



**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

PRISCILA DE CASTRO BARROS GRECA

**APRENDIZAGEM SEMIÓTICA EM PORTFÓLIOS AVALIATIVOS DE
ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO 6º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

LONDRINA

2024



PRISCILA DE CASTRO BARROS GRECA

**APRENDIZAGEM SEMIÓTICA EM PORTFÓLIOS AVALIATIVOS DE
ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO 6º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

**SEMIOTIC LEARNING IN EVALUATIVE PORTFOLIO OF MATHEMATICAL
MODELING ACTIVITIES IN THE 6TH YEAR OF ELEMENTARY SCHOOL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva.

LONDRINA

2024



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



PRISCILA DE CASTRO BARROS GRECA

APRENDIZAGEM SEMIÓTICA EM PORTFÓLIOS AVALIATIVOS DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 01 de Março de 2024

Dra. Karina Alessandra Pessoa Da Silva, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Lahis Braga Souza, Doutorado - Universidade Federal do Acre (Ufac)

Dra. Marcelle Tavares, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 01/03/2024.

Dedico este trabalho ao meu esposo Rafael, aos meus filhos Fernando, Vinícius e Letícia, e meus pais Jefferson (*in memoriam*) e Regina que são os grandes amores da minha vida!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me permitido sonhar um dia com esse momento e por Ele ter me proporcionado essa conquista.

À minha orientadora Karina, por ter me escolhido na seleção do mestrado e ter me orientado, guiado nesses dois anos de estudo e aprendizado com tanta maestria e dedicação.

Aos professores da banca, Marcele e Lahis pelo aceite, por fazerem as leituras e pelos apontamentos apresentados.

Aos meus alunos do 6º ano de 2023 que se dedicaram aos estudos das atividades para que essa pesquisa pudesse acontecer.

Aos professores do programa PPGMAT da UTFPR, responsáveis pelas disciplinas durante o ano de 2022, aprendi com cada um de vocês.

Aos meus companheiros do Grupo de Estudo GEPMIT pelas oportunidades de conhecimento e aprendizado durante esse tempo juntos, em especial a professora Adriana que sempre contribuiu com suas intervenções durante as discussões no grupo.

Ao meu esposo Rafael, amor da minha vida, por me apoiar e incentivar em voltar aos estudos e com muita dedicação cuidou dos nossos filhos durante as minhas ausências e por sempre estar ao meu lado e me fazendo sentir amada.

Aos meus filhos Fernando, Vinícius e Letícia por terem compreendido que em alguns momentos não consegui estar presente, mas quero que saibam que eu os amo incondicionalmente.

Aos meus pais Jefferson e Regina por sempre terem acreditado em mim e que nunca mediram esforços em me apoiar em todas as áreas da minha vida e sempre estenderem as mãos para tudo que precisasse.

GRECA, Priscila de Castro Barros. **Aprendizagem semiótica em portfólios avaliativos de atividades de modelagem matemática no 6º ano do Ensino Fundamental**. 2024. 185 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar como as ações do professor e dos alunos da Educação Básica a utilizar um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática podem promover a aprendizagem semiótica. Com isso, nos pautamos na Modelagem Matemática como alternativa pedagógica em que consideramos as intervenções docentes como mediadoras do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática no contexto do portfólio como instrumento de avaliação. Para evidenciarmos a aprendizagem semiótica, nos pautamos nos Componentes da Aprendizagem – conceitual, algorítmica, estratégica, comunicativa e semiótica – sob os quais focamos atenção na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, mais especificamente nas atividades cognitivas de tratamento e conversão. A pesquisa qualitativa de cunho interpretativo foi subsidiada nos registros escritos dos alunos e nas intervenções escritas da professora no portfólio de um dos grupos (Grupo 2) de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública localizada em Assaí-Pr, região norte do Paraná, durante as aulas regulares de matemática, no primeiro e segundo trimestres letivos de 2023. Todavia, devido à necessidade de ilustrar procedimentos empreendidos em sala de aula, consideramos algumas imagens coletadas no desenvolvimento das atividades. A análise específica de quatro atividades de modelagem matemática (Piquenique no Zerinho, Água, Energia Elétrica e Competição de carrinhos) permitiu evidenciar ações dos alunos que dizem respeito ao desenvolvimento dos cinco componentes da aprendizagem durante as fases do ciclo de modelagem. A aprendizagem semiótica dos estudantes ocorreu durante todo o processo a partir das ações da professora de observação e das intervenções feitas por meio de *feedbacks* escritos no portfólio do grupo de alunos analisado, os quais solicitou, exigiu ou sugeriu ajustes no registro já produzido, mantendo-se no mesmo sistema de representação (tratamento) ou por meio de transformações alterando o sistema de representação (conversão). Os *feedbacks* fornecidos pela professora proporcionaram aos alunos novas oportunidades de aprendizagem, de modo que eles puderam modificar procedimentos de resolução, organizar dados, corrigir erros e utilizar conhecimentos do 6º ano do Ensino Fundamental, evidenciando o portfólio como uma prática avaliativa. A partir dessa análise, agrupamos as intervenções docentes em três categorias: Realizando mudanças em procedimentos e organizando dados, Corrigindo equívocos e Fazendo uso de conteúdos do 6º ano do Ensino Fundamental. Esses agrupamentos, em certa medida, revelaram as intenções da professora com a produção do portfólio de atividades de modelagem em que o foco esteve, principalmente, na abordagem dos conteúdos presentes na matriz curricular do 6º ano. A partir dessa pesquisa elaboramos um Produto Educacional que tem por objetivo apresentar um construto para professores interessados em implementar portfólios avaliativos de atividades de modelagem matemática em suas aulas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Componentes da Aprendizagem. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Portfólio. Intervenções docentes. Ensino Fundamental.

GRECA, Priscila de Castro Barros. **Semiotic learning in evaluative portfolio of mathematical modeling activities in the 6th year of elementary school.** 2024. 185 p. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Federal Tecnological University of Paraná, Londrina, 2024.

ABSTRACT

This research aimed to investigate how the actions of Basic Education teachers and students using an evaluative portfolio of mathematical modeling activities can promote semiotic learning. Therefore, we are guided by Mathematical Modeling as a pedagogical alternative in which we consider teaching interventions as mediators of the development of mathematical modeling activities in the context of the portfolio as an assessment instrument. To highlight semiotic learning, we focus on the Learning Components – conceptual, algorithmic, strategic, communicative and semiotic – under which we focus attention on the Theory of Semiotic Representation Records, more specifically on the cognitive activities of treatment and conversion. The qualitative research of an interpretative nature was supported by the students' written records and the teacher's written interventions in the portfolio of one of the groups (Group 2) of a 6th year elementary school class at a public school located in Assaí-Pr, northern region of Paraná, during regular mathematics classes, in the first and second academic quarters of 2023. However, due to the need to illustrate procedures undertaken in the classroom, we considered some images collected during the development of the activities. The specific analysis of four mathematical modeling activities (Picnic at Zerinho, Water, Electricity and Car Competition) made it possible to highlight student actions that relate to the development of the five components of learning during the phases of the modeling cycle. The students' semiotic learning occurred throughout the process based on the teacher's observation and interventions made through written feedback in the portfolio of the group of students analyzed, which requested, demanded or suggested adjustments to the record already produced, maintaining the same representation system (treatment) or through transformations changing the representation system (conversion). The feedback provided by the teacher provided students with new learning opportunities, so that they were able to modify resolution procedures, organize data, correct errors and use knowledge from the 6th year of Elementary School, characterizing formative assessment. Based on this analysis, we grouped teaching interventions into three categories: Making changes to procedures and organizing data, Correcting mistakes and Making use of content from the 6th year of Elementary School. These groupings, to a certain extent, revealed the teacher's intentions with the production of the portfolio of modeling activities in which the focus was mainly on approaching the contents present in the 6th year curriculum matrix. Based on this research, we developed an Educational Product that aims to present a guide for teachers interested in implementing evaluative portfolios of mathematical modeling activities in their classes.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modeling. Components of Learning. Theory of Semiotic Representation Registers. Portfolio. Teaching interventions. Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mapa Conceitual da dissertação.....	22
Figura 2 – Esquema sobre a ideia de Modelagem Matemática apresentada por Burak (1987)	25
Figura 3 – Esquema simplificado de Modelagem Matemática apresentado por Bassanezi (2002)	26
Figura 4 – Esquema das etapas da Modelagem Matemática apresentado por Bassanezi (2002)	27
Figura 5 –Esquema do processo de Modelagem Matemática dado por Biembengut e Hein (2011).	28
Figura 6 – Descrição da atividade de modelagem matemática por Almeida, Silva e Vertuan (2013)	29
Figura 7 – Fases da Modelagem Matemática (2013).	29
Figura 8 – Intervenções docentes: classificações desenvolvidas por Leiß e Tropper (2012) .	32
Figura 9 – Finalidades do <i>Feedback</i>	33
Figura 10 – Relações entre objeto, representamen e interpretante	43
Figura 11 – Formação de uma representação identificável	46
Figura 12 – Exemplo de tratamento	46
Figura 13 – Exemplo de conversão	47
Figura 14 – Parque Ikeda “Zerinho”	59
Figura 15 – Cartaz sobre o desperdício de água.....	60
Figura 16 – Por dentro da energia elétrica.....	61
Figura 17 – Pastas do portfólio.....	62
Figura 18 – Síntese da estrutura das análises	67
Figura 19 – Capa do produto educacional	68
Figura 20 – Tabulação dos dados da pesquisa.....	72
Figura 21 – Intervenções da professora e transformações de representação pelos alunos na A1	73
Figura 22 – Pesquisa realizada em sala sobre gráficos.....	74
Figura 23 – Intervenções da professora e transformações de representação pelos alunos na A1	76
Figura 24 – Todas as intervenções da professora e transformações de representação pelos alunos na A1	78

Figura 25 – Organização dos dados relativos à quantidade total de cada alimento	79
Figura 26 – Organização dos dados finais com os valores a serem custeados na A1	81
Figura 27 – Intervenções no portfólio para finalização da A1	83
Figura 28 – Cartaz sobre o desperdício de água em torneiras.....	89
Figura 29 – Organização dos dados relativos a uma torneira pingando na A2	91
Figura 30 – Continuação da organização dos dados relativos a uma torneira pingando.....	93
Figura 31 – Organização completa dos dados relativos a uma torneira pingando	96
Figura 32 – Organização dos dados relativo a quantidade de torneiras na escola	97
Figura 33 – Conversões de registros para a organização dos dados relativos à quantidade de torneiras na escola	98
Figura 34 – Quantidade de desperdício de água na escola das torneiras pingando.....	100
Figura 35 – Quantidade de desperdício de água na escola das torneiras pingando	101
Figura 36 – Parte da Fatura da conta de água da casa da professora	102
Figura 37 – Parte da página do livro didático sobre unidade de volume	102
Figura 38 – Resolução sobre o valor do desperdício na A2	103
Figura 39 – Momento em que os alunos assistiam o vídeo explicativo sobre a leitura do relógio de luz	109
Figura 40 – Registros da Leitura do relógio de luz na A3	111
Figura 41 – Continuação dos Registros da Leitura do relógio de luz na A3	112
Figura 42 – Momento que a estudante faz a conversão.....	113
Figura 43 – Resolução da média de consumo diário de energia	114
Figura 44 – Resolução da quantidade mensal de Quilowatt.....	115
Figura 45 – Resolução do valor mensal e por pessoa da conta de luz.....	116
Figura 46 – Pista de corrida no chão da sala de aula.....	123
Figura 47 – Momento da Competição: aluno preparando o carrinho.....	123
Figura 48 – Atividade: Competição de carrinhos.....	124
Figura 49 – Obtenção dos dados das equipes utilizando o aplicativo Tracker.....	125
Figura 50 – Registros dos alunos no portfólio	128
Figura 51 – Cálculo do tempo que o carrinho percorreu a pista	129
Figura 52 – Resolução da atividade: Competição de Carrinhos.....	131
Figura 53 – Introdução do G2 para a Atividade 1: Piquenique no Zerinho	135
Figura 54 – Conclusão do G2 para a Atividade 1: Piquenique no Zerinho.....	136
Figura 55 – Introdução do G2 para a Atividade 2: Água	137
Figura 56 – Conclusão do G2 para a Atividade 2: Água.....	138

Figura 57 – Introdução do G2 para a Atividade 3: Energia Elétrica	139
Figura 58 – Conclusão do G2 para a Atividade 3: Energia Elétrica	140
Figura 59 – Introdução do G2 para a Atividade 4: Competição de Carrinhos	141
Figura 60 – Conclusão do G2 para a Atividade 4: Competição de Carrinhos	142
Figura 61 – Exemplo de intervenção no agrupamento: <i>‘Realizando mudanças em procedimentos e organizando dados’</i>	150
Figura 62 – Exemplo de intervenção no agrupamento: <i>‘Corrigindo equívocos’</i>	152
Figura 63 – Exemplo de intervenção no agrupamento: <i>‘Fazendo uso de conteúdo do 6º ano do fundamental’</i>	152
Figura 64 – Momento de explicação no quadro e pesquisa na Internet	153
Figura 65 – Considerações dos alunos a respeito de suas dificuldades.....	157
Figura 66 – Considerações dos alunos a respeito do que gostaram	158

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Pesquisas elencadas.....	39
Quadro 2 – Cronogramas das atividades.....	58
Quadro 3 – Organização dos grupos	58
Quadro 4 – Organização das notas dos alunos.....	64
Quadro 5 – Conteúdos matemáticos referentes a cada atividade	64
Quadro 6 – Atividades de modelagem matemática analisadas	69
Quadro 7 – Organização das aulas para a atividade Piquenique no Zerinho	70
Quadro 8 – Organização das aulas e as fases da Modelagem Matemática na A1.....	71
Quadro 9 – Enquete sobre o piquenique	72
Quadro 10 – Componentes da aprendizagem e fases da modelagem presentes nas ações dos alunos na Atividade 1: Piquenique no Zerinho	85
Quadro 11 – Organização das aulas para a atividade 2: Água.....	88
Quadro 12 – Organização das aulas e as fases da Modelagem Matemática na A2	89
Quadro 13 – Componentes da aprendizagem e as fases de Modelagem Matemática presentes nas ações dos alunos na Atividade 2: Água.....	105
Quadro 14 – Organização das aulas para a atividade Energia Elétrica	107
Quadro 15 – Organização das aulas e as fases da Modelagem Matemática na A3	108
Quadro 16 – Valor por pessoa que se paga de Energia Elétrica	116
Quadro 17 – Componentes da aprendizagem presentes nas ações dos alunos e as fases de Modelagem Matemática na Atividade Energia Elétrica.....	119
Quadro 18 – Organização das aulas para a atividade Competição de Carrinhos.....	121
Quadro 19 – Organização das aulas e as fases da Modelagem Matemática na A4	122
Quadro 20 – Resultados obtidos do tempo de cada grupo	126
Quadro 21 – Componentes da aprendizagem presentes nas ações dos alunos e as fases de Modelagem Matemática na Atividade Competição de Carrinhos.....	132
Quadro 22 – Componentes das Aprendizagens evidenciadas durante as atividades de modelagem matemática	143
Quadro 23 – Intervenções docentes no agrupamento: ‘Realizando mudanças em procedimentos e organizando dados’	148
Quadro 24 – Intervenções docentes no agrupamento: ‘Corrigindo Equívocos’	151

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	23
1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ALTERNATIVA PEDAGÓGICA	23
1.2 INTERVENÇÕES DOCENTES NO DESENVOLVIMENTO DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	30
1.3 PORTFÓLIO DE MODELAGEM MATEMÁTICA: EM DIREÇÃO A UMA PRÁTICA AVALIATIVA	33
2 COMPONENTES DA APRENDIZAGEM.....	42
2.1 SEMIÓTICA.....	42
2.2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	44
2.3 APRENDIZAGEM SEMIÓTICA	50
3 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA.....	56
3.1 O CONTEXTO E OS SUJEITOS DA PESQUISA	56
3.2 PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DOS DADOS	65
3.3 O PRODUTO EDUCACIONAL	67
4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES.....	69
4.1 ANÁLISES ESPECÍFICAS	70
4.1.1 ATIVIDADE 1: PIQUENIQUE NO ZERINHO.....	70
4.1.2 ATIVIDADE 2: ÁGUA.....	88
4.1.3 ATIVIDADE 3: ENERGIA ELÉTRICA	107
4.1.4 ATIVIDADE 4: COMPETIÇÃO DA CARRINHOS	121
4.1.5 OUTROS ELEMENTOS DO PORTFÓLIO	134
4.2 ANÁLISE GERAL	143
4.2.1 APRENDIZAGENS NO PORTFÓLIO CONSTRUÍDO: AS AÇÕES DO GRUPO 2.....	143

4.2.2 AS INTERVENÇÕES DA PROFESSORA.....	145
4.2.2.1 REALIZANDO MUDANÇAS EM PROCEDIMENTOS E ORGANIZANDO DADOS.....	147
4.2.2.2 CORRIGINDO EQUÍVOCOS	150
4.2.2.3 FAZENDO USO DE CONTEÚDO DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.....	152
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	155
REFERÊNCIAS.....	160
APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA PESQUISA.....	166
APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	167
APÊNDICE C – FOLHA DA ATIVIDADE PIQUENIQUE.....	168
APÊNDICE D – FOLHA DA ATIVIDADE ÁGUA.....	173
APÊNDICE E – FOLHA DA ATIVIDADE ENERGIA ELÉTRICA	176
APÊNDICE F – FOLHA DA ATIVIDADE COMPETIÇÃO DE CARRINHOS	180
ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL	182

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa teve início a partir de um interesse em aprimorar a minha¹ prática docente, tendo em vista que atuo na Educação Básica da rede estadual de educação do Paraná desde o ano de 2006. Me formei em Licenciatura Plena em Matemática no ano de 2005 e desde então sempre participei de formações continuadas, fiz algumas especializações durante essa caminhada, mas sempre almejei fazer mestrado. Foi no ano de 2022 que participei da seleção de mestrado na UTFPR, fui selecionada, cursei as disciplinas e comecei a participar do GEPMIT – Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem Matemática, Investigação Matemática e Tecnologia, coordenado pelas professoras Adriana Helena Borssoi e Karina Alessandra Pessoa da Silva.

Diante dos estudos desses anos e, mais especificamente dos últimos dois anos, me debrucei em conhecer sobre alternativas pedagógicas que permitem o aluno ser o responsável pela construção do seu conhecimento e o professor o orientador da aprendizagem. Interessei-me pela Modelagem Matemática durante a disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva do Ensino que cursei já no primeiro semestre do mestrado. Tive a oportunidade de colocar em prática algumas atividades de modelagem matemática com meus alunos, dentre elas, uma que foi relatada na nona edição do EPMEM (Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática)², e outra que foi relatada na décima sexta edição do EPREM (Encontro Paranaense de Educação Matemática)³. As experiências foram exitosas e enriquecedoras tanto para os alunos quanto para a minha docência. A partir dessas atividades e, conjuntamente, com as sugestões da minha orientadora, comecei a estudar sobre a avaliação em atividades de modelagem matemática, o portfólio como um instrumento de avaliação e as intervenções docentes. Ainda nessa perspectiva, de utilizar o portfólio como um instrumento de avaliação em atividades de modelagem matemática, nos debruçamos em analisar a aprendizagem semiótica dos alunos.

¹ Toda vez que utilizarmos a 1ª pessoa do singular estamos nos referindo à experiência da pesquisadora.

² GRECA, P. C. B.; SILVA, K. A. P. Práticas de Modelagem Matemática em uma Atividade sobre Volume de Balões. EPMEM – Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática. **Anais...** União da Vitória: Unespar, 2022.

³ PESSOA, T. C.; GRECA, P. C. B.; SILVA, K. A. P. Estudando tratamento da informação via Modelagem Matemática. EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática. **Anais...** Foz do Iguaçu: Unioeste, 2022.

Sendo assim, a fundamentação teórica dessa pesquisa aborda três temas: Modelagem Matemática, Portfólio como instrumento de Avaliação e Aprendizagem Semiótica.

Apresentação do tema e justificativa

A Modelagem Matemática permite trabalhar a realidade por meio de situações-problema, que inicialmente podem ou não serem matemáticas. Para Bassanezi (1994, p. 1):

Modelagem Matemática é um processo que consiste em traduzir uma situação ou tema do meio em que vivemos para uma linguagem matemática. Essa linguagem, que denominamos Modelo Matemático, pressupõe um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o fenômeno em questão.

De modo a levar situações-problema da realidade para a sala de aula, nos embasamos também na competência 5, específica de Matemática para o Ensino Fundamental da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) ao destacar a necessidade de: “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (Brasil, 2018, p. 267). Assim, o aluno pode perceber que a Matemática é um conhecimento dinâmico, que ultrapassa as paredes da sala de aula, nos trazendo respostas e reflexões para as várias situações do cotidiano, atendendo às necessidades da humanidade.

Dessa forma, ao implementar uma prática que leve o estudante a estabelecer relações existentes entre o cotidiano e o conhecimento matemático e que ele possa construir conceitos a partir do seu próprio conhecimento por meio de relações concretas, vamos ao encontro do que se anseia pelo ensino de matemática atualmente nos mais recentes documentos curriculares brasileiros. Assim, nos referimos à Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica que permite ao aluno transitar entre os problemas da realidade e o contexto matemático e, para que esse caminho aconteça, pressupõe-se orientar por meio de fases ou etapas, como sugerido na literatura.

Existem diferentes configurações e nomeações para as fases ou etapas de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Dependendo dos entendimentos dos autores, as fases se organizam em ciclos de Modelagem Matemática. Segundo Burak e Brandt (2010), as etapas são: Escolha do tema, Pesquisa Exploratória, Levantamento dos Problemas, Resolução dos Problemas e Análise Crítica da Solução ou Soluções. De acordo com Bassanezi (2002), as etapas são nomeadas por Experimentação, Abstração, Resolução, Validação e Modificação. Temos também, Almeida e Silva (2014), que caracterizam essas fases por: Inteiração, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados e Validação. Essas

autoras defendem que a transição entre a situação inicial e a final não acontece sempre da mesma maneira, porém é construída por um conjunto de procedimentos necessários para a configuração, a estruturação e a resolução de uma situação-problema.

Essas fases são ações que os alunos realizam quando desenvolvem atividades de modelagem e são formas de organizar o desenvolvimento das atividades e diferentes configurações podem ser identificadas a partir de aspectos como o tipo de problema a ser investigado, a experiência dos modeladores, as ações cognitivas do aluno, por exemplo. As fases supracitadas, geralmente, não são seguidas de forma linear, o que caracteriza a dinamicidade do desenvolvimento da atividade de modelagem.

Considerando o professor em atividades de modelagem matemática, ele muda a forma de ministrar aulas, deixando de ser um expositor, que seguia com aulas expositivas e na sequência com exercícios e assume a condição de um orientador para seus alunos. Considerar o professor um orientador remete considerar que:

a) Orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, [...] é sugerir procedimentos; b) orientar não é dar respostas prontas e acabadas, orientar não é sinalizar que “vale-tudo”; c) orientar não é esperar que o aluno simplesmente siga exemplos; d) orientar não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da função; e) orientar é despir-se da autoridade de professor. (Almeida; Silva; Vertuan, 2013, p. 24, destaques dos autores)

No entanto, a prática da Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica em sala de aula não é tão frequente e os professores enfrentam alguns obstáculos. Ceolim (2015) cita como exemplo que um dos obstáculos é a exigência, por parte das instituições escolares, de cumprir todo o conteúdo programático e as atividades de modelagem matemática são mais longas e demandam mais tempo para o desenvolvimento. Outra dificuldade é que as aulas com atividades de modelagem são vistas como mais “calorosas”, pois os alunos saem do modelo habitual e, muitas vezes, o professor sofre com a reação dos pais e dos demais profissionais da escola. Também existe a má receptividade dos próprios alunos, pois eles saem do modelo de aula que estão acostumados e precisam se readaptar a um novo estilo, em que passam a ser responsáveis e precisam agir ativamente durante as atividades. Dentro desta perspectiva, Souza (2022), aborda a zona de conforto versus a zona de risco. A pesquisadora caracterizou a zona de conforto pelas aulas expositivas e usuais, que ocorre rotineiramente, sem a participação do estudante, caracterizando um monólogo docente, em que os papéis já estão definidos e que estão habituados a seguir. A zona de risco, na Modelagem, é não ter a certeza de procedimentos e fórmulas, não ter um “passo a passo” para ser seguido durante sua realização; a atividade de

modelagem pode ser considerada flexível e seu desenvolvimento pode ter diferentes caminhos. A pesquisadora entende que,

Apesar do estudante e professor terem papéis diferentes em atividades de modelagem, suas zonas de risco e de conforto são semelhantes. Isto é, a zona de conforto para ambos pode ser caracterizada como a aula expositiva, em que cada um tem seu papel bem definido, ao qual estão habituados. Já a zona de risco é identificada com mudanças em seus papéis: para o professor, de expositor para mediador; e para o discente, de sujeito passivo que recebe os conhecimentos para aquele que produz seu conhecimento por meio de conjecturas e investigações. (Souza, 2022, p. 64)

De modo a subsidiar o trabalho do professor para a implementação da Modelagem na sala de aula, Almeida (2022, p. 141, grifos da autora), tomando como base que a “*realidade subjacente* às teorizações em Modelagem se associa a características distintas que a prática pode ter em função de um contexto e de um domínio de interesse particular”, estruturou uma abordagem em que incluiu características que sublinham aspectos didáticos e pedagógicos: (1) autenticidade da situação, (2) natureza do problema, (3) matematização, (4) uso da matemática, (5) necessidade de tomada de decisão, (6) produção de um relatório, (7) planejamento, (8) trabalho em grupos, (9) familiarização dos alunos, (10) avaliação.

Tais características podem “ser um indicativo de como professores podem atuar em aulas com Modelagem” (Almeida, 2022, p. 41). Nosso interesse nesta pesquisa se foca na característica (10) avaliação. Para Chueiri (2008, p. 52), a avaliação consiste em “uma atividade técnica, realizada com base em um modelo teórico de mundo, ciência e educação, que ocorre por meio de uma relação pedagógica que envolve intenções de ações, com o objetivo em condutas, atividades e habilidades dos sujeitos envolvidos”.

Na literatura, relatos de pesquisas que abordam a avaliação em Modelagem Matemática têm ocorrido com mais vigor nos últimos anos. Frejd (2012), apresentou em seu artigo sobre uma revisão crítica na literatura, investigando a avaliação da Modelagem Matemática, em que observou que existe uma complexidade no esforço de avaliar em Modelagem Matemática. Os artigos revisados baseiam-se em uma visão atomística da avaliação, ou seja, em que se avalia, separadamente, partes do desenvolvimento da atividade de modelagem, com foco mais no produto do que no processo. A falta de uma abordagem holística, em que se busca avaliar a Modelagem como um todo, foi encontrada em diversos países.

Pinto (2017), na sua dissertação sobre o que as pesquisas apontam sobre a avaliação do estudante em atividades de modelagem matemática, evidenciou que, embora existam práticas avaliativas nas dissertações e teses pesquisadas, percebeu-se que estas se encontraram norteadas por práticas avaliativas tradicionais.

Assim, podemos conjecturar que em contextos de práticas de atividades de modelagem matemática em sala de aula, além do aspecto desafiador, relativo às dificuldades sinalizadas em Ceolim (2015), a avaliação se apresenta com a mesma intensidade de desafio, pois de nada adianta utilizar estratégias diferenciadas na hora de ensinar se a avaliação continua a ser realizada de modo tradicional, somativa e classificatória. Nós defendemos que o contexto da avaliação deva ser realizado de maneira formativa e processualmente, ou seja, integrada ao processo de ensino e aprendizagem e uma das possibilidades é utilizar o portfólio como um instrumento de avaliação. Considerando a quantidade de pesquisas que tratam da avaliação em Modelagem e a falta de orientações a respeito de como o professor deva proceder durante uma prática avaliativa em Modelagem Matemática é que se objetiva o foco dessa pesquisa.

Para nossos propósitos, abordamos o portfólio como um instrumento que possibilita avaliar as capacidades de pensamento crítico, de articular, de dialogar durante o período de trabalho, levando em conta toda a trajetória percorrida. Hernández (1998, p. 100) define portfólio como sendo um:

continente de diferentes classes de documentos (notas pessoais, experiências de aula, trabalhos pontuais, controle de aprendizagem, conexões com outros temas fora da escola, representações visuais, etc.) que proporciona evidências do conhecimento que foi construído, das estratégias utilizadas e da disposição de quem o elabora em continuar aprendendo.

De acordo com Villas Boas (2005, p. 5), o portfólio enquanto instrumento de avaliação:

Não é uma avaliação classificatória nem punitiva. Analisa-se o progresso do aluno. Valorizam-se todas as suas produções: analisam-se as últimas comparando-as com as primeiras, de modo que se perceba o avanço obtido. Isso requer que a construção do portfólio se baseie em propósitos de cuja formulação o aluno participe, para que se desenvolva o sentido de “pertencimento”.

Tal prática requer uma ampliação do diálogo entre professor e aluno e que, por meio do portfólio, a avaliação seja comprometida com a aprendizagem, em que existe uma parceria durante esse processo, pois permitirá avaliar as capacidades de reflexão, os registros escritos e as diferentes formas de expressões do aluno. A proposta de utilização do portfólio é diversificar o processo e favorecer ao professor acompanhar, ter o registro do crescimento do aluno e integrar ao processo de ensino de maneira tão sutil que o estudante não diferencie os momentos que está aprendendo e quando está sendo avaliado. Mendes *et al.* (2019, p. 5) argumentam que:

O portfólio representa mais do que uma coleção de tarefas realizadas pelos alunos em determinado ciclo do processo de ensino; o que faz dele um importante instrumento de avaliação da aprendizagem como prática de investigação é a oportunidade do processo constante de reflexão, tanto para o aluno como para o professor. Portanto a

utilização do portfólio no contexto da avaliação formativa baseia-se na ideia da natureza evolutiva dos processos de ensino e de aprendizagem.

Entendemos que no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, os alunos podem se expressar por meio de registros escritos, potencializados pelo uso do portfólio. Deste modo, destacamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, filósofo e psicólogo, cujos estudos têm contribuído para as pesquisas em Educação Matemática. Esta teoria é uma abordagem cognitiva e analisa as dificuldades encontradas na aprendizagem da matemática, levando em consideração o modo de acesso aos objetos, as variedades de sistemas semióticos que permitem representá-los e a necessária distinção entre o objeto matemático e sua representação.

Um sistema semiótico é, de acordo com Duval (2011), um conjunto de signos, organizados segundo regras próprias de formação e convenções, que apresentam relações internas que permitem identificar os objetos representados. E para designar os sistemas semióticos específicos da Matemática, Duval (2011) escolheu o termo registro. Para ele, um registro de representação é um sistema semiótico que cumpre, além da função de comunicação, as funções cognitivas de objetivação (entendimento para si) e tratamento. O autor faz referência a quatro tipos de registros de representação: a língua natural, os sistemas de escrita (numérica, algébrica e simbólica), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas.

No entendimento do autor, os diferentes sistemas semióticos permitem diversas representações de um mesmo objeto, aumentando as capacidades cognitivas do sujeito. Sendo assim, Duval (2009) afirma que o conhecimento matemático é transformado em saber quando ocorre a mobilização espontânea de, pelo menos, dois registros semióticos de um mesmo objeto matemático. Para compreender como ocorre esses registros, é necessário entender duas atividades cognitivas: o tratamento e a conversão. O tratamento é transformar uma representação semiótica em outra no mesmo sistema de representação, já a conversão é transformar o registro em diferente sistema de representação, sem perder de vista o significado do objeto de partida.

A BNCC (Brasil, 2018, p. 267) também menciona a utilização de diversos registros na competência 6, específicas de Matemática do Ensino Fundamental ao indicar que o aluno precisa:

Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas e dados).

Estabelecendo relações da atual perspectiva curricular brasileira, espera-se que, na Educação Básica, os estudantes utilizem diferentes registros no processo da aprendizagem. As ações do professor para evidenciar as aprendizagens são fundamentais, elas podem acontecer por meio das suas intervenções no decorrer das atividades de modelagem matemática (Araki; Silva; Mendes, 2021). Nesse sentido, as intervenções docentes podem ressignificar conhecimentos, estratégias, encaminhamentos, implicando na aprendizagem (Pazuch; Nehring, 2012). No presente estudo, grande parte das intervenções ocorreram por meio de *feedbacks* escritos no portfólio dos estudantes.

Como apresentado por Weber (2020), o *feedback* em si não é exato e não garante o aprendizado. Perrenoud (1998, *apud* Weber 2020, p. 36) salienta que o *feedback* oferece estímulos que influenciam e podem auxiliar um melhor aprendizado, visto que:

O feedback é apenas uma mensagem. Por que ele ajudaria a aprender? Porque o aluno leva isso em consideração, porque afeta seu funcionamento cognitivo. As teorias da comunicação nos ensinam que a eficácia de uma mensagem é medida no nível de seu destinatário: uma intervenção, uma informação apenas ajuda o aluno a aprender melhor se modificar seus processos cognitivos. Uma maneira abstrata de dizer que ninguém aprende sobre o assunto. Só podemos estimular, fortalecer, redirecionar, reformular, acelerar seu funcionamento mental, na esperança de influenciar seus processos de aprendizagem.

Pinilla (2010) e D'Amore, Pinilla e Iori (2015) tratam dos vários aspectos da aprendizagem em matemática e podemos focar a atenção na capacidade de dominar e saber manipular os vários Registros de Representação Semiótica. Este tipo de análise é crucial, tanto em relação ao planejamento de uma atividade, quanto na avaliação da aprendizagem do aluno. Segundo os autores, a aprendizagem da matemática compreende pelo menos cinco tipos diferentes de componentes: aprendizagem conceitual, também chamada de noética, que se refere ao estudante ter condições de identificar propriedades do conceito, de representá-lo, de transformar tal representação e de utilizá-la de maneira adequada; aprendizagem algorítmica que está relacionada com a habilidade para dar respostas às operações, ao cálculo, à aplicação de fórmulas ou ao desenho de figuras; aprendizagem estratégica, que está relacionada ao aluno conjecturar, deduzir, induzir ao resolver um problema; aprendizagem comunicativa que se remete à capacidade de exprimir ideias matemáticas, a argumentar, demonstrar e validar; a aprendizagem semiótica, que possui um papel próprio e uma ampla transversalidade pois está presente em todas as outras aprendizagens. Além disso, a aprendizagem semiótica está relacionada ao fato de saber escolher as características distintivas de um determinado objeto matemático construído cognitivamente ou em processo de construção em que se pretende

representar ou escolher o mais adequado, fornecer uma ou mais representações semióticas em um ou mais registros e também saber transformá-la em outra no mesmo registro.

Problemática

Considerando o exposto, nos debruçamos sobre a questão de pesquisa: *Como as ações do professor e dos alunos da Educação Básica a utilizar um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática podem promover a aprendizagem semiótica?* De modo a orientar nossas análises para essa questão de pesquisa, delineamos as seguintes questões norteadoras:

1. Que aprendizagem conceitual é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?
2. Que aprendizagem algorítmica é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?
3. Que aprendizagem estratégica é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?
4. Que aprendizagem comunicativa é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?

A fim de trazer reflexões sobre as questões supracitadas, desenvolvemos atividades de modelagem utilizando como instrumento de avaliação, o portfólio, com uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de um colégio estadual localizado em Assaí, no Paraná, em que a pesquisadora é professora desde 2006.

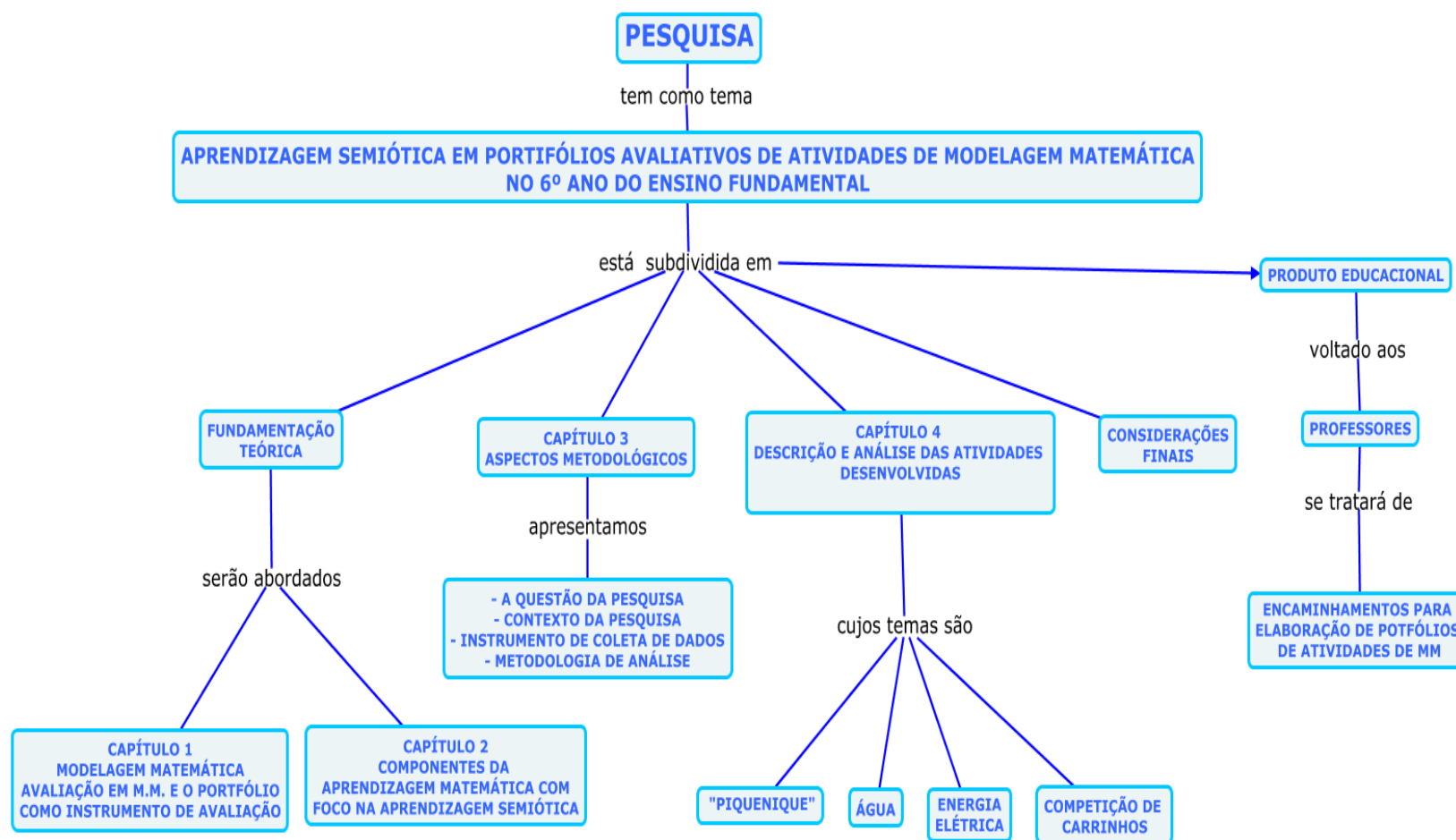
Estrutura do texto

Estruturamos a dissertação em seis capítulos. No capítulo 1, iniciamos com considerações históricas a respeito da Modelagem Matemática, em seguida apresentamos a fundamentação da Modelagem como alternativa pedagógica, a qual foi a opção para desenvolver as atividades dessa pesquisa, propostas em sala de aula com os estudantes. Discorremos também sobre práticas avaliativas com natureza formativa, sendo o Portfólio um instrumento de avaliação e as intervenções docentes durante a atividade de modelagem matemática. No capítulo 2, apresentamos os componentes da aprendizagem matemática de acordo com Pinilla (2010) sob os quais focamos atenção na aprendizagem semiótica. No capítulo 3, apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa, a questão da pesquisa, o contexto da pesquisa, bem como o instrumento da coleta de dados e metodologia de análise. No capítulo 4, trazemos a descrição e as análises (específicas e geral) das atividades desenvolvidas,

a partir dos registros produzidos pelos integrantes de um grupo de alunos. No capítulo 5 discutiremos sobre nossas considerações finais. A estrutura da nossa pesquisa está ilustrada em forma de Mapa Conceitual conforme a Figura 1.

Ao se tratar de um mestrado profissional e, considerando a temática que investigamos, elaboramos um Produto Educacional, que consiste em orientações de como um professor pode propor e construir com os alunos portfólios de atividades de modelagem matemática. Essas orientações foram organizadas por meio da plataforma denominada Genially com conteúdos interativos e animados, com a intenção de incentivar os professores a fazerem uso do portfólio como instrumento de avaliação em suas aulas com Modelagem Matemática. Na plataforma, além de explicar o que é um Portfólio e a Modelagem Matemática, temos a descrição de todas as atividades de modelagem desenvolvidas com a turma durante o ano de 2023, os planejamentos que subsidiaram os encaminhamentos em sala de aula e de modo a compartilhar essas atividades com os professores como sugestões que podem ser desenvolvidas e adaptadas para turmas dos sextos anos, visto que cada sala de aula é única e plural, e para outros anos do Ensino Fundamental.

Figura 1 – Mapa Conceitual da dissertação



Fonte: a autora (2023)

1 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática tem em um dos seus encaminhamentos a problematização de situações do cotidiano, em que o aluno se torna um sujeito ativo da construção do seu conhecimento, pois investiga e reflete sobre fenômenos vividos por ele ou por alguém, utilizando a Matemática para solucionar o problema definido.

Nos propusemos neste capítulo a apresentar considerações a respeito da Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática, abordamos algumas vertentes de Modelagem defendidas por estudiosos dessa área e sobre as intervenções docentes durante atividades de modelagem e, em seguida, apresentamos algumas considerações acerca da avaliação em Modelagem Matemática.

De antemão, esclarecemos que entendemos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica (Almeida; Silva; Vertuan, 2013) para ensinar conteúdos matemáticos nos diferentes níveis de escolaridade.

1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ALTERNATIVA PEDAGÓGICA

A Modelagem Matemática tem sua origem na Matemática Aplicada, porém na área da Educação Matemática vem sendo amplamente aceita e divulgada dada essa aproximação entre Matemática e realidade e o anseio por novos currículos contextualizados e com possibilidades de estabelecer relações entre a matemática e as demais áreas do conhecimento e o cotidiano do estudante. Embora existam diferentes vertentes presentes na literatura, todas elas compartilham da sua principal característica que é trazer situações do cotidiano, próximo ou não do estudante para a sala de aula.

Segundo Blum (2002), aprender matemática é essencial e esta aprendizagem pode ser mediada por questões extra matemáticas. Para Blum (2002, p. 151),

[...] todos os seres humanos devem aprender matemática, pois ela fornece meios para a compreensão do mundo que nos rodeia, para lidar com os problemas do cotidiano ou visando à preparação para futuras profissões. Ao lidar com a questão de como os indivíduos obtêm conhecimento matemático, é fundamental considerar o papel das relações com a realidade, especialmente a relevância da aprendizagem que leva em consideração os contextos específicos.

Ubiratan D'Ambrosio, no prefácio da obra “Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática” de Rodney Carlos Bassanezi, (Bassanezi, 2002, p. 13), afirma que:

[...] a Modelagem Matemática é matemática por excelência. As origens das idéias centrais da matemática são o resultado de um processo que procura entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento dessas idéias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaborações sobre representações do real.

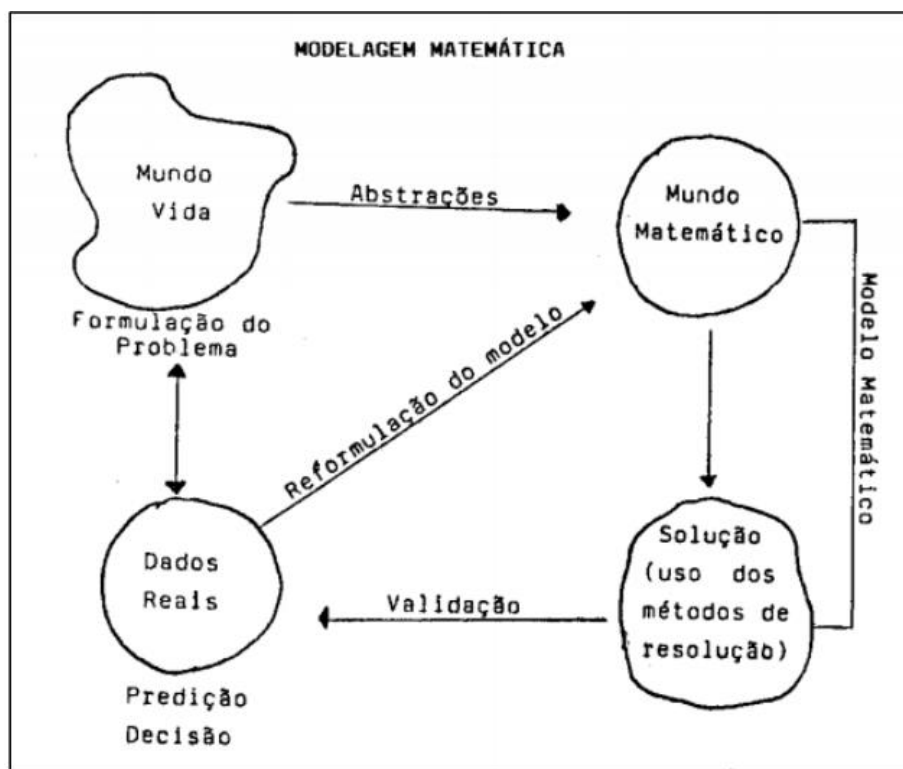
A Modelagem Matemática vem sendo apresentada como uma atividade que é orientada pela busca de solução para um problema associado à realidade. Skolverket (2010, apud Frejd, 2012, p. 88) caracteriza Modelagem como sendo uma habilidade matemática a ser almejada e que é a capacidade de “interpretar uma situação realista, projetar um modelo matemático e usar e validar as propriedades e limitações de um modelo”. Barbosa (2004, p. 3), diz que a Modelagem é compreendida como “um ambiente de aprendizagem no qual os estudantes são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”.

De modo geral, as caracterizações da Modelagem Matemática são associadas a esquemas que se convencionou chamar de ciclos de Modelagem. Blum e Niss (1991) defendem que a Modelagem requer do modelador algumas articulações entre a situação do cotidiano e a Matemática. Nesse sentido, para os autores, em uma atividade de modelagem matemática,

[...] o ponto de partida é um problema também chamado de situação-problema real. Esta situação tem de ser simplificada, idealizada e estruturada, por meio de condições e pressupostos apropriados e também pelos interesses do modelador. Isto conduz a um modelo real da situação original que, por um lado, ainda contém traços essenciais da situação original, mas, por outro lado, já está esquematizado e (se possível) permite uma aproximação com aspectos matemáticos. O modelo real tem de ser matematizado, ou seja, os dados, conceitos, relações, condições e pressupostos são traduzidos em matemática. Assim, resulta um modelo matemático da situação original. [...] O processo de resolução do problema continua no contexto da matemática, e as conclusões fundamentam-se em cálculos, verificações e aplicação de métodos e resultados matemáticos conhecidos, bem como podem abranger o desenvolvimento de novos conceitos, etc. [...] De modo geral, alguns resultados matemáticos são obtidos. Estes resultados têm de ser re-traduzidos para o mundo real, ou seja, ser interpretados em relação à situação original. Ao fazê-lo, o modelador também valida o modelo, ou seja, decide se o utiliza para os fins para quais foi construído. Ao validar o modelo, discrepâncias de vários tipos podem ocorrer, o que pode conduzir a uma modificação do modelo ou a sua substituição por um novo. Em outras palavras, o processo de resolução de problemas pode exigir a volta ao ciclo várias vezes. Se, eventualmente, um modelo satisfatório foi encontrado, o modelador pode usá-lo como base para fazer previsões, tomar decisões ou ações. [...] (Blum; Niss, 1991, p. 38-39).

A perspectiva de Burak (1992, p. 62), um dos primeiros pesquisadores a desenvolver a Modelagem na Educação Básica no Brasil, concebe a Modelagem Matemática como “um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e tomar decisões”. Na Figura 2, apresentamos um esquema que retrata a compreensão do processo de Modelagem, por Burak (1987).

Figura 2 – Esquema sobre a ideia de Modelagem Matemática apresentada por Burak (1987)



Fonte: Burak (1987, p. 38)

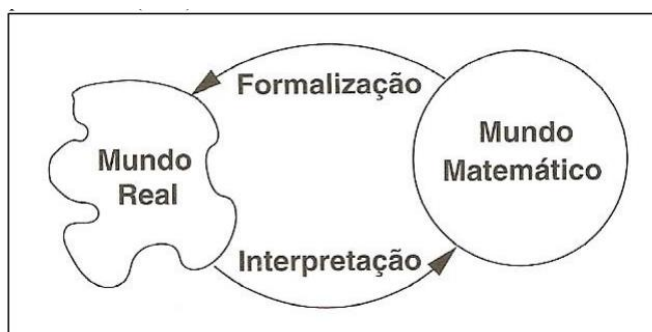
Burak e Brandt (2010) descreveram as seguintes etapas da Modelagem consideradas fundamentais e que são resultados de experiências vividas por eles e demais professores da Educação Básica:

- a) escolha de um tema: os estudantes escolhem assuntos de interesses deles que podem ter relação ou não com a matemática.
- b) pesquisa exploratória: como obter e organizar os dados.
- c) levantamento dos problemas: levantar e propor problemas a partir dos dados coletados.
- d) resolução dos problemas e o desenvolvimento dos conteúdos no contexto do tema: nesta etapa se faz o uso de todo o ferramental matemático disponível permitindo que os conteúdos matemáticos ganhem importância e significado.
- e) análise crítica da solução ou das soluções: é a última etapa do processo e é onde são feitas considerações e análises das hipóteses e se verifica a consistência lógica da solução.

Bassanezi (2002, p. 16) entende a Modelagem Matemática como a “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. O autor descreve a Modelagem como tomar um problema da

realidade, transformá-lo em um modelo matemático e procurar uma solução para esse problema (Figura 3).

Figura 3 – Esquema simplificado de Modelagem Matemática apresentado por Bassanezi (2002)

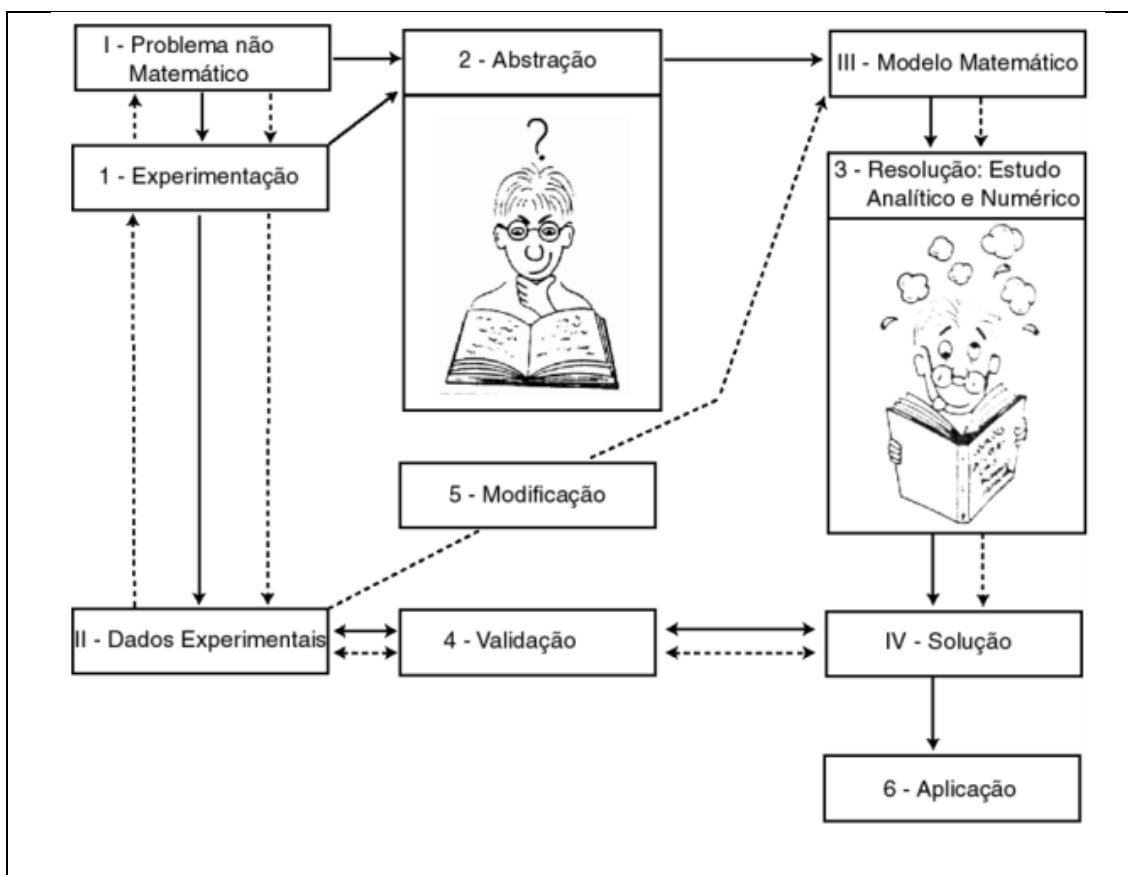


Fonte: Bassanezi (2002, p. 44)

Para que uma situação da realidade seja modelada matematicamente deve-se seguir uma sequência de etapas. Na Figura 4, é apresentado um esquema das etapas sugeridas por Bassanezi (2002). Neste esquema, as setas inteiriças indicam o primeiro contato com as etapas a serem trabalhadas e as pontilhadas indicam a procura por um modelo matemático. As etapas são nomeadas por experimentação, abstração, resolução, validação e modificação.

- a) Experimentação: atividade laboratorial ou de campo que fazem parte da coleta de dados.
- b) Abstração: o procedimento que conduzirá à formulação do modelo matemático. Observando-se nessa etapa a seleção de variáveis; a problematização ou formulação do problema em uma linguagem própria da área trabalhada; a formulação de hipóteses que dirigem a investigação com a finalidade de dedução de manifestações empíricas e as simplificações que permitem restringir e isolar o campo de estudo para que o problema possa ser trajetável e ao mesmo tempo mantenha sua relevância.
- c) Resolução: é o modelo matemático obtido, ou seja, a linguagem natural das hipóteses é representada em uma linguagem matemática coerente e que traduz a linguagem natural.
- d) Validação: processo em que se verifica se o modelo obtido é aceito ou não. O modelo deve ser testado, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real.
- e) Modificação: é a reformulação do modelo, quando necessário, devido a uma rejeição do modelo obtido relacionado a fatores ligados ao problema original.

Figura 4 – Esquema das etapas da Modelagem apresentado por Bassanezi (2002)

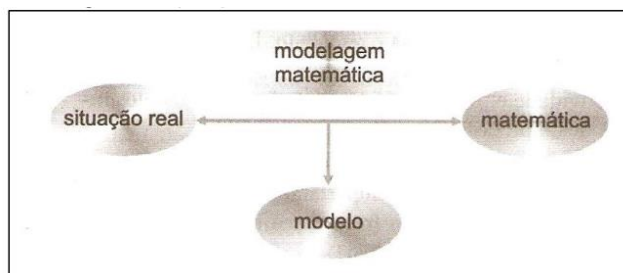


Fonte: Bassanezi (2002, p. 24)

No esquema proposto por Bassanezi (2002), considera-se necessária a obtenção de um modelo matemático que é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (Bassanezi, 2002, p. 20). O modelo pode ser uma expressão numérica ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais etc.

Outra perspectiva que não se distancia a esta de Bassanezi (2002) é a de Biembengut e Hein (2011, p. 12-13) que definem a Modelagem como o “processo que envolve a obtenção de um modelo” compreendendo-a também como “uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões”. Os autores a compreendem como um meio de interagir a Matemática e a realidade, conforme o esquema apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Esquema do processo de Modelagem Matemática dado por Biembengut e Hein (2011)



Fonte: Biembengut e Hein (2011, p. 13)

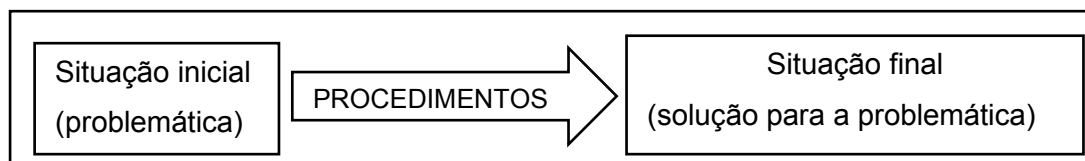
A obtenção do modelo matemático, para os autores, consiste em “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real” (Biembengut; Hein, 2011, p. 12), que é agrupado em três etapas:

- a) Interação: consiste em se familiarizar com o tema a ser modelado, esse conhecimento é a partir de estudo sobre o tema de forma indireta por meio de livros, revistas e internet ou direta por meio de experiência de campo ou laboratório.
- b) Matematização: é onde ocorre a formulação e resolução do problema por meio do modelo, ou seja, a situação-problema é representada em uma linguagem matemática objetivando-se descrevê-la e resolvê-la.
- c) Modelo matemático: a solução é interpretada e o modelo validado. Para que o modelo seja adotado, faz-se um retorno à situação-problema na qual se avalia o modelo. Caso ele não seja validado, volta-se para a etapa anterior, a matematização, para modificá-lo ou ajustá-lo.

Outra perspectiva que se encontra na literatura, e sob a qual nos debruçamos nesta investigação, são os entendimentos de Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 12). Os autores afirmam que:

uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final.

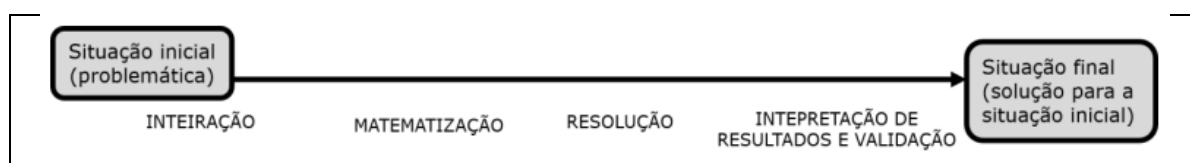
Almeida, Silva e Vertuan (2013) descrevem que a atividade de modelagem parte de uma situação inicial (situação-problema), na qual se delimita um problema, para uma situação final desejada (modelo matemático) considerada a solução da situação inicial. Esse processo de transição entre situação inicial e situação final só é possível a partir de um conjunto de conceitos e procedimentos (Figura 6).

Figura 6 – Descrição da atividade de modelagem matemática por Almeida, Silva e Vertuan (2013)

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 15)

Segundo Almeida e Silva (2014), podemos caracterizar as fases relativas à Modelagem Matemática ao conjunto de procedimentos necessários para a configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema, as quais denominam como: Inteiração, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados e Validação. Essas fases são formadas por ações que os alunos realizam quando desenvolvem atividades de modelagem.

- a) Inteiração: é o primeiro contato do aluno com a situação inicial, em que começa a “inteirar-se” pelo tema em estudo, começa a pesquisar informações.
- b) Matematização: o aluno transfere aquela situação-problema inicial que geralmente está na linguagem natural para a linguagem matemática, para resolver o problema inicialmente definido.
- c) Resolução: o aluno constrói um modelo matemático, uma representação subsidiada em estruturas matemáticas, com a finalidade de responder a situação-problema inicial.
- d) Interpretação de Resultados e Validação: o aluno analisa uma solução para o problema (Figura 7).

Figura 7 – Fases da Modelagem Matemática (2013)

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 15)

O que podemos conjecturar, assim como Stender (2018), é que o ciclo de Modelagem tem, por si só, se tornado um indicativo de como se dá (ou talvez, como deveria se dar) o desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Todavia, como assevera Ferri (2018), os alunos modeladores podem não seguir este ciclo e podem ir e voltar nas etapas quantas vezes julgarem necessário, identificando-se, desta forma, o que a autora denomina de rotas da Modelagem.

A partir dos entendimentos dos autores supracitados, podemos evidenciar que a Modelagem Matemática lida de forma diferente do ensino convencional e o seu desenvolvimento em sala de aula permite que o estudante se desenvolva ativamente durante as aulas, de modo a auxiliar a aprendizagem e o preparar para utilizar a Matemática em diversas áreas. Para Almeida, Silva e Borssoi (2021, p. 124), “dirigir a atenção para a aprendizagem em atividades de modelagem implica olhar para a atuação dos estudantes nessas atividades”. Atividades de modelagem podem permitir aos alunos evoluírem no seu aprendizado escolar e como indivíduos na sociedade, pois interagem entre si e vão desenvolvendo autonomia, flexibilidade e capacidade de negociação.

Vale destacar, todavia, que as ações dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem são influenciadas de sobremaneira pela qualidade e tipo de intervenção do professor que os orienta.

1.2 INTERVENÇÕES DOCENTES NO DESENVOLVIMENTO DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Na literatura existem diferentes argumentações que orientam e sustentam as discussões relativas à aprendizagem dos alunos em atividades de modelagem. Nesta pesquisa, a problematização relativa à aprendizagem em atividades de modelagem é mediada pela preocupação com aquilo que os alunos aprendem da matemática e o que registram sobre o que aprenderam, de modo que auxilia o professor a intervir no desenvolvimento da atividade ou mesmo na retomada do conteúdo.

De acordo com o Dicionário Online Michaelis de Português, intervenção é um substantivo feminino definido como o “ato de intervir; ato de tomar parte em uma discussão, emitindo opiniões ou contribuindo com ideias”. Ainda, o Dicionário Online de Português define como “ato de intervir; de exercer influência em determinada situação na tentativa de alterar seu resultado; interferência”.

Por meio de intervenções docentes no desenvolvimento de uma atividade pedagógica, o professor pode avaliar a aprendizagem, “exercendo influência sobre a forma como os alunos lidam com a construção do conhecimento, sobretudo dada a relação intrínseca entre avaliação e o ensino e a aprendizagem” (Araki; Silva; Mendes, 2021, p. 59).

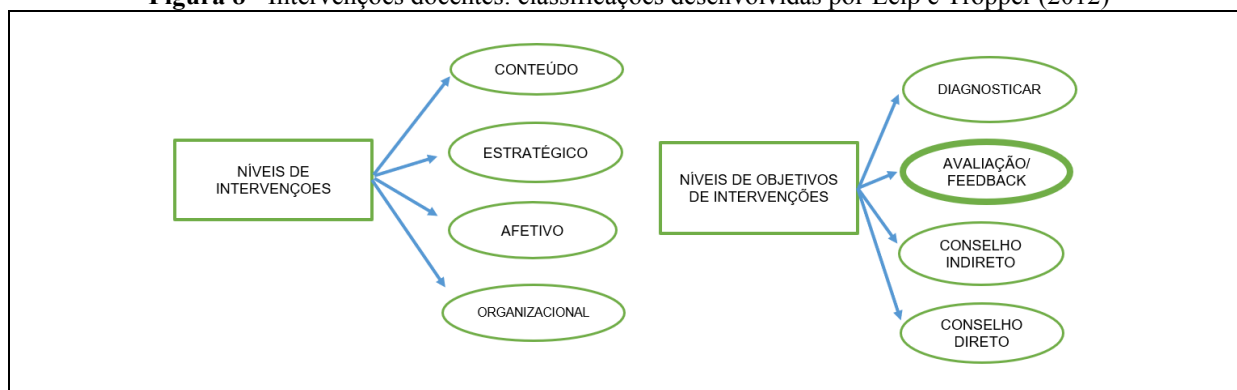
Segundo Veronez (2013, p. 25), “é na transição da situação inicial (problemática) para a situação final (solução para a situação inicial) que o professor tem a oportunidade de ensinar

Matemática”. Assim, para que a atividade de modelagem matemática possa ter resultados satisfatórios quanto à aprendizagem é necessário realizar intervenções docentes no desenvolvimento realizado pelos alunos.

Silva, Borssoi e Almeida (2015) denotam que, durante uma atividade de modelagem matemática, os estudantes podem se deparar com situações que não possuem conhecimentos suficientes para resolvê-las. Portanto, no desenvolvimento de uma atividade, os estudantes podem aprender novos conceitos de forma autônoma, quando discutem e refletem sobre informações pesquisadas por eles em sites ou livros ou a partir de intervenções docentes que estão mediando a atividade.

As intervenções são ações que podem “contribuir no tocante à compreensão de mecanismos subjacentes à aprendizagem e à função do docente em um ambiente investigativo” (Silva; Vertuan, 2018 p. 502). A partir das intervenções, o estudante pode elaborar conceitos provenientes de ações reflexivas internas, nas quais não seriam possíveis sem uma provocação de outrem (Soares, 2005).

Estudos apontam que existem classificação de intervenções em atividades de modelagem matemática. Uma dessas classificações foi desenvolvida por Leiß e Tropper (2012), que caracterizaram níveis de intervenções: no que diz respeito ao conteúdo; estratégico, relacionado ao processo de Modelagem e resolução de problemas; afetivo, que tentam influenciar o estado mental dos alunos e o organizacional que são relativas às condições básicas do trabalho. Além desses níveis de intervenções, os autores abarcaram também os níveis de objetivos das intervenções, que são de diagnosticar; avaliação/*feedback*; conselho indireto, dando dicas sutis para ajudar os alunos a encontrarem a melhor forma de resolver e o conselho direto, quando o professor dá informações relevantes. A estruturação dessa classificação das intervenções encontra-se ilustrada na Figura 8.

Figura 8 - Intervenções docentes: classificações desenvolvidas por Leiß e Tropper (2012)

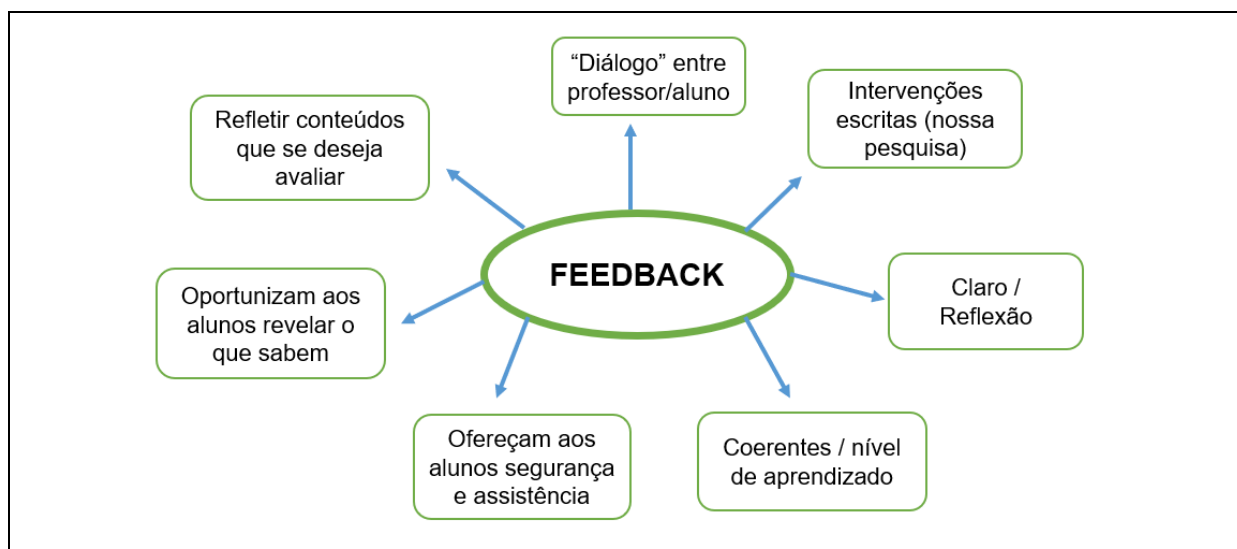
Fonte: a autora (2023)

Entre as várias ações de intervenções docentes, focamos nosso olhar para a de *feedback*, em que é feito um diálogo entre professor e aluno. Segundo Mendes (2014, p. 185-186, destaques da autora):

[...] ao se elaborar intervenções escritas, é preciso refletir se elas: são claras no sentido de refletir o que o professor realmente deseja e que o aluno as interprete; são coerentes com o nível de competência apresentado pelo aluno em sua produção escrita e ao mesmo tempo permitir que desenvolva novas competências; oferecem aos alunos segurança, assistência, *feedback* e promovem um “diálogo”; oportunizam ao aluno revelar o que sabe; refletir conteúdos que se deseja avaliar, ou que se deseja que o aluno desenvolva.

Diante do exposto, entendemos que as intervenções de *feedback* realizadas pelo professor possibilitam orientar os alunos durante o processo de aprendizagem no desenvolvimento de atividades de modelagem, desde que elas sejam planejadas e condizentes com o objetivo de estudo. Em se tratando de “diálogo” realizado de forma escrita, os alunos podem utilizar diferentes representações para responder ao questionamento. A Figura 9 aborda as finalidades do *feedback*, segundo Mendes (2014).

Figura 9 – Finalidades do *Feedback*



Fonte: a autora (2023) adaptado de Mendes (2014)

Em sua pesquisa, Weber (2020), apresenta elementos que podem favorecer a articulação de práticas avaliativas somativas e formativas no processo avaliativo escolar, entre esses elementos, ela aponta o *Feedback* como um elo de comunicação e afirma que ele é determinado pela intenção que o precede.

Feedbacks em avaliação somativa e avaliação formativa caminham próximos e podem fortalecer uma possível articulação na prática escolar à medida que essa interação aumenta. É possível inferir que, para a articulação entre as avaliações somativa e formativa, o *feedback* para o aluno e para o professor é necessário, e não poderia ser diferente, por se tratar de uma característica comum e essencial às duas avaliações. (Weber, 2020, p. 37)

Levando em consideração a diversidade de instrumentos de avaliação em Matemática, nos pautamos em uma prática avaliativa subsidiada pelo uso do portfólio.

1.3 PORTFÓLIO DE MODELAGEM MATEMÁTICA: EM DIREÇÃO A UMA PRÁTICA AVALIATIVA

Nos últimos tempos, mais precisamente na última década, ocorreu uma série de mudanças nas concepções de ensino e aprendizagem, resultando também alterações nas práticas das avaliações escolares. As práticas avaliativas que primam pela repetição e memorização escrita do conteúdo abordado pelo professor ou pelo material didático não deveriam ter mais lugar em propostas atuais de educação. Essas práticas avaliativas tradicionalmente encontram-se ao final do processo de ensino e aprendizagem e, muitas vezes, fazem parte apenas para quantificar por meio de notas a aprendizagem dos alunos.

De modo a superar esse tipo de prática, Hernández (2000) aborda as mudanças nas propostas curriculares e essas propostas enfatizam a forma de avaliar a aprendizagem para poder: “Levar adiante uma avaliação da aprendizagem que pudesse dar conta e estar em consonância com as finalidades educativas” (Hernández, 2000, p. 163-164). Isso significa que os professores precisam ter certeza sobre a aprendizagem de seus alunos e estes precisam saber o que necessitam aprender.

A avaliação educacional subsidia o ensino e a aprendizagem e tem como objetivo fornecer informações sobre a aprendizagem do educando. Em se tratando de avaliação em matemática, Niss (1993, p. 3) afirma que:

Diz respeito ao julgamento da capacidade, performance e desempenho matemático – sendo os três aspectos considerados em sentido amplo – dos estudantes enquanto indivíduos ou enquanto participantes de um grupo e a noção de “estudante” iniciando com jardim de infância e se estendendo até estudantes de pós-doutorado. A avaliação evidencia, portanto, o resultado do ensino de matemática para cada classe e tipo de estudante.

Hadji (1994) afirma que algumas questões devem ser lembradas ao se definir algumas escolhas no processo de avaliação, entre elas: o que?, por quem?, quando?, como?, para quem? e para que?. Todas essas perguntas subsidiam as respostas para saber qual o objeto da avaliação, qual será a natureza dos avaliadores, quais serão os tipos de avaliação, qual ponto de vista metodológico, quem utilizará e interpretará os dados e quais são as principais funções da avaliação.

A avaliação em sala de aula deve desenvolver capacidades nos estudantes, como a “[...] reflexão, criatividade, autoavaliação, parceria, pertencimento e autonomia” (Villas Boas, 2017, p. 158).

Frejd (2002) fez uma revisão de literatura com foco em Modelagem Matemática na Educação Matemática, a fim de analisar as abordagens usadas ou sugeridas para avaliar a competência de Modelagem dos alunos e investigar o que é chamado de avaliação e se relaciona com Modelagem Matemática. O método utilizado foi a identificação de artigos, a categorização dos artigos com a finalidade de sintetizar a coerência entre os diferentes trabalhos e, por fim, a análise estendida. Para analisar as abordagens de avaliação da Modelagem, é importante conhecer os tipos de estudos de pesquisa para entender se os critérios usados em uma estrutura ou modo de avaliação são derivados de uma análise teórica, baseada na literatura, construções *ad hoc*, experiências de situações de avaliação ou estudos empíricos do trabalho dos alunos. Para resumir, dos procedimentos investigados por Frejd (2002), foram identificados: 35 trabalhos sobre testes escritos; 21 trabalhos de relatórios de projeto; 7 trabalhos de relatórios de

projeto incluindo apresentações orais; 4 trabalhos de concurso; 3 trabalhos de sessões de pôsteres e apenas 2 trabalhos de portfólios dos alunos.

Considerando ainda uma busca pela literatura, encontramos algumas pesquisas que versam sobre a Avaliação em Modelagem Matemática. Dentre elas, a de Pinto (2017) que, na sua dissertação sobre o que as pesquisas apontam sobre a avaliação do estudante em atividades de modelagem matemática, foram selecionados 73 trabalhos entre 2006 e 2016 que abordavam sobre critérios de avaliação e Modelagem Matemática; instrumentos para avaliação e Modelagem Matemática; práticas avaliativas e Modelagem Matemática; e consequências das práticas avaliativas sob as atividades de modelagem matemática. A análise apontou que, embora existam práticas avaliativas nas dissertações e teses pesquisadas, percebeu-se que estas se encontravam norteadas por práticas avaliativas tradicionais.

O estudo de Magalhães (2021) aborda sobre a avaliação em práticas de Modelagem Matemática na sala de aula. Essa pesquisa apresentou uma investigação acerca da avaliação em Modelagem Matemática mediante dois objetivos: compreender como a avaliação de Modelagem vem sendo realizada na última década (de 2010 a 2020), buscando identificar os diferentes procedimentos e ferramentas utilizados e, posteriormente, utilizar os resultados desse primeiro momento com a intenção de desenvolver uma ferramenta para avaliação em Modelagem Matemática. A ferramenta para avaliação em Modelagem proposta, consiste em pontuar dezoito critérios a serem avaliados durante a atividade de modelagem matemática. Nesses critérios, atribuiu de 0 a 4 pontos agrupados dentro de alguns aspectos e, por sua vez, os aspectos estão agrupados em três dimensões: do fazer Modelagem Matemática, do uso da matemática e da compreensão da situação da realidade. Na pesquisa evidenciou três focos de avaliação em Modelagem Matemática e, também, a ferramenta para avaliação em práticas de Modelagem na sala de aula proposta se mostrou eficaz para os professores que a utilizaram para corrigir atividades de modelagem matemática desenvolvidas em diferentes níveis de escolaridade e segundo diferentes perspectivas de Modelagem Matemática.

As ponderações de Luvison (2023), em sua dissertação, teve como objetivo analisar como intervenções do professor delineiam o desenvolvimento de Projetos em Modelagem Matemática e os resultados da pesquisa mostraram um meio de avaliação que se difere do método tradicional. Os estudantes foram avaliados em todo o processo, durante o desenvolvimento das atividades, nas correções feitas por meio dos comentários realizados pela professora e pela análise final que permitiu que eles refletissem sobre as atividades que foram desenvolvidas.

No artigo de Magalhães e Almeida (2021) foi apresentada uma investigação relativa à avaliação em Modelagem Matemática. Selecionaram 44 artigos, sendo eles: 22 artigos de eventos do ICTMA, 14 artigos de revistas de Qualis A1, 5 artigos de autores brasileiros, 3 artigos que eram de conhecimento prévio dos autores. Desses artigos selecionados, construíram uma síntese de avaliação apontada em onze publicações analisadas. Os resultados decorrem de uma revisão sistemática de artigos publicados no período de 2010 a 2020, considerando tanto publicações brasileiras quanto internacionais. Foram identificados três focos de avaliação: as etapas identificadas no ciclo de Modelagem, a avaliação de competências e de sub-competências de Modelagem e a avaliação de aprendizagem de conteúdos da Matemática. Em relação aos instrumentos utilizados para a avaliação, identificaram cinco, sendo eles: as rubricas de avaliação, que foi o mais frequente em que se mostrou uma avaliação de forma holística, ou seja, avaliar a atividade de modelagem como um todo; o uso de testes com questões de múltipla-escolha, esse instrumento possibilita avaliar um grande número de alunos e se interessa mais pelas leituras estatísticas sobre os resultados da avaliação, com o foco mais no produto do que no processo; a estruturação de um *framework* para as ações dos alunos; a própria atividade de modelagem como um instrumento de avaliação, seguiu o formato de uma prova em fases, ou seja, após o desenvolvimento da atividade ou parte dela, a professora corrigia, fazia questionamentos e devolvia aos alunos, repetindo o processo quantas vezes fosse necessário; e por último foi a elaboração de critérios *a posteriori* para avaliar, que consiste em elaborar critérios de avaliação a fim de julgar explicitamente se a atividade desenvolvida pelo grupo “deu certo” ou não, após o desenvolvimento da atividade. A principal lacuna detectada nas práticas de avaliação referiu-se à possibilidade de incorporar nos instrumentos de avaliação as diferentes perspectivas com que as atividades de modelagem podem ser introduzidas nas aulas de matemática.

No estudo de Silva, Dalto e Luvison (2021) a respeito do uso de diferentes instrumentos para avaliação da aprendizagem no contexto escolar, foi lançado o olhar para o portfólio, entendido como uma coleção organizada de atividades dos alunos num determinado período, selecionada pelo professor ou escolhidas pelos alunos que possibilita o estabelecimento de diálogos entre esses sujeitos. Com o intuito de evidenciar aspectos revelados nos registros dos alunos quando construíram um portfólio de atividades investigativas em uma turma do ensino superior, emergiram categorias que dizem respeito a aspectos relativos aos alunos e aspectos relativos à prática docente no que se refere aos conhecimentos construídos na disciplina, às dificuldades dos alunos e à orientação do professor.

No artigo de Silva e Dalto (2017), foram apresentados resultados de uma pesquisa na qual elaboraram e aplicaram uma estratégia de avaliação de atividades de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula a partir de critérios pontuados via uma escala holística⁴. A estratégia de avaliação foi elaborada segundo as fases associadas ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Foi aplicada em sala de aula de uma universidade pública, e com a aplicação da estratégia de avaliação, evidenciaram a praticidade da mesma tanto no sentido qualitativo quanto quantitativo, destacando a necessidade de ajustes de acordo com as características das atividades desenvolvidas.

Em pesquisa realizada por Dalto e Silva (2018), a Modelagem Matemática foi considerada como estratégia para a avaliação da aprendizagem. A proposta desenvolvida seguiu os encaminhamentos de prova em fases e, por meio deles, foi possível evidenciar que uma atividade de modelagem segue três dos princípios acerca da avaliação na sala de aula de acordo com De Lange (1999): a matemática deve incorporar-se em situações que fazem parte da realidade do aluno; os métodos de avaliação devem permitir que os estudantes revelem o que sabem; e os estudantes devem ter a oportunidade de receber o *feedback* sobre seu trabalho.

Na perspectiva de investigar como um portfólio de atividades de modelagem matemática se configura enquanto estratégia de avaliação formativa, Silva e Dalto (2020), analisaram dez portfólios de alunos do ensino superior. Por meio de análise qualitativa de cunho interpretativo das produções escritas, evidenciaram que o *feedback* fornecido pela professora da turma proporcionou aos alunos novas oportunidades de aprendizagem, de modo que os mesmos puderam modificar procedimentos de resolução, corrigir erros e utilizar conhecimentos matemáticos. Assim, entenderam que o uso do portfólio foi evidenciado como instrumento que serve à avaliação formativa em Modelagem Matemática na medida em que o diálogo estabelecido entre professor e aluno faz com que o aluno repense o que foi apresentado, proporcionando novas oportunidades de aprendizagem.

Com o intuito de apresentar uma investigação acerca da avaliação em Modelagem, Almeida e Magalhães (2022) tiveram como objetivo estruturar uma ferramenta para avaliação

⁴ Os autores utilizaram a escala holística focada que corresponde a uma forma de transformar o desempenho dos alunos em nota numérica ou conceito a partir de suas produções escritas ao resolverem problemas. A escala deve chamar a atenção para aspectos como compreensão do problema, escolha e execução de estratégias eficazes, além da explicação fornecida pelos alunos. Assim, a utilização de uma escala como essa pode contribuir para que a avaliação de atividades de modelagem matemática cumpra as funções de regular os processos de ensino e de aprendizagem e de certificar.

em atividades dessa natureza. A ferramenta propõe que essa avaliação deve incorporar três dimensões:

- do fazer Modelagem Matemática, são definidos três aspectos: leitura da situação da realidade, matematização e análises realizadas;
- do uso da matemática, são definidos dois aspectos: a mobilização dos conceitos matemáticos e o uso de técnicas ou métodos adequados;
- da compreensão da situação da realidade: visa-se avaliar o estudante em relação à sua percepção do potencial da atividade de modelagem para estudar a situação da realidade e quais ações usa para indicar sua compreensão dessa situação.

A estas dimensões são associados aspectos e critérios e uma escala de pontuação que gera uma nota final para o estudante. A flexibilidade da pontuação, viabilizando ao professor avaliar segundo seus propósitos e a perspectiva de Modelagem que está usando é um aspecto inovador. Essa análise inclui: pertinência, adequação e relevância das dimensões, aspectos e critérios; eficiência da escala de pontuação; operacionalidade da ferramenta.

O artigo de Silva, Borssoi e Dalto (2021), investigou como ocorre a matematização em um processo de avaliação em fases em Modelagem Matemática. No desenvolvimento da atividade de modelagem, várias intervenções, questionamentos, direcionamentos, foram feitos pelos professores a partir da dinâmica da prova em fases. A análise qualitativa revelou que o acompanhamento possibilitado pela avaliação em fases permitiu diagnosticar que a matematização, em alguns momentos, foi orientada pelos professores e outras vezes foi requerida de forma imperativa pelos professores. As intervenções e os diálogos nas diferentes fases da avaliação permitiram diagnosticar que os alunos não estavam conseguindo vincular a matemática estudada na disciplina com a matemática necessária para descrever o problema.

Na pesquisa de Silva, Dalto e Borssoi (2023) foram evidenciados aspectos formativos e somativos em *webfólios* de atividades investigativas elaborados em uma disciplina do ensino superior. O quadro teórico está pautado no *webfólio* como uma coleção de atividades desenvolvidas em algum ambiente virtual de aprendizagem e as atividades investigativas são consideradas essencialmente abertas e pouco estruturadas, passíveis de abarcar situações de interesse dos alunos e mobilizar conhecimentos de diferentes naturezas. A análise qualitativa dos *webfólios*, permitiu evidenciar aspectos relativos à avaliação formativa do conteúdo matemático e como o *webfólio* se configurou como instrumento de avaliação do rendimento da disciplina, aspectos somativos foram atrelados à nota atribuída.

Considerando alguns dos trabalhos presentes na literatura e dos quais tivemos acesso que versam sobre Avaliação e Modelagem Matemática, organizamos o Quadro 1 em que apresentamos as pesquisas em temas, de acordo com o que elas têm em comum.

Quadro 1: Pesquisas elencadas

Temas	Pesquisas
Revisão de literatura sobre a Relação entre Modelagem Matemática e a avaliação	- Frejd (2002) - Pinto (2017) - Magalhães e Almeida (2021)
Portfólio/ Webfólio como instrumento de avaliação.	- Silva e Dalto (2020) - Portfólio - Silva, Dalto e Luvison (2021) – Portfólio - Silva, Dalto e Borssoi (2023) - Webfólio
Pesquisas com intenção de desenvolver ferramentas para avaliação	- Magalhães (2021) - Almeida e Magalhães (2022)
Estratégias de avaliação de atividades de modelagem matemática	- Silva e Dalto (2017) - Dalto e Silva (2018)
Modelagem Matemática e avaliação em geral	- Silva, Borssoi e Dalto (2021): matematização em um processo de avaliação em fases em Modelagem Matemática - Luvison (2023): intervenção do professor em projetos de Modelagem Matemática.

Fonte: a autora (2023)

Com o reconhecimento dos trabalhos já desenvolvidos, pudemos evidenciar que o uso do portfólio como um instrumento de avaliação em atividades de modelagem matemática, não se mostra expressivo na Educação Básica; por isso entendemos ser necessário contribuir com essa lacuna, pois entendemos que o portfólio é um instrumento que permite avaliar de um modo diferente do tradicional e oportuniza ao estudante ser avaliado durante todo o processo da atividade.

Para Jurgensen (2022, p. 10):

O uso do portfólio enquanto instrumento de avaliação enquadra-se nos pressupostos de uma avaliação formativa, pois como afirma Villas Boas (2009), trata a avaliação como processo, inclui os alunos como participantes ativos desse processo e permitem a reflexão pelo aluno sobre suas aprendizagens. Para além de ser uma coleção de trabalhos dos alunos, a autora complementa a ideia, dizendo que a seleção dos trabalhos é feita por meio de uma autoavaliação crítica em consonância com um julgamento sobre a qualidade dos trabalhos e estratégias utilizadas – definidas pelos estudantes em seus processos de reflexão.

Nesse contexto, Villas Boas (2001), referindo-se ao processo de avaliação formativa, sugere o uso de portfólio ou pasta avaliativa como um instrumento eficaz para a realização de tal avaliação. Uma vez que reúne as produções dos estudantes e professores, para que, eles próprios e outras pessoas conheçam seus esforços, seus progressos e suas necessidades.

Sá-Chaves (2000, *apud* Vieira, 2002) refere-se ao portfólio reflexivo como sendo instrumento de diálogo entre educador e educando, que não é produzido só no término do período para fins avaliativos; é continuamente (re)elaborado na ação e partilhado de forma a recolher, em tempo útil, outros modos de ver e de interpretar, que facilitem ao aluno uma ampliação e diversificação do seu olhar, levando-o à tomada de decisões, ao reconhecimento da necessidade de fazer opções, de julgar, de definir critérios, além de permitir as dúvidas e conflitos para deles poder emergir mais consciente, mais informado, mais seguro de si e mais tolerante quanto às hipóteses dos outros. Nesse sentido, pode-se entender que também compreendem o portfólio como sendo um instrumento de estimulação do pensamento reflexivo, auxiliando em oportunidades para documentar, registrar e estruturar os procedimentos e a própria aprendizagem. O portfólio evidencia ao mesmo tempo, tanto para o educando quanto para o educador, processos de autorreflexão. Com isso, ele possibilita o sucesso do estudante que, em tempo, pode transformar, mudar, (re)equacionar sua aprendizagem, em vez de simplesmente saber sobre ela, ao mesmo tempo em que permite ao professor repensar sua prática e suas condutas pedagógicas em vez de somente fazer algum juízo, avaliar ou classificar a aprendizagem do aluno.

Ainda sobre o portfólio e segundo Shores e Grace (2001, *apud* Vieira, 2002, p. 150):

todos se beneficiam ao desenvolver bons portfólios, pois esse tipo de avaliação aumenta a cooperação e o entendimento entre professores e pais. Ao individualizar as experiências de aprendizagem permite que cada criança possa crescer no seu próprio potencial máximo; possibilita a cada professor a determinação do seu próprio ritmo, encorajando seu desenvolvimento profissional, e acompanhar o trabalho da criança através de diferentes domínios de aprendizagens. Nesse sentido, Shores e Grace (2001) sugerem a aplicação de técnicas de avaliação com portfólio em crianças, afirmando que essas técnicas encorajam o ensino centrado no desenvolvimento infantil. As crianças que desenvolvem o hábito de refletir sobre suas experiências aprendem a definir objetivos de aprendizagem por si mesmas.

A partir das caracterizações e entendimentos trazidos a respeito do portfólio, pode-se evidenciar que este instrumento de avaliação vai além de uma reunião de trabalhos colocados em uma pasta. O seu uso serve para, além de selecionar e ordenar evidências de aprendizagem do estudante, identificar relações ao modo como estudantes e professores refletem sobre os reais objetivos de aprendizagem, quais foram cumpridos e quais não foram alcançados.

Portanto, o uso do portfólio durante as atividades de modelagem matemática, pode permitir uma prática pedagógica reflexiva, em que o estudante muda de atitude: de passivo para um processo participativo e criativo. Outro ponto importante de se destacar é que a avaliação em Modelagem Matemática por meio do portfólio pode levar o estudante a organizar seu pensamento e não apenas registrar. E nesse ato de pensar, ele registra promovendo um diálogo

entre professor e aluno por meio das intervenções docentes. É uma prática de avaliação integrada ao processo da aprendizagem, em que o estudante não consegue diferenciar os momentos em que estão aprendendo do momento em que estão sendo avaliados.

Das pesquisas realizadas que trouxemos neste capítulo relativas ao portfólio de atividades de modelagem matemática, a análise dos registros escritos se deu no âmbito de disciplinas do Ensino Superior e Ensino Médio. Em nossa investigação, o foco são alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

A partir dos registros escritos dos alunos nos portfólios é que intentamos analisar a aprendizagem semiótica do estudante. Trazemos no próximo capítulo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica baseada em Raymond Duval e os múltiplos aspectos da aprendizagem matemática de acordo com Martha Pinilla.

2 COMPONENTES DA APRENDIZAGEM

Neste capítulo abordamos mais um componente do quadro teórico que trouxe embasamento à nossa pesquisa. Para tanto, apresentamos os pressupostos teóricos da Semiótica, relatando um breve histórico e sua evolução. Focamos nossa atenção ao filósofo norte-americano Charles Sanders Peirce (1839-1914), considerado o fundador da Semiótica Moderna.

Na sequência, abordamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, com foco nos estudos de Raymond Duval. Em seguida, apresentamos os cinco componentes da aprendizagem de Martha Isabel Fandiño Pinilla, que se fazem necessários para a condução de nossa pesquisa.

2.1 SEMIÓTICA

A Semiótica e a Lógica sempre andaram juntas, porém a Semiótica como disciplina científica foi reconhecida a partir do século XIX e foi somente na década de 1990 que a Semiótica surgiu com força na Didática da Matemática. Dentre os estudiosos principais que evidenciaram o papel da Semiótica no ensino e na aprendizagem da matemática são: Raymond Duval, Luis Radford, Bruno D'Amore e Juan D. Godino.

Se formos analisar a história do termo “semiótica”, que normalmente é traduzido por “signo” que constitui sua raiz etimológica, embora não conceitual da palavra, teremos vários registros desde a Grécia antiga, com Platão, nos anos 428 A. C. até 347 A. C., Aristóteles de 384 A. C. até 322 A. C., os estoicos nos séculos IV a século III, os Epicuristas no século IV, Euclides em 325 A.C. a 265 A.C., Agostinho de Hipona em 354 A. C. a 430 A. C., Descartes de 1596 a 1650, Kant de 1724 a 1804 e Peirce nos anos de 1839 a 1914, Saussure de 1857 a 1913, entre outros. Todos eles trouxeram muitas contribuições para o estudo da Semiótica (D'Amore; Pinilla; Iori, 2015).

Charles Sanders Peirce é considerado o fundador da Semiótica Moderna. Peirce foi filósofo, cientista, geofísico, astrônomo americano, ignorado por seus contemporâneos, mas depois reconhecido pela humanidade como o maior filósofo norte-americano. Ele também era especialista em lógica e em teoria da linguagem e comunicação, que tem influência importante no desenvolvimento da filosofia. Com o desenvolvimento do seu trabalho, na Semiótica e na Teoria Geral dos Signos, ficou mundialmente conhecido (Rodrigues, 2017).

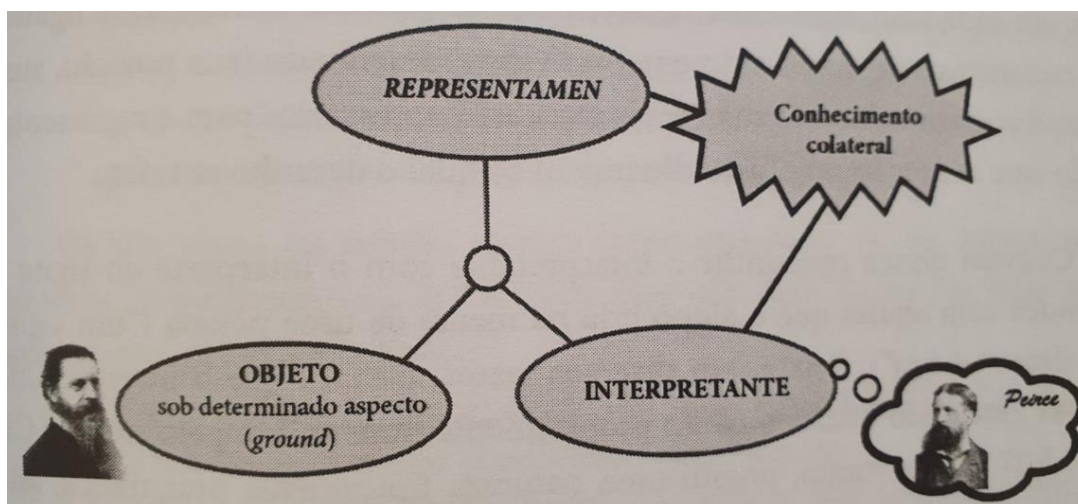
Para Peirce, a teoria dos signos baseia-se na ideia de que a cognição, o pensamento e até mesmo o ser humano possuem natureza essencialmente semiótica. Segundo D'Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 59): “Para Peirce, os signos são meios utilizados para representar algo para alguém, são meios de pensamento, de compreensão, de raciocínio, de aprendizagem”. Segundo Peirce (2015), todo o pensamento é realizado sobre signos imaginados ou percebidos e quando para argumentar matematicamente, o melhor de um pensamento é obtido sobre um diagrama ou esquema.

Peirce tem várias definições de signo e uma das mais relevantes é a seguinte:

Um signo, ou *representamen*, é alguma coisa que, para alguém, está para algo segundo algum aspecto ou capacidade. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Esse signo que cria denomino-o *interpretante* do primeiro signo. O signo está no lugar da coisa: o seu objeto. Está no lugar desse objeto não sob todos os aspectos, mas em referência a uma espécie de ideia, que, às vezes, denominei *ground do representamen* (Peirce, 2015, p. 46, destaques do autor).

A partir dessa definição, dada por Peirce, emerge uma relação fundamental: o representamen é o veículo, a parte “material” do signo; o objeto é aquilo que o representamen remete e o interpretante é o que deriva ou é gerado pela relação entre o representamen e o objeto. De acordo com Peirce, a interpretação do signo exige algum tipo de conhecimento colateral ao signo, ou seja, um conhecimento anterior obtido através de outras experiências com aquilo que o signo se refere e também uma certa familiaridade com o sistema de signos. A Figura 10 ilustra essa relação entre objeto, representamen e interpretante, com a inserção do conhecimento colateral.

Figura 10 – Relações entre objeto, representamen e interpretante



Fonte: D'Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 61)

Embora Peirce seja considerado o fundador da Semiótica e outros estudiosos como Ferdinand de Saussure terem contribuído muito para o estudo da Semiótica, seus estudos não se voltaram para a aprendizagem em matemática. A Semiótica é um campo de pesquisa relacionado à linguagem de modo geral.

Nesse sentido, os modelos e as definições supracitados são limitados para a aprendizagem matemática. Um dos estudiosos que se debruçou em realizar investigações para compreender como se dá a aprendizagem do estudante em Matemática por meio da Semiótica foi Raymond Duval que tem como foco o papel da Semiótica na aprendizagem matemática. Segundo D'Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 131), “A única coisa que podemos fazer com objetos matemáticos é descrevê-los, defini-los, denotá-los, denominá-los, desenhá-los, isto é, fornecer representações semióticas”. Assim, Raymond Duval elaborou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, por entender que a matemática é um tipo de linguagem.

2.2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Raymond Duval é filósofo e psicólogo, trabalhou na França no período de 1970 a 1995 onde desenvolveu estudos relativos à psicologia cognitiva. É autor de várias pesquisas e seus estudos são principalmente na área do funcionamento cognitivo, implicando na atividade matemática e nos problemas de tal aprendizagem (Duval, 2011).

As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento (Duval, 2004). Segundo Duval (2009, p. 32), as representações semióticas caracterizam-se por

[...] serem relativas a um sistema particular de signos, como a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para os sujeitos que as utilizam.

Para Duval (2013), a principal dificuldade na aprendizagem matemática é o fato de que os objetos matemáticos não possuem existência física e, assim, o acesso a esses objetos só é possível com a utilização de um sistema semiótico. Sendo assim, na Matemática, a diversidade dos sistemas semióticos é fundamental para a aprendizagem e para a construção de novos conceitos.

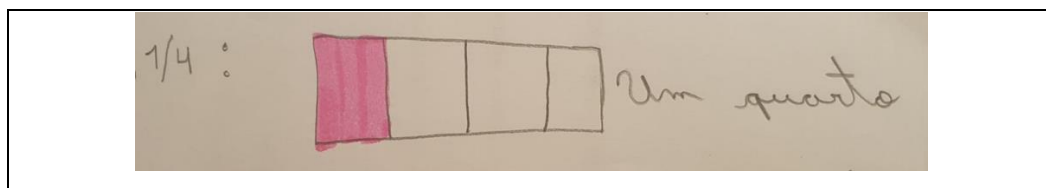
Segundo Duval (2004), a utilização de diferentes representações semióticas contribui para uma reorganização do pensamento do estudante e influencia em sua atividade cognitiva. As representações semióticas são essenciais para a compreensão dos conceitos matemáticos.

Para designar os sistemas semióticos específicos da Matemática, Duval escolheu o termo registro. Para ele, um registro de representação é um sistema semiótico que cumpre, além da função da comunicação, as funções cognitivas de objetivação (entendimento para si) e tratamento. Partindo desta ideia, o autor faz referência a quatro tipos de registros de representação: a língua natural, os sistemas de escrita (numérica, algébrica e simbólica), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas.

Do ponto de vista do autor, os diferentes sistemas semióticos, permitem uma diversificação de representações de um mesmo objeto, aumentando a capacidade cognitiva dos sujeitos. Isto porque, do ponto de vista cognitivo, nenhuma representação é completa em relação ao objeto que representa. Ou seja, cada representação revela uma determinada característica, um determinado conceito ou uma determinada propriedade. E segundo o autor, a mobilização e a coordenação de vários registros de representação tornam-se importantes para que os objetos matemáticos não venham a ser confundidos com suas representações e para que possam ser reconhecidos em cada uma delas.

Segundo o autor, para ser um Registro de Representação Semiótica, um registro deve permitir três atividades cognitivas: ser identificável, permitir tratamento e conversão.

A formação de uma representação identificável consiste em, a partir de um registro, identificar o objeto matemático representado, ou seja, uma representação é identificável quando reconhecemos na representação o objeto que ela representa. Por exemplo, na Figura 11, o objeto matemático fração é representado por meio de três registros, cada qual com sua especificidade. Ao olhar a escrita numérica $\frac{1}{4}$, a representação figural e sua notação escrita na linguagem natural, de imediato, associamos ao objeto matemático fração. Ou seja, cada um dos registros consiste em uma representação identificável.

Figura 11 – Formação de uma representação identificável⁵

Fonte: Registro de alunos do 6º ano

O tratamento é uma transformação de representações que ocorre no mesmo sistema de representação; é uma transformação estritamente interna a um registro. Dessa maneira, cada registro tem um conjunto de regras próprias de tratamento e funcionamento que não são necessariamente válidas a um outro registro. Conforme ilustra a Figura 12, o registro não mudou, conservou a mesma representação tabular, apenas trocou-se a marcação informal diagramático pelo numeral que o representa.

Figura 12 – Exemplo de tratamento⁶

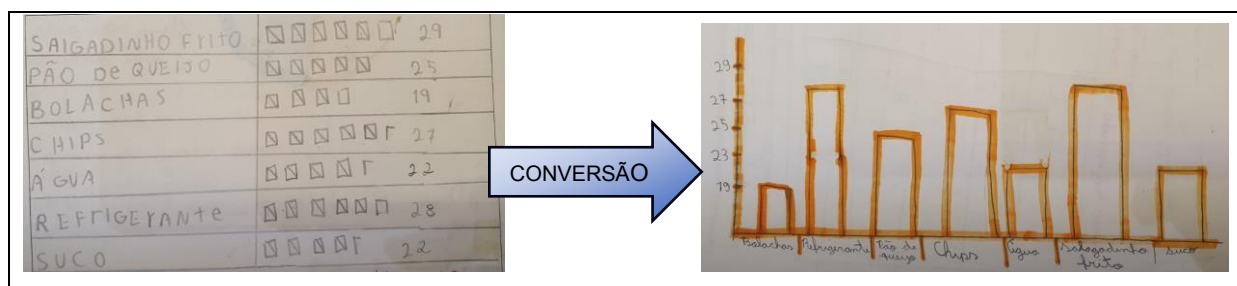
SAIGADINHO FRITO	□□□□□	SAIGADINHO FRITO	29
PÃO DE QUEIJO	□□□□□	PÃO DE QUEIJO	25
BOLACHAS	□□□□	BOLACHAS	19
CHIPS	□□□□□	CHIPS	27
ÁGUA	□□□□□	ÁGUA	22
REFRIGERANTE	□□□□□	REFRIGERANTE	28
SUCO	□□□□□	SUCO	22

Fonte: Registro de alunos do 6º ano

A conversão de uma representação é uma transformação que ocorre entre registros diferentes. A representação de um objeto em um dado registro é convertida em uma representação em outro registro, que conserva a referência, mas não conserva o sentido, ou seja, não conserva as mesmas propriedades do objeto. Conforme ilustra a Figura 13, houve uma conversão do registro tabular para o registro gráfico.

⁵ A Figura 11 faz parte da pesquisa, e consta do portfólio dos alunos do Grupo 2.

⁶ A Figura 12 faz parte da pesquisa, e consta do portfólio dos alunos do Grupo 2.

Figura 13 – Exemplo de conversão⁷

Fonte: Registro de alunos do 6º ano

Duval (2011) assevera que a coordenação consiste em trabalhar com diferentes representações de um mesmo objeto matemático, salientando a importância de transitar entre os diferentes registros e entender que estão ligados ao mesmo objeto matemático.

Segundo Duval (2012, p. 284):

[...] o principal caminho das aprendizagens de base matemática não pode ser somente a automatização de certos tratamentos ou a compreensão de noções, mas deve ser a coordenação de diferentes registros de representação, necessariamente mobilizados por estes tratamentos ou esta compreensão. A coordenação de registros aparece como condição fundamental para todas as aprendizagens de base, ao menos nos domínios em que os únicos dados que são utilizados são as representações semióticas, como em matemática e em francês.

Para Duval (2003, p. 15), “[...] a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois Registros de Representação Semióticas”. O autor acrescenta a criatividade do aluno, quando ele consegue trocar a todo momento de registro de representação.

Levando em consideração a potencialidade que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica tem se configurado para se evidenciar a aprendizagem em Matemática, diversas pesquisas no âmbito da Educação Matemática têm se respaldado nos estudos desenvolvidos por Raymond Duval.

Existem pesquisas que vêm se debruçando em investigar sobre Modelagem Matemática respaldando-se nos Registros de Representação Semiótica em sala de aula. Vertuan (2007) realizou uma investigação sobre a utilização de diferentes registros em atividades de modelagem matemática e o estudo foi fundamentado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na Modelagem Matemática como alternativa pedagógica. Sua investigação teve como objetivo verificar se os diferentes registros associados a um objeto matemático se tornam presentes em atividades de modelagem matemática, bem como se estas

⁷ A Figura 13 faz parte da pesquisa, e consta do portfólio dos alunos do Grupo 2.

atividades possibilitam o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros. Para tanto, sua pesquisa aconteceu com alunos do 1º ano do curso de licenciatura em Matemática, para o qual foi organizado um “curso de Modelagem Matemática” e a partir de suas análises, inferiu-se que a Modelagem Matemática torna presente a utilização de diferentes registros, bem como possibilita o tratamento, a conversão e a coordenação entre eles. Ainda, revelou que a coordenação contribuiu para a compreensão dos objetos matemáticos discutidos e da situação-problema investigada.

Em sua pesquisa, Rosa (2009), apresentou uma investigação que teve como objetivo investigar os Registros de Representação Semiótica, em particular, o fenômeno de congruência em conversões realizadas por estudantes entre registros associados aos objetos matemáticos que emergem em atividades de modelagem matemática no âmbito das aulas de Matemática no Ensino Médio. A pesquisa consistiu na observação, na descrição e na análise dos registros produzidos pelos estudantes nessas atividades e na análise das conversões realizadas entre esses registros. A partir da análise dos registros usados pelos alunos, verificou-se que atividades de modelagem matemática possibilitam a realização de conversões congruentes e não congruentes. Além disso, a análise revelou em que medida as dificuldades para a realização das conversões são decorrentes da congruência ou não-congruência das mesmas.

Na pesquisa relatada por Burak e Brandt (2010) foi analisada uma proposta para o Ensino Fundamental voltada ao pensamento algébrico, mediado na etapa de Resolução dos problemas na atividade de modelagem, a partir dos temas escolhidos, à luz da Teoria de Representações Semióticas. Os autores apontaram de que forma o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser beneficiado com uma proposta de Modelagem Matemática e com as contribuições de uma teoria de representações semióticas para atribuição de significações.

O estudo de Nunomura (2021) teve como objetivo evidenciar a aprendizagem dos estudantes de uma turma do 4º ano de uma escola municipal, a partir de análises dos Registros de Representação Semiótica no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. A análise qualitativa possibilitou evidenciar que a aprendizagem é subsidiada por diferentes registros que os alunos produzem, principalmente com o requerimento da professora, a partir da comunicação oral que realizam enquanto desenvolvem as atividades. A pesquisa permitiu evidenciar que as atividades de modelagem matemática desenvolvidas viabilizaram a utilização e exploração de diferentes Registros de Representação Semiótica, bem como as atividades

cognitivas de tratamento e conversão, ou seja, foram mobilizados mais de um registro, ficando explícita a coordenação realizada pelos estudantes.

Em pesquisa realizada por Bisognin e Bisognin (2021), foi analisada a contribuição que a utilização dos Registros de Representação Semiótica propicia para a compreensão de modelos matemáticos representativos de situações reais. Com a análise das pesquisadoras, concluiu-se que a construção de modelos matemáticos é um modo de produção de representações semióticas que auxilia na compreensão dos conceitos. Os alunos apresentaram dificuldades para representar um conceito matemático abstrato, por isso há a necessidade de o professor possibilitar novas formas de ensinar, buscando múltiplas representações que tornem o conceito mais compreensível.

Tendo em vista o objetivo de apresentar um estudo sobre as equações diferenciais ordinárias no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática sob as lentes teóricas dos Registros de Representações Semióticas e das mudanças de domínios, Barros e Kato (2021), puderam observar que foi a necessidade de compreender o fenômeno que propiciou mudanças de registros de representações e de domínios. Apesar dos alunos utilizarem o modelo já estabelecido em livros didáticos, a busca por esse modelo aconteceu por iniciativa própria deles, para validarem as hipóteses que haviam formulado. O desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática favoreceu o emprego de diferentes registros e domínios matemáticos e uma participação mais efetiva dos alunos, na qual eles foram responsáveis pela busca de informações e estratégias para a resolução da situação proposta.

O estudo de Pontes e Brandt (2021), apresentou uma proposta de ensino subsidiada pela Modelagem Matemática na perspectiva de Burak e pela Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval. Esse estudo indicou que temas de grande relevância social, pode, a partir da opção por uma abordagem cognitiva, subsidiar o ensino e a aprendizagem da Matemática e sinalizar incompletudes ou inconsistências que precisam ser discutidas e consideradas nos contextos das aulas de matemática. Nesse sentido, o estudo apontou que a escola pode promover aprendizagem de conhecimentos que ultrapassem àqueles elencados no currículo visto de forma linear.

Diante disso, as pesquisas presentes na literatura sinalizam que é possível relacionar o potencial da Modelagem Matemática atrelada com os Registros de Representação Semiótica. Nesse contexto, focamos nosso estudo para analisar os tipos de aprendizagens evidenciadas em atividades em sala de aula, dando um enfoque na aprendizagem semiótica, nessas perspectivas.

2.3 APRENDIZAGEM SEMIÓTICA

Há vários anos estuda-se identificar as causas dos erros dos estudantes quando realizam transformações semióticas e, a fim de intervir em suas concepções, foram propostas, por Pinilla (2010), as subdivisões da aprendizagem matemática em cinco componentes: conceitual (noética), algorítmica, estratégica, comunicativa e semiótica, sendo esta última transversal que perpassa por todas as demais aprendizagens.

Na aprendizagem conceitual, “um conceito é considerado construído quando o estudante tem condição de identificar propriedades do conceito, de representá-lo, de transformar tal representação, de utilizá-la de maneira adequada” (D’Amore; Pinilla; Iori, 2015, p. 165).

Segundo Pinilla (2010), os conceitos da matemática têm um caráter específico em relação às outras ciências. Nessas ciências, os conceitos possuem objetos, coisas, experimentos que são concretos e já na matemática, os conceitos são na sua maioria, abstratos e para conseguir representá-los é necessário escolher uma representação num registro semiótico apropriado e trabalhar nessa representação. Do ponto de vista ontológico, é comum entre os matemáticos, chamar os conceitos matemáticos de “objetos”.

Pinilla (2010) entende que todos concordam com a natureza “construtiva” da aprendizagem: aprender um conceito matemático, aprender a usar um algoritmo, a comportar-se estrategicamente, a comunicar a matemática e com a matemática. São por meio desses comportamentos que se constroem um objeto matemático. Sabendo que “os objetos da matemática não existem na realidade concreta” (Pinilla, 2010, p. 39), faz-se necessário o uso de registros de representações apropriados para representar um conceito. Para a autora, parece absolutamente necessário saber usar o conceito construído em contextos apropriados. Saber fazer sem saber não é conhecimento e o inverso também é válido, ou seja, saber sem saber fazer é vazio e estéril.

A aprendizagem algorítmica “está relacionada com a habilidade para dar resposta às operações, ao cálculo, à aplicação de fórmulas ou ao desenho de figuras usando instrumentos adequados” (D’Amore; Pinilla; Iori, 2015, p. 166). Pinilla (2010, p. 61) define algoritmo como “uma sucessão finita de etapas elementares predeterminadas, mecânicas, não necessariamente aritméticas, que levam de um estágio a outro em um determinado processo”.

A respeito ainda da aprendizagem algorítmica, Pinilla (2010) aborda que o ensino dessa aprendizagem nas escolas, algumas vezes está sendo deixada de lado devido à tecnologia.

Hoje existem instrumentos rápidos, potentes, seguros que substituem os cálculos manuais e fazem de forma rápida e sem erro. Calculadoras baratas fazem com rapidez e sem erros os que os humanos fazem com grande esforço e sempre com alto risco de erro. Pinilla (2010) acredita que esta passagem, da prática manual para aquela delegada à máquina, alimentou um processo através do qual a aprendizagem algorítmica foi, por vezes, desprezada recentemente. A autora afirma que a aprendizagem algorítmica deve ser reavaliada e apresenta dois argumentos: o primeiro é cultural, pois a história da matemática mostra que o estudo da criação dos algoritmos sempre foi parte integrante do desenvolvimento da matemática e que criar e saber usar algoritmos é uma forma criativa e inteligente de se tornar parte ativa do mundo da matemática. E o segundo argumento da autora é a didática, ela argumenta que é verdade que as etapas realizadas nos processos algorítmicos são mecânicos, porém são realizados por um indivíduo somente se ele souber o que está fazendo. Cada etapa “mecânica” tem uma função e uma justificativa lógica e conceitual. Além disso, a máquina executa e não inventa e, muitas vezes, as calculadoras fazem e o ser humano tem que interpretar o que foi realizado pela máquina, fazendo com que haja um aprofundamento conceitual, pesquisa e interpretação de resultados.

Para avaliar essa aprendizagem é necessário um olhar semiótico para evidenciar as habilidades exclusivamente mecânicas e as que têm capacidade de raciocinar, constituindo a transversalidade da aprendizagem semiótica. Para D’Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 166-167):

A gestão de algoritmos de qualquer tipo e sua organização em fatos logicamente encadeados em uma cadeia finita em modo mecânico, para serem executados passo a passo, necessita evidentemente, de uma gestão semiótica significativa; tudo que é algoritmo é representado e, portanto, a semiótica é uma aprendizagem fundamental e transversal.

Portanto, a aprendizagem algorítmica, embora cumpra um papel específico, está estritamente ligada às aprendizagens conceitual, estratégica, comunicativa e semiótica.

A aprendizagem estratégica vem ao encontro com o meio que o estudante desenvolve ao resolver um problema. Para a resolução de problemas, “é necessário convencer todos os estudantes de que aquilo que importa são os processos, não os produtos” (D’Amore; Pinilla; Iori, 2015, p. 167). Trata-se de uma das aprendizagens mais complexas de acordo com D’Amore, Pinilla e Iori (2015). A didática dedicou muito tempo ao seu estudo e, de modo errôneo, tentou isolá-la, como se a aprendizagem estratégica fosse independente.

Assim como nas demais, a aprendizagem semiótica é transversal à aprendizagem estratégica, pois “sua resolução é, em grande parte, um tratamento ou uma conversão de uma representação a outra, que devem ser interpretadas” (D’Amore; Pinilla; Iori, 2015, p. 167).

Pinilla (2010, p. 94) afirma que “resolver problemas e saber escolher como agir diante de situações problemáticas pode ser um excelente veículo para a formação de conceitos”.

D’Amore (2003c, *apud* Pinilla, 2010, p. 95) aborda essa questão, destacando que “muitos autores afirmam que, entre os aspectos que levam à aprendizagem, está a motivação e entre esta, a gratificação (satisfação interior), o reconhecimento social de ser um bom ‘solucionador’ de problemas”. Portanto, deixando de lado a motivação, a atividade de resolução de problemas tem todo o direito de ser considerada uma extensão das regras de aprendizagem, formas de agir, um conjunto de exemplos de estratégias. Este processo, difícil de definir, desenvolve-se em grande parte dentro do aluno e, resumidamente, o aluno ao resolver o problema, ou tentar resolver, está aprendendo.

Na avaliação da aprendizagem estratégica, segundo Pinilla (2010), é necessário valorizar o trabalho matemático do processo dos alunos e não apenas o produto, ou seja, o resultado final. A importância a cada uma das etapas do processo da resolução de problemas é essencial. Assim, valorizando os processos, podemos avaliar as diferentes estratégias que os alunos utilizam para resolver um problema; também podemos pedir ao aluno uma explicação do seu raciocínio por escrito ou oralmente. Ao fazer isso, a aprendizagem estratégica está relacionada à aprendizagem comunicativa.

A aprendizagem comunicativa “busca evidenciar a capacidade de exprimir ideias matemáticas, justificando, argumentando, demonstrando (de maneira adequada aos estudantes, oral ou escrita) e representando de maneira visual com figuras, de modo eficaz” (D’Amore; Pinilla; Iori, 2015, p. 167).

É sabido que os estudantes nem sempre conseguem comunicar o que construíram cognitivamente em relação aos objetos matemáticos de maneira completa. Segundo Pinilla (2010, p. 156), “saber comunicar matemática é um objetivo cognitivo específico”, torna-se essencial, o diálogo, a discussão e a própria comunicação. É importante saber qual o tipo de linguagem que irão comunicar a matemática em sala de aula. De acordo com Pinilla (2010, p. 156), a comunicação pode ser por meio de: “linguagem natural, oral ou escrita; linguagem simbólica específica, quando disponível; desenhos, figuras; esquemas; ícones; linguagens não verbais”.

Temos que nos atentar aos problemas relacionados à comunicação em sala de aula. Pinilla (2010) afirma que a comunicação em sala de aula se apresenta, na direção: professor-estudante, e em muitas ocasiões, o professor se comunica com uma linguagem mais formal e o estudante não os compreende totalmente, levando-os a confundir conceitos e definições.

Quando há a comunicação no sentido aluno-professor, pode levar a mal-entendidos. O professor, nesse caso o receptor, espera uma determinada comunicação que não coincide com aquela proposta pelo aluno, no caso, o emissor.

Para avaliar a aprendizagem comunicativa, “é necessária uma mediação entre as expectativas dos professores em relação à comunicação correta, e o aluno, porém, deve estar convencido da importância dessa comunicação, de forma objetiva” (Pinilla, 2010, p. 185). O aluno tem que se convencer na necessidade das peculiaridades da linguagem matemática que precisa de um rigor sintático e semântico, de univocidade, para evitar ambiguidades. O chamado “rigor” da linguagem matemática é necessário e deve ser assimilado pelo aluno.

Existem várias competências da aprendizagem comunicativa. Segundo Pinilla (2010, p. 186): “sintaxe específica e símbolos oportunos; organização da apresentação, relevância e qualidade da apresentação; usar de diversas formas a comunicação; compromisso dado ao diálogo e consideração dos argumentos e razões dos outros”. A organização de uma apresentação com clareza, lógica e eficiência, também é necessária ao aluno quando precisa se comunicar, seja por meio de esquemas, diagramas, esboços ou desenhos, seja de forma oral.

A organização da apresentação visa a construção de um discurso eficaz e pode ser avaliada a partir do que o aluno apresenta à turma ou a partir de um relatório escrito. No primeiro caso, a organização deve ser coerente com a comunicação oral, no segundo com a comunicação escrita. E o aluno deve saber fazer a escolha dos argumentos, bem como sua articulação. Para fazer uma escolha correta, o aluno deve ser capaz de escolher argumentos claros, lógicos e relacionados ao contexto. Também é necessário levar em consideração o desenvolvimento intelectual do aluno. Sobre o uso das diversas formas de comunicação em matemática temos: o sistema algébrico (fórmulas e equações); o sistema de representação gráfica (pictogramas, diagramas, sistema cartesiano); a linguagem escrita e oral e também há outro sistema de signos muito importante que é ignorado, os dos gestos.

Segundo Radford e S. Demers (2006, *apud* Pinilla, 2010, p. 156), o compromisso com o diálogo com clareza, relevância e profundidade são aspectos a serem considerados também na avaliação da aprendizagem comunicativa. O aluno expressa suas razões ou apresenta seus argumentos para afirmar seu ponto de vista matemático e o envolvimento no intercâmbio examina o grau de participação do aluno da atividade comunicativa. O aluno quando ouve os argumentos e raciocínios dos outros e leva em consideração, permite um nível significativo de socialização e um descentramento, isto é, um distanciamento do próprio ponto de vista. O aluno

também é capaz de contribuir com as argumentações matemáticas enunciadas pelos colegas ao compreender, aprofundar seu conhecimento e se necessário, refutá-las.

Em matemática, o aluno precisa utilizar os símbolos. Saber utilizar os símbolos com clareza, relevância e precisão ao organizar um texto matemático escrito é essencial. O sistema numérico, a linguagem algébrica, as tabelas, os gráficos também se baseiam num significado e numa sintaxe extremamente complexos, e o aluno, durante sua vida escolar, precisa estruturar em suas ações cognitivas.

Essa comunicação é feita por meio de registros semióticos, o que mostra mais uma vez a transversalidade de aprendizagem semiótica.

A aprendizagem semiótica, é constituída por duas componentes, de acordo com D'Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 168):

1. saber escolher as características distintivas que, de um determinado objeto matemático construído cognitivamente ou em processo de construção, se pretende representar; escolher aquele ou aqueles registros semióticos considerados adequados para tal representação; fornecer uma representação semiótica em tal registro; ou fornecer várias representações semióticas em um ou mais dos registros escolhidos. 2. uma vez obtida cada representação semiótica, saber transformá-la em outra no mesmo registro (tratamento) ou em outro (conversão) de maneira adequada, sem perder de vista o significado do objeto de partida.

Pinilla (2010, p. 199) afirma que “o uso de diversas representações semióticas sempre esteve presente em nossas escolas, mas apenas recentemente se tornou objeto de investigação que rapidamente deu resultados excelentes”. Vimos que os alunos conseguem reconhecer que o mesmo objeto matemático pode ser expresso com representações diferentes, no mesmo registro ou em diferentes registros. No passado era dado como certo que diversas representações de um mesmo objeto deveriam ser reconhecidas como equi-significativas pelo aluno, tanto que não havia ensino de Semiótica e esta era considerada adquirida espontaneamente. Hoje se sabe que uma transformação de tratamento ou uma conversão pode mudar radicalmente, no cognitivo do aluno, o significado do objeto matemático representado. O ensino da matemática tem convencido muitos professores a considerarem estes aspectos como elementos explícitos, as transformações semióticas não podem ser consideradas inerentes dos outros aspectos da aprendizagem da matemática. É necessário acostumar os alunos a ver diferentes representações, fazê-los pensar a realizar as transformações corretamente, sem nunca perder o significado.

Considerando os componentes da aprendizagem evidenciados em atividades de modelagem matemática, Silva e Trindade (2023), evidenciaram os tipos de aprendizagem matemática proporcionados no desenvolvimento de uma atividade de modelagem por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. As evidências foram proporcionadas pelos registros escritos

dos alunos, transcrições de áudio e vídeo e a análise permitiu inferir que o processo de Modelagem envolveu aprendizagem matemática inequívoca, visto que vários tipos de aprendizagem foram observados ao longo do ciclo. Os componentes de aprendizagens evidenciados foram: conceitual, algorítmica, estratégica e comunicativa. Para Pinilla (2010), esta divisão das aprendizagens não deve ser tomada à letra, uma vez que, estas componentes estão interligadas, reforçando-se uma com as outras. Porém, fica mais confortável analisá-las separadamente.

Em relação à transversalidade da aprendizagem semiótica aos demais componentes da aprendizagem, nos debruçamos em evidenciá-la no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, utilizando o portfólio como instrumento de avaliação em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, com foco nas intervenções docentes e nas ações dos alunos por meio dos registros escritos nos portfólios, que fizeram parte desta pesquisa.

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo abordamos sobre o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida, os sujeitos envolvidos, o ambiente educacional em que se deu a coleta de dados. Abordamos também a respeito dos aspectos metodológicos utilizados para a coleta e análise dos dados, com a finalidade de nos apoiar para a investigação a respeito da questão de pesquisa proposta neste estudo.

3.1 O CONTEXTO E OS SUJEITOS DA PESQUISA

Com a finalidade de trazermos reflexões à questão de pesquisa *Como as ações do professor e dos alunos da Educação Básica a utilizar um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática podem promover a aprendizagem semiótica?* delineamos as seguintes questões norteadoras:

1. Que aprendizagem conceitual é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?
2. Que aprendizagem algorítmica é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?
3. Que aprendizagem estratégica é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?
4. Que aprendizagem comunicativa é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?

Antes de iniciarmos a pesquisa, desenvolvemos uma busca de literatura para investigarmos os estudos sobre avaliação em Modelagem Matemática. Fizemos buscas, não sistemáticas, em artigos, dissertações e teses. Encontramos alguns trabalhos que subsidiaram a nossa pesquisa, porém não foram encontrados muitos, fato que nos gerou interesse em poder contribuir com os estudos sobre avaliação em Modelagem Matemática.

A pesquisa foi desenvolvida associada à prática docente da pesquisadora em uma turma do 6º ano em um Colégio Estadual situado na cidade de Assaí- Pr., na região norte do Paraná.

A professora e pesquisadora é formada em Licenciatura Plena em Matemática no ano de 2005, atua na Educação Básica antes mesmo de se formar, começando a trabalhar como professora no ano de 2004 em uma escola particular e, posteriormente, em escolas públicas

concomitantemente. No ano de 2009, assumiu o concurso da Secretaria do Estado da Educação no Estado do Paraná (SEED-PR) e desde então faz parte do Quadro Próprio do Magistério, iniciando seu trabalho na cidade de Londrina e, posteriormente, na cidade de Assaí onde reside e trabalha até os dias atuais.

A pesquisa aconteceu em um colégio estadual em tempo integral que oferta os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Em 2023, ano em que foi desenvolvida a pesquisa, foram ofertadas no Ensino Fundamental, duas turmas de 6º ano, duas turmas de 7º ano, uma turma de 8º ano e uma turma de 9º ano. No Ensino Médio, foram ofertadas, duas turmas de 1º ano do Novo Ensino Médio, duas turmas de 2º ano do Novo Ensino Médio e duas turmas do 3º ano do Ensino Médio, totalizando 12 turmas de Ensino Integral e ainda tem o Ensino Médio Noturno que está sendo encerrado no ano de 2023 com apenas uma turma do 3º ano do Ensino Médio. Totalizando 282 alunos no Ensino Integral e 37 alunos no noturno, na faixa etária entre 11 e 18 anos.

A turma do 6º ano em que foi desenvolvida a pesquisa é formada por 24 alunos, sendo 7 meninas e 17 meninos, com faixa etária entre 11 e 12 anos. A escolha por essa turma se deu pelo fato da professora trabalhar somente em dois sextos anos no ano de 2023 e optou por essa turma pela receptividade que eles tiveram quando foram apresentadas algumas atividades que iriam desenvolver durante o ano letivo. As atividades de modelagem também foram desenvolvidas com a outra turma do 6º ano, porém não foram analisadas.

O contexto da pesquisa foi em aulas regulares de Matemática e as atividades foram desenvolvidas na própria sala de aula dos estudantes, exceto momentos em que algumas atividades necessitaram de coleta de dados fora de sala de aula e fora do ambiente escolar. De acordo com a normas da SEED-PR, para o Ensino Fundamental em Colégio em Tempo Integral, são ministradas 4 aulas semanais de matemática de 50 minutos de duração cada uma.

A pesquisa teve início no dia 24 de março de 2023, estendendo-se até o mês de setembro do mesmo ano. Durante esse período foram desenvolvidas 5 atividades de modelagem matemática e todas foram inseridas nos portfólios, com o intuito de (re)pensar o processo de avaliação em Modelagem Matemática. As atividades tiveram os seguintes temas: Piquenique no Zerinho, Água, Energia Elétrica, Competição de Carrinhos e Passeio ao Cinema. Dessas cinco atividades, somente a última, Passeio ao cinema, não teve *feedbacks* da professora nos trabalhos dos alunos, fato esse que não descrevemos nem analisamos essa atividade na pesquisa. No Quadro 2, apresentamos a organização das atividades desenvolvidas.

Quadro 2: Cronogramas das atividades

ATIVIDADE	TEMA	DATA	DURAÇÃO
1	Piquenique no Zerinho	24/03/2023 31/03/2023 14/04/2023 (2 aulas) 27/04/2023	Cinco aulas de 50 minutos
2	Água	10/04/2023 11/05/2023 (2 aulas)	Três aulas de 50 minutos
3	Energia Elétrica	23/05/2023 02/06/2023 05/06/2023	Três aulas de 50 minutos
4	Competição de Carrinhos	28/07/2023 31/07/2023 07/08/2023	Três aulas de 50 minutos
5	Passeio ao cinema	04/09/2023	Uma aula de 50 minutos

Fonte: a autora (2023)

Por se tratar de atividades de modelagem matemática, em que tem no trabalho em grupo seu aporte, os alunos foram distribuídos durante as atividades em grupos que eles mesmos escolheram a partir da primeira atividade, de forma livre, de acordo com a afinidade. O Grupo 1 foi formado com 4 alunos, o Grupo 2 com 4 alunos, o Grupo 3 com 4 alunos, o Grupo 4 com 6 alunos e o Grupo 5 com 6 alunos. De modo a manter o anonimato dos alunos e para nos referirmos aos grupos e aos alunos usamos, respectivamente, a codificação, G1, G2, G3, G4 e G5 e A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21, A22, A23 e A24, de acordo com o Quadro 3.

Quadro 3: Organização dos grupos

GRUPOS	ALUNOS
G1	A1, A2, A3, A4
G2	A5, A6, A7, A8
G3	A9, A10, A11, A12
G4	A13, A14, A15, A16, A17, A18
G5	A19, A20, A21, A22, A23, A24

Fonte: a autora (2023)

A atividade 1 – Piquenique no Zerinho, foi a primeira atividade de modelagem desenvolvida com esses alunos, durante 5 horas-aula do primeiro trimestre de 2023, nos dias conforme o Quadro 2. A motivação partiu de alguns alunos que estavam se sentindo frustrados por não ter acontecido um piquenique que havia sido combinado no ano anterior em um local da cidade de Assaí, Parque Ikeda (Zerinho), muito visitado pelos alunos e suas famílias (Figura 14). A partir desse descontentamento, a professora sugeriu que o piquenique poderia acontecer esse ano (2023), mas para isso os alunos precisariam se envolver com a organização desse piquenique por meio de pesquisa de quais e quantos alimentos gostariam de levar para o lanche e fazer uma pesquisa de preços. Então, os alunos coletaram os dados para essa atividade entre eles e no comércio local. De forma imediata, o aceite foi unânime para abordar o problema: *Quais e quantos alimentos e materiais serão necessários para o piquenique e quem vai arcar com as despesas para a realização desse evento?* A folha da atividade entregue aos alunos encontra-se no apêndice C.

Figura 14 – Parque Ikeda “Zerinho”

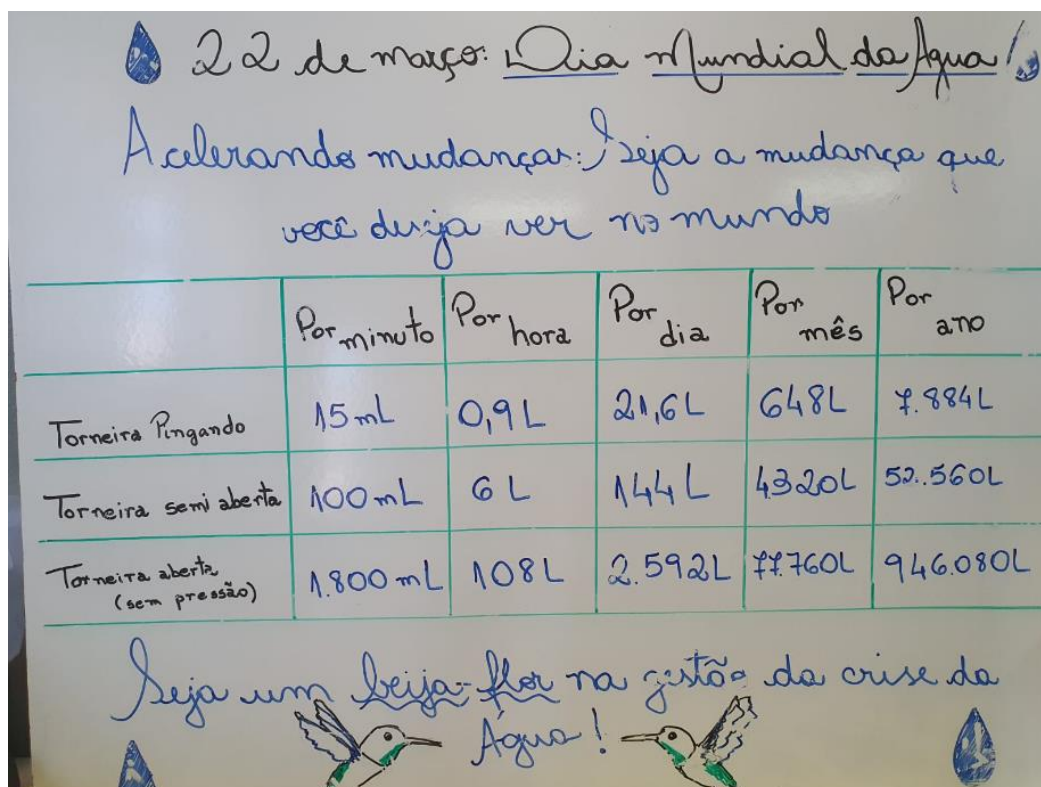


Fonte: Prefeitura Municipal de Assaí – assai.pr.gov.br

A atividade 2 – Água, foi desenvolvida durante 3 horas-aula do primeiro trimestre de 2023, nos dias conforme o Quadro 2. A motivação se deu devido ao fato de ter sido comemorado o Dia Mundial da Água, no dia 22 de março, e a professora de Ciências havia coletado alguns dados sobre o desperdício de água com os alunos por meio de uma torneira pingando, e construído um cartaz (Figura 15). Desta forma, foi planejada a atividade com o seguinte

problema: *O quanto a escola pagaria por mês na conta de água se todas as torneiras estivessem pingando na mesma proporção da torneira da coleta de dados?* A folha da atividade entregue aos alunos encontra-se no apêndice D.

Figura 15 – Cartaz sobre o desperdício de água



Fonte: a autora (2023)

A atividade 3 – Energia Elétrica, foi desenvolvida durante 3 horas-aula do segundo trimestre, de acordo com as datas contidas no Quadro 2. A partir de uma leitura do livro didático de Matemática cujo título do texto era “Por dentro da energia elétrica”, que explicou sobre as hidrelétricas, o consumo de energia elétrica e a leitura do relógio de luz (Figura 16). A professora propôs aos alunos fazerem a coleta diária do relógio de luz de suas residências durante uma semana. No dia marcado para a atividade, todos ou pelo menos um integrante de cada grupo tinha conseguido coletar todos os dias. Sendo assim, a situação-problema proposta aos alunos foi investigar sobre: *Faça uma projeção de quanto cada pessoa da casa coletada gasta por mês em consumo de Kw/h e em reais de energia elétrica.* A folha entregue aos alunos para o desenvolvimento da atividade encontra-se no apêndice E.

Figura 16 – Por dentro da energia elétrica

● PARA QUEM QUER MAIS

Resoluções na p. 292

Por dentro da energia elétrica

O fato de o Brasil ter um grande número de rios favorece a instalação de usinas hidrelétricas para a geração de energia.

Para transformar a força das águas em energia elétrica, a água represada passa por dutos forçados e gira a turbina que, por estar interligada ao eixo do gerador, faz com que este entre em movimento, gerando a eletricidade.

O consumo de energia elétrica depende da potência do aparelho utilizado e do tempo de utilização. Os aparelhos elétricos possuem diferentes potências, consumindo mais ou menos energia. Essa potência é expressa em watts (W) e deve estar mencionada na placa de identificação afixada no próprio aparelho.

O medidor de energia elétrica (relógio de luz) registra o consumo de eletricidade das residências. O consumo do mês é calculado com base na diferença entre a leitura obtida no mês em curso e a do mês anterior.

O relógio de luz de ponteiros é composto de quatro relógios pequenos. Os ponteiros giram sempre no sentido crescente dos números, ou seja, do menor para o maior. Dos quatro relógios pequenos, dois giram no sentido horário e dois, no sentido anti-horário.

O primeiro relógio, a partir da esquerda, marca o número que se refere à unidade de milhar, o segundo se refere à centena, o terceiro, à dezena, e o quarto, à unidade simples.

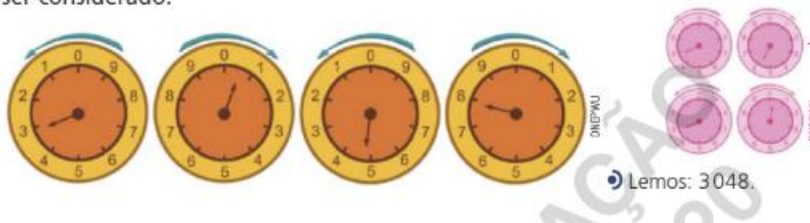
Para fazer a leitura, comece pelo relógio da direita, escrevendo o último número ultrapassado. Se o ponteiro estiver entre dois números, o menor deles é que deverá ser considerado.



● Placa de potência.



● Relógio medidor de consumo de eletricidade.



● Lemos: 3048.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018)

A atividade 4 – Competição de carrinhos, foi desenvolvida durante 3 horas-aula do segundo trimestre, conforme o Quadro 2. A temática foi sugerida pela orientadora desta pesquisa por se tratar de uma atividade lúdica e que envolveria e motivaria os estudantes pois estão na faixa etária entre 11 e 12 anos, onde o brincar se faz presente pois ainda estão na infância. A situação-problema proposta para essa atividade foi: *Qual a equipe será a campeã? Ou seja, quem chegará ao final da pista no menor tempo?* Os dados coletados para essa

atividade foram por meio de vídeo e analisado o tempo da corrida pelo aplicativo *Tracker*⁸. A folha entregue aos alunos para o desenvolvimento da atividade encontra-se no apêndice F.

A atividade 5 – Passeio ao cinema, foi desenvolvida durante 1 hora-aula do segundo trimestre, conforme o Quadro 2. A temática surgiu dos próprios alunos, uma vez que a escola estava proporcionando a ida coletiva ao cinema, porém cada aluno teria que custear seu passeio. Para eles não terem que pedir dinheiro aos seus pais, a situação-problema proposta para essa atividade foi: *Como arrecadar dinheiro para custear as despesas?*

Para o desenvolvimento da pesquisa foi solicitada autorização da escola, conforme Apêndice A. Além disso, considerando que os alunos são menores de idade foi enviado um áudio explicativo aos pais ou responsáveis, via WhatsApp, de modo que entendessem o teor da pesquisa e assinassem um termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice B).

Para organizar as atividades, a professora providenciou pastas com plásticos para cada grupo de alunos, e combinou que seriam armazenados os registros, de modo individual, de cada integrante do grupo em cada saco plástico (Figura 17). Cada aluno recebia as atividades em folha impressa e todos deveriam realizar seus registros que eram guardados nas pastas. Embora as atividades fossem desenvolvidas em grupos, a construção do portfólio seria individual, com entregas sempre ao término de cada aula. As pastas eram usadas em todas as aulas que foram realizadas a pesquisa, durante as atividades de modelagem matemática. Portanto, ao término das atividades, havia cinco pastas (5 grupos), com registros de todos os integrantes de cada grupo, que eram recolhidos e armazenados nessa pasta. A pasta era entregue a cada grupo pela professora na próxima aula.

Figura 17 – Pastas do portfólio



Fonte: a autora (2023)

⁸ Tracker é uma ferramenta gratuita de análise e modelagem de vídeo construída na estrutura Java [Open Source Physics](#) (OSP).

A professora informou que faria intervenções escritas com canetas coloridas, em forma de perguntas e os alunos teriam de respondê-las conforme haviam compreendido. Os alunos respondiam os questionamentos sempre durante as aulas destinadas para a prática da atividade de modelagem matemática. Algumas vezes a professora fazia os questionamentos por escrito durante as aulas, em momentos que julgava necessário, porém na maioria das vezes, a professora recolhia os portfólios dos alunos e fazia os questionamentos em hora-atividade e, na aula seguinte, os alunos respondiam. Esses questionamentos eram de acordo com aquilo que cada grupo produziu, podendo diferenciar as intervenções feitas em cada grupo. Porém, entre os integrantes de cada grupo, na maioria das vezes, as intervenções eram as mesmas pois estavam construindo juntos as ideias para serem registradas de forma individual.

A professora combinou que, além das atividades, o portfólio deveria conter alguns elementos, tais como capa, sumário, introdução e considerações finais. Esses elementos deveriam ser produzidos ao final da construção dos portfólios, que aconteceu em outubro de 2023. Especificamente, no começo e ao final de cada atividade, o aluno deveria escrever suas expectativas, impressões sobre a temática e a abordagem matemática. Os alunos também escreveram suas impressões das atividades sobre o que mais e menos gostaram nas considerações finais, em forma de uma redação.

Em se tratando da atividade que comporia uma nota, a primeira foi Piquenique no Zerinho, teve um valor de 1,0 ponto, do total de 10,0 pontos que integrou a nota do primeiro trimestre do componente curricular Matemática. Por conseguinte, a segunda atividade Água e a terceira atividade Energia Elétrica, as quais tiveram um valor de 1,0 ponto cada, do total de 10,0 pontos que integraram a nota do segundo trimestre do componente curricular Matemática. E por fim, a quarta atividade, Competição de Carrinhos, que teve o valor de 1,0 ponto, do total de 10,0 pontos que integrou a nota do terceiro trimestre do componente curricular matemática. A distribuição das notas dos alunos em cada trimestre encontra-se organizada no Quadro 4.

Como prática avaliativa, a professora fez questionamentos a partir das produções escritas, e solicitou que os alunos as respondessem durante as aulas, pois a nota seria constituída pelo desenvolvimento da atividade, no lidar com essas intervenções, pelas respostas claras dadas a esses questionamentos, pela organização, bem como pela presença dos outros elementos constituintes do portfólio, como a capa, introdução e conclusão.

Quadro 4 – Organização das notas dos alunos

Trimestre letivo	Atividades de M.M.	Outras avaliações: Prova do Professor, Prova Paraná e Plataformas Educacionais	Total
1º	1,0	9,0	10,0
2º	2,0	8,0	10,0
3º	1,0	9,0	10,0

Fonte: a autora (2023)

As atividades de modelagem presentes na pesquisa abordaram conteúdos já estudados nos anos iniciais do Ensino Fundamental e outros que estão presentes na matriz curricular do 6º ano do Ensino Fundamental que estavam estudando ou que iriam estudar conforme o Quadro 5.

Quadro 5: Conteúdos matemáticos referentes a cada atividade

ATIVIDADE	CONTEÚDOS ABORDADOS
Atividade 1: Piquenique no Zerinho	Tratamento da Informação: Pesquisas Estatísticas (Coleta e tabulação de dados) e Organização de dados em tabelas e gráficos. Adição, Multiplicação e Divisão de números decimais.
Atividade 2: Água	Unidades de medida – Conversão dos múltiplos e submúltiplos dos litros. Adição, multiplicação e divisão de números decimais. Tratamento da Informação: Organização de dados em tabelas e gráficos.
Atividade 3: Energia Elétrica	Adição e Subtração de números inteiros da classe dos milhares. Multiplicação de números decimais. Tratamento da Informação: Organização de Dados em tabelas e gráficos e Média.
Atividade 4: Competição de Carrinhos	Representação de Fração e escrita de frações. Frações de segundos: décimos, centésimos e milésimos de segundo. Subtração de números decimais. Tratamento da Informação: Organização de Dados em tabelas e gráficos.
Atividade 5: Passeio ao Cinema	Operações com números decimais: adição, multiplicação e divisão.

Fonte: a autora (2023)

Os dados da pesquisa foram coletados por meio de registros escritos dos portfólios dos alunos de forma individual, pois embora eles estivessem em grupo, cada integrante precisaria desenvolver o seu portfólio. Também foram fotografados os alunos durante as atividades pelo telefone celular da professora e algumas tentativas de vídeo para capturar as falas dos alunos, porém sem muito sucesso devido ao barulho.

Foram analisados os dados do portfólio do grupo 2 para as Atividade 1 – Piquenique, Atividade 2 – Água, Atividade 3 - Energia Elétrica e Atividade 4 – Competição de carrinhos, em que evidenciamos a aprendizagem semiótica a partir de diferentes recursos utilizados para a coleta de dados e desenvolvimento dos registros escritos. A atividade 5 – Passeio ao cinema, foi uma atividade que não houve intervenções da professora no trabalho dos alunos. Considerando nossos interesses em analisar os *feedbacks* e diante da falta deles, não descrevemos nem analisamos essa atividade de modelagem no corpo do texto. Além disso, essa atividade tinha o objetivo de os estudantes sugerirem ações para arrecadarem o valor do passeio por meio de vendas que eles iriam planejar e realizar, todavia, o passeio foi adiantado pela direção do colégio, perdendo-se a motivação para continuar o desenvolvimento dessa atividade.

A escolha pelo grupo 2 se deu por todos os alunos terem participado de forma assídua das aulas em que as atividades foram desenvolvidas e por não deixarem intervenções da professora sem resposta.

3.2 PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DOS DADOS

Esta seção é dedicada à explicitação da metodologia de análise da pesquisa. Optamos pela pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, baseada em Bogdan e Biklen (2010). De acordo com os autores, uma investigação qualitativa possui algumas características essenciais, que associamos à presente pesquisa.

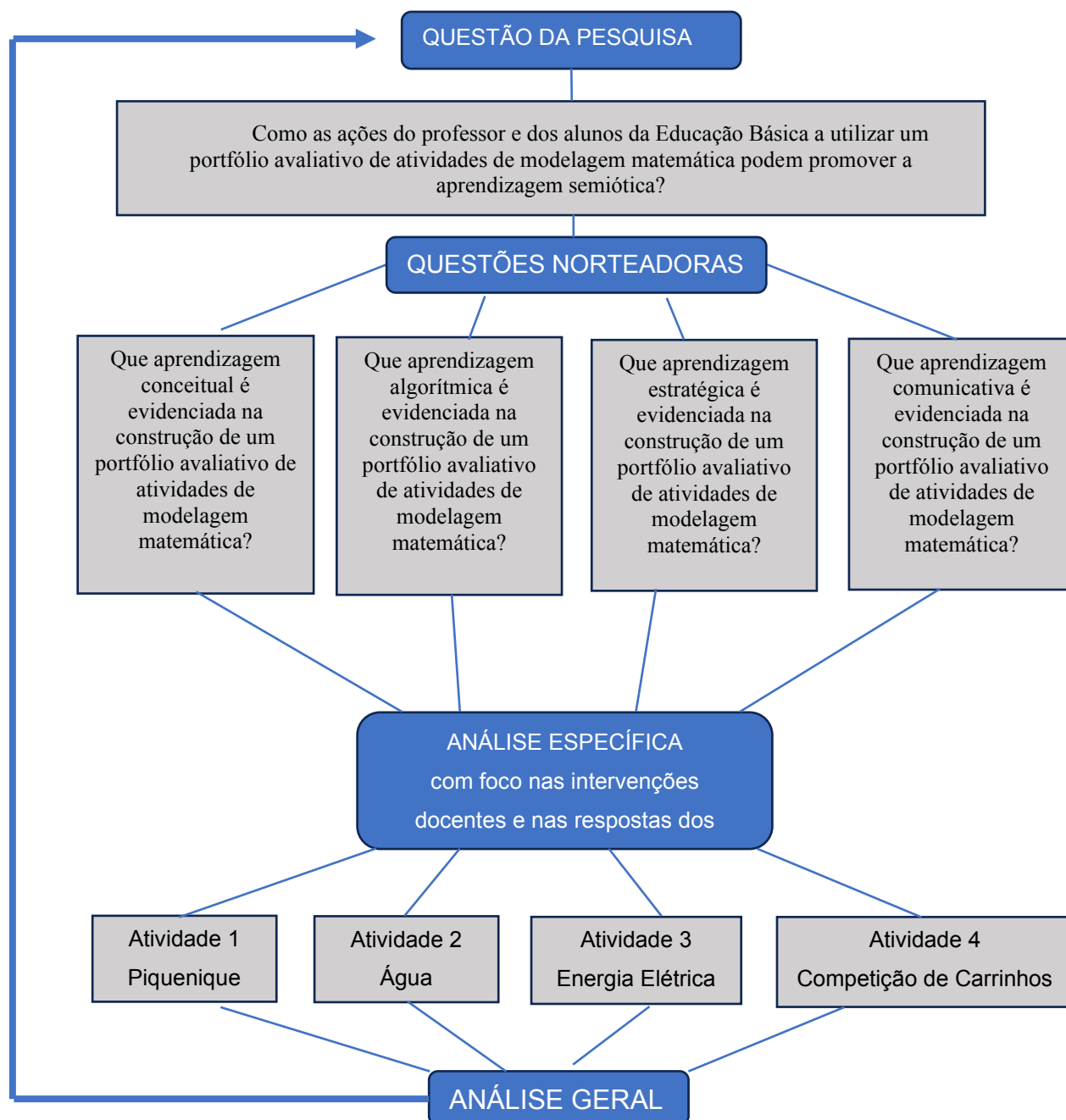
Uma das características de uma pesquisa qualitativa, segundo os autores, é que a fonte de dados é o ambiente natural, tendo como instrumento principal o investigador (Bogdan; Biklen, 2010). Isto é, o investigador se insere no ambiente da pesquisa, utiliza vários métodos para a coleta de dados, despende, várias vezes, grande parte do seu tempo. Nesta pesquisa, o ambiente natural é a sala de aula de Matemática e o investigador é a professora e pesquisadora durante a ministração das aulas, nas quais foram utilizadas como metodologia de ensino a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica.

A segunda característica de uma pesquisa qualitativa é que ela é descritiva, ou seja, os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Podendo ser “transcrição de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorando e outros registros oficiais” (Bogdan; Biklen, 2010, p. 48), considerando também que os pesquisadores fazem considerações baseadas na literatura. Para o desenvolvimento desta

pesquisa, os dados recolhidos são dos seguintes tipos: registros escritos dos portfólios dos alunos e imagens de fotos e vídeos durante a realização das atividades.

Outra característica, é que os investigadores qualitativos se interessam por todo o processo da investigação e não apenas pelo resultado. Segundo os autores “os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos” e, geralmente, os pesquisadores analisam seus dados de forma indutiva, assim “as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos vão se agrupando” (Bogdan; Biklen, 2010, p. 50). Em nossa pesquisa, procuramos observar o desenvolvimento dos estudantes durante a realização das atividades, a fim de responder à questão da pesquisa, que é investigar “*Como as ações do professor e dos alunos da Educação Básica a utilizar um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática podem promover a aprendizagem semiótica?*”

A análise que fizemos ocorrem em dois momentos: a análise específica e a análise geral. Na análise específica descrevemos cada uma das atividades de modelagem matemática desenvolvida, articulando-as com o aporte teórico que fundamenta nossa investigação, que é a Modelagem Matemática, a avaliação em Modelagem Matemática e as diferentes aprendizagens, por meio dos Registros de Representação Semiótica, subsidiando reflexões para cada uma das questões norteadoras. No segundo momento, já com as análises específicas das atividades desenvolvidas, realizamos a análise geral em que sinalizamos apontamentos para a questão da pesquisa a partir de agrupamentos organizados em categorias *a posteriori*. Na Figura 18, apresentamos uma estrutura de nossas análises.

Figura 18 – Síntese da estrutura das análises

Fonte: a autora (2023)

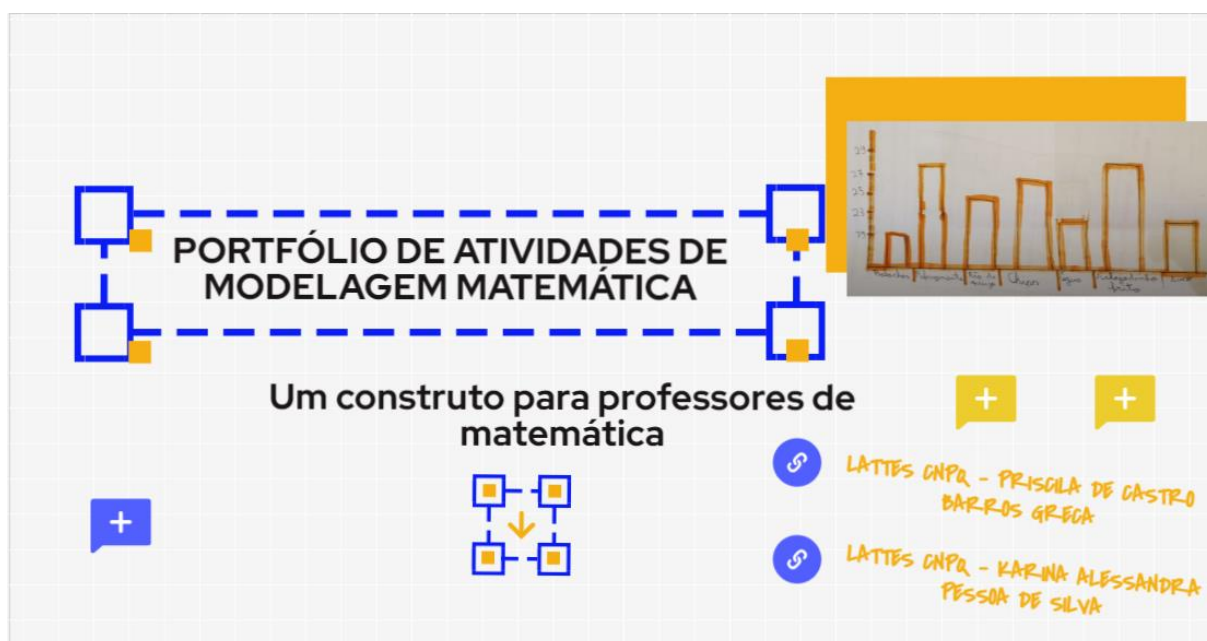
3.3 O PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional, intitulado “Portfólios de Atividades de modelagem matemática: um construto para professores de Matemática”, consiste em um construto para professores da Educação Básica ou outros interessados, em como desenvolver um portfólio como instrumento de avaliação em atividades de modelagem matemática. O produto está no

formato digital e de forma interativa com o leitor, por meio da plataforma app.genial.ly neste link <https://view.genial.ly/651de1a6c355df0010388748> e por meio do link disponibilizado no PDF presente no RIUT – <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2119>.

O produto é composto de explicações sobre portfólio e como desenvolvê-lo em atividades de modelagem matemática. Também contém todas as atividades de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula com a turma do 6º ano, bem como revela os componentes da aprendizagem nos possíveis registros dos alunos produzidos no portfólio durante as atividades realizadas, servindo de auxílio e aspiração aos professores da Educação Básica. A capa do produto educacional está apresentada na Figura 19.

Figura 19 – Capa do Produto Educacional



Fonte: a autora (2023)

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Neste capítulo, apresentamos as descrições e as análises – específicas e geral - das atividades de modelagem matemática desenvolvidas com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Para isso, levamos em consideração os dados coletados no desenvolvimento das atividades a partir dos registros escritos e de fotos produzidas durante as atividades, de modo a trazer reflexões acerca da nossa questão de pesquisa: *Como as ações do professor e dos alunos da Educação Básica a utilizar um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática podem promover a aprendizagem semiótica?*

Desenvolvemos cinco atividades, entretanto, nos debruçamos nas descrições e análises dos dados coletados no desenvolvimento de quatro delas - Piquenique no Zerinho, Água, Energia Elétrica e Competição de carrinhos -, conforme estão no Quadro 6. A atividade Passeio ao cinema, não analisamos por entender que essa atividade não houve envolvimento da turma e não foram realizadas intervenções de *feedback* no portfólio dos alunos.

Quadro 6– Atividades de modelagem matemática analisadas

ATIVIDADES	
A1	Piquenique no Zerinho
A2	Água
A3	Energia elétrica
A4	Competição de carrinhos

Fonte: a autora (2023)

Por meio da análise das atividades, intentamos fazer um ensaio para trazer reflexões para as seguintes questões norteadoras:

1. Que aprendizagem conceitual é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?
2. Que aprendizagem algorítmica é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?
3. Que aprendizagem estratégica é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?
4. Que aprendizagem comunicativa é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?

Para proceder a análise específica dos dados coletados, por meio de uma relação entre os registros escritos dos alunos e o referencial teórico adotado, trazemos articulações com as questões norteadoras a respeito das diferentes aprendizagens – conceitual, algorítmica, estratégica e comunicativa evidenciadas na construção de um portfólio no decorrer das atividades de modelagem matemática desenvolvidas.

Na análise geral, a partir da análise específica das quatro atividades, estabelecemos convergência dos Registros de Representação Semiótica nos portfólios dos alunos, de modo a evidenciar a aprendizagem semiótica por meio dos agrupamentos e categorias *a posteriori*.

Tanto para as análises específicas quanto para a análise geral, buscamos evidenciar os Registros de Representação Semiótica escritos por meio dos portfólios dos alunos com o desenvolvimento das atividades e as respostas às intervenções de *feedback* escritas pela professora nas atividades dos portfólios. Os *feedbacks* escritos foram realizados pela professora nas folhas de atividades dos alunos, sempre que julgava a necessidade de uma intervenção.

4.1 ANÁLISES ESPECÍFICAS

4.1.1 ATIVIDADE 1: PIQUENIQUE NO ZERINHO

A atividade com a temática “Piquenique no Zerinho” foi a primeira a ser desenvolvida com os alunos, durante 4 horas-aula do primeiro trimestre de 2023 e mais uma aula para o dia da realização do piquenique, nos dias 24 de março a 27 de abril de 2023. O Quadro 7 apresenta a data das aulas, as abordagens realizadas e o ambiente em que se deu o encaminhamento.

Quadro 7: Organização das aulas para a atividade Piquenique no Zerinho

Aula	Data	Abordagens	Ambiente
1	24/03/2023	Inteiração com o tema por meio de enquête e tabulação dos dados sobre o que cada um gostaria de comer.	Sala de aula
2	31/03/2023	Levantamento de todos os itens e quantidades necessárias para a realização do piquenique.	Sala de aula
3 e 4	14/04/2023	Pesquisa de Preços e resolução para responder o problema. Obs.: A visita ao comércio não foi feita com a presença da professora, foi solicitado que fossem no fim de semana pesquisar, com a ajuda dos pais.	Sala de aula e comércio
5	27/04/2023	Dia do piquenique.	Parque Ikeda “Zerinho”

Fonte: a autora (2023)

A motivação partiu de alguns alunos que estavam se sentindo frustrados por não ter acontecido um piquenique que havia sido combinado no ano anterior. A partir desse

descontentamento, a professora sugeriu que o piquenique poderia acontecer esse ano (2023), mas para isso os alunos precisariam se envolver com o desenvolvimento dessa atividade. De forma imediata, o aceite foi unânime para abordar o problema: *Quais e quantos alimentos e materiais serão necessários para o piquenique e quem vai arcar com as despesas para a realização desse evento?*

Os encaminhamentos da atividade seguiram as fases da Modelagem Matemática de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2013), conforme o Quadro 8.

Quadro 8: Organização das aulas e as fases da Modelagem Matemática na A1

Aula	Ações na atividade	Fases da Modelagem Matemática
1	- Conversa com a turma sobre o que cada um gostaria de comer no dia do piquenique e uma enquete para levantamento dos dados. - Tabulação dos dados.	Inteiração
2	- Levantamento de todos os itens e quantidades necessárias para a realização do piquenique.	Matematização
3 e 4	- Pesquisa de Preços e resolução para responder à questão.	Resolução e Interpretação de Resultados
5	Dia do Piquenique – os alunos validaram por meio do valor que cada um contribuiu com as compras realizadas para a alimentação no dia.	Validação

Fonte: a autora (2023)

Após o problema ser delineado, alguns questionamentos foram levantados pelos alunos, como: quando aconteceria o piquenique, a definição do que levar para comer e beber e como seria a compra dos alimentos. Alguns alunos sugeriram que cada um levasse a sua comida, outros queriam levar um prato para ser socializado e outros sugeriram que dessem dinheiro e um responsável compraria toda a comida de forma igualitária. Como a maioria dos alunos optou por disponibilizar o dinheiro, uma nova questão foi estruturada: *qual o valor cada um teria de dispor?*

Uma primeira ação dos alunos, em conjunto com a professora, foi definir os alimentos que gostariam de comer no piquenique. Dessa forma, o primeiro encaminhamento, conforme a primeira fase do ciclo da atividade de modelagem matemática, foi a inteiração. Como estavam motivados com a ideia de participar de um piquenique, nesse momento, eles fizeram o levantamento do que gostariam de comer.

Para isso, a professora optou em fazer uma coleta de dados por meio de uma enquete, conforme o Quadro 9, que foi reproduzida na lousa e completada por dois voluntários da turma (Figura 20).

Quadro 9– Enquete sobre o piquenique

Marque um X no item que vocês gostariam de comer e beber no piquenique	
Salgadinhos fritos	
Pão de Queijo	
Bolachas	
Salgadinhos tipo chips	
Água	
Refrigerante	
Suco	

Fonte: a autora (2023)

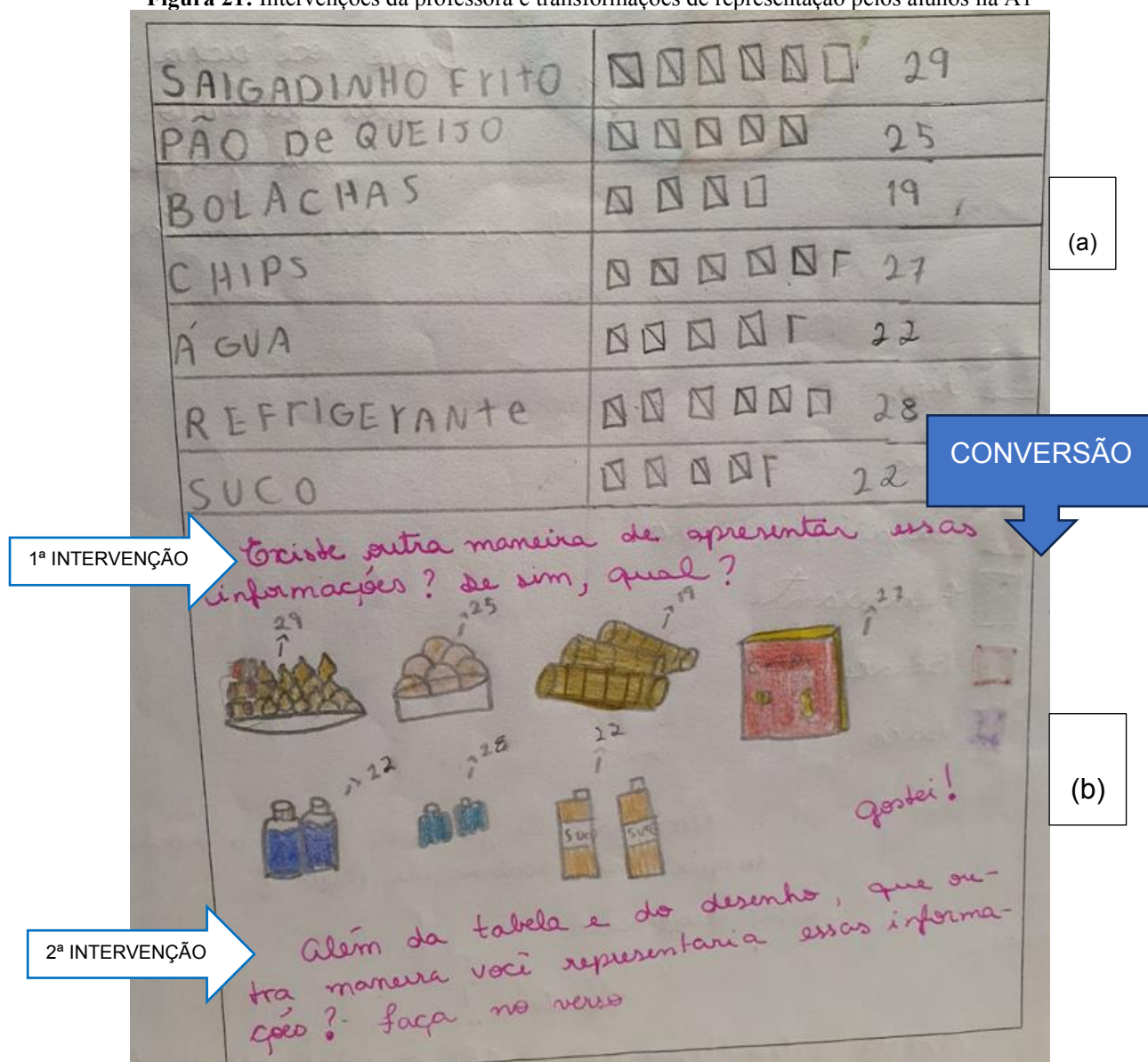
Figura 20: Tabulação dos dados da pesquisa



Fonte: a autora (2023)

A estruturação da tabela na lousa foi o primeiro movimento para delinear aspectos matemáticos para a situação que estavam estudando. A matematização é essa “transição de linguagem, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas” (Almeida; Silva; Vertuan, 2013, p. 16) para o fenômeno em estudo.

No portfólio, o Grupo 2 apresentou uma tabela como a representada na lousa, somente inserindo a quantidade de alunos para cada linha (Figura 21a). A partir do registro tabular, a professora fez uma 1ª intervenção: *Existe outra maneira de apresentar essas informações? Se sim, qual?* Os alunos apresentaram um desenho para representar os dados da tabela (Figura 21b), realizando uma conversão do registro tabular para o figural. Todavia, a intenção da professora com a 1ª intervenção era guiar os alunos de modo a transformar o registro tabular no gráfico. Como a intervenção não atingiu tal objetivo, uma nova intervenção se configurou (2ª intervenção): *Além da tabela e do desenho, que outra maneira você representaria essas informações?*

Figura 21: Intervenções da professora e transformações de representação pelos alunos na A1

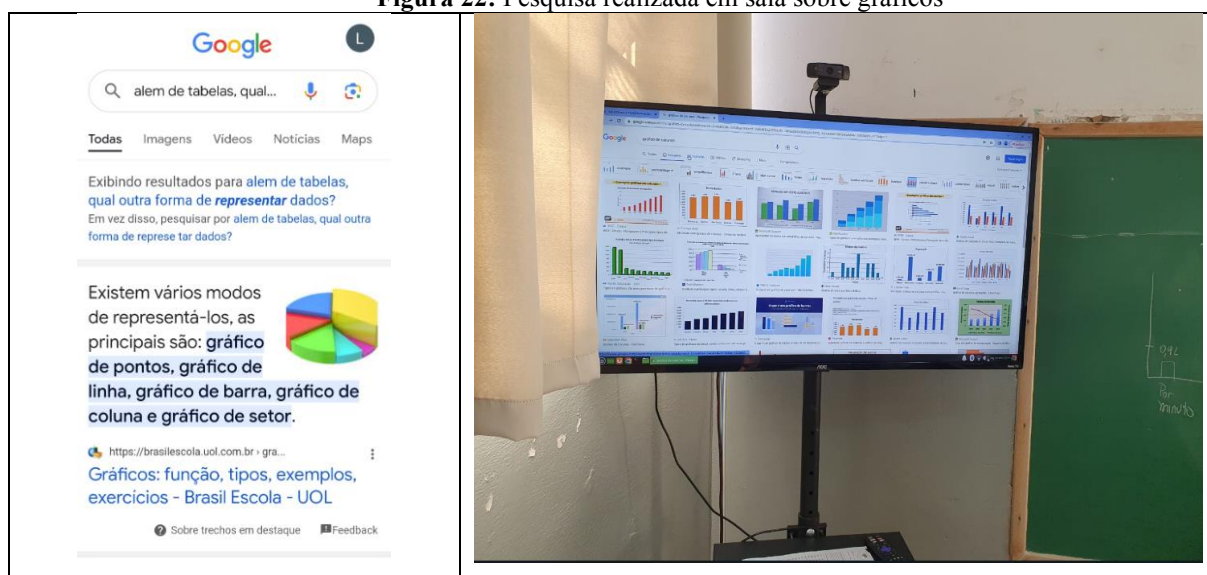
Fonte: Portfólio do Grupo 2

Ao fazer a conversão do registro tabular para o registro figural, entendemos que os alunos buscaram associar a uma representação sob a qual tinham um conhecimento colateral, uma certa familiaridade com o sistema de signos (Peirce, 2015). De fato, expressar em forma de desenho se configurava como “*outra maneira de apresentar essas informações*”, conforme solicitada na 1ª intervenção da professora. Além disso, para esses alunos, o custo cognitivo da conversão para uma figura era menor do que buscar em outras fontes de pesquisa possibilidades de outras formas de representar.

Porém, foi instaurada pela professora uma limitação do registro dos alunos a partir da 2ª intervenção. Neste caso, perceberam que seus conhecimentos colaterais não eram suficientes para suprir o questionamento utilizado.

Para os alunos lembrarem que poderiam fazer o registro de um gráfico, foi necessária uma intervenção oral da professora em sala de aula, levando-os a buscarem outros meios de representação. Considerando a necessidade de retomada do conhecimento, a partir do fato de os alunos não terem feito de imediato a transformação de registros esperada, foi instaurada uma regulação da prática da professora em levar para a sala de aula a explicação do conteúdo. A intervenção tinha a intenção de provocar uma mudança de registro, de mostrar aos alunos a necessidade de construir um gráfico. Para isso, a professora aproveitou para regular a aprendizagem dos alunos, sugerindo fazerem uma pesquisa na internet por meio do Kit Educatron⁹ em sala de aula (Figura 22) e pelo telefone celular de alguns alunos. Com o auxílio da professora, fizeram a seguinte pergunta para a pesquisa no celular e na televisão: *Além de tabelas, qual outra forma existe de representar dados?*

Figura 22: Pesquisa realizada em sala sobre gráficos



Fonte: a autora (2023)

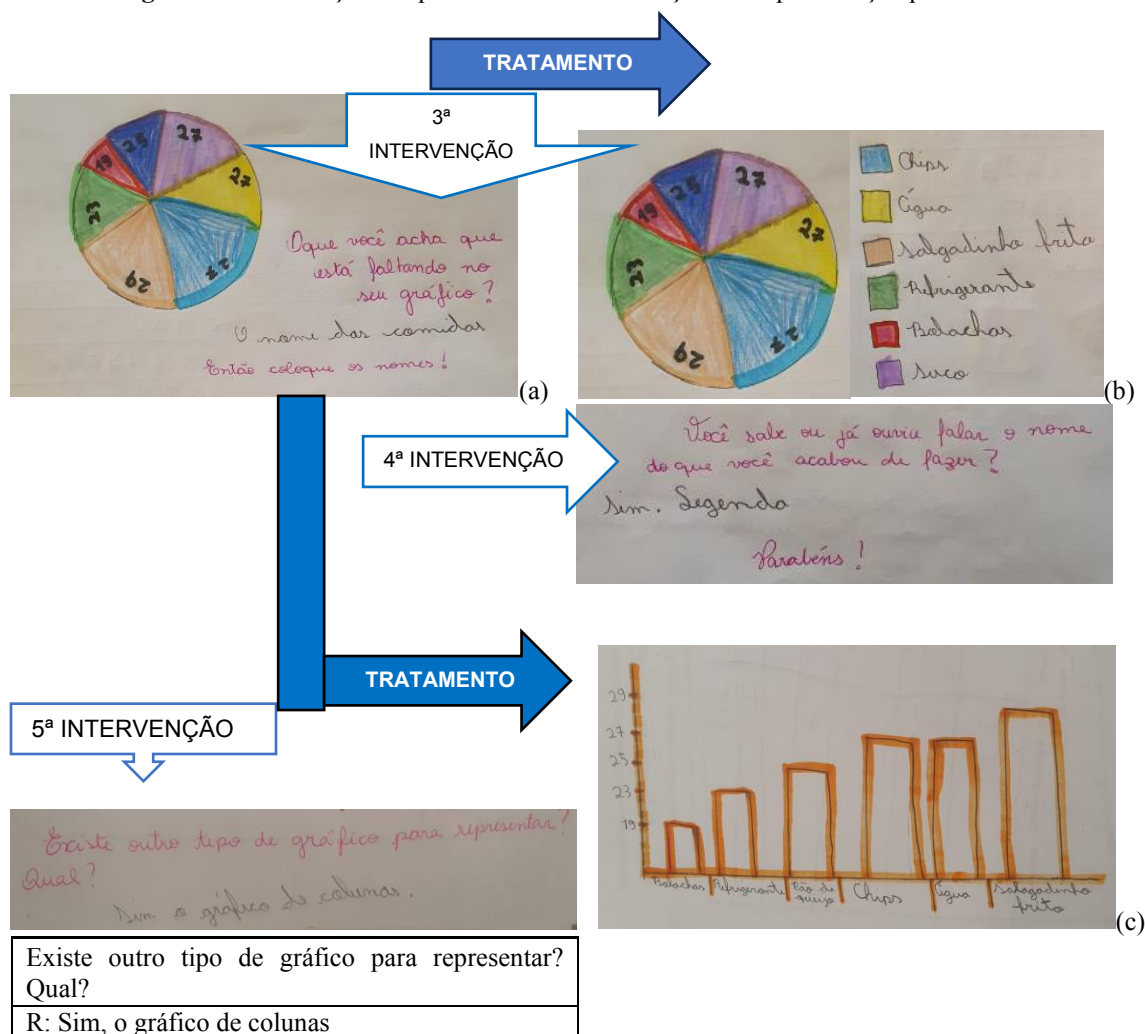
Foi aí que os alunos evidenciaram uma outra forma de representar os dados – o gráfico. Porém, como algo novo, tiveram algumas dificuldades na construção. Para suprir tal dificuldade, a professora explicou sobre os tipos de gráficos, os elementos de um gráfico, e

⁹ São compostos por um tv de tela plana, acoplada a um computador e uma webcam, com conexão à internet via wi-fi.

como construir. Esse conteúdo (gráficos) está presente na matriz curricular do 6º ano do Ensino Fundamental, porém os alunos ainda não tinham estudado, permitindo que a professora fizesse uma breve explicação sobre esse conteúdo. Esta intervenção da professora, permitiu que os alunos modificassem seus registros, construindo um gráfico, conforme a Figura 23. Dentre os objetivos da matematização em uma atividade de modelagem, Almeida (2018, p. 28) ressalta a necessidade de “requerer, de alguma forma, conceitos ou procedimentos matemáticos ainda não conhecidos que o professor pode introduzir por meio da atividade”.

Os alunos do Grupo 2 registraram, por meio de um gráfico de setores (Figura 23a), as informações que estavam na tabela, realizando uma nova conversão. No entanto, para a representação gráfica, os alunos não inseriram todos os elementos necessários, somente os números. Com isso, a professora inseriu uma nova intervenção (3ª intervenção: *O que você acha que está faltando no seu gráfico?*). O grupo indicou a necessidade de legenda, realizando um tratamento na representação gráfica (Figura 23b). A professora fez uma outra intervenção (4ª intervenção: *Você sabe ou já ouviu falar o nome do que você acabou de fazer?*). O grupo disse que sim, respondendo corretamente, legenda. A professora inseriu uma nova intervenção (5ª intervenção: *Existe outro tipo de gráfico para representar? Qual?*). O grupo disse que sim e indicou o gráfico de colunas (Figura 23c), realizando um novo tratamento, do registro gráfico de setores para o gráfico de colunas, mantendo no mesmo sistema semiótico.

Figura 23: Intervenções da professora e transformações de representação pelos alunos na A1



Fonte: Portfólio do Grupo 2

O que podemos evidenciar com os registros gráficos apresentados foi que, somente a partir das intervenções diretivas da professora e do acesso à internet com a busca de informações sobre outra forma de representação dos dados, os alunos compreenderam o que poderiam utilizar para o desenvolvimento da atividade. Neste caso, somente as intervenções escritas não foram suficientes para que a professora expressasse o que objetivava com os questionamentos. Mendes (2014) afirma que, ao se elaborar intervenções escritas, é preciso que elas: sejam claras no sentido de refletir o que o professor realmente deseja e que o aluno as interprete; sejam coerentes com o nível de competência apresentado pelo aluno em sua produção escrita e ao mesmo tempo permitir que desenvolva novas competências; ofereçam aos alunos segurança, assistência, *feedback* e promovam um “diálogo”; oportunizam ao aluno

revelar o que sabe; refletir conteúdos que se deseja avaliar, ou que se deseja que o aluno desenvolva.

A escolha por usar o gráfico de setores foi uma surpresa visto que corresponde à uma construção mais complexa do que a exigida em um gráfico de colunas, por exemplo. Porém, conjecturamos que, ao realizar a busca em sites da internet, esse tipo de gráfico chamou mais atenção dos alunos e, de alguma forma, para eles apresentava visualmente o que almejavam representar ou ainda, se aproximava mais de um registro figural.

De fato, os alunos fizeram um esboço simplificado, não considerando a proporcionalidade na angulação dos setores. Para isso, a professora se atentou para o fato de discutir mais detalhadamente esta forma de construção.

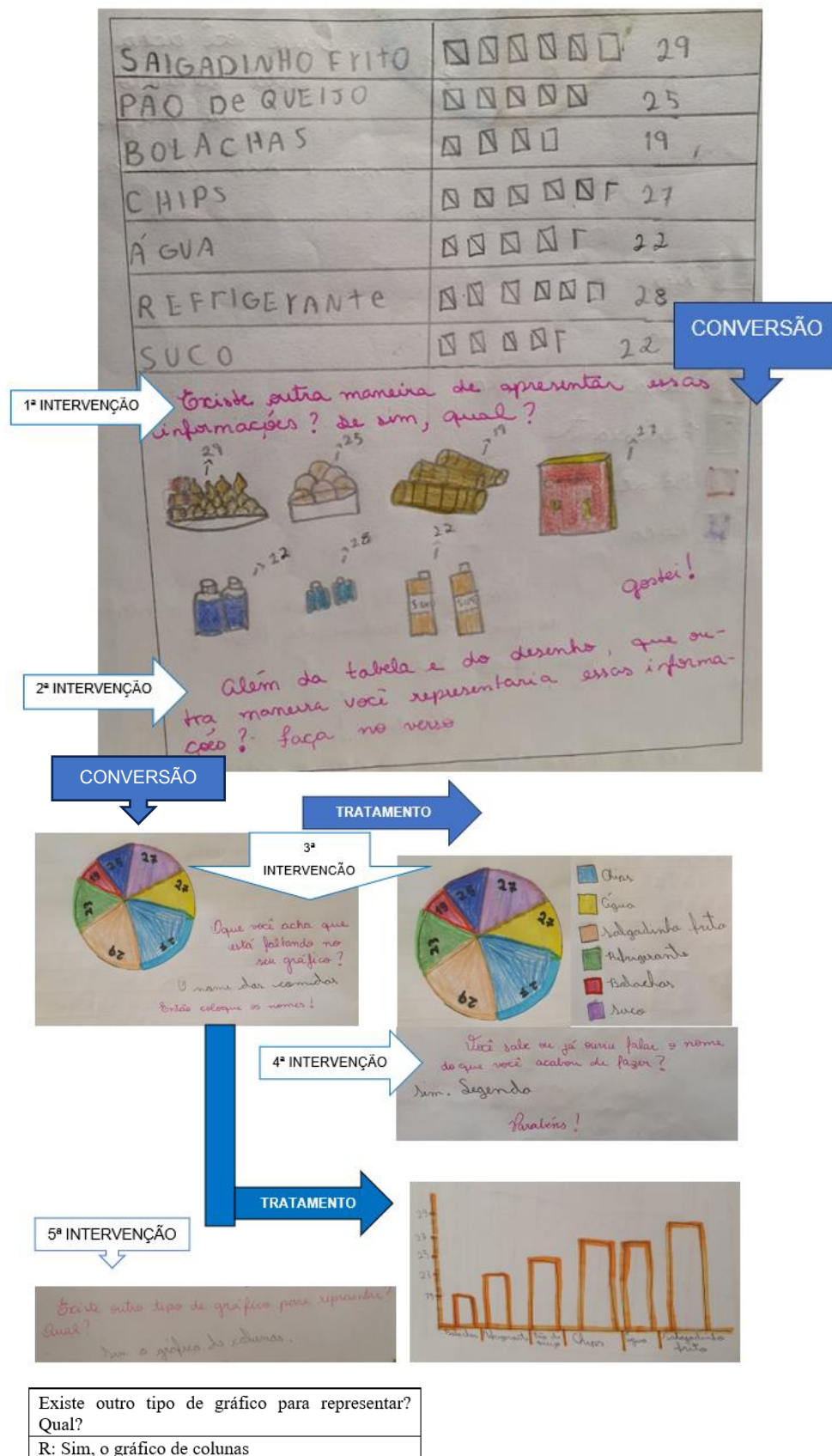
Embora, os alunos não tenham apresentado outros elementos do gráfico como fonte e título, a professora inseriu um *feedback* elogiando as suas abordagens e evidenciando a necessidade de uma parada para abarcar, posteriormente, esse conteúdo matemático.

A partir das intervenções da professora, do acesso à abordagem de gráficos realizado via internet e das explicações para o conteúdo, atividades cognitivas de tratamento e conversão foram mobilizadas pelos alunos do Grupo 2, conforme mostra a Figura 24.

Na Figura 24 podemos evidenciar três tipos de Registros de Representação Semiótica: tabular, figural e gráfico. Duval (2011, p. 100) aponta que “[...] a mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro”. Todavia, há de se considerar que esses registros foram produzidos pelos alunos por meio das intervenções em forma de questionamentos feitos pela professora.

As intervenções da professora foram realizadas por meio de enunciado em língua natural e os alunos tiveram de coordenar tal solicitação com o que estavam investigando. Segundo Duval (2003, p. 18) “[...] a passagem de um enunciado em língua natural a uma representação em um outro registro toca um conjunto complexo de operações para designar os objetos”, visto que a partir da língua natural variados tipos de Registros de Representação Semiótica podem emergir.

Figura 24: Todas as intervenções da professora e transformações de representação pelos alunos na A1



Fonte: Portfólio do Grupo 2

Para dar continuidade à atividade, de modo a obter uma solução para o problema (*qual o valor cada um teria de dispor?*), os alunos levantaram a quantidade que cada pessoa come de cada alimento e o valor a ser investido na compra para estimar o valor da contribuição no rateio. Para isso, a partir do registro em língua natural (Figura 25(a)), a professora fez a 1ª intervenção: *Apresente no espaço abaixo a quantidade total de cada item que teremos que comprar*. Essa intervenção teve como objetivo que os alunos organizassem as informações. A partir dessa intervenção docente, que foi única, para o desenvolvimento desse segundo momento da atividade, os alunos já organizaram os dados por meio de um registro tabular (Figura 25(b)). O que podemos conjecturar, com isso, é a aprendizagem semiótica dos alunos para a organização dos dados por meio de uma tabela, isso porque, “a capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados” (Duval, 2003, p. 15).

Figura 25: Organização dos dados relativos à quantidade total de cada alimento

Figura 25. Organização dos dados relativos à quantidade total de cada alimento

10 salgadinhos fritos
3 bandejas
3 pão de queijo
pacote
refri 200 ML cada pessoa
Suco 200ML por pess

(a)

CONVERSÃO

Apresente no espaço abaixo a quantidade de cada item que teremos que comprar

	Por pessoa	quantidade total	
Salgadinho	29	10	290
Pão de queijo	25	3	75
Chips	27	1	27
Refri	28	1 refri de 200ML	28 garrafinhas de 200
Suco	22	1 suco de 200ML	22 garrafinhas de 200ML
Copo	52	3	156
guardanapo	52	3	156

(b)

10 salgadinhos fritos – 3 bandejas
3 pão de queijo – 1 pacote
Refri 200 ml cada pessoa
Suco 200 ml por pessoa

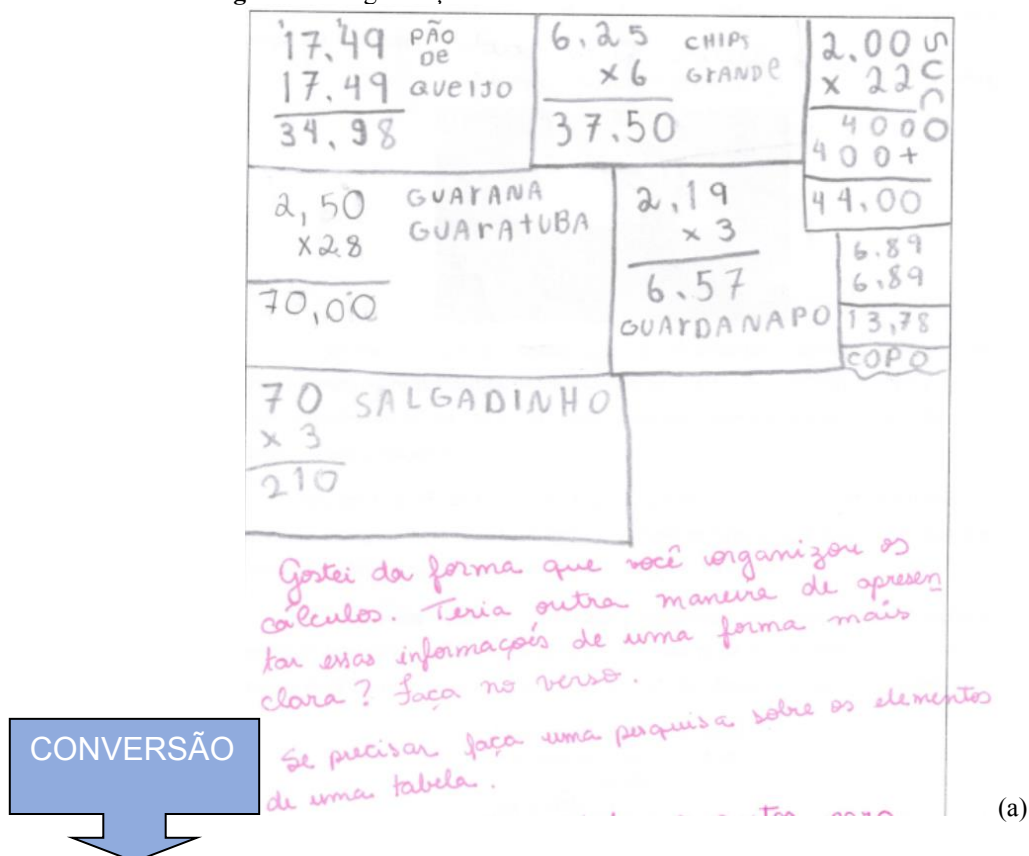
	Pessoa	Por pessoa	Quantidade Total
Salgadinho	29	10	290
Pão de queijo	25	3	75
Chips	27	1	27
Refri	28	1 refri de 200 ml	28 garrafinhas de 200 ml
Suco	22	1 suco de 200 ml	22 garrafinhas de 200 ml
Copo	52	3	156
Guardanapo	52	3	156

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Considerando cada uma das quantidades de alimentos necessárias para a realização do piquenique, os alunos foram solicitados a pesquisarem seus valores em supermercados, mercearias ou outro setor de atendimento ao público. Com isso, novamente foram à busca de “cercar-se de informações sobre essa situação por meio da coleta de dados quantitativos ou

qualitativos, seja mediante contatos diretos ou indiretos” (Almeida; Silva; Vertuan, 2013, p. 15). Ou seja, novamente tiveram de realizar uma inteiração com a situação, agora com relação aos valores a serem pagos por cada item. A pesquisa de preços foi feita em sala de aula por meio de panfletos de mercado que os alunos levaram, pela internet usando o telefone celular e também foram ao comércio com os seus pais durante o final de semana e levaram os preços anotados.

De posse da tabela representada na Figura 25(b), os alunos implementaram os valores, estimando os valores de cada item (Figura 26(b)), realizando um tratamento na tabela original. Ao final, dividiram o montante necessário para a compra dos alimentos (R\$ 416,83) entre as 52 pessoas que participariam do piquenique - 23 alunos do 6º ano A, 24 alunos do 6º ano B e 5 professoras. Com isso, chegaram à solução para o problema que estavam investigando em que cada participante do piquenique teria de pagar cerca de R\$ 8,01 para a aquisição dos alimentos. No entanto, antes da construção da Tabela representada na Figura 26(b), os alunos realizaram algoritmos da adição e multiplicação para cada item a ser comprado e somente após a intervenção da professora (*Gostei da forma que você organizou os cálculos. Teria outra maneira de apresentar essas informações de uma forma mais clara? Se precisar faça uma pesquisa sobre os elementos de uma tabela*) é que fizeram a Tabela. Portanto, nós identificamos uma nova conversão do registro da Figura 26(a) para a Figura 26(b).

Figura 26: Organização dos dados finais com os valores a serem custeados na A1

Itens	Quantidade	Valor Unitário	Valor Total
Salgadinho frito	30	R\$ 70,00	R\$ 210,00
Chips	6	R\$ 6,25	R\$ 37,50
Pepsi	28	R\$ 2,50	R\$ 70,00
Suco	22	R\$ 2,00	R\$ 44,00
Cão...de queijo	2	R\$ 17,49	R\$ 34,98
Copo descartável	2	R\$ 6,89	R\$ 13,78
Guardanapo	3	R\$ 2,19	R\$ 6,57
Cada um vai pagar 8,01			O total da conta é 416,83

(b)

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Nesses registros da Figura 26, percebe-se uma organização em relação às informações contidas na tabela, pois ao construí-la os alunos conseguiram expressar algumas aprendizagens como a conceitual, pois conseguiram construir e representar de maneira adequada todos os itens

necessários para a compra e suas respectivas quantidades e valores. De acordo com D'Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 165), “Um conceito é considerado construído quando o estudante tem condição de identificar propriedades do conceito, representá-lo, de transformar tal representação, de utilizá-la de maneira adequada”.

Nota-se também a aprendizagem algorítmica, pois para chegar à quantidade, ao valor total e ao valor por pessoa fizeram operações e cálculos matemáticos de adição e multiplicação (Figura 26(a)). Avaliar a aprendizagem algorítmica, segundo D'Amore, Pinilla e Iori (2015), não é trivial. Para fazer essa análise, é necessário que o professor faça perguntas, de maneira significativa, que relacione as habilidades exclusivamente mecânicas com aquelas que os alunos têm a ver com a capacidade de raciocinar antes de executar cálculos. Os alunos sabiam o que e porque estavam calculando, uma vez que separavam cada algoritmo por uma palavra que indicava os itens que iriam adquirir para o piquenique.

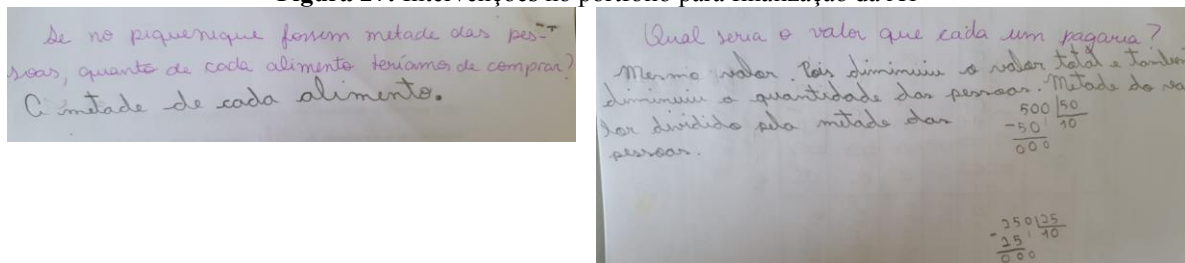
A aprendizagem estratégica também esteve evidente nesse grupo quando os alunos conseguiram resolver o problema inicial durante todo o encaminhamento da atividade, até chegar em uma solução para a situação inicial que era saber quanto que cada um teria que desembolsar para a realização do piquenique. Embora a maior parte das estratégias tenham sido orientadas pela professora nesta primeira atividade, os alunos se mostraram dispostos e realizaram-nas para chegar a cada um dos objetivos. Nota-se que os estudantes foram capazes de resolver o problema inicial que era saber o valor que cada pessoa precisaria dispor para que o piquenique pudesse acontecer.

A aprendizagem comunicativa também foi evidenciada, pois exprimiram ideias matemáticas por meio de uma representação visual, a tabela. E por fim, como citado no referencial teórico dessa pesquisa, a aprendizagem semiótica é transversal a todas essas aprendizagens e ela se fez presente também, pois os alunos souberam escolher um objeto matemático que representasse as informações, foi construído cognitivamente, escolheram de forma adequada e souberam transformá-la em outra no mesmo registro (tratamento) ou em outro (conversão) sem perder de vista o ponto de partida. Na aprendizagem comunicativa de acordo com D'Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 167), “busca evidenciar a capacidade de exprimir ideias matemáticas, justificando, argumentando, demonstrando (de maneira adequada aos estudantes, oral ou escrita) e representando de maneira visual com figuras, de modo eficaz”. Dessa forma, evidenciamos que os estudantes se expressaram matematicamente durante toda a atividade de modelagem matemática por meio de comunicação oral em grupo, de registros escritos, de representações de figuras, gráfico e tabelas e por meio de cálculos com algoritmos.

Após a finalização da atividade de modelagem matemática em sala de aula, em um outro dia a professora continuou com outras intervenções nos portfólios dos alunos. Com esse novo questionamento, a intenção da professora era identificar indícios de aprendizagens, para isso fez os seguintes questionamentos hipotéticos para os alunos, dentro da mesma temática da atividade: *Se no piquenique fossem metade das pessoas, quanto de cada alimento teríamos de comprar? e qual seria o valor que cada um pagaria?*

Mediante a esses dois questionamentos, os alunos no primeiro momento, não conseguiram entender as perguntas, então a professora fez intervenções orais na sala de aula, explicando a relação entre as quantidades de alimentação que se compra, com o número de pessoas. Após essa intervenção da professora, os alunos tiveram um entendimento e responderam a esses dois questionamentos (Figura 27). Pela resposta dos alunos para as perguntas, ficou evidenciado que os alunos do grupo 2, entenderam a relação de proporcionalidade entre comida e quantidade de pessoas. E ao olhar a resposta da segunda pergunta, entendemos que os alunos, além de se comunicar por meio da língua materna, também utilizaram do processo algorítmico para confirmar, ou seja, validar a sua resposta.

Figura 27: Intervenções no portfólio para finalização da A1



Se no piquenique fossem metade das pessoas, quanto de cada alimento teríamos de comprar?

R: A metade dos alimentos.

Qual seria o valor que cada um pagaria?

R: Mesmo valor. Pois diminuiu o valor total e também diminuía a quantidade as pessoas. Metade do valor dividido pela metade das pessoas.

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Diante do exposto na Figura 27, evidenciamos indícios de aprendizagem conceitual, pois os alunos entenderam o conceito de proporcionalidade; também evidenciamos indícios de aprendizagem algorítmica, pois resolveram de maneira adequada o algoritmo para responder ao questionamento; evidenciamos indícios de aprendizagem estratégica pois souberam resolver o questionamento da professora; os indícios de aprendizagem comunicativa também se fizeram presentes pois os alunos responderam a pergunta da professora, souberam se comunicar e exprimir suas ideias por meio da linguagem materna escrita, e por fim, os indícios da

aprendizagem semiótica se fez presente durante as resoluções, respostas e registros escritos dos alunos ao analisarmos as demais aprendizagens.

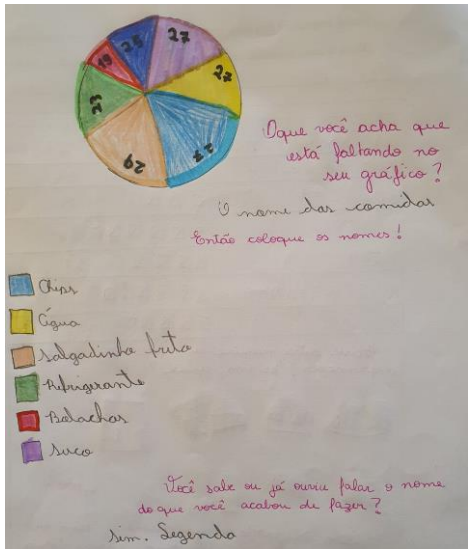
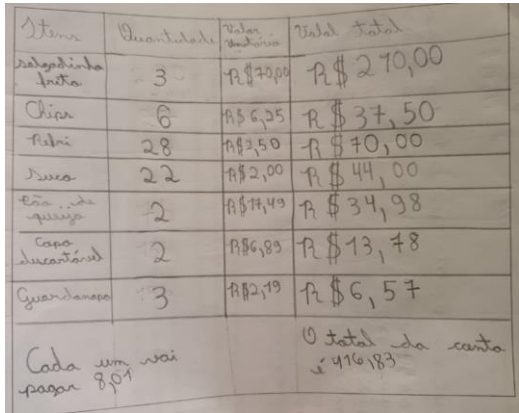
No Quadro 10, apresentamos uma síntese das aprendizagens conceitual, algorítmica, estratégica e comunicativa, juntamente com as fases da Modelagem Matemática, com os registros escritos feitos pelos alunos e por fotos durante a realização da atividade.

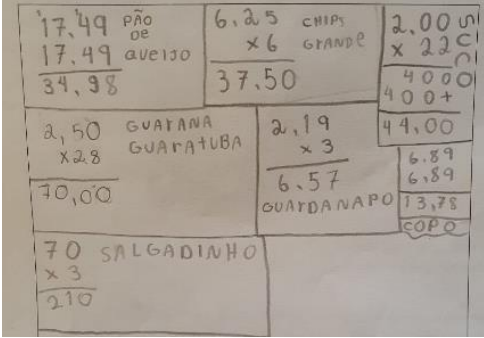
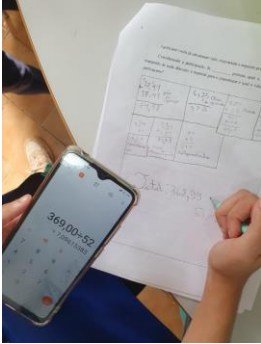
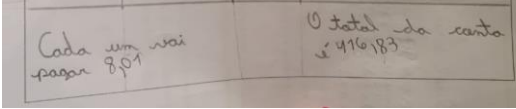
Ainda neste quadro, fizemos uma separação para evidenciar as aprendizagens mais destacadas em cada registro dos alunos, no entanto, entendemos que não são exclusivas apenas para um tipo de aprendizagem. Um exemplo, é a relação entre a aprendizagem algorítmica com a aprendizagem comunicativa, ou seja, quando a professora explicou como funciona um algoritmo ou quando os colegas usam da língua natural para transcrever na linguagem matemática, até mesmo quando fazem o uso das duas linguagens simultaneamente. Outra relação que podemos evidenciar é a aprendizagem conceitual com a estratégica, na qual, colocamos a tabela para evidenciar a aprendizagem conceitual, mas também podemos destacar a aprendizagem estratégica, pois estão chegando à solução da problemática inicial. Podemos também relacionar a aprendizagem estratégica com a algorítmica, uma vez que os alunos precisam utilizar de algoritmos para chegarem à solução.

Enfim, essas aprendizagens acontecem em todo o tempo e temos ainda a aprendizagem semiótica que nos permite inferir sobre o uso dos diferentes registros de representação e o modo como os alunos fazem tratamentos e conversões da maneira correta ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Fizemos uma relação entre as fases de Modelagem Matemática segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013) e as aprendizagens de acordo com Pinilla (2010). Sabemos e também já dissemos aqui que as aprendizagens não são vistas separadamente, porém, podemos analisar mais fortemente um tipo de aprendizagem que se destaca em cada fase da Modelagem Matemática.

Quadro 10 – Componentes da aprendizagem e fases da modelagem presentes nas ações dos alunos na Atividade 1: Piquenique no Zerinho

Componentes da Aprendizagem	Ações dos alunos	Fases da Modelagem	Registros dos alunos
Aprendizagem Conceitual	Conversa com a turma sobre o que cada um gostaria de comer no dia do piquenique e uma enquete para levantamento dos dados.	Inteiração	
	Tabulação dos dados.	Matematização	
	Coleta de dados, construção de gráficos e identificação de seus elementos.		

Aprendizagem Algorítmica	Resolução de operações de adição e multiplicação com números decimais para estimarem os valores dos alimentos e outros itens necessários para o piquenique. Resolução algorítmica com o auxílio da calculadora.	Resolução e Interpretação de resultados	Considerando a participação de <u>50</u> pessoas, qual a quantidade total comprada de cada alimento e material para o piquenique e qual o valor a ser pago por participante?  
Aprendizagem Estratégica	Todo o processo da busca de informações para resolverem o problema: <i>Qual o valor cada um teria de dispor?</i> Busca de informações sobre formas de representar as informações em sites da internet.	Resolução e Interpretação de resultados	 

	Respostas à intervenção da professora, questionando possíveis acontecimentos.		Se no piquenique fomos metade das pessoas, quanto de cada alimento teríamos de comprar? Metade de cada alimento. Qual será o valor que cada um pagaria? Mesmo valor. Por diminuir o valor total e também diminuir a quantidade das pessoas. Metade do valor dividido pela metade das pessoas. $\begin{array}{r} 500 \overline{) 50} \\ -50 \\ \hline 00 \end{array}$ $\begin{array}{r} 550125 \\ - 10 \\ \hline \end{array}$
Aprendizagem Comunicativa	Diálogo para a escolha do menor preço entre os colegas do grupo durante a pesquisa de preços em sala por meio de folhetos promocionais e quando foram ao comércio pesquisar. Disposição das carteiras com os alunos sentados em equipe, facilita a aprendizagem comunicativa. Respostas às intervenções da professora.	Resolução e Interpretação de resultados	  Existe outra maneira de apresentar essas informações. Se sim, qual? Sim com riscas, ou com desenhos.

	Dia do Piquenique – os alunos validaram por meio do valor que cada um contribuiu com as compras realizadas para a alimentação no dia.	Validação	
--	---	-----------	--

Fonte: a autora (2023)

Por meio da atividade de modelagem matemática Piquenique no Zerinho, os alunos se inteiraram do assunto fazendo a enquete para saber o que levar em um piquenique, coletaram e tabularam os dados da enquete, matematizaram, resolveram, interpretaram os resultados e validaram-nos no dia 27 de abril de 2023, dia em que foi realizado o piquenique planejado por eles e que puderam verificar que o valor que calcularam por aluno foi suficiente para a aquisição dos alimentos e itens necessários para a realização do piquenique.

4.1.2 ATIVIDADE 2: ÁGUA

A atividade com a temática “Água” foi a segunda a ser desenvolvida com os alunos, durante 3 horas-aula do segundo trimestre, sendo uma hora aula no dia 10 de abril e duas horas aulas no dia 11 de maio de 2023. O Quadro 11 apresenta a data das aulas, as abordagens realizadas e o ambiente que se deu o encaminhamento.

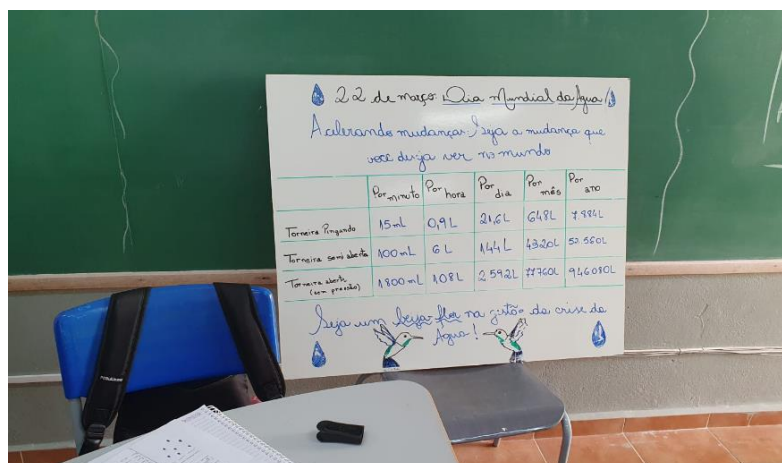
Quadro 11: Organização das aulas para a atividade 2: Água

Aula	Data	Abordagens	Ambiente
1	10/04/2023	Inteiração do tema por meio do cartaz disponibilizado pela professora de Ciências que havia trabalhado com a turma sobre o desperdício de água. Coleta de dados para saber quantas torneiras tem no colégio.	Sala de aula Colégio
2	11/05/2023	Registro dos dados coletados no portfólio.	Sala de aula
3	11/05/2023	Análise, registros e resoluções para chegar a uma solução da situação inicial.	Sala de aula

Fonte: a autora (2023)

A motivação aconteceu pelo fato de ter sido comemorado o dia Mundial da Água, em 22 de março, e a professora de Ciências havia coletado alguns dados sobre o desperdício de água com os alunos por meio de uma torneira da escola. A professora de Ciências construiu um cartaz sobre os dados coletados e foi cedido por ela para o momento da inteiração desta atividade na aula de matemática. Para isso, foi levado para a sala de aula o cartaz sobre a quantidade de desperdício de água que há em uma torneira pingando, torneira semiaberta e torneira aberta, por minuto, por hora, por dia, por mês e por ano, conforme a Figura 28. E o problema a ser investigado na atividade foi: *Qual o valor do desperdício de água, se todas as torneiras da escola estivessem pingando?*

Figura 28 – Cartaz sobre o desperdício de água em torneiras



Fonte: a autora (2023)

Os encaminhamentos da atividade seguiram as fases da Modelagem Matemática de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2013), conforme o Quadro 12.

Quadro 12: Organização das aulas e as fases da Modelagem Matemática na A2

Aula	Ações na atividade	Fases da Modelagem Matemática
1	Problemática <i>Qual o valor do desperdício de água, se todas as torneiras da escola estivessem pingando?</i>	Situação inicial
1	Discussão em sala sobre a temática e registro no portfólio dos alunos sobre os dados apresentados no cartaz.	Inteiração
1	Coleta de dados: fizeram uma vistoria pelo colégio sobre a quantidade total de torneiras existentes.	Matematização
2	Organização dos dados em tabela e gráficos.	Matematização
2	Organização dos dados em tabela e gráficos. Resoluções dos cálculos para responder alguns questionamentos presentes no portfólio.	Matematização Resolução

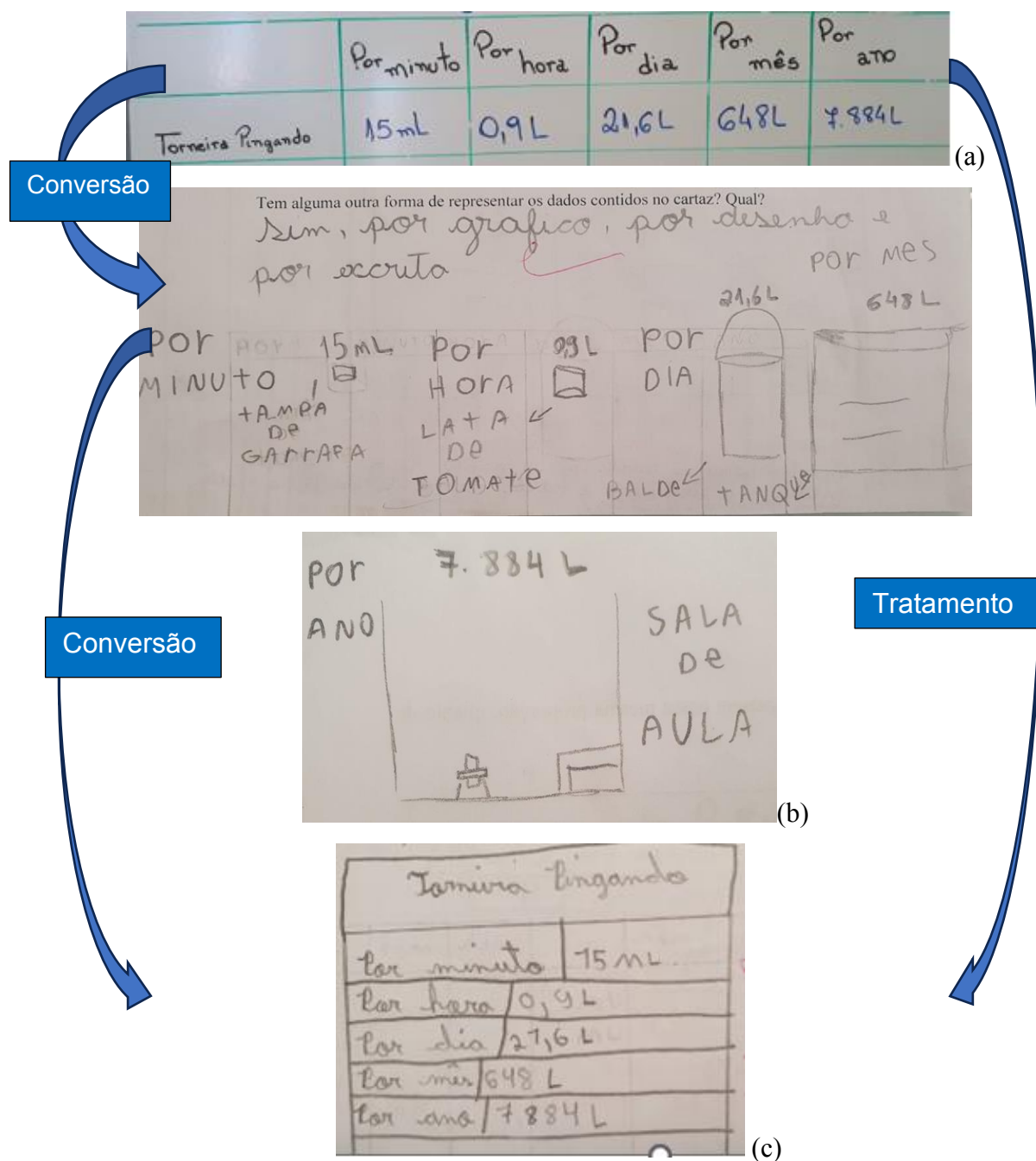
3	Análise dos resultados obtidos e do gráfico construído.	Interpretação de resultados
3	Valores calculados pelos alunos sobre o desperdício, foram próximos aos valores do metro cúbico de água cobrado pela companhia de água.	Validação

Fonte: a autora (2023)

A atividade teve início com a leitura e a interpretação do cartaz sobre o desperdício de água. A professora pediu para os alunos falarem o que eles entenderam ao ler o cartaz. Em seguida, a professora explicou sobre os gastos de água quando se tem uma torneira pingando por minuto, por hora, por dia, por mês e por ano. E pediu para os alunos registrarem no portfólio se tem outra forma de representar os dados contidos no cartaz em relação à torneira pingando, conforme a Figura 29(a), que representa a parte do cartaz que eles estavam analisando. O grupo 2, respondeu essa pergunta (*Sim, por gráfico, por desenho e por escrita*).

Em seguida fez um registro figural, conforme ilustra a Figura 29(b) que consistem em um desenho de uma tampa de garrafa para relacionar 15 ml por minuto; uma lata de tomate para relacionar os 0,9 l por hora; um balde para relacionar 21,6 por dia; um tanque para relacionar os 648 l por mês e uma sala de aula para relacionar os 7884 l por ano. O estudante, ao representar os dados dessa forma, fez uma relação de objetos conhecidos por ele com a capacidade em mililitros e de litros. No portfólio, o Grupo 2, ao responder o seguinte questionamento: *Existe alguma outra forma de representar os dados contidos no cartaz?*, apresentou um desenho para representar os dados da tabela da professora, realizando uma conversão de registros tabular para o figural (Figuras 29(a) e 29(b)).

Figura 29 – Organização dos dados relativos a uma torneira pingando na A2



Fonte: Portfólio do Grupo 2

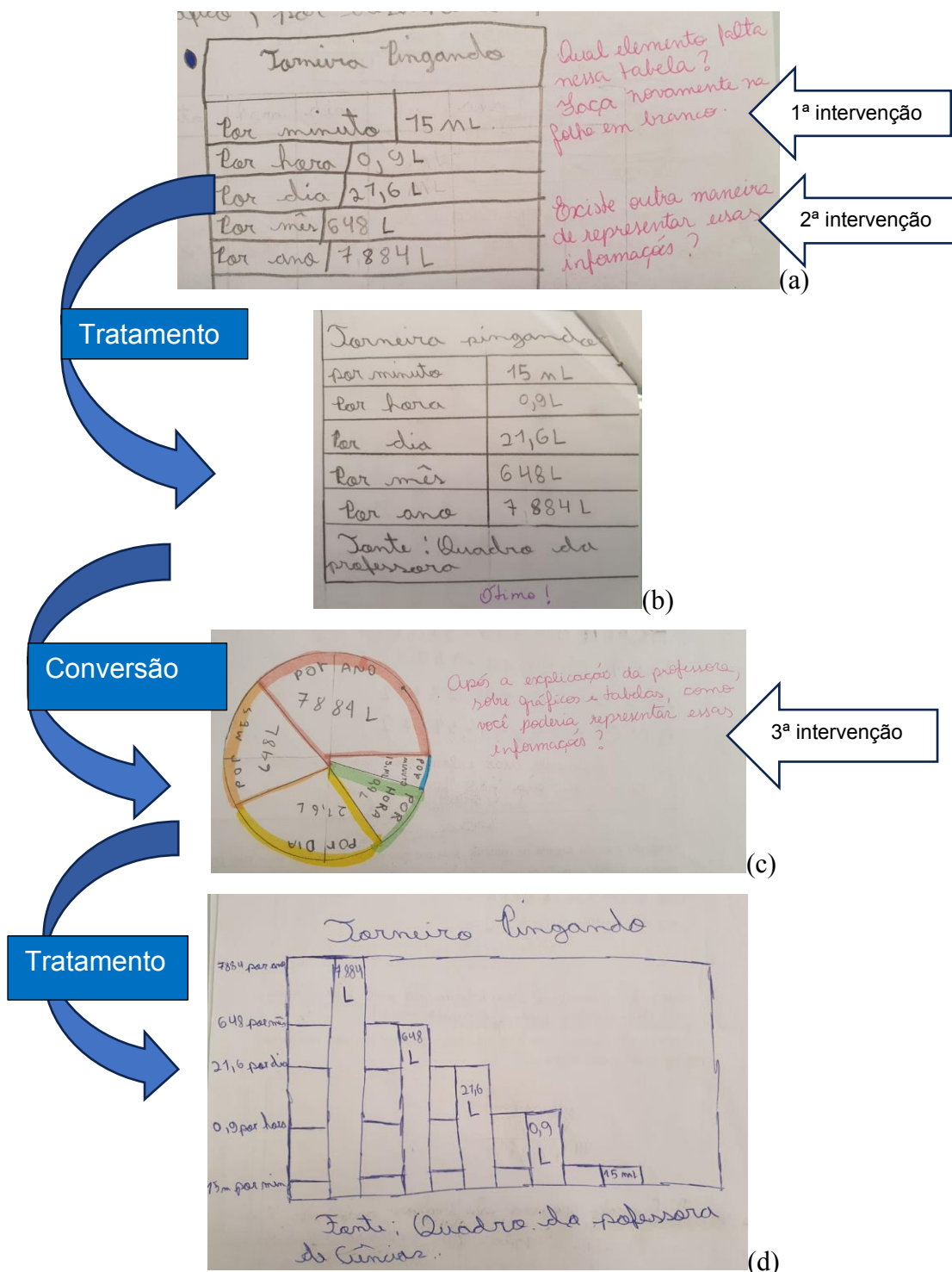
Em seguida, também fez uma tabela no formato vertical, não estava bem alinhada e faltava a fonte, diferente do horizontal apresentado no cartaz, conforme a Figura 29(c). Sem intervenção da professora já fizeram um registro tabular, realizando um tratamento de registros tabular (Figuras 29(a) e 29(c)).

A intervenção oral é semelhante à apresentada na A1. De fato, para iniciar o registro dos dados pelos alunos, houve a necessidade de uma primeira ação que a professora julgou

pertinente em relação ao conjunto de dados apresentados no cartaz. A presença do registro figural denota a preferência do grupo em fazer uso de desenhos para se remeterem a dados relacionados a um fenômeno em estudo. Tal preferência pode estar vinculada à faixa etária dos alunos.

Ao construírem a tabela, a professora identificou a falta de alguns elementos e fez a 1ª intervenção (*Quais elementos faltam nessa tabela? Faça novamente*) e a 2ª intervenção (*Existe outra maneira de representar essas informações?*) (Figura 30(a)). Após a primeira intervenção da professora, o grupo 2, fez novamente uma outra tabela de uma forma mais alinhada e com os elementos que faltavam, o título e a fonte (Figura 30(b)), configurando novamente um tratamento entre o registro tabular. Além disso, o grupo respondeu à 2ª intervenção da professora (*Existe outra maneira de representar essas informações?*). Para responder a esse questionamento, a professora sentiu a necessidade de voltar a explicação sobre os Gráficos que já havia feito na atividade anterior do Piquenique. Para isso, todos os alunos fizeram novamente a pesquisa em sala de aula sobre como construir gráficos, e esse grupo optou por fazer um gráfico de setores (Figura 30(c)), realizando uma conversão entre o registro tabular e o registro gráfico. Após uma 3ª intervenção da professora (*Após a explicação da professora sobre gráfico e tabelas, como você poderia representar essas informações?*), o grupo 2, construiu um gráfico de colunas (Figura 30(d)), realizando um tratamento no registro gráfico.

Figura 30 – Continuação da organização dos dados relativos a uma torneira pingando



Fonte: Portfólio do Grupo 2

Além do registro figural (Figura 29(b)), os alunos já organizaram os dados em uma tabela disposta de forma diferente da apresentada no cartaz, a partir da 1ª intervenção, porém com a falta de alguns elementos que já haviam estudado e utilizado na A1. A 1ª intervenção escrita já sinaliza aos alunos que faltam elementos na tabela e, de forma imperativa, a professora

solicita que refaçam o registro. Os alunos do grupo, então, entendem que precisam organizar os dados de forma alinhada e inserem a fonte.

A reprodução da intervenção sobre outra forma de representação configura o interesse da professora de que os alunos precisavam fazer uso do registro gráfico. O que podemos evidenciar é que o uso do registro gráfico não era natural para os alunos, denotando que a conversão foi requerida pela professora. O tratamento de registro feito pelos alunos na Figura 30(c), aconteceu por meio da 2ª intervenção da professora durante a realização da atividade (*Existe outra maneira de representar essas informações?*). Com esse questionamento, os alunos optaram por fazer um gráfico de setores sem o uso de transferidores, não obtendo uma proporcionalidade. Como não é conteúdo do sexto ano, a professora optou por não abordar a construção do gráfico de setores com o uso do transferidor e optou em fazer uma 3ª intervenção (*Após a explicação da professora sobre gráficos e tabelas, como você poderia representar essas informações?*). Com esse questionamento, os alunos possivelmente lembraram que já havia sido abordado o gráfico de colunas e optaram por realizar a construção do gráfico de colunas (Figura 30(d)). As intervenções e *feedbacks* “do professor com o aluno sobre os seus erros e acertos contribui para a conscientização dos pontos fortes e fracos, contribuindo também para a aprendizagem e superação de erros” (Gomes, 2003, p. 17).

Na perspectiva da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval, uma análise do conhecimento matemático é uma análise do sistema de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento. De acordo com o autor:

A questão semiótica vem antes de tudo da matemática, e não dos estudantes. Assim, para realizar qualquer atividade matemática, é necessário lidar com imagens, que são visualizações não-icônicas e não apenas representações icônicas, com um aumento exponencial de notações simbólicas (Duval, 2008, p. 40).

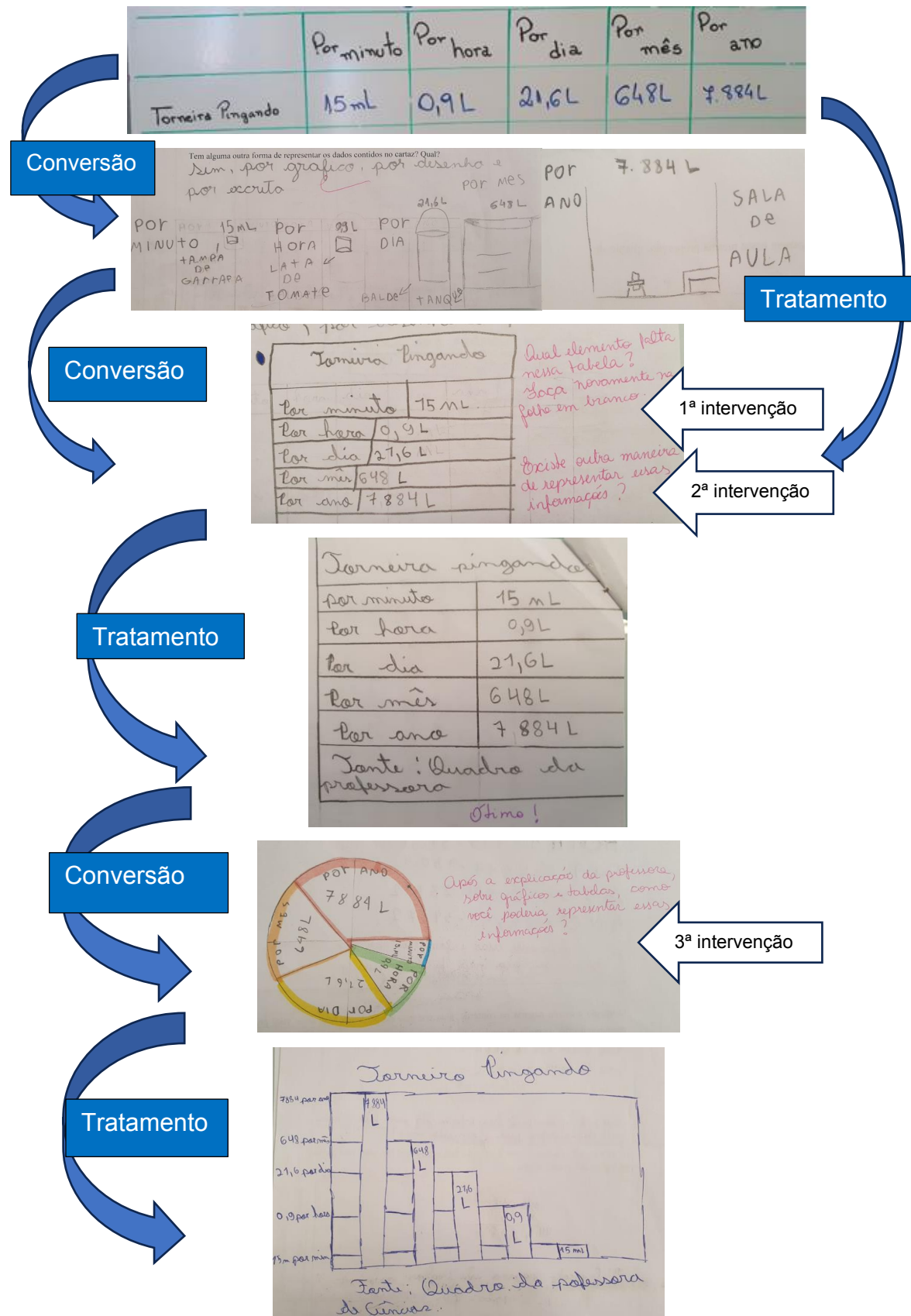
Segundo Duval (2003), as representações semióticas têm papel fundamental na aprendizagem da Matemática devido ao caráter abstrato dos objetos matemáticos. Estes só são acessíveis por meio de suas diferentes representações. Ele acrescenta, ainda, que para os conceitos serem efetivamente apreendidos, faz-se necessário que o sujeito desenvolva não somente a capacidade de representar ideias e conceitos em linguagem simbólica, mas principalmente sua capacidade de mobilizar simultaneamente ao menos dois Registros de Representação Semiótica coordenando-os de forma natural.

Para que esses conceitos sejam adquiridos, e os alunos possam representá-los, fazendo conversões e tratamentos de maneira adequada, a intervenção do professor é de fundamental

importância. Nesse sentido, entendemos que as intervenções do professor (intervenções docentes) podem ressignificar conhecimentos, estratégias, encaminhamentos, implicando na aprendizagem (Pazuch; Nehring, 2012). A Figura 31 apresenta as atividades cognitivas de tratamento e conversão, bem como os destaques para as intervenções docentes.

Evidencia-se a aprendizagem conceitual na construção de tabelas e gráficos do Grupo 2, pois para a aprendizagem conceitual se considera a construção de um conceito e a sua utilização de maneira adequada. Salientamos que, por meio das intervenções docentes, no portfólio dos alunos, criamos oportunidades de os estudantes externarem seus conhecimentos. Segundo D'Amore, Pinilla e Iori, (2015, p. 165): “Vemos então que se torna interessante, para a avaliação em sentido construtivo, criar oportunidades nas quais os estudantes tenham possibilidade de mostrar que construíram conceitos.”

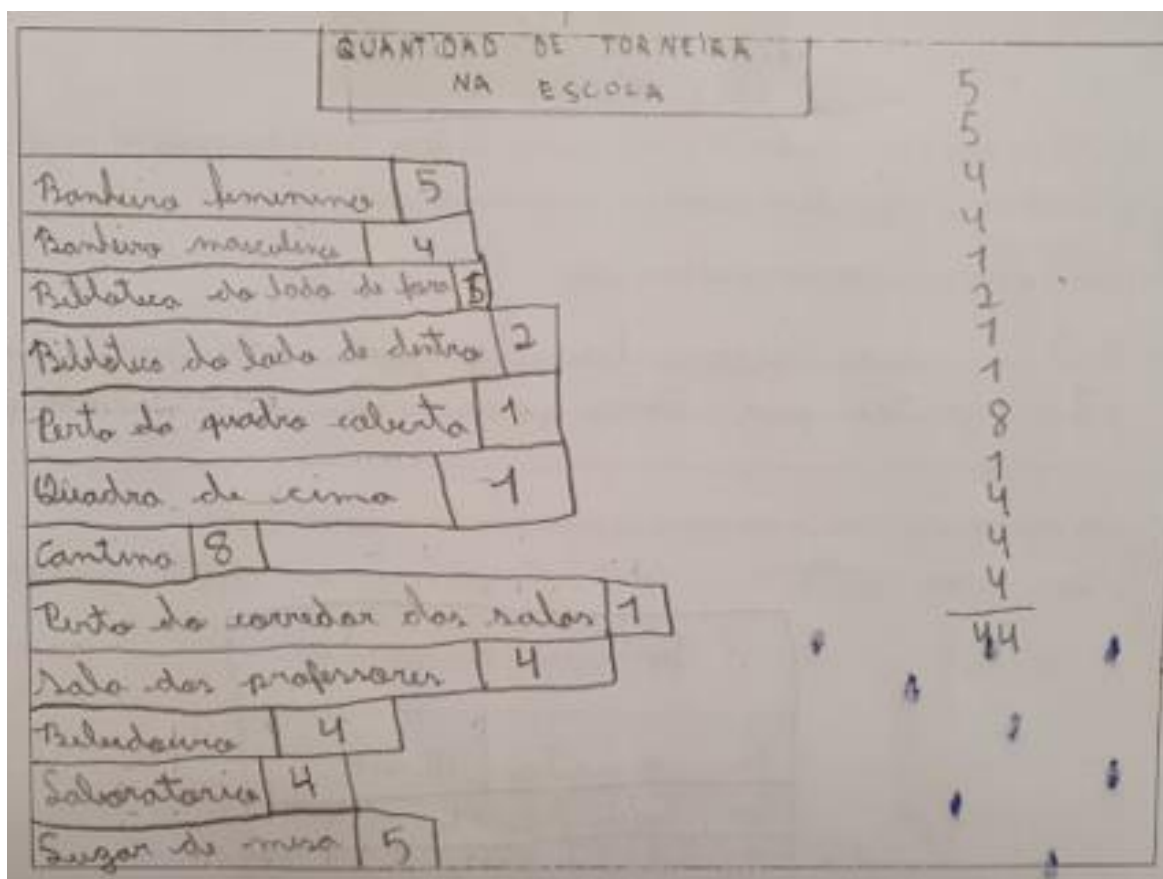
Figura 31 – Organização completa dos dados relativos a uma torneira pingando



Fonte: Portfólio do Grupo 2

Para dar continuidade à atividade, a professora pediu para que os estudantes percorressem a escola e contassem a quantidade de torneiras. Após esse procedimento, a professora pediu para representarem as informações de torneiras por setor da escola. Eles fizeram o registro tabular conforme a Figura 32.

Figura 32 – Organização dos dados relativos à quantidade de torneiras na escola

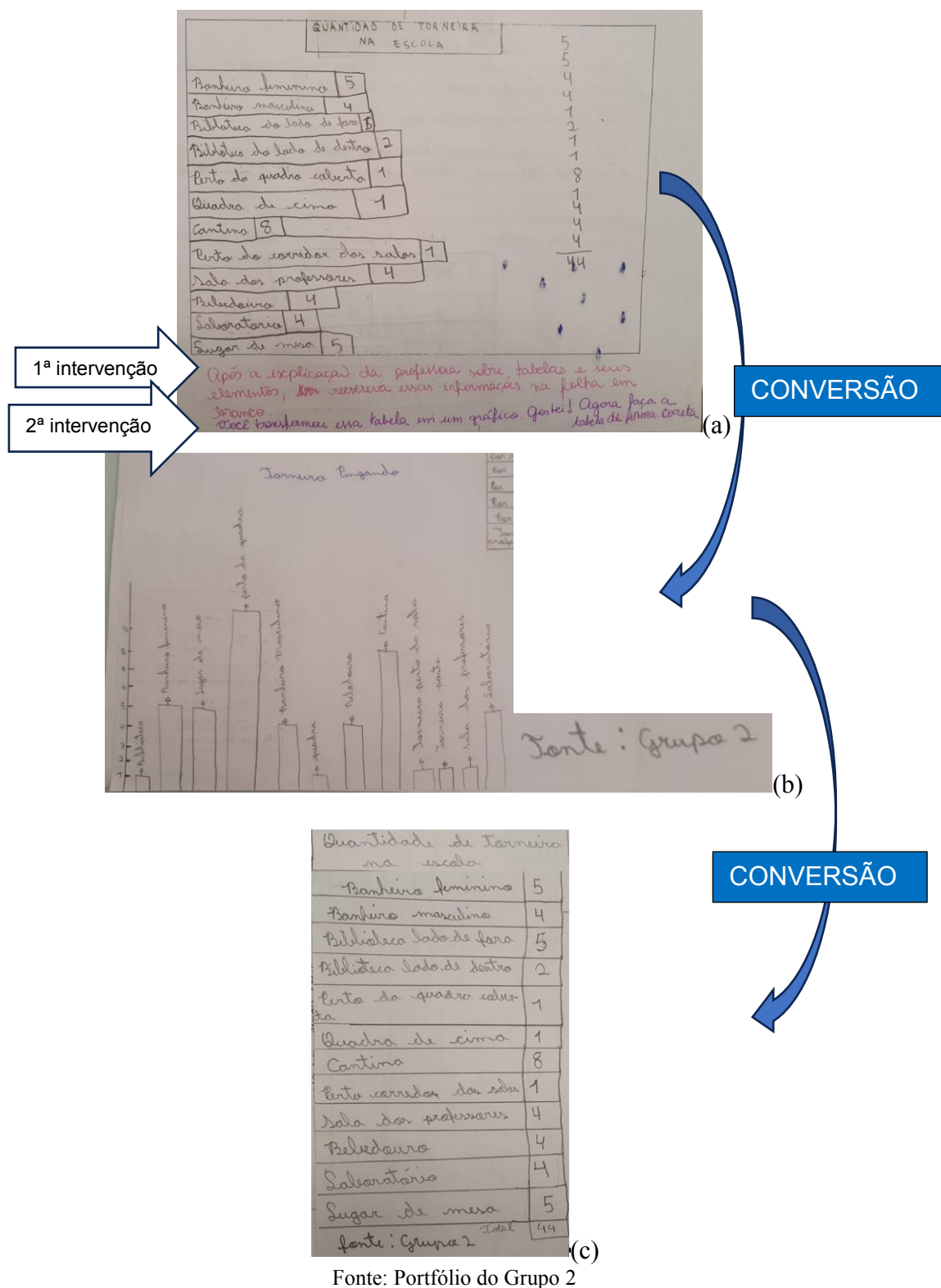


Fonte: Portfólio do Grupo 2

Embora os estudantes do grupo 2, representassem as informações sobre a quantidade de torneiras, a professora percebeu que eles não haviam entendido a formatação de uma tabela, bem como seus elementos. Para que houvesse tal compreensão, a professora retomou o conteúdo sobre construção de tabelas e gráficos e fez a 1ª intervenção nessa parte da atividade (*Após a explicação da professora sobre tabelas e seus elementos, reescreva essas informações na folha em branco*), pedindo para que o grupo representasse aqueles dados novamente e os alunos fizeram um gráfico, então a professora fez uma 2ª intervenção (*Você transformou essa tabela em um gráfico. Gostei! Agora faça a tabela de forma correta*), conforme ilustra a Figura 33(a). Nesse caso, a intervenção da professora precisou ser mais diretiva. Com a primeira intervenção, os alunos realizaram uma conversão do registro tabular para o gráfico (Figura

33(b)), e após a 2ª intervenção, realizaram novamente uma conversão entre os registros gráfico para o tabular (Figura 33(c)).

Figura 33 – Conversões de registros para a organização dos dados relativos à quantidade de torneiras na escola



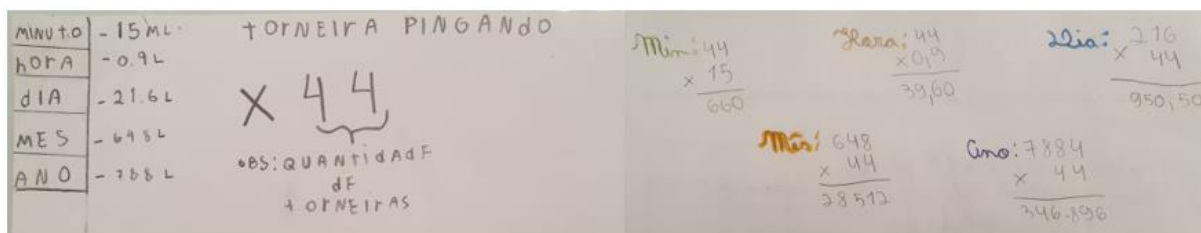
As atividades de modelagem matemática possibilitaram a ação da professora em retomar o conteúdo e poder realizar a avaliação formativa.

A aprendizagem conceitual sobre a construção de gráficos e tabelas parecia ter acontecido na Atividade 1, porém mostrou-se necessário retomá-la na Atividade 2. A aprendizagem conceitual é dada pela construção de conceitos, “um conceito é considerado construído quando o estudante tem condições de identificar propriedades do conceito, de representá-lo, de transformar tal representação, de utilizá-la de maneira adequada” (D’Amore; Pinilla; Iori, 2015, p. 165). A partir do momento que a professora interveio na atividade, explicando novamente sobre a construção de gráficos e tabelas, os alunos lembraram rapidamente do conteúdo já abordado e registraram por meio de gráficos e tabelas as informações coletadas de forma correta. Após as intervenções da professora, inferimos que a aprendizagem conceitual ficou evidenciada. O professor, na atividade de modelagem matemática, “desempenha seu papel de orientador da atividade, promovendo discussões e reflexões, questionando os grupos a fim de responder matematicamente a situação-problema investigada” (Gomes; Silva, 2019, p. 2).

No momento da formatação dos dados coletados, a interação entre os membros dos grupos foi bastante perceptível, e a aprendizagem comunicativa foi evidenciada, pois eles precisavam representar os dados coletados. O grupo 2, optou por representar os dados coletados por meio de uma tabela, de acordo com a Figura 32, ação que faz parte da aprendizagem comunicativa e semiótica: “Uma vez que a comunicação dos objetos matemáticos construídos cognitivamente ocorre por meio de registros semióticos, é evidente que, também nesse caso, a aprendizagem semiótica seja transversal” (D’Amore; Pinilla; Iori, 2015, p. 168).

Para dar continuidade à atividade, a professora questionou, de forma oral, os alunos e por meio do portfólio da atividade: *Vamos supor que todas as torneiras da escola pingassem nessa mesma proporção, quanto de água gastaria?* Trata-se de um problema em que os alunos teriam que estimar a quantidade de água desperdiçada. Para tanto, já está embutida na pergunta a hipótese de que o desperdício da torneira pingando manteria a proporção, ou seja, 15 ml por minuto em 44 torneiras existentes na escola.

Os estudantes do grupo 2 responderam conforme a Figura 34, utilizando o algoritmo da multiplicação pois teriam que multiplicar as quantidades de desperdícios pela quantidade de torneira da escola, assim realizaram todos os cálculos e já haviam dado a resposta.

Figura 34 – Quantidade de desperdício de água na escola das torneiras pingando

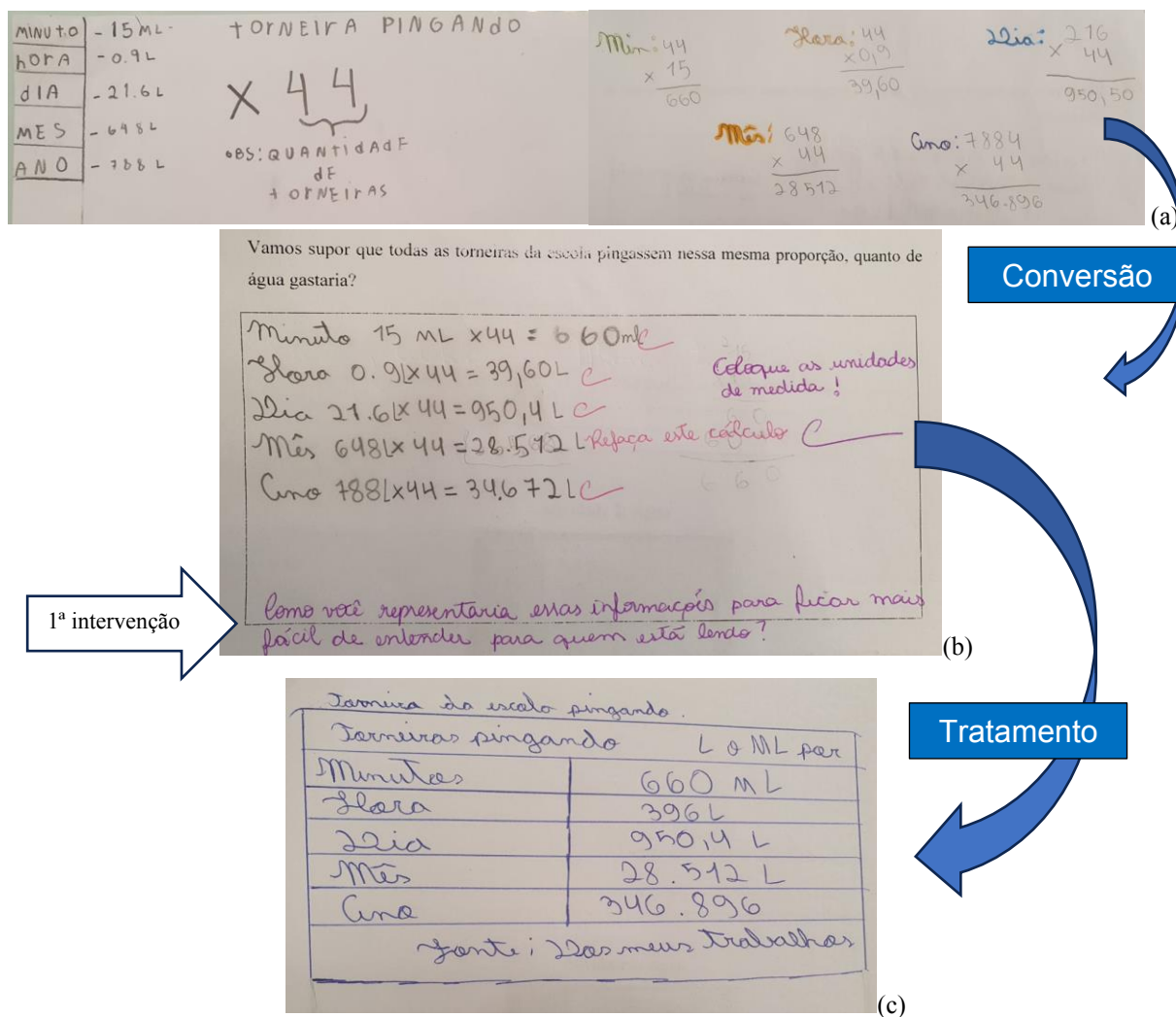
Fonte: Portfólio do Grupo 2

Contudo, a intenção da professora no desenvolvimento dessas atividades era evidenciar como os alunos representavam o mesmo objeto matemático com mais de um tipo de registro, e queria evidenciar neste momento a aprendizagem conceitual nos estudantes na construção de gráficos e tabelas.

Na Figura 34, os alunos deixaram indicado em evidência, com um tamanho de letra maior, e ainda se comunicaram por meio da língua natural que o número 44 que iriam multiplicar era sobre a quantidade de torneiras. Em seguida, não explicitaram os algoritmos, eles fizeram a estrutura do algoritmo da multiplicação e inseriram o resultado que obtiveram por meio da calculadora, que foi permitida para o desenvolvimento da atividade. Porém organizaram por meio da linguagem natural, cada operação que estavam realizando, deixando em destaque, o tempo em minuto, horas, dia, mês e ano. Assim, D'Amore, Pinilla e Iori (2008, p. 67) afirmam que “a aprendizagem algorítmica está relacionada com a aprendizagem comunicativa”, pois os estudantes usaram da linguagem natural para explicar a linguagem matemática.

Após a intervenção oral da professora, pedindo para representarem essas informações de uma forma mais clara, os alunos alinharam as respostas de uma forma que ainda não se configurava uma tabela, Figura 35(b), realizando uma conversão entre o registro de sistema de escrita numérica para o tabular. Somente após a segunda intervenção da professora, porém a primeira intervenção por registro escrito nesta parte da atividade (*Como você representaria essas informações para ficar mais fácil de entender para quem está lendo?*) é que os estudantes fizeram um registro tabular corretamente para representar os dados por eles calculados (Figura 35(c)), realizando um tratamento dentro do sistema de registro tabular.

Figura 35 – Quantidade de desperdício de água na escola das torneiras pingando



Fonte: Portfólio do Grupo 2

Na resolução do Grupo 2, evidenciamos a aprendizagem algorítmica, conforme a Figura 35(a). De acordo com D'Amore, Pinilla e Iori:

A gestão de algoritmos de qualquer tipo e sua organização em fatos logicamente encadeados em uma cadeia finita, em modo mecânico, para serem executados passo a passo, necessita, evidentemente, de uma gestão semiótica significativa; tudo o que é algorítmico é representado e, portanto, a semiótica é uma aprendizagem fundamental e transversal (D'Amore; Pinilla; Iori, 2015, p. 166).

Para finalizar a atividade, os estudantes deveriam responder a última pergunta do portfólio da atividade: *O quanto a escola pagaria na conta de água por esse desperdício?* Para responder a essa pergunta, a professora levou uma conta de água da sua casa (Figura 36), pois por ser uma escola estadual, o próprio governo arca com o custo da água e a escola não possui fatura, e entregou para cada grupo analisá-la. Após conversar e orientar os alunos, foi feita uma projeção para saber o valor do metro cúbico de água, dividindo o valor total da fatura (R\$

465,99) pela quantidade consumida na fatura (33 m^3) e encontraram o valor de R\$14,12 o metro cúbico da água. Esse cálculo foi obtido com o auxílio da calculadora. Essa ação da professora, em permitir o uso da calculadora, está relacionada ao fato de que, para ela, já estava evidente que o algoritmo das operações básicas já havia sido compreendido pelos alunos. Com isso, a calculadora “encurtaria” os procedimentos relacionados ao tempo para o cálculo do algoritmo da divisão com números decimais.

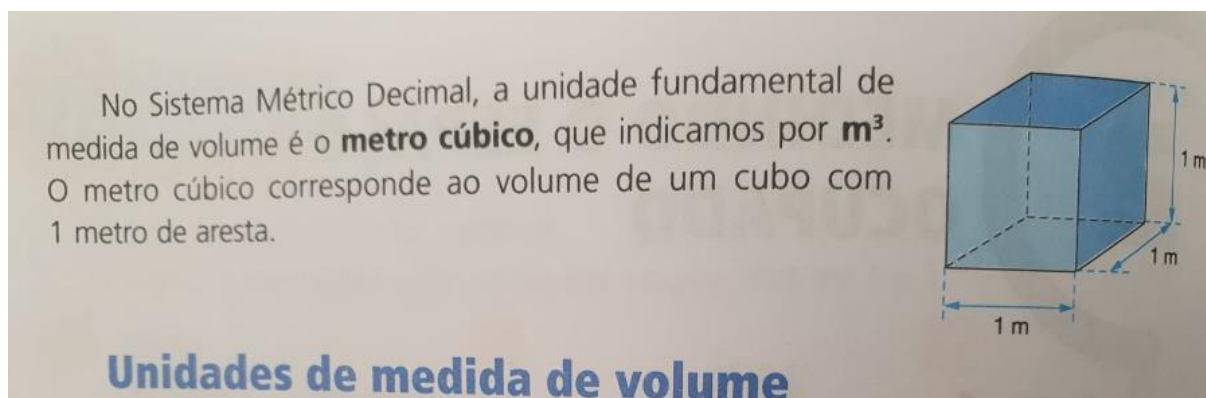
Figura 36 – Parte da Fatura da conta de água da casa da professora

HISTÓRICO DE CONSUMO/m³											
06/22 27	07/22 28	08/22 30	09/22 33	10/22 31	11/22 25	12/22 29	01/23 25	02/23 22	03/23 24	04/23 36	
DIAS DE CONSUMO		DATA LEITURA		LEITURA ANTERIOR		LEITURA ATUAL		CONSUMO/m³		REFERÊNCIA	
30		04/05/2023		620		653		33		05/2023	
MOTIVO DA AUSÊNCIA DE LEITURA				MÉDIA DE CONSUMO/m³ ÚLTIMOS 5 MESES				27		VENCIMENTO 18/05/2023	
-											
PREVISÃO PRÓXIMA LEITURA		ÁGUA		ESGOTO		SERVIÇOS		TOTAL			
03/06/2023		249,56		199,65		16,78		465,99			

Fonte: Fatura Sanepar

O momento de determinar o valor do metro cúbico que a companhia de água cobra foi uma forma da professora explicar que um metro cúbico equivale a mil litros. Para isso, fez um desenho no quadro de um cubo com 1 metro de arestas, e pediu para que abrissem o livro de Matemática na página 266 (Figura 37) para acompanhar a explicação, que aquele cubo é equivalente a uma caixa d'água que cabe mil litros de água, ou seja, tem a capacidade de 1000 l de água.

Figura 37 – Parte da página do livro didático sobre unidade de volume



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018)

A atividade de modelagem matemática permitiu abordarmos o conteúdo do currículo ou antecipá-lo de uma forma que os alunos entendessem na prática, o porquê precisavam aprender tal conteúdo. Neste caso, o conteúdo sobre unidades de medidas de volume foi antecipado para o início do segundo trimestre, pois pelo cronograma, ele era previsto para ser um dos últimos conteúdos abordados para o sexto ano, no final do terceiro trimestre.

Portanto, para chegarem ao resultado de quanto a escola pagaria na conta de água por esse desperdício, os estudantes do grupo 2, optaram por determinar o valor mensal do desperdício, e transformaram os 28.512 litros em 28,512 metros cúbicos, e só depois multiplicaram pelo valor do metro cúbico R\$ 14,12 (Figura 38). Para a resolução, optaram pela utilização da calculadora, indicando o resultado obtido. Após a intervenção da professora: *Escreva o valor por extenso*, pois ela gostaria de saber se eles haviam compreendido aquele numeral, foi que os alunos responderam em linguagem natural o valor obtido, fazendo uma conversão entre os registros, do sistema de escrita numérica para a língua natural.

Figura 38 – Resolução sobre o valor do desperdício na A2

O quanto a escola pagaria na conta de água por esse desperdício? Mas antes de pesquisar o valor da tarifa de água.

Refaca este cálculo

$$1\text{m}^3 = 1000\text{ l}, 28512\text{ l} = 28,512\text{ m}^3$$

$$\begin{array}{r} 28,512 \\ \times 14,12 \\ \hline 405,58944 \end{array}$$

R: A escola pagara este valor mensal.

Escreva o valor por extenso.

Quatrocentos e dois reais e cinquenta e oito centavos.

1ª intervenção

Conversão

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Na aprendizagem estratégica, “procura-se potencializar e dar importância a procedimentos e estratégias que são utilizadas quando se resolve um problema” (D’Amore, Pinilla; Iori; 2015, p. 167). Nesta etapa da atividade, os alunos teriam que ser capazes de solucionar a problemática inicial, e evidenciou-se a aprendizagem estratégica, que está

vinculada a ação, uma vez que na solução utilizaram tanto a linguagem matemática quanto a natural para responder ao questionamento.

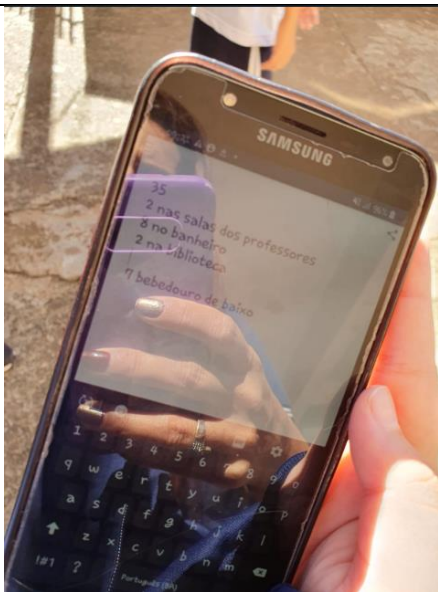
No Quadro 13, apresentamos uma síntese das aprendizagens conceitual, algorítmica, estratégica e comunicativa, juntamente com as fases da Modelagem Matemática, com os registros escritos feitos pelos alunos e por fotos durante o desenvolvimento da atividade.

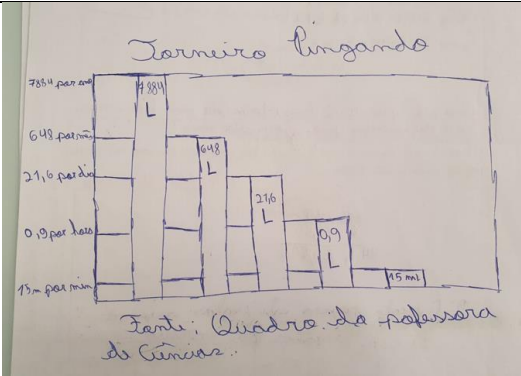
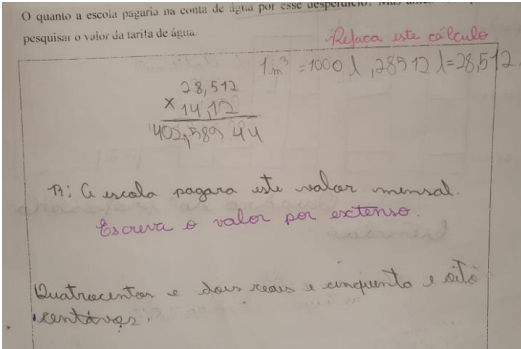
Ainda neste quadro, fizemos uma separação para evidenciar as aprendizagens mais destacadas em cada registro dos alunos, no entanto, entendemos que não são exclusivas apenas para um tipo de aprendizagem. Um exemplo é a relação da aprendizagem estratégica com a comunicativa, ou seja, ao realizarem a coleta de dados pela escola fazendo a vistoria e registrando os dados, estavam relacionando essas duas aprendizagens, no entanto, no nosso entendimento, a aprendizagem estratégica ficou mais evidenciada. Outra relação entre as aprendizagens que evidenciamos foi a aprendizagem conceitual, estratégica e algorítmica, pois ao solucionarem o problema da atividade, precisaram agir de forma estratégica e também precisaram utilizar de conceitos já adquiridos no decorrer das atividades, como na construção de um gráfico de colunas, e também precisaram utilizar algoritmos para chegarem à solução.

Enfim, essas aprendizagens acontecem em todo o tempo e temos ainda a aprendizagem semiótica que nos permite inferir sobre o uso dos diferentes registros de representação e o modo como os alunos fazem tratamentos e conversões ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Fizemos uma relação entre as fases de Modelagem Matemática segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013) e as aprendizagens de acordo com Pinilla (2010). Sabemos e reiteramos que as aprendizagens não são vistas separadamente, porém, podemos analisar mais especificamente um tipo de aprendizagem que se destaca em cada fase da Modelagem Matemática.

Quadro 13 – Componentes da aprendizagem e as fases da modelagem presentes nas ações dos alunos na Atividade 2: Água

Componentes da Aprendizagem	Ações dos alunos	Fases da Modelagem	Registros dos alunos
Aprendizagem Conceitual	Organização dos dados em tabela e gráficos. Foi necessária uma busca pela internet sobre os tipos de gráficos.	Matematização	
Aprendizagem Algorítmica	Resoluções dos cálculos para responder alguns questionamentos presentes no portfólio. Em alguns cálculos utilizaram a calculadora.	Resolução	
Aprendizagem Estratégica	Coleta de dados: fizeram uma vistoria pelo colégio contando a quantidade total de torneiras existentes. Utilizaram o bloco de notas do celular para irem anotando a quantidade de torneiras.	Inteiração	

	Análise dos resultados obtidos e do gráfico construído.	Interpretação de Resultados	
	Valores calculados pelos alunos sobre o desperdício, correspondiam aos valores do metro cúbico de água cobrado pela companhia de água.	Validação	
Aprendizagem Comunicativa	Discussão em sala sobre a temática e registro no portfólio dos alunos sobre os dados apresentados no cartaz.	Inteiração	

No Quadro 13, fizemos uma síntese das aprendizagens conceitual, algorítmica, estratégica e comunicativa com os registros feitos pelos alunos e por fotos durante a realização da atividade e entendemos que as aprendizagens não são únicas e nem exclusivas para cada divisão. As aprendizagens se relacionam e estão presentes várias vezes no decorrer da atividade, bem como, nos permitiu evidenciar a aprendizagem semiótica por meio das conversões e tratamentos que os alunos fizeram, a partir das intervenções da professora nos portfólios dos alunos.

4.1.3 ATIVIDADE 3: ENERGIA ELÉTRICA

A atividade com a temática “Energia Elétrica” foi a terceira a ser desenvolvida com os alunos, durante 3 horas-aula do segundo trimestre, nos dias 23 de maio, 02 de junho e 05 de junho de 2023. O Quadro 14 apresenta a data das aulas, as abordagens realizadas e o ambiente em que se deu o encaminhamento.

Quadro 14: Organização das aulas para a atividade Energia Elétrica

Aula	Data	Abordagens	Ambiente
1	23/05/2023	Inteiração do tema por meio da leitura do livro didático e explicações sobre os tipos de relógio de luz.	Sala de aula
Extraclasse	25 a 01/06/2023	Coleta de dados feita pelos alunos em suas casas, coletando diariamente durante 8 dias, o KWH do relógio de luz.	Nas residências
2	02/06/2023	Análise e registro dos dados coletados do relógio de luz de suas residências com a finalidade de responder uma parte da situação-problema da atividade: <i>Quanto de Quilowatt hora foi consumido diariamente em sua residência durante a semana pesquisada?</i>	Sala de aula
3	05/06/2023	Análise dos dados por meio dos questionamentos do portfólio a fim de que fizessem projeções a respeito de <i>“Quanto de energia elétrica consumimos?”</i>	Sala de aula

Fonte: a autora (2023)

A motivação partiu do Livro didático “A Conquista da Matemática” do 6º ano do Ensino Fundamental, por meio de um texto intitulado “Por dentro da energia elétrica” que explicava sobre as hidrelétricas, o consumo de energia elétrica e a leitura do relógio de luz. A partir dessa temática, a professora lembrou que já havia trabalhado no ano anterior uma atividade de modelagem matemática com essa mesma temática em outra turma, e resolveu propô-la para esses alunos por se tratar de um assunto de interesse comum, visto que estamos numa época de crise financeira e que o consumo de energia elétrica nas residências atinge

diretamente o planejamento financeiro da maioria das famílias brasileiras. Com isso, o problema da atividade era: *Quanto de energia elétrica consumimos?*

Os encaminhamentos da atividade seguiram as fases da Modelagem Matemática de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2013), conforme o Quadro 15.

Quadro 15: Organização das aulas e as fases da Modelagem Matemática na A3

Aula	Ações na atividade	Fases da Modelagem Matemática
1	Problemática: Quanto consumimos de Energia?	Situação inicial
1	- Leitura do texto do livro didático. - Discussão em sala sobre a temática. - Vídeo Explicativo sobre a leitura dos medidores de luz existentes.	Inteiração
2	- Coleta de dados durante uma semana. - Organização dos dados em tabela e gráficos.	Matematização
2	- Resoluções dos cálculos para chegar a um valor sobre o consumo diário e mensal em quilowatt hora e em reais.	Resolução
3	- Análise dos resultados obtidos e do gráfico construído.	Interpretação de resultados
3	- Valores calculados pelos alunos foram próximos ao valor da fatura da conta de energia elétrica das residências em que foram feitas a coleta.	Validação

Fonte: a autora (2023)

A atividade se iniciou no dia 23 de maio, com a leitura do texto pelos alunos reunidos em sala de aula, conduzida pela professora. O texto subsidiou uma discussão sobre consumo consciente de energia elétrica, o que fez com que os alunos se interessassem em pesquisar sobre o quanto de energia elétrica é consumida em suas casas. Em termos da atividade de modelagem e por meio dessa ação, “esta etapa representa um primeiro contato com uma situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação” (Almeida; Silva, 2014, p. 4).

Alguns questionamentos foram feitos pela professora após o momento da leitura do texto, como: Vocês sabem qual a unidade de medida da energia elétrica? Onde fica o medidor de energia elétrica na sua casa? Como faria para saber quanto de quilowatt hora (kWh) uma casa consome por dia?

Diante desses questionamentos, a turma foi respondendo e se envolvendo com a temática e a professora propôs aos alunos que fizessem a autoleitura do medidor de energia elétrica (relógio de luz) diariamente de suas residências, durante oito dias. Para orientar nesse procedimento, a professora mostrou um vídeo explicativo (Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=muzx-E6a3Do>. Acesso em: 23 maio 2023) sobre como fazer a autoleitura e os três medidores existentes: o de ponteiro, o ciclométrico e o digital, conforme a Figura 39.

As abordagens da professora corroboraram para a inteiração que “requer que alguns aspectos já sejam conhecidos e é justamente esta a função da inteiração: tornar alguns aspectos conhecidos” (Almeida; Silva, 2014, p. 4).

Figura 39: Momento em que os alunos assistiam o vídeo explicativo sobre a leitura do relógio de luz



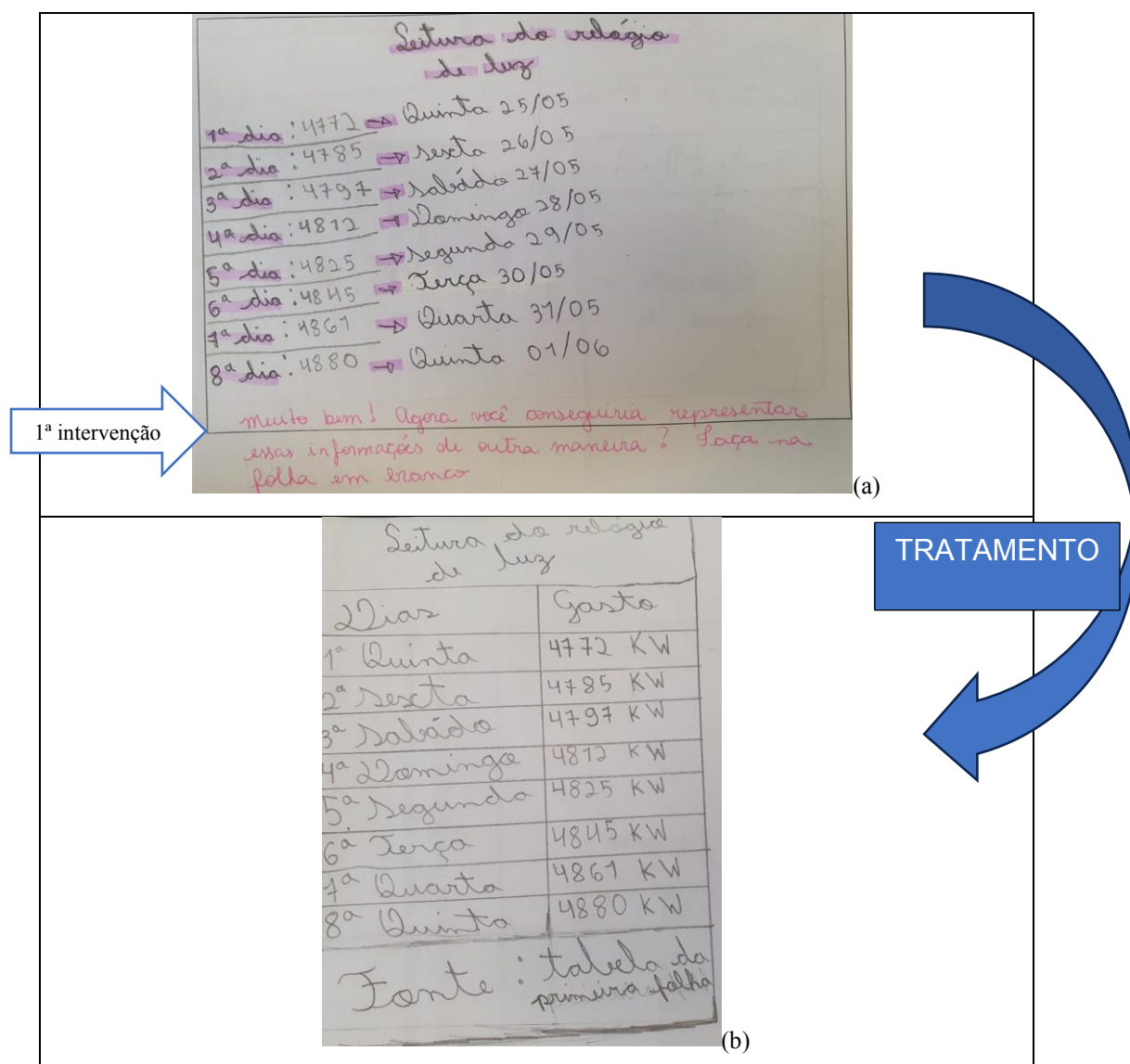
Fonte: Da autora (2023)

Durante a semana da autoleitura, a professora lembrava por meio do grupo de WhatsApp da turma, todos os dias, no mesmo horário, para eles fazerem a leitura do relógio de luz. Após uma semana de autoleitura, os alunos trouxeram os valores de suas medições para a sala de aula onde a professora questionou o que seriam aqueles valores, pois trouxeram os valores que estavam indicados no relógio. A partir dessa abordagem, a professora, utilizando os dados de um dos alunos, perguntou: Esse valor do primeiro dia de 4772 kWh é o valor consumido durante a quinta-feira? Ficou um silêncio e a professora continuou: E o valor de 4785 kWh do segundo dia? O que significa? Então um dos alunos, respondeu que para saber o valor de um dia teria que subtrair o valor do dia seguinte pelo valor do dia anterior. A coleta de dados, e os questionamentos da professora durante a aula, caracterizam a fase da Modelagem Matemática, denominada de matematização, “considerando estes processos de transição de linguagens, de visualização de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas” (Almeida; Silva, 2014, p. 5).

Como em todos os grupos tinha pelo menos um integrante que conseguiu coletar os dados durante todos os dias, a professora orientou para todos os integrantes do mesmo grupo, trabalhar com os dados que foi coletado durante os oito dias, de modo que em cada grupo trabalhou-se com os dados pesquisados por um dos integrantes.

Com os dados pesquisados, a professora entregou a folha de atividades (Apêndice E) que pertence ao portfólio dos alunos, orientando-os para registrarem os dados coletados. No portfólio, o Grupo 2 apresentou os dados organizados de uma forma que não era exatamente uma tabela e a professora fez uma 1ª intervenção: *Você conseguiria representar essas informações de outra maneira?* Os alunos, após essa intervenção apresentaram os dados fazendo um tratamento para o registro tabular, conforme mostra a Figura 40. Note que na Figura 40(a) os registros estavam bem organizados como se fosse em uma tabela, havia título, porém não havia separação das linhas e das colunas e não havia a fonte. A partir da intervenção da professora, o Grupo 2 percebeu que podia melhorar a apresentação dos dados por meio de uma tabela (Figura 40(b)).

Percebemos que houve menos intervenção neste momento da atividade que foi a de organização dos dados, do que nas atividades 1 e 2. Assim, conjecturamos que os alunos adquiriram conceitos sobre a construção de tabelas e gráficos.

Figura 40: Registros da Leitura do relógio de luz na A3

Fonte: Portfólio do Grupo 2

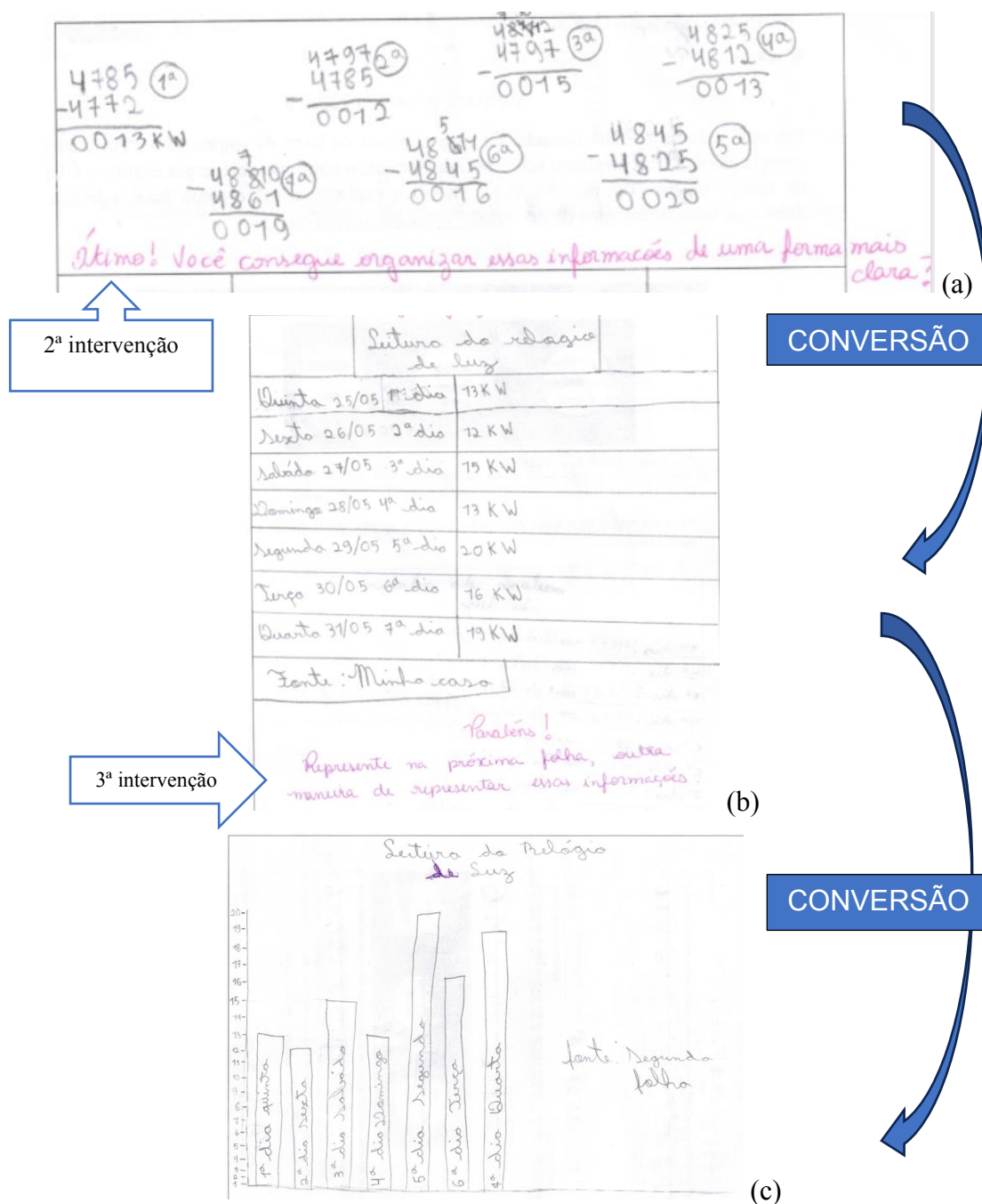
Com os dados coletados e os registros organizados na tabela, a professora fez o seguinte questionamento: *Você consegue descobrir quanto de Quilowatt hora foi consumido diariamente em sua residência durante a semana pesquisada?* Nesse momento os alunos fizeram cálculos utilizando o algoritmo da subtração dos dias pesquisados, sendo que eles subtraíam o kilowatt hora do dia posterior pelo dia anterior, calculando assim o kilowatt hora diário, conforme ilustra a Figura 41(a).

Após a professora verificar se os alunos fizeram corretamente os cálculos, fez uma nova intervenção: *Ótimo! Você consegue organizar essas informações de uma forma mais clara?* Com essa segunda intervenção no portfólio do grupo 2, a professora pretendia que eles organizassem essas informações em uma tabela e assim o fizeram, pois já estavam na terceira

atividade que utilizavam o registro tabular para representar as informações, conforme mostra a Figura 41(b), realizando uma conversão do registro numérico para o registro tabular.

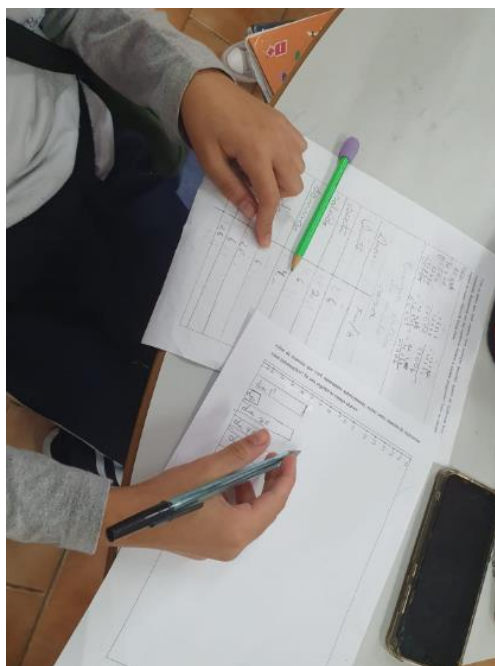
Novamente, após os alunos terem feito a conversão dos sistemas de registro numérico para a tabela, a professora fez uma terceira intervenção: *Represente na próxima folha, outra maneira de representar essas informações.* Após essa intervenção, os alunos do grupo 2, fizeram uma nova conversão do registro tabular para o registro gráfico, Figuras 41(c) e 42.

Figura 41: Continuação dos Registros da Leitura do relógio de luz na A3



Fonte: Portfólio do Grupo 2

Figura 42: Momento que a estudante faz a conversão



Fonte: a autora (2023)

Segundo Almeida e Silva (2014, p. 5), esta fase da modelagem caracteriza-se pela Resolução pois consiste “na construção de um modelo matemático, com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos seus aspectos relevantes, responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado nessa situação”.

Por meio dos registros dos alunos da Figura 41 e 42, podemos evidenciar a construção de conceitos. “Um conceito é considerado construído quando o estudante tem condição de identificar propriedades do conceito, de representá-lo, de transformar tal representação, de utilizá-la de maneira adequada” (D’Amore; Pinila; Iori, 2015, p. 165). Assim, a aprendizagem conceitual foi evidenciada quando os alunos fizeram as autoleituras diariamente, registraram de forma organizada, fizeram um tratamento ao construir a tabela e aprenderam conceitos sobre a unidade de medida do consumo da energia elétrica, o quilowat. Diante do registro apresentado na Figura 41(a), evidencia-se mais uma vez a aprendizagem algorítmica, além da aprendizagem estratégica, pois por meio da realização dos cálculos, nos registros dos alunos podemos visualizar estratégias que eles consideraram importantes para constar na construção de uma tabela e de um gráfico.

Na Figura 41 pudemos identificar três tipos de representações semióticas: Sistema de escrita numérica, tabular e gráfico. Duval (2003, p. 6) aponta que:

é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos Registros de Representação Semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua

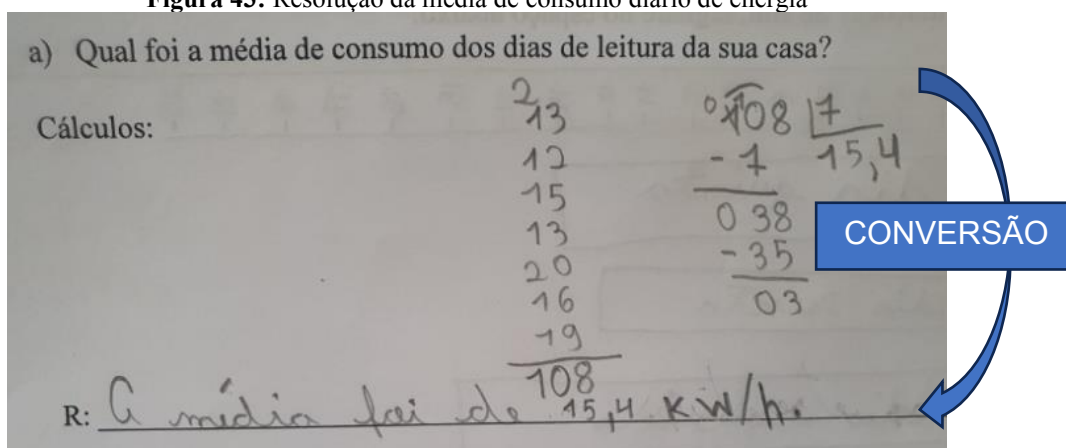
natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro.

Considerando a Figura 41, pudemos evidenciar aprendizagem conceitual e algorítmica. Como já citado anteriormente, a aprendizagem conceitual se evidencia quando os alunos fizeram a construção da tabela e dos gráficos. Já a aprendizagem algorítmica é salientada na Figura 41(a) quando os alunos fazem os cálculos, utilizando o algoritmo da subtração, para obter o valor diário de energia elétrica consumida na residência em análise.

Após a construção da tabela e do gráfico, a professora levantou algumas situações-problema para que os alunos respondessem, analisando os dados coletados de modo que os alunos calcularam a média do consumo dos dias em que fizeram a leitura; fizeram uma estimativa de quanto se gasta por mês; calcularam qual o consumo de kWh por pessoa e também fizeram uma projeção do valor em reais da conta de luz mensal e por pessoa da residência em que fizeram a coleta de dados.

Para o cálculo da média de consumo dos dias de leitura da sua casa, a professora evidenciou que alguns alunos já sabiam como fazer média, e outros ainda não. Nesse momento, a professora explicou brevemente esse conteúdo na lousa, fazendo um exemplo de como se calcular a média aritmética, adiantando o conteúdo curricular presente na matriz curricular do 7º ano. Então, os alunos já fizeram os cálculos, conseguindo chegar à solução de que a média é de 15,4 kw/h diário no Grupo 2. (Figura 43).

Figura 43: Resolução da média de consumo diário de energia



Fonte: Portfólio do Grupo 2

Para o Grupo 2 chegar à resposta foram utilizados registros de sistema de escrita numérica e uma conversão na linguagem natural (*A média foi de 15,4 kw/h*). Duval (2009)

destaca que o uso de representações semióticas é externo e consciente, assim ao transformar o registro numérico em linguagem natural, podemos evidenciar que o aluno ao utilizar dois tipos de representações, entendeu a situação e sobre o que foi solicitado. Além disso, conforme salientam D'Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 112) “cada representação semiótica veicula somente alguns dos aspectos conceituais que são componentes do objeto considerado”.

Para responder sobre a estimativa de quanto Quilowatt gasta por mês na sua casa (462 kw/h), novamente os alunos fizeram nova conversão do sistema de registro de escrita numérica por meio do algoritmo da multiplicação, em que consideraram por hipótese, que o gasto seria os mesmos para os 30 dias do mês, para responder a pergunta na linguagem natural (Figura 44).

Figura 44: Resolução da quantidade mensal de Quilowatt

b) Com base na média, faça uma estimativa de quanto Quilowatt gasta por mês na sua casa.

Cálculos:

$$\begin{array}{r} 15,4 \\ \times 30 \\ \hline 462 \end{array}$$

Gasta 462 quilowatt por mês

CONVERSÃO

The image shows a student's handwritten work on a math problem. The problem asks for an estimate of electricity consumption in kilowatts per month based on an average. The student has written a multiplication problem: 15,4 multiplied by 30, resulting in 462. Below the calculation, the student has written 'Gasta 462 quilowatt por mês'. A blue box with the word 'CONVERSÃO' and a curved arrow points from the calculation to the final answer, indicating the conversion from numerical representation to natural language.

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Outros questionamentos no portfólio dos alunos foram a respeito do valor da conta de energia elétrica mensal supondo que o valor de KW/h fosse de R\$ 0,85 (dados da Copel em 20/04/2023) e sobre o valor por pessoa de energia elétrica em Kw/h. Os alunos do Grupo 2, optaram em realizar o cálculo por meio da calculadora e apenas informaram sobre o algoritmo da multiplicação com a resposta (R\$392,70 e R\$78,40). Ao informar a resposta, houve um tratamento dos sistemas de registros, pois ao responder, o Grupo 2 informou o valor, antecedendo pelo símbolo do Real (R\$) e colocou o “zero”, representando corretamente o sistema de numeração decimal nos centavos dos reais (Figura 45(a)). O tratamento de uma representação consiste na transformação desta representação em outra pertencente ao mesmo registro de partida. O tratamento é, portanto, uma transformação interna a um registro. Segundo Duval:

Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações;

completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria (Duval, 2004, p. 16).

Na figura 45(b) houve uma conversão de registro, pois ao responderem os alunos fizeram uma transformação da linguagem numérica para a linguagem natural.

Figura 45: Resolução do valor mensal e por pessoa da conta de luz

c) Supondo que o valor de Kw/h seja de R\$ 0,85. Calcule o valor da conta de luz mensal da residência pesquisada.

Cálculos:

$$462 \times 0,85 = 392,7$$

R: R\$ 392,70.

(a)

d) Faça uma projeção de quanto cada pessoa dessa casa gasta por mês de energia elétrica.

Cálculos:

$$392,7 \div 5 = 78,4$$

R: Cada pessoa gasta 78,40 Kw/h.

(b)

TRATAMENTO

CONVERSÃO

Fonte: Portfólio do Grupo 2

No Quadro 16, ao chegar no valor das projeções, em reais, calculados para o mês, os alunos fizeram uma comparação com o valor da fatura da conta de energia de sua residência e o valor calculado chegou bem próximo ao valor da fatura. Para tanto, os alunos fizeram alguns cálculos, utilizando algoritmos da adição, multiplicação e divisão envolvendo números decimais que ainda não tinham muita familiaridade, uma vez que iriam ainda aprender esse conteúdo: Cálculos com decimais, no próximo trimestre. A professora aproveitou o momento para adiantar esse conteúdo de forma breve e propôs, aos alunos, a utilização da calculadora para os auxiliarem, quando achassem necessário.

Quadro 16: Valor por pessoa que se paga de energia elétrica

Média do Consumo Diário (Kwh)	Consumo Mensal (Kwh)	Valor da Conta de Luz mensal Valor do Kw/h = R\$0,85 R\$	Valor da conta de luz por pessoa R\$
15,4	462	392,70	78,40

Fonte: Portfólio do Grupo 2

De acordo com esses registros dos alunos, podemos evidenciar as últimas fases da Modelagem Matemática, que é a Interpretação de resultados e a validação. Conforme Almeida e Silva, 2014, p. 5

a interpretação dos resultados indicados pelo modelo implica na análise de uma resposta para o problema. A análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica em uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação.

Nos registros dos alunos das Figuras 43, 44 e 45 podemos visualizar a aprendizagem algorítmica, estratégica e comunicativa. Pudemos visualizar aprendizagem de novos conceitos, como o cálculo da média aritmética na Figura 43 e o algoritmo da multiplicação na Figura 44, evidenciando a aprendizagem conceitual e algorítmica. A aprendizagem estratégica foi evidenciada pois fizeram estimativas e projeções de consumo e de valores de energia elétrica ao responderem os questionamentos contidos na folha para a atividade. A aprendizagem comunicativa se evidenciou também, além dos alunos se comunicarem entre si e com a professora no decorrer de toda a atividade de modelagem matemática, ao responderem os questionamentos da atividade, na linguagem natural, conseguiram comunicar-se de forma clara e objetiva, respondendo corretamente ao questionamento. Na figura 45, a aprendizagem estratégica se evidenciou quando os alunos utilizaram a calculadora, de maneira autônoma, para auxiliar no processo do cálculo, anotando apenas o algoritmo e o resultado. O aluno precisa desenvolver habilidades exclusivas da “capacidade de raciocinar antes de executar cálculos, que permitam decidir quais cálculos fazer, que eliminem cálculos desnecessários” (D’Amore; Pinilla; Iori, 2015, p. 166). Sendo assim, o aluno pode fazer o uso de instrumentos que os auxiliem, de modo que possa decidir o mais eficaz para resolução, como por exemplo o uso de computadores, calculadores, cálculos mentais ou manuais.

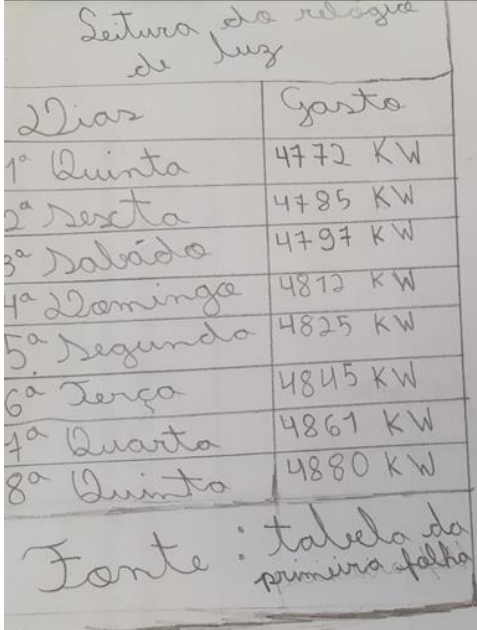
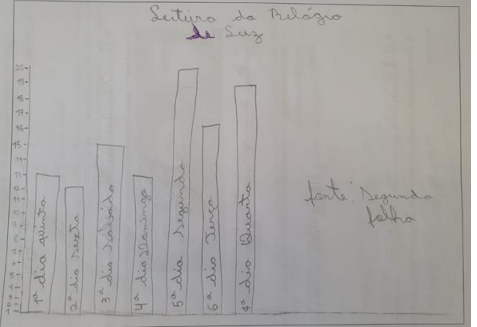
Por meio dos registros escritos realizados pelos alunos e de suas ações, pudemos evidenciar as aprendizagens conceitual, algorítmica, estratégica e comunicativa no decorrer de toda a atividade que, segundo Pinilla (2010), não são independentes e que o resultado positivo da aprendizagem é consequência da interação dos diferentes componentes. Também nesse caso, a aprendizagem semiótica foi transversal às demais aprendizagens, pois em todos os momentos os estudantes utilizaram-se de registros semióticos para expressar-se, várias vezes, fizeram um tratamento ou uma conversão de uma representação e foram devidamente interpretadas.

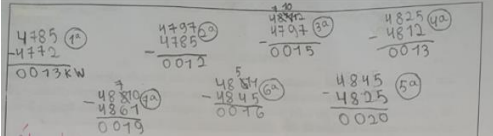
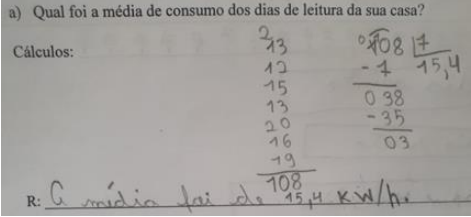
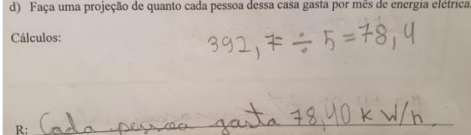
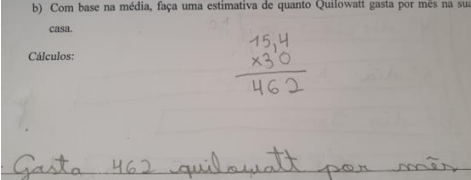
No Quadro 17, apresentamos uma síntese das aprendizagens conceitual, algorítmica, estratégica e comunicativa, com as fases da Modelagem Matemática, com os registros escritos feitos pelos alunos e por fotos durante o desenvolvimento da atividade.

Ainda neste quadro, fizemos uma separação para evidenciar as aprendizagens mais evidentes em cada registro dos alunos, no entanto, entendemos que não são exclusivas apenas para um tipo de aprendizagem. Um exemplo é quando os alunos resolvem os algoritmos das quatro operações e evidenciamos que a aprendizagem algorítmica se fez mais presente, porém por trás do processo de resolução, temos aprendizagem conceitual, pois estão utilizando os conceitos próprios de como resolver cada tipo diferente de operação, também estão desenvolvendo a aprendizagem estratégica, pois eles resolvem as operações com a finalidade de chegar a uma resposta para a situação inicial e, por fim, a aprendizagem comunicativa é evidenciada, pois em todo o tempo estão comunicando entre si e também questionando uns aos outros e a professora.

Enfim, essas aprendizagens acontecem em todo o tempo e temos ainda a aprendizagem semiótica que nos permite inferir sobre o uso dos diferentes registros de representação e o modo como os alunos fazem tratamentos e conversões no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Quadro 17 – Componentes da aprendizagem presentes nas ações dos alunos e as fases da Modelagem Matemática na Atividade Energia Elétrica

Componentes da Aprendizagem	Ações dos alunos	Fases da Modelagem Matemática	Registros dos alunos
Aprendizagem Conceitual	Leitura do texto do livro didático “Por dentro da energia elétrica”.	Inteiração	PARA QUEM QUEER MAIS Resoluções na p. 292 Por dentro da energia elétrica O fato de o Brasil ter um grande número de rios favorece a instalação de usinas hidrelétricas para a geração de energia. Para transformar a força das águas em energia elétrica, a água represada passa por dutos forçados e gira a turbina que, por estar interligada ao eixo do gerador, faz com que este entre em movimento, gerando a eletricidade. O consumo de energia elétrica depende da potência do aparelho utilizado e do tempo de utilização. Os aparelhos elétricos possuem diferentes potências, consumindo mais ou menos energia. Essa potência é expressa em watts (W) e deve estar mencionada na placa de identificação afixada no próprio aparelho. O medidor de energia elétrica (relógio de luz) registra o consumo de eletricidade das residências. O consumo do mês é calculado com base na diferença entre a leitura obtida no mês em curso e a do mês anterior. O relógio de luz de ponteiros é composto de quatro relógios pequenos. Os ponteiros giram sempre no sentido crescente dos números, ou seja, do menor para o maior. Dos quatro relógios pequenos, dois giram no sentido horário e dois, no sentido anti-horário. O primeiro relógio, a partir da esquerda, marca o número que se refere à unidade de milhar, o segundo se refere à centena, o terceiro, à dezena, e o quarto, à unidade simples. Para fazer a leitura, comece pelo relógio da direita. 
	Discussão em sala sobre a temática.		
	Construção de tabelas e gráficos e identificação de seus elementos.	Matematização	 Fonte: tabela da primeira folha
		Matematização	 Fonte: segunda folha

Aprendizagem Algorítmica	Resolução de operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.	Resolução	
Aprendizagem Estratégica	Coleta de dados. Os processos de resolução de problemas até chegar a resposta da situação inicial: <i>Qual o valor de energia elétrica gasta por pessoa na residência pesquisada?</i>	Inteiração Resolução e interpretação de resultados	a) Qual foi a média de consumo dos dias de leitura da sua casa? Cálculos:  R: A média foi de 15,4 kW/h. d) Faça uma projeção de quanto cada pessoa dessa casa gasta por mês de energia elétrica. Cálculos:  R: Cada pessoa gasta 1963,5 kW/h.
Aprendizagem Comunicativa	Vídeo explicativo sobre como fazer a leitura nos diferentes tipos de relógio de energia elétrica. Cada grupo de alunos comunicaram-se durante o desenvolvimento da atividade e ao responderem os questionamentos e <i>feedbacks</i> da folha de atividades.	Inteiração Resolução e interpretação de resultados	 b) Com base na média, faça uma estimativa de quanto Quilowatt gasta por mês na sua casa. Cálculos:  Gasta 462 quilowatt por mês.

	Valores calculados pelos alunos foram próximos ao valor da fatura da conta de energia elétrica das residências em que foram feitas a coleta.	Validação	
--	--	-----------	--

Fonte: Da autora (2023)

Por meio da atividade de modelagem matemática Energia Elétrica, os alunos se inteiraram do assunto fazendo a leitura do texto do livro didático e do vídeo explicativo sobre como fazer a leitura dos diferentes tipos de relógio de energia elétrica, coletaram dados durante uma semana, matematizaram, resolveram, interpretaram os resultados e validaram-nos ao compararem os resultados obtidos com o valor da fatura mensal da conta de energia elétrica.

4.1.4 ATIVIDADE 4: COMPETIÇÃO DE CARRINHOS

A atividade com a temática “Competição de carrinhos” foi a quarta atividade a ser desenvolvida com os alunos, durante 3 horas-aula do segundo trimestre de 2023, nos dias 28 e 31 de julho, 07 de agosto de 2023. O Quadro 18, apresenta a data das aulas, as abordagens realizadas e o ambiente em que se deu o encaminhamento.

Quadro 18: Organização das aulas para a atividade Competição de carrinhos

Aula	Data	Abordagens	Ambiente
1	28/07/2023	Inteiração do tema por meio da escolha do carrinho mais rápido que irão utilizar para o momento da competição. Construção da pista de corrida no chão da sala de aula.	Sala de aula
2	31/07/2023	Momento da competição de carrinhos por grupo. Contagem do tempo por meio do vídeo no celular para verificar quem foi a equipe campeã.	Sala de aula
3	07/08/2023	Contagem do tempo por meio do aplicativo Tracker para verificar quem foi a equipe campeã.	Sala de aula

Fonte: a autora (2023)

O planejamento da atividade para a escolha do tema e a motivação surgiu por se tratar de uma atividade lúdica, em que o brincar ainda se faz presente para os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, visto que ainda estão no final da infância e receberam a atividade com

muito entusiasmo pois queriam saber “*Quem será a equipe campeã?*”, proporcionando um momento de descontração aliado à aprendizagem.

Segundo Bassanezi (2012, p. 16), “os professores devem valorizar o que ensinam de modo que o conhecimento seja ao mesmo tempo interessante, por ser útil, e estimulante, por ser fonte de prazer”. Entendemos que, quando a atividade é lúdica, pode promover nas crianças situações de prazer e envolvimento com o fato de brincar, tornando o aluno protagonista na construção do seu conhecimento, aguçando sua curiosidade e seu interesse.

Os encaminhamentos da atividade seguiram as fases da Modelagem Matemática de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2013), conforme o Quadro 19.

Quadro 19: Organização das aulas e as fases da Modelagem Matemática na A4

Aula	Ações na atividade	Fases da Modelagem Matemática
1	Problemática: Quem será a equipe campeã?	Situação inicial
1	Testes entre os integrantes de cada grupo para a escolha do carrinho mais rápido para o momento da competição. Construção da pista de corrida. Gravação dos vídeos durante o momento da competição.	Inteiração
2	Análise dos vídeos no celular para descobrir quem foi a equipe campeã.	Matematização
3	Análise dos vídeos no aplicativo Tracker para descobrir quem foi a equipe campeã. Resoluções dos cálculos para descobrir quem foi a equipe campeã. Organização dos dados em tabela e gráficos.	Matematização e Resolução
3	Análise dos resultados obtidos e do gráfico construído.	Interpretação de resultados
3	Valores calculados pelos alunos conseguindo identificar a equipe campeã.	Validação

Fonte: a autora (2023)

De modo a inteirar os alunos sobre a temática, a professora, um dia antes de realizar a coleta de dados, pediu para que os alunos escolhessem em suas residências o melhor carrinho que eles tivessem e o levassem na escola para uma atividade de competição de carrinhos. No próximo dia de aula, a maioria dos alunos levou carrinhos e a professora orientou-os em dividir a turma nos mesmos grupos que realizaram as atividades anteriores.

Nos grupos, os alunos testaram os carrinhos e eles tinham que escolher apenas um para o momento da competição. Após alguns momentos de teste entre eles, escolheram os carrinhos enquanto a professora com a ajuda de alguns outros alunos, fez a pista com fita crepe, dividindo

parte do chão da sala de aula, conforme a Figura 46. A introdução de atividades de modelagem matemática nas aulas, tem o desafio de “recriar na sala de aula, ambientes culturalmente distintos do contexto escolar” (Carreira; Baioa, 2018, p. 201).

Figura 46: Pista de corrida no chão da sala de aula



Fonte: a autora (2023)

Após a construção da pista, a professora trabalhou com os alunos alguns conceitos de fração, visto que a pista foi dividida em quatro partes equidistantes com a finalidade de abordar este conteúdo na atividade como $\frac{1}{2}$ (meio), $\frac{1}{4}$ (um quarto) e $\frac{3}{4}$ (três quartos), pois o estudo das frações faz parte dos conteúdos programáticos que a professora estava trabalhando em sala de aula. As atividades têm a finalidade de proporcionar a introdução, discussão e sistematização de conteúdos matemáticos. Sendo assim, a Modelagem Matemática pode ser entendida como uma alternativa pedagógica para o ensino da matemática (Almeida; Brito, 2005).

O próximo passo da atividade, na próxima aula, foi o momento da competição, conforme a Figura 47, em que os alunos, com a ajuda da professora, filmaram toda a trajetória do carrinho, desde o momento da partida até o momento da chegada do carrinho, um grupo por vez. A professora deixou claro que a equipe campeã seria a que fizesse toda a trajetória em um menor tempo possível.

Figura 47: Momento da Competição: aluno preparando o carrinho



Fonte: a autora (2023)

Nesse momento da competição, os alunos estavam produzindo dados, por experimentação. Segundo Ye et al. (2003, *apud* Almeida; Silva; Borssoi, 2021, p. 126) no “contexto educacional, a experimentação é vista como um método para a geração de conhecimento e, especialmente a partir da década de 1990, sua introdução na sala de aula vem se intensificando”.

Após o momento da competição, a professora entregou uma folha para registrarem os momentos da competição, conforme a Figura 48 e Apêndice F, que faz parte do Portfólio de atividades.

Figura 48: Atividade: Competição de carrinhos

Disciplina: Matemática Professora: Priscila de Castro Barros Greca Nome: _____ Grupo: _____ → → → → → Data: _____ 6º ano A Atividade 4: Competição de carrinhos Vocês com certeza já brincaram de carrinho de fricção, agora irão fazer uma competição de carrinhos entre as equipes da sala para ver qual equipe será a vencedora. A equipe campeã será aquela que conseguirá chegar no ponto final no tempo mais curto. Então vamos lá!! Escolham o melhor carrinho de fricção que vocês têm em casa e tragam para a escola no dia marcado para a competição.  Um de vocês deverão filmar toda a trajetória do carrinho, desde o momento da partida até o momento da chegada do carrinho. Através da filmagem e do aplicativo Tracker, analisem a trajetória do carrinho e respondam as seguintes questões: a) Represente no espaço abaixo como foi o desenho da pista. b) Qual era o tempo no vídeo no momento da largada? b) Qual era o tempo no vídeo quando o carrinho percorreu $\frac{1}{4}$ da pista? c) Qual era o tempo no vídeo quando o carrinho percorreu metade ($\frac{1}{2}$) da pista?	d) Qual era o tempo no vídeo quando o carrinho percorreu $\frac{3}{4}$ da pista? e) Qual era o tempo no vídeo quando o carrinho chegou no final da pista? f) Em quanto tempo o carrinho percorreu a pista toda? Cálculo Agora que vocês já fizeram algumas análises do carrinho do seu grupo, faça uma pesquisa em todos os grupos da sala e pergunte para eles em quanto tempo o carrinho deles demorou para percorrer a pista toda e representem essas informações de uma forma que fique clara.  Com base nos dados que você coletou, você consegue informar qual foi a equipe campeã?
--	--

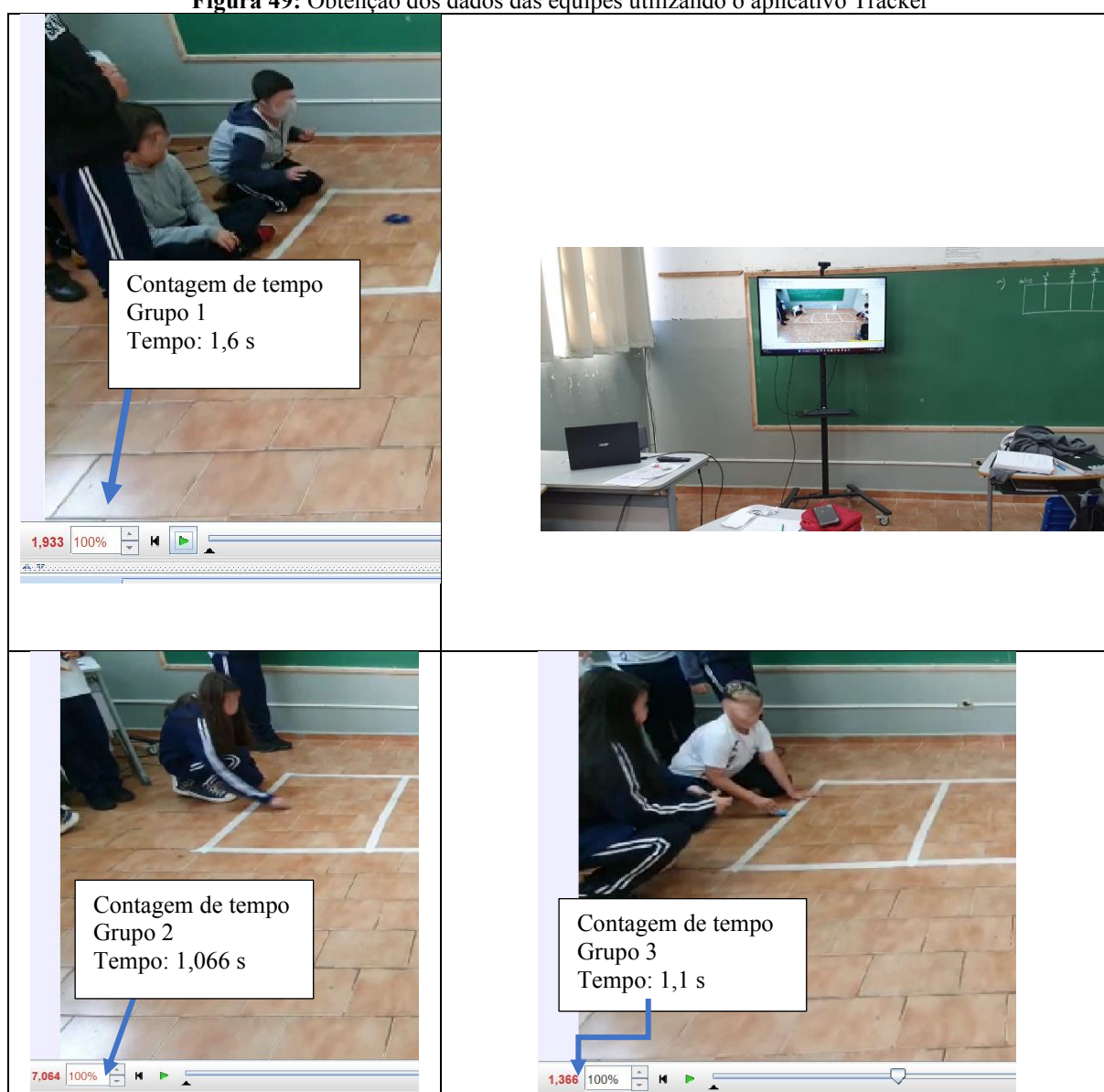
Fonte: a autora (2023)

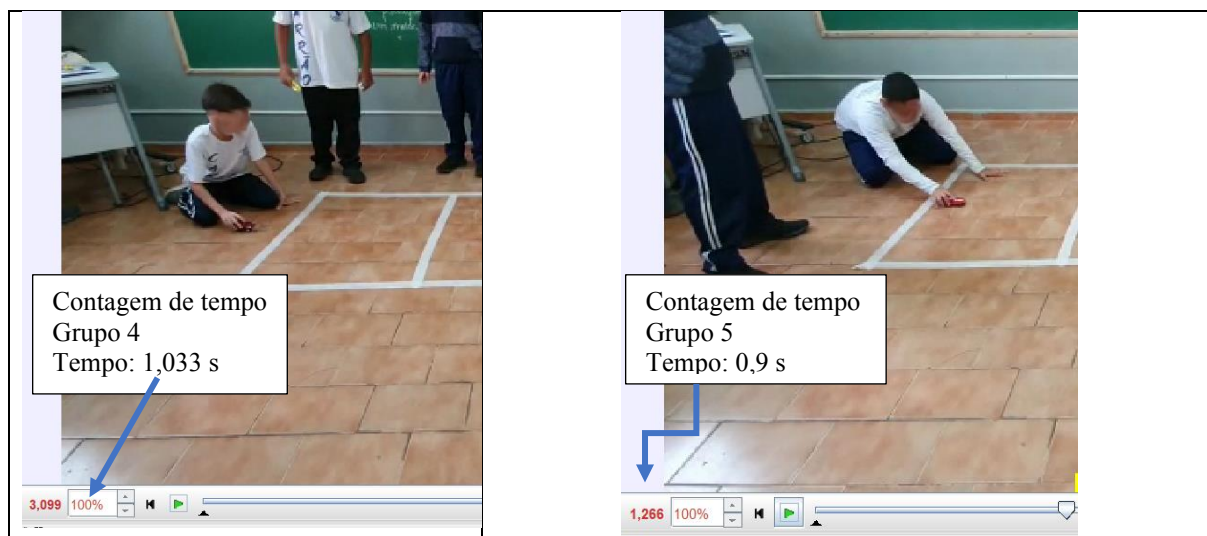
Durante esta aula, os alunos, em grupos, analisaram o vídeo de sua equipe, para poder responder as primeiras perguntas: Qual era o tempo do vídeo no momento da largada? Qual era o tempo no vídeo quando o carrinho percorreu $\frac{1}{4}$ da pista? $\frac{1}{2}$ da pista, $\frac{3}{4}$ da pista e o tempo em que chegou no final da pista? E em quanto tempo o carrinho percorreu a pista toda? Diante desses questionamentos, os alunos tiveram dificuldade em apresentar as respostas, analisando somente o vídeo nos telefones celulares, pois como era uma pista curta, os tempos da trajetória

toda variavam entre um e dois segundos, o que tornou praticamente impossível responder as perguntas e analisar qual a equipe seria a campeã.

Desse modo, na aula seguinte, a professora levou para a sala de aula o aplicativo Tracker que já estava instalado em seu computador, cujo o link do aplicativo para instalação é <https://physlets.org/tracker/>, no qual permitiu que os vídeos pudessem ser analisados em décimos, centésimos e milésimos de segundos e colocou a imagem no Kit Educatron, a fim de que a sala toda pudesse verificar e acompanhar o tempo da trajetória do carrinho de todas as equipes, conforme ilustra a Figura 49.

Figura 49: Obtenção dos dados das equipes utilizando o aplicativo Tracker





Fonte: a autora (2023)

Na literatura, existem pesquisas que articulam o uso de tecnologias ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, seja na coleta de dados relativa às situações com referência na realidade, na obtenção de uma representação matemática (modelo matemático) a partir de buscas por relações ou na obtenção de uma solução para um problema em estudo. Malheiros e Franchi (2013, p. 178) asseveram que a Modelagem Matemática

pode ser considerada um enfoque pedagógico em sinergia com as TIC, já que, ao fazer Modelagem, a partir da escolha de um tema de interesse deles, os estudantes, com computadores e outras mídias, procuram soluções para determinados problemas por eles propostos, num processo de investigação no qual o professor se configura como orientador ao longo de todo o processo.

Após as análises dos tempos no vídeo de um grupo de cada vez, os alunos obtiveram informações suficientes para responder aos questionamentos (Figura 48) a fim de identificar a equipe campeã. No Quadro 20, apresentamos os dados obtidos pelos grupos com o auxílio do aplicativo Tracker.

Quadro 20: Resultados obtidos do tempo de cada grupo

PISTA DE CORRIDA	Tempo no Vídeo (segundos)	Tempo no Vídeo (segundos)	Tempo no Vídeo (segundos)	Tempo no Vídeo (segundos)	Tempo no Vídeo (segundos)
	GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3	GRUPO 4	GRUPO 5
Momento da Largada	1,666	6,998	3,332	3,665	2,166
$\frac{1}{4}$ da Pista	2,066	7,264	3,565	3,899	2,399
$\frac{1}{2}$ da Pista	2,432	7,498	3,865	4,132	2,599
$\frac{3}{4}$ da Pista	2,799	7,764	4,132	4,398	2,832
Final da Pista	3,266	8,064	4,432	4,698	3,066

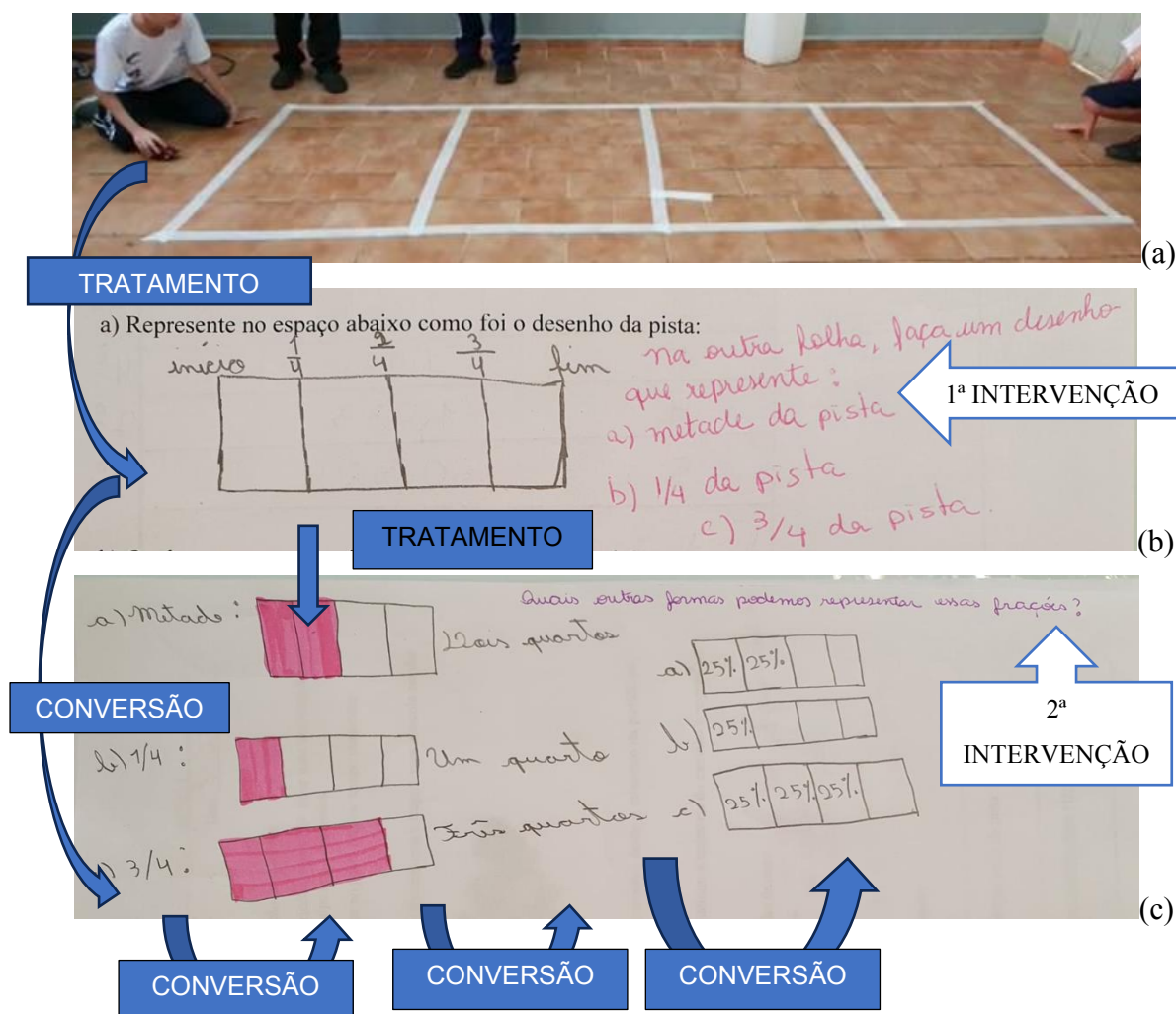
Fonte: a autora (2023)

Segundo Borssoi, Silva e Almeida (2013, p. 1), a “Modelagem Matemática como alternativa pedagógica pode se valer desses recursos digitais como uma oportunidade de promover experiências de aprendizagem em que os alunos possam aprender fazendo”. De fato, nessa atividade houve a necessidade de um recurso digital que permitisse a contagem do tempo em milésimos de segundos, em que os alunos aprenderam fazendo e com a ausência desse, a atividade não teria êxito, pois não conseguiriam identificar a equipe campeã.

Juntamente com as análises que estavam fazendo por meio do aplicativo Tracker, os alunos respondiam os questionamentos do relatório que faz parte do Portfólio, conforme a Figura 50. Ao preencherem o portfólio, quando foi solicitado para representar no espaço como foi o desenho da pista, eles fizeram um tratamento com o desenho da pista desenhada no chão da sala (Figura 50(a)) e a representação do Grupo 2, (Figura 50(b)). Trata-se, portanto de um tratamento em que o esquema construído no chão foi reproduzido por meio de uma figura bidimensional. Com a primeira intervenção da professora (*Na outra folha façam um desenho que represente: metade da pista, $\frac{1}{4}$ da pista e $\frac{3}{4}$ da pista separadamente*), os alunos fizeram outro tratamento pois continuaram no registro figural e fizeram duas conversões pois representaram a fração por meio de dois registros: linguagem natural e registro numérico. Após a segunda intervenção da professora na atividade (*Quais outras formas podemos representar essas frações?*), eles fizeram mais uma conversão pois representaram a fração por meio da porcentagem, conforme a Figura 50(c).

Essas intervenções da professora, nesta etapa da atividade, foram com o intuito de que os alunos retomassem o conteúdo Frações que estavam estudando. Dessa forma, a professora intencionava explorar se os alunos eram capazes de realizar vários registros semióticos de um mesmo objeto matemático.

Figura 50: Registros dos alunos no portfólio



Fonte: Portfólio do Grupo 2

Na Figura 50, evidenciamos dois tratamentos de registro de transformações semióticas, no registro figural e quatro tipos de conversões de registros: figural, registro numérico, linguagem natural e registro numérico, envolvendo porcentagem. Segundo Duval (2011, p. 150):

É importante, então que os alunos possam efetuar de maneira fluente a variação de conversões possíveis que são geradas e da qual eles se apropriam, como uma ferramenta intrínseca, potente e geral da análise de todas as representações semióticas para poder nelas reconhecer as unidades de sentido que a elas são matematicamente pertinentes.

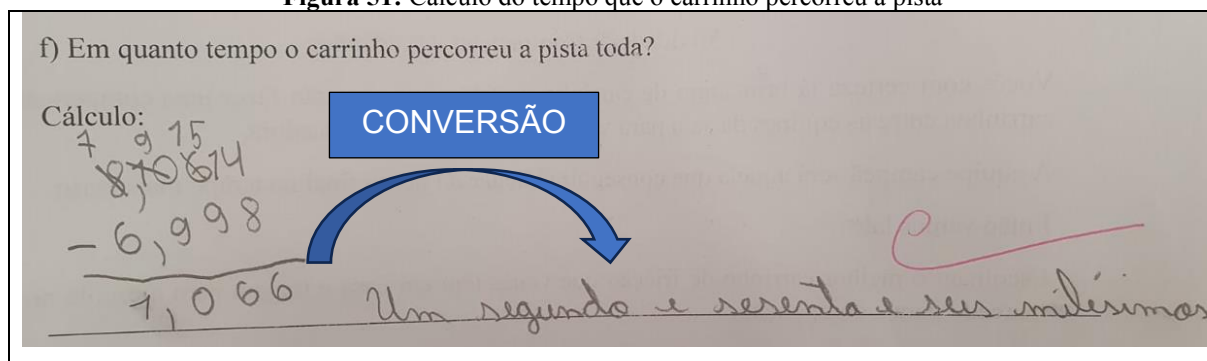
Nos registros apresentados na Figura 50, percebe-se que os alunos conseguiram expressar algumas aprendizagens como a conceitual, pois representaram com diversos sistemas de registros as frações. De acordo com Pinilla (2010, p. 38),

os objetos da matemática não existem na realidade concreta. Em matemática a única coisa que podemos fazer é escolher um registro semiótico e representar esse conceito

nesse registro determinado. O que aprendemos a lidar em matemática, portanto, não são tanto os objetos, mas as suas representações semióticas; mesmo que o objetivo principal seja a noética, ou seja, a aprendizagem conceitual.

Para fazer o cálculo do tempo que o carrinho percorreu a pista toda, o grupo 2, utilizou o algoritmo da subtração (Figura 51), note que o grupo fez uma conversão dos registros quando foram responder à pergunta, mudaram o registro, do sistema escrito numérico para o da linguagem natural, sem intervenção da professora.

Figura 51: Cálculo do tempo que o carrinho percorreu a pista



Fonte: a autora (2023)

Segundo Duval (2011, p. 149):

As produções dos alunos em matemática são produções semióticas. Elas se fazem pelo menos em dois registros, em que um deles é na modalidade oral e/ou escrita. Sua análise e sua interpretação devem, portanto, seguir a mesma regra metodológica que aquela que comanda a análise das produções matemáticas: não podemos nos concentrar em um único registro e privilegiá-lo com mais representativo que os outros, pois a compreensão se situa no nível da coordenação de pelo menos dois registros.

Também evidenciamos no registro da Figura 51, a aprendizagem algorítmica, pois por meio de uma operação aritmética, foram capazes de dar uma resposta a um questionamento da atividade. Portanto, realizar uma operação matemática, simplesmente efetuar o cálculo mecanicamente, não podemos evidenciar apenas aprendizagem algorítmica, pois ela está fortemente ligada com as demais aprendizagens. Segundo Pinilla (2010, p. 67):

A aprendizagem algorítmica, embora desempenhe um papel específico em si mesma, está estritamente ligada, à aprendizagem conceitual. Além disso, como o algoritmo é realizado para atingir determinado resultado que será utilizado em um segundo momento e não possui uma finalidade em si, a aprendizagem algorítmica está fortemente relacionada à aprendizagem estratégica. Mais ainda, dado que a explicação, de como funciona um algoritmo não é fácil, às vezes nem para quem o domina, a sua aprendizagem está relacionada com a aprendizagem comunicativa.

Os grupos compartilharam seus resultados, obtendo os tempos de todos os grupos e deviam representar essas informações da atividade no portfólio de uma forma que ficasse clara

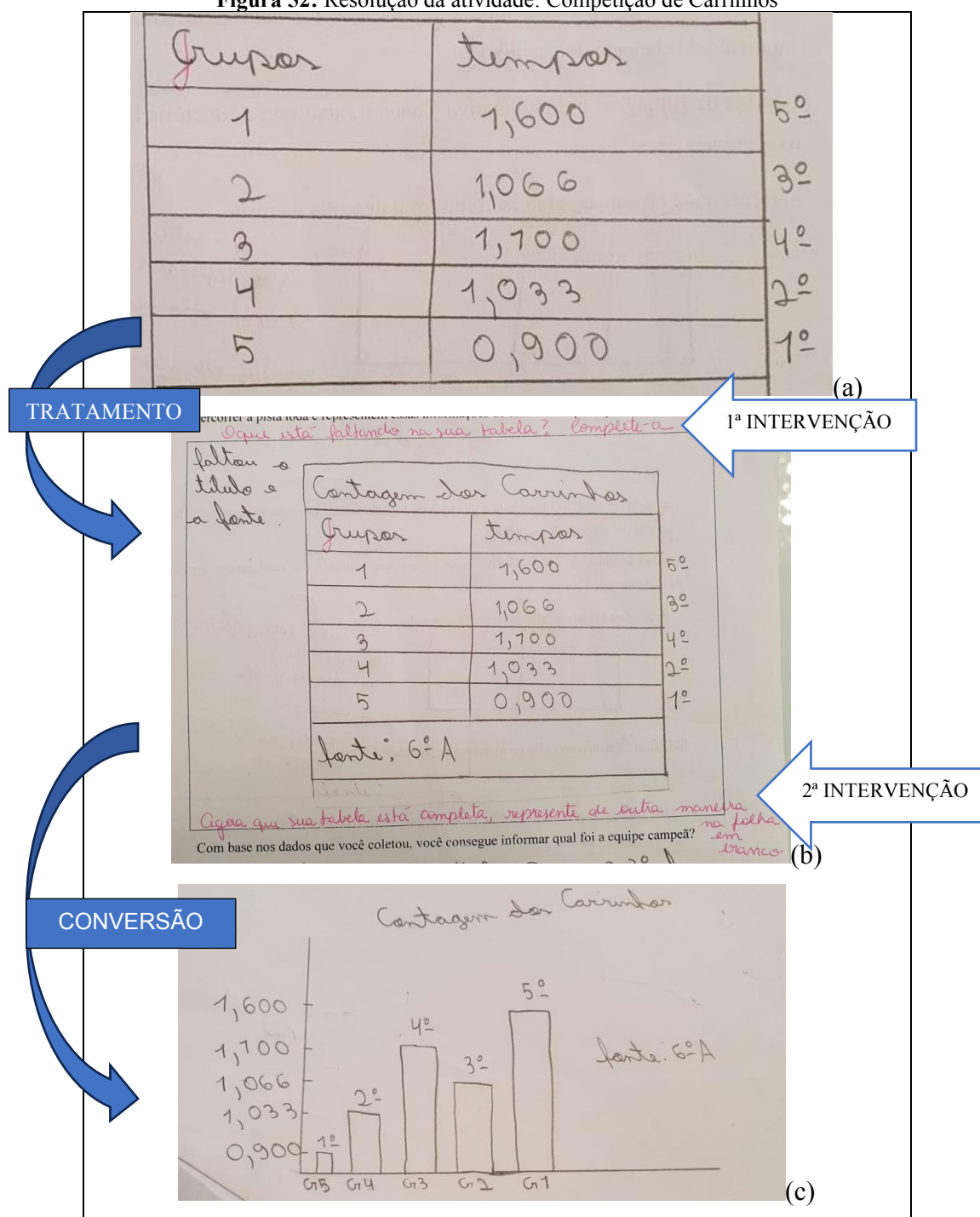
a equipe vencedora, conforme Figura 52. Nessa ação de compartilhamento de resultados, evidenciamos de forma mais expressiva a aprendizagem comunicativa, pois foi necessária a comunicação entre os grupos para colocarem na ordem crescente o tempo em que cada carrinho percorreu na pista, para descobrir a equipe campeã. Esse aspecto da aprendizagem matemática, a aprendizagem comunicativa, “busca evidenciar a capacidade de exprimir ideias matemáticas, justificando, argumentando, demonstrando e representando de maneira visual” (D’Amore; Pinilla; Iori, 2015, p. 167). O fato de perceberem que precisavam ordenar o tempo campeão, foi realçado durante a comunicação entre os estudantes e nota-se uma aprendizagem estratégica. Segundo Pinilla (2010, p. 96), “Ao resolver problema (ou ao tentar resolver um problema), o sujeito está aprendendo”. Nesta ação procurou-se dar importância a procedimentos e estratégias para que resolvessem a problemática inicial. Para Pinilla (2010, p. 94):

É sabiamente típico da atividade didática valorizar e dar importância aos procedimentos e estratégias que são colocados em ação quando um problema é resolvido. Na verdade, é preciso convencer os alunos de que o que conta é o processo e não o produto e, na atividade estratégica de resolução de problemas, isso é importante.

Nesse momento, os alunos já registraram essas informações por meio da tabela e a professora fez a primeira intervenção (*O que está faltando em sua tabela? Complete-a*), pois notou que faltavam alguns elementos. Após a intervenção, os alunos já completaram a tabela fazendo um tratamento, pois adicionaram o título e a fonte na tabela que haviam construído (Figura 52(a) e 52(b)).

Após a construção da tabela, a professora fez uma segunda intervenção: *Agora que sua tabela está completa, represente de outra maneira*. Em seguida, o grupo 2, realizou uma conversão entre os sistemas de registro tabular para o gráfico, conforme a Figura 52(c).

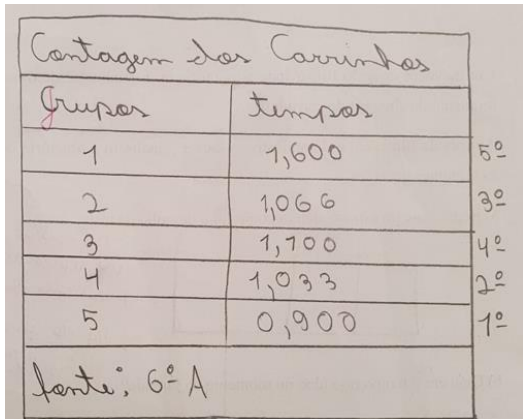
Figura 52: Resolução da atividade: Competição de Carrinhos

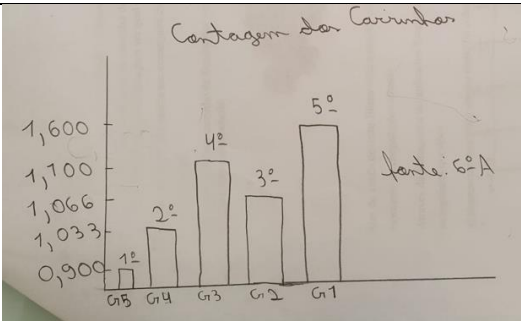


Fonte: a autora (2023)

Fizemos uma relação entre as fases de Modelagem Matemática segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013) e as aprendizagens de acordo com Pinilla (2010). Sabemos e entendemos que as aprendizagens não são vistas separadamente, porém, podemos analisar mais fortemente um tipo de aprendizagem que se destaca em cada fase da Modelagem Matemática, conforme consta no Quadro 21.

Quadro 21 – Componentes da aprendizagem presentes nas ações dos alunos e as fases da Modelagem Matemática na Atividade Competição de Carrinhos

Componentes da Aprendizagem	Ações dos alunos	Fases da Modelagem Matemática	Registros dos alunos																		
Aprendizagem Conceitual	Construção da pista de corrida.	Inteiração	 Durante a construção, foi relembrado conceitos de frações.																		
	Organização dos dados em tabelas.	Matematização e resolução.	 <table><thead><tr><th>Grupos</th><th>Tempos</th><th></th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>1,600</td><td>5º</td></tr><tr><td>2</td><td>1,066</td><td>3º</td></tr><tr><td>3</td><td>1,700</td><td>4º</td></tr><tr><td>4</td><td>1,033</td><td>2º</td></tr><tr><td>5</td><td>0,900</td><td>1º</td></tr></tbody></table> Fonte: 6º A	Grupos	Tempos		1	1,600	5º	2	1,066	3º	3	1,700	4º	4	1,033	2º	5	0,900	1º
	Grupos	Tempos																			
1	1,600	5º																			
2	1,066	3º																			
3	1,700	4º																			
4	1,033	2º																			
5	0,900	1º																			
Construção da pista de corrida, representando frações e construção do gráfico, após ter construído a tabela.	Matematização																				

Aprendizagem Algorítmica	Análise dos vídeos no aplicativo Tracker. Resoluções dos cálculos para descobrir quem foi a equipe campeã.	Matematização Resolução	
Aprendizagem Estratégica	Análise dos resultados obtidos e do gráfico construído pelos alunos, permitiu identificar a equipe campeã.	Validação	
Aprendizagem Comunicativa	Testes entre os integrantes de cada grupo para a escolha do carrinho mais rápido para o momento da competição. Gravação dos vídeos durante o momento da competição.	Inteiração Inteiração	 

Fonte: a autora (2023)

Por meio da atividade de modelagem matemática Competição de Carrinhos, os alunos se inteiraram do assunto de forma lúdica, onde o brincar ainda se faz presente, por se tratar de crianças entre 10 e 11 anos, coletaram dados durante a aula por meio de vídeo-análise, matematizaram, resolveram, interpretaram os resultados e validaram-nos ao descobrirem o grupo campeão, que foi aquele que chegou mais rápido, ou seja, no menor tempo.

4.1.5 OUTROS ELEMENTOS DO PORTFÓLIO

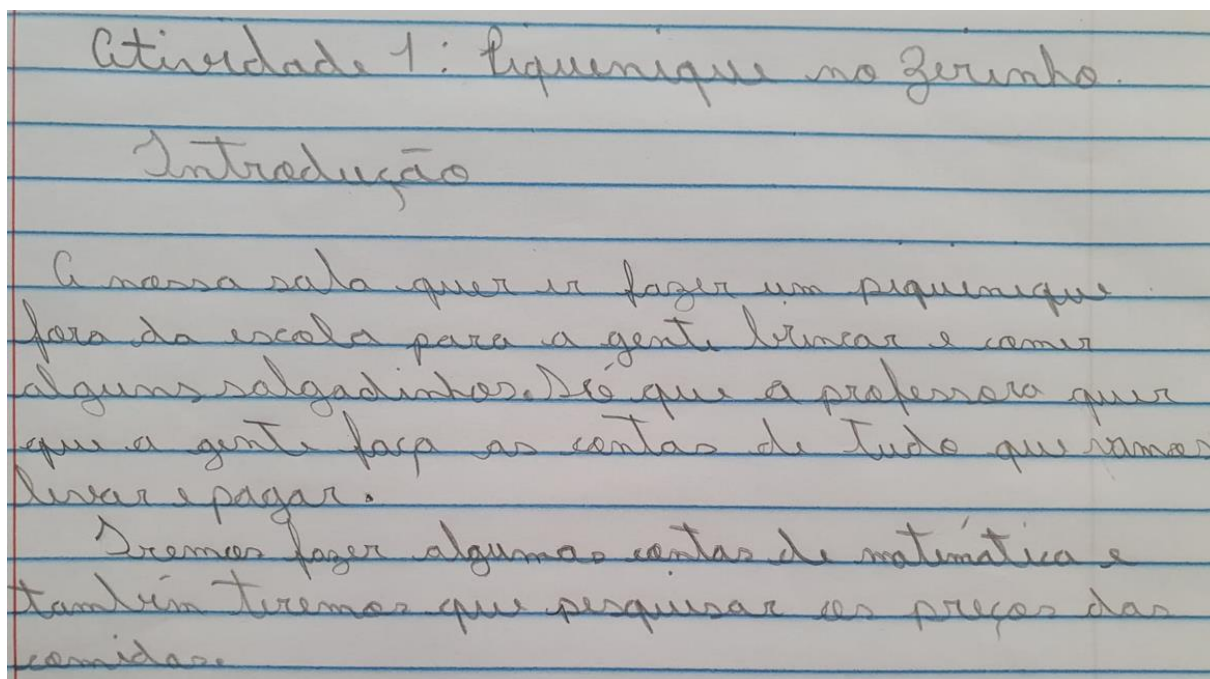
Dentre os elementos pertencentes à estrutura do portfólio definida pela professora, estariam: capa, introdução, atividades desenvolvidas e considerações finais. Logo, após a fase da inteiração, em que os alunos já estavam informados sobre o tema e o que estaria por vir, porém não tinham iniciado as outras fases da atividade de modelagem, a professora solicitava que eles escrevessem uma introdução sobre quais eram as suas expectativas em relação à atividade. Assim como, no término de cada atividade, a professora pedia para que eles escrevessem suas impressões sobre o que mais gostaram, menos gostaram, o que aprenderam, o que acharam difícil etc., finalizando com considerações finais a respeito daquela atividade. Gomes (2003, p. 56) compreende o portfólio como uma “coleção significativa, sistemática e organizada de atividades do aluno, numa determinada área, realizadas durante um período, que evidencie o nível de sua aprendizagem, incluindo, também as suas reflexões sobre tais atividades”. Desse modo, os alunos fizeram um registro individual, contínuo e dialógico e de reflexão sobre suas experiências vivenciadas durante as atividades de modelagem matemática.

Nessas introduções e considerações finais feitas pelo Grupo 2 para cada atividade, identificamos alguns trechos que denotaram aprendizagem dos alunos.

Na introdução da atividade do Piquenique, o Grupo 2 se mostrou interessado pela atividade, pois ao final eles iriam para um momento de lazer num parque da cidade, mas estavam conscientes que precisariam fazer todo o planejamento desse piquenique (Figura 53). Nesse trecho da introdução, pudemos evidenciar suas expectativas em relação à atividade (*A nossa sala quer ir fazer um piquenique fora da escola para a gente brincar e comer alguns salgadinhos. Só que a professora quer que a gente faça as contas de tudo que vamos levar e pagar*). O grupo 2, na introdução, continua escrevendo: *Iremos fazer algumas contas de matemática*. Neste excerto, evidenciamos que os alunos têm consciência da necessidade de desenvolvimento de operações básicas, o que pode denotar a aprendizagem algorítmica. Além disso, mencionaram: *também teremos que pesquisar os preços das comidas*. Com esse trecho

ficou evidenciado mais fortemente a aprendizagem estratégica que irão desenvolver no decorrer da atividade.

Figura 53: Introdução do G2 para a Atividade 1: Piquenique no Zerinho



Atividade 1: Piquenique no Zerinho

Introdução

A nossa sala quer ir fazer um piquenique fora da escola para a gente brincar e comer alguns salgadinhos. Só que a professora quer que a gente faça as contas de tudo que vamos levar e pagar.

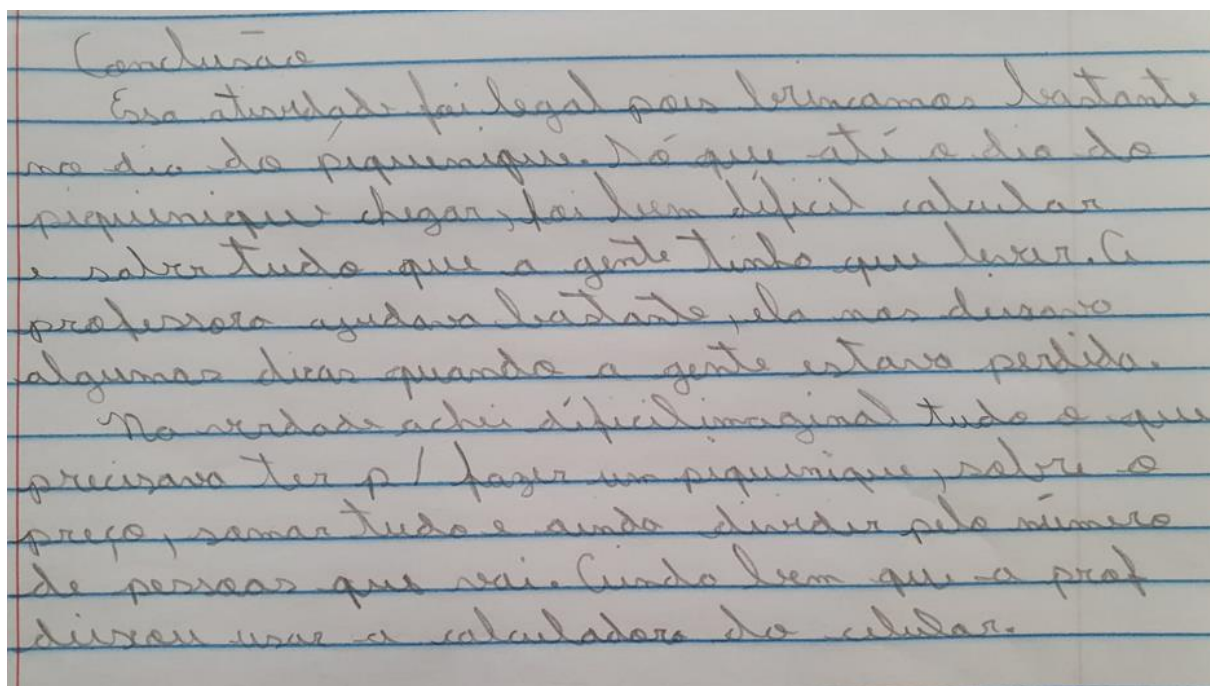
Iremos fazer algumas contas de matemática e também teremos que pesquisar os preços das comidas.

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Nas considerações da atividade do Piquenique (Figura 54), os alunos relataram dificuldades ao desenvolver a atividade, porém reconheceram que, com as intervenções da professora, eles foram capazes de finalizá-la: *Essa atividade foi legal pois brincamos bastante no dia do piquenique. Só que até o dia do piquenique chegar, foi bem difícil calcular e saber tudo que a gente tinha que levar. A professora ajudava bastante, ela nos dava algumas dicas quando a gente estava perdida*). O Grupo 2 ainda reforçou a dificuldade encontrada em relação ao planejamento da atividade e ao calcular, mas pelas suas palavras, podemos evidenciar componentes de aprendizagens, pois relataram que: *Na verdade achei difícil imaginar tudo o que precisa ter para fazer um piquenique, saber o preço, somar tudo e ainda dividir pelo número de pessoas que vai*. Ou seja, esse grupo entendeu todo o processo da atividade, como o levantamento de preços, a adição e posteriormente a divisão em partes iguais. Eles ainda,

reforçaram que o uso da calculadora os ajudou: *Ainda bem que a prof deixou usar a calculadora do celular*, reconhecendo que os instrumentos facilitaram no desenvolvimento da atividade.

Figura 54: Conclusão do G2 para a Atividade 1: Piquenique no Zerinho



Conclusão

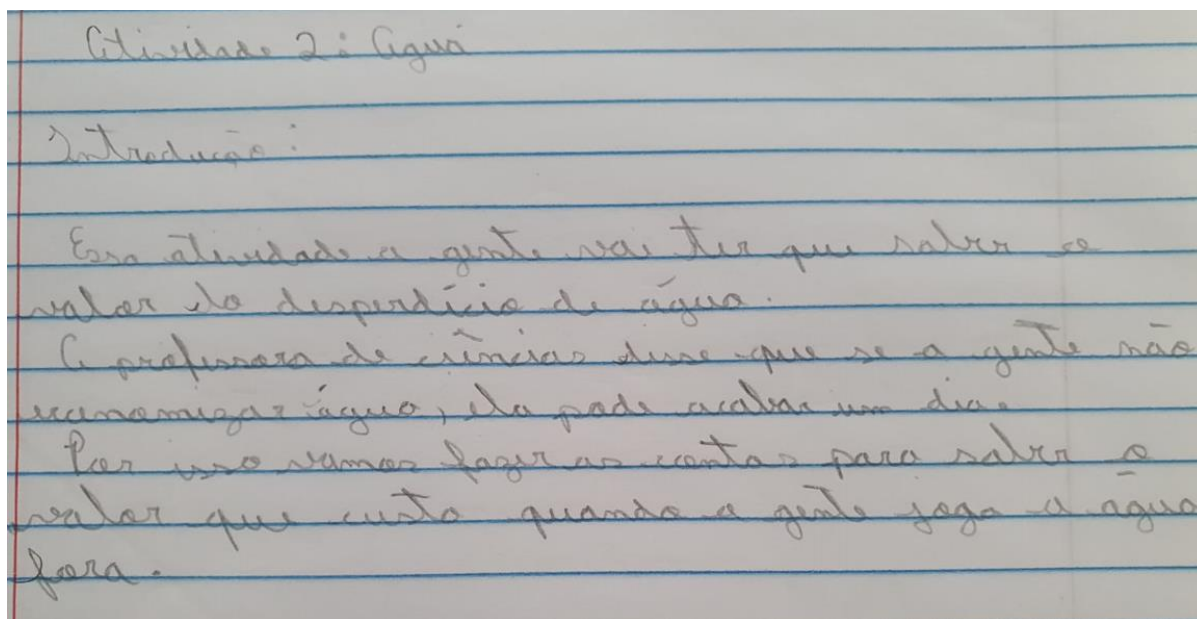
Essa atividade foi legal pois brincamos bastante no dia do piquenique. Só que até o dia do piquenique chegar, foi bem difícil calcular e saber tudo que a gente tinha que levar. A professora ajudava bastante, ela nos dava algumas dicas quando a gente estava perdido.

Na verdade achei difícil imaginar tudo o que precisava ter para fazer um piquenique, sobre o preço, somar tudo e ainda dividir pelo número de pessoas que vai. Ainda bem que a prof deixou usar a calculadora do celular.

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Na atividade Água, os alunos do Grupo 2, ao escrever suas considerações iniciais a respeito da atividade (Figura 55), estavam conscientes do seu desenvolvimento de forma interdisciplinar pois citaram o que já sabiam a respeito do que a professora de Ciências havia comentado com eles, conforme excerto: *Esta atividade a gente vai ter que saber o valor do desperdício de água. A professora de Ciências disse que se a gente não economizar água, ela pode acabar um dia.* Também mostraram entender o objetivo da atividade ao relatarem que: *Por isso vamos fazer as contas para saber o valor que custa quando a gente joga a água fora.*

Figura 55: Introdução do G2 para a Atividade 2: Água



Atividade 2: Água

Introdução:

Essa atividade a gente vai ter que saber o valor do desperdício de água.

A professora de ciências disse que se a gente não economizar água, ela pode acabar um dia.

Por isso vamos fazer as contas para saber o valor que custa quando a gente joga a água fora.

Fonte: Portfólio do Grupo 2

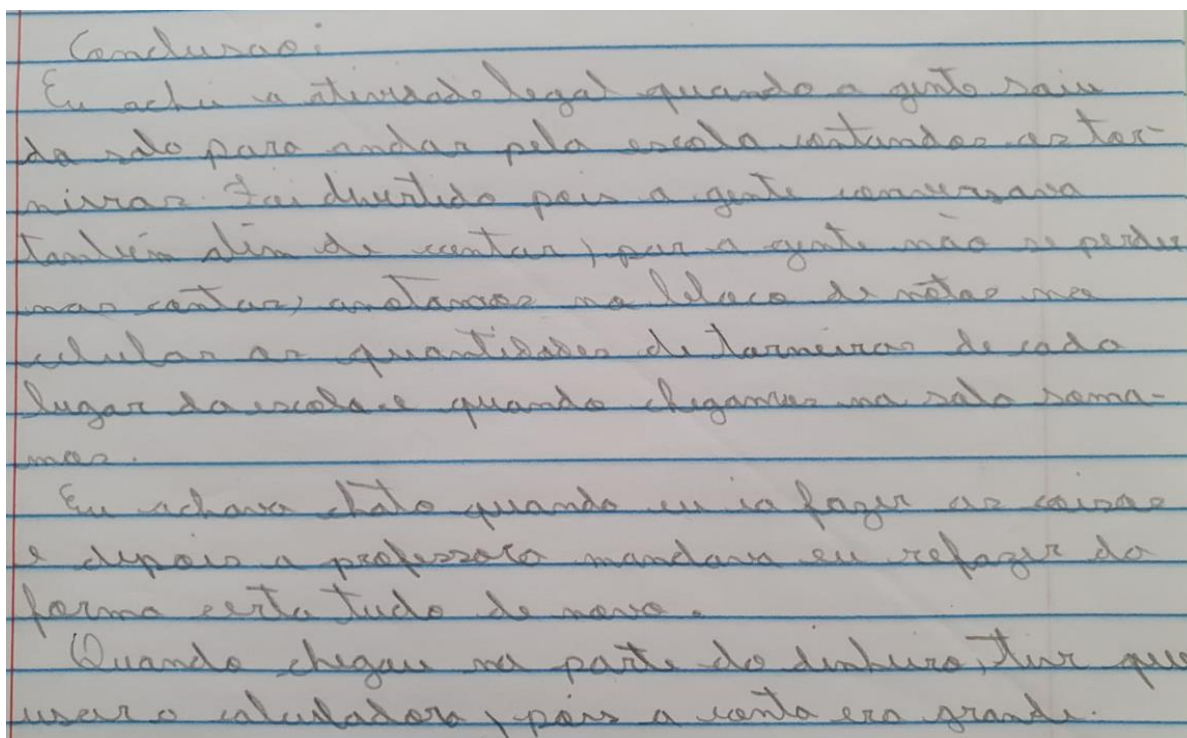
Na conclusão (Figura 56), os integrantes do Grupo 2, ao citar a parte que eles mais gostaram da atividade, novamente reforçaram que o telefone celular os ajudou para a coleta de dados: *Eu achei a atividade legal quando a gente saiu da sala para andar pela escola contando as torneiras. Foi divertido pois a gente conversava também além de contar, para a gente não se perder nas contas, anotamos no bloco de notas no celular as quantidades de torneiras de cada lugar da escola e quando chegamos na sala somamos.*

Nesse trecho das considerações finais do Grupo 2, os alunos mostravam que não gostavam das intervenções escritas da professora, pois eles queriam continuar com a atividade, provavelmente pela ansiedade em finalizá-la, e com as intervenções, eles tinham que voltar e refazer: *Eu achava chato quando eu fazia as coisas e depois a professora mandava eu refazer de forma certa tudo de novo.* Porém, o Grupo 2 foi o que mais se empenhou em responder os *feedbacks* da professora e que mais desenvolveu as componentes da aprendizagem no decorrer das atividades.

Novamente, o Grupo 2, citou a importância do uso da calculadora na atividade: *Quando chegou a parte do dinheiro, tive que usar a calculadora, pois a conta era grande.* O aluno ao citar essa necessidade, de uma forma simplista, descreveu que “a conta era grande”

mas também é pelo fato que ainda não tinha sido abordado o conteúdo dos números decimais, e quando tinham que operar com esses números, eles recorriam ao auxílio da calculadora.

Figura 56: Conclusão do G2 para a Atividade 2: Água



Conclusão:

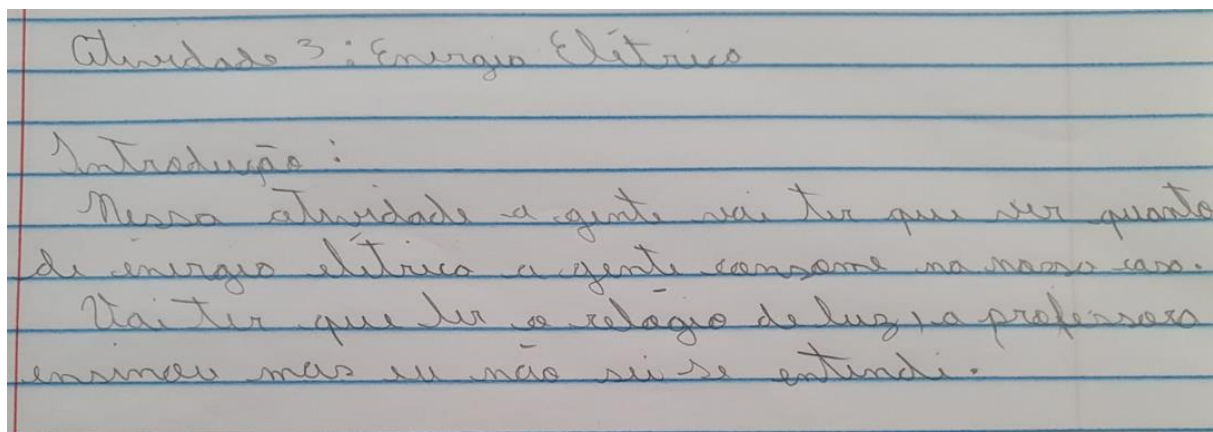
Eu achei a atividade legal quando a gente saiu da sala para andar pela escola contando as torneiras. Foi divertido pois a gente conversava também além de contar, para a gente não se perder nas contas, anotamos no bloco de notas no celular as quantidades de torneiras de cada lugar da escola e quando chegamos na sala somamos.

Eu achava chato quando eu ia fazer as coisas e depois a professora mandava eu refazer da forma certa tudo de novo.

Quando chegou na parte do dinheiro, tive que usar a calculadora, pois a conta era grande.

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Na terceira atividade desenvolvida com a turma, a Atividade Energia Elétrica, o grupo 2, mostrou entender como seria a atividade, porém, relatou um pouco de insegurança no início, ao escrever que: *Nessa atividade a gente vai ter que ver quanto de energia elétrica a gente consome em nossa casa. Vai ter que ler o relógio de luz, a professora ensinou mais eu não sei se entendi* (Figura 57).

Figura 57: Introdução do G2 para a Atividade 3: Energia Elétrica

Atividade 3: Energia Elétrica

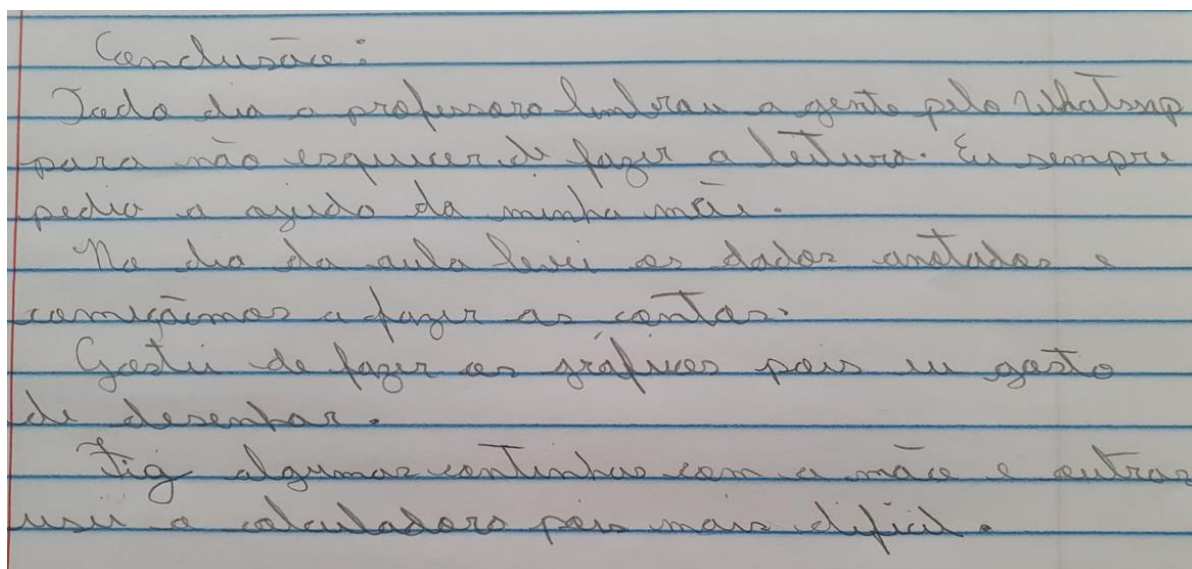
Introdução:

Nessa atividade a gente vai ter que ver quanto de energia elétrica a gente consome na nossa casa. Vai ter que ler o relógio de luz, a professora ensinou mas eu não sei se entendi.

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Nas considerações finais (Figura 58), o Grupo 2, reconheceu novamente a importância do telefone celular como ferramenta que contribuiu no processo da coleta de dados, relatando que: *Todo dia a professora lembrava a gente pelo WhatsApp para não esquecer de fazer a leitura*; e relatou que precisava da ajuda de uma pessoa mais velha para fazer a leitura: *Eu sempre pedia a ajuda da minha mãe*. Nós entendemos que esse grupo, ao pedir a ajuda de uma pessoa mais velha, estava preocupado em coletar os dados de forma mais fidedigna possível.

O Grupo 2, relatou o gosto pela construção de gráficos, indicando com mais evidência uma aprendizagem conceitual: *Gostei de fazer os gráficos pois eu gosto de desenhar*. E novamente, esse grupo reforçou o uso do telefone celular como um instrumento pedagógico que os auxiliou no processo da atividade, construindo aprendizagem estratégica e algorítmica, pois relataram que: *Fiz algumas continhas com a mão e outras usei a calculadora pois era mais difícil*. Com isso, podemos inferir que os alunos agiam de forma autônoma, recorrendo ao uso da calculadora somente quando sentiam necessidade.

Figura 58: Conclusão do G2 para a Atividade 3: Energia Elétrica**Conclusão:**

Todo dia a professora lembrou a gente pelo *WhatsApp* para não esquecer de fazer a leitura. Eu sempre pedia a ajuda da minha mãe.

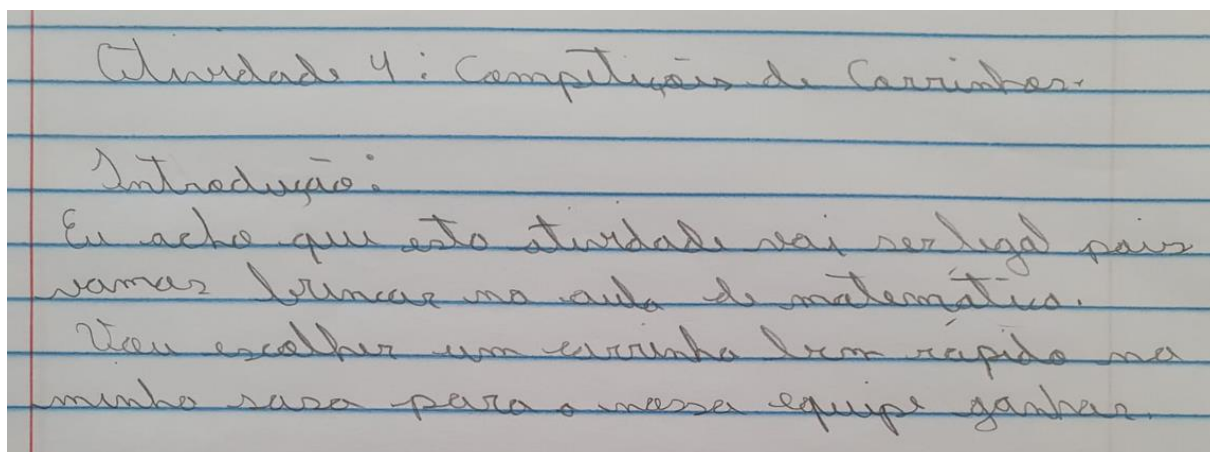
No dia da aula levei os dados anotados e começamos a fazer as contas.

Gostei de fazer os gráficos pois eu gosto de desenhar.

Fiz algumas continhas com a mão e outras usei a calculadora pois era mais difícil.

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Na introdução da Atividade Competição de carrinhos (Figura 59), o Grupo 2, se mostrou bem empolgado com a atividade, e essa empolgação, fez parte da primeira etapa da atividade de modelagem matemática, que é a inteiração, em que os alunos teriam de se envolver com o tema: *Eu acho que esta atividade vai ser legal pois vamos brincar na aula de matemática. Vou escolher um carrinho bem rápido na minha casa para a nossa equipe ganhar.* Muito provável que essa empolgação se devesse a dois fatores: o primeiro é que o brincar ainda se faz presente nessa faixa etária entre 10 e 11 anos dos alunos do 6º ano; e o segundo fator, é que eles enxergaram a oportunidade de brincar na aula de matemática, fato esse não ser comum.

Figura 59: Introdução do G2 para a Atividade 4: Competição de Carrinhos

Atividade 4: Competições de Carrinhos

Introdução:

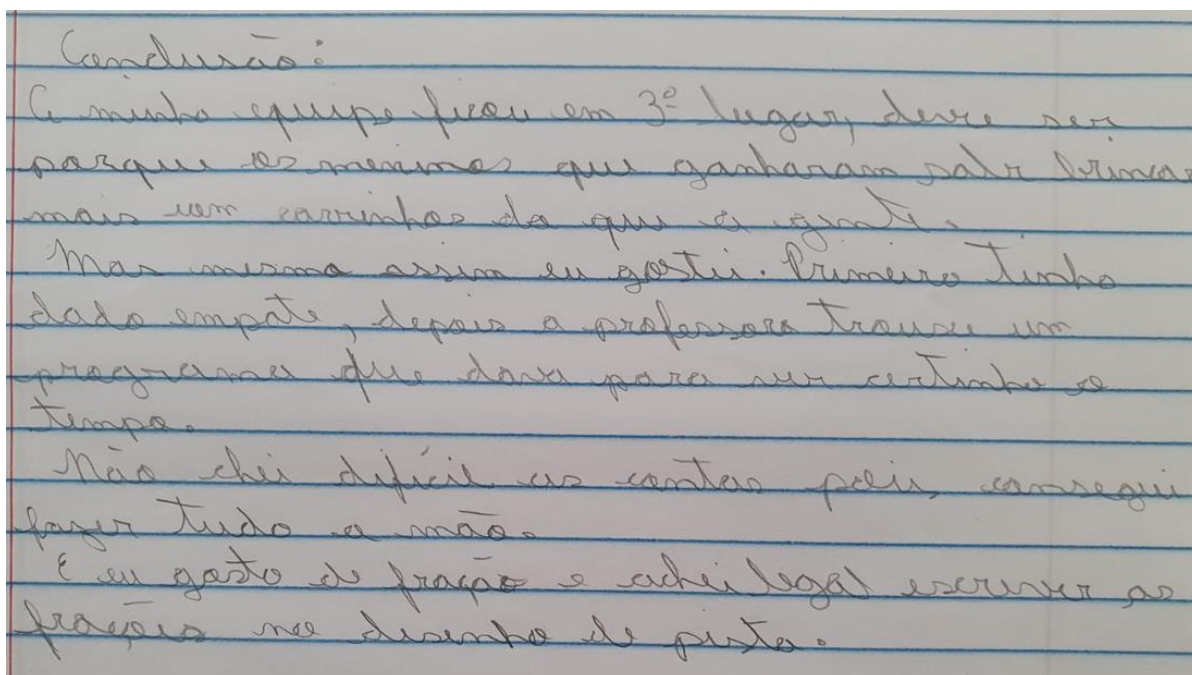
Eu acho que esta atividade vai ser legal pois vamos brincar na aula de matemática.

Vou escolher um carrinho bem rápido na minha casa para a nossa equipe ganhar.

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Na conclusão (Figura 60), o Grupo 2, relatou ter ficado em terceiro lugar e mesmo assim gostou do momento da competição: *A minha equipe ficou em 3º lugar, deve ser porque os meninos que ganharam sabem brincar mais com carrinho do que a gente. Mas mesmo assim eu gostei.* Também reforçou que o uso do aplicativo Tracker foi essencial ao poder decidir a equipe campeã: *Primeiro tinha dado empate, depois a professora trouxe um programa que dava pra ver certinho o tempo.*

Nas considerações finais, ainda, o Grupo 2, fez um relato que reforçou mais evidentemente a aprendizagem algorítmica desenvolvida com essa atividade, ao relatar que: *Não achei difícil as contas pois consegui fazer tudo a mão.* Além disso, ficou evidente a aprendizagem conceitual, no estudo das frações, ao relatar que: *Eu gosto de fração e achei legal escrever as frações no desenho da pista.*

Figura 60: Conclusão do G2 para a Atividade 4: Competição de Carrinhos

Conclusão:

A minha equipe ficou em 3º lugar, deve ser porque os meninos que ganharam sabe brincar mais com carrinhos do que a gente.

Mas mesmo assim eu gostei. Primeiro tinha dado empate, depois a professora trouxe um programa que dava para ver certinho o tempo.

Não achei difícil as contas pois consegui fazer tudo a mão.

E eu gosto de fração e achei legal escrever as frações no desenho da pista.

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Ao final dessas quatro atividades e analisando os comentários dos alunos do Grupo 2, nos respaldamos para evidenciarmos aspectos revelados nos registros escritos dos alunos quando constroem um portfólio de atividades de modelagem matemática. De acordo com Mendes *et al.* (2019, p. 15):

O portfólio de aprendizagem pode tornar-se assim um instrumento que propicia ao professor realizar uma prática avaliativa que reposiciona o aluno, de sujeito amedrontado, para um sujeito ativo e participante de seu desenvolvimento. Além de se constituir como um instrumento de avaliação, configura-se enquanto oportunidade de aprendizagem, uma vez que o aluno tem que aprender a registrar por escrito o seu pensamento, a organizar e articular as ideias e explicar procedimentos.

De forma geral, tais registros refletiram mudanças na forma de estudar e de avaliar, identificação e superação de limites em relação aos seus conhecimentos e reconhecimento de presença de conteúdos que já sabiam e em poder utilizá-los em situações do cotidiano.

Entendemos que mais importante que a construção do portfólio de atividades de modelagem matemática foi o fato dele possibilitar a aprendizagem de conteúdos matemáticos e relacioná-los com as situações do dia a dia.

Com um olhar para as considerações dos alunos sobre a construção do portfólio, evidenciamos o fato deles reconhecerem suas dificuldades na abordagem dos conteúdos ou em responder aos questionamentos da professora, o que ficou evidente foi que o trabalho foi reconhecido como um instrumento de avaliação, que alterou a forma de estudar, praticar a escrita para dialogar com a professora, e o mais importante foi que nos permitiu evidenciar as componentes de aprendizagens dos alunos do Grupo 2.

4.2 ANÁLISE GERAL

4.2.1 APRENDIZAGENS NO PORTFÓLIO CONSTRUÍDO: AS AÇÕES DO GRUPO 2

Para subsidiar nossa investigação a respeito de evidenciar como as ações do professor e dos alunos a utilizar um portfólio avaliativo das atividades de modelagem matemática podem promover a aprendizagem semiótica, juntamos os quadros elaborados no final de cada atividade e organizamos o Quadro 22, para apresentar de forma sucinta, os componentes da aprendizagem revelados nas ações dos alunos do Grupo 2 nas atividades de modelagem matemática. Focamos a atenção para as ações dos alunos visto que as ações da professora, por meio dos *feedbacks* escritos tiveram como objetivo requerer algum procedimento; direcionar a produção dos registros ou mesmo evidenciar se os alunos reconheciam a falta de algum elemento do registro ou erros que, porventura, haviam realizado.

Quadro 22 – Componentes das Aprendizagens evidenciadas durante as atividades de modelagem matemática

Atividades	Aprendizagem Conceitual Ações dos alunos
Piquenique no Zerinho	Conversa com a turma sobre o que cada um gostaria de comer no dia do piquenique e uma enquete para levantamento dos dados. Tabulação dos dados. Coleta de dados, construção de gráficos e identificação de seus elementos. Construção de tabelas com os itens, quantidades e valores.
Água	Organização dos dados em tabela e gráficos. Foi necessária uma busca pela internet sobre os tipos de gráficos.
Energia Elétrica	Leitura do texto do livro didático “Por dentro da energia elétrica”. Discussão em sala sobre a temática. Construção de tabelas e gráficos e identificação de seus elementos.

Competição de Carrinhos	Construção da pista de corrida. Organização dos dados em tabelas. Construção da pista de corrida, representando frações, e construção do gráfico, após ter construído a tabela.
Atividades	Aprendizagem Algorítmica Ações dos alunos
Piquenique no Zerinho	Resolução de operações de adição e multiplicação com números decimais para estimarem os valores dos alimentos e outros itens necessários para o piquenique. Resolução algorítmica com o auxílio da calculadora.
Água	Resoluções dos cálculos para responder alguns questionamentos presentes no portfólio. Em alguns cálculos utilizaram a calculadora.
Energia Elétrica	Resolução de operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.
Competição de Carrinhos	Análise dos vídeos no aplicativo Tracker. Resoluções dos cálculos para descobrir quem foi a equipe campeã.
Atividades	Aprendizagem Estratégica Ações dos alunos
Piquenique no Zerinho	Todo o processo da busca de informações para resolverem o problema: <i>Qual o valor cada um teria de dispor?</i> Busca de informações sobre formas de representar as informações em sites da internet. Respostas à intervenção da professora, questionando possíveis acontecimentos.
Água	Coleta de dados: fizeram uma vistoria pelo colégio contando a quantidade total de torneiras existentes. Utilizaram o bloco de notas do celular para irem anotando a quantidade de torneiras. Análise dos resultados obtidos e do gráfico construído. Valores calculados pelos alunos sobre o desperdício, correspondiam aos valores do metro cúbico de água cobrado pela companhia de água.
Energia Elétrica	Coleta de dados. Os processos de resolução de problemas até chegar a resposta da situação inicial: <i>Qual o valor de energia elétrica gasta por pessoa na residência pesquisada?</i>
Competição de Carrinhos	Análise dos resultados obtidos e do gráfico construído pelos alunos, permitiu identificar a equipe campeã.
Atividades	Aprendizagem Comunicativa Ações dos alunos
Piquenique no Zerinho	Diálogo para a escolha do menor preço entre os colegas do grupo durante a pesquisa de preços em sala por meio de folhetos promocionais e quando foram ao comércio pesquisar. Disposição das carteiras com os alunos sentados em equipe, facilita a aprendizagem comunicativa. Respostas às intervenções da professora.

	Dia do Piquenique – os alunos validaram por meio do valor que cada um contribuiu com as compras realizadas para a alimentação no dia.
Água	Discussão em sala sobre a temática e registro no portfólio dos alunos sobre os dados apresentados no cartaz.
Energia Elétrica	Vídeo explicativo sobre como fazer a leitura nos diferentes tipos de relógio de luz. Cada grupo de alunos comunicaram-se durante o desenvolvimento da atividade e ao responderem os questionamentos e <i>feedbacks</i> da folha de atividades. Valores calculados pelos alunos foram próximos ao valor da fatura da conta de energia elétrica das residências em que foram feitas a coleta.
Competição de Carrinhos	Testes entre os integrantes de cada grupo para a escolha do carrinho mais rápido para o momento da competição. Gravação dos vídeos durante o momento da competição.

Fonte: a autora (2023)

Uma análise do Quadro 22 subsidiou as afirmações de Pinilla (2010) de que a aprendizagem semiótica é transversal às outras componentes, visto que os alunos lançaram mão de procedimentos em que se fizeram necessários o uso de signos, sejam escritos em que revelaram o sistema semiótico escolhido ou requerido na intervenção, seja o falado e o gesticulado quando os integrantes do grupo estavam entrando em consenso para resolver cada atividade de modelagem. De todo modo, enquanto um instrumento avaliativo, entendemos que a produção de um portfólio “exigiu” o desenvolvimento da aprendizagem semiótica.

4.2.2 AS INTERVENÇÕES DA PROFESSORA

As atividades de modelagem, além de possibilitar a abordagem matemática de situações-problema do interesse de muitos dos alunos do 6º ano, permitiram desenvolver a aprendizagem conceitual, algorítmica, estratégica, comunicativa e semiótica.

Por meio de cada uma das atividades de modelagem matemática, os alunos se inteiraram do assunto, buscaram informações, matematizaram, resolveram, interpretaram os resultados e validaram-nos. Para isso, levantaram dados qualitativos e dados quantitativos, de acordo com o que se requeriam em cada situação ou por meio de *feedback* da professora. Com isso, estimaram respostas para a problemática inicial para cada atividade.

Inferimos que a aprendizagem semiótica dos alunos ocorreu durante todo o processo a partir da observação da professora e das intervenções feitas por meio de *feedbacks* escritos nos portfólios do grupo de alunos analisado. Nessas intervenções, os alunos responderam os

questionamentos da professora e produziram Registros de Representação Semiótica por meio de tratamento e conversão. Essas intervenções permitiram o redirecionamento do raciocínio utilizado pelos alunos e até mesmo indicavam o que precisavam fazer ou refazer. A partir dos *feedbacks*, os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver vários tipos de registros de representações semióticas, e souberam transformá-los em outros no mesmo registro (tratamento) ou em outro (conversão) de maneira adequada.

Pudemos perceber que essas atividades contribuíram para a autonomia dos alunos, percepção da realidade, comunicação entre os integrantes do grupo, na capacidade de tomada de decisões e muitos outros conhecimentos que desenvolveram durante todo o processo. E no tocante sobre a avaliação, os alunos não diferenciaram os momentos que estavam aprendendo dos momentos que estavam sendo avaliados, ambos ocorreram concomitantemente ao processo de ensino e aprendizagem.

Considerando as análises das atividades A1, A2, A3 e A4 desenvolvidas pelo Grupo 2 do 6º ano do Ensino Fundamental no contexto de aulas com Modelagem Matemática, trazemos algumas reflexões a fim de responder à questão dessa pesquisa: *Como as ações do professor e dos alunos da Educação Básica a utilizar um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática podem promover a aprendizagem semiótica?*

Nos debruçamos em analisar as atividades desenvolvidas pelos alunos por meio dos registros escritos no portfólio do Grupo 2, com um olhar nas ações de intervenções docentes realizadas e nas respostas dos alunos aos questionamentos da professora. Por meio de análise qualitativa de cunho interpretativo das produções escritas, evidenciamos que o *feedback* fornecido pela professora proporcionou aos alunos novas oportunidades de aprendizagem, de modo que eles puderam modificar procedimentos de resolução, organizar dados, corrigir erros e utilizar conhecimentos do 6º ano do Ensino Fundamental, evidenciando o portfólio como uma prática avaliativa durante todo o processo de ensino.

Dessa forma, agrupamos as intervenções docentes que mais apareceram nas atividades propostas em três categorias, estabelecendo articulações com o quadro teórico que subsidiaram nossa pesquisa, os Componentes da Aprendizagem. Tais agrupamentos refletem diferentes aspectos para os quais a análise da produção escrita convergiu no que diz respeito à aprendizagem semiótica dos alunos: Realizando mudanças em procedimentos e organizando dados, Corrigindo equívocos. Esses dois agrupamentos contribuíram para o terceiro agrupamento – Fazendo uso de conteúdos do 6º ano do Ensino Fundamental –, que foi transversal aos demais, pois estava presente no decorrer das intervenções.

A partir das intervenções da professora e o evidenciar de cada componente da aprendizagem – Aprendizagem Conceitual, Aprendizagem Algorítmica, Aprendizagem Estratégica, Aprendizagem Comunicativa e Aprendizagem Semiótica –, entendemos que as construções cognitivas dos alunos puderam ser inferidas em seus registros escritos.

4.2.2.1 REALIZANDO MUDANÇAS EM PROCEDIMENTOS E ORGANIZANDO DADOS

As intervenções docentes que mais apareceram no decorrer das atividades desenvolvidas foram sobre o agrupamento '*Realizando mudanças em procedimentos e organizando dados*'. O objetivo dessa intervenção, além de possibilitar a continuidade de desenvolvimento da atividade de modelagem, levava os alunos a fazerem uso de mais de um tipo de representação, para diagnosticar quais eram os conhecimentos deles sobre o conteúdo Tratamento da Informação, com a construção de tabelas e gráficos, presentes em todas as atividades e a partir da atividade, abordar esse conteúdo. Na atividade Competição de carrinhos, por exemplo, utilizamos as intervenções desse agrupamento para diagnosticar e explicar o conteúdo de frações. Construímos o Quadro 23, para explicitar todas as intervenções docentes que foram agrupadas nessa categoria, para auxiliar nossa análise.

Quadro 23: Intervenções docentes no agrupamento: ‘Realizando mudanças em procedimentos e organizando dados’

Atividade	Intervenções
Piquenique no Zerinho	Existe outra maneira de apresentar essas informações? Além da tabela e do desenho, que outra maneira você representaria essas informações? Além de tabelas, qual outra forma existe para representar dados? Existe outro tipo de gráfico para representar? Qual? Teria outra maneira de apresentar essas informações de uma forma mais clara? Apresente no espaço abaixo a quantidade total de cada item que teremos que comprar. Se precisar, faça uma pesquisa sobre os elementos de uma tabela
Água	Existe alguma outra forma de representar os dados contidos no cartaz? Existe outra maneira de representar essas informações? Como você representaria essas informações para ficar mais fácil de entender para quem está lendo? Após a explicação da professora sobre gráfico e tabelas, como você poderia representar essas informações? Após a explicação da professora sobre tabelas e seus elementos, reescreva as informações. Reescreva as informações de uma forma mais clara. Escreva o valor por extenso.
Energia Elétrica	Muito bem! Agora, você conseguiria representar essas informações de outra maneira? Represente na próxima folha outra maneira. Ótimo! Você consegue organizar essas informações de uma forma mais clara? Parabéns! Represente na próxima folha, outra maneira de representar essas informações
Competição de Carrinhos	Na outra folha, faça um desenho que represente: a) a metade da pista b) $\frac{1}{4}$ da pista c) $\frac{3}{4}$ da pista Qual outras formas podemos representar essas frações? Agora que sua tabela está completa, represente de outra maneira.

Fonte: a autora (2023)

Detalhamos no Capítulo 4 dessa pesquisa, a descrição das atividades e diante da produção escrita apresentada pelo Grupo 2, a professora lançava esses questionamentos do Quadro 23. Sempre que os alunos eram questionados, eles respondiam por meio de outros registros semióticos, que nos permitiram diagnosticar alguns componentes da aprendizagem e quando percebíamos que eles não sabiam sobre determinado assunto, aproveitávamos a oportunidade para explicar e, em algumas outras vezes, era solicitado que os alunos realizassem pesquisas. De acordo com Silva e Dalto (2020, p. 383), “realizar pesquisas é uma ação que faz

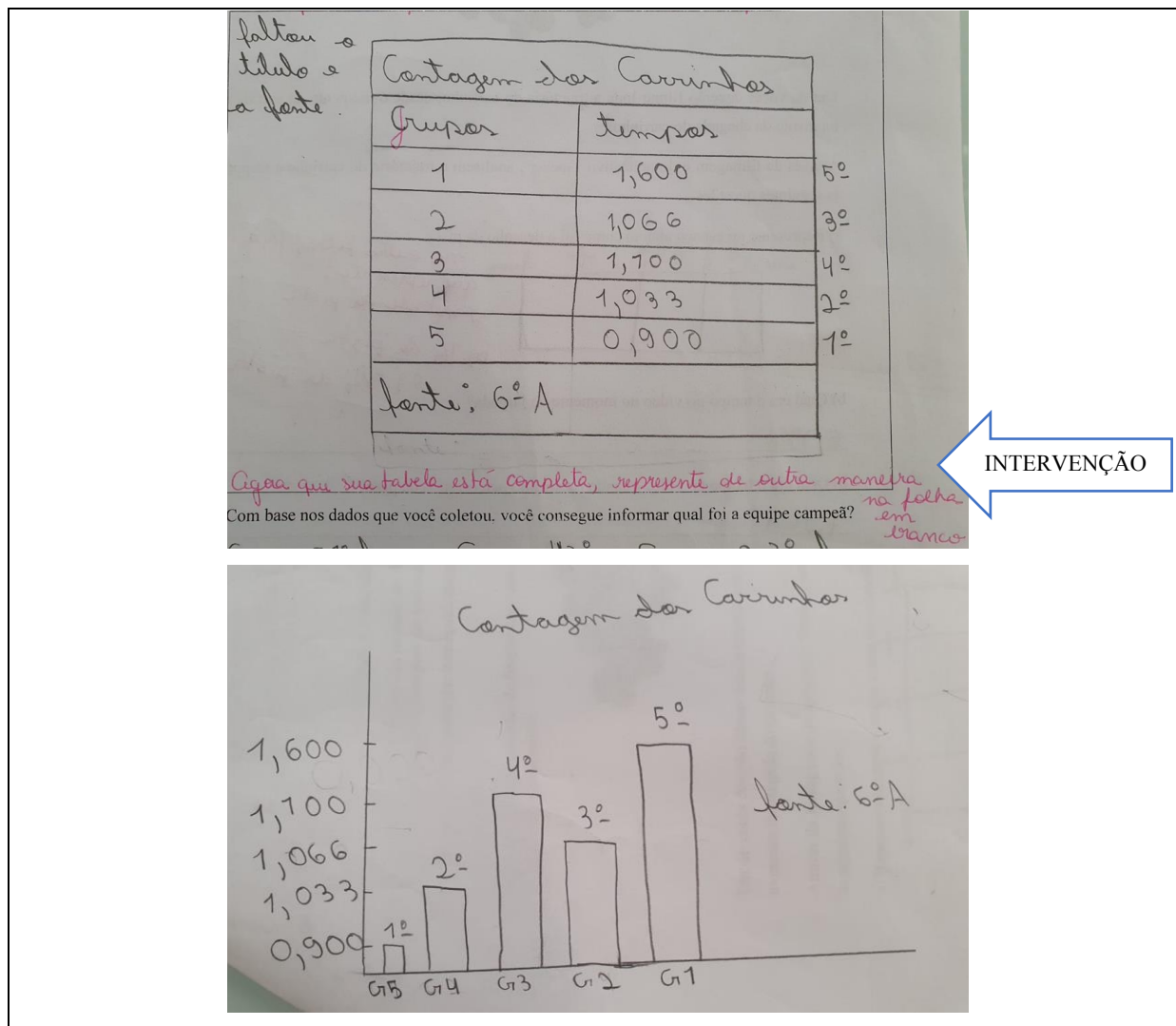
parte do desenvolvimento de atividades de modelagem”. Note, que na primeira atividade, que foi a do Piquenique no Zerinho, para os alunos conseguirem fazer um gráfico foi necessário mais de uma intervenção e ainda a professora precisou pedir para que eles pesquisassem como poderiam representar. Na segunda atividade, a da Água, ainda foi necessário mais de uma intervenção e ainda precisaram fazer pesquisas para poderem fazer um gráfico. Nas outras duas atividades, a da Energia Elétrica e da Competição de carrinhos, já fizeram o gráfico após a tabela de forma intuitiva.

De certo modo, os questionamentos mobilizaram o Grupo 2 a produzir a representação gráfica das situações, entre outras representações, bem como retomar conteúdos matemáticos que haviam estudado em anos anteriores. Isso corrobora com Silva e Dalto (2020, p. 380) quando afirmam que: “Avaliar formativamente é investir na regulação do processo de aprendizagem, assegurando progressão continuada na apropriação do saber”.

Os alunos do Grupo 2 mostraram que, a partir dos questionamentos no desenvolvimento das atividades, a “apropriação do saber” para a construção de tabelas e gráficos foram constituídas a partir do desenvolvimento delas. O que podemos evidenciar é que, anteriormente aos questionamentos, os alunos não saberiam construir de forma autônoma as tabelas e os gráficos, visto pelas representações que eles fizeram, por meio de registro figural, e por meio de tabelas que faltavam elementos, e já se davam por satisfeitos. O portfólio proporcionou, no decorrer das atividades, que as produções dos alunos fossem avaliadas, revisadas e refinadas de maneira que os alunos pudessem reorganizar procedimentos para retomar conteúdos matemáticos. Sendo assim, evidenciamos que o diálogo estabelecido no portfólio contribuiu com os alunos. “Se o avaliado sabe sobre o que é questionado, pode tirar proveito disso e assim compreende que a avaliação é diálogo. O mais importante numa avaliação é o fato de ela ser verdadeiramente informadora” (Gomes, 2003, p. 14).

Na Figura 61 trazemos um exemplo, com as imagens dos registros dos alunos da Atividade 4 – Competição de carrinhos – e a intervenção da professora da categoria ‘*realizando mudanças em procedimentos e organizando dados*’, do portfólio do Grupo 2. Com a intervenção da professora (*Agora que sua tabela está completa, represente de outra maneira na folha em branco*) e por se tratar da quarta atividade que eles estavam desenvolvendo, os alunos já fizeram o gráfico relacionado à tabela.

Figura 61: Exemplo de intervenção no agrupamento: ‘Realizando mudanças em procedimentos e organizando dados’.



Fonte: Portfólio do Grupo 2

4.2.2.2 CORRIGINDO EQUÍVOCOS

No que diz respeito ao agrupamento ‘Corrigindo equívocos’, pudemos evidenciar algumas vezes nas produções escritas dos alunos, intervenções da professora, para que eles pudessem arrumar seus equívocos quando se evidenciavam cálculos errados, construções de tabelas e gráficos incompletas, notações incompletas. Esses questionamentos apareceram em três atividades, das quatro analisadas. Construímos o Quadro 24, para explicitar todas as intervenções docentes que foram agrupadas nessa categoria.

Quadro 24: Intervenções docentes no agrupamento: ‘Corrigindo equívocos’

Atividades	Intervenções
Piquenique no Zerinho	O que você acha que está faltando no seu gráfico?
Água	Quais elementos faltam nessa tabela? Faça novamente. Você transformou a tabela em um gráfico. Gostei! Agora faça a tabela de forma correta. Refaça este cálculo. Coloque as unidades de medida.
Competição de carrinhos	O que está faltando na sua tabela?

Fonte: a autora (2023)

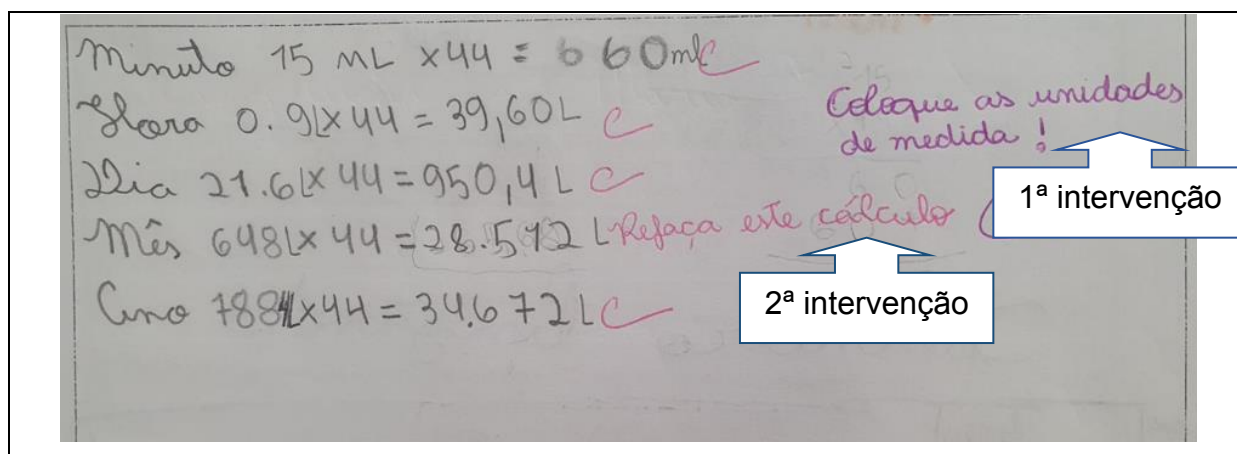
Entendemos que as intervenções dessa natureza foram em menor quantidade que a anterior, pois a maior parte desse tipo de intervenção ocorria oralmente na sala de aula, quando a professora era solicitada, percebia o erro do aluno e já o orientava verbalmente para arrumar.

Esses tipos de intervenções, corroboraram para que os alunos percebessem seus erros, permitiram uma reflexão e, possivelmente, uma correção de suas produções. Gomes (2003, p. 15) no que diz respeito à avaliação:

Ela também deve conscientizar os alunos de suas lacunas, erros, e insuficiências, porém considerando esse fato normal, esperado e natural, de alunos em aprendizagem. Os erros, lacunas, e outras ocorrências devem ser considerados superáveis, e trabalhados para que realmente os sejam.

O portfólio é um instrumento avaliativo que permite compreender e gerir os erros dos alunos e é adequado a esse tipo de avaliação. “O que é formativo é a decisão de pôr a avaliação ao serviço de uma progressão do aluno e de procurar todos os meios susceptíveis de agir nesse sentido” (Hadji, 1994, p. 165). O fato dos alunos, quando recebem de volta o portfólio com o *feedback* do professor, permite que eles reparem em seus erros, arrumem, se empenhem mais nas produções e percebam a necessidade de refazê-las. Diferentemente das provas escritas, em que os alunos quando as recebem se preocupam em ver suas notas, e se for uma ‘nota boa’, nem se preocupam em ver seus erros, pois não há mais oportunidade de arrumar.

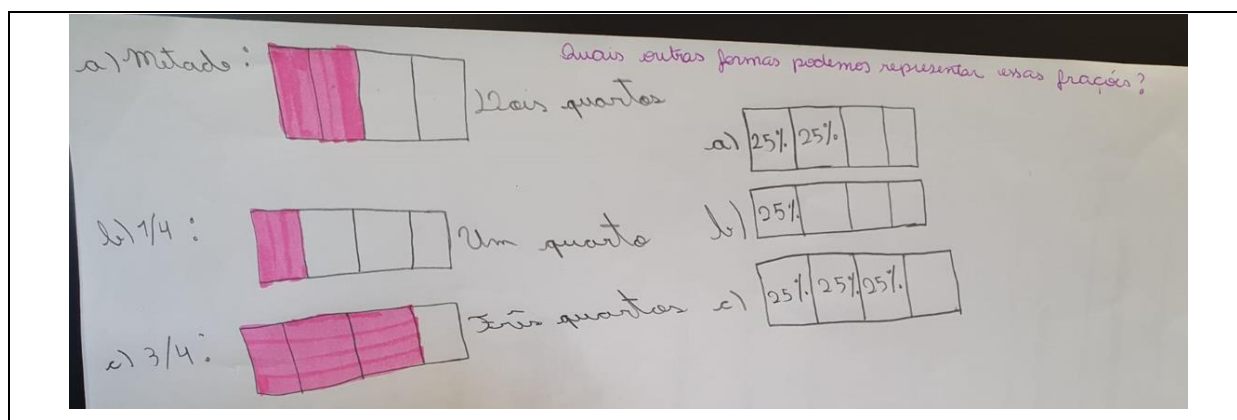
Na figura 62 trazemos um exemplo, com as imagens dos registros dos alunos da Atividade 2: Água e a intervenção da professora da categoria ‘*corrigindo equívocos*’, do portfólio do Grupo 2. Com a 1ª intervenção da professora (*Coloque as unidades de medida!*) e com a 2ª intervenção da professora (*Refaça este cálculo*), os alunos já arrumaram o que estava incompleto e errado.

Figura 62: Exemplo de intervenção no agrupamento: 'Corrigindo equívocos'

Fonte: Portfólio do Grupo 2

4.2.2.3 FAZENDO USO DE CONTEÚDO DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

O objetivo da construção do portfólio era de utilizá-lo como um instrumento de avaliação para as atividades de modelagem matemática desenvolvidas e que pudessem emergir conteúdos referentes ao 6º ano do Ensino Fundamental. Enquanto processo avaliativo no que diz respeito à compreensão de conteúdos, todos os questionamentos dos agrupamentos anteriores – *Realizando mudanças em procedimentos e organizando dados e Corrigindo equívocos* –, convergiram para esse terceiro agrupamento. Pois quando os alunos, respondiam os questionamentos da professora, se direcionavam no intuito de aprender os conteúdos matemáticos do 6º ano do Ensino Fundamental (Figura 63).

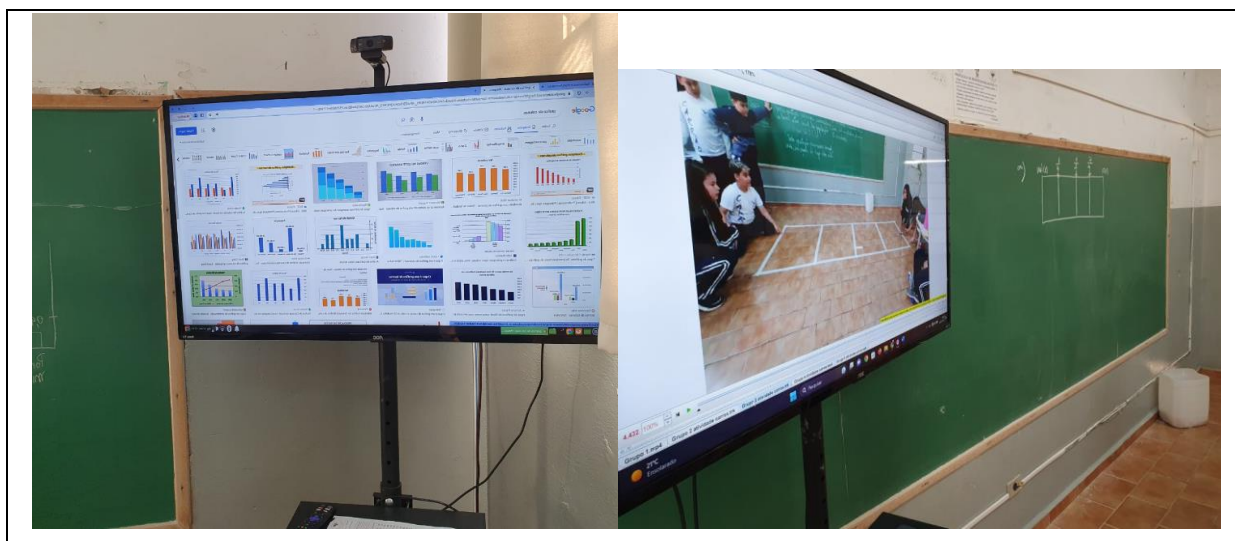
Figura 63: Exemplo de intervenção no agrupamento: 'Fazendo uso de conteúdo do 6º ano do fundamental'

Fonte: Portfólio do Grupo 2

A partir da intervenção – *Quais outras formas podemos representar essas frações?* –, a professora requereu dos alunos do Grupo 2, outras formas de representação semiótica de um mesmo objeto matemático, portanto, registraram por meio da linguagem numérica, escrita, figural e por porcentagem.

Em alguns momentos das atividades de modelagem matemática desenvolvidas, a professora interrompia a atividade dos grupos e pedia para que todos se voltassem para a lousa, para abordar esse novo conteúdo requerido, fazendo uma explicação e sistematização de modo a auxiliá-los. Outra forma que a professora utilizava para abordar esse conteúdo, era incentivar os alunos a fazerem buscas na internet, para a partir dessa pesquisa, trabalhar com o conteúdo (Figura 64).

Figura 64: Momento de explicação no quadro e pesquisa na Internet



Fonte: Da autora (2023)

Por meio das análises que fizemos das produções dos alunos, pudemos conjecturar que houve indícios de aprendizagens conceitual, algorítmica, estratégica e comunicativa no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática realizadas pelo Grupo 2.

Desse modo, percebemos que, com as intervenções da professora, no agrupamento '*Realizando mudanças em procedimentos e organizando dados*', ficou mais evidente a aprendizagem conceitual dos alunos, pois por meio das intervenções desse agrupamento, os alunos tinham que representar os dados de maneira correta, caso contrário, uma nova intervenção era realizada requerendo algum ajuste. Eles tinham que fazer a construção de uma tabela e de um gráfico com todos os elementos, por exemplo. Outra aprendizagem que ficou evidente nesse agrupamento foi a aprendizagem estratégica, pois a forma do questionamento

da professora, ‘Existe outra maneira de representar...’, permitia desenvolver nos estudantes, atitudes de pensar estrategicamente a respeito daquele registro semiótico. Vale destacar que a prática da Modelagem Matemática presente em todas as atividades também permitiu o desenvolvimento da aprendizagem estratégica dos alunos, pois eles foram em busca da solução para a problemática inicial.

As intervenções da professora no agrupamento ‘*Corrigindo equívocos*’, ficou mais evidente a aprendizagem algorítmica, pois os questionamentos dessa natureza eram mais voltados aos erros dos alunos quando estavam realizando operações matemáticas.

O portfólio, como instrumento de avaliação, permitiu o diálogo entre a professora e os estudantes por meio dos *feedbacks* escritos e a atividade de modelagem matemática permitiu o diálogo entre os estudantes do grupo e entre a professora quando era solicitada. Nesses aspectos, a aprendizagem comunicativa ficou mais evidenciada.

Pudemos perceber, por meio dos registros escritos nos portfólios dos alunos, que a aprendizagem semiótica perpassou pelas demais aprendizagens, se tornando evidentes indícios da aprendizagem semiótica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar o desenvolvimento desse estudo, tínhamos como objetivo responder à questão de pesquisa *Como as ações do professor e dos alunos da Educação Básica a utilizar um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática podem promover a aprendizagem semiótica?* A partir dessa questão, outras questões norteadoras nos ajudaram a organizar nossa reflexão e nos subsidiaram a trazer reflexões para a questão da pesquisa:

1. *Que aprendizagem conceitual é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?*
2. *Que aprendizagem algorítmica é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?*
3. *Que aprendizagem estratégica é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?*
4. *Que aprendizagem comunicativa é evidenciada na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática?*

A partir das reflexões que fizemos, da problemática e das questões norteadoras, descrevemos as compreensões que construímos ao longo da investigação. Analisamos quatro atividades desenvolvidas ao longo do primeiro e segundo trimestre de 2023, evidenciando as aprendizagens dos estudantes, integrantes de um grupo – Grupo 2 – do 6º ano do Ensino Fundamental na construção de um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática. A análise qualitativa de cunho interpretativo levou em consideração os registros escritos dos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, bem como as intervenções da professora de modo a requerer alguma ação dos alunos

Nossa análise geral foi organizada em dois procedimentos. O primeiro nos permitiu evidenciar os componentes da aprendizagem durante as atividades de modelagem matemática, ou seja, inferir quais tipos de aprendizagens se fizeram mais presentes. O segundo, por sua vez, permitiu fazer análises nas intervenções docentes no portfólio do Grupo 2 e foram classificadas por meio de agrupamentos. Dividimos as intervenções em três grupos, de acordo com o tipo de intervenção e sua finalidade, esses grupos foram: *‘Realizando mudanças em procedimentos e organizando dados’*; *‘Corrigindo equívocos’* e *‘Fazendo uso de conteúdos do 6º ano do Ensino Fundamental’*.

Com a análise das quatro atividades, do Grupo 2, evidenciamos indícios de aprendizagens conceitual, algorítmica, estratégica e comunicativa em todas elas e inferimos que as intervenções docentes realizadas no portfólio dos estudantes, corroboraram para evidenciar as aprendizagens conceitual, algorítmica, estratégica, comunicativa e semiótica durante a construção do portfólio avaliativo de Modelagem Matemática. As intervenções da professora tiveram um papel importante para poder evidenciar os indícios de aprendizagens dos alunos, pois nesse momento, a professora aproveitava para regular a aprendizagem desses alunos e, de fato pode ser reconhecido, pois sempre que havia as intervenções, os alunos mudavam seus registros. Evidenciamos os indícios de tais aprendizagens baseadas nos diferentes registros semióticos desenvolvidos, e das transformações desses registros, seja por tratamento ou conversões. Pudemos perceber que a diversidade dos registros apresentados ocorreu por meio das intervenções docente no portfólio dos estudantes, pois a professora tinha o intuito de provocar nos alunos a construção de outros tipos de representações semióticas e a avaliação aconteceu por meio do diálogo que as intervenções docentes proporcionaram.

Percebemos que a primeira atividade analisada, que também foi a primeira a ser desenvolvida com os estudantes, foi a que mais precisou de intervenções docentes, tanto no portfólio dos alunos, quanto no decorrer da atividade em sala de aula. Essa turma de 6º ano, não havia desenvolvido atividades de modelagem matemática e nem feito um portfólio. A medida que as atividades iam avançando, as intervenções docentes foram diminuindo e pudemos evidenciar que os alunos assumiram uma posição mais autônoma no desenvolvimento do trabalho.

Ao utilizar a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica, inserimos os alunos como participantes ativos na construção de seu conhecimento, logo as aulas eram mais dinâmicas e se distanciaram do ensino tradicional. No tocante à construção do portfólio, como instrumento avaliativo, temos dois pontos a serem destacados: o primeiro é que esse instrumento de avaliação permitiu avaliar durante as atividades de modelagem matemática, ou seja, os momentos que estavam aprendendo e os momentos em que estavam sendo avaliados, eram concomitantes, isso corroborou para uma avaliação formativa. O segundo ponto, diz respeito às intervenções docentes, elas foram de fundamental importância para evidenciar os indícios das aprendizagens dos alunos.

A respeito dos elementos de um portfólio, os alunos do Grupo 2, ao escreverem suas impressões a respeito das atividades, disseram que as dificuldades que encontraram foram *calcular e entender as perguntas da professora*, (Figura 65(a)) e *a atividade que eu mais tive*

dificuldade foi a do piquenique porque tinha que descobrir como que fazia as contas (Figura 65b)). Analisando essas respostas, conjecturamos que essas dificuldades eram pelo fato da professora não fazer perguntas diretas, pois a intenção era fazer com que eles pensassem e buscassem estratégias para a resolução.

Figura 65 - Considerações dos alunos a respeito de suas dificuldades

(a)

Minhas dificuldades foram os cálculos e entender as perguntas da prof.

(b)

A atividade que eu mais tive dificuldade foi a do piquenique porque tinha que descobrir como que fazia as contas.

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Os alunos do Grupo 2, ao escreverem sobre o que mais gostaram, eles responderam: *Gostei da última, da ida ao cinema porque foi mais fácil e só durou uma aula* (Figura 66(a)). E foi justamente esta atividade, ‘Ida ao Cinema’, que não foi analisada pois não houve intervenção da professora no portfólio dos alunos, visto que já estavam habituados a desenvolver atividades de modelagem e buscaram realizar todos os procedimentos que haviam feito nas atividades anteriores. Com a segunda resposta do Grupo 2, sobre o que mais gostaram, um dos integrantes escreveu: *A parte que eu gostei de fazer foram os gráficos* (Figura 66(b)). Com a resposta desse aluno, foi evidenciado que as intervenções docentes e toda a prática avaliativa trouxeram indícios de aprendizagens, pois no começo da pesquisa, na primeira e na segunda atividade a ser desenvolvida, os alunos não conseguiam fazer gráficos e a professora precisou fazer algumas intervenções para que eles aprendessem a construir, posteriormente, a construção de gráficos passou a ser natural para os alunos, de modo que intervenções nem pesquisas foram necessárias.

Figura 66 - Considerações dos alunos a respeito do que gostaram

(a)

Gostei da última da ida ao cinema porque foi mais fácil e só durou uma aula.

(b)

A parte que eu gostei de fazer os gráficos porque eu gosto de fazer.

Fonte: Portfólio do Grupo 2

Portanto, entendemos que as ações dos alunos foram mobilizadas pelas ações da professora no ato de intervenções por meio dos registros escritos e dos *feedbacks*, a fim de evidenciar as componentes da aprendizagem dos alunos.

Dessa forma, os alunos se dedicaram na maior parte do tempo, e ficou evidenciado que o portfólio proporcionou, à professora, conhecer melhor as dificuldades e facilidades dos estudantes e permitiu à professora, receber um *feedback* do seu ensino. A investigação produzida neste estudo sobre *Como as ações do professor e dos alunos da Educação Básica a utilizar um portfólio avaliativo de atividades de modelagem matemática podem promover a aprendizagem semiótica*, mostrou que houve evidências de aprendizagens conceituais, algorítmicas, estratégicas e comunicativas dos estudantes.

Temos a considerar que a implementação do portfólio como instrumento avaliativo em práticas de atividades de modelagem matemática, se mostrou oportuna, pois foi possível perceber que a avaliação formativa foi crucial para que os alunos compreendessem o conteúdo e construíssem conhecimentos matemáticos.

Assim, os resultados apresentados neste estudo, contribuíram com as pesquisas sobre avaliação em Modelagem Matemática, sugeriram caminhos para utilizar o portfólio como instrumento avaliativo e entendemos a necessidade de mais pesquisas envolvendo a temática. Há de se ressaltar, todavia, que algumas discussões faladas realizadas pelos grupos e que não foram registradas no portfólio, em certa medida, orientaram os encaminhamentos da atividade. Neste sentido, entendemos que o portfólio escrito é limitador quanto às ações que circunstanciaram e mediaram as decisões dos alunos. Uma possibilidade de abarcar e considerar essas ações poderia ter sido empreendida por meio de gravações das discussões de cada grupo,

trabalhando um pouco mais afastados uns dos outros para não ter interferências nas falas e que poderiam auxiliar nas análises. Também poderia ser considerada a possibilidade de construção do webfólio em algum ambiente virtual de ensino e aprendizagem em que os alunos poderiam disponibilizar vídeos e áudios entre as coleções de ações no desenvolvimento de cada atividade.

Outro aspecto que nosso estudo, bem como a participação em disciplinas do mestrado profissional, trouxe para a pesquisadora diz respeito ao seu crescimento acadêmico e profissional, em que conciliou teoria dos estudos com a prática docente, podendo enriquecer as metodologias da sala de aula, com contribuições diferentes das tradicionais para seus estudantes. Com certeza, seu olhar já é diferenciado na sala de aula, no tocante ao método de ensinar e de avaliar. Avaliar, olhando para o aluno durante todo o processo, e não apenas no produto e estar mais atenta a cada detalhe dos questionamentos, dúvidas, enfim, ouvir mais o aluno na sala de aula.

Esperamos que nosso trabalho tenha contribuído para as pesquisas, seja com nossa experiência, ou que tenha indicado possibilidades de continuidade de pesquisa sobre a mesma temática. E quem sabe: analisar todos os grupos de uma turma ou elaborar questionamentos que não sejam muito repetitivos. Aproveitamos a oportunidade, para fazer o convite para conhecer nosso Produto Educacional, esperamos que ele possa auxiliar no desenvolvimento de aulas com atividades de modelagem matemática e utilizar o portfólio como instrumento de avaliação.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. M. W. Uma abordagem didático-pedagógica da Modelagem Matemática. **VIDYA**, v. 42, n. 2, p. 121-145, jul./dez., 2022.
- ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, Berlim, v. 50, n. 1/2, p. 19-30, 2018.
- ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S.. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. **Ciência & Educação (UNESP)**, v. II, p. 1-16, 2005.
- ALMEIDA, L. M. W.; MAGALHÃES, G. G. Estruturando e validando uma ferramenta para avaliação em atividades de modelagem matemática. **Avances de Investigación em Educación Matemática**, p. 71-89, 2022.
- ALMEIDA, L. M.W.; SILVA, K. A. P. **Modelagem Matemática em Foco**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; BORSSOI, A. H. Um estudo sobre o potencial da experimentação em atividades de modelagem matemática no ensino superior. **Quadrante**, v.30, n.2, p.123-146, 2021.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1 ed. São Paulo: Contexto, 2013.
- ARAKI, P. H. K.; SILVA, K. A. P.; MENDES, M. T. Intervenções docentes em atividades de modelagem matemática: foco na matematização. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 26, n.72, p. 58-75, jul./set. 2021.
- BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veriati**, Lisboa, n.4, p.73-80, 2004.
- BARROS, M. C.; KATO, L. A. **A utilização de Registros de Representação Semiótica na aprendizagem das equações diferenciais ordinárias favorecida pela atividade de modelagem matemática**. In: Almeida, L. M; Silva, K. P.; Veronez, M. R. (org). Elementos semióticos em atividades de modelagem matemática. – 1 ed. – São Paulo: Livraria da Física, 2021. p. 165-183.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2022.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.
- BASSANEZI, R. C. **Modelagem como estratégia metodológica no ensino da matemática**. Boletim de Educação da SBMAC. São Paulo: IMECC/Unicamp, 1994.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. **Análise de modelos matemáticos: contribuições dos Registros de Representação Semiótica**. In: Almeida, L. M.; Silva, K. P.; Veronez, M. R. (org). Elementos semióticos em atividades de modelagem matemática. – 1 ed. – São Paulo: Livraria da Física, 2021.p. 149-164.

BLUM, W. Icmi study 14: applications and modeling in mathematics education – discussion document. **Educational Studies in Mathematics**, n.51, p. 149–171, 2002.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects -state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**. Netherlands, v. 22, n.1, p. 37-68, feb. 1991.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. 12 ed. Porto: Porto, 2010.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W. Atividades de modelagem matemática e uso da Tecnologia: uma análise semiótica. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 7, Santa Maria: 2013. **Anais...** Centro Universitário Franciscano: Santa Maria, Rio Grande do Sul.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino aprendizagem**. 1992. 460 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

BURAK, D. **Modelagem matemática: uma alternativa para o ensino de matemática na 5ª série**. 1987. 188 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1987.

BURAK, D.; BRANDT, C. F. Modelagem Matemática e Representações Semióticas: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **ZETETIKÉ – FE – Unicamp** – v. 18, n. 33 – jan/jun – 2010.

CARREIRA, S. P. G.; BAIOA, A. M. Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: On the student's sense of credibility. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 201-215, 2018.

CEOLIM, A. J. **Modelagem Matemática na Educação Básica: Obstáculos e Dificuldades apontados por professores**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de São Carlos, 2015.

CHUEIRI, M. S. F. Concepções sobre a avaliação escolar. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 19, n. 39, jan/abr. p. 49 -64, 2008.

DALTO, J. O.; SILVA, K. A. P. Atividade de modelagem matemática como Estratégia de Avaliação da Aprendizagem. **Educação Matemática em Revista**, v. 23, n.57, p. 34-45, 2018.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos da Semiótica** – Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. 1ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.

DUVAL, R. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representações Semióticas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.2, n.3. Entrevista concedida a José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende, jul-d.ez 2013.

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). *Aprendizagem em matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: SP. Editora Papirus, 2003.

DUVAL, R. Registro de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mércles Tadeu Moretti. **Revemat**:. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Semiosis y Pensamiento Humano** – Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Trad. Myriam Veja Restrepo. Universidad del Vale. Santiago de Cali, Colombia, 2004.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os Registros de Representações Semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

FERRI, R. B. **Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education**. Springer International Publishing. University of Kassel. Germany, 2018.

FREJD, P. Modelling Assessment of Mathematical Modelling – a Literatura Review. Department of Mathematics, Linköping University, 2012.

GIOVANNI J. J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da matemática**: 6º ano: ensino fundamental: anos finais. -4 ed. – São Paulo, FTD, 2018.

GOMES, M. T. **O Portfólio na Avaliação da Aprendizagem Escolar**. (Dissertação de mestrado). Universidade Federal do Paraná, 2003.

GOMES, J. C. S. P.; SILVA, K. A. P. Modelagem Matemática na perspectiva da educação matemática: um encaminhamento de atividade. **XV EPREM**. out. 2019. Anais. p. 1-12.

HADJI, C. **A avaliação, regras do jogo**: das intenções aos instrumentos. Porto: Porto Editora, 1994.

HERNÁNDEZ, F. **Cultura visual. mudança educativa e projeto de trabalho**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

HERNÁNDEZ, F. **Transgressão e mudança na educação: Os projetos de trabalho**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

JÜRGENSEN, B. O portfólio como instrumento de avaliação do aprendizado em contextos de Educação Matemática Crítica: análise da percepção de estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental. **Revista de Educação Matemática (REMat)**, São Paulo (SP), v.19, Edição Especial: Práticas Avaliativas e a Sala de Aula de Matemática, p. 01-24, e022036, 2022.

LEIB, D., & TROPPER, N. **Intervenções adaptativas do professor em Modelagem Matemática**. In: International Congress on Mathematical Education, 12, Seul. ICME, (pp. 3311–3320), 2012

LUVISON, M. **Avaliação em projetos de Modelagem Matemática no Ensino Médio**. 88 p. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

MAGALHÃES, G. G. **Avaliação em práticas de Modelagem Matemática na sala de aula**. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

MAGALHÃES, G. G.; ALMEIDA, L. M. W. Avaliação em Modelagem Matemática: Focos e Modos de fazer. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.10, n.23, p.305-327, 2021.

MALHEIROS, A. P. S., FRANCHI, R. H. O. L. As Tecnologias da Informação e Comunicação nas produções sobre Modelagem no GPIMEM. In: **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física. P. 175-194, 2013.

MENDES, M. T. **Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 276 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2014.

MENDES, M. T.; MAGNONI, A. F.; GONÇALVES, W. J.; TREVISAN, A. L.. Portfólio de Aprendizagem: Um instrumento para avaliação em aulas de cálculo diferencial e integral. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, Florianópolis, v.14, n.2, p.01-20, 2019.

NISS, M. **Assessment in mathematics education and its effects: An introduction**. In: M. Niss (Ed). Investigations into assessment in mathematics education: An ICMI Study. p. 1–30, 1993.

NUNOMURA, A. R. T. **Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: Um olhar para os Registros de Representação Semiótica**. 144 p. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

PAZUCH, V.; NEHRING, C. M. A vivência de uma intervenção docente: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de matemática. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 511-531, 2012.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 4 ed. São Paulo, Perspectiva, 2015.

PINILLA, M. I. F. **Múltiples Aspectos del aprendizaje de la matemática**. Evaluar e intervenir em forma mirada y específica. 1ª ed. Cooperativa Editorial Magisterio, 2010.

PINTO, A. R. **A avaliação do estudante em atividades de modelagem matemática: O que as pesquisas apontam?** 124p. Dissertação de Mestrado (Pós-Graduação em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2017.

PONTES, H. M. S.; BRANDT, C. F. Modelagem Matemática e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica: uma possibilidade. In: ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERONEZ, M. R. (org). **Elementos semióticos em atividades de modelagem matemática**. – 1 ed. – São Paulo: Livraria da Física, p. 221-239, 2021.

ROSA, C. C. da. **Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de modelagem matemática no Ensino Médio**. 142 p. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

RODRIGUES, C. T.; PEIRCE, C. S. Tomo Teoria Geral e Filosofia do Direito. **Enciclopédia Jurídica da PUCSP**. Ed.1, São Paulo, Abril, 2017.

SILVA, K. A. P.; BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Uma análise semiótica de atividades de modelagem matemática mediadas pela tecnologia. **R.B.E.C.T**, Curitiba, v. 8, n.1, jan-abr. 2015.

SILVA, K. A. P.; BORSSOI, A. H.; DALTO, J. O. Em direção à matematização em atividades de modelagem matemática: intervenções mediadas pela avaliação em fases. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.10, n.23, p.237-262, 2021.

SILVA, K. A. P.; DALTO, J. O. Portfólio de atividades de modelagem matemática como instrumento de avaliação formativa. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n.1pp. 371-393, 2020.

SILVA, K. A. P.; DALTO, J. O. Uma estratégia de Avaliação de Atividades de modelagem matemática. **Revista Electrónica de investigación en educación en ciencias**, v. 12, n.2, p. 1-17, 2017.

SILVA, K. A. P.; DALTO, J. O.; BORSSOI, A. H. Webfolio de actividades investigativas como herramienta de evaluación formativa y sumativa. **Revista Paradigma**, v.XLIV, n.3, p.334-364, 2023.

SILVA, K. A. P.; DALTO, J. O.; LUVISON, M. Portfólio em uma disciplina do ensino superior: Alguns aspectos evidenciados. **Rev. Educ., Cult., Soc.**, Sinop/MT/Brasil, v.11, n. 2, p. 92-105, jul/dez 2021.

SILVA, K. A. P.; TRINDADE, S. L. Componentes da aprendizagem evidenciados nas fases de uma atividade de modelagem matemática. **Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática**, v.32, n.1, p. 50-76, 2023.

SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. Um estudo sobre as intervenções docentes em contextos de atividades investigativas no âmbito de aulas de Matemática do Ensino Superior. **Ciência & Educação**, v. 24, n. 2, p. 501-516, 2018.

SOARES, C. V. C. O. **As intervenções pedagógicas em ambientes informatizados: uma realidade a ser construída**. 2005. 133 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

SOUZA, L. B. **Modelagem Matemática: os olhares dos estudantes após o desenvolvimento de uma atividade**. Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2022.

STENDER, P. The use of heuristic strategies in modelling activities. **ZDM: The International Journal on Mathematics Education**, v. 50, n.1-2, p. 315–326, abril 2018.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática**. 2013. 176p. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. 2007. 141 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

VIEIRA, V. M. O. Portfólio: uma proposta de avaliação como reconstrução do processo de aprendizagem. **Psicol. Esc. Educ.** v.6 n.2 Campinas, dez. 2002.

VILLAS BOAS, B. M. F. Contribuições do portfólio para a organização do trabalho pedagógico. **Estudos em avaliação educacional**. Fundação Carlos Chagas, n. 23, p. 137-152, jan/jun, 2001.

VILLAS BOAS, B. M. F. O portfólio no curso de pedagogia: Ampliando o diálogo entre professor e aluno. **Educação e Sociedade**, Campinas, v.26, n.90, p.291-306, jan./abr, 2005.

VILLAS BOAS, B. M. F. Portfólio, avaliação formativa e *feedback*. In: VILLAS BOAS, B. M. de F. (org). **Avaliação: interações com o trabalho pedagógico**. Campinas: Papirus Editora, p. 157-168, 2017.

WEBER, T. C. **Articulação da Avaliação Somativa com Avaliação Formativa em aulas de matemática**. Dissertação (Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Câmpus Londrina, 2020.

APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA PESQUISA

Senhora diretora,

Eu, Priscila de Castro Barros Greca, mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Londrina/Cornélio Procópio, venho por meio desta solicitar a sua autorização para a realização da pesquisa intitulada “A aprendizagem semiótica em portfólios de atividades de modelagem matemática”, a ser conduzida nesta escola.

O objetivo do estudo é evidenciar a aprendizagem semiótica em portfólios de atividades de modelagem matemática de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, no componente curricular matemática.

Na oportunidade, solicitamos autorização para que realize a pesquisa através de coleta de dados provenientes de observação, aplicação de questionários, registros escritos e audiovisuais. Queremos informar que o caráter ético desta pesquisa assegura a preservação da identidade das pessoas participantes, comprometendo-nos com o anonimato.

Agradecemos vossa compreensão e colaboração no processo de desenvolvimento desta pesquisa. Em caso de dúvida entrar em contato com a orientadora da pesquisa Karina Alessandra Pessoa da Silva pelo e-mail: karinasilva@utfpr.edu.br

Assaí, _____ de _____ de 2023.

.....

Diretora do Estabelecimento de Ensino

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu _____
responsável pelo aluno (a) _____
autorizo sua participação na pesquisa intitulada “A aprendizagem semiótica em portfólios de atividades de modelagem matemática”, sob responsabilidade da discente Priscila de Castro Barros Greca, sob orientação da docente Karina Alessandra Pessoa da Silva. Declaro que permito que obtenha fotografia, filmagem ou gravação no decorrer das atividades em sala de aula, para fins de pesquisa científica. Autorizo que o material e as informações obtidas possam ser utilizados parcial ou integralmente, sem restrições de prazos, desde a presente data, para a apresentação na presente pesquisa ou em publicações, seminários, congressos ou periódicos científicos, sem a identificação por nome em qualquer via de publicação ou uso.

Declaro que fui informado acerca da investigação que pode ser desenvolvida.

Assaí, _____ de _____ de 2023.

.....
Assinatura do responsável

APÊNDICE C – FOLHA DA ATIVIDADE PIQUENIQUE

Componente Curricular: Matemática

Professora: _____

Nome: _____

Grupo nº: _____ Turma: _____ Data: _____

Atividade: Piquenique



O que vocês acham de fazermos uma aula de matemática diferente onde além de aprender muito sobre matemática, poderemos divertir, comer e brincar? Pois é, quero propor a vocês uma atividade assim! Isso mesmo, onde vamos poder sair da escola por umas horas e nos divertir! O que vocês acham?

Para que tudo dê certo é preciso de planejamento para que não ocorram imprevistos, como por exemplo, faltar comida, imagina que chato se faltar salgadinhos ou refrigerantes durante o lanche no piquenique...ninguém vai gostar, não é mesmo?

Pois então, vamos logo começar o nosso planejamento? Para início, precisamos saber o que levar de comida e de utensílios para que tudo ocorra da melhor forma. Respondam a enquête abaixo sobre o que você gostaria de comer e beber durante o nosso piquenique:

Marque um X no item que vocês gostariam de comer e beber no piquenique	
Salgadinhos fritos	
Pão de Queijo	
Bolachas	
Salgadinhos tipo chips	

Água	
Refrigerante	
Suco	

Vamos! Respondam! Para que possamos dar prosseguimento em nosso planejamento!
Depois de terem respondido a enquete, como vocês organizariam os dados coletados?

Agora que já sabemos o que iremos comprar de comida e bebida, precisamos pensar nas quantidades que teremos de comprar em cada item. Ah... não podemos esquecer que temos que levar copos descartáveis e guardanapos de papel. Escrevam no espaço abaixo como você organizaria essa compra. Lembrando que irão participar todos os alunos dos sextos anos do colégio e mais cinco professores.

Nesse momento já temos a quantidade total de tudo que precisamos comprar e agora precisamos pesquisar os preços desses itens. Façam uma pesquisa dos preços dos itens e organizem essas informações no espaço abaixo.

Agora que vocês já calcularam tudo, respondam a seguinte pergunta:

Considerando a participação de _____ pessoas, qual a quantidade total a ser comprada de cada alimento e material para o piquenique e qual o valor a ser pago por cada participante?

APÊNDICE D – FOLHA DA ATIVIDADE ÁGUA

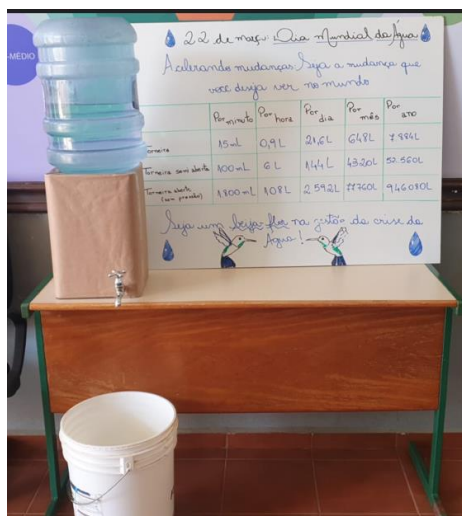
Componente Curricular: Matemática

Professor(a): _____

Nome: _____

Grupo nº: _____ Turma: _____ Data: _____

Atividade: Água



Dia 22 de março foi comemorado o Dia Mundial da água. Vocês repararam no cartaz que ficou exposto na entrada da escola sobre o desperdício de água?

Escreva o que vocês entenderam ao ler o cartaz

Tem alguma outra forma de representar os dados contidos no cartaz? Qual?



Ao ver essa imagem. O que vocês acham que ela representa?

Você saberia me dizer quantas torneiras tem na escola? Será que alguma está pingando água o tempo todo? Agora é hora de fazermos uma vistoria pela escola para descobrir tudo isso!!

Registre aqui seus dados coletados durante essa vistoria.

--

Vamos supor que todas as torneiras da escola pingassem nessa mesma proporção, quanto de água gastaria?

O quanto a escola pagaria na conta de água por esse desperdício? Mas antes você precisa pesquisar o valor da tarifa de água.

APÊNDICE E – FOLHA DA ATIVIDADE ENERGIA ELÉTRICA

Componente Curricular: Matemática

Professor(a): _____

Nome: _____

Grupo nº: _____ Turma: _____ Data: _____

Atividade: Energia Elétrica

Em uma aula da semana passada, fizemos a leitura do livro da página 45 – “Por dentro da energia elétrica” que explicou sobre as hidrelétricas, o consumo de energia elétrica e a leitura do relógio de luz. Também foi visto um vídeo explicativo sobre como fazer a leitura nos diferentes tipos de relógios de luz. <https://youtu.be/muzx-E6a3Do>



Qual o tipo de relógio da sua residência?

() medidor de ponteiro () ciclométrico () digital

Agora que você já fez a leitura diária de sua residência por uma semana, registre aqui os dados coletados.

Com os dados que você coletou, você consegue descobrir quanto de Quilowatt hora foi consumido diariamente em sua residência durante a semana pesquisada? Faça os cálculos e registre no espaço abaixo de forma clara.

Cálculos:

Além da maneira que você representou anteriormente, existe outra maneira de representar essas informações? Se sim, registre no espaço abaixo:

Agora que você já fez algumas representações, nós vamos no Laboratório de Informática aprender a construir tabelas e gráficos na Planilha Excel.

Responda utilizando os valores da pesquisa realizada.

- a) Qual foi a média de consumo dos dias de leitura da sua casa?

Cálculos:

R: _____

- b) Com base na média, faça uma estimativa de quanto Quilowatt gasta por mês na sua casa.

Cálculos:

R: _____

- c) Supondo que o valor de Kw/h seja de R\$ 0,85. Calcule o valor da conta de luz mensal da residência pesquisada.

Cálculos:

R: _____

- d) Faça uma projeção de quanto cada pessoa dessa casa gasta por mês de energia elétrica.

Cálculos:

R: _____

APÊNDICE F – FOLHA DA ATIVIDADE COMPETIÇÃO DE CARRINHOS

Componente Curricular: Matemática

Professor(a): _____

Nome: _____

Grupo nº: _____ Turma: _____ Data: _____

Atividade: Competição de carrinhos

Vocês com certeza já brincaram de carrinho de fricção, agora irão fazer uma competição de carrinhos entre as equipes da sala para ver qual equipe será a vencedora.

A equipe campeã será aquela que conseguirá chegar no ponto final no tempo mais curto.

Então vamos lá!!

Escolham o melhor carrinho de fricção que vocês têm em casa e tragam para a escola no dia marcado para a competição.



Um de vocês deverão filmar toda a trajetória do carrinho, desde o momento da partida até o momento da chegada do carrinho.

Através da filmagem e do aplicativo Tracker, analisem a trajetória do carrinho e respondam as seguintes questões:

a) Represente no espaço abaixo como foi o desenho da pista:

b) Qual era o tempo no vídeo no momento da largada?

b) Qual era o tempo no vídeo quando o carrinho percorreu $\frac{1}{4}$ da pista?

c) Qual era o tempo no vídeo quando o carrinho percorreu metade ($\frac{1}{2}$) da pista?

d) Qual era o tempo no vídeo quando o carrinho percorreu $\frac{3}{4}$ da pista?

e) Qual era o tempo no vídeo quando o carrinho chegou no final da pista?

f) Em quanto tempo o carrinho percorreu a pista toda?

Cálculo:

Agora que vocês já fizeram algumas análises do carrinho do seu grupo, faça uma pesquisa em todos os grupos da sala e pergunte para eles em quanto tempo o carrinho deles demorou para percorrer a pista toda e representem essas informações de uma forma que fique clara.



Com base nos dados que você coletou, você consegue informar qual foi a equipe campeã?

ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Aprendizagem semiótica em portfólios avaliativos de atividades de modelagem no 6º ano do Ensino Fundamental
Título do Produto/Processo Educacional	Portfólio de atividades de modelagem matemática: um construto para professores de matemática
Autores do Produto/Processo Educacional	Discente: Priscila de Castro Barros Greca
	Orientadora: Karina Alessandra Pessoa da Silva
	Outros (se houver):
Data da Defesa	01/03/2024

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u> Linhas de Pesquisa do PPGMAT: <i>L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático</i> (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);	() Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

<i>L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u> A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	() PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. () PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). () PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. <u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u>	() Local () Regional () Nacional (X) Internacional Justificativa (<i>obrigatória</i>): Apesar de estar em língua portuguesa, o contexto é de âmbito internacional, podendo ser acessado na internet.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u>	() PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.

Área impactada <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u>	() Econômica; () Saúde; (X) Ensino; () Cultural; () Ambiental; () Científica; () Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. <u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u>	(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (X) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. () Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. () Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	() PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). () PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
Karina Alessandra Pessoa da Silva	UTFPR
Lahis Braga Souza	UFAC
Marcele Tavares	UTFPR