimento com a função de diminuir a resposta do edifício devido a fortes rajadas de vento. Esse sistema apresentou um custo de aproximadamente 3 milhões de dólares tendo como objetivo reduzir os movimentos laterais da torre em até 40%, (OLIVEIRA, 2012, p. 14). A Figura 2 é uma fotografia da estrutura, localizada nos EUA.

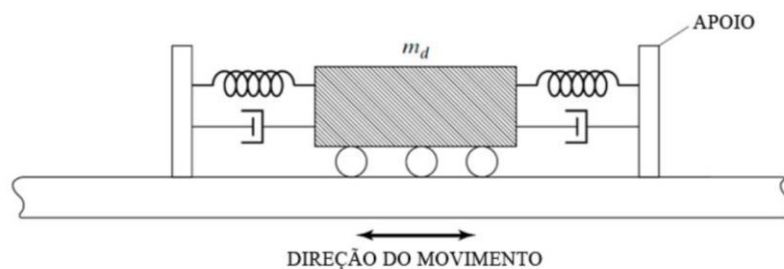
**Figura 2: Edifício John Hancock Tower, Boston – EUA.**



Fonte: Oliveira, 2012, p. 14.

Da Figura 3, percebe-se que o dispositivo de absorção conta com a massa representada como ( $m_d$ ), duas molas e dois amortecedores apoiados nas barras laterais e na base da estrutura. Quando a base se movimenta o absorvedor restringe este movimento dentro de um limite aceitável, que é o objetivo da aplicação, reduzindo assim a movimentação e deslocamento excessivos da estrutura.

**Figura 3: Diagrama esquemático do AMS instalado no edifício John Hancock Tower.**



Fonte: Oliveira, 2012, p. 14.

Um projeto do escritório de arquitetura norte-americano Kohn Peterson Fox Associates, o SWFC (Shanghai World Financial Center), com 101 pavimentos e quase meio quilômetro de altura, localizado em Xangai, sul da China, também possui no topo da construção um sistema neutralizador dinâmico do tipo massas ajustáveis responsável pela redução das oscilações causadas pela ação do vento, que garante o conforto dos frequentadores do arranha-céu. (OLIVEIRA, 2012, p.14). A Figura 4 é a imagem do edifício SWFC.

**Figura 4: Shanghai World Financial Center.**



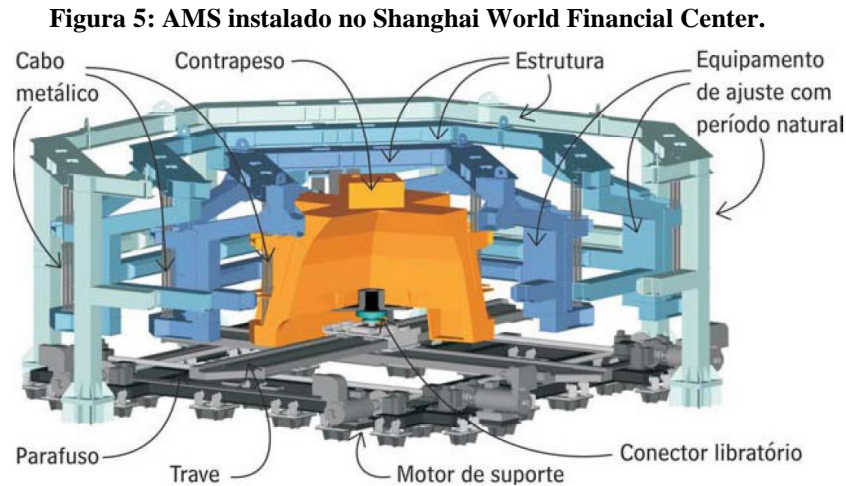
**Fonte: Oliveira, 2012, p. 14.**

Fabricados pela Mitsubishi Heavy Industry, os dois amortecedores trabalham em conjunto para limitar o movimento oscilatório da torre enquanto os contrapesos se movimentam em oposição aos deslocamentos gerados pelos ventos fortes, detectados eletronicamente, localizados no centro de cada amortecedor, trabalham num período natural igual ao do prédio e podem ser movimentados em todas as direções, sendo controlados por um motor localizado junto ao equipamento. Projetados para minimizar a oscilação da estrutura, a instalação dos amortecedores de massa sintonizados no topo do edifício, promovem a redução de até 40% das acelerações horizontais provocadas por um vento intenso. Possuindo 9 m de largura por 9 m de comprimento e 4 m de altura, cada amortecedor pesa 150 toneladas. (OLIVEIRA, 2012, p.15).

A Figura 5 contém a representação do neutralizador utilizado no edifício Shangai, considerando os cabos metálicos de sustentação, a massa do pêndulo trabalhando como



contrapeso da estrutura do arranha-céu, as estruturas de fixação e todo sistema de fixação e apoio do mesmo.



Fonte: Oliveira, 2012, p. 15.

Avila e Pereira (2011) determinaram numericamente os cinco primeiros modos de vibração da estrutura utilizando o software Ansys, e a partir dos dados de frequência obtidos foram modelados o carregamento harmônico e as propriedades do AMSP. Verificou-se que o AMSP sintonizado no primeiro modo de vibração da torre reduz consideravelmente as respostas além de reduzir levemente ou até mesmo amplificar as respostas dos modos mais altos de vibração. Observou-se ainda que um único dispositivo é mais sensível às discrepâncias na frequência natural da torre e na taxa de amortecimento considerada no projeto.

Uma turbina eólica foi modelada com um dispositivo passivo de amortecimento AMSP, buscando a otimização dos parâmetros de rigidez, amortecimento, comprimento da haste do pêndulo e coeficiente de massa, instalado no topo da turbina. Analisada como um sistema discreto de múltiplos graus de liberdade e partindo da aproximação por elementos finitos e analisando a solução do sistema em vibração livre são obtidas as frequências naturais relacionadas aos modos de vibração da estrutura. (COLHEIRINHAS, *et. al.*, 2017).

Potîrniche e Căpăţână (2016) desenvolveram uma análise teórica com validação experimental de um dispositivo AMSP, com restrição de junta com uma mola torcional que restringe o movimento do pêndulo. Notou-se que o AMSP, inicialmente implementado para reduzir a viração dinâmica estrutural, dependendo das condições da natureza da excitação e os valores dos parâmetros otimizados pode vir a amplificar a resposta dinâmica. Com isso, viu-se a necessidade de analisar juntamente com a implantação do dispositivo, o comportamento e evolução do tempo e spectral dos componentes envolvidos no sistema, a fim de identificar os

riscos das ressonâncias na estrutura com resultados equivocados na evolução dinâmica de todo o conjunto.

O amortecedor localizado no Edifício Taipei 101 é um exemplo de utilização do ADVP, que possui 101 andares acima do solo e 5 subterrâneos e é projetado para resistir a tufões e tremores oriundos de terremotos que são frequentes na região. Consiste em um AMSP de aço pesando 660 toneladas a um custo de 4 milhões de dólares. Suspenso do nonagésimo segundo para o octogésimo oitavo pavimento, o pêndulo oscila para amortecer os movimentos do edifício causados por variáveis ambientais aleatórias. A esfera do pêndulo consiste de 41 placas de aço circulares com 125 mm de espessura, soldadas formando juntas uma esfera de 5,5 m de diâmetro. (OLIVEIRA, 2012, p. 16). A Figura 6 é uma fotografia do Edifício Taipei.

**Figura 6: Edifício Taipei 101.**



**Fonte: Oliveira, 2012, p. 16.**

A estabilidade do projeto ficou evidente durante a construção, quando, em 31 de março de 2002, um tremor de 6,8 graus na escala Richter abalou o Taipei. O tremor foi forte o suficiente para derrubar dois guindastes que estavam posicionados sob o edifício, cinco pessoas morreram no acidente, mas uma inspeção mostrou nenhum dano estrutural à edificação, sendo então retomada novamente. (OLIVEIRA, 2012, p. 16). Na Figura 7 (a) é apresentada a representação esquemática do local de instalação e na Figura 7 (b) é apresentado o AMS pendular instalado na estrutura.

**Figura 7: a) Amortecedor de Massa Sintonizado tipo pêndulo instalado no Edifício Taipei – representação esquemática; b) Imagem do dispositivo AMSP instalado.**



**Fonte: Oliveira, 2012, p. 16.**

Uma aplicação de um sistema AMSP está localizada em Sydney, na Austrália, datada de 1980, na famosa Torre de Sydney, com uma massa de 220 toneladas. Constam nos registros históricos ainda a aplicação de sistemas secundários de amortecimento de menores escalas, a exemplo, com 1,5 ton até 340 ton, a exemplo daquele a aplicação na Edificação da Torre de Resfriamento em Budapest, em Nornberg, Alemanha, em 1982, e deste em Yakohama, Japão, na torre Landmark de 296 m de altura, um sistema de AMSPM, com dois exemplares, datada de 1993. (OLIVEIRA, 2012, p. 16-17).

O sistema convencional de neutralizadores de massa e mola requer uma especificação prévia de projeto, uma vez que carecem de um espaço considerável na estrutura e possuem em média grande massa e por isso devem estar contidos na arquitetura de projeto, o que pode vir a ser um problema arquitetônico. No contexto de AMS existe a geometria alternativa do absorvor pendular, onde um pêndulo é preso na estrutura e quando a mesma se movimenta o dispositivo é excitado ocorrendo a transferência de energia entre os dois sistemas e a consequente redução da dissipação de energia nos sistemas estruturais do edifício. A solução mais simples é a utilização de uma haste rígida, a qual é dimensionada de acordo com o absorvor e facilita tanto a instalação quanto a redução das consequências de implementação do mesmo. O autor avaliou a eficiência do AMSP na redução dos deslocamentos da estrutura, velocidades e aceleração, quando submetida a excitações aleatórias. O trabalho culminou com a determinação de parâmetros considerados ótimos para o AMSP para a redução dos quadrados médios dos deslocamentos, velocidades e acelerações. (GÓMEZ, 2007, p.08).

São vários os métodos de determinação dos parâmetros ótimos do sistema, permitindo a diminuição da resposta dinâmica da estrutura com o AMS. A autora utilizou de uma técnica de minimização do deslocamento estrutural de um sistema inicialmente não amortecido

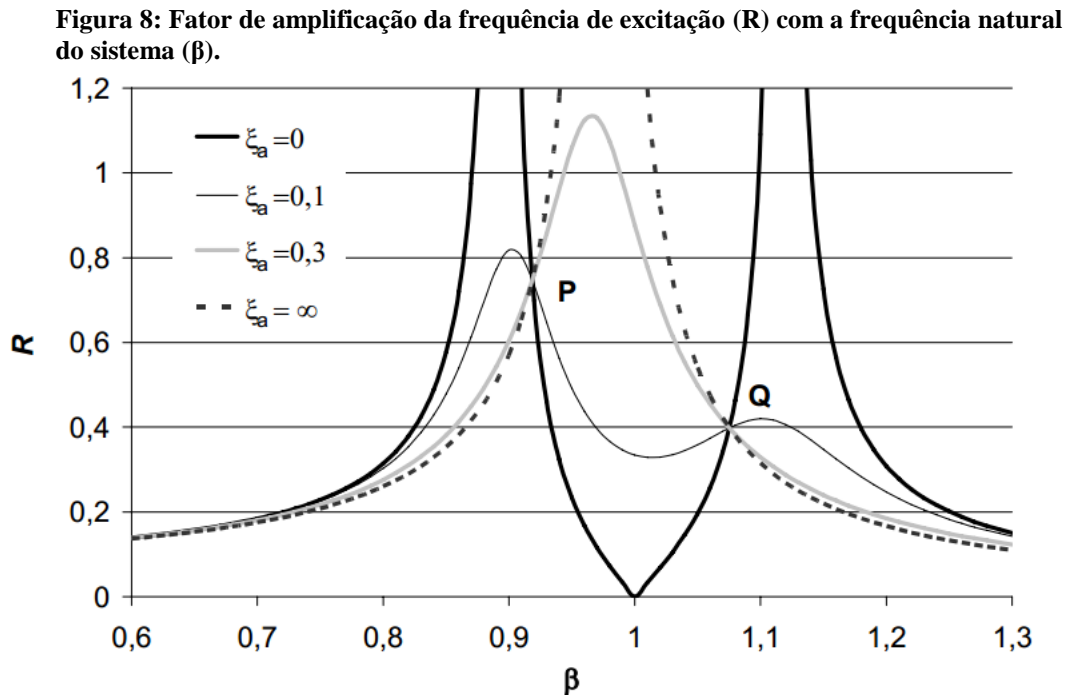
submetido às excitações externas do tipo senoidais harmônicas, onde o efeito dinâmico do AMS é medido em comparação com o deslocamento estático da estrutura principal. (OSPINA, 2008, p. 27-28).

Um edifício esbelto de dez andares foi analisado por meio da redução à um sistema de um único grau de liberdade a fim de determinar um conjunto de parâmetros de amortecimento para um Amortecedor Dinâmico de Vibração do tipo Pêndulo Invertido, do inglês *Inverted Pendulum Tuned Mass Damper (IPTMD)*, com o intuito de garantir proteção dinâmica à estrutura contra distintos níveis de vibração indesejáveis. Para isso, um protótipo do edifício de dez andares, em escala reduzida, foi utilizado e cujo modelo consistiu em módulos retangulares de aço SAE 1020, e algumas considerações importantes foram feitas: a massa da estrutura foi concentrada no chão de cada nível desconsiderando a rigidez e efeitos de massa axiais das colunas, o que influi diretamente nos deslocamentos de cada um dos pisos que são descritos por um único grau de liberdade cada em movimentos axiais. Considerando a massa e rigidez totais de cada um dos módulos foi calculada a frequência natural respectiva dos dez andares do edifício, direta ou indiretamente dependentes do coeficiente de amortecimento e da frequência natural do modo de vibração, determinados os parâmetros ótimos do neutralizador pendular, foi obtido um percentual de redução da vibração na estrutura principal superiores a 85%. (BERNARDES JUNIOR, MORAIS & AVILA 2017, p. 01-04).

Através do gráfico na Figura 8, observa-se que quando o amortecimento do AMS é zero a amplitude da resposta do sistema composto tende ao infinito nas frequências naturais do mesmo. São analisadas as razões de amortecimento, onde as curvas do gráfico apresentam picos com valores finitos para o Fator de Amplificação da Frequência ou resposta em frequência normalizada ( $R$ ) em relação a ( $\beta$ ) Razão de Frequência Forçada do sistema principal, para variações da Razão de amortecimento do neutralizador ( $\xi_a$ ). Com isso, estima-se que exista um valor para o fator de amortecimento entre zero e infinito para o qual a amplitude do pico seja mínima, partindo deste pressuposto determinam-se dois pontos, o P e Q, chamados de pontos fixos ou invariantes para os quais os valores de  $R$  independem da razão de amortecimento do AMS.

O objetivo de se aderir ao uso do ADVP é reduzir o pico da amplitude da resposta em ressonância até o mínimo valor possível, a fim de que pequenas amplificações na frequência sejam alcançadas. Esse valor de pico de ressonância mínimo é obtido partindo da escolha de um coeficiente de frequência  $\alpha$  ( $\alpha = \frac{w_a}{w_s}$ , onde o índice 'a' está relacionado com a frequência natural do AMS e o 's' à frequência natural estrutural do sistema) para o ajuste dos dois pontos

fixos P e Q, presentes na Figura 8, e selecionando o fator de amortecimento  $\xi_a$  para ajustar a curva de amplificação do sistema e tangenciar horizontalmente um dos dois pontos. Analisando o fator de amplificação da resposta como função da frequência de excitação ( $w$ ) com a frequência natural do sistema ( $w_s$ ), dada por  $\beta = \frac{w}{w_s}$ . (CONSTANTINOU; SOONG; DARGUSH 1998, p. 106).



Com relação aos parâmetros ideais do amortecedor secundário também conhecido como neutralizador dinâmico, Lourenco (2011, p. 06) afirma que a otimização é a escolha do conjunto de parâmetros modais que maximizarão o desempenho do dispositivo com base na função global, cujo objetivo seria obter um desenvolvimento de parâmetros próximos ao coeficiente de amortecimento, coeficiente de massa e da frequência de acoplamento. O critério de seleção utilizado pelo autor baseia-se no nível de resposta da estrutura com base na aceleração do topo, quando sob excitação. A resposta em ressonância da estrutura tende a zero quando o coeficiente de amortecimento do pêndulo também é próximo de zero, por este motivo são consideradas frequências de vibração cujos valores se distanciam da frequência de ressonância, a fim de trazer significância para a resposta. A minimização do deslocamento horizontal é determinada por meio da comparação dos fatores de deslocamentos máximos da amplitude do sistema para cada conjunto de parâmetros pendulares. Lourenco (2011, p. 89) afirma que para determinar os parâmetros ótimos de um AMSP para uma estrutura com um

grau de liberdade, o coeficiente de rigidez e de amortecimento tanto da estrutura primária quanto do dispositivo devem ser conhecidos.

Farshi e Assadi (2011) desenvolveram um método de otimizar um AMS não linear utilizando molas em paralelo de ação horizontal linear, onde foi investigado o comportamento caótico do dispositivo determinando os expoentes de Lyapunov e em termos dos parâmetros do sistema, confirmando por comparação que o dispositivo reduz eficientemente as vibrações do sistema principal de maneira superior que, por exemplo, o AMSM. A otimização dos parâmetros do dispositivo foi obtida com o algoritmo simplex sequencial, onde o método de Newmark foi aplicado por integração por partes programado para minimizar o deslocamento máximo da estrutura sob excitação senoidal para diversas frequências e determinar os parâmetros ótimos, determinando assim a resposta dinâmica da estrutura. Naturalmente esses parâmetros devem ser escolhidos de modo que o deslocamento da massa sintonizada também caia dentro de uma faixa aceitável para um projeto prático de engenharia, enquanto para as condições ótimas todos os parâmetros da mola são determinados. Observou-se que a não linearidade da rigidez é significativa para os casos de excitações de baixa frequência e que uma única mola linear deve ser utilizada em casos de alta frequência, sem causar desvios drásticos na resposta ótima, bem como o coeficiente de fricção deve ser alto para elevadas frequências de excitação a fim de obter as respostas ótimas desejadas. A comparação dos resultados apresenta o intuito de validar os resultados dos deslocamentos ótimos com os de referência.

Santos *et. al.* (2017) determinaram os parâmetros otimizados para a melhor redução de vibração de um sistema AMS de controle aplicado em um piso de uma sala de ginástica na cidade de Brasília-DF, Brasil. Foram considerados os parâmetros: coeficiente de massa  $\mu$ , coeficiente de frequência  $\alpha$  e de amortecimento  $\xi$  onde observou-se que quanto mais aumentava o valor de  $\mu$  melhor era a eficiência do dispositivo, porém requer atenção redobrada com relação ao aumento da massa do amortecedor em relação à geração de excessivas deformações estáticas que possam vir a comprometer a segurança da estrutura. Foram adotados quatro modelos de absorvedores com parâmetros variados. O modelo de parâmetros  $\mu=0,10$ ,  $\alpha=0,96$  e  $\xi=0,4$  apresentou maior eficiência em relação aos outros conjuntos de parâmetros, reduzindo em 10% o deslocamento das amplitudes do piso de ginástica analisado no problema.

Outra classificação importante é dada, segundo Borges (2008, p. 02, 07-08), por meio da divisão dos ADV em sistemas lineares e não lineares. Sistemas lineares consistem na representação matemática de sistemas encontrados na natureza, dispostos como uma abstração matemática e como muitos sistemas reais operam dentro de uma faixa limitada de frequência

onde uma aproximação linear é suficiente para seu entendimento, previsão e controle de seu comportamento dinâmico. Por serem matematicamente semelhantes, os modelos lineares podem ser analisados segundo uma metodologia teórica definida por anos de estudos, a qual está desenvolvida e consolidada quando comparada aos inúmeros métodos de solução de sistemas não lineares ainda em fase de estudos e comprovações científicas. Outro ponto importante é o fato de que muitos problemas de engenharia podem ser linearizados sem prejuízos na resposta aproximada ao efeito real do sistema. A origem da não linearidade do sistema pode referir-se à geometria do sistema ou ao tipo de material, bem como à presença de forças não lineares mesmo que seja de difícil dedução a origem da não linearidade ou razão física a partir das representações matemáticas.

O ADV tradicional funciona de maneira eficiente e satisfatória apenas com sua frequência de sintonização, sendo esse do tipo linear. Nas últimas décadas do século XX e na primeira do século XXI estudaram-se muitas técnicas de aprimoramento do ADV não linear para o desenvolvimento de ferramentas que obtenham um melhor resultado em termos de atenuação de vibração e, conseqüentemente, trabalhando com mais que uma frequência de sintonização ao mesmo tempo. Comparando sistemas lineares e não lineares, são feitas considerações como a do princípio de superposição de forças não ser válido em sistemas não lineares, sendo que a resposta do mesmo pode ser dependente da frequência e amplitude de excitação de maneira simultânea. Outro ponto positivo abordado é que os sistemas não lineares podem ter mais de uma posição de equilíbrio, dependendo das condições da operação em que atuam. (BORGES, 2008, p. 02-03).

Foi utilizado um neutralizador para transferir a energia em excesso da região em possível ressonância do sistema em harmônicos de alta frequência, atenuando assim a saída da resposta em um nível apropriado e controlável. As não linearidades mais utilizadas são um elemento de mola não linear ou um elemento de amortecimento não linear. Comprovou-se que utilizando a mola os níveis dos harmônicos e saltos produzidos foram mais efetivos que aqueles produzidos pelo amortecedor. Contudo, como o nível de redução da frequência de ressonância para o uso da mola é limitado, a melhor opção seria o amortecedor não linear, que abrange aplicações tanto de um grau de liberdade quanto de múltiplos. (ZHANG et al., 2009, p. 1732 - 1743).

Geralmente as respostas não lineares da análise de estruturas com sistemas de dissipação de energia possuem uma indicação o mais realista possível da resposta global da estrutura e da demanda dos componentes individuais. Contudo, os resultados são altamente

sensíveis a qualquer mudança, por menor que seja, das hipóteses relativas ao comportamento dos componentes e na movimentação do solo local, de acordo com Constantinou, Soong e Dargush (1998, p. 30).

Souza (2015, p. 27) afirma que na maioria dos casos, são necessários métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações quando essas são não lineares. Quando é possível, procura-se resolver equações e sistemas de equações não lineares utilizando da aproximação por um sistema de equações lineares. Quando não for possível, o mais indicado é adaptar os métodos que determinam as soluções aproximadas de uma única equação não linear em uma variável, substituindo o problema de uma variável por um problema vetorial que incorpora todas as variáveis.

Os métodos clássicos para a resolução de sistemas de equações não lineares são: o Método de Newton ou Newton-Raphson, é o mais utilizado pois converge rapidamente uma vez que seja utilizada uma boa aproximação inicial, já que esse método depende diretamente das condições iniciais; o Método de Broyden é uma generalização do método da secante para equações não lineares e tem como principal desvantagem a perda da convergência quadrática para uma convergência linear; o Método da Descida Máxima, conhecido também como Método do Gradiente, requer uma boa aproximação inicial da solução para garantir a convergência, a qual geralmente é mais lenta mas sempre eficiente; Método de Steffensen, também de convergência quadrática porém o conjunto de pontos iniciais para os quais o método converge é limitado; Método de Halley possui convergência cúbica porém requerem a avaliação dos termos derivativos de primeira e segunda ordem para garantirem a ordem de convergência. O esforço em cada etapa nesse método compensa em um menor número de iterações para obter a precisão desejada, uma vez que a convergência é cúbica; os métodos Método de Chebyshev, Super Halley e Halley-Cuyt também são convergência cúbica, Super Halley e Halley-Cuyt. (SOUZA, 2015, p. 28-40).

Um dos métodos considerados por Souza (2015, p. 41-45) é conhecido como os Métodos da Homotopia e Continuação, desenvolvidos no final do século XX. Esses introduzem o problema a ser resolvido dentro de um outro conjunto de problemas. Por exemplo, no método Runge-Kutta de quarta ordem o uso de “N” iterações requerem “4N” inversões matriciais, ao passo que o método de Newton necessita de apenas uma inversão matricial por iteração, o que indica que o método de Runge-Kutta é quase equivalente a “4N” do método de Newton. Uma alternativa pode ser usar um método de Runge-Kutta de segunda ordem, assim como o método de Euler modificado ou mesmo o método de Euler, para diminuir o número de inversões.



### 3 FUNDAMETAÇÃO TEÓRICA

#### 3.1 OTIMIZAÇÃO E SELEÇÃO DOS PARÂMETROS

O modelo de otimização proposto por Hartog (1956) teve como objetivo o de minimizar o deslocamento da estrutura ao considerar um sistema não amortecido submetido a uma excitação harmônica. A otimização dos parâmetros consiste em encontrar os valores de mínimos e máximos de uma função de várias variáveis, definida em uma determinada região do espaço multidimensional. Com isso, definiu os seguintes parâmetros para o sistema e controle: a razão de massa, razão de amortecimento do pêndulo, razão de amortecimento da estrutura, razão entre a frequência natural do pêndulo e da estrutura e razão de frequência forçada do sistema principal. A busca numérica é encerrada quando todos os parâmetros são combinados entre si, obtendo-se a combinação que produziu o menor valor da resposta a ser controlada e conseqüentemente os parâmetros ótimos.

O coeficiente de massa ( $\mu$ ), também conhecido como razão de massa, é dado por:

$$\mu = \frac{m}{M} \quad (1)$$

Onde  $m$  é a massa do dispositivo passivo e  $M$  a massa da estrutura principal. O coeficiente de frequência ótimo ( $\alpha_{\text{ótimo}}$ ) é determinado a partir de:

$$\alpha_{\text{ótimo}} = \frac{1}{1+\mu} \quad (2)$$

Resultando na amplitude ( $R$ ) dos pontos P e Q de acordo com a formulação:

$$R = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \quad (3)$$

Quanto ao fator de amortecimento ótimo ( $\xi_{\text{ótimo}}$ ), tem-se que:

$$\xi_{\text{ótimo}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}} \quad (4)$$

Sabe-se que o período natural do pêndulo é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (5)$$

Uma vez que o período é dependente do comprimento da haste do pêndulo ( $L$ ) e da aceleração da gravidade ( $g$ ), é requerido que para um grande período o valor de  $L$  pode ser maior que a altura efetiva de um andar do edifício.

O efeito dinâmico do AMS é medido em comparação ao deslocamento estático e sabe-se que o fator de amplificação dinâmica, ou a resposta em frequência normalizada para um sistema não amortecido a uma excitação senoidal com frequência ( $\omega$ ) é dado por Ospina (2008, p. 28), bem como consta em Oliveira (2012, p. 31), é a que segue:

$$R = \frac{y_{m\acute{a}x}}{y_{st}} = \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\zeta_a \alpha \beta)^2}{[(\alpha^2 - \beta^2)(1 - \beta^2) - \alpha^2 \beta^2 \mu]^2 + (2\zeta_a \alpha \beta)^2 (1 - \beta^2 - \beta^2 \mu)^2}} \quad (6)$$

Relacionando  $R$  (resposta em frequência normalizada), ( $y_{m\acute{a}x}$ ) deslocamento máximo do sistema principal, ( $y_{st}$ ) deslocamento estático, ( $\alpha = \omega_a/\omega_{sp}$ ) razão de frequência, ( $\omega_a$ ) frequência natural do AMS, ( $\omega_s = \sqrt{K/M}$ ) frequência natural do sistema principal ou estrutura, ( $\beta = \omega/\omega_s$ ) razão de frequência forçada do sistema principal, ( $\xi_a = c/c_c = c/2m\omega_a$ ) razão de amortecimento do AMS e ( $c_c$ ) amortecimento crítico do neutralizador dinâmico.

De acordo com Ospina (2008, p. 28), na determinação da otimização dos parâmetros pela divisão da frequência natural em dois pontos distintos, é selecionado um valor de razão ótima de frequência  $\alpha$  tal que ambos os pontos possuam as mesmas amplitudes, dadas pela Eq. 2. Partindo desta formulação é especificada a amplitude  $R$  dos pontos invariantes, dada pela Eq. 3, o fator de amortecimento ótimo  $\xi_{\acute{o}timo}$  dado pela Eq. 4, estimado pela média de dois valores que maximizam as amplitudes dos pontos fixos na curva  $R \times \beta$ . Assim, o amortecedor otimizado pode ter suas propriedades de massa, rigidez e amortecimento definidas partindo de uma razão de massa calculando-se os valores dos parâmetros através das expressões ótimas de  $\alpha$  e  $\xi_a$ , dadas por Hartog (1956):

$$\omega_a = \alpha \omega_{sp} \quad (7)$$

$$k = \omega_a^2 m \quad (8)$$

$$c = 2m\xi_a\omega_a \quad (9)$$

O fator de amortecimento ótimo, dado por  $\xi_{\text{ótimo}}$  do absorvedor pendular deve ser adaptado à escolha do coeficiente de massa  $\mu$ , enquanto a Eq. 4 for válida. Valores muito pequenos de  $\mu$  resultam em grandes amplitudes de massa, o que muitas vezes não pode ser utilizado devido à falta de espaço disponível na estrutura. Para valores de  $\mu < 0,04$ , a eficiência do AMS fica limitada, ou seja, caso ocorra mudanças bruscas de temperatura ou fadiga estrutural, a frequência natural da estrutura mudará e será responsável pela diminuição da eficiência para taxas menores que quando  $\mu$  possuir valores muito maiores.

Contudo, a obtenção do comprimento otimizado do pêndulo seguiu o modelo utilizado por Rao (2011, p. 139), onde o autor considera no exemplo de uma coluna com massa concentrada na extremidade superior, e determina o comprimento da haste de acordo com as propriedades do material com o qual a coluna é constituída, bem como a sua rigidez equivalente, obtida por meio da fórmula da rigidez de uma viga em deflexão na extremidade.

Portanto, o valor da massa do AMSP é determinado de acordo com a frequência a ser calibrada a coluna, modelada e denominada como estrutura de pêndulo rígido:

$$\omega_a = \sqrt{k_{eq}/m} \quad (10)$$

Onde  $k_{eq}$  representa a rigidez equivalente da coluna, representada por uma viga retangular em deflexão, engastada em uma extremidade, sujeita à um carregamento localizado na outra de acordo com a massa ( $m$ ) do pêndulo, utilizado a fórmula da rigidez de deflexão de uma viga retangular com essas características:

$$k_{eq} = 3EI/L^3 \quad (11)$$

Considerando o Módulo de Elasticidade ( $E$ ) do material da viga, o Momento de Inércia da Área da Secção Transversal ( $I$ ), determina-se o comprimento da coluna, isto é, da haste do pêndulo ( $L$ ), numericamente.

### 3.2 MÉTODOS E EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Para um sistema em movimento de translação e rotação, a segunda lei de Newton utilizada, de acordo com Rao (2011, p. 52) é dada pela Eq. 12, onde (F) representa o somatório de forças, (m) a massa total do sistema e (a) a componente tangencial da aceleração, e a equação aplicada a momento angular de inércia dada pela Eq. 13, onde (M) representa o somatório de momentos em relação ao centro de giro do sistema, (I) representa o momento de inércia de massa total do sistema e ( $\alpha$ ) a aceleração angular do sistema.

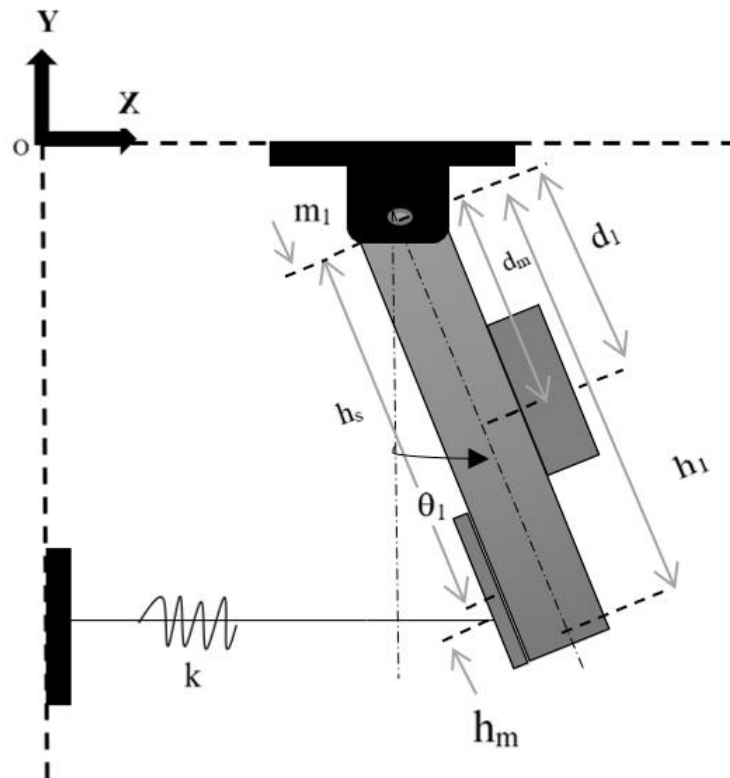
$$\sum F = ma \quad (12)$$

$$\sum M = I\alpha \quad (13)$$

Tanto para a aceleração vetorial (Eq. 12) quanto para a aceleração angular (Eq. 13), no equacionamento considera-se as acelerações como a segunda derivada da função deslocamento, em relação ao tempo, de acordo com a variável considerada. O movimento de uma partícula em um determinado sistema de referência inercial é descrito pela equação de Newton, cujas equações de movimento costumam ser relativamente simples. Quando as equações de movimento são deduzidas sob perspectiva do movimento Newtoniano devem ser conhecidas todas as forças que agem sob sistemas complexos e caóticos. Com base nisso foi desenvolvido um método alternativo de solução chamado de Princípio de Hamilton, cujas equações de Lagrange são as equações de movimento resultantes da aplicação deste método e são equivalentes às equações de Newton. (RAO, 2011).

O modelo analítico, da Figura 9, representa o sistema principal do problema de estudo da presente dissertação. O sistema é composto por uma barra, mola de rigidez conhecida, um motor de excitação e uma massa utilizada experimentalmente no suporte da haste do pêndulo, o qual atua como neutralizador dinâmico de vibrações.

Figura 9: Modelo analítico do problema de estudo dos Casos 1 e 2.



Fonte: Autora, 2018.

Considerando o modelo representado na Figura 9, as equações de movimento de Lagrange consiste na relação dada pela Eq. 14, para sistemas em vibração livre:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad (14)$$

Onde o L indica o Lagrangeano que é obtido por meio da seguinte relação:

$$L = K - P \quad (15)$$

Considerando que o sistema não esteja em vibração livre, mas sim submetido a excitações ou excitação externa, a Eq. 14 toma a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

Onde  $\theta_i$  e suas derivadas representam as variáveis a serem determinadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , e o somatório de forças ( $F_i$ ) atuantes no sistema, em cada componente do mesmo, é dado por:

$$F_i = \sum_{i=1}^n (F_{ix} + F_{iy} + F_{iz}) \quad (17)$$

Determinado o Lagrangeano, são calculadas as derivadas em relação ao(s) ângulo(s) de rotação envolvidos no equacionamento e a derivada temporal, conforme segue:  $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$  e por fim  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)$ , para cada ângulo referentes aos índices 1 e 2 utilizados. Na sequência as derivadas são substituídas na equação e as equações de movimento são obtidas isolando a derivada segunda denotada por  $\ddot{\theta}_1$ ,  $\ddot{\theta}_2$ .

O Método de Energia, dado pela aplicação da Equação de Lagrange, envolve as energias Cinética e Potencial em cada componente do sistema. O somatório total de energia cinética é dado por  $C_{total}$  e o montante de energia potencial é dado por  $P_{total}$ , ambas são as propriedades relacionadas com a partícula e que com isso não se faz necessário quantificar a força que está sendo aplicada no sistema de maneira explícita. Sendo assim, a energia é determinada independentemente dos conceitos Newtonianos. (RAO, 2011).

Quanto à determinação dos somatórios de energia, deve-se considerar o tipo de energia contido em cada componente: mola, barra e pêndulo, considerando também a energia envolvida em cada componente do sistema. (RAO, 2011). A energia cinética total é dada por:

$$C_{total} = C_{barra} + C_{pêndulo} + C_{motor} + C_{suporte} \quad (18)$$

Considerando a energia cinética devido à inércia da barra do modelo do sistema, a massa do motor de excitação, do suporte da mola utilizada experimentalmente na fixação do pêndulo na barra do principal do sistema, o qual será definido na metodologia experimental. A Eq. 18 torna-se:

$$C_{total} = \frac{1}{2} I_{total} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad (19)$$

Onde  $v$  representa a velocidade tangencial das componentes do pêndulo em relação à origem das coordenadas do plano cartesiano dada por:

$$v^2 = (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (20)$$

O momento de inércia total do sistema,  $I_{total}$ , considera o momento de inércia de massa de cada componente do modelo do sistema, definidos pela massa de cada componente e o comprimento em relação à origem do plano cartesiano:

$$I_{total} = \frac{m_1 h_1^2}{3} + m_{motor} h_{motor}^2 + m_{suporte} h_{suporte}^2 \quad (21)$$

Quanto à energia potencial total do modelo, tem-se que:

$$P_{total} = P_{mola} + P_{pêndulo} + P_{barra} + P_{motor} + P_{suporte} \quad (22)$$

Substituindo as fórmulas adequadas:

$$P_{total} = \frac{1}{2} k h_{mola}^2 + m_2 g y_2 + m_1 g y_1 + m_{suporte} g h_{suporte} + m_{motor} g h_{motor} \quad (23)$$

Onde a variável  $h_{mola}^2$  é a distância do posicionamento da mola do sistema em relação à origem do sistema de coordenadas cartesianas.

Essas equações apresentam a forma geral, relacionando todos os componentes do sistema, o qual foi equacionado para o Caso 1 e Caso 2 de acordo com as necessidades de cada um, separadamente. As deduções e as equações de movimento do modelo, para os Casos 1 e 2, em vibração livre e em vibração forçada, constam na sequência, no Capítulo 4.

## 4 MODELAGEM MATEMÁTICA

As equações de movimento foram determinadas, considerando as equações do Capítulo 3.2, pelo método de Newton, avaliando analiticamente a frequência natural do sistema barra e mola em vibração livre e em vibração forçada. Na sequência, foram equacionadas partindo das equações do Método de Lagrange, sendo que a frequência natural do sistema tanto por um quanto pelo outro método deve apresentar o mesmo valor, bem como a mesma equação tanto na forma linear (considerando o princípio dos pequenos deslocamentos) quanto na forma não-linear.

O dispositivo de amortecimento utilizado é classificado como Dispositivo de Controle Estrutural do Tipo Passivo, Dispositivos de Dissipação de Energia, Amortecedores Dinâmicos de Vibração (ADV) e Amortecedores de Massa Sintonizados (AMS) e por fim, AMSP classificação essa que insere o pêndulo, o qual utiliza como método de atuação a adição de massa auxiliar no sistema para aumentar os níveis de amortecimento desse.

Foram desenvolvidas analiticamente as equações de movimento dos sistemas massa, mola e pêndulo, os quais estão divididos em dois casos: o Caso 1 consiste na análise da resposta dinâmica numérica e experimental do sistema barra e mola do problema de estudo com e sem a adição do pêndulo modelado como pêndulo rígido em um sistema massa e rigidez equivalente, analisado em vibração livre e em vibração forçada e o Caso 2 a resposta numérica para o modelo do sistema barra e mola, com o AMSP pendular, em vibração livre e forçada considerando o equacionamento não linear pelo Método de Energia e a Equação de Lagrange.

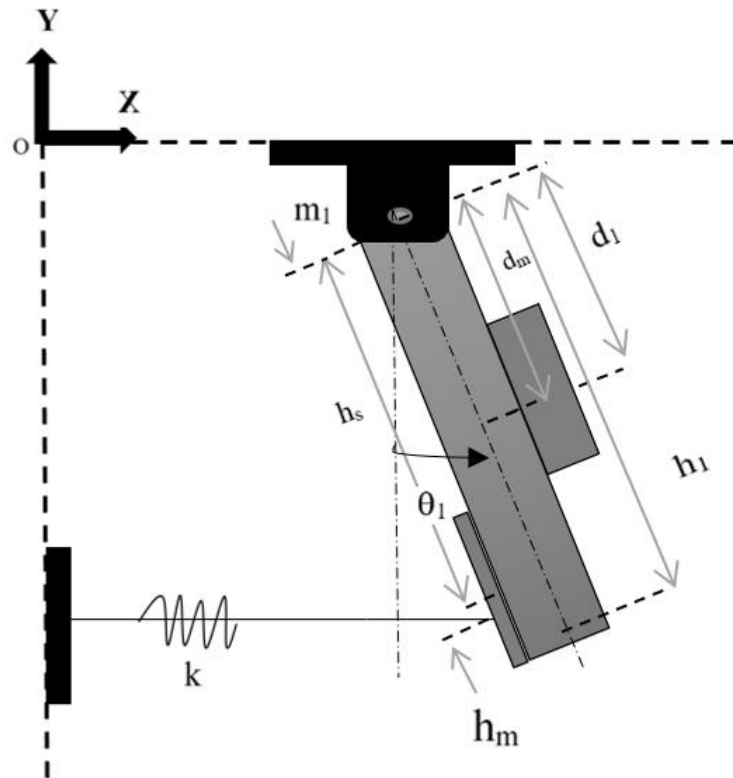
Neste tópico constam a apresentação e os desenvolvimentos dos modelos analíticos de cada um dos casos, utilizando dos conceitos apresentados pelo capítulo dois e com as fórmulas dadas no Capítulo 3.

### 4.1 MODELO ANALÍTICO: CASO 1

Considerando o deslocamento angular da barra representado por  $\theta_1$ , a decomposição no sistema cartesiano é dada conforme consta na Figura 10.



Figura 10: Modelo analítico do sistema do Caso 1.



Fonte: Autora, 2018.

A Figura 10 é a representação do modelo do sistema barra e mola desenvolvido no Caso 1, composto pela barra retangular de massa ( $m_1$ ) com comprimento total ( $h_1$ ), rigidez de sistema representada por uma mola com constante elástica ( $k$ ) fixada na bancada de vibrações e na barra, a distância do centro de giro até o centro de massa da barra é dada por ( $d_1$ ), a distância até o centro de massa do motor ( $d_m$ ) a distância até o suporte de massa ( $h_s$ ), considerando o deslocamento angular da barra ( $\theta_1$ ), as massas do motor ( $m_{motor}$ ), massa do suporte ( $m_{suporte}$ ) e a distância ( $h_m$ ), que representa o posicionamento da mola em relação ao centro de giro.

O suporte consiste em uma massa retangular anexada à barra garantindo o contato direto com a haste do pêndulo e a barra do sistema principal, contendo o mesmo material da barra e, mesmo o sistema estando em vibração livre, portanto não sofrendo os efeitos da excitação da força harmônica, o motor e a massa do suporte de fixação do pêndulo influenciam no sistema, alterando a inércia da barra e, portanto, devem ser considerados nas equações de movimento.

Aplicando a segunda Lei de Newton de Momento Angular na barra dada, pela Eq. 24, considerando os efeitos da força peso de cada componente de massa do sistema, resultando na Eq. 25:

$$\Sigma M_0 = I_T \alpha \quad (24)$$

$$-d_1 m_1 g \sin(\theta_1) - d_m M_m g \sin(\theta_1) - h_m^2 k \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) - h_s m_s g \sin(\theta_1) = I_T \ddot{\theta}_1 \quad (25)$$

A equação de movimento linear, considerando o princípio dos pequenos deslocamentos  $\sin(\theta_1) \approx \theta_1$  e  $\cos(\theta_1) \approx 1$ , é dada por:

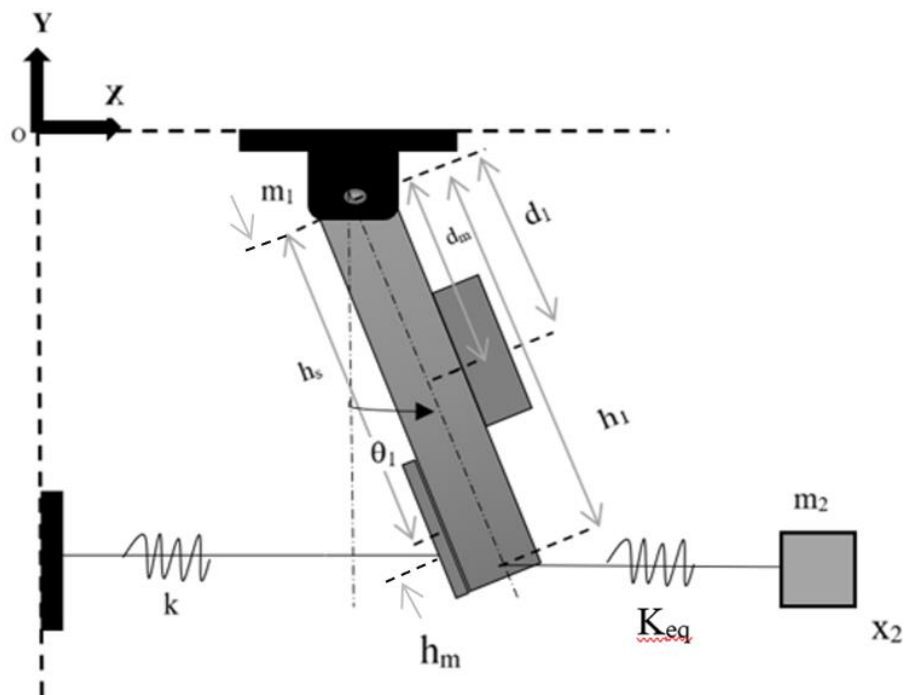
$$\ddot{\theta}_1 = \frac{[-d_1 m_1 g - d_m M_m g - h_m^2 k - h_s m_s g] \theta_1}{I_T} \quad (26)$$

Onde o momento de inércia total é a resultante do somatório do momento de inércia da barra, motor e suporte:

$$I_T = I_{total} = I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte} \quad (27)$$

A Figura 11 representa o sistema do Caso 1 com pêndulo, onde o pêndulo também é representado e modelado por um sistema massa e mola.

Figura 11: Modelo analítico do sistema do Caso 1 com AMSP.



Fonte: Autora, 2018.

Na Figura 11, a massa do AMSP é representada por ( $m_2$ ) e a haste do pêndulo foi modelada como uma barra retangular e a rigidez equivalente ( $K_{eq}$ ) para uma viga engastada em uma extremidade e com carregamento localizado na outra extremidade livre. O sistema de equações de movimento para o Caso 1 com AMSP é dado pela Eq. 28, onde as variáveis do sistema são  $\ddot{\theta}_1$  e  $\ddot{x}_2$  são dadas considerando os movimentos de rotação da barra e translação da massa equacionados pela segunda Lei de Newton aplicada a momentos e a forças, respectivamente.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}] & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -m_1 g d_1 - m_{motor} g d_m - m_s g h_s - K_{eq} h_{eq}^2 - K_1 h_m^2 & K_{eq} h_{eq} \\ K_{eq} h_{eq} & -K_{eq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

Onde a distância do centro de massa do AMSP em relação ao centro de rotação do plano cartesiano de referência foi considerada como comprimento equivalente do pêndulo e representada por ( $h_{eq}$ ), a qual é equivalente ao comprimento da barra,  $h_1$ . Dado o modelo do sistema em vibração livre, representado pela Figura 10, considerando que o motor passa a excitar a barra, é dado o equacionamento do sistema do Caso 1 em vibração forçada. A Eq. 29 é a equação de movimento do modelo, sob excitação externa harmônica:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{[-d_1 m_1 g - d_m M_m g - h_m^2 k - h_s m_s g] \theta_1 + F_{ext} d_m}{I_T} \quad (29)$$

Onde a força externa harmônica ( $F_{ext}$ ) gera um momento considerando a distância do motor ao centro do giro do sistema ( $d_m$ ), sendo considerada como a resultante da multiplicação de uma componente inicial de forças ( $F$ ) multiplicada pelo cosseno da frequência de excitação ( $\omega$ ) atuando externamente ao sistema, em função do tempo ( $t$ ) em segundos:

$$F_{ext} = F \cos(\omega t) \quad (30)$$

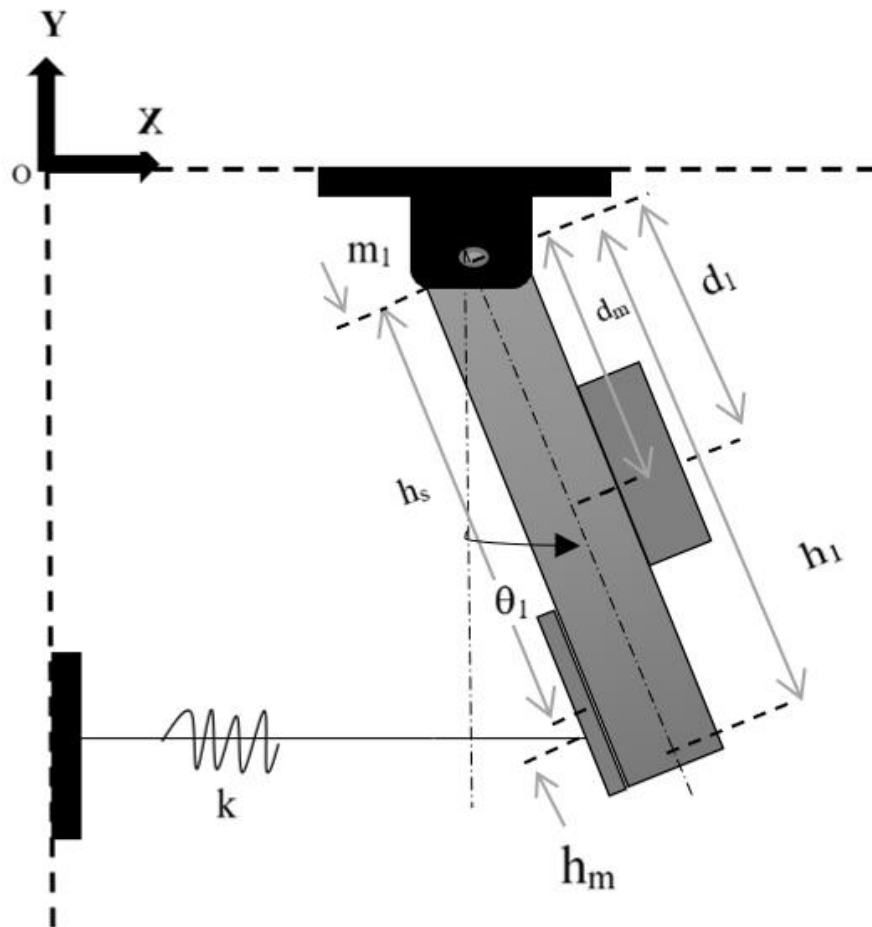
Para o modelo do Caso 1 com AMSP, Figura 11, sob excitação externa, o sistema de equações de movimento torna-se:

$$\begin{bmatrix} [I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}] & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 g d_1 - m_{motor} g d_m - m_s g h_s - K_{eq} h_{eq}^2 - k h_m^2 & K_{eq} h_{eq} \\ K_{eq} h_{eq} & -K_{eq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F \cos(\omega t) d_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

## 4.2 MODELO ANALÍTICO: CASO 2

O modelo analítico da Figura 12 consiste na representação esquemática do problema de estudo, contendo os mesmos elementos fixos do modelo do Caso 1 da Figura 10, considerando o pêndulo simples acoplado diretamente à barra do sistema, desprezando a massa da haste do pêndulo e conseqüentemente a rigidez, uma vez que são mínimas e podem ser desconsideradas no equacionamento. As equações de movimento foram desenvolvidas utilizando o método de energia e a equação de Lagrange.

Figura 12: Modelo analítico do sistema do Caso 2.



Fonte: Autora, 2018.

O modelo do Caso 2 apresenta os mesmos componentes e conseqüentemente as mesmas representações do modelo dado pelo Caso 1. A diferença está no desenvolvimento analítico e na obtenção das equações de movimento do sistema, em vibração livre e em vibração forçada.

Determinando as equações de movimento pelo Método de Newton, primeiramente são definidas as componentes cartesianas de cada componente do sistema, em relação ao plano cartesiano e ao ângulo de rotação da barra. Para a barra do sistema principal do modelo, a componente  $x$  é dada pela Eq. 32 e a componente  $y$  pela Eq. 33, do mesmo modo, as componentes de cada uma das massas envolvidas são decompostas em relação ao ângulo de rotação, na direção de  $x$  e  $y$ , conforme forem utilizadas no cálculo das energias cinética e potencial.:

$$x_1 = d_1 \text{sen}(\theta_1) \quad (32)$$

$$y_1 = -d_1 \text{cos}(\theta_1) \quad (33)$$

A distância  $y_1$  dada pela Eq. 32 é negativa por que a barra está posicionada no sentido negativo do eixo das ordenadas no eixo cartesiano de referência e ambas as equações da barra têm como referência o centro de massa da mesma, dado à distância  $d_1$  do centro de giro do sistema. Na sequência são obtidas as derivadas temporais das decomposições nos eixos cartesianos  $x$  e  $y$ , considerando a derivação implícita:

$$\dot{x}_1 = d_1 \text{cos}(\theta_1) \dot{\theta}_1 \quad (34)$$

$$\dot{y}_1 = d_1 \text{sen}(\theta_1) \dot{\theta}_1 \quad (35)$$

Uma vez obtidas as derivadas temporais, as energias cinética e potencial são calculadas utilizando das equações do capítulo 3.2, que para o sistema barra livre resultam nas equações Eq. 36 referente ao diagrama cinético e a Eq. 37 ao equivalente potencial total do sistema, considerando o momento de inércia de uma barra retangular de acordo com as coordenadas da barra,  $I_{barra} = \frac{m_1 L_1^2}{3}$ , o momento de inércia de um corpo em relação à sua distância até o centro de giro é dado por  $I = ml^2$ , fórmula utilizada tanto no momento de inércia do motor quanto do suporte, com suas respectivas distâncias.

$$C_{total} = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 [I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}] \quad (36)$$

$$P_{total} = [-m_1 d_1 - m_s h_s - m_{motor} d_m] g \cos(\theta_1) + \frac{1}{2} k h_m^2 (\sin \theta_1)^2 \quad (37)$$

Para o sistema do Caso 2, o Lagrangeano resultante é dado por:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 [I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}] + [m_1 d_1 + m_s h_s + m_{motor} d_m] g \cos(\theta_1) - \frac{1}{2} k h_m^2 (\sin \theta_1)^2 \quad (38)$$

Derivando em relação ao ângulo de rotação  $\theta_1$  e ao tempo tem-se que:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -k h_m^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + [-m_1 d_1 - m_s h_s - m_{motor} d_m] g \sin(\theta_1) \quad (39)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = [I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}] \dot{\theta}_1 \quad (40)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \ddot{\theta}_1 [I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}] \quad (41)$$

A equação de movimento resultante subtração entre a Eq. 41 e a Eq. 43 é:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-k h_m^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + [-m_1 d_1 - m_s h_s - m_{motor} d_m] g \sin(\theta_1)}{[I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}]} \quad (42)$$

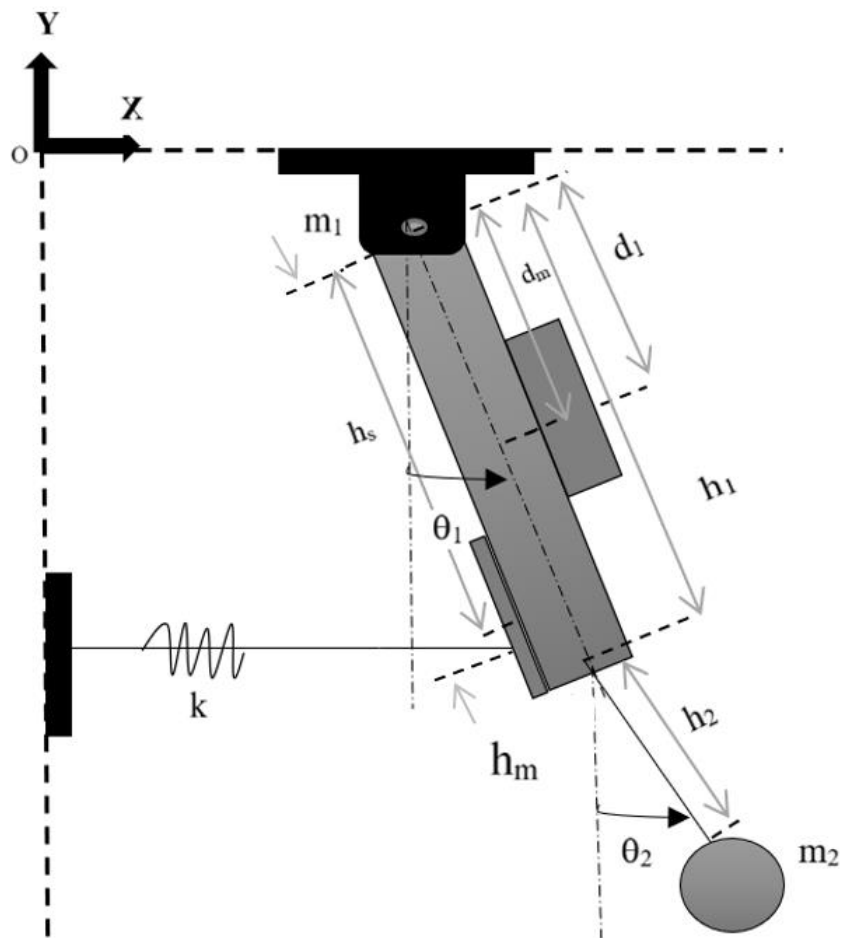
A Eq. 42 é a equação de movimento do sistema do Caso 2 em vibração livre, da forma não linear. Aplicando o princípio dos pequenos deslocamentos, torna-se a Eq. 43:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-k h_m^2 \theta_1 + [-m_1 d_1 - m_s h_s - m_{motor} d_m] g \theta_1}{[I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}]} \quad (43)$$

Anexando o pêndulo na extremidade livre da barra, o sistema torna-se amortecido com a utilização de um dispositivo AMSP, tendo assim sua resposta controlada pela movimentação do pêndulo. A decomposição em  $x_1, y_1$  e  $x_2, y_2$  para o sistema barra, mola e pêndulo é dado de

acordo com a Fig. 13, em função das mesmas variáveis da barra e de acordo com os parâmetros do pêndulo: massa ( $m_2$ ), comprimento da haste ( $L_2$ ) e o ângulo de rotação ( $\theta_2$ ). Tanto a barra quando o pêndulo representa um sistema de rolamento, apresentando movimentação em torno de um pivô, o que facilita a montagem experimental do sistema e reduz os efeitos do amortecimento na localização tanto do pêndulo quanto entre a barra e o mancal da bancada de ensaios de vibração.

Figura 13: Modelo analítico do sistema do Caso 2 com AMSP.



Fonte: Autora, 2018.

Os equacionamentos de  $x_1, y_1$  são dados pelas Eq. 32 e Eq. 33, e as suas derivadas constam nas equações Eq. 34 e Eq. 35. As componentes  $x_2, y_2$  são dadas pelas Eq. 44 e Eq. 45 e nas equações Eq. 46 e Eq. 47 constam as derivadas de  $x_2, y_2$ .

$$x_2 = h_1 \sin(\theta_1) + h_2 \sin(\theta_2) \quad (44)$$

$$y_2 = -h_1 \cos(\theta_1) - h_2 \cos(\theta_2) \quad (45)$$

$$\dot{x}_2 = h_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + h_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \quad (46)$$

$$\dot{y}_2 = h_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + h_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \quad (47)$$

Uma vez obtidas as derivadas temporais, as energias cinética e potencial são calculadas:

$$K_{total} = \frac{1}{2} [I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}] \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} h_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} h_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (48)$$

$$P_{total} = [-m_1 d_1 - m_s h_s - m_{motor} d_m - m_2 h_1 - m_1 d_1] g \cos(\theta_1) - m_2 h_2 g \cos(\theta_2) + \frac{1}{2} k h_m^2 (\sin \theta_1)^2 \quad (49)$$

Para o sistema do Caso 2 com o AMSP, o Lagrangeano resultante é:

$$L = \frac{1}{2} [I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}] \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} h_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} h_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + [m_1 d_1 + m_s h_s + m_{motor} d_m + m_2 h_1 + m_1 d_1] g \cos(\theta_1) + m_2 h_2 g \cos(\theta_2) - \frac{1}{2} k h_m^2 (\sin \theta_1)^2 \quad (50)$$

Derivando a Equação 50 em relação ao ângulo de rotação  $\theta_1$  e em relação ao tempo, de maneira a substituir na Eq. 51 e, utilizando o método de energia e as Equações de Lagrange para determinar a equação de movimento da barra, dadas no Capítulo 3.2, obtém-se a seguinte equação de movimento para a barra, Eq. 51:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (51)$$

$$\ddot{\theta}_1 [I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}] + m_2 h_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 h_1 h_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k h_m^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + m_1 d_1 g \sin(\theta_1) + m_2 h_1 g \sin(\theta_1) + m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_s h_s g \sin(\theta_1) + m_{motor} d_m g \sin(\theta_1) = 0 \quad (52)$$

Seguindo o mesmo procedimento para o ângulo de rotação do pêndulo representado por  $\theta_2$ , a segunda equação de movimento é determinada por:



$$m_2 h_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 h_1 h_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 h_2 g \sin(\theta_2) = 0 \quad (53)$$

Sendo assim, partindo das Eq. 52 e Eq. 53, o sistema de equações de movimento do modelo da Fig. 13 é dado conforme pela Eq. 54:

$$\begin{bmatrix} [I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}] + m_2 h_1^2 & m_2 h_1 h_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 h_1 h_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 h_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - k h_m^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) - m_1 d_1 g \sin(\theta_1) - \\ -m_2 h_1 g \sin(\theta_1) - m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_s h_s g \sin(\theta_1) - m_{motor} d_m g \sin(\theta_1) \\ -m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 h_2 g \sin(\theta_2) \end{pmatrix} \quad (54)$$

Considerando o modelo da Fig. 12 sob excitação externa do motor acoplado na barra, a equação de movimento inclui a força de excitação harmônica do motor com relação à distância com a qual o motor está em relação ao centro de giro do sistema, resultando em:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-k h_m^2 \sin(\theta_1) - m_1 d_1 g \sin(\theta_1) - m_s h_s g \sin(\theta_1) - m_{motor} d_m g \sin(\theta_1) + F \cos(\omega t) d_M}{[I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}]} \quad (55)$$

Aplicando o princípio dos pequenos deslocamentos a Eq. 55 resulta em:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-k h_m^2 \sin(\theta_1) - m_1 d_1 g \sin(\theta_1) - m_s h_s g \sin(\theta_1) - m_{motor} d_m g \sin(\theta_1) + F \cos(\omega t) d_M}{[I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte}]} \quad (56)$$

Para o modelo do Caso 2 com AMSP em vibração forçada, a equação com relação ao ângulo de rotação da barra, é dada pela Eq. 57 e a equação do ângulo de rotação do pêndulo é dada pela Eq. 58:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 [I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte} + m_2 h_1^2] + m_2 h_1 h_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \\ -\theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k h_m^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + m_1 d_1 g \sin(\theta_1) + m_2 h_1 g \sin(\theta_1) + \\ + m_2 h_2 g \sin(\theta_2) + m_s h_s g \sin(\theta_1) + m_{motor} d_m g \sin(\theta_1) + m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \\ -\theta_2) = F_0 \cos(\omega t) d_M \end{aligned} \quad (57)$$

$$m_2 h_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 h_1 h_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 h_2 g \sin(\theta_2) = 0 \quad (58)$$

O sistema de equação de movimento do presente problema do Caso 2 com o AMSP é dado conforme segue:

$$\begin{bmatrix} [I_{barra} + I_{motor} + I_{suporte} + m_2 h_1^2] & m_2 h_1 h_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 h_1 h_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 h_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \quad (59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - k h_m^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) - m_1 d_1 g \sin(\theta_1) - m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ + (F \cos(\omega t) d_M) - m_{motor} d_m g \sin(\theta_1) - m_2 h_2 g \sin(\theta_2) - m_s h_s g \sin(\theta_1) - m_2 h_1 g \sin(\theta_1) \\ m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 h_2 g \sin(\theta_2) \end{array} \right\}$$

## 5 METODOLOGIA

### 5.1 METODOLOGIA NUMÉRICA

Partindo dos modelos e equacionamentos desenvolvidos nos Capítulos 4.1 e 4.2, foram desenvolvidos algoritmos em Matlab para cada sistema, os quais constam no Anexo 1, com o intuito de plotar as respostas em vibração livre, considerando também a excitação externa em resposta forçada e a utilização do AMSP nos dois casos, separadamente.

As ferramentas do Matlab que foram utilizadas são: ODE45 para resolver sistema de equação diferencial por meio da aplicação do Método de Runge-Kutta de quarta ordem, possuindo um nível médio de precisão; a função *resample* para ajustar a curva gerada no domínio do tempo e a FFT- Transformada Discreta de Fourier para plotar a resposta no domínio da frequência, onde a transformada será aplicada à todas as colunas do sistema de equações, em função do tempo, e do número de pontos a serem considerados.

Os sistemas de equações foram inseridos no programa principal por meio de uma função representando o sistema na forma  $M(t,y)y' = F(t,y)$ , onde a matriz de massa não singular ( $M(t,y)$ ) e a matriz ( $F(t,y)$ ) são funções de entrada da equação de movimento do sistema a ser solucionado numericamente e ( $y'$ ) é a matriz coluna da redução de ordem aplicada nos deslocamentos angulares. O vetor tempo varia do tempo inicial ( $t_0$ ) para o tempo final ( $t_f$ ), de acordo com o tamanho do espectro de resposta esperado, com isso, o gráfico é formado considerando a matriz coluna de acelerações angulares referente às equações de movimento em função do tempo.

Numericamente, os resultados da análise do sistema do Caso 1 em vibração livre foram comparados com os resultados do sistema com o neutralizador dinâmico pendular, AMSP, e os resultados do sistema do Caso 1 em vibração forçada comparados com os resultados em vibração forçada com AMSP, a fim de verificar numericamente a eficiência do absorvedor no sistema do Caso 1, em vibração livre e em vibração forçada. Os resultados numéricos do Caso 1 serão comparados ainda com os resultados experimentais. Na sequência constam os resultados numéricos do Caso 2, em vibração forçada e vibração livre, analisando a resposta não linear do sistema.

A Tabela 2 contém os parâmetros e dados numéricos de entrada utilizados nos programas dos sistemas analisados nos Casos 1 e 2, conta com a identificação das variáveis, a

representação utilizada no programa e o valor da grandeza. Todas as simulações dos sistemas feitas em Matlab utilizaram estes dados de entrada de acordo com o solicitado em cada sistema.

**Tabela 2: Valores e unidades de medida dos dados de entrada dos algoritmos do Matlab.**

Descrição	Representação	Valor [unidade]
Massa da Barra	$m_1$	1,693 [kg]
Momento de Inércia da Barra	$I_{barra}$	0,09029 [kg m <sup>2</sup> ]
Comprimento até o Centro de Massa da Barra	$d_1$	0,200 [m]
Comprimento Total da Barra	$h_1$	0,400 [m]
Aceleração da Gravidade	$g$	9,81 [m/s <sup>2</sup> ]
Comprimento da haste do pêndulo	$h_2$	0,0404 [m]
Massa do Pêndulo	$m_2$	0,121 [kg]
Momento de Inércia do Suporte	$I_{suporte}$	0,00343 [kg m <sup>2</sup> ]
Distância do centro até o Suporte	$h_s$	0,350 [m]
Massa do Suporte da Mola	$m_s$	0,028 [kg]
Momento de Inércia do Motor	$I_{motor}$	0,022032 [kg m <sup>2</sup> ]
Massa do Motor Acoplado	$m_{motor}$	0,387 [kg]
Comprimento até o centro de massa do motor	$d_m$	0,240 [m]
Rigidez da Mola	$k$	14907,93056 [N/m]
Posicionamento da Mola na Barra	$h_m$	0,350 [m]

**Fonte: Autora, 2018.**

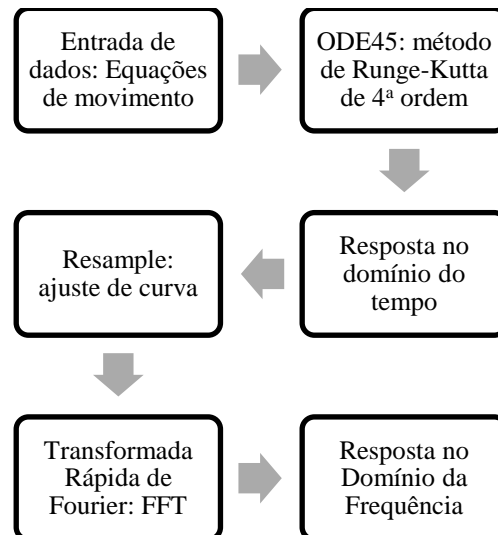
Para o modelo do Caso 1 em vibração livre e forçada, a respectiva função da equação de movimento conta com a solução de um sistema de equações diferenciais com duas variáveis de saída: a primeira variável da matriz coluna sendo o ângulo de rotação da barra e o segundo termo da matriz, sendo a equação de movimento em função do ângulo de rotação da barra, representando a aceleração angular, ou seja, a segunda derivada da função em relação ao tempo. Repete o processo para cada variável envolvida no sistema.

No programa principal, onde a função com a equação diferencial é carregada, aplica-se a ferramenta ODE45 na função, uma vez que essa ferramenta soluciona sistemas de equações diferenciais não lineares pelo método Runge Kutta de quarta ordem com ordem média de precisão, e plota-se o gráfico de  $\ddot{\theta}_1$  em função do tempo partindo de uma condição inicial dada. Para que seja aplicada a FFT em  $\ddot{\theta}_1$  em função do tempo, é necessário fazer um ajuste de curva por meio da aplicação da ferramenta *resample*, a qual faz a substituição das variáveis do gráfico do domínio do tempo por interpolação linear com base nas novas variáveis de  $y$  e  $t$ , uniformemente e com espaçoes ideias de acordo com a mínima variação de tempo da curva apresentada, realinhando ponto a ponto o gráfico. Por fim, é aplicada a FFT nas variáveis geradas pelo *resample* e então forma-se o gráfico da amostragem da frequência, considerando o teorema de Nyquist em função da menor variação de frequência no intervalo de tempo

desejado, em função da resposta absoluta da FFT aplicada sobre a matriz de dados da variável  $\ddot{\theta}_1$ .

O fluxograma do processo de solução numérica desenvolvido na presente dissertação consta na Figura 14.

**Figura 14: Fluxograma da solução numérica desenvolvida em Matlab.**



Fonte: Autora, 2018.

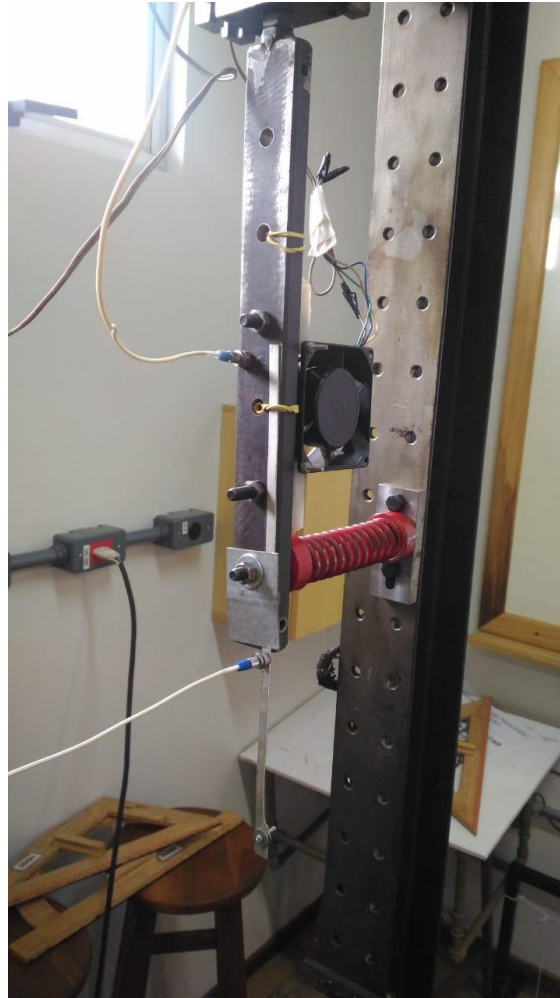
## 5.2 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

O modelo estrutural do Caso 1 consiste no sistema barra e mola com AMSP, com comprimento da haste ajustável em diversas alturas, cuja mola é fixada na extremidade inferior da barra a uma distância de 0,350 m do centro de giro do sistema, juntamente com a massa do suporte responsável pela fixação da mola no sistema. A fotografia da bancada experimental de ensaios de vibração com o sistema do Caso 1 montado é dada na Figura 15.

Em todas as medições foram utilizadas a barra e o AMSP de aço estrutural, uma massa de liga de alumínio utilizada como suporte do pêndulo, parafusos e porcas para a fixação das peças na bancada de testes de vibrações, dois acelerômetros piezoelétricos da Endveco modelo 256-100 e número de série 13666, com sensibilidade de 94,83 mV/g e indicado para frequências de 20Hz a 100Hz e o programa dbFA Suite para a leitura e processamento de dados. Os dois acelerômetros presentes na Figura 15 representam os dois canais de medição experimentais utilizados, sendo que o Canal 1 consiste no acelerômetro posicionado próximo ao centro de massa da barra do sistema e do motor de excitação e foi responsável pela medição dos sinais

experimentais referentes à aceleração angular da barra, e o Canal 2 posicionado na haste do pêndulo, logo abaixo da barra, medindo os sinais referentes à aceleração angular do pêndulo.

**Figura 15: Medição experimental do sistema do Caso 1.**



**Fonte: Autora, 2018.**

A rigidez da mola do sistema utilizada foi obtida experimentalmente por meio de um ensaio de tração desenvolvido por Andretta (2012, p. 68), utilizando de uma máquina universal de ensaios para medir a força e deslocamento das molas disponíveis no laboratório de dinâmica da UTFPR, Câmpus de Pato Branco, sendo esses os dados necessários para determinar a rigidez da mola experimentalmente. Andretta desenvolveu também o projeto da bancada de ensaios de vibrações mecânicas disponível no laboratório.

Na Tabela 3, estão elencadas as propriedades e dimensões dos itens envolvidos.

**Tabela 3: Propriedades da barra, pêndulo e mola.**

	Descrição	Propriedade [unidade de medida]
Barra	Material da barra	Aço estrutural 1020
	Comprimento Total	0,350 [m]
	Altura	0,0164 [m]
	Largura	0,0322 [m]
	Massa	1,693 [kg]
	Densidade do Material	7500 [kg/m <sup>3</sup> ]
	Diâmetro dos furos	0,001 [m]
	Quantidade de furos	5
	Distância entre furos	0,005 [m]
Pêndulo	Material	Aço 1020
	Massa do Pêndulo	0,121 [kg]
	Comprimento do cabo	0,041 [m]
	Espessura do cabo	0,0011 [m]
	Densidade do Material	2700 [kg/m <sup>3</sup> ]
Mola	Massa do cabo	0,005 [kg]
	Rigidez da mola	14907,93056 [N/m]

Fonte: Autora, 2018.

Para a medição e determinação das frequências experimentais do sistema e dos sinais de resposta do sistema, foram utilizados os itens dados pela Tabela 4:

**Tabela 4: Itens utilizados na medição experimental.**

Quantidade	Descrição do item
1	Bancada experimental de ensaios do laboratório de dinâmica – UTFPR/PB
1	Mola de ensaios de 14907, 93056 [N/m]
1	Barra retangular de aço 1020
-	Discos de aço e alumínio de massas variadas
2	Acelerômetro piezoelétrico de medição unidimensional
1	Cooler de massa desbalanceada- Q80A3
1	Haste metálica alumínio
2	Suportes metálicos de alumínio
-	Parafusos e porcas de fixação.

Fonte: Autora, 2018.

Inicialmente foi montado na bancada de vibrações o modelo em vibração livre do Caso 1, utilizando a barra e medida a frequência natural da barra considerando um deslocamento inicial, o qual foi um deslocamento aleatório cuja única finalidade era a de colocar o sistema em movimento, retirando-o da situação inercial inicial e velocidade inicial nula.

Na sequência, fixado na barra à 0,240 m do centro de giro do sistema, como motor de excitação externa foi utilizado um cooler de corrente contínua, cuja imagem consta na Figura 16, com massa desbalanceada e conectado à um inversor de frequências para que o sistema fosse excitado na faixa de frequências mais próxima possível da frequência natural experimental do sistema.

**Figura 16: Posicionamento do motor de excitação no sistema.**



**Fonte: Autora, 2018.**

Uma vez calibrado o sistema com a excitação do motor, o pêndulo é acoplado na estrutura, dando continuidade à medição dos modos de vibração da estrutura, sob excitação, com AMSP. Para a validação e otimização do sistema utilizaram-se os valores de massa e comprimento do cabo apresentados pela Tabela 5.

**Tabela 5: Massas e comprimentos de haste experimentais**

Massas [kg]	Comprimento do Cabo Experimental [m]
0,121	0,041
0,105	0,043
0,055	0,052
0,029	0,066
0,014	0,082
0,008	0,110
0,004	0,126

**Fonte: Autora, 2018.**



Depois de realizadas as medições experimentais, os dados geraram gráficos no domínio do tempo e da frequência, esse último por meio da aplicação da FFT na curva resultante do domínio do tempo, no Matlab. Os sinais experimentais foram coletados com 2048 pontos de medição, representando um período de medição de 0,005 s e um tempo de medição de aproximadamente 35 s para cada sistema. O sistema de aquisição de dados utilizou dois acelerômetros, os quais foram descritos anteriormente, para a medição dos sinais de aceleração, o condicionamento dos sinais deu-se por meio de um conversor analógico-digital, o processamento pelo programa dbFa Suite e os gráficos pelo Matlab.

## 6 ANÁLISE DE RESULTADOS

Os resultados numéricos foram obtidos utilizando o programa Matlab implementando as equações de movimento dos sistemas dadas no Capítulo 4. O Capítulo 6.1 apresenta a otimização dos parâmetros do pêndulo. Os gráficos representam os primeiros segundos de simulação, porém a apresentação desses nas figuras dos Capítulos 6.2 e 6.3, referentes aos resultados numéricos e experimentais do Caso 1 e Caso 2, respectivamente, apresentam variações na escala do tempo, por facilitar a extração dos dados numéricos e a visualização da curva do sistema.

### 6.1 PARÂMETROS DO PÊNDULO

Dadas as fórmulas e parâmetros de otimização dispostos no Capítulo 3, nos itens 3.1 e 3.2, foram determinados os parâmetros do neutralizador dinâmico de vibração, sendo eles a massa do AMSP e o comprimento da haste do pêndulo, devidamente dispostos e atualizados nas Tabelas 3 e 4.

Considerando os valores dos parâmetros de otimização dados pela Tabela 6, assumindo os valores das propriedades do sistema dadas pela Tabela 2 do Capítulo 5.1, para a massa do sistema principal de  $m_1 = 1,693 \text{ Kg}$ , com a massa do AMSP de  $m_2 = 0,121 \text{ Kg}$ , resultando em um coeficiente de massa igual a  $\mu = 0,071$ . Geralmente, para sistemas com neutralizador dinâmico pendular, atuando em vibração livre, é considerado um percentual de relação entre a massa do sistema principal e a massa do absorvedor dinâmico entre 5% a 15% e normalmente opta-se pela relação entre as massas média em 10%. O coeficiente de massa determinado está dentro da faixa de valores percentuais, próximo ao índice mínimo recomendado, o que garante que os parâmetros do dispositivo não sobrecarregam a inércia do sistema principal e, conseqüentemente, garante a adequada dissipação de energia com a utilização do pêndulo.

**Tabela 6: Parâmetros de otimização do AMSP.**

Parâmetros de Otimização	Notação	Valor
Coefficiente de Massa	$\mu$	0,071470762
Coefficiente de frequência ótimo	$\alpha_{\text{ótimo}}$	0,933296582
Fator de Amortecimento Ótimo	$\xi_{\text{ótimo}}$	0,181572606
Comprimento do Cabo Otimizado	$L_{\text{ótimo}}$ [m]	0,0404

**Fonte: Autora, 2018.**

Para as configurações do sistema com o pêndulo, a massa do dispositivo AMSP acoplado à estrutura principal, quando muito grande, ou seja, superior aos 15 % considerado como máximo valor indicado, sobrecarrega a estrutura e altera o momento de inércia da mesma, conseqüentemente varia a frequência natural do sistema e o equacionamento numérico, bem como a calibração do AMSP para aquela frequência natural são alterados, juntamente com todos os parâmetros do mesmo. Esse seria o principal motivo para estipular uma faixa considerada ótima para a relação entre a massa do dispositivo com a massa do sistema principal a ser amortecido: para que não houvesse alteração da inércia do sistema, ou essa alteração fosse mínima e seus efeitos pudessem ser descartados, utilizando assim o mesmo padrão de comparação dado pela frequência natural da estrutura, bem como os equacionamentos numéricos a serem validados, optou-se por utilizar experimentalmente e numericamente, massas pequenas. Conforme observado na Tabela 5, os valores das massas do AMSP utilizadas nas medições experimentais variam de 4 g até 121 g, resultando em um coeficiente de massa de 0,0024 a 0,71, respectivamente. Portanto, o máximo valor de massa utilizado nas medições define um coeficiente de massa próximo ao limite mínimo da faixa de percentual indicada para essa configuração de absorvedor pendular.

Conforme o exposto ao final do Capítulo 3.1, a obtenção do comprimento da haste do pêndulo, cujo valor numérico consta na Tabela 7, foi obtida determinando o valor da frequência a ser calibrado o pêndulo, a qual é igual ou o mais próxima possível à frequência de excitação do sistema e, dado um valor de massa do AMSP, obtém-se a rigidez equivalente do pêndulo, considerando o dispositivo pendular como um pêndulo rígido, o qual foi equacionado pelo método de Newton como um sistema massa e mola. Com o valor da rigidez equivalente para a massa do amortecedor dada, transformando então o deslocamento angular efetivo do pêndulo em deslocamento translacional, determinou-se o comprimento da haste utilizado numericamente, para aquelas configurações específicas.

Os valores da massa e comprimento do cabo foram validados experimentalmente. As massas dadas pela Tabela 5 da metodologia experimental, Capítulo 5.2 foram acopladas no pêndulo junto à estrutura principal, experimentalmente. Na sequência, foi calibrada a massa do pêndulo à frequência natural e assim determinado o comprimento experimental da haste para aquela massa, conforme descrito na metodologia experimental do Capítulo 5.2. Uma vez obtidos os comprimentos ótimos para cada valor de massa medida, foi determinado o valor do comprimento da haste numérico para cada valor de massa.

Observa-se na Tabela 7 as medições experimentais realizadas em seus respectivos códigos de identificação, os quais contém a informação do valor da massa do pêndulo indicados por (M) seguido do valor numérico e a unidade de medida e a indicação do comprimento dada por (L) seguida do valor numérico e a unidade, sendo que foi utilizada a letra (p) para indicar a presença do ponto nos valores decimais. Importante ressaltar que para todas as medições experimentais foi mantida constante a frequência natural do sistema e variaram-se apenas os parâmetros a serem selecionados. Nota-se que os valores dos comprimentos da haste do pêndulo experimentais e numéricos apresentam pequenas diferenças entre eles, ou seja, os valores estão aproximados.

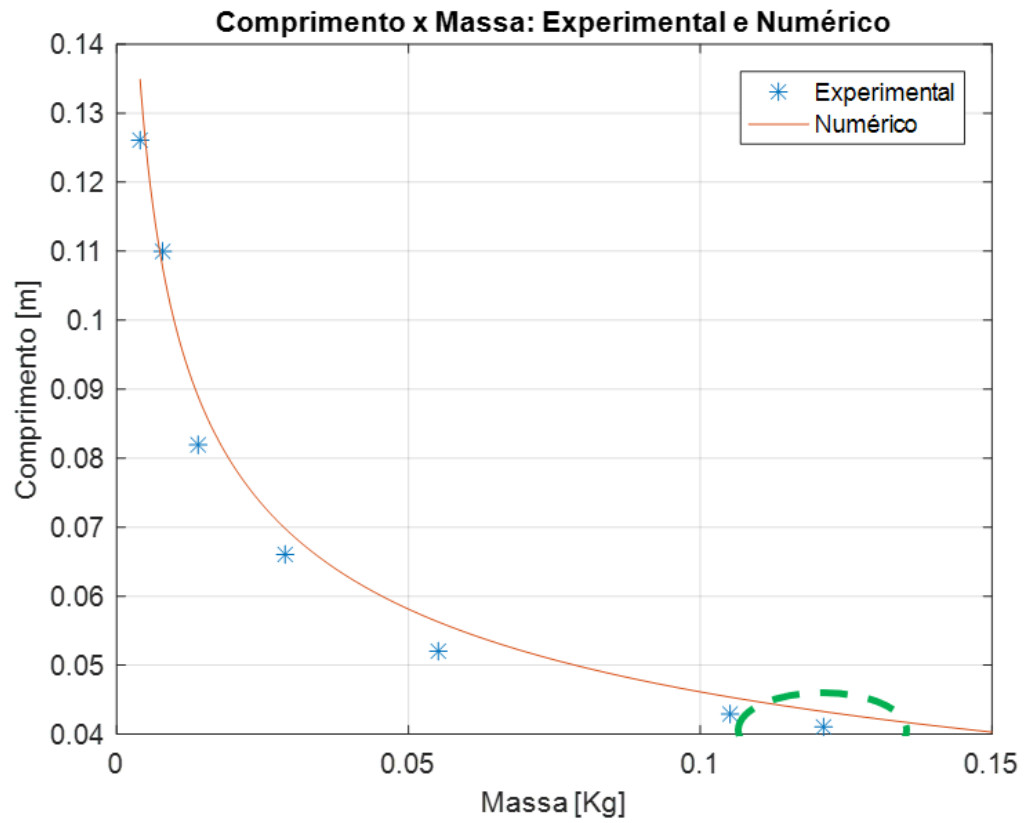
**Tabela 7: Valores de massa do AMSP e seus respectivos comprimentos numéricos, experimentais e o percentual de diferença entre eles.**

Medição	Massas [kg]	Comprimento do Cabo Experimental [m]	Comprimento do Cabo Numérico[m]	Diferença em módulo [m]	Diferença [%]
<b>M121gL4p1cm</b>	<b>0,121</b>	<b>0,041</b>	<b>0,0404</b>	<b><math>6 \times 10^{-4}</math></b>	<b>1,48</b>
M105gL4p3cm	0,105	0,043	0,0424	$6 \times 10^{-4}$	1,41
M55gL5p2cm	0,055	0,052	0,0526	$6 \times 10^{-4}$	1,14
M29gL6p6cm	0,029	0,066	0,0651	$9 \times 10^{-4}$	1,38
M14gL8p2cm	0,014	0,082	0,0830	$1 \times 10^{-3}$	1,20
M8gL11cm	0,008	0,110	0,1000	$1 \times 10^{-2}$	10
M4gL12p6cm	0,004	0,126	0,1260	0	0

Fonte: Autora, 2018.

Utilizado as massas e os comprimentos, foi obtido o gráfico da Figura 17, onde os pontos discretos em azul representam a relação do comprimento experimental com a massa experimental e a linha em vermelho a massa com seu respectivo comprimento numérico. A curva é uma exponencial, onde pontos e valores presentes na faixa mais linear da curva apresentam uma maior aproximação dos parâmetros considerados ótimos para a configuração do dispositivo de amortecimento do tipo pêndulo rígido, AMSP. A região de confiabilidade é representada no gráfico com a linha tracejada em verde e o ponto discreto localizado no centro dessa região é referente ao coeficiente de massa do pêndulo em relação à massa do sistema principal,  $\mu = 0,071$ , para a medição com os parâmetros selecionados, M121gL4p1cm.

Figura 17: Variação do comprimento da haste do AMSP em relação à variação da massa

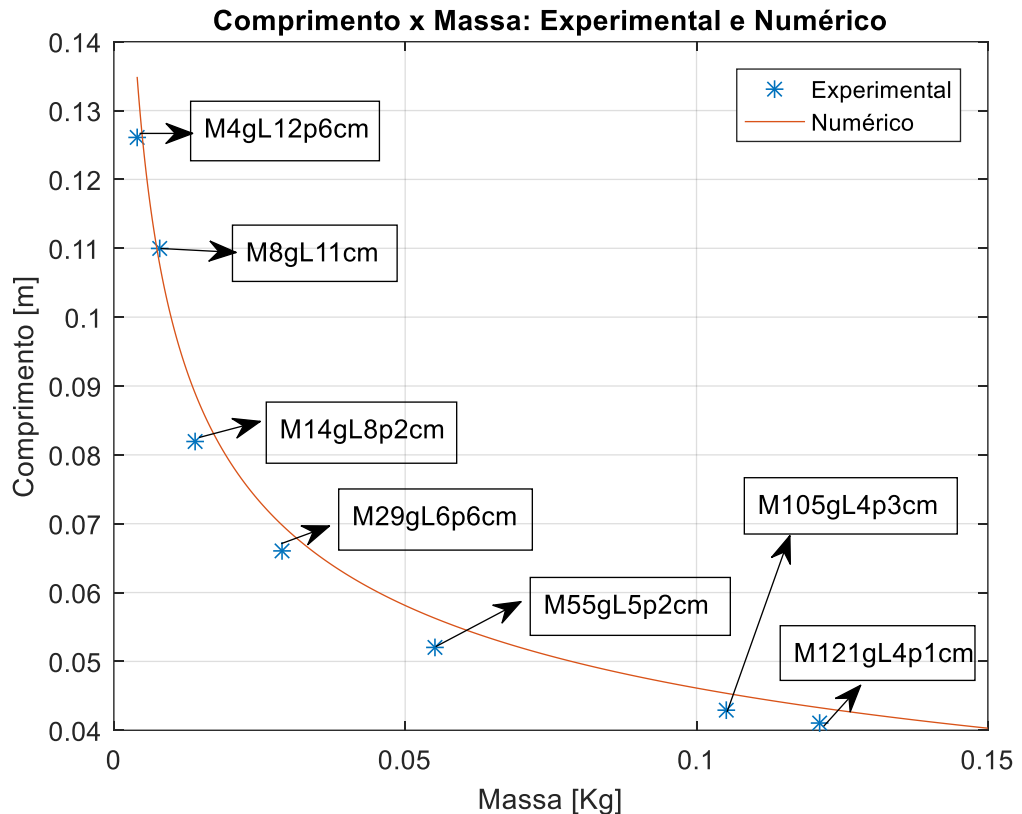


Fonte: Autora, 2018.

A massa do pêndulo selecionada foi de 120 g acrescido de 1 g referente ao cálculo analítico realizado considerando a densidade do material da haste do pêndulo, de  $2700 \text{ kg/m}^3$  para a liga de alumínio, dado disposto na Tabela 3 do Capítulo 5.2, em função do volume de material localizado na área em que a massa do AMSP se encontra fixada na barra de alumínio da haste utilizada experimentalmente, com a finalidade de considerar a massa da haste concentrada nessa região do pêndulo. Porém é válida a variação desse valor de massa, com tolerância ligeiramente maior e menor, levando em conta que o coeficiente de massa deve permanecer próximo ao valor determinado para que os efeitos na inércia do pêndulo na variação da inércia do sistema principal do modelo sejam controlados e possa ser validada o sistema com AMSP como neutralizador dinâmico de vibrações.

A Figura 18 contém a medição experimental determinada e seus respectivos valores de massa e comprimento, sendo que os melhores resultados, tanto numéricos quanto experimentais, foram obtidos com os valores de 0,121 kg de massa do pêndulo e o comprimento de 4,1 cm experimental e 4,04 cm numérico, equivalendo a um percentual de diferença de 1,46%.

Figura 18: Valores experimentais e suas respectivas medições.



Fonte: Autora, 2018.

Considerando, para o sistema em vibração forçada do Caso 1, a frequência de excitação de 18,05 Hz medida pelo Canal 1 com amplitude de  $15,66 \text{ m/s}^2$  e pelo canal dois em  $0,08163 \text{ m/s}^2$ , resultados esses presentes no Capítulo 6.1, a Tabela 8 contém a frequência de excitação experimental medida pelos canais um e dois, para cada medição experimental dada e nomeada com a variação da massa e do comprimento do cabo do pêndulo. Nota-se que a medição que apresentou o maior percentual de redução da vibração na barra foi a primeira medição, com massa de 121 g e comprimento do cabo do pêndulo de 4,1 cm, experimental e numérico de 4,04 cm. Comparando a amplitude medida pelo Canal 1 com seu respectivo valor de amplitude original de  $15,66 \text{ m/s}^2$ , nota-se que o percentual de redução da amplitude de excitação na barra foi de 98,49%. Durante a realização da medição experimental do sistema do Caso 1 em vibração forçada, com o pêndulo, observou-se que à medida em que a vibração da barra era dissipada e reduzida, a amplitude do pêndulo aumentava com relação à amplitude inicial medida e isso foi confirmado graficamente. Tal efeito pode ser visualizado nos resultados da Tabela 8.

**Tabela 8: Valores de frequência de excitação e amplitudes medidas experimentalmente pelos Canais 1 e 2.**

Massas [kg]	Canal 1/ Frequência [Hz] / Amplitude [m/s <sup>2</sup> ]	Canal 2/Frequência [Hz] / Amplitude [m/s <sup>2</sup> ]
<b>0,121</b>	<b>19,54</b> <b>0,2352</b>	<b>19,54</b> <b>0,2273</b>
0,105	19,64 0,2776	19,64 0,2905
0,055	19,55 0,7622	19,55 1,542
0,029	19,44 1,345	19,44 1,723
0,014	19,27 3,456	19,27 4,898
0,008	18,82 5,477	18,82 7,977
0,004	18,87 6,575	18,87 7,567

Fonte: Autora, 2018.

Da Tabela 8, percebe-se que para todos os valores de massa utilizados, o valor da frequência de excitação experimental determinado para o sistema com AMSP em vibração forçada, medido tanto no Canal 1 quanto no Canal 2, apresentou o mesmo valor da frequência, o que indica que o sistema está em fase. Com a presença de um neutralizador dinâmico pendular no sistema, a defasagem das frequências medidas nos dois canais deveria ser verificada. Os valores da frequência estando em fase indicam um possível movimento de corpo rígido obtido no sistema experimentalmente, fato esse que pode ser justificado pelos valores do comprimento da haste determinados, os quais são pequenos e representam a haste do pêndulo curta com relação ao comprimento total da barra.

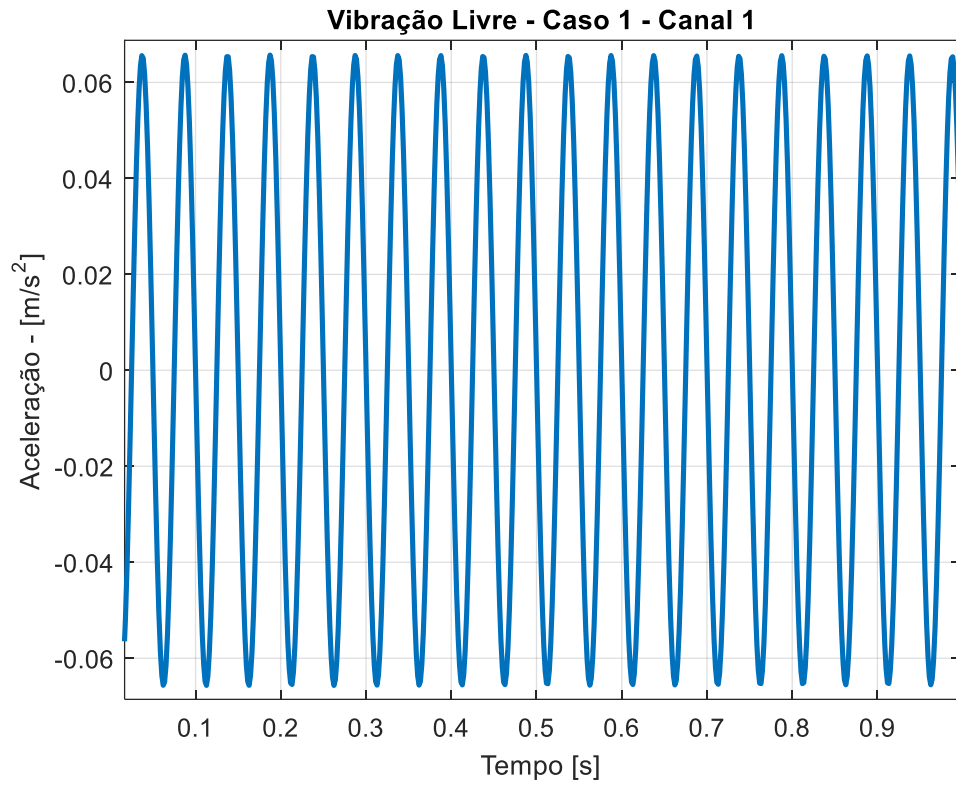
## 6.2 RESULTADOS DO CASO 1

A análise dos resultados conta com o gráfico da resposta do sistema no domínio do tempo e no domínio da frequência, para o sistema do Caso 1, em vibração livre e forçada, respectivamente apresentados na sequência.

### 6.2.1 Resultados Numéricos do Caso 1

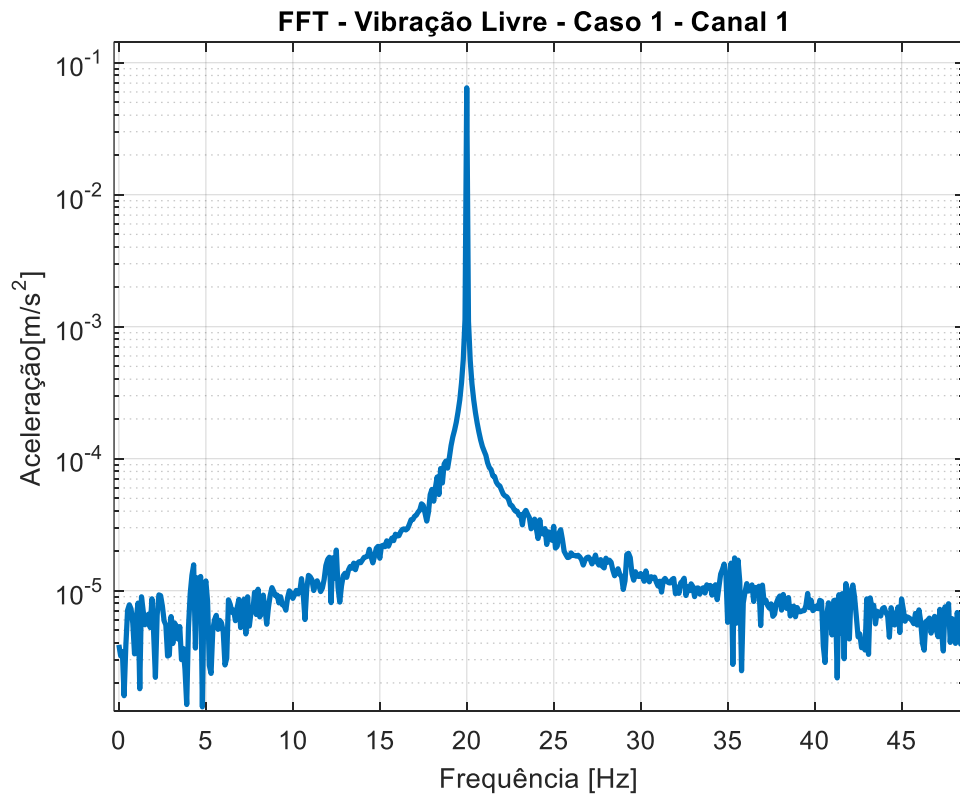
A Figura 19 contém o gráfico no domínio do tempo do Caso 1 em vibração livre e a Figura 20 o gráfico com a frequência natural, medida em 20 Hz e uma amplitude de aceleração de  $6,45 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ , a qual objetiva-se reduzir com o AMSP.

**Figura 19: Resposta no domínio do tempo do modelo em vibração livre do Caso 1.**



Fonte: Autora, 2018.

**Figura 20: Resposta no domínio da frequência do modelo em vibração livre do Caso 1**

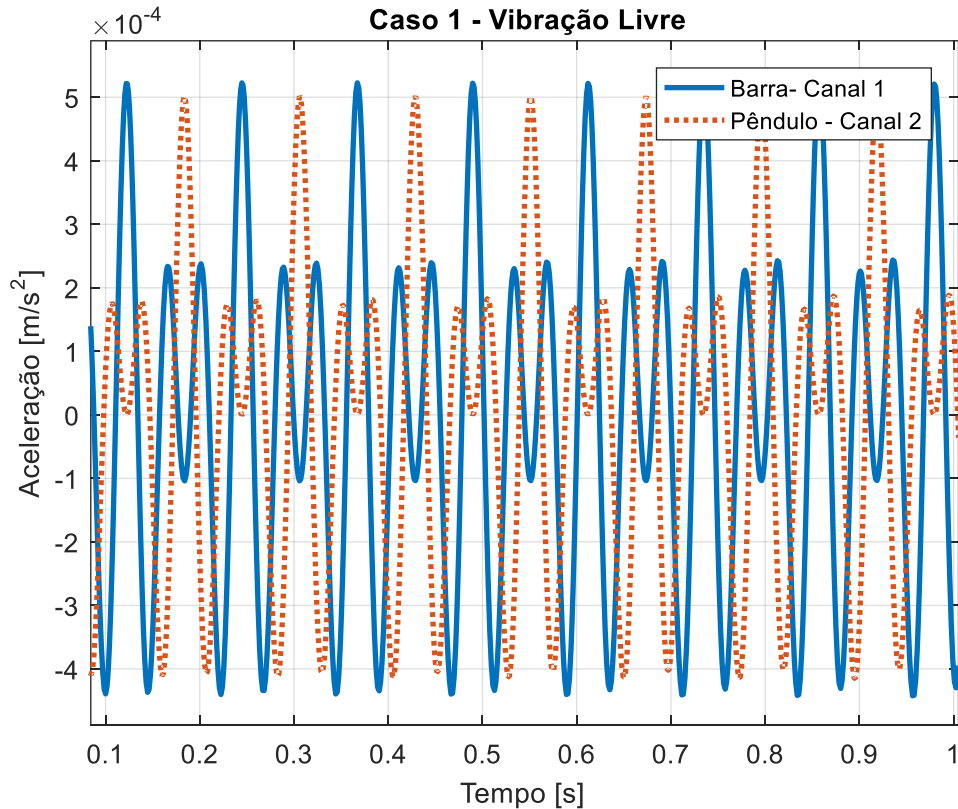


Fonte: Autora, 2018.



Acoplando o AMSP na extremidade inferior da barra, considerando as propriedades do pêndulo dadas pela Tabela 3 no Capítulo 5.2, é possível contemplar na Figura 21 a resposta no domínio do tempo para o sistema do Caso 1 com AMSP em vibração livre, sendo a linha em azul referente à curva da aceleração angular medida na barra e a linha pontilhada em laranja representando a aceleração do pêndulo medida no mesmo.

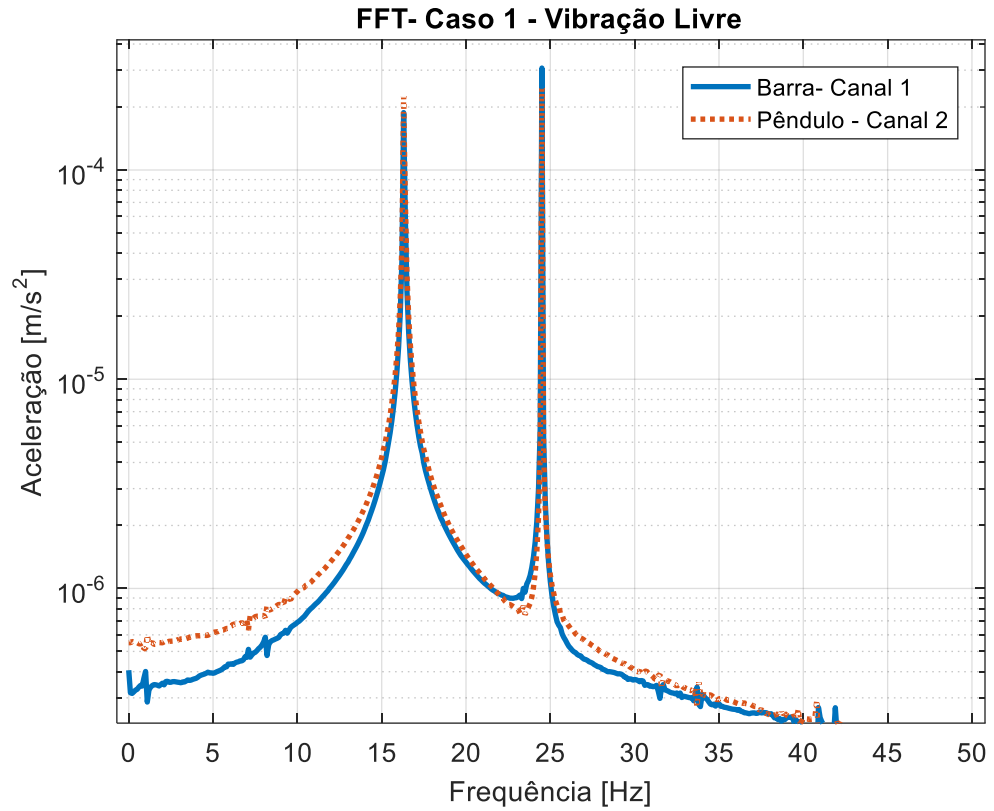
**Figura 21: Resposta no domínio do tempo do Caso 1 com AMSP em vibração livre.**



**Fonte: Autora, 2018.**

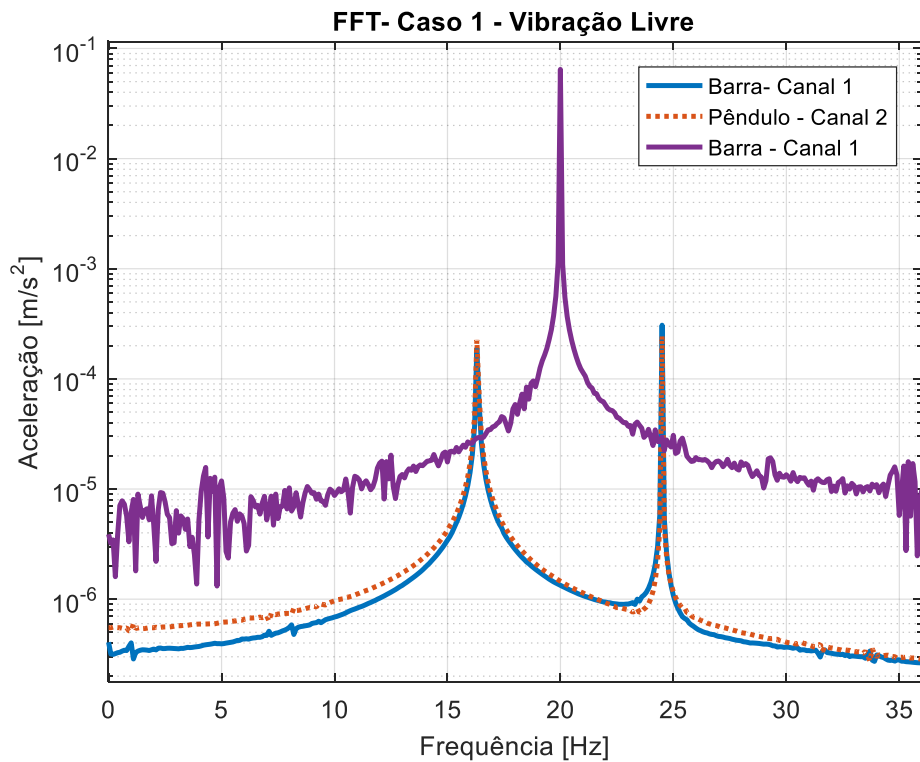
A Figura 22 contém a resposta no domínio da frequência para o sistema em vibração livre com AMSP. Percebe-se que a frequência natural do sistema de 20 Hz com o pêndulo dividiu-se em duas frequências: uma de 16,3 Hz, medida no pêndulo com aceleração angular de  $2,26 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$  e na barra aceleração angular de  $1,88 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$ . A segunda frequência presente no gráfico é de 24,5 Hz, na barra com  $2,46 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$  e no pêndulo com  $3,07 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$  de amplitude de aceleração. Comparando a resposta do sistema sob excitação externa com a resposta do sistema amortecido com o pêndulo, a Figura 23 apresenta a linha em roxo, referente à frequência natural do sistema dada pela Figura 20, sobreposta ao gráfico da Figura 22. É possível perceber analisando o gráfico que a redução da amplitude de frequência de  $6,45 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  na barra para amplitudes inferiores a  $3,07 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$ .

Figura 22: Resposta no domínio da frequência do modelo em vibração livre do Caso1 com AMSP.



Fonte: Autora, 2018.

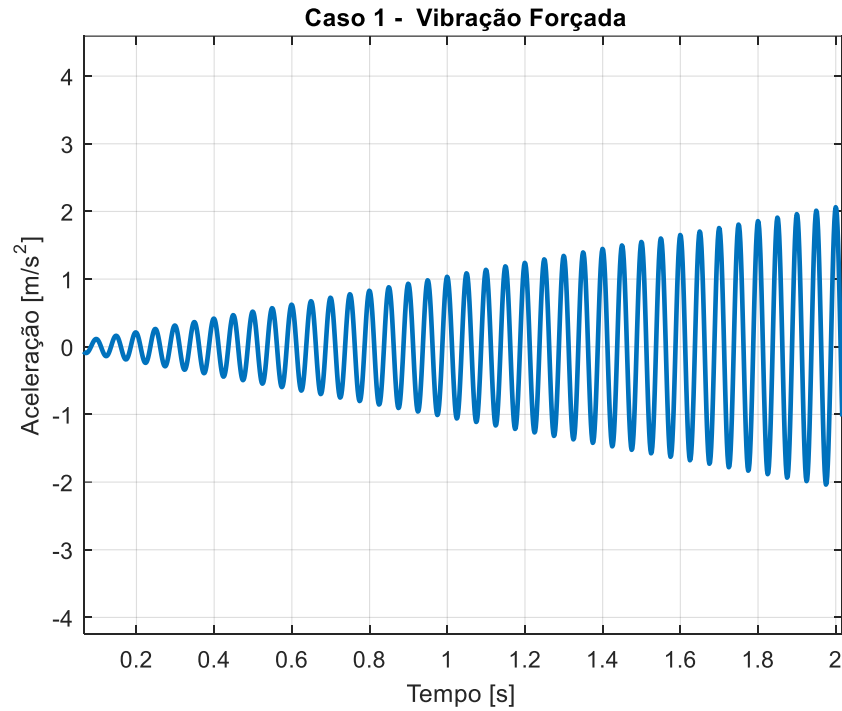
Figura 23: Gráficos da comparação da frequência natural do Caso 1 com AMSP em vibração livre.



Fonte: Autora, 2018.

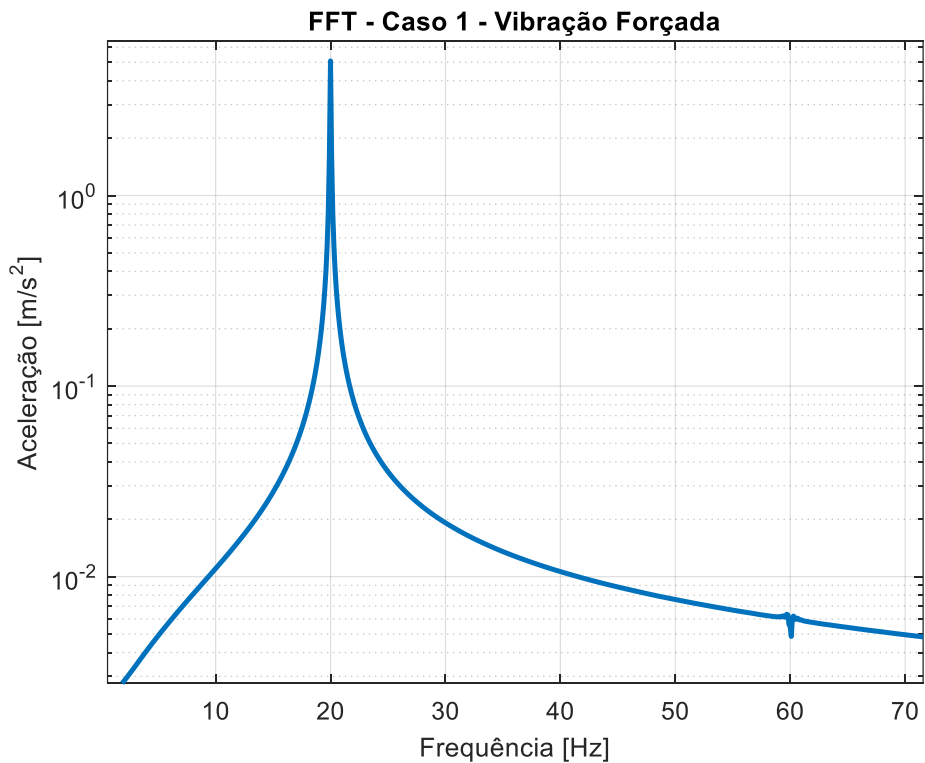
Considerando os gráficos das respostas do modelo do Caso 1 em vibração forçada no domínio do tempo, representado pela Figura 24, e no domínio da frequência, Figura 25.

**Figura 24: Resposta no domínio do tempo do Caso 1 em vibração forçada.**



Fonte: Autora, 2018.

**Figura 25: Resposta no domínio da frequência do Caso 1 em vibração forçada.**

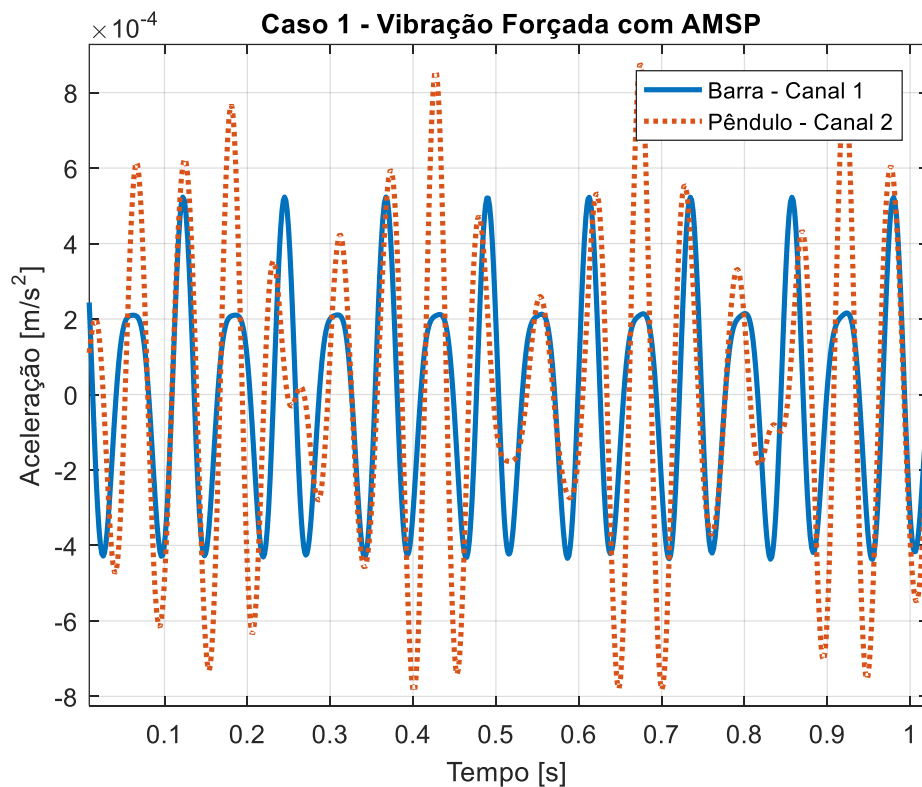


Fonte: Autora, 2018.

Na Figura 25, nota-se que como a frequência de excitação do sistema tem o mesmo valor da frequência natural, o sistema entra em ressonância e a frequência natural de 20 Hz e a frequência de excitação estão sobrepostas, com uma amplitude de  $5,084 \text{ m/s}^2$ .

Para o Caso 1, em vibração forçada, com pêndulo dissipando a energia do sistema, a resposta no tempo é apresentada na Figura 26. Nota-se, com relação a linha azul referente à aceleração angular da barra em função do tempo e a linha laranja referente à aceleração do pêndulo em função do tempo, a defasagem dos sinais entre as duas curvas, o que refere-se ao comportamento de um sistema com AMSP, onde o movimento da barra e o do pêndulo são opostos, de tal maneira que a vibração em excesso da barra é transmitida ao pêndulo, reduzindo as vibrações e seus efeitos na barra, adiantando ou retardando o movimento do pêndulo em relação ao da barra.

**Figura 26: Resposta no domínio da frequência do Caso 1 com AMSP em vibração forçada.**



**Fonte: Autora, 2018.**

Na Figura 27 consta a frequência medida em 20 Hz e  $3,15 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$ . O pico à esquerda mede 16,3 Hz com amplitudes de aceleração de  $3,86 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$  para o pêndulo e  $3,25 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$  para a barra, já o pico à direita tem 24,5 Hz e amplitudes para a barra de  $1,15 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$  e para o pêndulo de  $1,25 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$ . Na Figura 28 é dado o gráfico da comparação das respostas do sistema com o AMSP e nota-se a redução efetiva na amplitude da frequência de excitação.

Figura 27: Resposta no domínio da frequência do Caso 1 em vibração forçada com AMSP.

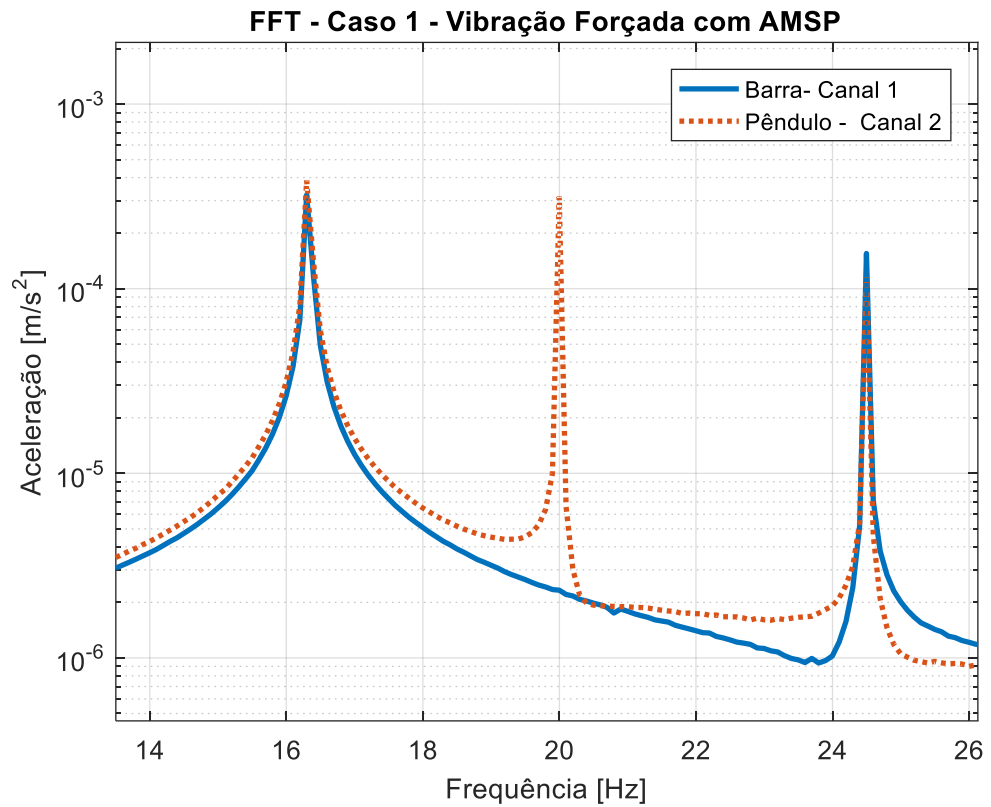
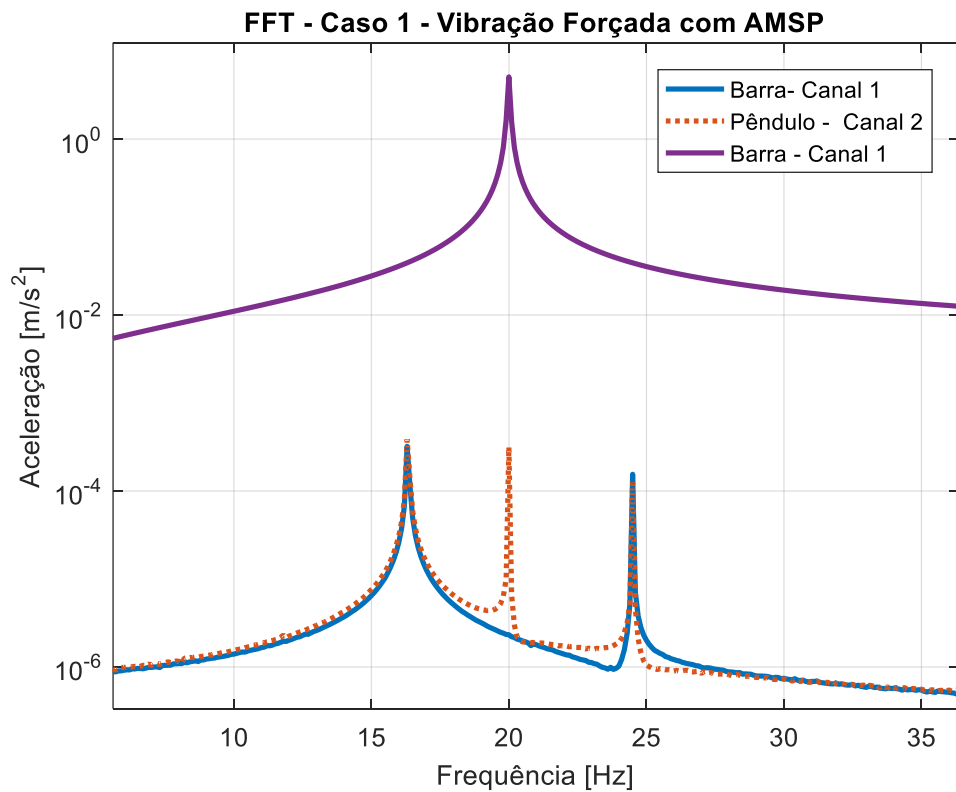


Figura 28: Gráfico da comparação da frequência de excitação do sistema com AMSP.

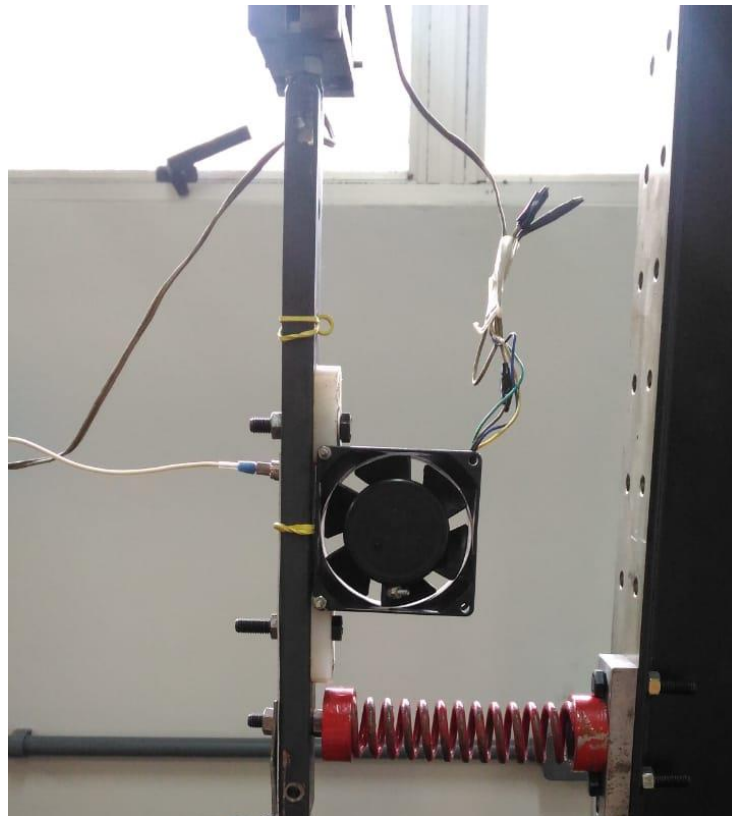


## 6.2.2 Resultados Experimentais do Caso 1

O valor selecionado do comprimento do pêndulo, considerando a rigidez da mola e as propriedades físicas do sistema, dados presentes na Tabela 3 no Capítulo 5.2, foi de 4,1 cm para a massa de 121 g e os resultados experimentais obtidos utilizaram desses parâmetros para serem definidos. Mediu-se a frequência natural do sistema em vibração livre, em 18,24 Hz.

A medição experimental do sistema do Caso 1 em vibração livre é mostrada na figura 29, onde o acelerômetro referente ao Canal 1 de medição está posicionado na barra conforme descrito na metodologia experimental dada no Capítulo 5.2, próximo ao centro de massa da barra, responsável por medir a aceleração angular do sistema.

**Figura 29: Montagem e medição experimental sistema do Caso 1.**



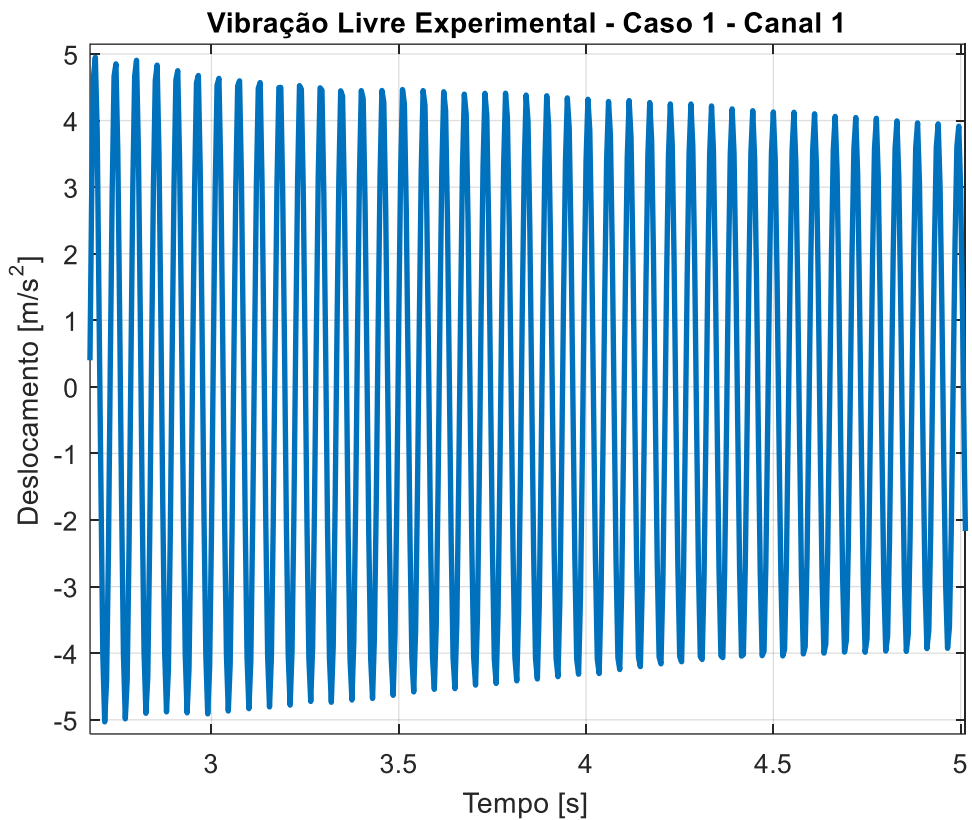
Fonte: Autora, 2018.

Medidos os sinais em frequência e magnitude, os dados foram inseridos no Matlab e determinados assim os gráficos dos sinais no domínio do tempo, considerando o período de tempo das medições de  $5 \times 10^{-3}$  s e o número total de elementos cuja média para as medições experimentais foram de 6000 pontos, parâmetro variável a cada medição. Em seguida, foi

aplicada a FFT para converter o sinal do tempo para o domínio da frequência e assim obter o valor da frequência natural do sistema para as condições dadas em cada situação.

Na Figura 30 é apresentada a resposta no domínio do tempo o sistema do Caso 1 em vibração forçada. Observa-se a amplitude da curva iniciando em aproximadamente  $5 \text{ m/s}^2$  e decaindo conforme enfraquece o sinal com relação ao deslocamento inicial ao qual a barra foi submetida. Esse fato dá-se justamente à presença do amortecimento da barra, o qual numericamente não foi considerado.

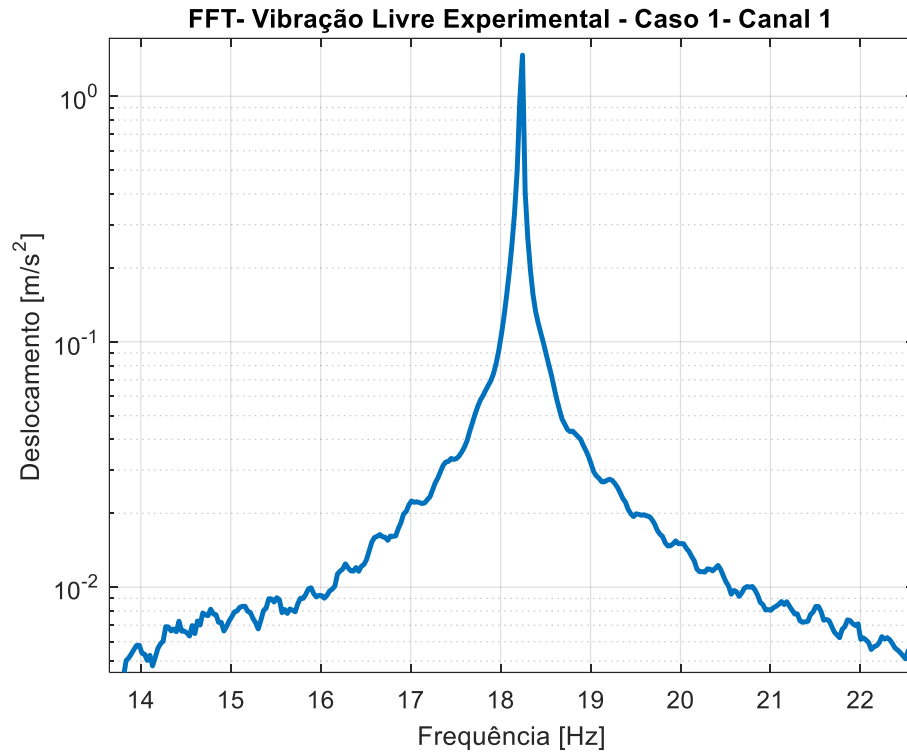
**Figura 30: Sinal Experimental no domínio do tempo do Caso 1 em vibração livre.**



**Fonte: Autora, 2018.**

Frequência natural do sistema foi medida experimentalmente em  $18,24 \text{ Hz}$  com uma amplitude de aceleração de  $1,471 \text{ m/s}^2$ , a qual é apresentada no gráfico da Figura 31.

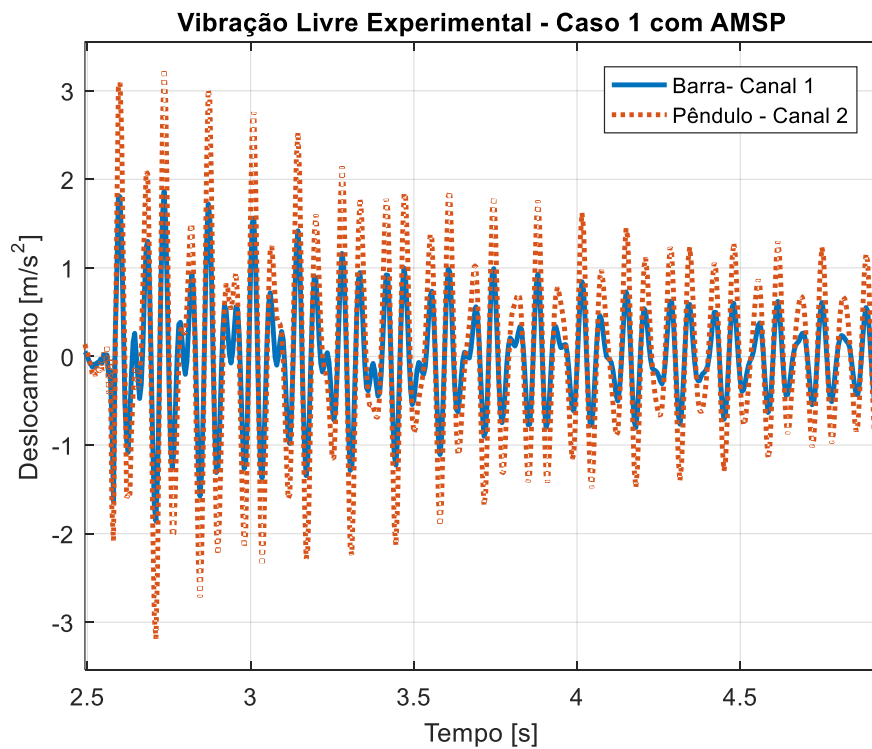
Figura 31: Frequência natural experimental do sistema do Caso 1 em vibração livre.



Fonte: Autora, 2018.

Na sequência, foi medida a resposta do sistema com AMSP pelos Canais 1 e 2 e a Figura 32 contém o gráfico da resposta no domínio do tempo.

Figura 32: Resposta no domínio do tempo do Caso 1 com AMSP em vibração livre.



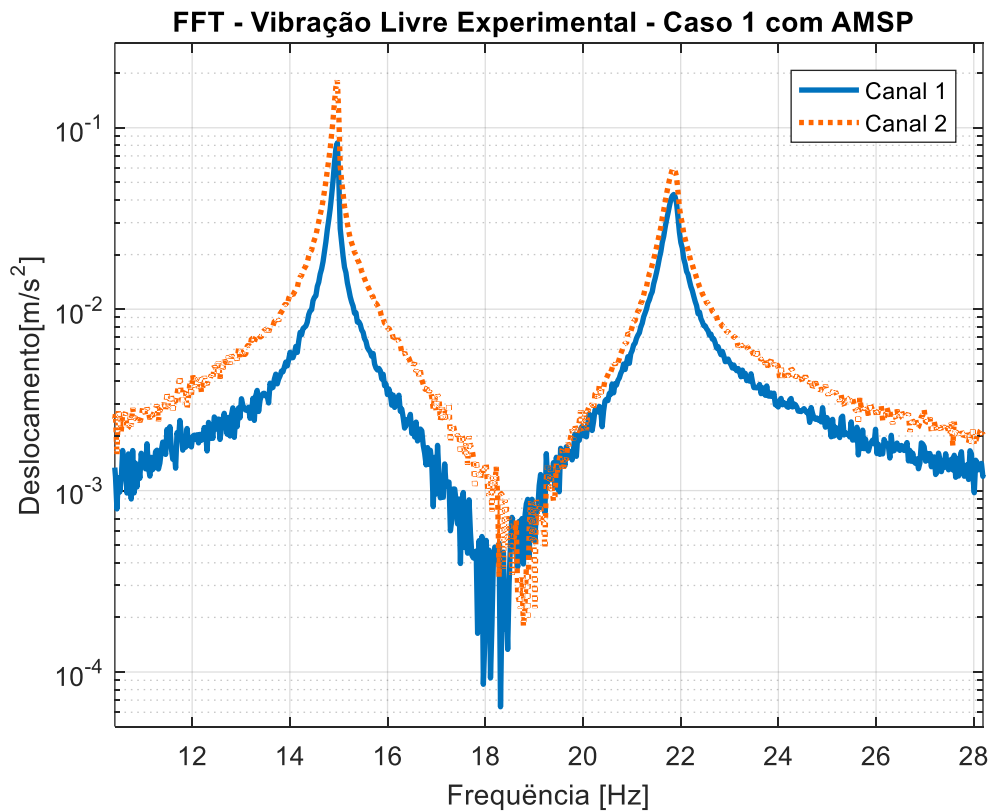
Fonte: Autora, 2018.



Na Figura 32, a linha em azul representa o sinal medido pelo Canal 1 e a linha pontilhada em laranja o sinal do Canal 2, onde é percebido que a amplitude de movimento do pêndulo é superior à amplitude da barra, o que é uma consequência desejada quando se utiliza um dispositivo pendular para amortecer a vibração dinâmica de um sistema. Outro fato importante a ser observado é a presença do amortecimento do sinal no sistema com pêndulo, devido à dissipação da energia pelo neutralizador dinâmico, representando assim a resposta amortecida do sistema, em regime permanente.

Observa-se na Figura 33 as respostas no domínio da frequência para os sinais da barra e do pêndulo representados pela linha em azul e a linha pontilhada em laranja, respectivamente. Com os parâmetros experimentais selecionados para o pêndulo, a frequência natural da barra foi medida partindo de um deslocamento inicial aleatório, apenas para tirar o sistema do estado inercial inicial. Com o pêndulo a frequência natural foi reduzida e dividida em duas frequências: 14,97Hz com amplitudes de  $8,26 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  na barra e  $18,23 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  no pêndulo e 21,86 Hz e amplitudes de  $4,29 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  na barra e  $5,97 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  no pêndulo.

**Figura 33: Resposta no domínio da frequência do Caso 1 com ASMP em vibração livre.**

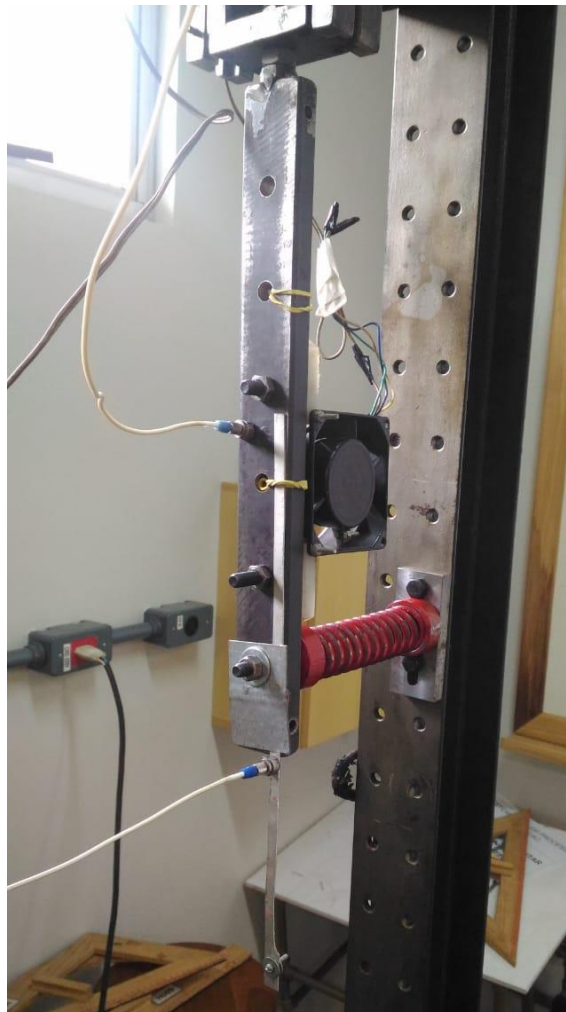


Fonte: Autora, 2018.

Com o motor de corrente contínua acoplado a 0,240 m do centro de giro do sistema, medindo a frequência natural da barra com o motor acoplado, o qual por alterar a inércia do sistema altera também a frequência natural e o comportamento dinâmico do mesmo, em 18,066 Hz e, uma vez que o motor excita externamente a barra, a frequência de excitação desse tem o valor mais próximo possível à frequência natural do sistema sob excitação.

A imagem do modelo do Caso 1 com o AMSP experimental utilizado é dada na Figura 34, onde o pêndulo foi conectado à barra de uma maneira que minimizasse os efeitos da inércia do mesmo sobre a barra do sistema principal, facilitando também o ajuste da altura e comprimento do pêndulo nas sucessivas medições realizadas e descritas na metodologia experimental do Capítulo 5.2. Importante ressaltar que os parâmetros do pêndulo representados na imagem se referem à última medição experimental realizada, utilizando de 4 g para a massa do pêndulo e 12,6 cm de comprimento de haste.

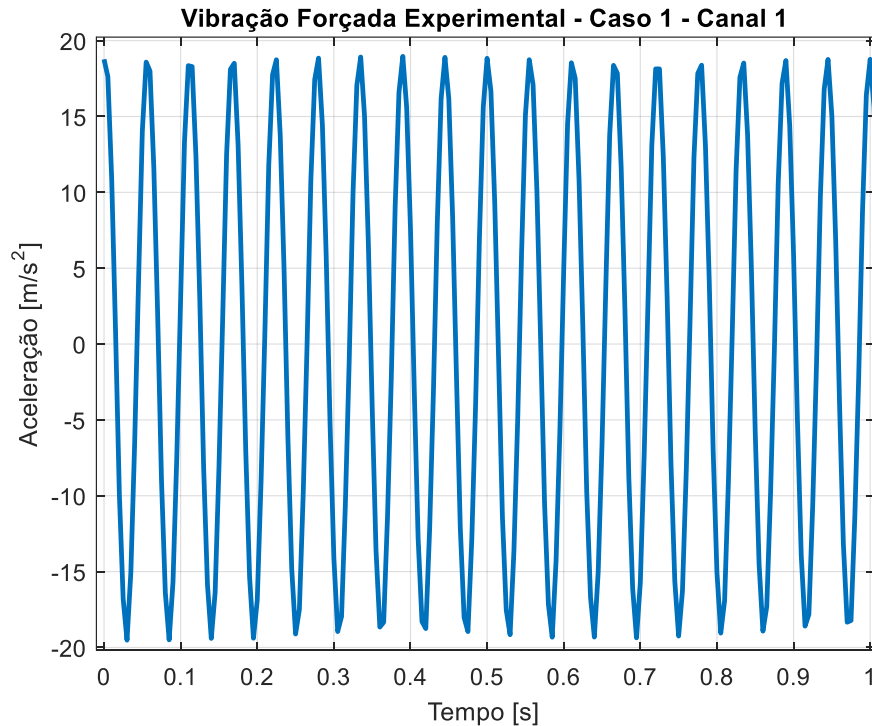
**Figura 34: Bancada experimental do Caso 1 com AMSP para medição do sistema em vibração forçada.**



Fonte: Autora, 2018.

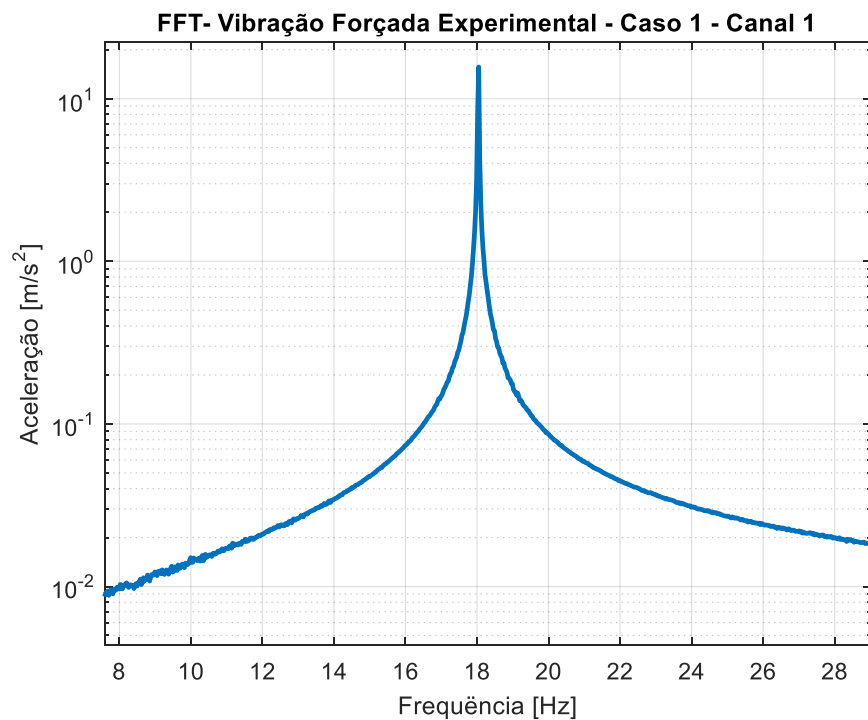
A resposta da barra do Caso 1 em vibração forçada é representada pelo gráfico da Figura 35, no domínio do tempo. A frequência natural sob excitação, na Figura 36, é de 18,05 Hz com amplitude de  $15,66 \text{ m/s}^2$ .

**Figura 35: Resposta Experimental no domínio do tempo do Caso 1 em vibração forçada.**



Fonte: Autora, 2018.

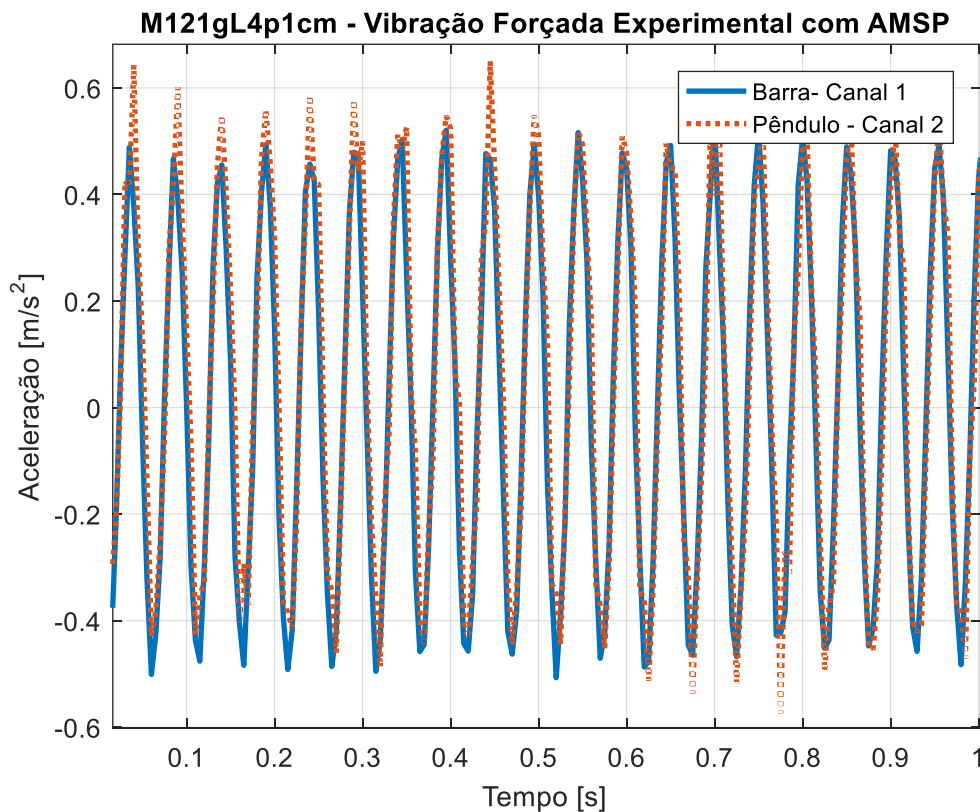
**Figura 36: Resposta experimental no domínio da frequência do Caso 1 em vibração forçada.**



Fonte: Autora, 2018.

Para reduzir a amplitude de aceleração do sistema do Caso 1 em vibração forçada utilizou-se o AMSP, cuja resposta no domínio da frequência consta no gráfico da Figura 37. Nota-se que a amplitude da barra apresentou valores próximos a  $0,5 \text{ m/s}^2$  e no pêndulo, representada pela linha pontilhada em laranja no gráfico, valores máximos ligeiramente superiores a  $0,6 \text{ m/s}^2$ . Quando o absorvedor é calibrado em uma frequência de excitação, ele atua na minimização dos efeitos causados por ela na estrutura principal e, com isso, o movimento desempenhado pelo pêndulo é defasado do movimento da barra, o que indica que o pêndulo efetivamente está amortecendo a vibração da estrutura principal. Caso a amplitude dos picos não apresente defasagem é um indicativo que tanto a barra quanto o pêndulo se movimentem simultaneamente, em mesma direção, e as curvas demonstrariam concordância em fase.

**Figura 37: Resposta no domínio do tempo do Caso 1 com AMSP .**

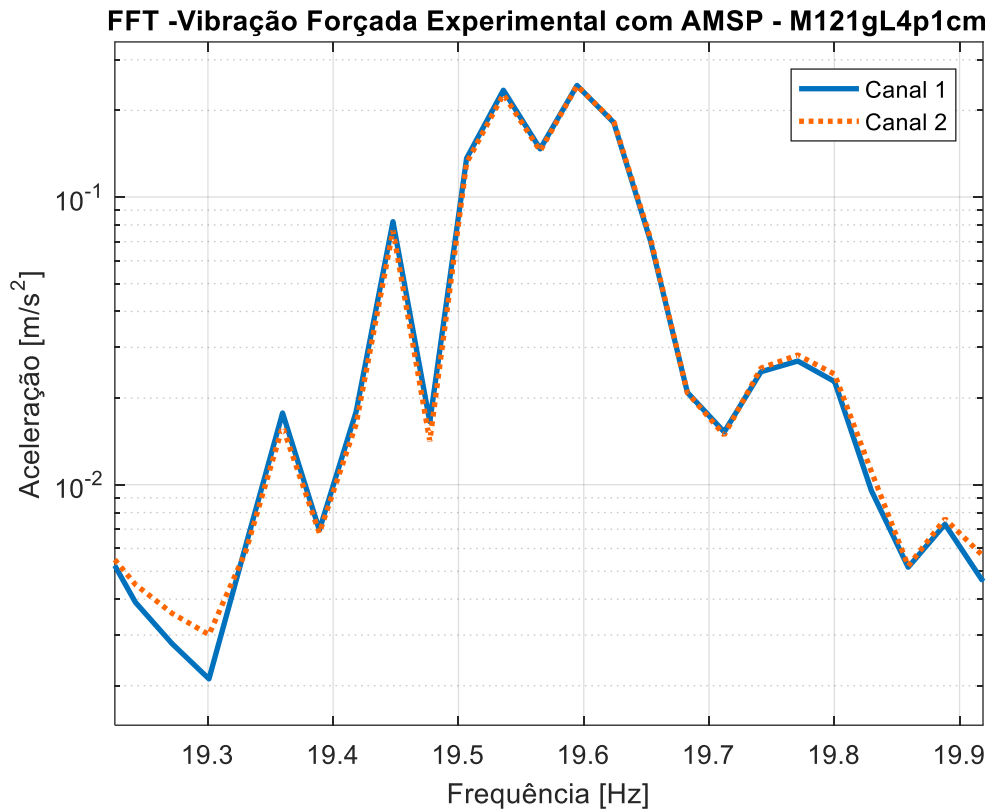


Fonte: Autora, 2018.

A linha pontilhada em laranja, na Figura 38, é referente a resposta do Canal 2 do sistema com AMSP sob excitação externa sobreposta à linha contínua em azul referente ao sinal medido no Canal 1, com a frequência natural determinada em  $19,54 \text{ Hz}$  e amplitude de  $23,52 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  no Canal 1 e  $22,73 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  no Canal 2. Como o gráfico representa a resposta

do sistema em regime permanente, foram medidos outros valores de frequência, nos Canais 1 e 2, respectivamente, sendo elas de 19,45 Hz e amplitudes de aceleração de  $8,21 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  e  $7,65 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  e 19,59 Hz com  $24,43 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  e  $24,36 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  de amplitude, localizadas no centro do gráfico.

**Figura 38: Resposta em frequência do Caso 1 com AMSP.**

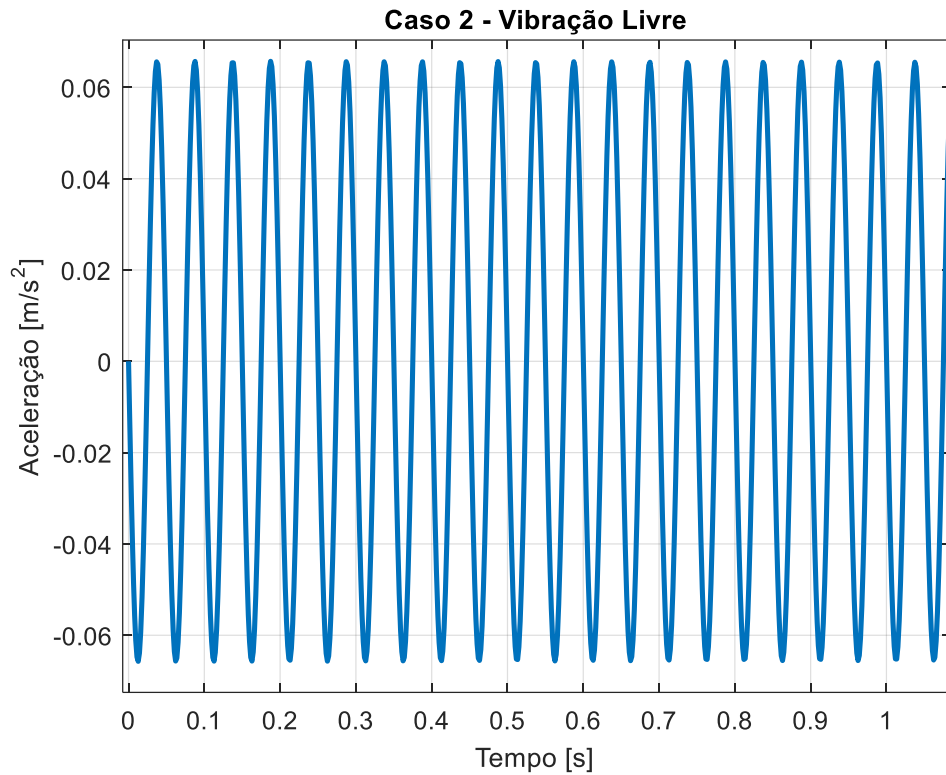


Fonte: Autora, 2018.

### 6.3 RESPOSTA NUMÉRICA: CASO 2

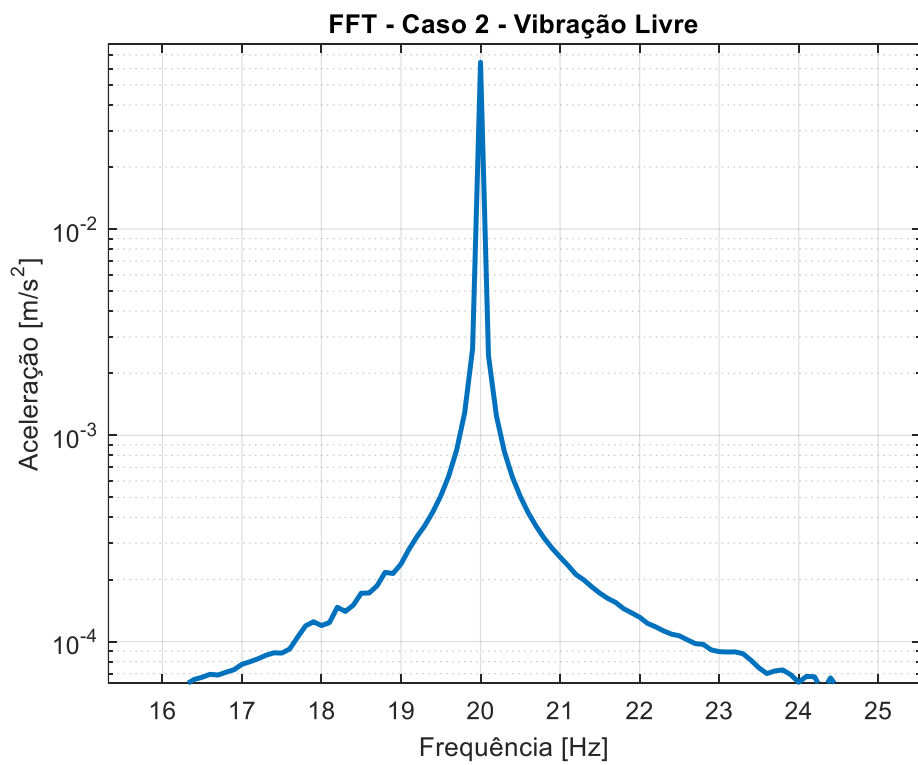
Considerando o equacionamento desenvolvido pelo método de Lagrange apresentados no Capítulo 4.2, foram formados os gráficos no domínio do tempo, presente na Figura 39, e no domínio da frequência, Figura 40, para o sistema do Caso 2 em vibração livre, onde a frequência natural do sistema é dada em 20 Hz com amplitude de aceleração de  $6,44 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ , por meio de uma aproximação numérica do sistema não linear dada pela aplicação do método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem.

Figura 39: Resposta numérica no domínio do tempo do Caso 2 em vibração livre.



Fonte: Autora, 2018.

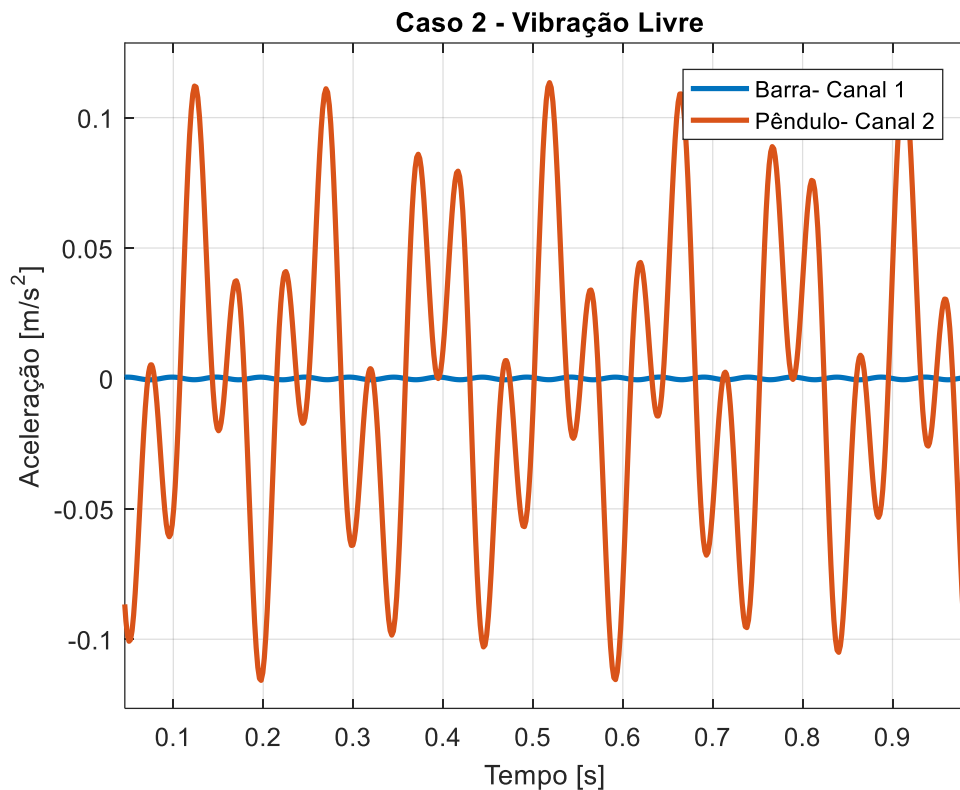
Figura 40: Resposta numérica no domínio da frequência do Caso 2 em vibração livre.



Fonte: Autora, 2018.

Com o pêndulo no atuando como neutralizador dinâmico de vibração no sistema do Caso 2, em vibração livre, a resposta da aceleração do sistema em função do tempo é apresentada na Figura 41. Percebe-se pelo gráfico que a amplitude da barra, linha contínua em azul, apresentou valores próximos à zero e no pêndulo, linha em laranja, apresentou valores de amplitude superiores, com amplitude máxima em torno de  $0,1 \text{ m/s}^2$ .

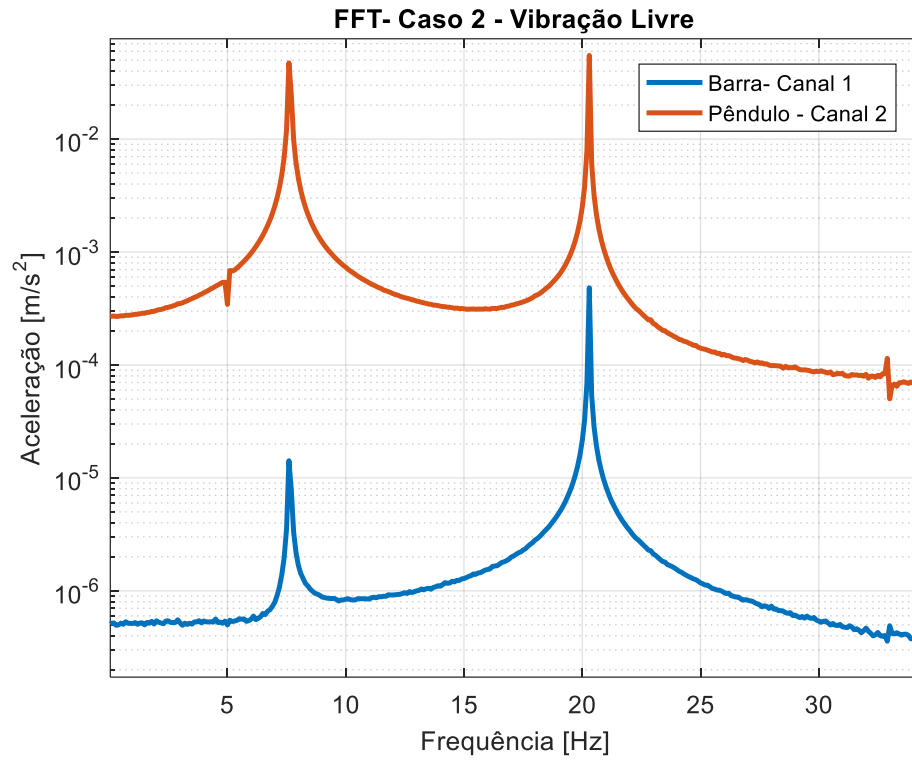
**Figura 41: Resposta numérica no domínio do tempo do Caso 2 com AMSP em vibração livre.**



**Fonte: Autora, 2018.**

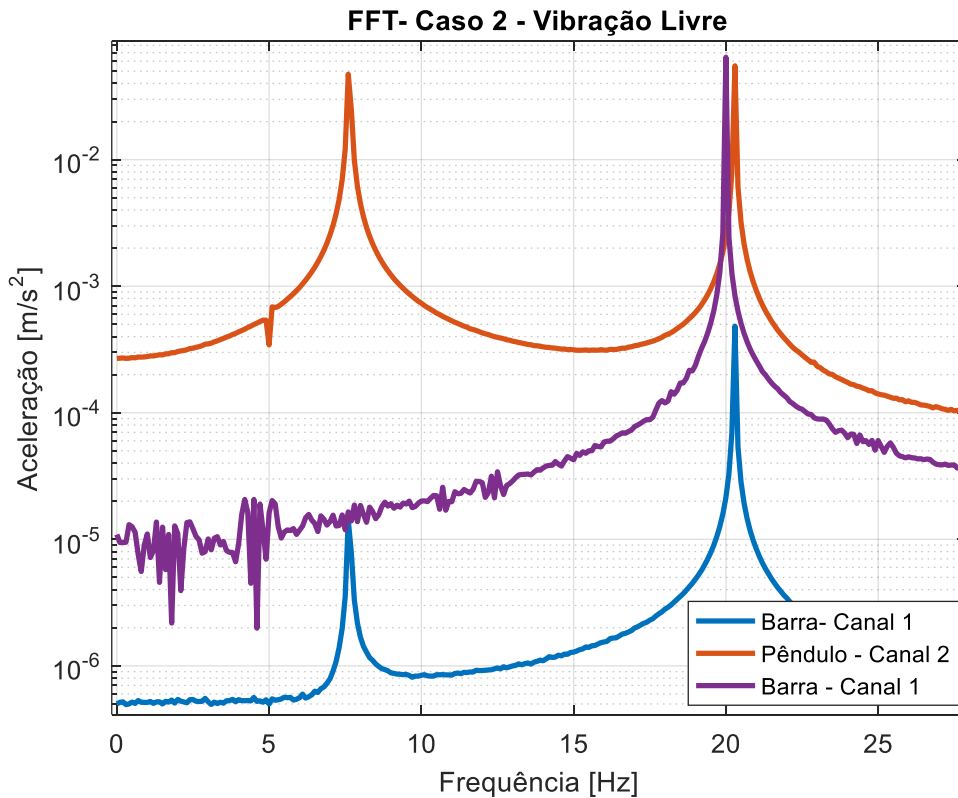
As frequências visualizadas no gráfico da Figura 42, apresentam picos de  $7,59 \text{ Hz}$  com amplitude na barra de  $1,42 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2$  e no pêndulo  $4,73 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ . O segundo pico, à direita no gráfico, tem valor de  $20,3 \text{ Hz}$  e amplitudes de  $5,51 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  e  $4,83 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$ , no pêndulo pelo Canal 2 e na barra, Canal 1, respectivamente. Comparando as respostas numéricas no domínio da frequência para o Caso 2 sem o pêndulo e com o neutralizador dinâmico pendular acoplado à barra do sistema, na Figura 43, onde a linha em roxo representa a frequência natural do sistema e vibração livre e com o AMSP ocorreu uma redução considerável da amplitude de vibração na barra, principalmente.

**Figura 42: Resposta no domínio da frequência do Caso 2 com AMSP em vibração livre.**



Fonte: Autora, 2018.

**Figura 43: Comparação das respostas no domínio da frequência do Caso 2 com AMSP em vibração livre.**

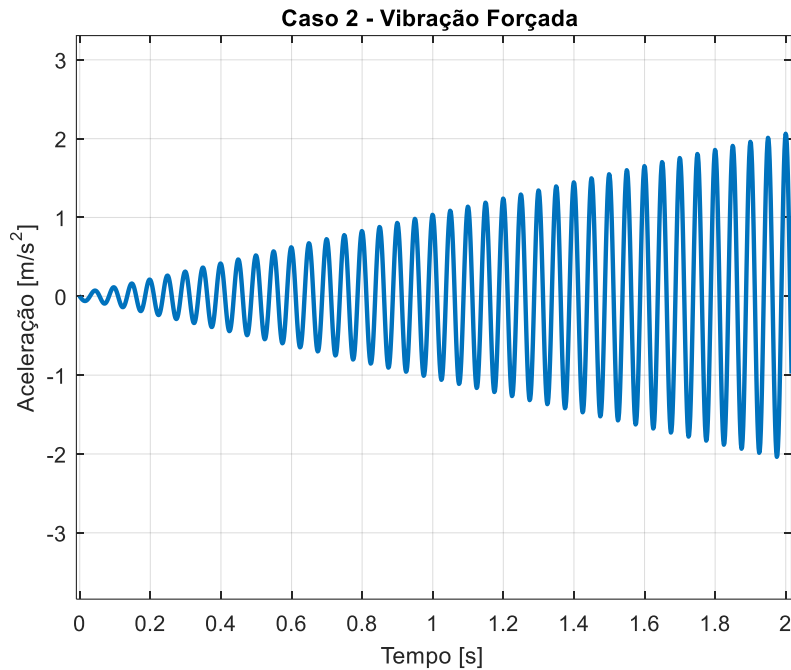


Fonte: Autora, 2018.



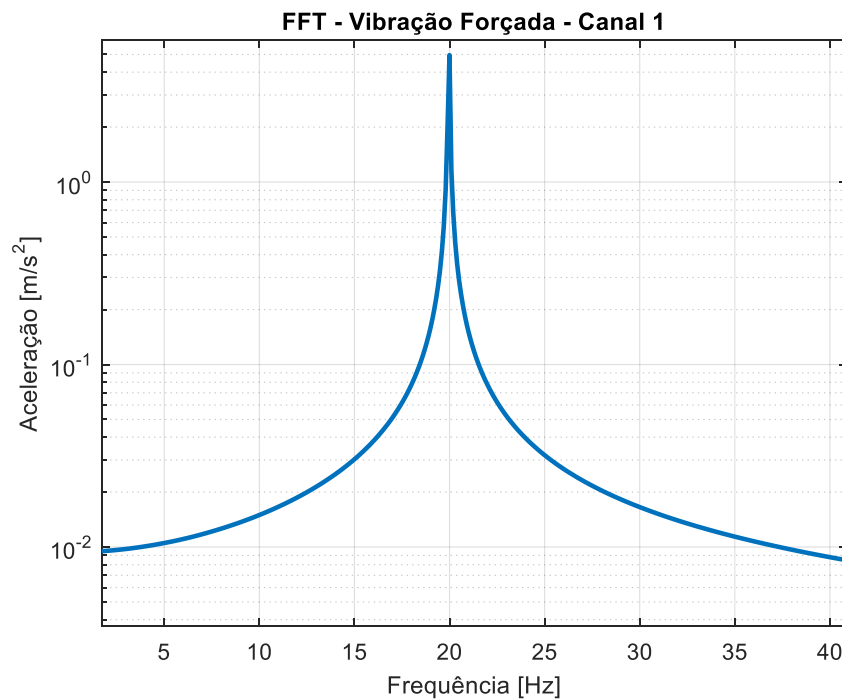
Para o sistema do Caso 2 em vibração forçada, a resposta no domínio do tempo é apresentada na Figura 44, e na Figura 45, a frequência natural da barra é de 20 Hz e 4,96 m/s<sup>2</sup> de amplitude.

**Figura 44: Resposta numérica no domínio do tempo do Caso 2 em vibração forçada.**



Fonte: Autora, 2018.

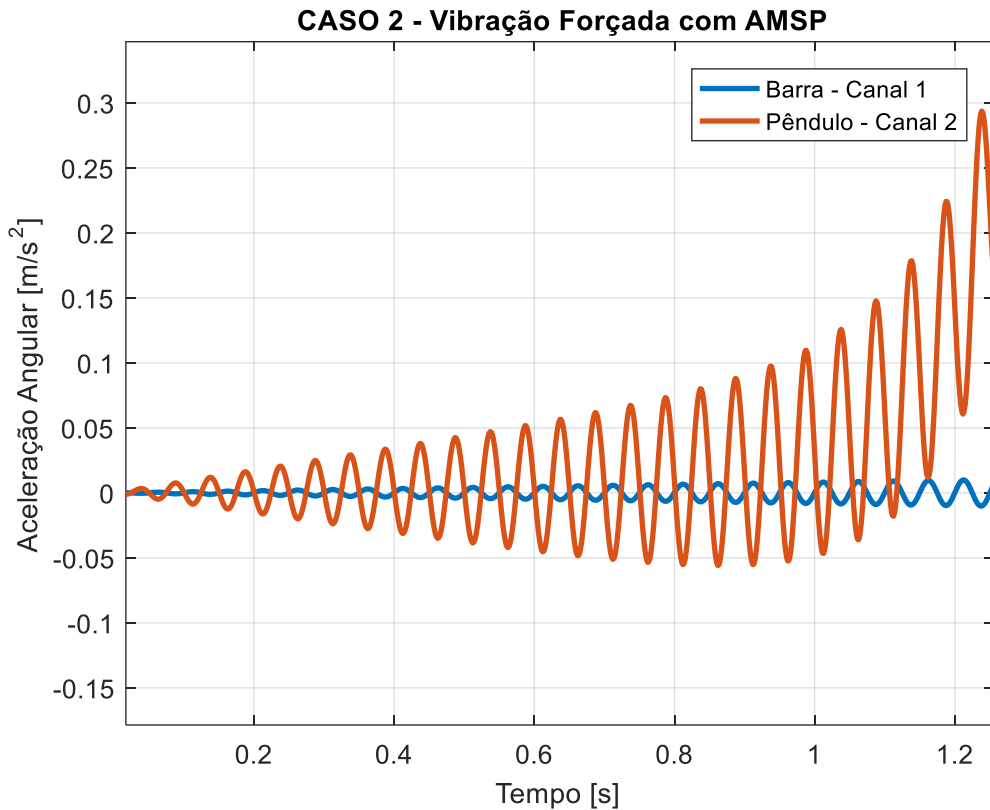
**Figura 45: Resposta numérica no domínio da frequência do Caso 2 em vibração forçada.**



Fonte: Autora, 2018.

Para o Caso 2 em vibração forçada com AMSP, a resposta no domínio do tempo é dada pela Figura 46, onde observa-se a amplitude de aceleração do pêndulo com valor máximo de  $0,3 \text{ m/s}^2$  e na barra valores próximos a zero.

**Figura 46: Resposta numérica no domínio do tempo do Caso 2 com AMSP em vibração forçada.**



**Fonte: Autora, 2018.**

O gráfico no domínio da frequência, na Figura 47, apresenta a linha em laranja referente à medição do Canal 2 e a linha em azul referente ao Canal 1. Para o sistema do Caso 2 com AMSP em vibração forçada, são observados picos de frequência na barra de 19,4 Hz e amplitude de  $8,92 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$  e 21,2 Hz com  $1,38 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$  de amplitude. As frequências registradas pela medição do sinal no pêndulo foram de 20,3 Hz e  $7,26 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  de amplitude e 20,9 Hz com amplitude de  $2,94 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ . No gráfico da Figura 48 é possível comparar a resposta do sistema em vibração forçada sem o pêndulo, representada pela linha contínua em roxo, com esses valores de frequência medidos com o pêndulo acoplado no sistema. Observa-se que a resolução da resposta do sistema com AMSP dificulta a coleta de dados referente aos picos de frequência em que a frequência de excitação foi reduzida, devido à presença de harmônicos de frequência diversos no gráfico, tanto no pêndulo quanto na barra.

Figura 47: Resposta no domínio da frequência do Caso 2 com AMSP em vibração forçada.

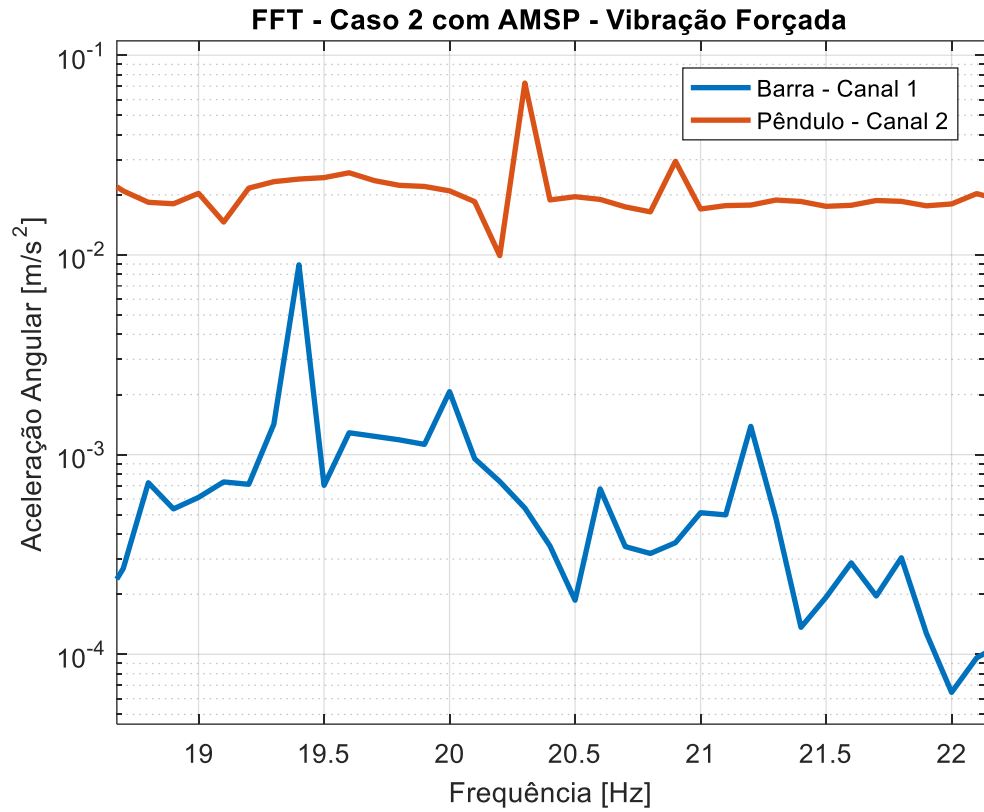
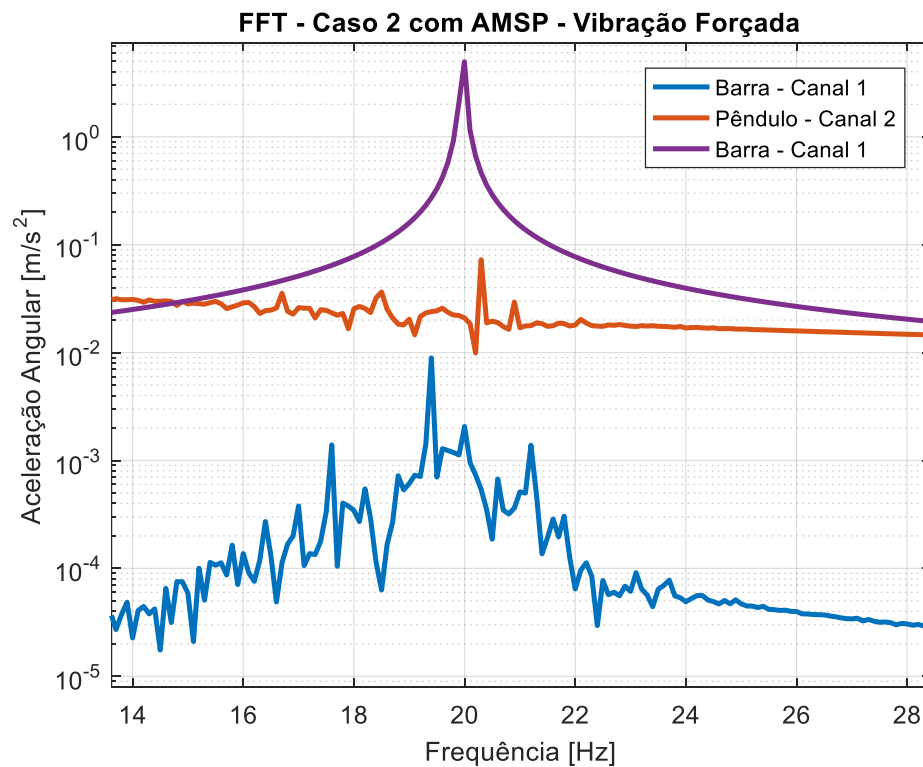


Figura 48: Comparação das respostas no domínio da frequência para o Caso 2 em vibração forçada.



O modelo numérico do Caso 2, para ser montado experimentalmente apresenta limitações geométricas, dadas as configurações consideradas para o AMSP, uma vez que era preciso acoplar o pêndulo na barra do sistema principal diretamente, de maneira a desconsiderar a rigidez do mesmo representando assim o pêndulo simples, com o valor de 4,1 cm de comprimento da haste, o qual é considerado um valor pequeno. Por esse motivo, foram apresentados apenas os resultados numéricos referentes à solução do equacionamento analítico em Matlab e o pêndulo foi modelado como pêndulo rígido, considerando a haste como uma viga retangular de rigidez equivalente e massa concentrada na extremidade.

Portanto, como sugestão de trabalhos futuros, fica o ajuste das respostas numéricas do sistema considerando no equacionamento analítico não linear o amortecimento presente no modelo, obtendo a resposta numérica em regime permanente do sistema, bem como a adaptação experimental do sistema para a obtenção dos resultados experimentais do Caso 2.

## **6.4 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS**

Os resultados do Caso 1 foram comparados perante a análise da frequência natural do sistema com apresentação das respectivas reduções da amplitude e frequência e a consequente divisão da frequência natural em outras duas frequências, em vibração livre e vibração forçada tanto nos resultados numéricos quanto experimentais, separadamente.

A comparação entre os resultados numérico e experimentais, para cada análise em particular, não foi feita, pois, a resposta numérica foi apresentada no regime transiente do sistema, desconsiderando os efeitos do amortecimento do mesmo apenas apresentando os efeitos do amortecimento com o neutralizador dinâmico e a resposta numérica dada representa o sistema em regime permanente, incluindo os efeitos do amortecimento do sistema e o AMSP. Não pode ser comparada uma resposta em regime transiente com a resposta em regime permanente, para isso seria necessário inserir no equacionamento analítico a constante de amortecimento medida experimentalmente.

Os resultados do Caso 2 foram comparados apenas numericamente.

### **6.4.1 RESULTADOS DO CASO 01**

A solução experimental utilizada para o Caso 1, onde o sistema passou a ser representado por dois sistemas barra e mola e o pêndulo foi modelado como um sistema massa

e rigidez equivalente, representando assim a estrutura denominada como pêndulo rígido. A equação de movimento passa a contemplar o acoplamento entre a barra do sistema principal e o pêndulo, sendo possível então relacionar a transmissibilidade de movimento de um corpo ao outro, quando a barra é excitada ou posta em movimento. A rigidez utilizada no pêndulo representa a rigidez equivalente calculada para uma viga em deflexão devido à presença de uma massa concentrada em uma extremidade e com a outra engastada, comportamento esse que o cabo do pêndulo apresenta ao ser acoplado no sistema principal. Como o pêndulo modelado como um pêndulo rígido, a massa do AMSP altera a frequência natural do sistema principal, uma vez que altera a inércia da estrutura de forma geral. A fim de minimizar os efeitos da inércia no sistema principal buscou-se utilizar o pêndulo feito de uma liga de alumínio, cuja massa específica é menor quando comparada à massa específica do aço estrutural, por exemplo, e com isso juntamente com uma haste de cabo de pêndulo com a menor espessura e largura obtidas.

A variação da inércia do sistema principal tem relação direta com o coeficiente de massa determinado numericamente, uma vez que a intenção de estipular ou determinar uma faixa ideal de variação desse coeficiente, sendo essa de 5% a 15%, visa justamente a utilização de massas pequenas nos dispositivos de amortecimento a fim de não alterar drasticamente a inércia do sistema principal, variando muito a divergência nos resultados experimentais. Por esse motivo, a razão de massa utilizada foi de  $\mu=0,071$ .

No equacionamento e na solução numérica foi desconsiderada a massa da haste do pêndulo, uma vez que o modelo de AMSP ideal é com a haste desprezível. Todavia, devido à configuração utilizada e a haste ter sido modelada como uma viga retangular com espessura e largura pequenas, mas ainda assim não pequenas o suficiente para serem desprezadas, os efeitos da presença de massa na haste culminaram com a diferença dos resultados experimentais em comparação com os numéricos, tanto no caso do sistema em vibração livre quanto sob excitação harmônica externa. Experimentalmente esses dados que foram desconsiderados no modelo analítico e nos resultados numéricos não podem ser esquecidos e isso altera a frequência natural do sistema, conseqüentemente altera a frequência com a qual o sistema será excitado e também influencia nos parâmetros do dispositivo.

Para o modelo do Caso 1, em vibração livre, a resposta no domínio do tempo apresentou amplitude de aceleração máxima em torno de  $0,06 \text{ m/s}^2$  e com o pêndulo esse valor reduziu-se para valores próximos a  $5 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$ , apresentando a redução da vibração na barra do sistema medida pelo Canal 1, cujos valores de frequência são analisados na sequência.

Contudo, a resposta no domínio do tempo representa o sistema em regime transiente, e por não considerar os efeitos do amortecimento do sistema, a resposta com o AMSP não apresenta as características de um sistema amortecido.

Os resultados da solução numérica do Caso 1 em vibração livre são apresentados na Tabela 9, considerando os valores das frequências e amplitudes de aceleração do sistema. Analisando os dados percebe-se que a frequência natural do sistema do Caso 1, de 20 Hz e  $6,45 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ , com a utilização do amortecedor pendular AMSP a frequência foi dividida em duas outras frequências, 16,3 Hz e 24,5 Hz, representando uma redução de 18,5% e um acréscimo de 22,5%, respectivamente, com relação à frequência natural. Para a frequência de 16,3 Hz a amplitude da barra apresentou um percentual de redução de 99,71% e de 99,62% para a frequência de 24,5 Hz, já a amplitude do pêndulo apresentou 99,65% de redução para 16,3 Hz e 99,52% para 24,5 Hz. Portanto, a redução da amplitude da frequência natural máxima obtida foi de 99,65 % no pêndulo e máxima de 99,71% na barra.

**Tabela 9: Comparação dos resultados numéricos do Caso 1 em vibração livre.**

	Vibração Livre	Vibração Livre com Pêndulo		Percentuais de relação [%]	
		Canal 1	Canal 2		
Frequência Natural [Hz]	20	16,3	16,3	18,5	
		24,5	24,5	122,5	
Amplitude [ $\text{m/s}^2$ ]	$6,45 \times 10^{-2}$	$1,88 \times 10^{-4}$	$2,46 \times 10^{-4}$	99,71	99,62
		$2,26 \times 10^{-4}$	$3,07 \times 10^{-4}$	99,65	99,52

Fonte: Autora, 2018.

Experimentalmente, a resposta do sistema no domínio do tempo, em vibração livre, apresentou valores da amplitude máxima em  $5 \text{ m/s}^2$  e com o pêndulo foi observada a redução da resposta em valores máximos de  $2 \text{ m/s}^2$  no Canal 1 e  $3 \text{ m/s}^2$  no Canal 2, e uma vez que a resposta experimental é referente ao sistema em regime permanente, é possível visualizar os efeitos do amortecimento do pêndulo e do sistema na curva do domínio do tempo, representando assim a resposta do sistema amortecido.

A Tabela 10 contém os resultados experimentais para as medições dos sinais do Caso 1 em vibração livre, onde a frequência natural da barra e mola foi medida pelo Canal 1 em 18,24 Hz e  $1,471 \text{ m/s}^2$  de amplitude. Observa-se que a frequência natural foi dividida em duas frequências, sendo elas 14,97 Hz e 21,86 Hz, representando assim um percentual de redução da amplitude da frequência natural de 17,93% e um acréscimo de 19,85% para as duas frequências, respectivamente. Quanto aos percentuais de redução das amplitudes, para a barra foram de 97,08% para a frequência de 21,86 Hz e 94,38% para a de 14,97 Hz. Para o pêndulo, com

relação à frequência de 21,86 Hz a redução foi de 95,94% e para a frequência de 14,97 Hz a amplitude reduziu em 87,60%. Com isso, experimentalmente foi observado que com o acoplamento do AMSP na estrutura a amplitude da barra foi reduzida consideravelmente em um percentual máximo de 97,08% e a amplitude do pêndulo reduziu-se ao máximo em 95,94%.

**Tabela 10: Análise dos resultados experimentais do Caso 1 em vibração livre.**

	Vibração Livre	Vibração Livre com pêndulo		Percentuais de relação [%]	
Frequência Natural [Hz] / Frequências do Canal 1 [Hz]	18,24	14,97	21,86	17,93	119,85
Amplitudes – Canal 1 [m/s <sup>2</sup> ]	1,471	8,26x10 <sup>-2</sup>	4,29 x10 <sup>-2</sup>	94,38	97,08
Frequência Natural [Hz] / Frequências do Canal 2 [Hz]	-	14,97	21,86	17,93	119,85
Amplitudes – Canal 2 [m/s <sup>2</sup> ]	-	18,23 x10 <sup>-2</sup>	5,97 x10 <sup>-2</sup>	87,60	95,94

**Fonte: Autora, 2018.**

Em vibração forçada, o modelo do Caso 1 apresentou como amplitude máxima da aceleração em função do tempo, medida pelo Canal 1, valores próximos a 5 m/s<sup>2</sup>, os quais foram reduzidos à máximos de 5x10<sup>-4</sup> m/s<sup>2</sup> e 8x10<sup>-4</sup> m/s<sup>2</sup>, nos Canais 1 e 2, respectivamente.

Para o sistema do Caso 1 em vibração forçada os resultados numéricos são apresentados na Tabela 11.

**Tabela 11: Análise dos resultados numéricos do Caso 1 em vibração forçada.**

	Vibração forçada	Vibração forçada com pêndulo		Percentuais de relação [%]	
		Canal 1	Canal 2		
Frequência Natural [Hz]	20	16,3	16,3	18,5	
		24,5	24,5	122,5	
Amplitude [m/s <sup>2</sup> ]	5,084	3,25x10 <sup>-4</sup>	1,15 x10 <sup>-4</sup>	99,99	99,99
		3,86 x10 <sup>-4</sup>	1,25 x10 <sup>-4</sup>	99,99	99,99

**Fonte: Autora, 2018.**

Da tabela 11, a frequência de excitação, de 20 Hz, com o pêndulo no sistema, foi reduzida de 5,084 m/s<sup>2</sup> de amplitude para 3,14x10<sup>-4</sup> m/s<sup>2</sup> representando uma redução de 99,99%. Os picos de frequência resultantes são de 16,3 Hz e 24,5 Hz e representam, quando comparados à frequência de excitação, percentuais de redução de 18,5% e acréscimo de 22,5%, respectivamente. As amplitudes dessas frequências, medidas pelos Canais 1 e 2, apresentaram percentuais de redução de 99,99% em todos os valores medidos, o que comprova a efetividade

do AMSP com massa de 121 g e comprimento numérico da haste de 4,04 cm, na dissipação de energia do sistema do Caso 1, em vibração forçada, para uma frequência de excitação igual a frequência natural.

Com relação à resposta experimental no domínio do tempo do Caso 1 em vibração forçada, a amplitude de aceleração de aproximadamente  $16 \text{ m/s}^2$  foi reduzida para valores de  $0,6 \text{ m/s}^2$  medido no Canal 1 e  $0,45 \text{ m/s}^2$  no Canal 2, apresentando assim a resposta amortecida em regime permanente do sistema com AMSP sob excitação harmônica externa.

Considerando os resultados experimentais do sistema em vibração forçada, presentes na Tabela 12, a frequência de excitação do sistema, de 18,05 Hz e amplitude de  $15,66 \text{ m/s}^2$ , com o pêndulo, foi medida com frequência de 19,54 Hz e amplitude de  $23,52 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  e  $22,73 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$  pelo Canal 1 e 2, respectivamente. Os picos de frequência presentes na resposta amortecida do sistema pelo AMSP são de 19,45 Hz e 19,59 Hz, que quando comparados com a frequência de excitação experimental representam percentuais de acréscimo de 7,75% e 8,53%, respectivamente. Os percentuais de redução da amplitude na barra, para as duas frequências, são de 99,48% e 98,44% e para o pêndulo de 99,51% e 98,44%, respectivamente.

**Tabela 12: Análise dos resultados experimentais do Caso 1 em vibração forçada.**

	Vibração forçada	Vibração forçada com pêndulo		Percentuais de relação [%]	
		Canal 1	Canal 2		
Frequência Natural [Hz] / Frequências do Canal 1	18,05	19,45	19,59	107,75	108,53
Amplitudes – Canal 1 [ $\text{m/s}^2$ ]	15,66	$8,21 \times 10^{-2}$	$24,43 \times 10^{-2}$	99,48	98,44
Frequência Natural [Hz] / Frequências do Canal 2	-	19,45	19,59	107,75	108,53
Amplitudes – Canal 2 [ $\text{m/s}^2$ ]	-	$7,65 \times 10^{-2}$	$24,36 \times 10^{-2}$	99,51	98,44

Fonte: Autora, 2018.

#### 6.4.2 RESULTADOS DO CASO 2

Os resultados do Caso 2 foram analisados numericamente. Com relação às respostas do sistema no domínio do tempo, em vibração livre, registrou-se amplitude máxima de aproximadamente  $0,06 \text{ m/s}^2$  e com o pêndulo dissipando a energia do sistema, o valor máximo ficou em torno de  $0,1 \text{ m/s}^2$  no pêndulo e na barra os valores tenderam a zero.



A Tabela 13 apresenta a relação entre os resultados do sistema em vibração livre comparados com o sistema com o AMSP. É possível perceber com a utilização do pêndulo, foram registradas numericamente dois valores de frequência, de 7,59 Hz e 20,3 Hz, representando percentuais de redução de 62,05% e acréscimo de 1,5 %, respectivamente, com relação à frequência natural de 20Hz. Para os valores das amplitudes dessas frequências, os percentuais determinados foram: para o Canal 1 de 99,98% e 99,25%, respectivamente, e para o Canal 2 26,55% e 14,44%, respectivamente.

**Tabela 13: Análise dos resultados numéricos do Caso 2 em vibração livre.**

	Vibração livre	Vibração livre com pêndulo		Percentuais de relação [%]	
		Canal 1	Canal 2		
Frequência Natural [Hz]	20	7,59	7,59	62,05	
		20,3	20,3	101,5	
Amplitude [m/s <sup>2</sup> ]	6,44x10 <sup>-2</sup>	1,42x10 <sup>-5</sup>	4,83x10 <sup>-4</sup>	99,98	99,25
		4,73x10 <sup>-2</sup>	5,51x10 <sup>-2</sup>	26,55	14,44

**Fonte: Autora, 2018.**

Com relação às respostas numéricas em vibração forçada do sistema no domínio da frequência, apresentadas pela Tabela 14, a frequência de excitação de 20Hz teve sua amplitude reduzida na barra em 3% e um acréscimo de 6%, com relação às frequências analisadas. No pêndulo, o percentual de acréscimo mínimo é de 1,5% e máximo de 4,5%. Quanto aos valores das amplitudes, os percentuais de redução são de 99,82% e 99,97% na barra e no pêndulo, para as frequências relacionadas, um percentual mínimo de 98,54% e máximo de 99,41%.

**Tabela 14: Análise dos resultados numéricos do Caso 2 em vibração forçada.**

	Vibração forçada	Vibração forçada com pêndulo		Percentuais de relação [%]	
		Canal 1	Canal 2		
Frequência Natural [Hz]	20	19,4	20,3	97	101,5
		21,2	20,9	106	104,5
Amplitude [m/s <sup>2</sup> ]	4,96	8,92x10 <sup>-3</sup>	7,26 x10 <sup>-2</sup>	99,82	98,54
		1,38 x10 <sup>-3</sup>	2,94 x10 <sup>-2</sup>	99,97	99,41

**Fonte: Autora, 2018.**

## 7 CONCLUSÃO

Foram desenvolvidas analiticamente as equações de movimento de cada um dos sistemas, sendo que o Caso 1 foi equacionado utilizando o Método de Newton e o Caso 2 utilizando o Método de Energia. Contudo, foram analisados os efeitos da utilização de um neutralizador dinâmico de vibrações, do tipo AMSP, em um modelo dinâmico reduzido à um sistema de dois graus de liberdade representado por meio do sistema barra e mola. O modelo do Caso 1 foi analisado em vibração livre e em vibração forçada, obtendo parâmetros de comparação da resposta numérica e experimental e o modelo do Caso 2 foi analisado apenas numericamente devido às limitações geométricas no acoplamento experimental do pêndulo na barra.

Os parâmetros do AMSP foram selecionados buscando, dentre as medições experimentais do sistema sob excitação externa com pêndulo, a configuração que obteve a maior redução da amplitude de vibração na barra, medida pelo Canal 1. Para a massa de 121g e comprimento de 4,1 cm a amplitude da barra foi reduzida em 98,49% e por esse motivo esses parâmetros foram selecionados e com eles foram determinados os resultados numéricos e experimentais.

Para o sistema do Caso 1 em vibração livre foram obtidos, para a frequência natural de 20 Hz com o AMSP, percentuais de redução de 18,5% e acréscimo de 22,5% com relação às frequências medidas pelos Canais 1 e 2, com percentuais de redução máximos nas amplitudes dessas frequências medidos no Canal 1 em 99,71% e no Canal 2 em 99,65%. Experimentalmente a frequência natural foi medida pelo Canal 1 em 18,24 Hz e com o pêndulo os percentuais de redução e acréscimo da amplitude da frequência natural obtidos foram de 17,93% e 19,85%, respectivamente. Quanto aos percentuais de redução das amplitudes experimentais foi observado que com o acoplamento do AMSP na estrutura a amplitude da barra foi reduzida consideravelmente em um percentual máximo de 97,08% e a amplitude do pêndulo reduziu-se ao máximo em 95,94 %.

A resposta numérica do sistema do Caso 1 em vibração forçada apresentou a frequência de excitação em 20 Hz e com o pêndulo no sistema essa foi reduzida em 99,99% com relação à amplitude original e as amplitudes dessas frequências, medidas pelos Canais 1 e 2, apresentaram percentuais de redução de 99,99% em todos os valores medidos, o que comprova a efetividade do AMSP com massa de 121 g e comprimento numérico da haste de

4,04 cm, na dissipação de energia do sistema do Caso 1, em vibração forçada, para uma frequência de excitação igual a frequência natural.

Considerando os resultados experimentais do Caso 1 em vibração forçada, a frequência de excitação do sistema, de 18,05 Hz, com o AMSP, os picos de frequência presentes na resposta amortecida do sistema pelo AMSP representam percentuais de acréscimo de 7,75% e 8,53%, respectivamente. Os percentuais de redução da amplitude na barra, para as duas frequências, são de 99,48% e 98,44% e para o pêndulo de 99,51% e 98,44%, respectivamente.

Os resultados do Caso 2 foram analisados numericamente. É possível perceber com a utilização do pêndulo a redução na amplitude da frequência natural foi de 62,05% e acréscimo de 1,5 %, respectivamente, para os dois picos de frequência. Para os valores das amplitudes dessas frequências, os percentuais determinados foram: para o Canal 1 de 99,98% e 99,25%, respectivamente, e para o Canal 2, 26,55% e 14,44%, respectivamente. Em vibração forçada, a frequência de excitação de 20Hz teve sua amplitude reduzida na barra em 3% e um acréscimo de 6%, com relação às frequências analisadas. No pêndulo, o percentual de acréscimo mínimo é de 1,5% e máximo de 4,5%. Quanto aos valores das amplitudes, os percentuais de redução são de 99,82% e 99,97% na barra e no pêndulo, para as frequências relacionadas, um percentual mínimo de 98,54% e máximo de 99,41%.

Tendo em vista o exposto até então, foi verificada a funcionalidade do pêndulo numérica e experimentalmente, sendo que na análise numérica o amortecimento do sistema não foi considerado e na análise experimental o amortecimento foi considerado. Devido ao fato de o modelo numérico não considerar o amortecimento do sistema, as curvas da frequência com o pêndulo contam com dois picos de frequência, ou seja, dois valores de amplitude, e isso deve-se a falta de dissipação de energia do sistema e a resposta apresenta apenas o comportamento transiente do sistema, considerando apenas as condições iniciais para definir a resposta. Como a medição experimental conta com o sistema em regime permanente e o amortecimento não é desconsiderado do sistema, o resultado apresenta uma frequência amortecida, sendo a vibração dissipada pelo amortecimento do sistema e o amortecimento do pêndulo. Todavia, é importante comentar sobre a neutralização da vibração do sistema incluir a energia dissipada nos mancais de fixação da barra na bancada de vibração e nos acoplamentos dos demais itens do sistema, os quais são considerados nas respostas experimentais analisadas.

Portanto, é evidente que tanto numericamente quanto experimentalmente, considerando o exposto e as configurações utilizadas, a vibração do sistema principal com a utilização do AMSP foi reduzida em termos de amplitude de excitação e os efeitos da força

externa no sistema foram amortecidos pelo pêndulo, o qual apresenta maior amplitude de vibração que a barra, na maioria dos resultados obtidos, tanto numérica quanto experimentalmente. Vale ressaltar que as configurações do modelo do problema de estudo são consideradas simples, mas que o mesmo se adequou bem às necessidades propostas e os resultados obtidos foram satisfatórios.

Como sugestão para trabalhos futuros fica a análise experimental e a medição das respostas do Caso 2 e o consequente ajuste numérico do modelo de acordo com as necessidades de ajuste da geometria do sistema para a análise experimental. Seria interessante, ainda para a análise do Caso 1, considerar os efeitos do amortecimento do sistema na análise e equacionamento numérico do mesmo, partindo da medição do amortecimento do sistema por decremento logarítmico ou largura de banda e a consequente inserção do amortecimento no modelo numérico. Para o Caso 1, a medição da fase simultânea entre o pêndulo e a barra também é uma sugestão de trabalhos futuros, onde seria verificado e analisado mais a fundo a presença da defasagem do movimento entre o sistema e o neutralizador dinâmico atuando nele. Com relação ao coeficiente de massa, outra ramificação da presente dissertação seria a verificação da influência do coeficiente de massa da resposta do sistema, com o intuito de analisar a sua influência na inércia do sistema.

## 8 REFERÊNCIAS

ANDRETTA, FELIPE. **Projeto e execução de uma bancada didática para ensaios de vibrações mecânicas**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Pato Branco, PR. 2012.

AVILA, S. M. **Controle híbrido para atenuação de vibrações em edifícios**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), Rio de Janeiro, Brasil, 2002.

AVILA, SUZANA M. PEREIRA, WILLIAM M.; **Controle de vibrações em torres eólicas submetidas à ação de cargas harmônicas utilizando amortecedor de massa sintonizada na forma de pêndulo**. Artigo submetido na DINCON 2011: 10ª Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações. Setembro, 2011.

AVILA, S. M., GONÇALVES P. B. **Optimal Configurations of Composite Multiple Mass Dampers in Tall Buildings**. Published article at the Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering - ABCM, January-March 2009, Vol. XXXI, N°. 1/75.

AVILA, S. M.; PERRONI J. C.; BRITO, J. L. **Controle de vibrações utilizando amortecedor de massa sintonizado na forma de pêndulo**. Artigo apresentado na XXXII Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, Campinas, SP, Anais da XXXII Jornadas, p. 1198-1207, 2006.

BERNARDES JUNIOR, P. L.; MORAIS, M. V. G.; AVILA, S. M. **Inverted pendulum damper modelo parameters for vibration control in tal buildings**. Submitted article to the 24th ABCM – Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas, International Congresso of Mechanical Engineering, COBEM – 2017-1612. December, 3-8, 2017, Curitiba, PR, Brazil.

BORGES, ROMES ANTONIO. **Contribuição ao estudo dos absorvedores dinâmicos de vibrações não lineares**. P. 01-08. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica. Uberlândia, MG, 2008.

BUENO, DOUGLAS D. **Controle ativo de vibrações e localização ótima de sensores e atuadores piezelétricos**. Pg. 01-31. Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, 2007.

CARNEIRO, R. B. **Controle de vibrações em edifícios altos utilizando amortecedor de massa sintonizado múltiplo (AMSM)**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Brasília, 2004.

COLHERINHAS, GINO B.; MORAIS, MARCUS V. G. **Genetic optimization analysis of wind tower vibrations controlled by a pendulum TMD**. Artigo submetido ao CILAMCE - Congresso Íbero Latino Americano de Método Computacionais em Engenharia. Campus Universitário Darcy Ribeiro, Asa Norte – 70.910-900, Brasília, DF, Brasil, 2016.

CONSTANTINOU, MICHAEL C.; SOONG, TSU-TEH.; DARGUSH, GARY F. **Passive energy dissipation systems for structural model and retrofit. Monograph Series.** Monograph No. 1. Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research (MCEER): A National Center of Excellence in Advanced Technology Applications. University at Buffalo, New York, 1998. ISBN 0-9656682-1-5.

FARSHI, BEHROOZ; ASSADI, ABBAS. **Development of a chaotic nonlinear tuned mass damper for optimal vibration response.** Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation Journal, 16 (2011) 4514-4523, 2011. ISSN: 10075704. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.02.011

GÓMEZ, ALBERTO L.Z. **Controle de vibrações em edifícios submetidos à ação de cargas dinâmicas utilizando amortecedor de massa sintonizado na forma de pêndulo.** Dissertação de mestrado em Estruturas e Construção civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, DF. Agosto, 2007.

HARRIS, CYRIL M; PIERSOL, ALLAN G. **Harris' Shock and Vibration Handbook.** Vibration's handbook. Cyril M. Harris, editor, Allan Piersol, editor ,5<sup>th</sup> ed., A Division of The McGraw-Hill Companies, 2002, Chapter 42.1. ISBN 0-07-137081-1.

HARTOG, DEN J. P. **Mechanical vibrations.** Book. 4th ed. Published by McGraw-Hill Book Company, INC. New York, Toronto, London, 1956. ISBN 10: 0070163898 ISBN 13: 9780070163898.

LIU, LINYA; SHAO, WENJIE. **Model and dynamics response analysis of rail with constrained damped dynamic vibration absorber.** Published article by Elsevier Ltd. at the Procedia Engineering 15 (2011) 4983-4987. Available in ScienceDirect. Nanchang, Jiangxi, China, 2011.

LOURENCO, RICHARD. **Model, Construction and Testing of an Adaptive Pendulum Tuned Mass Damper.** Thesis presented to the University of Waterloo for the degree of Master of Applied Science in Mechanical Engineering. Waterloo, Ontario, Canada, 2011.

LU, ZHENG; WANG ZIXIN; ZHOU, YING; LU, XILIN. **Nonlinear dissipative devices in structural vibration control: A review.** Journal of Sound and Vibration, v. 423, p. 18–49, 2018.

MARRA, JOÃO C. DE O. **Controle híbrido de vibrações em estruturas sob excitação de banda larga, utilizando neutralizador viscoelástico e filtro adaptativo.** Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, Novembro, 2007.

MAURER SOHNE. **Technical Information and Products: Tuned Mass and Viscous Dampers.** Technical Catalogue. Germany, 2011.

OLIVEIRA, FERNANDO DOS S. **Critérios de projeto para amortecedor tipo pêndulo para controle de vibrações em edifícios altos.** Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Brasília, DF. Abril, 2012.

OLIVEIRA, FERNANDO S.; BRITO, JOSÉ L. V.; AVILA, SUZANA M. **Model criteria for a pendulum absorber to control high buildings vibrations.** Submitted article at the 11<sup>th</sup> International Conference in Vibration Problems, Lisbon, Portugal, 9-12 September, 2013.

OSPINA, CAROLINA S. **Otimização de amortecedores de massa sintonizados, múltiplos e interligados, para controle de vibração em edifícios altos.** Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília, Brasília-DF, Março, 2008.

PFISTER, CHRISTOPH. **Msc. Thesis on Dynamic Systems and Control.** Master's Thesis presented to the Department of Mathematics and its Applications. Central European University, Budapest, Hungary, May, 2012.

POTÎRNICHE, AUTORA, 2018.; CĂPĂȚĂNĂ, GIGEL. **Experimental analysis of a vibration isolation system based on constrained pendulum device.** Published Article at The 40<sup>th</sup> International Conference on Mechanics of Solids, Acoustics and Vibrations & The 6<sup>th</sup> International Conference on "Advanced Composite Materials Engineering" ICMSAV2016& COMAT2016 Brasov, Romania, 24-25 November.

RAO, SINGIRESU S. **Mechanical Vibrations.** 5th ed. Pearson Education 2011, 1 Lake Street, Upper Saddle River, NJ 07458, 1105p. ISBN 978-0-13-212819-3.

RAS, A.; BOUMECHRA, N. **Seismic energy dissipation study of linear fluid viscous dampers in steel structure modelo.** Published article by Elsevier Ltd. at the Alexandria Engineering Journal (2016) 55, 2821-2832, Alexandria University, available at ScienceDirect, 2016.

ROSSATO, LUCINARA V.; MIGUEL, LETÍCIA F. F. **Estimativa de razão de massas ideal de amortecedor de massa sintonizada para controle de vibrações em estruturas.** Submitted article at CILAMCE XXXVII - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, DF, Brasil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 2016.

SAAED, TAREK E.; NIKOLAKOPOULOS, GEORGE J.; JAN-ERIK HEDLUND H. **A state-of-the-art review of structural control systems.** Journal of Vibration and Control, v. 21, n. 5, p. 919–937, 2015. DOI: 10.1177/1077546313478294. ISSN: 1077-5463.

SANTOS, MARCOS D. S. D.; LIMA, DANIEL V. F.; CARMONA, JORGE E. C.; AVILA, SUZANA M.; CARVALHO, GRACIELA N. D. **Vibration control of a fym floor using Tuned Mass Dampers: a numerical analysis.** Published article at the Modern Mechanical Engineering (MME), 3, 9-16. Available at Scientific Research, July, 2013.

SOUZA, ELIENAI A. **Métodos iterativos para problemas não lineares.** Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal Fluminense (UFF) Volta Redonda, Junho, 2015.

ZHANG, BIN; BILLINGS, STEPHEN A.; LANG, ZI-QIANG L; TOMLINSON, GEOFFREY R. **Suppressing resonant vibrations using nonlinear springs and dampers.** JVC/Journal of Vibration and Control, 2009. DOI: 10.1177/1077546309102668.