

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**LEONARDO ANDRÉ ROSSATO**

**ANÁLISE DA CONFIGURAÇÃO DEFORMADA EM VIGAS E LAJES  
NERVURADAS UNIDIRECIONAIS DE CONCRETO ARMADO COM  
CONSIDERAÇÃO DE FISSURAÇÃO**

**APUCARANA**

**2022**

**LEONARDO ANDRÉ ROSSATO**

**ANÁLISE DA CONFIGURAÇÃO DEFORMADA EM VIGAS E LAJES  
NERVURADAS UNIDIRECIONAIS DE CONCRETO ARMADO COM  
CONSIDERAÇÃO DE FISSURAÇÃO**

**ANALYSIS OF THE DEFORMED CONFIGURATION IN BEAMS AND  
UNIDIRECTIONAL RIBBED SLABS REINFORCED CONCRETE WITH CRACKING  
CONSIDERATION**

Trabalho de conclusão de curso de graduação  
apresentado como requisito para obtenção do título de  
Bacharel em Engenharia Civil da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).  
Orientador(a): Prof. Dr. Leonardo Martins e Silva

**APUCARANA**

**2022**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**LEONARDO ANDRÉ ROSSATO**

**ANÁLISE DA CONFIGURAÇÃO DEFORMADA EM VIGAS E LAJES  
NERVURADAS UNIDIRECIONAIS DE CONCRETO ARMADO COM  
CONSIDERAÇÃO DE FISSURAÇÃO**

Trabalho de conclusão de curso de graduação  
apresentado como requisito para obtenção do título de  
Bacharel em Engenharia Civil da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 15 de junho de 2022

---

Leonardo Martins e Silva  
Titulação Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Apucarana

---

Luiz Antonio Farani de Souza  
Titulação Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Apucarana

---

Wallison Angelim Medeiros  
Titulação Mestrado  
Universidade Federal de São Carlos

**APUCARANA**

**2022**

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecer a Deus, por me agraciar com pessoas que me motivam na minha jornada.

Agradecer também à minha família, em pessoas como meus pais: Mônica de Fátima Coelho e André Anderson Rossato, que planejaram minha vida acadêmica desde o momento em que souberam que eu estaria por vir a este mundo, e seguem me apoiando em cada etapa vencida.

Ao meu Guru, Reginaldo dos Santos Simões, contribuindo com importantes reflexões a respeito da busca pelo conhecimento.

A importância do meu orientador Prof. Dr. Leonardo Martins e Silva, com notório conhecimento, contribuiu, não somente neste trabalho, mas também significativamente na minha formação acadêmica.

A Banca Examinadora que aceitou corrigir e fazer parte da construção do que se tornou este trabalho, nas pessoas do Prof. Dr. Luiz Antonio Farani e Prof. Me. Wallison Medeiros, minha eterna gratidão.

À UTFPR e a todas as pessoas desta instituição, desde o colegiado, colegas de turma, colegas de curso, em especial as colegas Amanda e Daise, e os amigos de república. E a cada colaborador da UTFPR que em seu “bom dia” me motivou a acreditar no ensino público, nunca antes havia experimentado uma experiência tão democrática, justa e igualitária.

## RESUMO

Desde os primórdios da invenção do concreto armado uma característica fundamental deste material é fissurar quando solicitado a tensões de tração. A previsão dos deslocamentos das estruturas de concreto armado é de bastante complexidade, sendo a fissuração uma importante variável. Diversas são as problemáticas envolvendo deformações excessivas, dessa maneira, os modelos que avaliam com acurácia a deformabilidade dos elementos em concreto armado são imprescindíveis. O presente estudo analisou o comportamento de seções de concreto armado fletidas segundo modelos propostos por pesquisadores. Esperava-se avaliar os deslocamentos obtidos por meio de modelos teóricos e compará-los com resultados experimentais. Na prática, os protótipos não atingiram o estágio II de deformação, ficando a pesquisa restrita a análise da flecha imediata por meio de modelos teóricos para as seções estudadas. Os resultados obtidos para os deslocamentos foram elucidativos e didáticos de maneira a contribuir com as pesquisas no âmbito da análise de estruturas na engenharia.

Palavras-chave: deslocamentos; fissuração; concreto armado; lajes unidirecionais.

## **ABSTRACT**

Since the beginning of the invention of reinforced concrete a fundamental feature of this material is cracking when requested to tensile stresses. The prediction of displacements of reinforced concrete structures is quite complex, and cracking is an important variable. There are several problems involving excessive deformations, so the models that evaluate with accuracy the deformability of elements in reinforced concrete are essential. The present study analyzed the behavior of deflection in reinforced concrete sections according to models proposed by researchers. It was expected to evaluate the displacements obtained through theoretical models and compare them with experimental results. In practice, the prototypes did not reach stage II of deformation, and the research restricted the analysis to immediate arrow by means of theoretical models for the studied sections. The results obtained for the displacements were elucidative and didactic in order to contribute to the research in the scope of the analysis of structures in engineering.

Keywords: displacements; cracking; reinforced concrete; unidirectional slabs.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Barco de Lambot.....	13
Figura 2 – Viga fissurada em ensaio à flexão .....	15
Figura 3 – Série de vigas de seção T (maciça junto aos apoios) .....	16
Figura 4 - Modelo de laje nervuradas (seção T) .....	17
Figura 5 – Determinação do módulo de elasticidade do concreto à compressão .....	22
Figura 6 – Curva de Gauss para a resistência a compressão do concreto .....	23
Figura 7 - Diagrama $\sigma$ x $\epsilon$ idealizado para o concreto à compressão .....	24
Figura 8– Diagrama $\sigma$ x $\epsilon$ do concreto variando o tempo de carregamento .....	26
Figura 9 – Diagrama $\sigma$ x $\epsilon$ para o concreto à tração .....	27
Figura 10 - Gráfico de deformação ao longo do tempo sob efeito de uma tensão constante .....	29
Figura 11 – Tipos de superfície de aço para concreto armado.....	31
Figura 12 - Diagrama real $\sigma$ x $\epsilon$ para aços laminados (a) e trefilados (b) .....	32
Figura 13 - Diagrama $\sigma$ x $\epsilon$ para aços de armaduras passivas .....	33
Figura 14 - Comportamento do concreto na flexão (Estádio I) .....	34
Figura 15 - Viga de concreto armado simplesmente apoiada sob ações de serviço .....	35
Figura 16 – Seção transversal em “T” no estágio II (puro) .....	36
Figura 17 – Diagrama momento-curvatura para um elemento fletido.....	37
Figura 18 – Comportamento do concreto na flexão (Estádio III) .....	38
Figura 19 – Diagrama parábola-retângulo (ELU).....	38
Figura 20 – Curvatura para um elemento fletido.....	43
Figura 21 - Eixo deformado de elemento reticulado .....	44
Figura 22 – Materiais para enchimento em lajes nervuradas .....	51
Figura 23 – Notações utilizadas para seção T .....	52
Figura 24 – Protótipos de lajes nervuradas unidirecionais .....	56
Figura 25 – Posicionamento dos relógios comparadores.....	57
Figura 26 – Características geométricas e resistências obtidas para os protótipos .....	58
Figura 27 – Seção transversal adotada .....	59
Figura 28 – Seção transversal para o Exemplo 1.....	60
Figura 29 – Seção transversal para o Exemplo 2.....	60
Figura 30 – Seção transversal para o Exemplo 3.....	61
Figura 31 – Modelo discretizado.....	62
Figura 32 – Momentos atuantes para incrementos de carga (CCV) .....	63
Figura 33 – Interface do programa.....	63
Figura 34 – Armadura de aço imersa em concreto .....	66
Figura 35 – Malha de elementos .....	66
Figura 36 – Configuração deformada do protótipo - CCV .....	72
Figura 37 – Configuração deformada do protótipo – CAA.....	73

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1 - Características geométricas de seções transversais em "T" no estádio I, sem considerar a presença da armadura .....</b>	<b>52</b>
<b>Quadro 2 - Características geométricas de seções transversais em "T" no estádio I, considerando a contribuição da armadura .....</b>	<b>53</b>



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores do coeficiente de conformação superficial .....	31
Tabela 2 – Valores do coeficiente $\xi_t$ em função do tempo .....	50
Tabela 3 – Resistências obtidas para os protótipos .....	58
Tabela 4 – Momentos de inércia obtidos para os protótipos .....	59
Tabela 5 – Propriedades elásticas para o aço .....	64
Tabela 6 – Propriedades elásticas para o concreto .....	64
Tabela 7 – Parâmetros para o modelo CDP .....	64

## LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	American Concrete Institute
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite Último
MEF	Método dos Elementos Finitos
NBR	Norma Brasileira
NLF	Não Linearidade Física
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

## LISTA DE SÍMBOLOS

$E_{ci}$	Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto
$E_{cs}$	Módulo de elasticidade secante do concreto
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço
$\varepsilon$	Deformação
$f_{ct}$	Resistência do concreto à tração direta
$f_{ct,m}$	Resistência média do concreto à tração direta
$f_c$	Resistência à compressão do concreto
$f_{cm}$	Resistência média à compressão do concreto
$f_{ck}$	Resistência característica do concreto
$f_{cd}$	Resistência à compressão de projeto do concreto
$f_y$	Resistência ao escoamento do aço
$f_{yk}$	Resistência característica ao escoamento do aço
$f_{yd}$	Resistência ao escoamento de projeto do aço
$\alpha_e$	Coefficiente de homogeneização da seção
$A_h$	Área (seção homogeneizada)
$A_s'$	Área da seção da armadura longitudinal de compressão
$A_s$	Área da seção da armadura longitudinal de tração
$\Phi$	Diâmetro nominal
$h$	Altura da seção transversal
$h_f$	Altura da mesa (seção transversal T)
$b_w$	Largura da seção transversal
$b_f$	Largura da mesa (seção transversal T)
$d$	Altura útil
$L$	Vão (distância entre os apoios)
$x_I$	Profundidade da linha neutra no Estádio I
$x_{II}$	Profundidade da linha neutra no Estádio II
$I_I$	Momento de inércia no Estádio I
$I_{II}$	Momento de inércia no Estádio II
$I_h$	Momento de inércia (seção homogeneizada)
$I_g$	Momento de inércia da seção bruta de concreto
$I_{eq}$	Momento de inércia equivalente
$y_t$	Distância da linha neutra elástica (Estádio I) à fibra mais tracionada
$y_{cg}$	Distância centro de gravidade
$y_h$	Distância centro de gravidade (seção homogeneizada)
$M_a$	Momento atuante
$M_r$	Momento de fissuração
$\zeta$	Coefficiente de interpolação entre os Estádios I e II
$a_i$	Flecha imediata
$a_f$	Flecha total diferida no tempo
$g$	Carregamento devido ao peso próprio
$q$	Carregamento adicional

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>13</b>
1.1	Justificativa .....	17
1.2	Objetivos .....	19
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>20</b>
2.1	Relação constitutiva .....	20
2.2	Concreto.....	21
2.2.1	Tensão-deformação do concreto à compressão .....	24
2.2.2	Tensão-deformação do concreto à tração .....	26
2.2.3	Retração .....	28
2.2.4	Fluência .....	29
2.3	Aço.....	30
2.3.1	Relação constitutiva do aço .....	32
2.4	<b>Estádios de deformação do concreto armado</b> .....	<b>33</b>
2.4.1	Estádio I (estado elástico) .....	34
2.4.2	Estádio II (estado de fissuração).....	34
2.4.3	Estádio III (estado de ruptura) .....	38
2.5	<b>Rigidez equivalente</b> .....	<b>39</b>
2.6	<b>Momento de fissuração</b> .....	<b>40</b>
2.7	<b>Deslocamentos imediatos</b> .....	<b>41</b>
2.7.1	Equação da linha elástica.....	42
2.7.2	Princípio dos Trabalhos Virtuais .....	45
2.7.3	Teorema de Castigliano.....	45
2.7.4	Formulação Matricial .....	46
2.7.5	Método dos Elementos Finitos.....	47
<u>2.7.5.1</u>	<u>Elementos de Viga</u> .....	<u>48</u>
2.8	<b>Deslocamentos diferidos no tempo</b> .....	<b>48</b>
2.9	<b>Lajes nervuradas unidirecionais</b> .....	<b>50</b>
2.9.1	Seção T .....	51
2.9.2	Características geométricas de seções T nos estádios I e II.....	52
<b>3</b>	<b>PROCEDIMENTO METODOLÓGICO</b> .....	<b>55</b>
3.1	<b>Protótipos</b> .....	<b>55</b>
3.1.1	Concreto .....	57
3.1.2	Aço .....	58

3.1.3	Propriedades geométricas	<b>SUMÁRIO</b>	58
<b>3.2</b>	<b>Seções apresentadas por Carvalho e Figueiredo Filho (2020)</b>		<b>59</b>
3.2.1	Laje nervurada pré-moldada – Exemplo 1		59
3.2.2	Laje nervurada pré-moldada – Exemplo 2		60
3.2.3	Viga retangular – Exemplo 3		60
<b>3.3</b>	<b>Modelos teóricos</b>		<b>61</b>
3.3.1	Modelo da ABNT NBR 6118 (2014)		61
3.3.2	Modelo proposto por Branson (1965)		61
3.3.3	Modelo incremental utilizando a rigidez corrigida		61
3.3.4	Modelo de elementos finitos		63
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>		<b>67</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>		<b>74</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>		<b>76</b>
	<b>APÊNDICE A - Protótipo 1</b>		<b>80</b>
	<b>APÊNDICE B - Protótipo 2</b>		<b>86</b>
	<b>APÊNDICE C - Exemplo 1</b>		<b>92</b>
	<b>APÊNDICE D - Exemplo 2</b>		<b>98</b>
	<b>APÊNDICE E - Exemplo 3</b>		<b>104</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O concreto armado é um sistema construtivo contemporâneo e sua origem é datada em 1848, na França, ano em que Joseph Lambot construiu um barco a remo em concreto reforçado com finas barras de ferro com intuito de aumentar a coesão e, portanto, sua resistência total, conforme mostra a Figura 1. Tal fato tornou-se um marco, considerado a primeira aplicação do concreto armado na história (CONDIT, 1968).

**Figura 1 – Barco de Lambot**



**Fonte: Escales Maritimes (2008) <sup>1</sup>**

O papel do metal, que se tornaria o aço de baixo teor de carbono anos mais tarde, é principalmente para conferir uma resistência à tração trabalhável a um material que possui essa propriedade apenas em um grau insignificante, fissurando nas partes em que sua seção é submetida a tal esforço (CONDIT, 1968).

As inovações decisivas surgiram na década de 1870, e nos trinta anos seguintes. Josef Monier estava destinado a desempenhar um papel mais importante quando lhe foi concedida uma patente em 1867 para o reforço de vasos de flores de jardim por meio de uma malha de arame pesada embutida na argamassa. Dez anos mais tarde, recebeu outra patente para uma técnica mais avançada: o reforço de pilares e vigas de concreto com uma grade de barras de ferro (CONDIT, 1968, p. 2, tradução nossa).

<sup>1</sup> Disponível em <<https://escales.wordpress.com/2008/11/18/le2%80%99incroyable-filiation-d%e2%80%99un-petit-bateau-un-peu-fou/>>. Acesso em: 16 fev. 2022.

François Hennebique, engenheiro francês e construtor autodidata, foi o primeiro a compreender na Europa o funcionamento das armaduras no concreto. O engenheiro francês também percebeu a necessidade da disposição de outras armaduras além da armadura reta de tração, imaginando armaduras dobradas, prolongadas em diagonal e ancoradas na zona de compressão (VASCONCELOS, 1992).

Hennebique também foi o primeiro a colocar estribos com a finalidade de absorver tensões devido ao esforço cortante e o criador das vigas T, levando em conta a colaboração da laje como mesa de compressão (VASCONCELOS, 1992).

Vasconcelos (1992) relata que a transformação da invenção de Monier em uma valiosa técnica científica foi em grande parte obra de construtores alemães e engenheiros. Em 1902, Emil Mörsch publicou a primeira teoria consistente para o dimensionamento de peças em concreto armado, a treliça clássica de Mörsch. Essa teoria é uma das maiores invenções em concreto armado, permanecendo válida mesmo após mais de um século.

Matthias Koenen, engenheiro alemão, propôs uma solução para contornar o problema da fissuração no concreto: tracionar previamente as barras de aço. Essa solução é conhecida como concreto protendido e torna-se possível a origem de tensões de compressão na seção, como forma de eliminar a tração no concreto e conseqüentemente eliminar as fissuras (VERÍSSIMO; CÉSAR JR., 1998).

No final do século 19, diversas patentes de métodos de protensão e ensaios surgiram, porém sem muito êxito; por volta de 1912, Koenen e Mörsch reconheceram o efeito de uma perda de protensão causada por uma deformação lenta e a retração do concreto (VERÍSSIMO; CÉSAR JR., 1998).

Segundo a NBR 6118:2014 — *Projeto de estruturas de concreto* — Procedimento, na ausência de protensão, as peças de concreto tendem a fissurar naturalmente quando tracionadas, levando a condições de serviço (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014). A Figura 2 a seguir, mostra um exemplo de uma viga em ensaio de flexão, onde há fissuração.

**Figura 2 – Viga fissurada em ensaio à flexão**



**Fonte: Tell Comunicação (2016)<sup>2</sup>**

As estruturas de concreto armado devem atender aos critérios de segurança contra ruína, denominados estados limites últimos (ELU), e o cálculo desse fator é indispensável para garantir segurança às estruturas. Deve-se atender também aos estados limites de serviço (ELS), sendo deformação excessiva e grau de fissuração elevado exemplos desse fator, e o cálculo é indispensável para garantir um desempenho satisfatório das estruturas em condição de serviço. Desse modo, os procedimentos de cálculo para deformações do concreto considerando a fissuração devem ser apurados (MOURA; MARCELINO, 2003).

Bastos (2006) explica que os estados limites de serviço definidos pela norma NBR 6118 (ABNT, 2014) são aqueles relacionados à durabilidade das estruturas, aparência, conforto do usuário e boa utilização, tanto em relação aos usuários como em relação às máquinas e equipamentos empregados. Ainda que uma estrutura não alcance seu estado de ruína, ao atingir um estado limite de serviço, seu uso torna-se impossibilitado, porque não mais oferece condições de conforto e durabilidade, mesmo que a estrutura não tenha esgotado sua capacidade resistente.

A NBR 6118 (ABNT, 2014) define os estados limites no item 10.4, como sendo os estados limites de serviço de: formação de fissuras (ELS-F), abertura de fissuras (ELS-W), deformações excessivas (ELS-DEF), descompressão (ELS-D), descompressão parcial (ELS-DP), compressão excessiva (ELS-CE) e vibrações excessivas (ELS-VE).

---

<sup>2</sup> Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=hdct3TAI-vE>>. Acesso em: 16 fev. 2022.



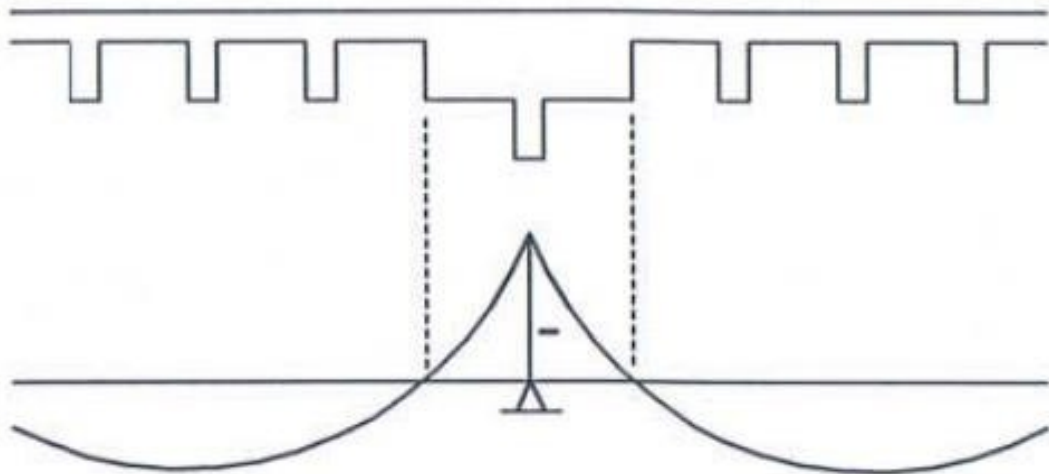
Os mais relacionados a fissuração e a flecha dos elementos estruturais são os estados limite de formação de fissuras (ELS-F) e de abertura de fissuras (ELS-W), que analisam evidentemente a fissuração da seção. E também o estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF), em que se analisa a flecha, relacionando-se diretamente ao estado de fissuração do elemento (ABNT, 2014).

Destaca-se para este trabalho o ELS-DEF, em que elementos fletidos apresentam flechas em serviço, devendo o projetista estrutural ter o cuidado de limitar tais deslocamentos (considerando a fissuração do concreto) de maneira que não prejudiquem a estética e a funcionalidade da estrutura.

O presente trabalho propõe experimentar modelos para o comportamento do concreto armado em relação a sua deformabilidade, aplicado a vigas e lajes nervuradas, ou seja, lajes moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas, cuja zona de tração para momentos positivos esteja localizada nas nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte.

Araújo (2010) explica que o modelo de lajes nervuradas unidirecionais, isto é, armadas em uma única direção, pode ser traduzido como uma série de vigas de seção T, para momentos fletores positivos. No caso de lajes contínuas, é necessário que as faixas próximas aos apoios sejam maciças, conforme mostra a Figura 3.

**Figura 3 – Série de vigas de seção T (maciça junto aos apoios)**

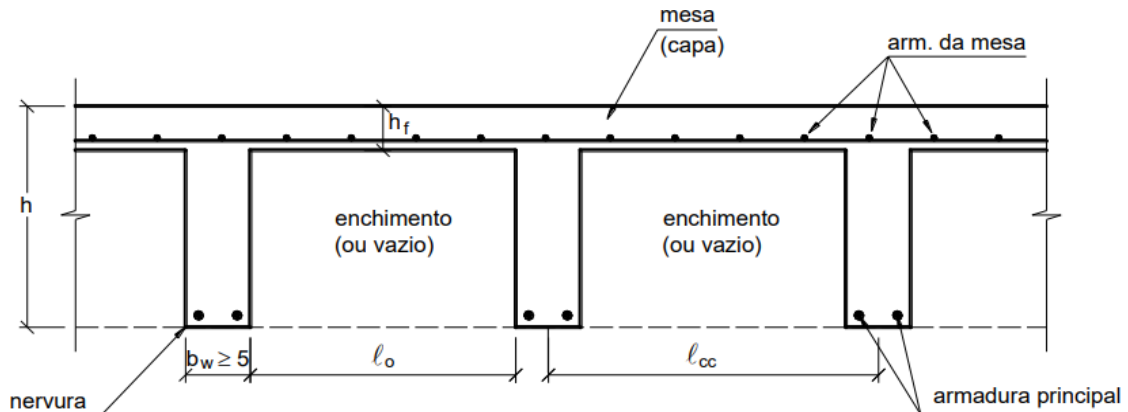


Fonte: Araújo (2010)

Segundo Bastos (2021), lajes nervuradas apresentam vantagens como menor peso próprio, menor consumo de concreto, redução de formas, capacidade de vencer

grandes vãos e maiores planos lisos (ausência de vigas). A Figura 4 mostra o modelo de uma laje nervurada em uma seção T.

**Figura 4 - Modelo de laje nervradas (seção T)**



Fonte: Bastos (2021)

### 1.1 Justificativa

O cálculo dos deslocamentos em elementos de concreto é dificultado pelo fato de que devem ser consideradas várias influências, como a fissuração (há a possibilidade, mesmo sob ações de serviço, de que regiões de uma viga tenham parte do concreto, abaixo da linha neutra, fissurado, diminuindo a rigidez das seções nessas regiões); a fluência e a retração, que em geral, tendem com o passar do tempo a produzir um aumento no valor das deformações finais; além das características de não homogeneidade do material, isto é, a existência de armadura imersa ao concreto (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2020).

Ainda segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2020), devido à tamanha complexidade e à variabilidade dos parâmetros que influenciam a deformabilidade das estruturas, os processos analíticos nem sempre são suficientes para estabelecer previsões precisas de comportamento.

Dessarte, segundo Flório (2004), é aplicável, sobretudo para as lajes, pois este tipo de elemento tende a sofrer mais com as deformações devido à sua esbeltez. Em lajes de pequenas alturas, a fissuração do concreto é relevante, podendo ser condição determinante de projeto, resultando no estado limite de deformação excessiva. Diversas são as problemáticas provocadas por deformação excessiva. Bastos (2021) elenca as principais como:

- Necessidade de nivelamento de superfícies através de revestimento adicional, representando um aumento do custo total da obra, e por consequência provocar maiores flechas, devido ao acréscimo da carga nas lajes;
- Inversão da inclinação prevista em lajes de cobertura, interferindo na drenagem das águas pluviais;
- Fissuras em paredes não estruturais de alvenaria, devido a grande rigidez destes elementos, eles não conseguem acompanhar a deformação da estrutura que os apoiam e, assim, surgem fissuras inclinadas de cisalhamento;
- Deformações de lajes e vigas podem afetar o bom funcionamento de esquadrias de portas e janelas e, em particular, os grandes painéis de vitrines;
- Aumenta a probabilidade de ocorrência de flambagem de paredes e pilares esbeltos, devido à rotação provocada pela deformação da laje ou de vigas esbeltas do piso, que estejam ligadas rigidamente a flexão com os respectivos apoios.

Outros efeitos indesejáveis, apontados por Leonhardt (2008):

- Perdas de protensão, em estruturas de concreto protendido;
- Redistribuição de tensões devido à retração e a fluência em trechos de ligações rígidas com outras peças estruturais.

Vasconcelos (1992) também relata um caso de problemáticas envolvendo a previsão de deformações, a respeito da borda da fachada do Palácio do Planalto que seria recoberta de placas de mármore, o autor descreve:

O calculista havia previsto uma flecha de 2,5 cm. Fausto Favele, entretanto, antevendo a possibilidade de flechas maiores, executou a laje com uma contraflecha de 10 cm. Mesmo assim isto não foi suficiente, pois apareceram flechas positivas de 20 cm, invertendo o caimento. Foi necessário engrossar o revestimento, agravando o problema. Além disso, a dilatação desse material de revestimento fez com que ele deslizesse sobre o colchão de chumbo e ficasse saliente na fachada, empurrando para fora as placas de mármore [...]. Conta-se que uma dessas placas se desprende e quase atingiu o presidente Jânio Quadros! (VASCONCELOS, 1992, p. 96).

## 1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é avaliar os deslocamentos em elementos fletidos, considerando a fissuração, utilizando a formulação presente na norma brasileira NBR 6118 (ABNT, 2014), e formulações consagradas por pesquisas internacionais. Dessa maneira, os objetivos específicos do trabalho tornam-se:

- I. Realizar uma revisão de literatura acerca de modelos para avaliar as deflexões em estruturas de concreto armado;
- II. Determinar as flechas dos protótipos e seções estudadas por meio de modelos teóricos;
- III. Descrever a linha elástica dos protótipos e das seções estudadas;
- IV. Comparar resultados experimentais com aqueles teóricos;
- V. Realizar a modelagem dos protótipos e seções estudadas em programa de elementos finitos.
- VI. Fornecer recomendações de processos de cálculo de flechas para o sistema de lajes unidirecionais a fim de contribuir com trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No capítulo Revisão bibliográfica serão discutidos enunciados, teorias e a ciência que dizem respeito à deformabilidade de elementos de concreto armado fletidos, além de apresentar formulações consagradas por pesquisas internacionais para previsão de deslocamentos.

### 2.1 Relação constitutiva

Para a ciência física, uma relação constitutiva, é uma relação entre duas grandezas físicas que é específica de um material ou classe de materiais, por exemplo, a tensão e a deformação sofrida por um material. O comportamento de um determinado material sob efeito de forças de tração ou compressão é entendido por meio de diagramas tensão-deformação (LIBÂNIO, 2007).

Ainda de acordo com Libânio (2007), sabe-se que a relação entre tensão e deformação, para determinados intervalos, pode ser considerada linear, relação conhecida como Lei de Hooke (relação constitutiva), conforme mostrado na equação 2.1.1.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.1.1)$$

Em que:

- $\sigma$  = tensão no material, apresentada em unidades de pressão (geralmente megapascal – MPa);
- $E$  = módulo de elasticidade do material, apresentada em unidades de pressão (usualmente gigapascal – GPa, ou ainda megapascal – MPa);
- $\varepsilon$  = deformação apresentada pelo material, adimensional.

Martins (2008) comenta que os modelos elástico-lineares são os mais utilizados pelo meio técnico, porque além de simplificarem um comportamento complexo, admitem a superposição de efeitos, evidentemente onde a linearidade geométrica pode ser assumida.

Conforme explica Silva (2012), a análise linear admite o comportamento dos materiais como elástico-lineares, sendo válida a Lei de Hooke. A importância de tal análise é relacionada à possibilidade de superposição dos efeitos e de uma primeira estimativa e aproximação para a análise não linear. Muitos processos não lineares

baseiam-se em procedimentos iterativos que empregam análises lineares, sendo mais simples de ser processada, permitindo ajustes para que a não linearidade física (NLF) possa ser considerada, mesmo que de forma simplificada.

## 2.2 Concreto

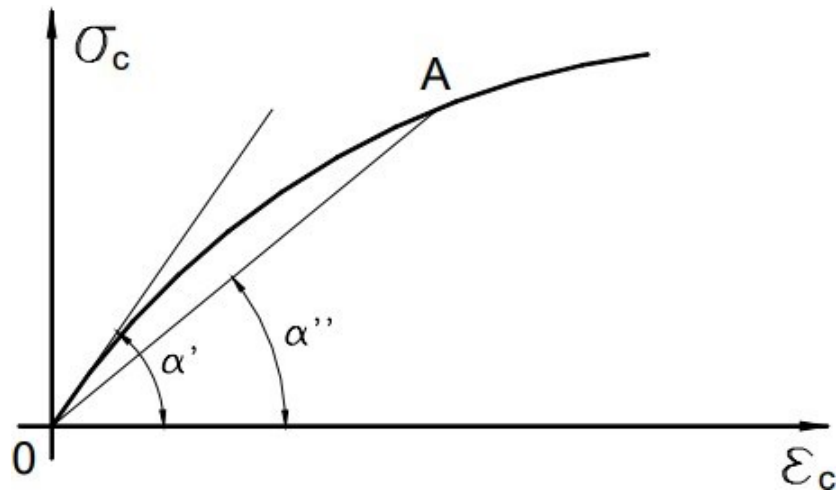
O módulo de elasticidade é um parâmetro numérico referente à medida da deformação do concreto sob a ação de tensões, geralmente de compressão. Os concretos de maiores resistências à compressão, normalmente, deformam-se menos que os concretos de baixa resistência, e por sequência apresentam módulos de elasticidade maiores (BASTOS, 2006).

O módulo de elasticidade varia de acordo com as características dos materiais componentes dos concretos, como o tipo do agregado, da pasta de cimento e a zona de transição entre a argamassa e os agregados.

A importância da determinação dos módulos de elasticidade está na determinação das deformações nas estruturas de concreto, como nos cálculos de flechas em lajes e vigas. O módulo de elasticidade é avaliado por meio do diagrama tensão x deformação do concreto ( $\sigma \times \epsilon$ ). Devido a não linearidade do diagrama  $\sigma \times \epsilon$  (não-linearidade física), o valor do módulo de elasticidade pode ser calculado com infinitos valores (BASTOS, 2006, p. 74).

Para o concreto, a expressão do módulo de elasticidade é aplicada somente à parte retilínea da curva tensão-deformação ou, quando não existir um trecho linear, a expressão é aplicada à tangente da curva na origem. Neste caso, tem-se o módulo de deformação tangente inicial ( $E_{ci}$ ), obtido por meio do ângulo ( $\alpha'$ ) formado por uma reta tangente à curva do diagrama  $\sigma \times \epsilon$ , como mostra a Figura 5. Destaca-se também o módulo de elasticidade secante, dado pela tangente do ângulo ( $\alpha''$ ) formado pela reta secante que passa por um ponto A do diagrama também apresentado na Figura 5 (BASTOS, 2006).

Figura 5 – Determinação do módulo de elasticidade do concreto à compressão



Fonte: Bastos (2006)

A NBR 8522 – *Concreto – Determinação dos módulos de elasticidade e deformação – Parte 1: Módulos estáticos à compressão* (ABNT, 2021) prescreve o método de ensaio para a obtenção do módulo. Na ausência de ensaios, a NBR 6118 (ABNT, 2014), no item 8.2.8, apresenta uma expressão para estimar o valor do módulo aos 28 dias, conforme equação 2.2.1.

$$20 \leq f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rightarrow E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (2.2.1)$$

$$55 \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \rightarrow E_{ci} = 21,5 \cdot 10^3 \cdot \alpha_E \cdot \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25\right)^{\frac{1}{3}}$$

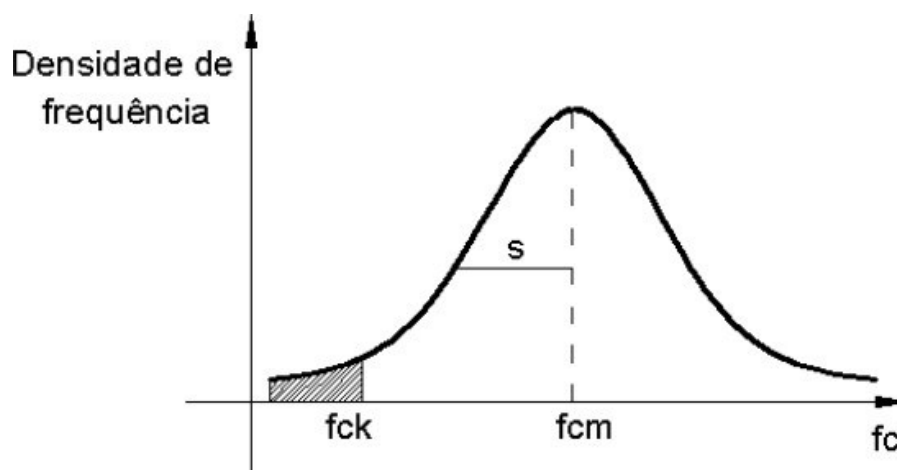
Em que:

- $\alpha_E$  = coeficiente que depende do agregado empregado, com seus valores variando entre 0,7 e 1,2:
- $\alpha_E = 1,2$  para basalto e diabásio;
- $\alpha_E = 1,0$  para granito e gnaiss;
- $\alpha_E = 0,9$  para calcário;
- $\alpha_E = 0,7$  para arenito;
- $f_{ck}$  = resistência característica do concreto à compressão, em megapascal (MPa);

O valor é obtido em ensaios de corpos de prova cilíndricos, moldados conforme prescrito pela NBR 5738 – *Moldagem e cura de corpos-de-prova cilíndricos ou prismáticos de concreto* (ABNT, 2015) e rompidos conforme estabelece a NBR 5739 – *Ensaio de compressão de corpos-de-prova cilíndricos* (ABNT, 2018).

Após ensaio de muitos corpos-de-prova, pode elaborar-se um gráfico com os valores obtidos para a resistência a compressão *versus* a quantidade dos respectivos corpos-de-prova, também denominado densidade de frequência. A curva encontrada é chamada de Curva Estatística de Gauss ou Curva de Distribuição Normal para a resistência do concreto à compressão, conforme apresentado na Figura 6 (LIBÂNIO, 2007).

**Figura 6 – Curva de Gauss para a resistência a compressão do concreto**



Fonte: Libânio (2007)

Segundo a NBR 12655 – *Concreto de cimento Portland – Preparo, controle e recebimento – Procedimento* (ABNT, 2015), por meio da curva de Gauss obtêm-se os valores para resistência média do concreto à compressão ( $f_{cm}$ ) e resistência característica do concreto à compressão ( $f_{ck}$ ). O valor de  $f_{cm}$  é a média aritmética dos valores obtidos no ensaio para todo o conjunto, e é utilizado na determinação da resistência característica por meio da equação 2.2.2 a seguir.

$$f_{ck} = f_{cm} - 1,65 \cdot s \quad (2.2.2)$$

Em que  $s$  (desvio padrão) corresponde à distância entre a abscissa de  $f_{cm}$  e o ponto de inflexão da curva, o valor 1,65 corresponde ao quantil de 5%, ou seja, apenas 5% dos corpos-de-prova possui resistência característica maior que a própria



resistência à compressão ( $f_c < f_{ck}$ ). Portanto, pode-se inferir que o  $f_{ck}$  é o valor da resistência que tem 5% de probabilidade de não ser alcançado, em ensaios de corpos-de-prova de um determinado lote de concreto (LIBÂNIO, 2007).

A NBR 6118 (ABNT, 2014) também apresenta a expressão para o módulo de elasticidade secante, utilizado nas análises elásticas de projeto, especialmente para determinação de esforços solicitantes e verificação de estados limites de serviço, como mostra a equação 2.2.3.

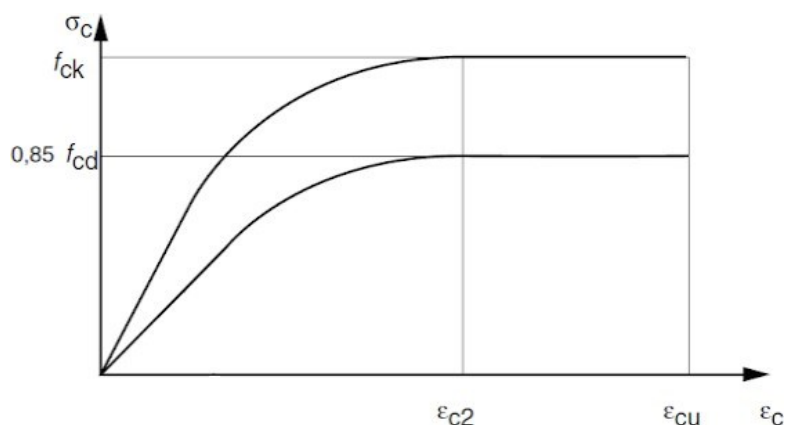
$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci}; \alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (2.2.3)$$

Tais equações são válidas para concretos com idade superior aos 28 dias. A norma brasileira de concreto NBR 6118 (ABNT, 2014) ainda estabelece que “[...] na avaliação do comportamento de um elemento estrutural ou seção transversal pode ser adotado um módulo de elasticidade único, à tração e à compressão, igual ao módulo de elasticidade secante ( $E_{cs}$ )”.

### 2.2.1 Tensão-deformação do concreto à compressão

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), o diagrama tensão-deformação para o concreto à compressão é admitido simplificado, composto por uma parábola do 2º grau que passa pela origem e tem seu vértice no ponto de abscissa  $\epsilon_{c2}$  e ordenada  $0,85f_{cd}$  e de uma reta entre as deformações  $\epsilon_{c2}$  e  $\epsilon_{cu}$  tangente à parábola e paralela ao eixo das abscissas, como mostra a Figura 7.

**Figura 7 - Diagrama  $\sigma \times \epsilon$  idealizado para o concreto à compressão**



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014)

Para tensões de compressão menores que  $0,5f_c$ , pode-se admitir uma relação linear entre tensões e deformações, adotando-se para módulo de elasticidade o valor secante dado pela equação 2.2.3.

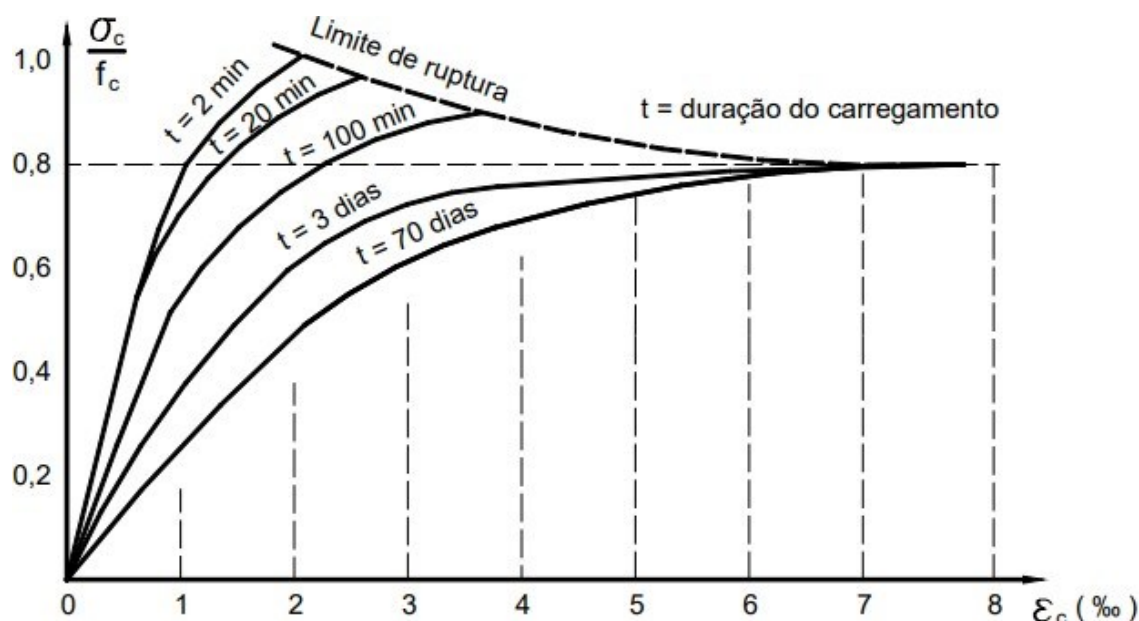
Para a deformação de até  $\varepsilon_{c2}$  (para concretos de classes até C50, esse valor é conhecido como 2 ‰) a lei de variação é de acordo com a parábola do 2º grau, após 2 ‰ o concreto sofre um encurtamento plástico até seu valor máximo  $\varepsilon_{cu}$ , ou seja, 3,5 ‰ (3,5 milímetros por metro de extensão) para concretos de classes até C50 (ABNT, 2014).

A tensão máxima de compressão no concreto é limitada por um fator 0,85, isto é, no cálculo das peças não se considera a máxima resistência dada por  $f_{ck}$ , e sim um valor reduzido em 15 %. Segundo Fusco (2012), a origem do fator é explicada por três fatores:

- Um fenômeno denominado efeito Rüsçh, em que quanto maior o tempo de carregamento para se alcançar a ruptura menor é a resistência do concreto;
- O ganho de resistência do concreto ao longo do tempo, sendo esse aumento na ordem de 20% (apesar de alguns autores consideram esse valor não maior que 15% entre os 28 dias e os 50 anos);
- E a influência da forma cilíndrica do corpo de prova (atrimento dos pratos da prensa do ensaio causa um aumento aparente da resistência em 5%).

Segundo Bastos (2006), a origem do fator Rüsçh é explicada por meio de diagramas  $\sigma \times \varepsilon$  de concretos ensaiados com velocidades de deformação controlada ( $\dot{\varepsilon} = \text{cte}$ ). Como mostrado no diagrama da Figura 8, o tempo do ensaio para os corpos-de-prova foram variados entre 2 minutos até 70 dias. O diagrama mostra também a linha descendente de ruptura dos corpos-de-prova, dessa maneira, analisando as curvas é possível inferir que conforme aumenta o tempo de aplicação do carregamento, menor é a resistência do concreto.

Figura 8– Diagrama  $\sigma \times \epsilon$  do concreto variando o tempo de carregamento



Fonte: Santos (1983) apud Bastos (2006)

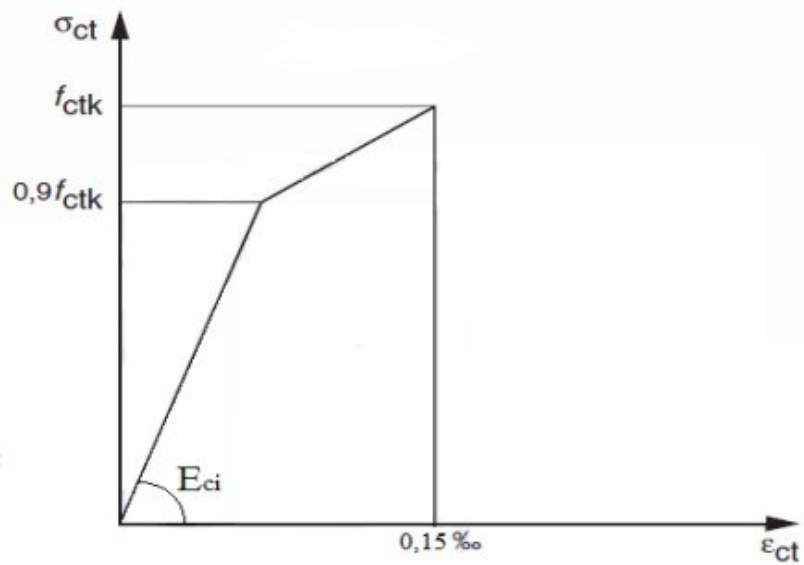
O diagrama mostra também a linha descendente de ruptura dos corpos-de-prova, dessa maneira, analisando as curvas é possível inferir que conforme aumenta o tempo de aplicação do carregamento, menor é a resistência do concreto. Segundo Fusco (2012), se forem realizados ensaios lentos, os estudos experimentais mostram que os valores obtidos seriam de 75% em relação aos ensaios rápidos.

Dessa maneira, o fator  $0,85 \cdot f_{cd}$ , funciona como um fator corretivo, pois a resistência de cálculo ( $f_{cd}$ ) obtida em ensaios de compressão com duração em torno de 2, 3 ou 4 minutos, não reflete a realidade do carregamento aplicado às estruturas, esses atuam durante toda a vida útil da estrutura, ou seja, muitos anos (BASTOS, 2006).

### 2.2.2 Tensão-deformação do concreto à tração

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), o diagrama  $\sigma \times \epsilon$  bi linear de tração do concreto não fissurado pode ser adotado como aquele mostrado na Figura 9. A deformação máxima de alongamento é de 0,15 ‰, e o módulo tangente inicial ( $E_{ci}$ ) pode ser adotado como a tangente do ângulo formado entre a reta abscissa e o primeiro trecho linear do diagrama.

Figura 9 – Diagrama  $\sigma \times \epsilon$  para o concreto à tração



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014)

Os conceitos relativos à resistência do concreto à tração direta ( $f_{ct}$ ) são análogos aos expostos anteriormente para a resistência à compressão. Portanto, tem-se a resistência média do concreto à tração ( $f_{ct,m}$ ), valor obtido da média aritmética dos resultados, e a resistência característica do concreto à tração ( $f_{ct,k}$ ). A diferença no estudo da tração encontra-se nos tipos de ensaio. Há três ensaios normatizados: tração direta, compressão diametral e tração na flexão (LIBÂNIO, 2007).

Na ausência de ensaios, a NBR 6118 (ABNT, 2014) estabelece que possa ser avaliado o seu valor médio ou característico por meio das equações 2.2.4 e 2.2.5:

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m} \quad (2.2.4)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot f_{ct,m} \quad (2.2.5)$$

Sendo:

$$f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rightarrow f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad (2.2.6)$$

$$55 \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \rightarrow f_{ct,m} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,11 \cdot f_{ck}) \quad (2.2.7)$$

Bastos (2006) explica que a resistência à tração é esgotada para níveis de tensão cerca de dez vezes menores que aqueles que causariam a ruptura na compressão para o concreto. Quando ensaiado à flexão simples, a região tracionada do concreto é danificada, iniciando a formação de fissuras, exigindo a utilização da armadura passiva para que se obtenha configuração de equilíbrio.

### 2.2.3 Retração

Segundo Fernandes (1996, p. 8), “a retração é a redução espontânea de volume, que ocorre no concreto, na ausência de tensões externas e de variações de temperatura”. Para Neville e Brooks (2013), a redução do volume é igual a 3 vezes a contração linear, portanto, na prática, mede-se a retração simplesmente como uma deformação linear. As unidades são, portanto,  $\frac{\mu m}{mm}$  e, normalmente, expressas em  $10^{-6}$ .

Existem três causas da retração em peças de concreto armado curadas ao ar livre: retração química (proveniente da contração da combinação da água não evaporável com o cimento), tensões capilares (evaporação parcial da água capilar – principal causa), e retração por carbonatação dos produtos decorrentes da hidratação do cimento, que pode ser considerada também uma retração química.

A retração ocorre durante a contração da massa do gel, por ocasião da evaporação da água não fixada quimicamente do gel do cimento. Isso ocorre nas peças de concreto, independentemente do estado de tensões existente, dependendo somente das tensões capilares, do tempo ou da idade do concreto e especialmente do clima, isto é, temperatura e umidade relativa do meio ambiente (LEONHARDT; MONNING, 2008, p.22).

Bastos (2006, p.73) aponta que a retração do concreto ocorre “mesmo na ausência de ações ou carregamentos externos e é uma característica comum e natural dos concretos”. Em peças submersas, há o fenômeno inverso, denominado expansão, decorrente do fluxo de água externo para o interior da peça em direção aos poros formados pela retração química.

Para as estruturas mais comuns e de pequenas espessuras, o fenômeno é considerado praticamente cessado no período de dois a quatro anos. Peças mais espessas (maiores que 1,0 m) podem experimentar retração por um período de até quinze anos (BARBOSA, 2010).

Peças estruturais com elevada relação entre as superfícies expostas e o volume total, como pisos, pavimentos e lajes de concreto, tendem a influenciar na

perda rápida de água para o ambiente, devido a geometria do elemento estrutural. Se esses elementos citados estão mais vulneráveis a esta perda, é possível inferir que naturalmente sofrem mais com o fenômeno da retração, principalmente por conta de placas de concreto maiores e mais esbeltas (BARBOSA, 2010).

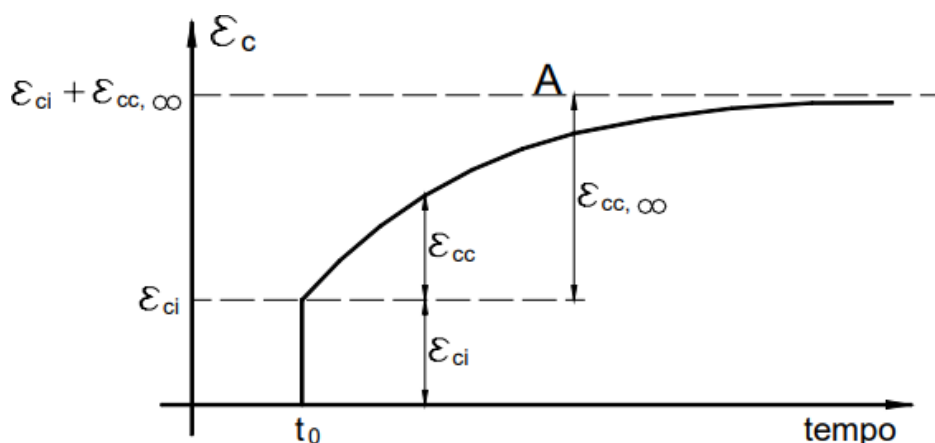
#### 2.2.4 Fluência

Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2020), fluência é o fenômeno em que surgem deformações ao longo do tempo em um corpo solitado por tensão constante (mesmo que não ocorram acréscimos nessas tensões). Ghali, Favre e Elbadry (2002) explicam que o módulo de elasticidade do concreto tende a aumentar com a idade, assim uma tensão inicialmente aplicada produz deformação instantânea no concreto, mas quando a tensão for constante, a deformação aumentará com o tempo.

Neville e Brooks (2013) definem a fluência como o aumento da deformação sob tensão constante ao longo do tempo após serem consideradas outras deformações dependentes do tempo não associadas a tensão (retração, expansão e deformações térmicas, por exemplo).

Bastos (2021) aponta fatores que mais influenciam na deformação lenta como sendo a idade do concreto quando a carga começa agir, umidade do ar (ar seco provoca maior deformação), tensão que a produz (o efeito da fluência é proporcional à tensão que a produz), e dimensões da peça (peças de grandes dimensões apresentam menor deformação devido à fluência). A Figura 10 mostra o gráfico de deformação ao longo do tempo sob o efeito de uma tensão constante.

**Figura 10 - Gráfico de deformação ao longo do tempo sob efeito de uma tensão constante**



Fonte: Bastos (2006)

A deformação imediata surge em um tempo  $t_0$ , ao se aplicar o primeiro carregamento, origina as tensões de compressão, e isso ocorre quando são retirados os escoramentos das peças. A partir do instante  $t_0$ , o carregamento inicial, além de se manter constante, sofre acréscimos sucessivos (cargas de construção, revestimentos, pisos, ações variáveis em geral etc.), que fazem com que surjam novas deformações, que são somadas à deformação imediata inicial (BASTOS, 2006).

A deformação total em um dado tempo é a soma da deformação imediata com a deformação lenta até aquele tempo. A deformação lenta é considerada cessada após alguns anos, expressado pela notação  $\varepsilon_{cc,\infty}$  (deformação lenta no infinito). Os valores para a deformação lenta do concreto são muito importantes no projeto de peças protendidas e na determinação das flechas em vigas e lajes (BASTOS, 2006).

### 2.3 Aço

A NBR 6118 (ABNT, 2014) divide o aço em duas denominações, sendo que para armadura de peças de concreto é denominado de armadura passiva e para concreto protendido denominado armadura ativa (aço de protensão). Em projetos de estruturas de concreto armado deve ser utilizado aço classificado pela NBR 7480 - *Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado – Especificação* (ABNT, 2007), com o valor característico da resistência de escoamento nas categorias CA-25, CA-50 e CA-60 (BASTOS, 2006).

A norma classifica como barras os aços de diâmetro nominal 6,3 mm ou superior, obtidos exclusivamente por laminação a quente, e como fios aqueles de diâmetro nominal 10 mm ou inferior, obtidos por trefilação ou processo equivalente. Conforme o valor característico da resistência de escoamento ( $f_{yk}$ ), as barras de aço são classificadas nas categorias CA-25 e CA-50 e os fios de aço na categoria CA-60 (ABNT, 2007).

As letras CA indicam concreto armado e o número na sequência indica o valor de  $f_{yk}$ , em kgf/mm<sup>2</sup> ou kN/cm<sup>2</sup>. Os aços CA-25 e CA-50 são, portanto, fabricados por laminação a quente, e o CA-60 por trefilação (BASTOS, 2006).

Na ausência de ensaios ou valores fornecidos pelo fabricante, o módulo de elasticidade do aço pode ser admitido igual a 210 GPa. A superfície dos aços pode ser lisa, conter nervuras ou entalhes, conforme mostra a Figura 11.

**Figura 11 – Tipos de superfície de aço para concreto armado**



Fonte: Adaptado de Arcelor Mittal<sup>3</sup> (2019) e Gerdau<sup>4</sup> (2019)

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), a rugosidade da superfície dos aços é medida pelo coeficiente de conformação superficial ( $\eta_1$ ), sendo que a Tabela 1 apresenta os valores do coeficiente conforme o tipo de superfície.

**Tabela 1 – Valores do coeficiente de conformação superficial**

Tipo de Superfície	$\eta_1$
Lisa	1,0
Entalhada	1,4
Nervurada	2,25

Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014)

<sup>3</sup> Disponível em < <https://brasil.arcelormittal.com/produtos-solucoes/construcao-civil>>. Acesso em: 21 nov. 2021.

<sup>4</sup> Disponível em < <https://www2.gerdau.com.br/produtos/construcao-civil>>. Acesso em: 21 nov. 2021.

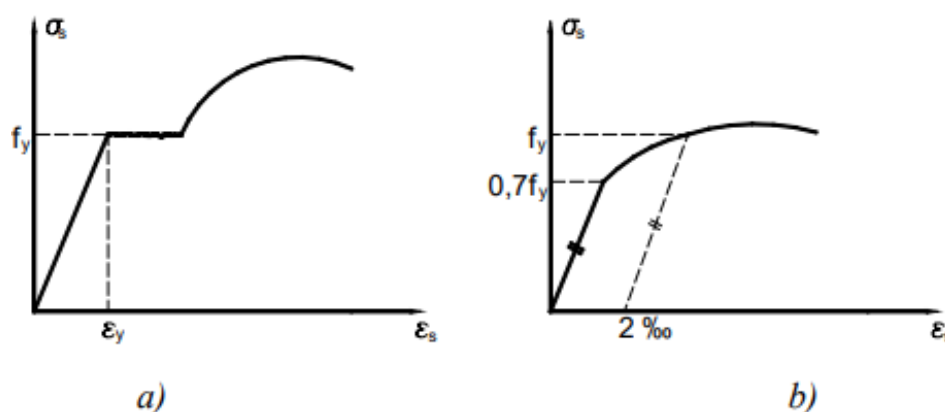


### 2.3.1 Relação constitutiva do aço

Bastos (2006) explica que os diagramas  $\sigma \times \varepsilon$  dos aços laminados a quente e trefilados a frio apresentam características distintas, como mostradas na Figura 12. Os aços trefilados, ao contrário dos laminados, não apresentam patamar de escoamento bem definido, ou seja, resistência de escoamento ( $f_y$ ) bem caracterizada no diagrama.

Por esse motivo, para os aços trefilados, a resistência de escoamento é convencional, é escolhido um valor para a resistência de escoamento correspondente à deformação residual de 2 ‰. Desta forma, se o aço for tensionado até o valor de  $f_y$  e a tensão for cessada, o aço não retornará ao seu estado natural pré-tensão, pois haverá no aço uma deformação permanente (residual) de 2 ‰ (BASTOS, 2006).

Figura 12 - Diagrama real  $\sigma \times \varepsilon$  para aços laminados (a) e trefilados (b)



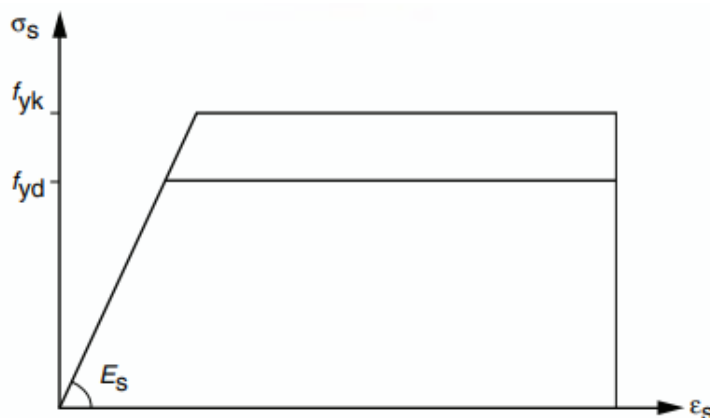
Fonte: Bastos (2006)

O diagrama tensão-deformação do aço, bem como os seus valores característicos, deve ser obtido por meio de ensaios de tração realizados segundo a NBR ISO 6892-1 – *Materiais metálicos – Ensaios de Tração Parte 1: Método de ensaio à temperatura ambiente* (ABNT, 2018). O valor de  $f_{yk}$  para os aços sem patamar de escoamento (trefilados), como abordado anteriormente, é o valor da tensão correspondente à deformação permanente de 0,2 %.

Para o cálculo nos estados-limite de serviço e último, pode-se utilizar o diagrama simplificado mostrado na Figura 13, para os aços com ou sem patamar de escoamento em armaduras passivas. O diagrama é válido para intervalos de

temperatura entre  $-20^{\circ}\text{C}$  e  $150^{\circ}\text{C}$  e pode ser aplicado para tração e compressão. (ABNT, 2014).

Figura 13 - Diagrama  $\sigma \times \epsilon$  para aços de armaduras passivas



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014)

## 2.4 Estádios de deformação do concreto armado

Carvalho e Figueiredo Filho (2020) definem os estádios como situações em que a seção transversal tem comportamentos distintos, dependendo da intensidade das solicitações. Bastos (2006, p.82) define os estádios de deformação como “vários estágios de tensão pelo qual um elemento fletido passa, desde o carregamento inicial até a ruptura”. Existem três trechos para o comportamento típico do concreto, para o presente estudo, será considerado apenas o primeiro e o segundo, visto que o estágio III corresponde ao estágio de ruptura.

Como explica Leonhardt (2008), no Estádio I, quando a carga aplicada é pequena, não surgem fissuras, enquanto a tensão normal de tração à seção, devido à flexão, for inferior à resistência à tração do concreto. O diagrama de tensões ao longo da seção é linear, e a relação tensão-deformação é considerada linear. Quando a resistência do concreto à tração é alcançada, surgem as primeiras fissuras no trecho solicitado, a viga inicia então o Estádio II de comportamento.

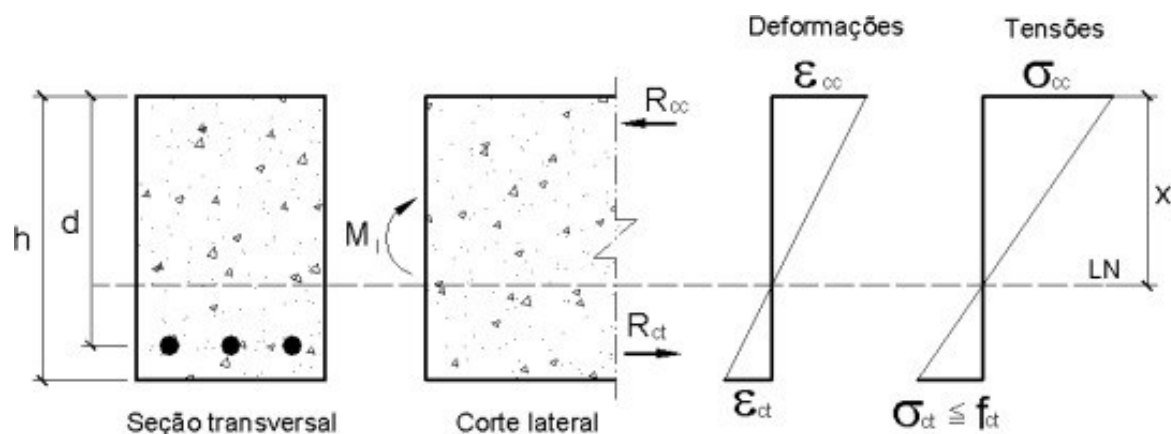
Bastos (2006) apresenta o estágio III como sendo o estado limite último, pois se aumentando o carregamento, a linha neutra e as fissuras deslocam-se em direção à zona comprimida, as tensões de compressão e de tração aumentam; a armadura tracionada pode alcançar e superar a tensão de início de escoamento ( $f_y$ ), e o concreto comprimido está na iminência da ruptura (esmagamento).

### 2.4.1 Estádio I (estado elástico)

Segundo Fernandes (1996), o Estádio I ocorre quando o carregamento é de pequena intensidade, as deformações e tensões desenvolvidas são pequenas, é admitida linearidade ao longo de toda a seção transversal.

Para o cálculo da inércia no Estádio I, a NBR 6118 (ABNT, 2014) determina considerar somente a seção bruta de concreto, mas a armadura pode ser computada no cálculo da inércia, que é computada fazendo-se a homogeneização da seção, levando a um resultado mais preciso, embora com diferença quase desprezível. Ghali, Favre e Elbadry (2002) explicam que no estágio I as deformações no concreto e na armadura são consideradas compatíveis. A Figura 14 mostra o comportamento do concreto na flexão (Estádio I).

Figura 14 - Comportamento do concreto na flexão (Estádio I)



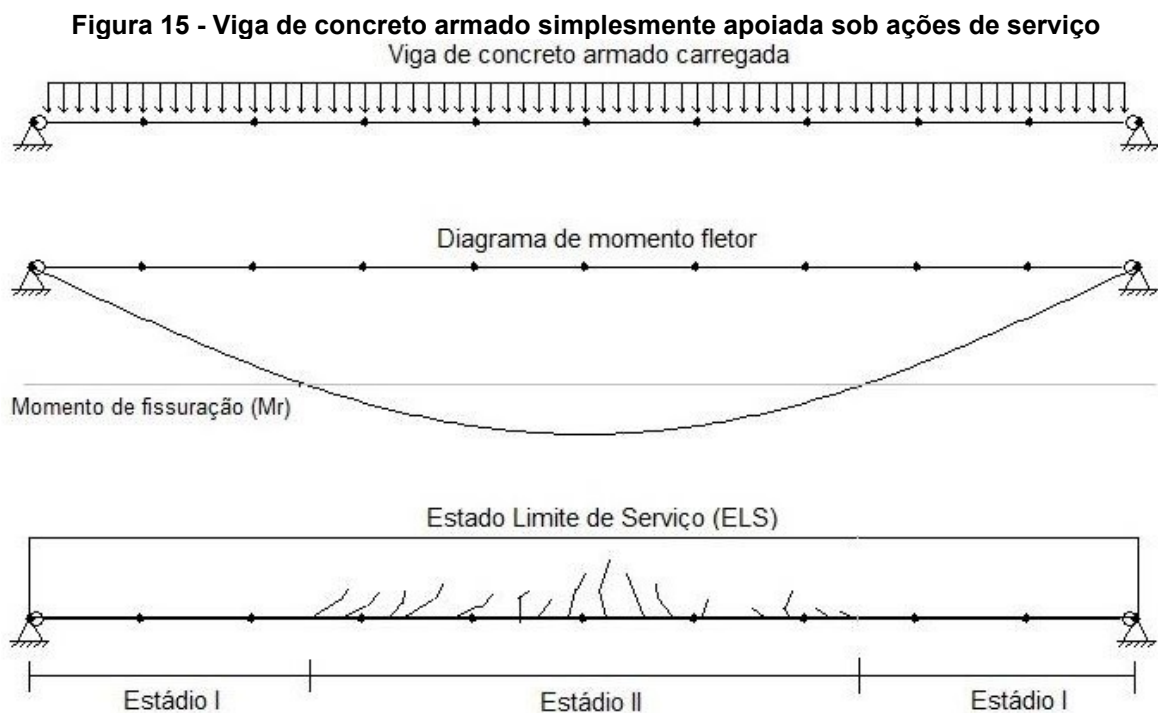
Fonte: Libânio (2007)

### 2.4.2 Estádio II (estado de fissuração)

No momento em que a resistência do concreto à tração é alcançada, surgem as primeiras fissuras no trecho solicitado, diz-se que o comportamento se dá no Estádio II, como explicam Ghali, Favre e Elbadry (2002), admite-se que a tensão de tração no local da fissura é resistida completamente pela armadura, ou seja, o concreto tracionado é totalmente ignorado. Já numa seção situada entre duas fissuras, a aderência existente entre o concreto e a barra de aço restringe a deformação do aço e assim uma parte da força de tração na barra de aço em uma fissura é transmitida para o concreto situado entre fissuras.

É plausível que distante de uma fissura, o concreto na zona tracionada é capaz de resistir a alguma tensão. Assim, a rigidez de um elemento fissurado varia de um valor mínimo no local da fissura a um valor máximo no meio do caminho entre fissuras. Dois estados extremos são considerados: a condição não fissurada em que concreto e aço devem se comportar elasticamente e apresentar compatibilidade nas deformações, e a condição totalmente fissurada com o concreto em tensão ignorado (GHALI; FAVRE; ELBADRY, 2002).

Os alongamentos ou curvaturas são calculados com essas duas suposições e as deformações reais em um elemento fissurado são previstas por interpolação entre essas duas condições extremas. Um coeficiente adimensional ( $\zeta$ ) é usado para a interpolação; representa a extensão de fissuras (GHALI; FAVRE; ELBADRY, 2002). A Figura 15 mostra uma viga de concreto armado com apoios simples e carga distribuída sob as ações de serviço.



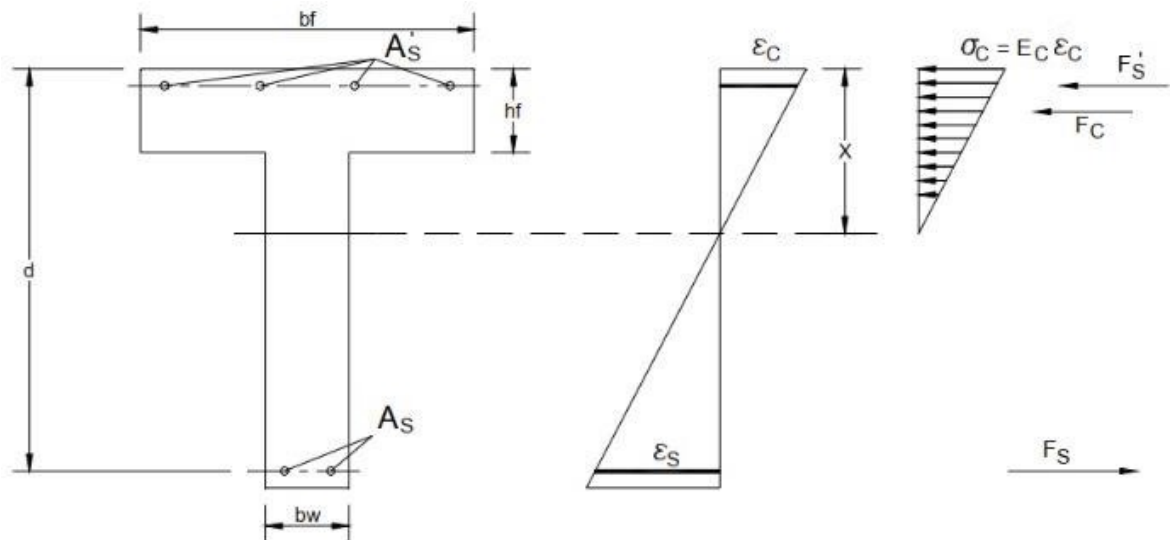
Fonte: Autoria Própria (2022)

A tensão e a deformação na seção caracterizam um caso intermediário entre os estádios I e II, devendo ser considerado um valor médio ou efetivo da rigidez entre estes dois estádios para o cálculo das deformações quando o elemento estiver submetido a uma solicitação que ultrapassa a resistência à tração do concreto. A contribuição do concreto na zona de tracionada para a rigidez é algumas vezes

chamada de “*tension stiffening*”, ignorar tal efeito geralmente resulta em superestimação da deflexão ou da largura da fissura (GHALI; FAVRE; ELBADRY, 2002).

Essa constatação implica em alguns autores subdividirem os estádios de deformação em estágio Ia e Ib, segundo Bastos (2006), estágio II “puro” como classificam Carvalho e Figueiredo Filho (2020), ou ainda, “*fully cracked*” como definem Ghali, Favre e Elbadry (2002), a fim de diferenciar quando se despreza a contribuição do concreto na região fissurada. A Figura 16 mostra um exemplo do estágio II (puro) em uma seção transversal “T”.

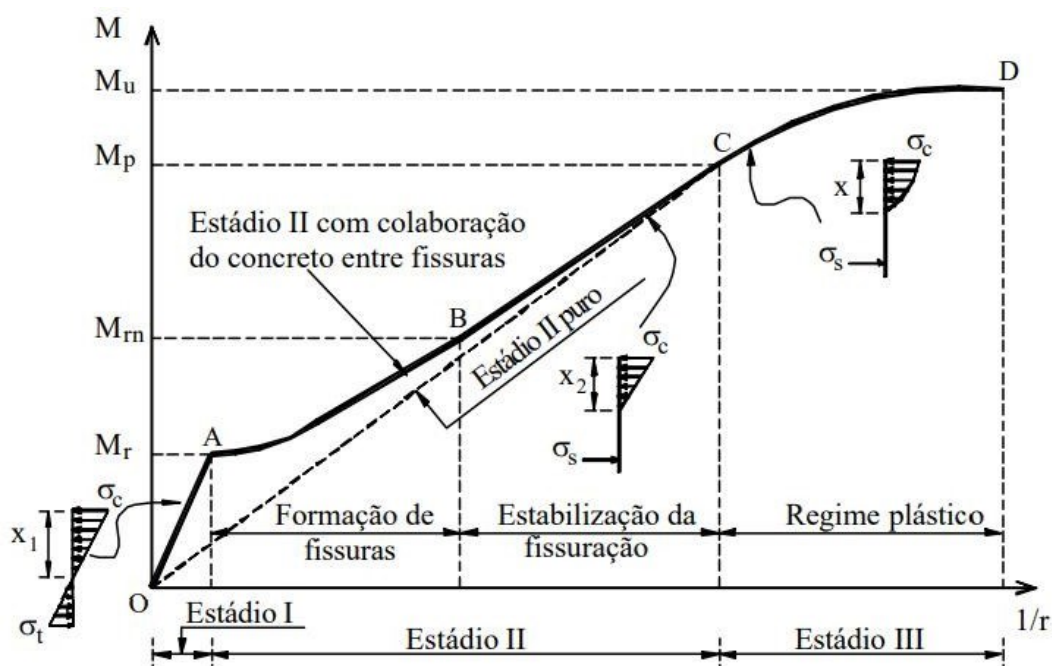
**Figura 16 – Seção transversal em “T” no estágio II (puro)**



**Fonte: Adaptado de Carvalho e Figueiredo Filho (2020)**

A Figura 17 apresenta um diagrama momento-curvatura típico de um elemento em concreto armado submetido à flexão em que é possível observar a evolução da fissuração com o nível de sollicitação.

Figura 17 – Diagrama momento-curvatura para um elemento fletido



Fonte: Guarda (2005)

Guarda (2005) explica que para pequenos valores de momentos pode-se admitir um comportamento elástico e linear (Estádio I), sendo que neste caso, tanto o concreto da região comprimida como o da tracionada, além da armadura, colaboram para a rigidez à flexão do elemento. Para as condições de serviço, apenas alguns trechos dos elementos fletidos apresentam essas características.

Quando a tensão máxima de tração atinge a resistência à tração do concreto (ponto A no diagrama da Figura 17), isto é, o momento de fissuração é atingido, e, à medida que o momento solicitante aumenta de valor surgem novas fissuras. Dessa forma, a contribuição do concreto na zona tracionada diminui, reduzindo também a rigidez à flexão (GUARDA, 2005).

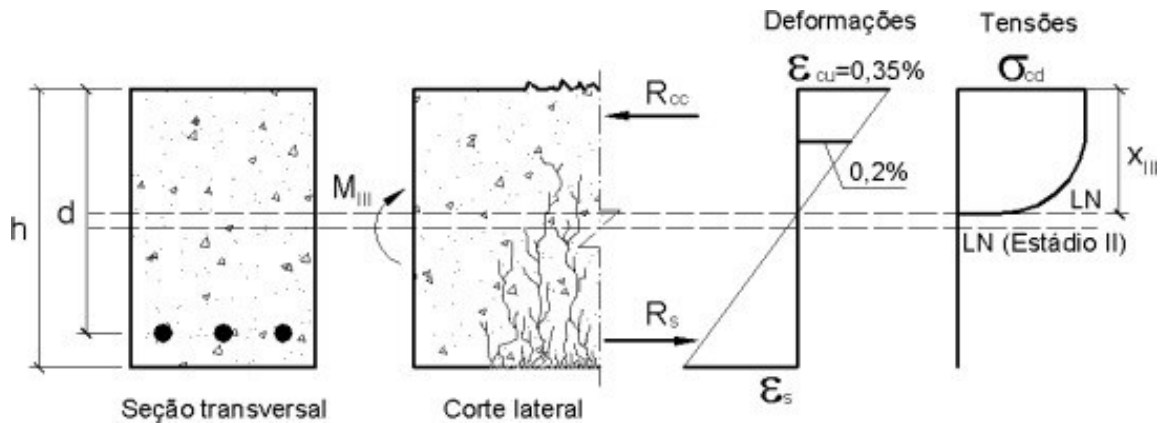
A formação de fissuras ocorre até certo nível de sollicitação, a partir do ponto B no diagrama, o aumento da sollicitação não acarreta a formação de novas fissuras, mas as existentes apresentam maiores aberturas e comprimentos, considerando-se a seção totalmente fissurada no ponto C (GUARDA, 2005).

Em serviço, a maior parte das seções transversais dos elementos fletidos trabalha nesses dois últimos estágios, para as quais a rigidez é determinada desprezando-se a parcela do concreto da região tracionada (GUARDA, 2005).

### 2.4.3 Estádio III (estado de ruptura)

Libânio (2007) explica que o estágio II termina com o início da plastificação do concreto comprimido, iniciando o estágio III de deformação, em que a zona comprimida se encontra plastificada e o concreto dessa região está na iminência da ruína, como mostra a Figura 18, no estágio III é realizado o dimensionamento ELU, situação que se denomina cálculo na ruptura.

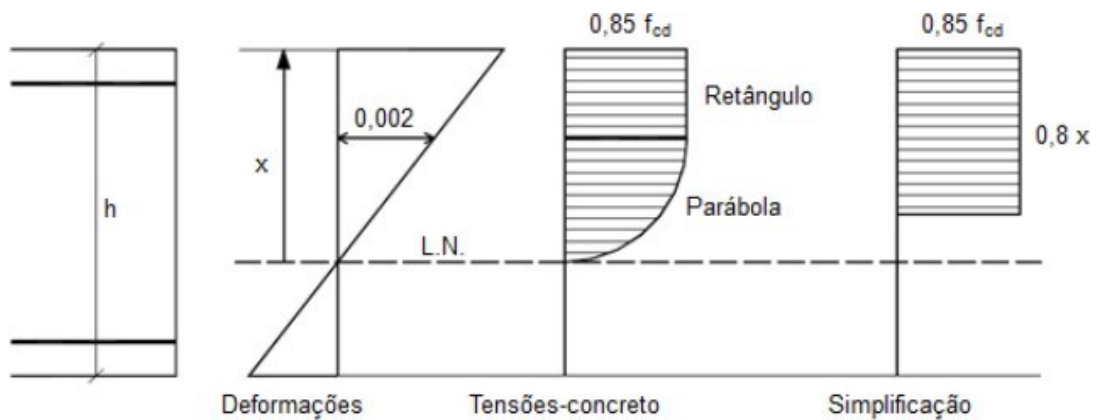
**Figura 18 – Comportamento do concreto na flexão (Estádio III)**



Fonte: Libânio (2007)

O diagrama de tensões é admitido como parabólico-retangular, também conhecido como diagrama parábola-retângulo, para efeito de cálculo a NBR 6118 (ABNT, 2014) permite que se faça essa simplificação, como mostra a Figura 19.

**Figura 19 – Diagrama parábola-retângulo (ELU)**



Fonte: Silva (2012)

## 2.5 Rigidez equivalente

Tibbetts *et al.* (2018) enfatizam que a rigidez do concreto é especialmente importante para a verificação de estados limites de serviço (ELS). Segundo os autores, variações do módulo de elasticidade são relacionadas diretamente ao cálculo da deflexão de peças. Destacam, ainda, que há uma relação inversa de proporcionalidade entre ambos, de modo que uma diminuição de 5% no módulo resulta em um aumento de 5% na deflexão ou curvatura do elemento.

Em peças de concreto armado, o concreto é adotado como material de referência, dessa maneira, a área de armadura é substituída por uma área de concreto equivalente, essa substituição é possível por meio do coeficiente que relaciona os módulos de elasticidade dos materiais, como mostra a equação 2.5.1.

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} \quad (2.5.1)$$

Em que:

- $E_s$  = módulo de elasticidade do concreto (na ausência de ensaios para sua determinação, pode-se considerar 210 GPa);
- $E_{cs}$  = módulo de elasticidade secante do concreto, que pode ser obtido conforme equação 2.2.3 apresentada no item 2.2 deste trabalho.

A relação fornecida permite calcular a seção homogeneizada, uma importante propriedade para o cálculo dos estádios de deformação. O modelo proposto por Branson (1965) que adota uma rigidez ponderada entre os estádios I e II é o atual modelo empregado pela norma brasileira para o cálculo dos deslocamentos considerando a fissuração.

A norma NBR 6118 (ABNT, 2014) realiza uma simplificação na formulação, considerando o momento de inércia da seção bruta do concreto ao invés da inércia da seção homogeneizada para o estágio I.

Além disso, o expoente ( $m$ ) igual a 3, da equação 2.5.2 é utilizado para análises ao longo de todo o comprimento da peça, para análise de apenas uma seção deve-se empregar o expoente  $m = 4$ , assim a formulação original proposta pelo autor torna-se a equação 2.5.2 a seguir.



$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^m \cdot I_I + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^m\right] \cdot I_{II} \quad (2.5.2)$$

Em que:

- $I_I$  = momento de inércia da seção de concreto no estágio I;
- $I_{II}$  = momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II;
- $M_a$  = momento fletor na seção crítica do vão considerado, ou seja, o momento máximo;
- $M_r$  = momento de fissuração do elemento estrutural (abordado no item 2.6 deste trabalho).

Considerando as propriedades da seção, pode-se calcular a rigidez equivalente, com os valores da rigidez equivalente é possível obter os deslocamentos. Para avaliação aproximada da flecha imediata, a NBR 6118 (ABNT, 2014) apresenta a expressão de rigidez equivalente, apresentada na equação 2.5.3.

$$(EI)_{eq,t0} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3\right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{cs} \cdot I \quad (2.5.3)$$

Segundo Junges (2011), este método empregado pela norma brasileira NBR 6118 (ABNT, 2014), proposto por Branson em 1963, foi primariamente empregada pelo ACI (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, 2005) para cálculo da flecha imediata, a qual ainda o recomenda.

## 2.6 Momento de fissuração

O momento de fissuração ( $M_r$ ) corresponde à primeira fissura, ou seja, a transição do estágio I para o estágio II. O cálculo do momento de fissuração, segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), é dado pela equação 2.6.1 a seguir.

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I}{y_t} \quad (2.6.1)$$

Em que:

- $I_c$  = momento de inércia na seção bruta de concreto;
- $y_t$  = distância do centróide da seção à fibra mais tracionada;

- $f_{ct}$  = resistência à tração direta do concreto, obtido conforme descrito no item 2.1.1.
- $\alpha$  = coeficiente que correlaciona a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta, em que  $\alpha = 1,2$  para seções T ou duplo T, e  $\alpha = 1,5$  para seções retangulares.

## 2.7 Deslocamentos imediatos

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), os valores dos deslocamentos e rotações deverão ser determinados por meio de modelos que considerem a rigidez efetiva das seções do elemento estrutural, ou seja, levem em consideração a presença da armadura, a existência de fissuras no concreto ao longo dessa armadura e as deformações diferidas no tempo.

A deformação real da estrutura depende também do processo construtivo, assim como das propriedades dos materiais (principalmente do módulo de elasticidade e da resistência à tração) no momento de sua efetiva solicitação. Em face da grande variabilidade dos parâmetros citados, existe uma grande variabilidade das deformações reais. Não se pode esperar, portanto, grande precisão nas previsões de deslocamentos dadas pelos processos analíticos prescritos (NBR 6118, 2014, p. 125).

Carvalho e Figueiredo Filho (2020) explicam que o cálculo do deslocamento ( $a$ ) é realizado por meio do princípio dos trabalhos virtuais, relacionando a função  $M_0(x)$  – momento fletor devido a um carregamento atuante – e  $M_1(x)$  – momento fletor devido a uma carga virtual aplicada a um ponto qualquer – ao módulo de elasticidade e a inércia do material, para a seção transversal considerada, ao longo do comprimento do elemento ( $l$ ) torna-se o mostrado pela equação 2.7.1.

$$a = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M_0 \cdot M_1}{E \cdot I} dx \quad (2.7.1)$$

Se o ponto de interesse corresponder à seção em que ocorre o maior deslocamento, tal deslocamento ( $a$ ) é chamado de flecha (ABNT, 2014). Em vigas de seção constante, o produto ( $EI$ ) - denominada rigidez - pode ser colocado em evidência, e a flecha passa a ser em função da integral dos momentos supracitados. Desenvolvendo a equação para um caso de viga bi apoiada (tipologia empregada no estudo), e então aplicando condições de contorno, isto é, deslocamentos verticais

nulos nos apoios e inclinação nula no centro do vão, a equação 2.7.2 para obtenção da flecha é fornecida.

$$a_i = \frac{5 \cdot p \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I} \quad (2.7.2)$$

Em que:

- $p$  = carregamento aplicado;
- $L$  = vão considerado;
- $E$  = módulo de elasticidade do concreto armado;
- $I$  = inércia da seção do perfil considerado.

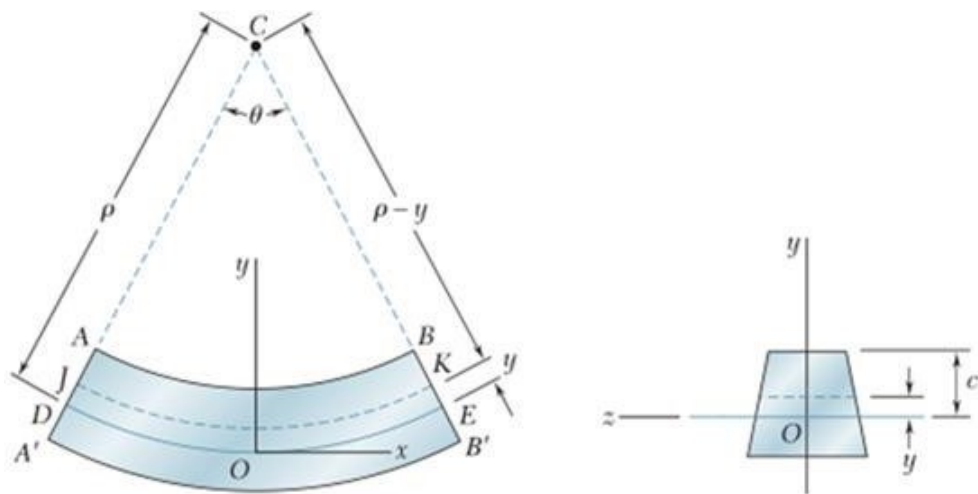
### 2.7.1 Equação da linha elástica

A demonstração para a equação da flecha apresentada é feita através da relação momento-curvatura. Como demonstram Hibbeler (2013) e Beer *et al.* (2014), a linha elástica - configuração geométrica de deslocamento vertical dos pontos situados no eixo longitudinal de uma viga - pode ser representada analiticamente por meio de uma função dedutível através de uma equação diferencial ordinária do segundo grau.

Quando um momento atuante deforma um elemento de viga, cada seção permanece plana e o ângulo entre elas torna-se  $d\theta$ . O arco que representa o trecho da curva elástica, mostrado na Figura 20, realiza uma interseção com o eixo neutro para cada seção, e o raio de curvatura para o arco é definido como  $\rho$ . Assim, em uma posição  $y$  do eixo neutro, é dada a equação 2.7.3 a seguir.

$$\varepsilon = \frac{(\rho - y) \cdot d\theta - \rho \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta} \rightarrow \frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{y} \quad (2.7.3)$$

Figura 20 – Curvatura para um elemento fletido



Fonte: Beer et al. (2014)

Considerando o material homogêneo comportando-se de maneira elástica linear, então a lei de Hooke aplica-se (equação 2.1.1), também, a fórmula para a flexão é aplicável (equação 2.7.4).

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I} \quad (2.7.4)$$

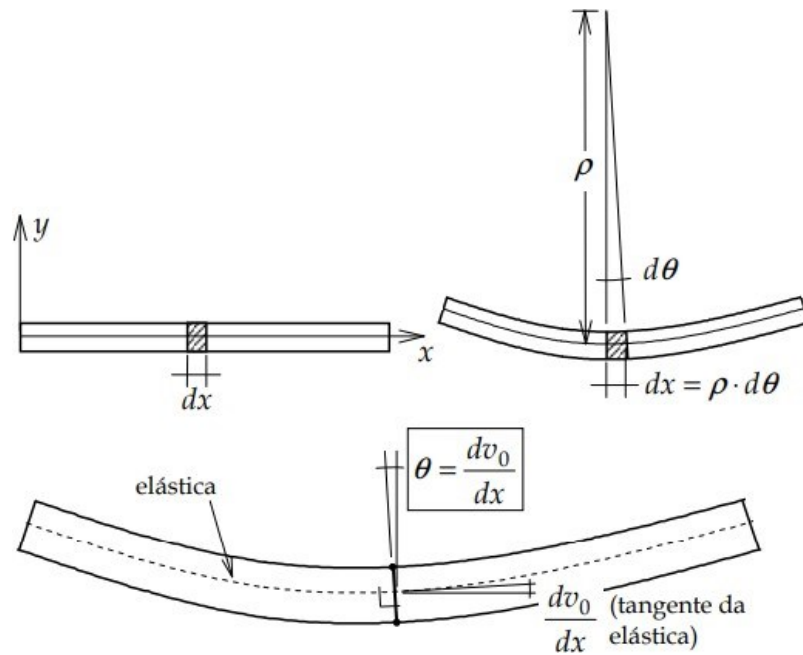
Dessa maneira, combinando as equações 2.7.3 e 2.7.4, os autores apresentam a relação momento-curvatura pela equação 2.7.5.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I} \quad (2.7.5)$$

Em que o produto  $EI$  é denominado rigidez à flexão (tendo em vista que as deflexões do elemento são causadas somente pela flexão), e como  $dx = \rho d\theta$ , como mostrado na Figura 21, reescrevendo a equação 2.7.5, obtém-se a equação 2.7.6.

$$d\theta = \frac{M}{E \cdot I} dx \quad (2.7.6)$$

Figura 21 - Eixo deformado de elemento reticulado



Fonte: Martha (1999)

Expressando-se a curvatura em termos de  $x$  e  $v$ , é possível determinar a curva elástica para o elemento de viga, como mostra a equação 2.7.7.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (2.7.7)$$

Hibbeler (2013) explica que na maioria das aplicações práticas ocorrem apenas pequenas deflexões nas vigas, as linhas elásticas são muito achatadas e tanto o ângulo  $\theta$  quanto a inclinação da curva são quantidades muito pequenas ( $\frac{dv}{dx} \approx 0$ ).

Também se destaca que ao presumir a hipótese de pequenas deformações, o comprimento original do eixo  $x$  do elemento da viga e o arco da sua curva elástica serão os mesmos. Por fim, ao combinar as equações 2.7.5 e 2.7.7, e realizando a simplificação relacionada a pequenas deformações, a equação da linha elástica torna-se a equação 2.7.8.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I} \quad (2.7.8)$$

### 2.7.2 Princípio dos Trabalhos Virtuais

Segundo Hibbeler (2013), o princípio dos trabalhos virtuais (PTV) retrata que num sistema não dissipativo (sem trocas de calor), deve haver um balanço de energia entre as parcelas de energias externa e interna de um corpo sólido deformável, ou seja, o trabalho virtual das forças externas equivale ao trabalho virtual das forças internas. O termo virtual é utilizado para descrever a carga, tendo em vista que é imaginária e não existe como parte da carga real.

O trabalho virtual interno desenvolvido no corpo corresponde ao trabalho dos esforços internos virtuais sobre as deformações reais do problema original. Tais deformações podem ter várias origens, como por exemplo: erros geométricos de fabricação, temperatura ou, mais comumente, da tensão interna no material (HIBBELER, 2013).

Em casos reais, não é possível impor limites à intensidade das cargas externas, de modo que a tensão pode provocar o escoamento ou mesmo a fissura do material. Contudo, ao admitir que o comportamento do material seja elástico-linear e que a tensão não exceda o limite de proporcionalidade, pode-se estabelecer expressões para o trabalho virtual interno provocado por tensões normais com base nas equações da energia de deformação (HIBBELER, 2013).

$$P' \cdot \Delta = \sum u \cdot dL \quad (2.7.9)$$

Em que:

- $P' = 1$  = carga unitária virtual externa atuando na direção de  $\Delta$ ;
- $u$  = carga virtual interna atuando sobre o elemento na direção  $dL$ ;
- $\Delta$  = deslocamento causado por cargas reais;
- $dL$  = deformação interna do elemento causada por cargas reais.

### 2.7.3 Teorema de Castigliano

Conforme Hibbeler (2013), o teorema de Castigliano, assim como o princípio dos trabalhos virtuais, é uma dedução direta do princípio da conservação de energia. Esse teorema define que o deslocamento em um dado ponto de um corpo solicitado

por forças externas quaisquer é igual à derivada parcial de primeira ordem da energia de deformação do corpo (energia interna) em relação a uma força  $P_i$  que age no ponto e na direção do deslocamento desejado  $\Delta_i$ .

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial P_i} \quad (2.7.10)$$

O teorema é aplicado somente às estruturas que mantêm temperaturas constantes, que os apoios não sofrem recalques, e que o regime do material é elástico linear, isto é, o enunciado é relativo à compatibilidade da estrutura, exigindo que apenas forças conservativas sejam consideradas (HIBBELER, 2013).

#### 2.7.4 Formulação Matricial

Uma análise matricial de estruturas se baseia no Método dos Deslocamentos, ou Método da Rigidez, esse consiste em determinar a matriz de rigidez da estrutura, para então obter os demais parâmetros como deslocamentos, reações e forças internas por meio de cargas externas aplicadas à estrutura (LAGE; PELLEGRINO NETO, 2018).

Este método parte do princípio de que os deslocamentos são as incógnitas fundamentais, sendo assim, inicialmente são calculados os deslocamentos nodais da estrutura e, em seguida, os esforços, formando um sistema de equações relacionando forças, rigidez e deslocamentos sob uma ótica matricial, considerando a deformação elástico-linear das estruturas, baseando-se na lei de Hooke. A equação fundamental do método está representada a seguir (LAGE; PELLEGRINO NETO, 2018).

$$F = K \cdot U \text{ ou } \{F\} = \{K\} \cdot \{U\} \quad (2.7.11)$$

Em que:

- $\{F\}$  = vetor de forças;
- $\{K\}$  = matriz de rigidez;
- $\{U\}$  = vetor de deslocamentos.

Segundo Soriano (2005), um software que tem sido amplamente utilizado para a análise matricial de estruturas é o *Two-dimensional Frame Analysis Tool (Ftool)*<sup>5</sup> (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO, 2018). Dentre os motivos de sua utilização citam-se: as facilidades e simplificações na modelagem estrutural, não demandar computadores robustos para sua utilização, rápido tempo de processamento para as análises, e, sobretudo, de acesso gratuito.

### 2.7.5 Método dos Elementos Finitos

Segundo Bathe (2016), estruturas que apresentam alta complexidade de cálculo, em geral, podem ser dimensionadas de forma aproximada. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos mais utilizados para essa finalidade, baseado no princípio da discretização. Esse processo é considerado uma técnica numérica onde fragmenta-se o problema em várias partes (elementos finitos), e faz-se necessário verificar sua precisão.

O método utiliza técnicas matriciais e discretizações, e os modelos baseados em análises simples vêm sendo substituídos por outros quando a não linearidade física é acoplada, visando representar de maneira mais realista o comportamento dos materiais que constituem as estruturas (MARTINS, 2008).

À medida que os estudos sobre modelos mais apropriados para a modelagem do concreto armado avançam e o uso dos computadores se torna mais frequente, é extremamente interessante que se passe a agregar estes progressos ao cálculo de estruturas de concreto armado (MARTINS, 2008).

Ainda segundo Martins (2008), a modelagem do comportamento em serviço do concreto armado, por meio do MEF com a incorporação da não linearidade física, pode ser feita de duas maneiras distintas, a saber:

- modelagem das relações entre tensões e deformações dos materiais constituintes: concreto e aço;
- modelagem via diagramas momento X curvatura de uma seção transversal.

A primeira forma de modelagem possui campo de aplicação mais amplo que a segunda, podendo ser empregada em qualquer tipo de elemento finito. Os modelos do segundo tipo de modelagem têm a virtude de considerar facilmente, por meio de

---

<sup>5</sup> Disponível em: <[www.tecgraf.puc-rio.br/ftool/](http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool/)>. Acesso em 26 nov. 2021.



um modelo adequado, a contribuição do concreto intacto entre fissuras (MARTINS, 2008).

Ambos devem ter seus parâmetros aferidos experimentalmente. Diversos autores trabalharam com os modelos do segundo tipo de modelagem, entre eles destaca-se o modelo proposto por Ghali, Favre e Elbadry (2002).

#### 2.7.5.1 Elementos de Viga

Designa-se por Euler-Bernoulli a formulação do elemento finito de viga em que se considera que as seções se mantêm planas e normais ao eixo da barra após a deformação, ou seja, essa teoria adota um campo de deslocamento que implica nas hipóteses de que uma linha reta e normal à superfície, neutra antes da deformação da peça, permanece reta e normal após a sua deformação, desconsiderando efeitos normais e cisalhantes sobre a estrutura (AZEVEDO, 2003).

Cruz e de Souza (2018) explicam que as vigas são elementos estruturais presentes em praticamente todos os projetos na engenharia civil, existindo diversos modelos de análise, sendo a teoria mais simples e mais comumente utilizada é a de Euler-Bernoulli. Na formulação do elemento de viga de Timoshenko, Azevedo (2003) expõe que uma seção normal ao eixo da viga não mantém essa característica após a deformação, deste modo, é possível considerar a deformação devida ao corte.

### 2.8 Deslocamentos diferidos no tempo

Após a avaliação do deslocamento imediato, deve-se proceder para a determinação do deslocamento diferido no tempo que leva em consideração os efeitos de fluência e retração. Por conta da influência desses dois fatores, a flecha diferida tende a ter valores de deslocamentos superiores aos deslocamentos imediatos (BARBOSA, 2010).

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), para o cálculo da flecha diferida no tempo, deve se empregar a equação 2.8.1, que considera o efeito da fluência.

$$a_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50 \cdot \rho'} \quad (2.8.1)$$

Em que:

- $a_f$  = efeito da flecha diferida no tempo;
- $\Delta\xi$  = coeficiente obtido de acordo com a Tabela 2 ou calculado através da equação 2.8.2.

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (2.8.2)$$

$$\xi(t) = 0,68 \cdot (0,996^t) \cdot t^{0,32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses}$$

$$\xi(t) = 2 \text{ para } t > 70 \text{ meses}$$

Sendo  $t$  o tempo em que se deseja a flecha diferida (em meses), e  $t_0$  data referente à primeira aplicação da carga de longa duração (em meses). Em casos de aplicações de parcelas da carga em idades diferentes, usa-se o valor ponderado obtido a partir da equação 2.8.3.

$$t_0 = \frac{\sum P_i \cdot t_i}{\sum P_i} \quad (2.8.3)$$

Em que:

- $P_i$  = parcelas de carga;
- $t_{0i}$  = idade da aplicação de cada parcela (em meses);
- $\rho'$  = taxa geométrica da armadura longitudinal de compressão, calculada por meio da equação 2.8.4.

$$\rho' = \frac{A_s'}{b \cdot d} \quad (2.8.4)$$

Em que:

- $A_s'$  = área da seção transversal da armadura longitudinal de compressão;
- $b$  = largura da seção;
- $d$  = altura útil da seção;

Dessa maneira o valor total da flecha ( $a_f$ ) pode ser obtido por meio da equação 2.8.5.

$$a_f = a_i(1 + a_f) \quad (2.8.5)$$

Tabela 2 – Valores do coeficiente  $\xi(t)$  em função do tempo

Tempo (meses)	Coeficiente $\xi(t)$
0	0
0,5	0,54
1	0,68
2	0,84
3	0,95
4	1,04
5	1,12
10	1,36
20	1,64
40	1,89
$\geq 70$	2

Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014)

## 2.9 Lajes nervuradas unidirecionais

Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2020), os sistemas de lajes nervuradas com vigotas pré-moldadas têm sido cada vez mais utilizados frente aos sistemas de lajes maciças, pois apresentam soluções mais simples e econômicas.

As lajes nervuradas unidirecionais, cujas armaduras principais são dispostas apenas em uma direção, geralmente são executadas com vigotas pré-fabricadas por não necessitarem de formas para execução como em lajes nervuradas moldadas no local, pois as próprias vigotas e enchimentos cumprem esse papel (SILVA, 2005).

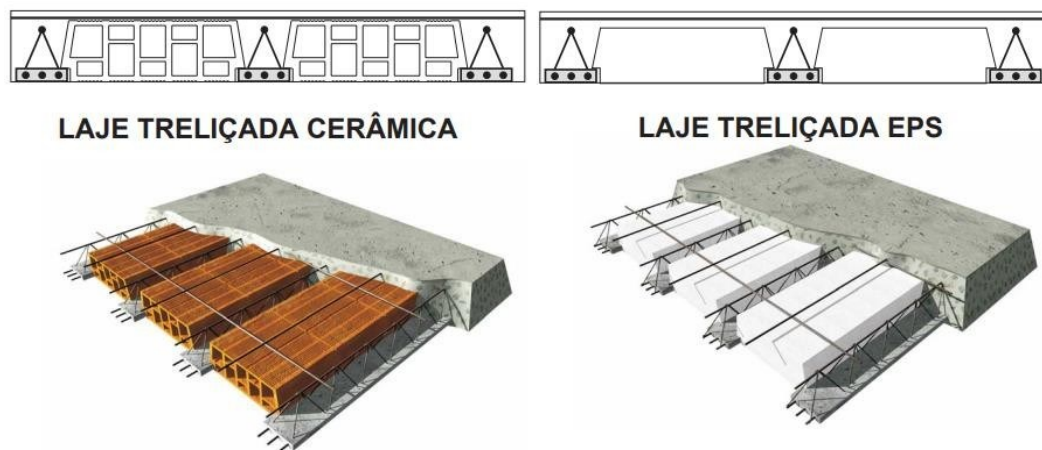
As lajes nervuradas, moldadas no local ou com vigotas pré-fabricadas, possibilitam que o peso próprio da estrutura seja reduzido suprimindo-se nas zonas tracionadas da seção transversal parte do concreto que não trabalha estruturalmente, deixando apenas algumas faixas deste, onde estarão agrupadas as armaduras tracionadas. A essas regiões de tração, com armaduras concentradas, dá-se o nome de nervuras, e daí o termo lajes nervuradas (SILVA, 2005, p. 3).

Segundo Bastos (2021), os materiais para enchimento (material inerte) das lajes nervuradas unidirecionais – parte do sistema que não possui função estrutural – podem ser constituídos de diversos materiais, sendo aconselhável a utilização de materiais leves, de baixa resistência, e mais baratos do que o concreto. Entre os materiais mais utilizados para essa finalidade, destacam-se as lajotas cerâmicas e os blocos de poliestireno expandido (EPS) como mostrados na Figura 22.

Na Figura 22, observa-se também a armadura de distribuição (armadura cruzada superior, posicionada na mesa da seção), recomendada pela norma NBR 14859-1 - *Lajes pré-fabricadas de concreto* (ABNT, 2016), possuindo as funções de

auxiliar na distribuição das tensões provenientes de cargas concentradas e no controle de fissuração.

**Figura 22 – Materiais para enchimento em lajes nervuradas**



Fonte: PRÉ-MOLD RM (2021)<sup>6</sup>

### 2.9.1 Seção T

Conforme apresentado no tópico de introdução, Araújo (2010) explica que a característica principal das lajes nervuradas unidirecionais é a disposição das vigas, tratadas como uma série de vigas seção T, orientadas seguindo apenas uma direção (geralmente a direção de menor vão). Seu comportamento estrutural pode ser considerado como intermediário ao comportamento de elementos independentes e ao de lajes maciças.

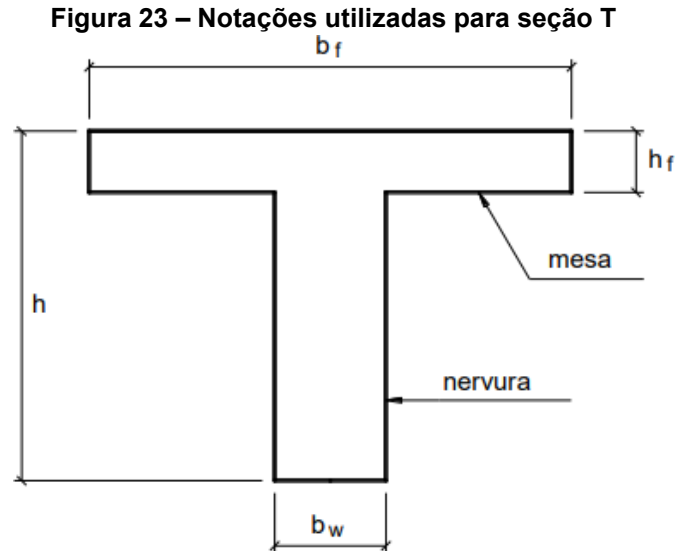
Diante disso, sugere-se que – a favor da segurança – o cálculo dos esforços solicitantes e dos deslocamentos transversais para lajes nervuradas armadas em uma direção seja feito considerando as nervuras como vigas independentes com seção transversal em forma de “T” (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2020).

Quando a mesa está comprimida, no cálculo da armadura de flexão ( $A_s$ ) pode-se considerar a contribuição da mesa. Neste caso, o cálculo é para seção T ( $b_r \cdot h$ ). Quando a mesa está tracionada, o cálculo é como seção retangular ( $b_w \cdot h$ ), pois a mesa tracionada não pode ser considerada no cálculo à flexão. Devem ainda ser observados:

- extensão da armadura longitudinal (cobrimento do diagrama de momentos fletores);
- ancoragem da armadura longitudinal nos apoios;
- taxas mínimas de armadura;
- fissuração etc. (BASTOS, 2021, p. 71).

<sup>6</sup> Disponível em: < <https://www.aecweb.com.br/empresa/pre-mold-rm/3934/downloads/1>>. Acesso em 6 dez. 2021.

As nomenclaturas utilizadas para notar as dimensões da seção T, conforme Bastos (2019), são mostradas na Figura 23.



Fonte: Bastos (2019)

### 2.9.2 Características geométricas de seções T nos estádios I e II

Conforme mostrado no item 2.4.1, no estágio I, supõe-se que não há fissuras ao longo do elemento estrutural e que existe linearidade entre tensão e deformação. Portanto, as características geométricas de uma seção transversal no primeiro estágio, considerando seções T para as formulações e as nomenclaturas apresentadas na Figura 22, são dadas pelas equações apresentadas no Quadro 1.

**Quadro 1 - Características geométricas de seções transversais em "T" no estágio I, sem considerar a presença da armadura**

Fator	Expressão
Área (seção geométrica)	$A_g = (b_f - b_w) \cdot h_f + b_w \cdot h$
Centro de gravidade	$y_{cg} = \frac{(b_f - b_w) \cdot \frac{h_f^2}{2} + b_w \cdot \frac{h^2}{2}}{A_g}$
Momento de Inércia à flexão	$I_g = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot h^3}{12} + (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot \left(y_{cg} - \frac{h_f}{2}\right)^2 + b_w \cdot h \cdot \left(y_{cg} - \frac{h}{2}\right)^2$

Fonte: Adaptado de Carvalho e Figueiredo Filho (2020)

Considerando a aderência entre concreto e aço, é assumida a hipótese de que estes dois materiais trabalham de forma solidária, sendo possível calcular as características geométricas da seção composta de aço e concreto utilizando o procedimento de homogeneização, também citado no item 2.4.1 a respeito do comportamento no estágio I. O Quadro 2 apresenta as equações para este caso.

**Quadro 2 - Características geométricas de seções transversais em "T" no estágio I, considerando a contribuição da armadura**

Fator	Expressão
Área (seção geométrica)	$A_g = (b_f - b_w) \cdot h_f + b_w \cdot h + A_s \cdot (\alpha_s - 1)$
Centro de gravidade	$y_h = \frac{(b_f - b_w) \cdot \frac{h_f^2}{2} + b_w \cdot \frac{h^2}{2} + A_s \cdot (\alpha_s - 1) \cdot d}{A_h}$
Momento de Inércia à flexão	$I_g = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot h^3}{12} + (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot \left(y_h - \frac{h_f}{2}\right)^2 + b_w \cdot h \cdot \left(y_h - \frac{h}{2}\right)^2 + A_s \cdot (\alpha_s - 1) \cdot (y_h - d)^2$

Fonte: Adaptado de Carvalho e Figueiredo Filho (2020)

No estágio II (abordado no item 2.4.2), ainda não há escoamento da armadura ou plastificação do concreto na região comprimida. Admitindo-se que os esforços de tração na fibra mais tracionada são resistidos apenas pela armadura longitudinal, pois a resistência característica à tração do concreto ( $f_{ct}$ ) é menor que as tensões de tração solicitante, ou seja, o momento atuante é maior que o momento de fissuração.

Para o cálculo do momento de inércia no estágio II para seção T, deve-se determinar a posição da linha neutra ( $x_{II}$ ), conforme deduzido por Ghali e Favre (1986) apud Carvalho e Figueiredo Filho (2020), de acordo com as equações a seguir.

$$x_{II} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 \cdot a_3}}{2a_1} \quad (2.9.1)$$

$$a_1 = \frac{b_w}{2} \quad (2.9.2)$$

$$a_2 = h_f \cdot (b_f - b_w) + \alpha_e \cdot A_s \cdot A'_s \cdot (\alpha_e - 1) \quad (2.9.3)$$

$$a_3 = -d' \cdot (\alpha_e - 1) \cdot A'_s - d \cdot \alpha_e \cdot A_s - \frac{h_f^2}{2} \cdot (b_f - b_w) \quad (2.9.4)$$

Em que  $d'$  é a distância do centro de gravidade da armadura comprimida  $A'_s$  até a borda mais comprimida de concreto. O coeficiente  $\alpha_e$  é a relação entre os módulos de elasticidade dos materiais, obtido conforme equação 2.5.1. Na sequência, em posse de  $x_{II}$  é possível obter o momento de inércia da seção no estágio II ( $I_{II}$ ), para  $x_{II} < h_f$  utiliza-se a equação 2.9.11, enquanto para  $x_{II} > h_f$  a expressão é a apresentada na equação 2.9.6.

$$I_{II} = \frac{b_f \cdot x_{II}^3}{3} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 + (\alpha_e - 1) \cdot A'_s (x_{II} - d')^2 \quad (2.9.5)$$

$$I_{II} = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_f \cdot x_{II}^3}{3} + (b_f - b_w) \cdot (x_{II} - \frac{h_f}{2})^2 + \alpha_e \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 + (\alpha_e - 1) \cdot A'_s (x_{II} - d')^2 \quad (2.9.6)$$

### **3 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO**

Considerando as peculiaridades de um trabalho de cunho científico, foram utilizados dois métodos de pesquisa, sendo a revisão bibliográfica, com o objetivo de identificar modelos para o cálculo da deflexão em elementos fletidos; e a experimentação de dois protótipos ensaiados por Silva (2021) e outras três seções apresentadas por Carvalho e Figueiredo Filho (2020), com o objetivo de avaliar a deformação imediata e analisar os modelos propostos para a previsão de flechas.

Os cálculos necessários para avaliação das flechas foram realizados em planilhas de cálculos, e estão apresentados na seção de resultados e na seção Apêndice. Calculou-se somente a parcela imediata das flechas, não sendo adicionada a parcela referente ao efeito de fluência, devido ao limite do escopo deste trabalho.

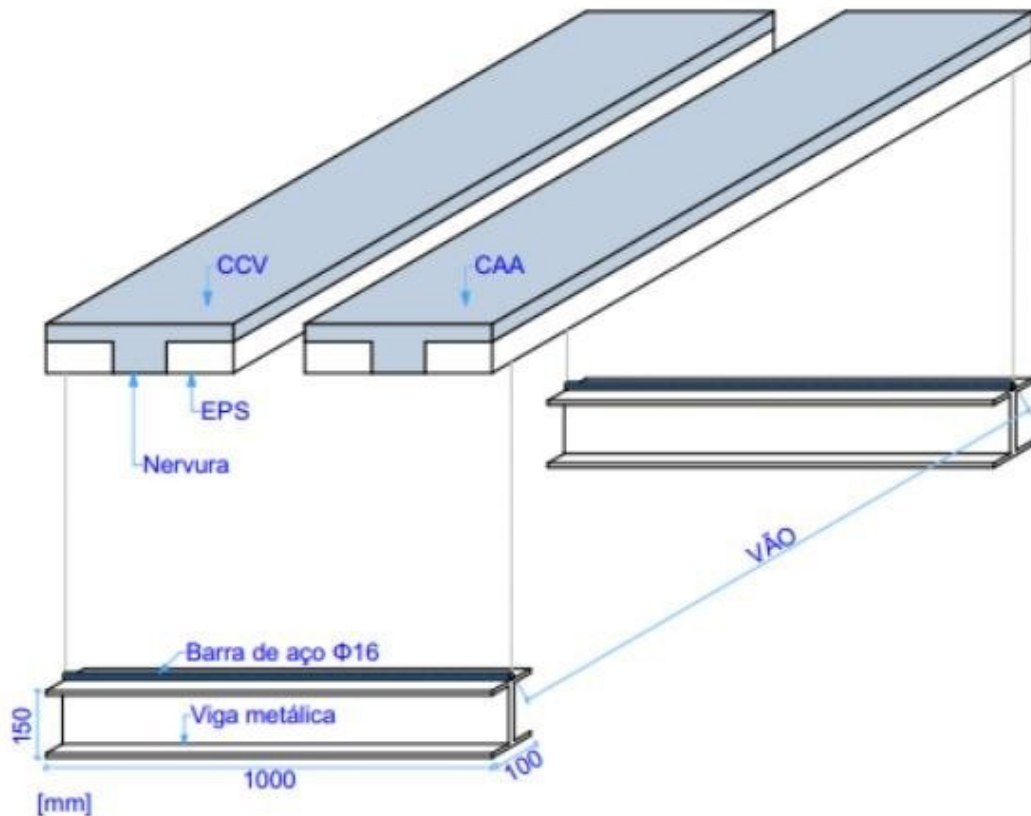
#### **3.1 Protótipos**

O objeto de estudo trata-se de protótipos de lajes nervuradas unidirecionais, confeccionadas, dimensionadas e ensaiadas por Silva (2021), no laboratório de estruturas da UTFPR – Campus Apucarana, como mostra a Figura 24. O primeiro protótipo executado em concreto convencional (CVV), e um segundo protótipo em concreto autoadensável (CAA).

As duas lajes possuem vãos de 2,0 m, articuladas nos apoios (barra de aço simula uma ligação articulada), e os carregamentos foram aplicados por meios de sacos de 20 kg de brita. Para simular um carregamento uniformemente distribuído, foram utilizados 5 sacos ao longo do comprimento de cada um dos protótipos, totalizando um carregamento de 100 kg para cada laje



Figura 24 – Protótipos de lajes nervuradas unidirecionais



Fonte: Silva (2021)

A medição das flechas foi realizada por meio de relógios comparadores analógicos posicionados no centro e a um quarto do vão das nervuras com suportes articulados (hastes metálicas com base magnética), conforme mostra a Figura 25.

A aferição de flechas imediatas devido ao peso próprio foi impossibilitada por questão de problemas na retirada da base das formas da laje. Dessa maneira, os protótipos ensaiados pela autora tiveram aferições apenas para as flechas diferidas no tempo, e de flechas imediatas devido ao carregamento aplicado.

**Figura 25 – Posicionamento dos relógios comparadores**



**Fonte: Silva (2021)**

### 3.1.1 Concreto

Com relação às características do concreto utilizado na confecção dos protótipos, foram utilizados cimento CP V ARI-RS, agregado miúdo areia natural, agregado graúdo brita 1 (CCV) e brita 0 (CAA), e aditivo (superplastificante), para ambas as lajes, nas proporções:

- Concreto convencional: 1,00:3,16:3,51:0,006;
- Concreto autoadensável: 1,00:3,21:2,00:0,008.

A relação água-cimento foi de 0,6 para ambas as misturas. Os valores da resistência à compressão foram obtidos por meio da ruptura de corpos de prova cilíndricos de 10 cm de diâmetro e 20 cm de altura em ensaios aos 7, 14 e 28 dias conforme recomendação da NBR 5738 (2015), a justificativa dos valores para as resistências à compressão média ( $f_{cm}$ ) e característica ( $f_{ck}$ ) está descrita na seção 2.2. Os módulos de elasticidade secante ( $E_{cs}$ ) para cada laje são obtidos conforme as equações 2.2.1 e 2.2.3. Os valores são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Resistências obtidas para os protótipos

Tipo	Idade (dias)	Força máx. (kN)	fci (MPa)	fck (MPa)	Eci (MPa)	Ecs (MPa)
CVV	7	127,8	16,27	13,59	27089,19	27771,85
	14	132,48	16,87	14,08		
	28	152,85	19,46	16,25		
CAA	7	154,02	19,61	16,37	29712,14	25222,4
	14	182,34	23,22	19,39		
	28	183,92	23,42	19,55		

Fonte: Adaptado de Silva (2021)

## 3.1.2 Aço

Foram utilizadas 2 barras de aço nervurado (CA-50) de 5 mm de diâmetro para compor a armadura longitudinal das lajes nervuradas, com cobrimento de 1,5 cm. A armadura de distribuição foi dispensada.

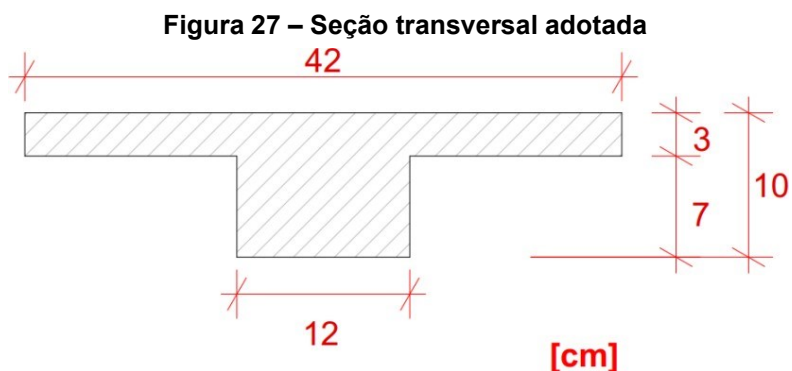
## 3.1.3 Propriedades geométricas

Com relação às características geométricas mostradas na Figura 26, para a seção transversal adotada (Figura 27), pode-se calcular os momentos de inércia da seção bruta de concreto ( $I_g$ ), da seção homogeneizada ( $I_h$ ), para os estádios 1 (I) e 2 (II), como mostrado no item 2.9.2, os valores são calculados por meio de planilhas automáticas de cálculo e apresentados na Tabela 5.

Figura 26 – Características geométricas e resistências obtidas para os protótipos

Laje - CCV			Laje - CAA		
$\Phi$	5,000	mm	$\Phi$	5,000	mm
n	2,000	barras	n	2,000	barras
As	0,393	cm <sup>2</sup>	As	0,393	cm <sup>2</sup>
As'	0,000	cm <sup>2</sup>	As'	0,000	cm <sup>2</sup>
fyk	50,000	kN/cm <sup>2</sup>	fyk	50,000	kN/cm <sup>2</sup>
fyd	43,478	kN/cm <sup>2</sup>	fyd	43,478	kN/cm <sup>2</sup>
fcm,28	19,460	MPa	fcm,28	23,420	MPa
fck,28	16,250	MPa	fck,28	19,550	MPa
fcd	11,607	MPa	fcd	13,964	MPa
bf	42,000	cm	bf	42,000	cm
bw	12,000	cm	bw	12,000	cm
hf	2,476	cm	hf	3,238	cm
h	9,476	cm	h	10,238	cm
cob	1,500	cm	cob	1,500	cm
d	7,726	cm	d	8,488	cm

Fonte: Silva (2021)



Fonte: Silva (2021)

**Tabela 4 – Momentos de inércia obtidos para os protótipos**

Tipo	$I_g(cm^4)$	$I_h(cm^4)$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$x_{II}'$	$x_{II}''$	$I_{II}$
CVV	1439,24	1499,85	6,00	77,90	-119,93	1,39	-14,37	182,94
CAA	1822,52	1891,82	6,00	101,16	-119,93	1,11	-17,97	198,80

Fonte: Autoria Própria (2022)

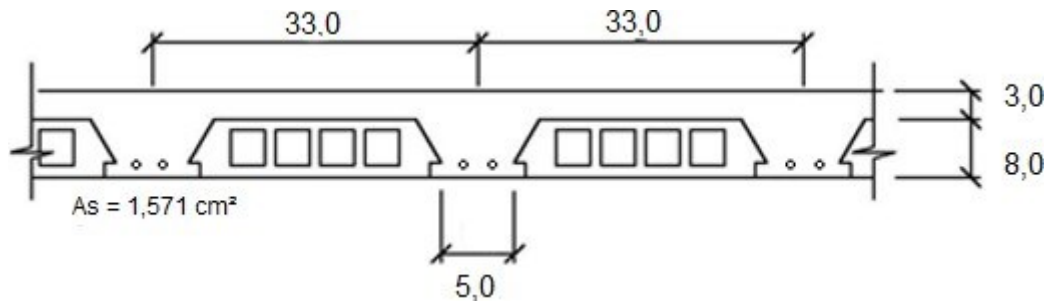
### 3.2 Seções apresentadas por Carvalho e Figueiredo Filho (2020)

Com intuito de obter mais resultados para a pesquisa, o estudo de outros exemplos de seções mostrou-se válido. Três exemplos considerados são apresentados pelos autores: duas lajes nervuradas unidirecionais e uma viga retangular.

#### 3.2.1 Laje nervurada pré-moldada – Exemplo 1

Sistema de laje pré-moldada (treliçada) conforme mostrado na figura 28, com altura total de 11 cm e altura da capa de 3,0 cm, usado para compor uma laje de vão livre igual a 4,0 m, simplesmente apoiada nas extremidades. O concreto considerado é de classe C20, cobrimento de 1,5 cm, e a armadura longitudinal considerada é de 10 mm.

**Figura 28 – Seção transversal para o Exemplo 1**

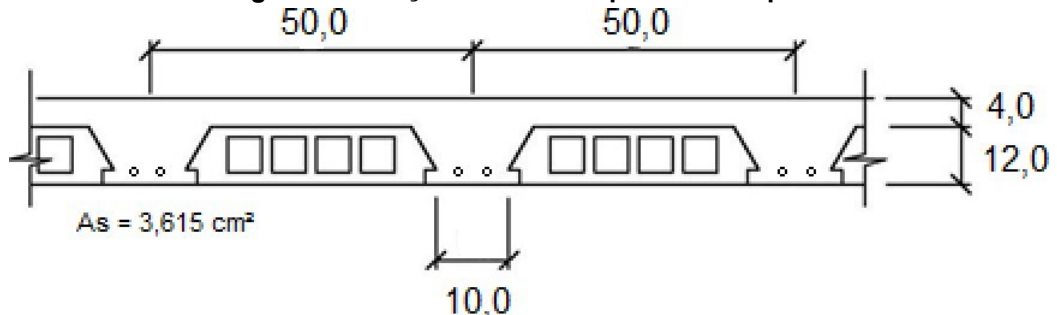


Fonte: Autoria Própria (2022)

### 3.2.2 Laje nervurada pré-moldada – Exemplo 2

Sistema de laje pré-moldada (figura 29), com altura total de 16 cm ( $\beta 16$ ) e altura da capa de 4,0 cm, abas das mesas de concreto de 50 cm, vão de 5,0 m, simplesmente apoiada. Concreto classe C20, cobrimento de 1,5 cm, e a armadura longitudinal de 12,5 mm.

**Figura 29 – Seção transversal para o Exemplo 2**

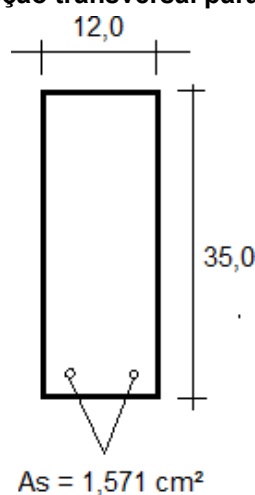


Fonte: Autoria Própria (2022)

### 3.2.3 Viga retangular – Exemplo 3

Viga de concreto classe C20, com 12 cm de largura e 35 de altura, simplesmente apoiada nas extremidades. Vão considerado de 4,0 m. Armadura aço CA50, bitola de 12,5 mm.

**Figura 30 – Seção transversal para o Exemplo 3**



Fonte: Autoria Própria (2022)

### 3.3 Modelos teóricos

Como estratégia de pesquisa foi considerada uma revisão bibliográfica em artigos acadêmicos, livros e periódicos. Além disso, foi considerada a aplicação de modelos propostos para o objeto de estudo e para as seções estudadas.

#### 3.3.1 Modelo da ABNT NBR 6118 (2014)

O modelo apresentado pela norma é experimentado para os exemplos de seções estudados.

#### 3.3.2 Modelo proposto por Branson (1965)

O modelo apresentado pelo autor é experimentado para os exemplos de seções estudados, considerando o momento de inércia para a seção homogeneizada.

#### 3.3.3 Modelo incremental utilizando a rigidez corrigida

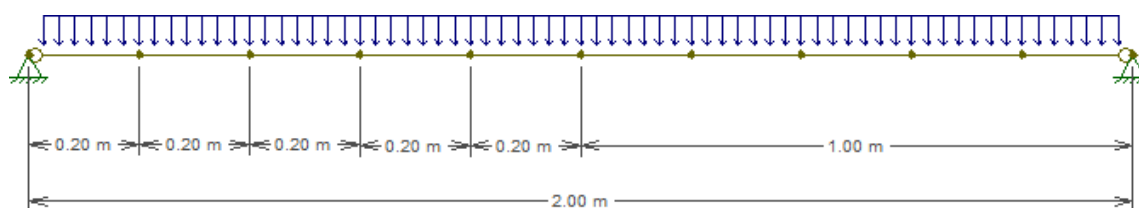
Com o auxílio do software *Ftool*, aplicam-se incrementos de carga ao modelo de viga experimentado. A escolha pela utilização do *Ftool* deve-se ao fato dele ser uma ferramenta gratuita e empregada em inúmeros trabalhos de cunho científico e amplamente utilizado no meio acadêmico, sobretudo como ferramenta pedagógica.

Com o elemento de viga (simplificação para uma área de influência da laje nervurada unidirecional) discretizado, são obtidos os deslocamentos nos pontos (nós) de maneira a avaliar a configuração deformada da viga. O modelo considera uma

correção na rigidez a cada novo incremento de carga (elemento fissurado ou não), considerando a não linearidade física do concreto.

A viga discretizada em 10 elementos de comprimentos iguais é apresentada na Figura 29. Os incrementos de carga, ou passos de cargas, são arbitrados em 10 passos de carga até a ruptura, de maneira que é possível analisar o modelo trabalhando entre os estádios I e II (fissurado).

**Figura 31 – Modelo discretizado**



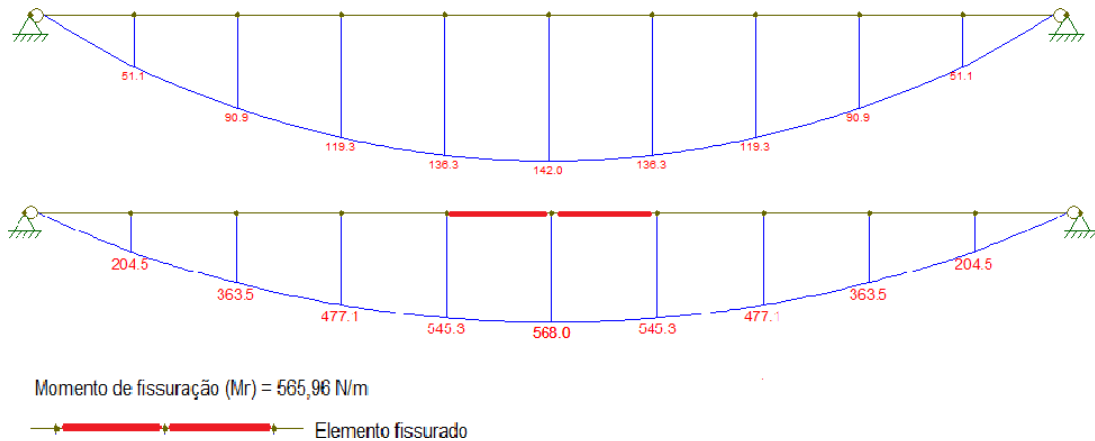
**Fonte: Autoria Própria (2022)**

O 1º passo de carga é atribuído a 10% da carga de ruptura do elemento, obtida por meio do momento resistente da seção, sem o coeficiente de segurança, uma vez que a análise ocorre em situação de serviço. Na sequência, são incrementados novos passos de carga, e para cada elemento em que o momento atuante atinge o momento de fissuração, a rigidez é corrigida.

Os valores de deslocamentos obtidos para o incremento de carga são registrados em planilhas de cálculo, e na sequência com os elementos de viga com a rigidez corrigida são obtidos novos deslocamentos, também registrados em planilhas.

O método é possível pelo princípio de superposição dos efeitos, e supondo que as outras propriedades da seção sejam constantes. A Figura 28 exemplifica a disposição dos momentos atuantes para incrementos de carga para o protótipo em concreto autoadensável (CAA).

**Figura 32 – Momentos atuantes para incrementos de carga (CCV)**

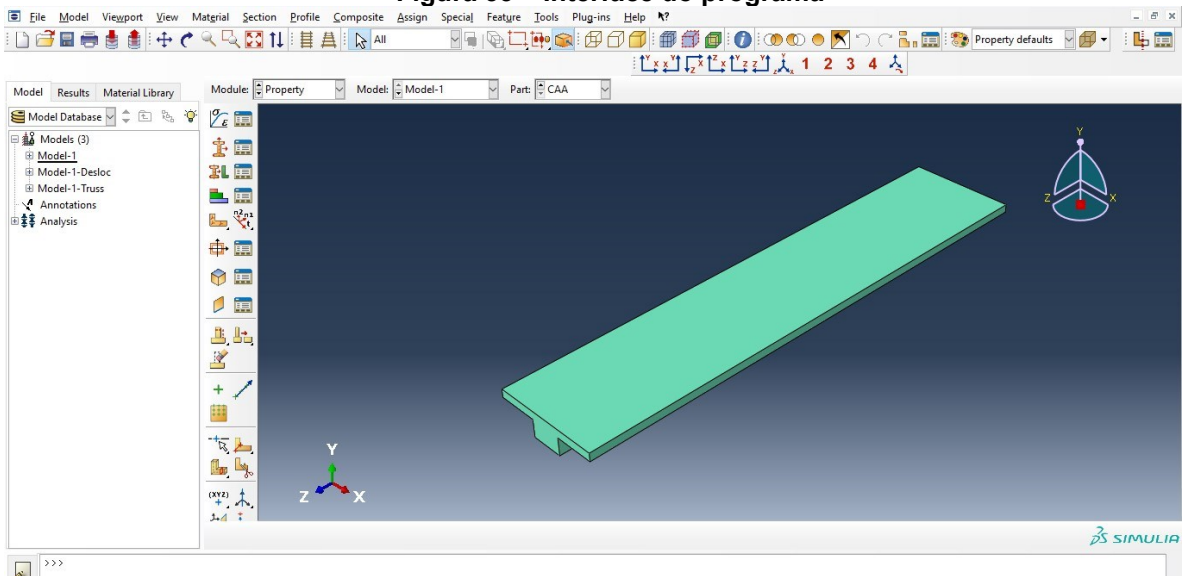


Fonte: Autoria Própria (2022)

### 3.3.4 Modelo de elementos finitos

O modelo de elementos finitos foi experimentado por meio do programa *Abaqus*<sup>7</sup>, um pacote de software comercial para análise de elementos finitos (DASSAULT SYSTEMES, 2022). Utilizando o software, modelou-se os protótipos de lajes nervuradas.

**Figura 33 – Interface do programa**



Fonte: *Abaqus*<sup>7</sup> (2021)

<sup>7</sup> Disponível em: < <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/abaquscae/> Acesso em 6 mar. 2022.



Após a definição da geometria do modelo no programa, são estabelecidas as propriedades dos materiais empregados (concreto e aço) na aba *property* do programa, atribuindo propriedades relativas à lei constitutiva do material, como as propriedades elásticas do material (módulo de elasticidade) e critérios de falha, como, por exemplo, o *concrete damage plasticity* (CDP), modelo amplamente utilizado em análises desse tipo. As tabelas 5 e 6 apresentam as propriedades elásticas criadas na aba *property* para a modelagem.

**Tabela 5 – Propriedades elásticas para o aço**

Módulo de elasticidade	Coeficiente de <i>poisson</i>
210000000 <i>kPa</i>	0,3

Fonte: Aatoria Própria (2022)

**Tabela 6 – Propriedades elásticas para o concreto**

Protótipo	Módulo de elasticidade	Coeficiente de <i>poisson</i>
CCV	22771847 <i>kPa</i>	0,2
CAA	25222399 <i>kPa</i>	0,2

Fonte: Aatoria Própria (2022)

A tabela 7 apresenta os parâmetros utilizados para o modelo CDP também criado na aba *property* do programa. Os valores considerados são baseados nos trabalhos de Ali, Kim e Cho (2013), Birtel e Mark (2006), Dong *et al.* (2018), Li, Hao e Bi (2017), e no manual do programa (DASSAULT SYSTEMES, 2022).

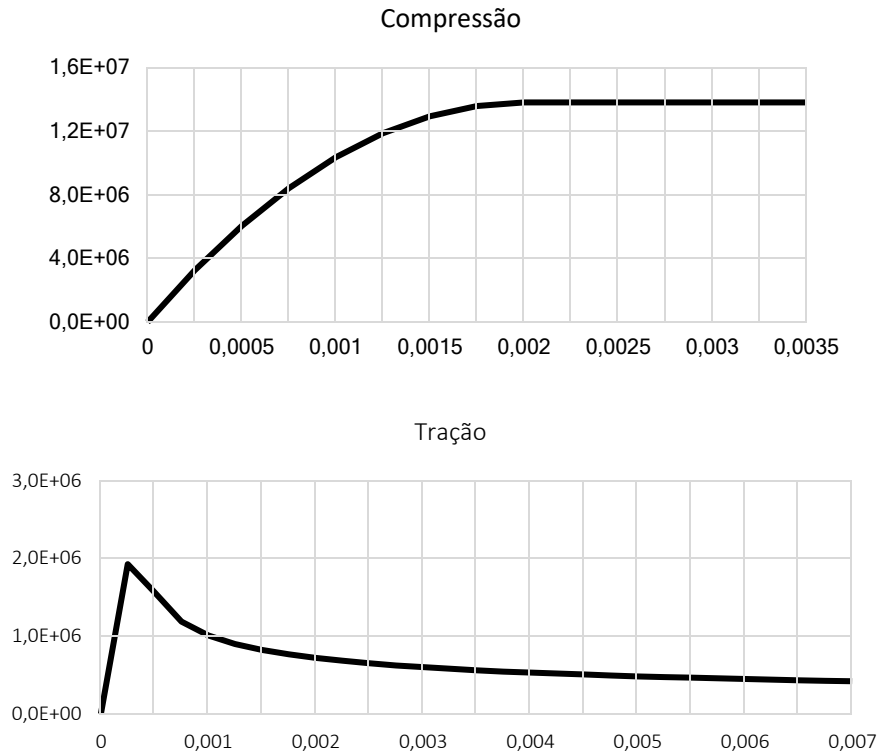
**Tabela 7 – Parâmetros para o modelo CDP**

Ângulo de dilatação	Excentricidade	$\frac{f_{b0}}{f_{c0}}$	<i>k</i>	Parâmetro de viscosidade
30	0,1	1,16	0,667	0,0001

Fonte: Aatoria Própria (2022)

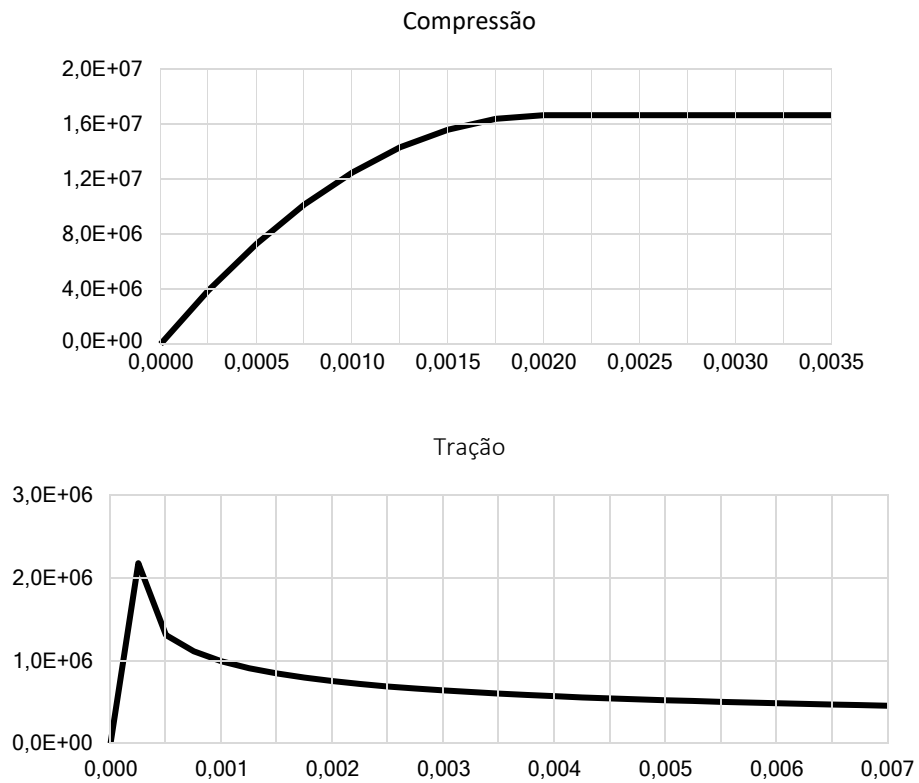
Os gráficos 1 e 2 a seguir apresentam as relações constitutivas para o concreto adotado para os modelos.

**Gráfico 1 – Relações constitutivas adotadas para o protótipo 1**



Fonte: Autoria Própria (2022)

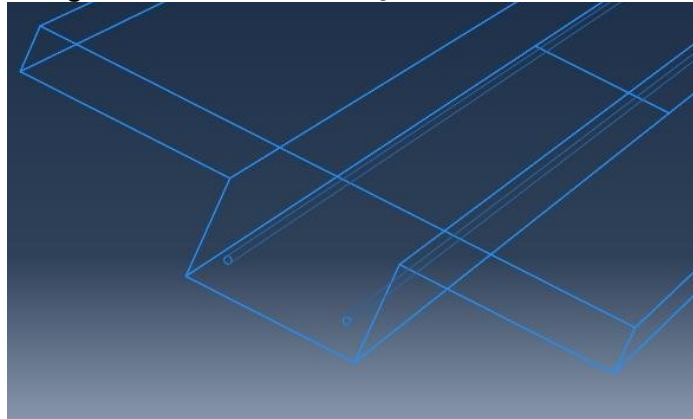
**Gráfico 2 – Relações constitutivas adotadas para o protótipo 2**



Fonte: Autoria Própria (2022)

O programa também relaciona o comportamento dos materiais considerando a armadura imersa ao concreto, por meio da aba *interaction*, com as propriedades dos materiais bem definidas, o programa analisa o comportamento do modelo considerando o concreto e o aço se comportando de maneira solidária.

**Figura 34 – Armadura de aço imersa em concreto**

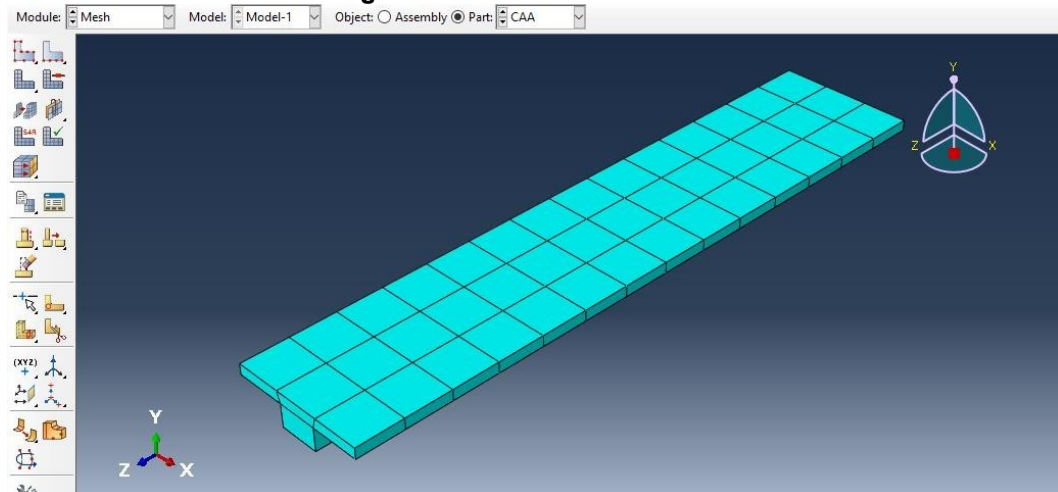


Fonte: *Abaqus*<sup>7</sup> (2021)

Com as propriedades atribuídas, criam-se os carregamentos e as condições de contorno, isto é, as condições de apoio (*boundary condition*). Definindo-se um certo grau de refinamento para o modelo, o programa gera automaticamente uma malha de elementos finitos conforme mostrado na figura 33.

Os elementos utilizados para a malha foram do tipo C3D8 (elementos sólidos com 8 nós e 3 graus de liberdade) para o concreto e T3D2 (elemento de treliça com 2 nós em 3 dimensões) para o aço. Tratando-se de uma versão educacional, o programa limita o modelo a uma malha de 1000 nós.

**Figura 35 – Malha de elementos**

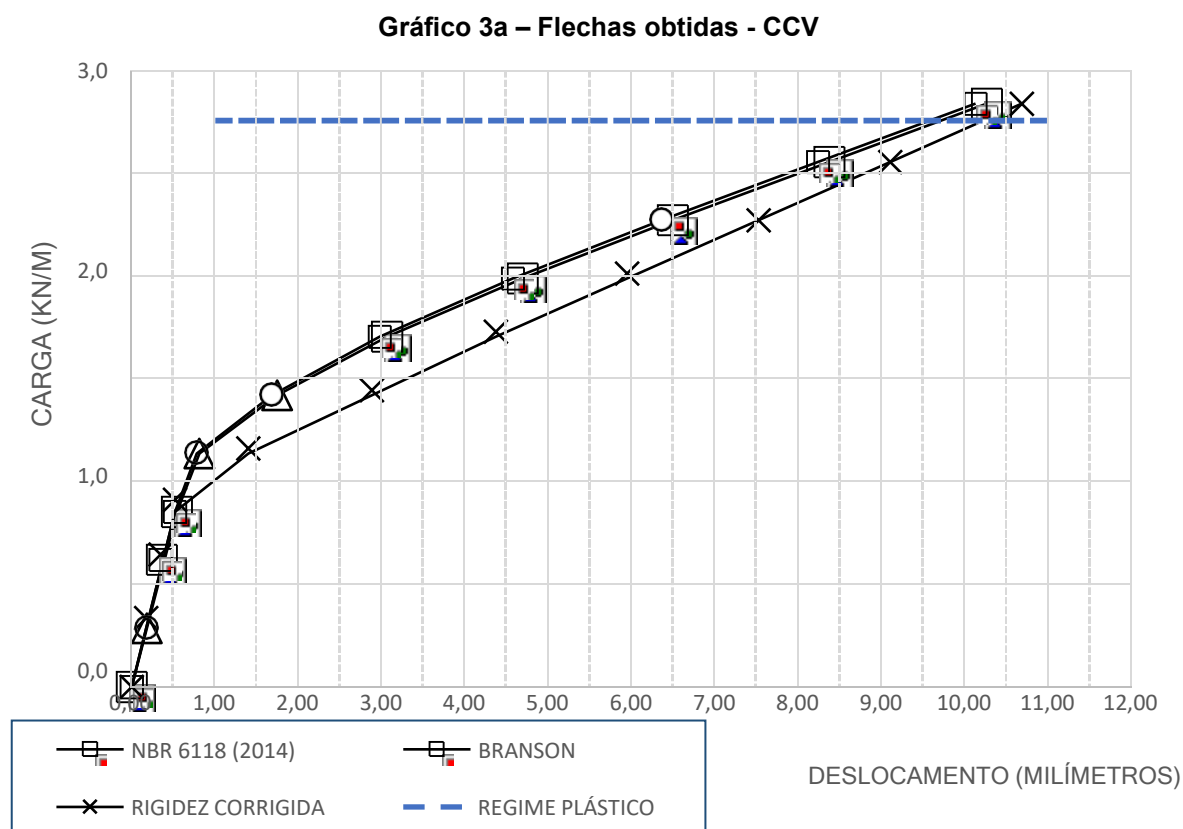


Fonte: *Abaqus*<sup>7</sup> (2021)

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os valores para as flechas e a linha elástica obtidos para os protótipos por meio dos modelos analisados estão apresentados nos Gráficos 3 e 4. À primeira vista, a flecha calculada conforme prescrito pela norma NBR 6118 (ABNT, 2014) superou ligeiramente o resultado obtido por meio da formulação de Branson considerando a seção homogeneizada, levando a resultados um pouco mais conservadores.

A simplificação realizada pela norma para o momento de inércia da seção bruta de concreto pode explicar tal resultado, visto que o momento de inércia da seção homogeneizada implica em uma rigidez maior para a seção. O modelo incremental utilizando a rigidez corrigida apresentou deslocamentos maiores para todos os casos.



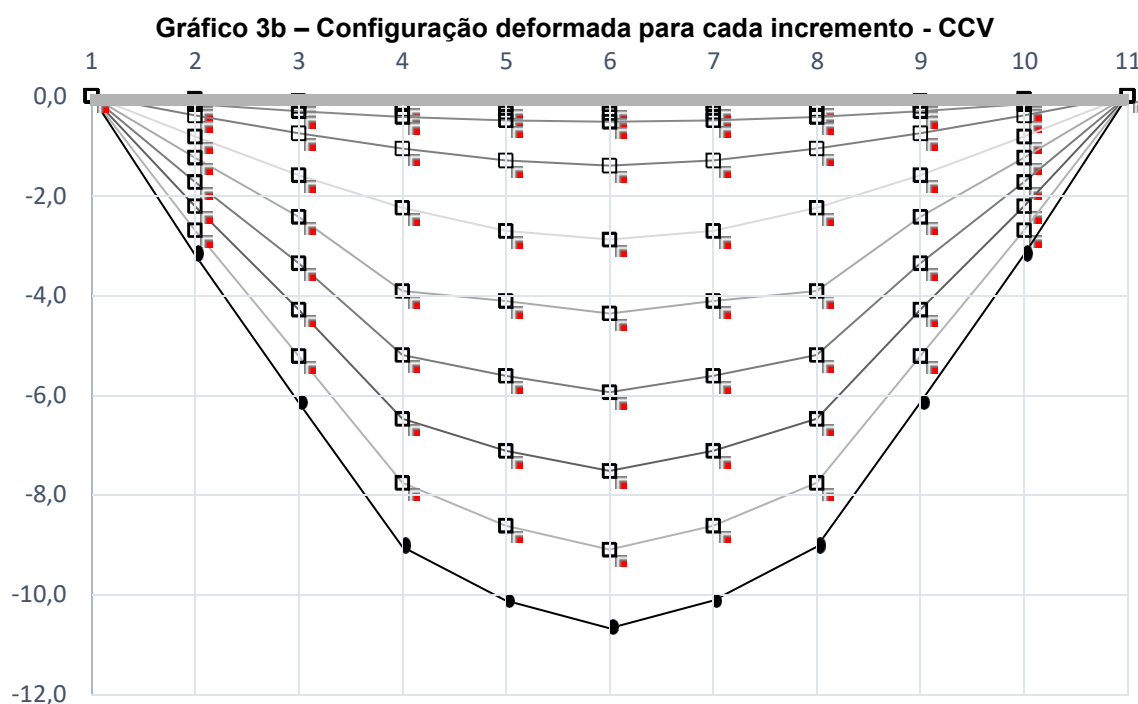
**Fonte: Autoria Própria (2022)**

É importante salientar que o gráfico carga por deslocamento é válido até o patamar de plastificação do concreto. Para o regime plástico, o concreto encontra-se no estágio III de deformação, cabendo outras análises e considerações.

O valor para o momento de plastificação da seção foi calculado com base no diagrama apresentado pela NBR 6118 (ABNT, 2014), considerando que após a

deformação de 2 ‰ do concreto, valor conhecido como  $\varepsilon_{c2}$ , o concreto sofre um encurtamento plástico até a ruptura.

A configuração deformada para a laje unidirecional em concreto armado convencional (CCV) é representada no gráfico 1b. Para cada incremento de carga, a seção sofre nova parcela de deslocamento.



Fonte: Autoria Própria (2022)

Para o protótipo em concreto autoadensável o comportamento do gráfico é semelhante ao observado anteriormente para o concreto convencional (CCV), destoando-se ligeiramente nos valores obtidos para a flecha, devido às propriedades obtidas para a situação do protótipo, como maior resistência característica ( $f_{ck}$ ), módulo de elasticidade e espessura da mesa de compressão da seção, resultando em uma rigidez mais elevada.

Também é obtida a configuração deformada para o protótipo em concreto autoadensável (CAA), apresentada no gráfico 4b. Para os primeiros incrementos de carga, a configuração é praticamente indeformada, após a fissuração da seção o elemento perde rigidez, resultando em maiores deslocamentos.

Gráfico 4a – Flechas obtidas - CAA

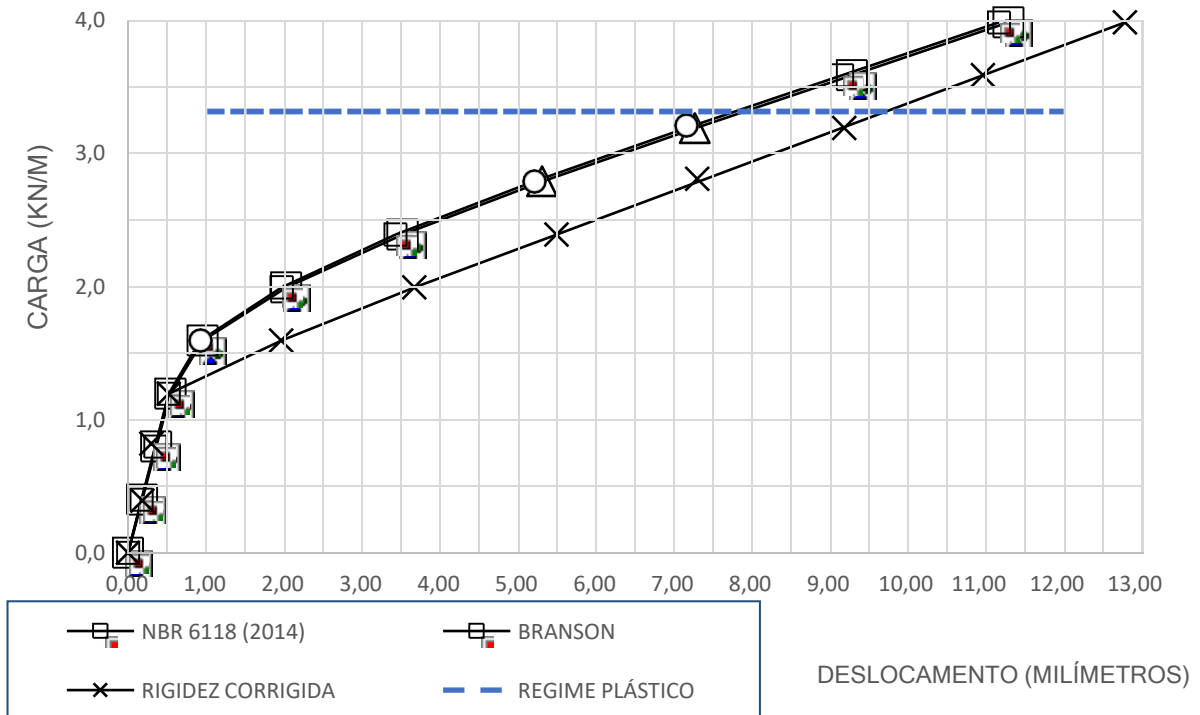
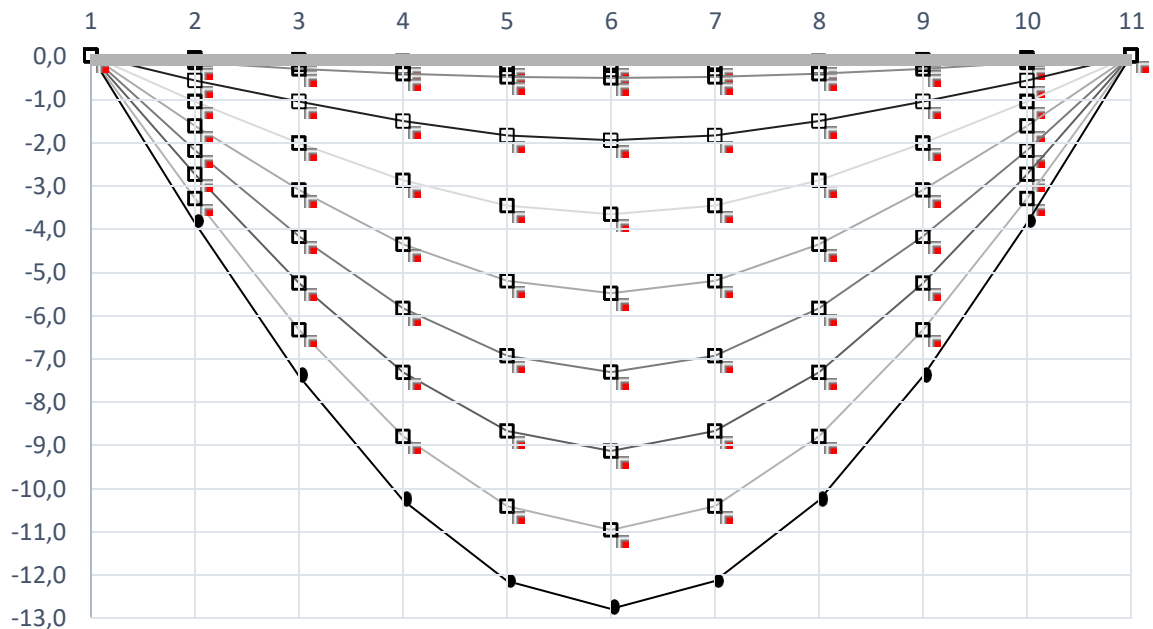


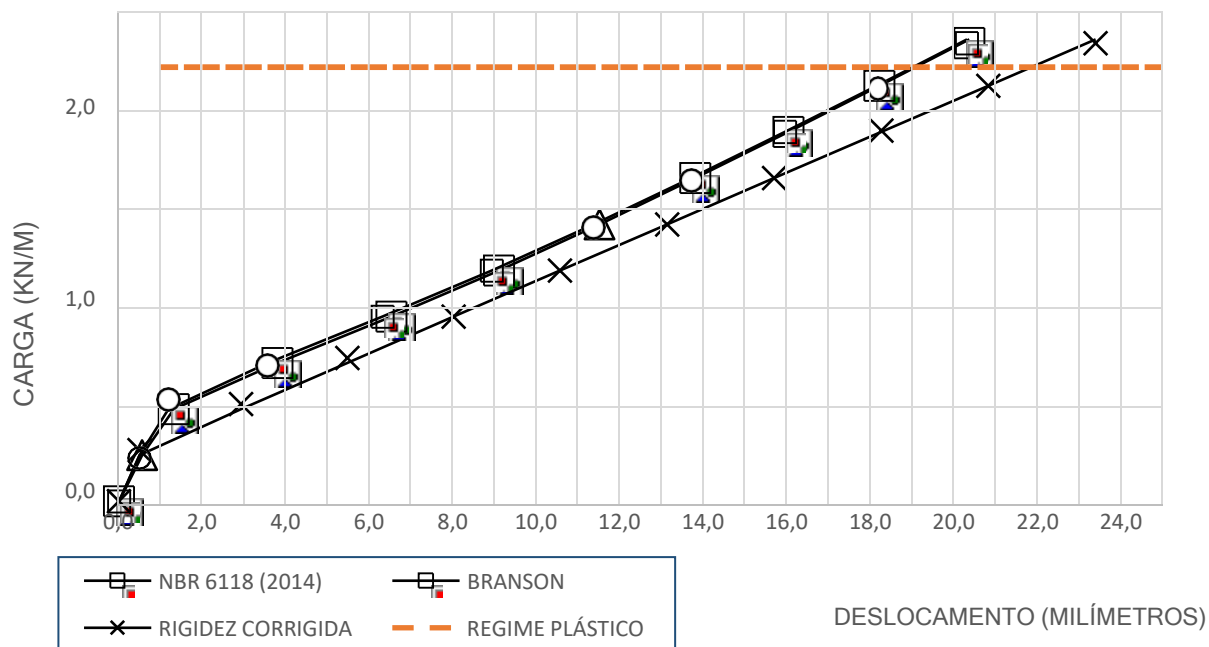
Gráfico 4b – Configuração deformada para cada incremento - CAA



A seção do Exemplo 1 também é bem similar às dos protótipos estudados, por se tratar de uma seção comercial, gráficos como os apresentados de carga por deslocamento (flecha) podem auxiliar os projetistas nas verificações das seções.

Cabe ressaltar que esta é uma análise para a flecha imediata, podendo a flecha diferida assumir valores significativamente maiores.

**Gráfico 5 – Laje pré-moldada – Exemplo 1**



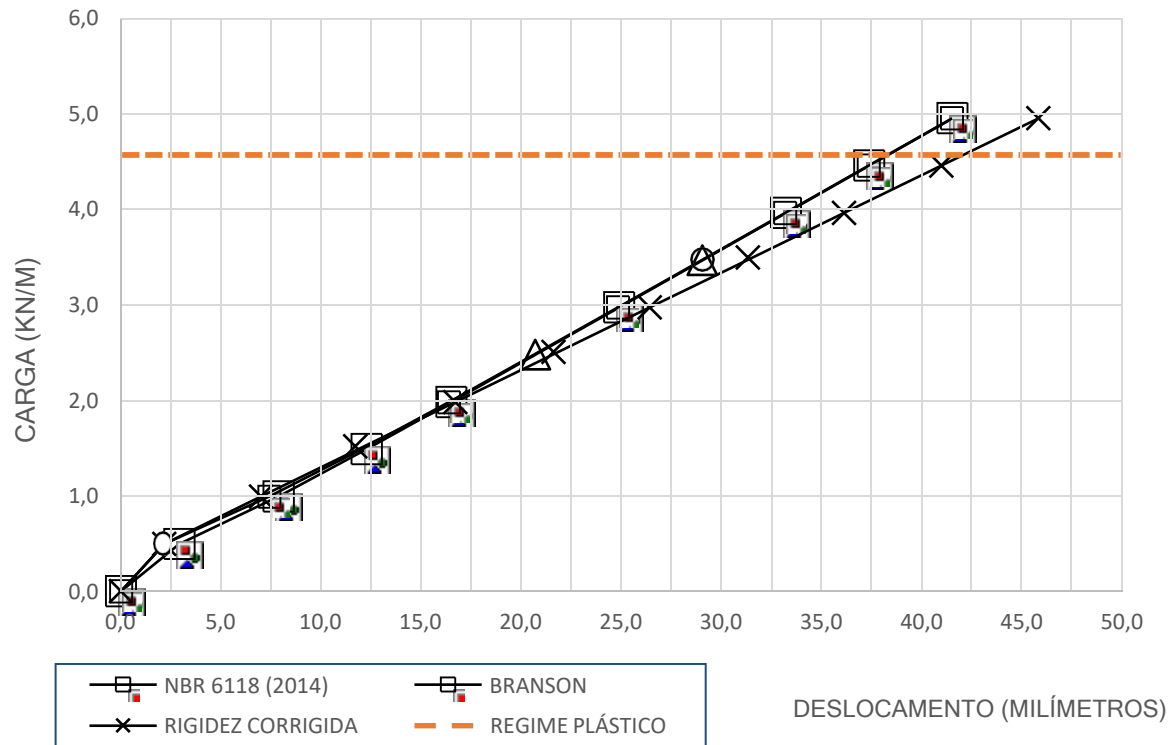
Fonte: Autoria Própria (2022)

O gráfico 6 representa o comportamento da seção Exemplo 2, também se trata de uma laje nervurada pré-moldada, porém com uma taxa de armadura mais significativa em relação aos demais exemplos, observa-se, no início do gráfico, valores de deslocamento menores para os modelos que consideram a seção homogeneizada, ou seja, que consideram a presença da armadura.

A formulação da norma NBR 6118 (ABNT, 2014) que considera a seção bruta de concreto mostra-se mais conservadora nesse sentido. Conforme os incrementos de carga crescem a seção tende a se aproximar dos valores de momento de inércia para o estágio II do concreto, ou totalmente fissurado.

Uma vez que a discretização da viga é arbitrária, é discutível se o modelo incremental se aproxima da formulação de Branson e da norma. É necessário maiores análises, com uma malha mais refinada, para analisar a aproximação da curva carga por deslocamentos do modelo incremental.

Gráfico 6 – Laje pré-moldada – Exemplo 2

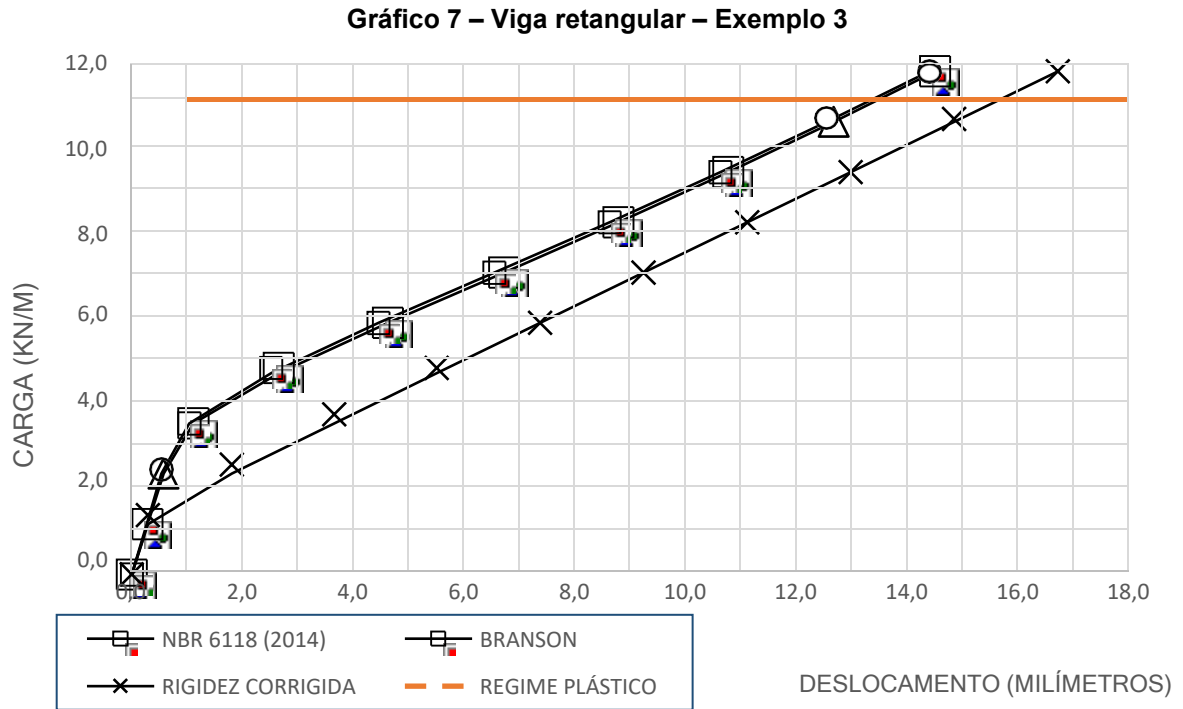


Fonte: Autoria Própria (2022)

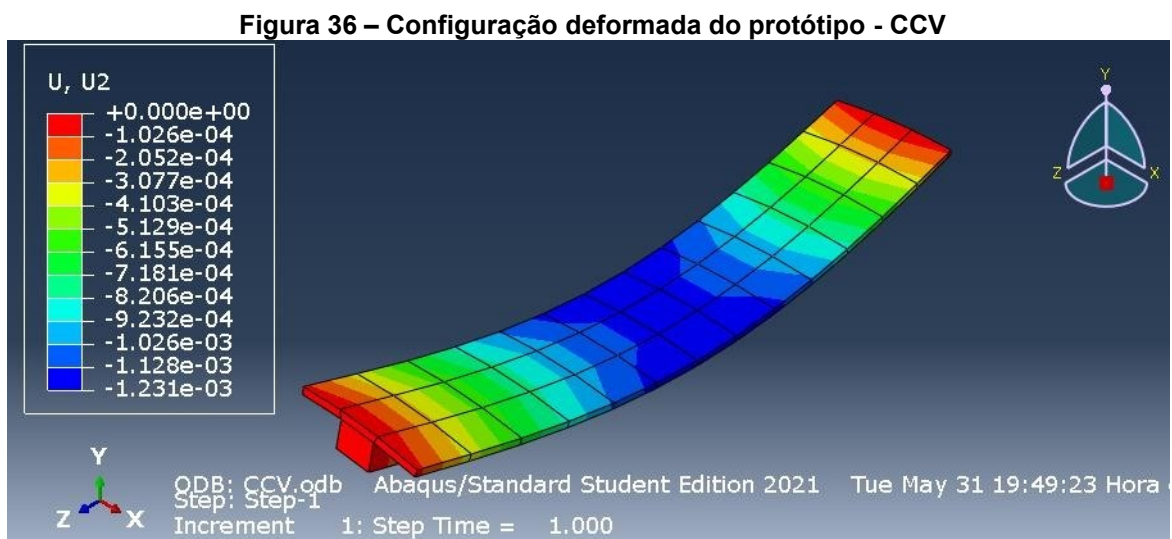
A viga retangular (Exemplo 3) apresentou comportamento semelhante em relação às lajes nervuradas. É possível analisar a tangente das retas, considerando a fórmula apresentada para a flecha imediata por meio da equação 2.7.2, nota-se que as variáveis que compõe a rigidez à flexão (módulo de elasticidade e o momento de inércia da seção) são as variáveis que influenciam a inclinação do gráfico.

Dessa maneira, após fissurar, a reta que descreve o deslocamento da seção tende a aproximar-se da horizontal quanto menor a rigidez, sendo esse patamar horizontal atingido no regime plástico, em que a seção guarda deformações residuais. Apesar de os valores numéricos alcançarem e avançarem o patamar do regime plástico, fisicamente não é coerente considerar tais valores para análise.





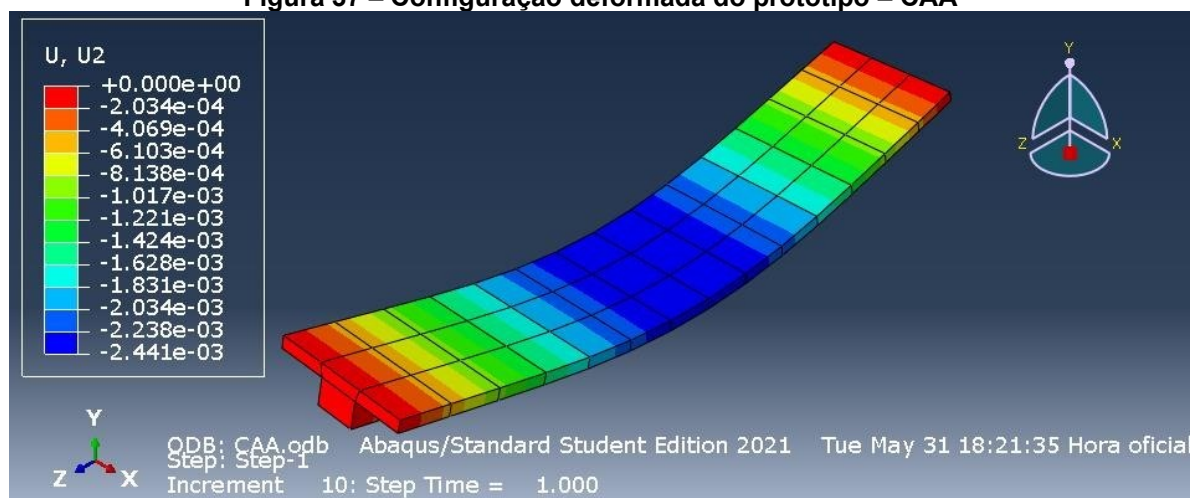
Com relação ao modelo em elementos finitos, o programa *Abaqus* apresentou diversas potencialidades para análises no âmbito de deformações. Entretanto, o escopo do trabalho consistia apenas na análise da configuração deformada para o elemento de concreto armado fletido. A figura 36 apresenta a configuração deformada para o protótipo CCV, com a escala para os deslocamentos em metros.



Para o protótipo 1, em concreto convencional, a flecha obtida por meio do modelo em elementos finitos foi de 1,23 milímetros, resultado reduzido em relação aos outros modelos teóricos, sendo uma evidência da implicação do modelo de *concrete damage plasticity*, que considera o efeito *tension stiffening*, ou seja, a colaboração do concreto entre fissuras.

A configuração deformada para o protótipo CAA é apresentada na figura 37, com a escala também em metros. O resultado é conforme o esperado para um elemento fletido. A flecha obtida para o protótipo foi de 2,44 milímetros. Por se tratar de um método numérico, o refino da malha de elementos para uma melhor análise é substancial.

Figura 37 – Configuração deformada do protótipo – CAA



Fonte: *Abaqus*<sup>7</sup> (2021)

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A análise de modelos de cálculo de deslocamentos em vigas e lajes de concreto armado é de fundamental importância na compreensão e desenvolvimento do estudo de estruturas na engenharia. Considerando a necessidade de definir modelos que melhor atendam às necessidades dos projetistas, é de notória importância o emprego de modelos simplificados, porque nem sempre é viável a utilização de um modelo numérico.

O método proposto pela NBR 6118 (2014) que considera a rigidez equivalente da seção, também adotado pelo American Concrete Institute (ACI), é um método consagrado por pesquisadores, entretanto, desconsidera a capacidade do concreto de suportar esforços internos de tração para o estágio II.

O modelo incremental utilizando a rigidez corrigida mostrou-se bastante trabalhoso, pois apesar da utilização de planilhas automáticas de cálculo, a importação de valores do *Ftool* mostra-se uma tarefa dispendiosa.

A implementação do modelo ao programa seria uma solução interessante, agregando mais uma função para um programa amplamente utilizado em análises de estruturas. A ideia de refinar a malha de elementos para o modelo incremental para obter soluções mais aproximadas mostra-se também muito interessante.

O modelo em elementos finitos ficou prejudicado devido às limitações impostas pela versão educacional do programa (limitações relacionadas às malhas dos elementos), apesar de se mostrar uma valiosa ferramenta computacional, e contribuir didaticamente com a pesquisa.

O estudo comparativo entre os resultados dos modelos teóricos e resultados obtidos experimentalmente ficou impossibilitado por conta dos protótipos ensaiados em laboratório por Silva (2021) trabalharem no estágio I de deformação (não fissurado).

Dessa maneira, a fim de contribuir com futuros trabalhos científicos para a mesma linha de pesquisa, sugere-se:

- Incrementar a análise de flechas para além dos modelos apresentados neste trabalho;
- Empregar modelos que avaliem também a deformação ao longo do tempo;

- Ensaiar vigas e lajes biapoiadas em concreto armado com intuito de realizar um estudo comparativo mais abrangente entre resultados experimentais e modelos teóricos;
- Realizar simulações por meio de programas de elementos finitos a fim de avaliar a deformação em elementos de concreto armado.

## REFERÊNCIAS

- ALI, Ahmer; KIM, Dookie; CHO, Sung Gook. **Modeling of nonlinear cyclic load behavior of I-shaped composite steel concrete shear walls of nuclear power plants**. Nuclear Engineering and Technology, v. 45, n. 1, p. 89–98, fev. 2013.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318-05**: Building code requirements for structural concrete and Commentary. Farmington Hills, 2005. 432 p.
- ARCELOR MITTAL. **Processos e soluções/Construção Civil**. 2019. Disponível em: < <https://brasil.arcelormittal.com/produtos-solucoes/construcao-civil>>. Acesso em: 21 nov. 2021.
- ABNT. **NBR 5738**: Concreto – Procedimento para moldagem e cura e corpos de prova. Rio de Janeiro, 2015. 13 p.
- \_\_\_\_\_. **NBR 5739**: Concreto – Ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2018. 13 p.
- \_\_\_\_\_. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014. 238 p.
- \_\_\_\_\_. **NBR 7480**: Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado - Especificação. Rio de Janeiro, 2007. 13 p.
- \_\_\_\_\_. **NBR 8522**: Concreto – Determinação dos módulos de elasticidade e deformação – Parte 1: Módulos estáticos à compressão. Rio de Janeiro, 2021. 24 p.
- \_\_\_\_\_. **NBR 12655**: Concreto de cimento Portland – Preparo, controle e recebimento – Procedimento. Rio de Janeiro, 2015. 23p.
- \_\_\_\_\_. **NBR 14859**. Lajes pré-fabricadas de concreto. 1- 3 Rio de Janeiro, 2016.
- \_\_\_\_\_. **NBR ISO 6892-1**. Materiais metálicos – Ensaio de Tração Parte 1: Método de ensaio à temperatura ambiente. Rio de Janeiro, 2018.
- ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado**. 3 ed. Rio Grande: Dunas, 2010. 334 p.
- AZEVEDO, Álvaro Ferreira Marques. Método dos elementos finitos. **Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto**, V. 1, n. 7, p. 1-248, abr. 2003.
- BARBOSA, Marcelo Diego de Almeida. **Análise de Flechas em Vigas de Concreto Armado**. 2010. 89 f. Monografia – Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. 2010.
- BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Apostila de Flexão Simples – Vigas**. s/d. 79 f. Departamento de Engenharia Civil. Universidade Estadual Paulista, 2019.
- BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Apostila de Fundamentos do Concreto Armado**. s/d. 98 f. Departamento de Engenharia Civil. Universidade Estadual Paulista, 2006.

BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Apostila de Lajes de Concreto Armado**. s/d 113 f. Departamento de Engenharia Civil. Universidade Estadual Paulista, 2021.

BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite element procedures**. 2 ed. Watertown: Klaus-Jurgen Bathe, 2014. 1037 p.

BEER, Ferdinand Pierre *et al.* **Mechanics of Materials**. 7 ed. McGraw-Hill Education, 2014. 896 p.

BIRTEL, Veit; MARK, Peter. **Parameterised Finite Element Modelling of RC Beam Shear Failure**. ABAQUS Users' Conference, p. 14, 2006.

BRANSON, Dan E. **Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams**. IN: HPR Publication, Alabama Highway Department, U.S. Bureau of Publis Roads, n. 7, part 1, p. 1-78 jun. 1965.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jasson Rodrigues de. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**: segundo a NBR 6118:2014. 4 ed. São Carlos: EdUfscar, 2020. 415 p.

CONDIT, Carl W. The First Reinforced-Concrete Skyscraper: The Ingalls Building in Cincinnati and Its Place in Structural History. **Technology and Culture**, V. 9, n. 1, p. 1-33, jan. 1968.

CRUZ, Gustavo Guimarães; DE SOUZA, Calebe Paiva Gomes. Análise Comparativa das Teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko via Método Das Diferenças Finitas com Implementação Computacional em Scilab. **Revista Tecnologia**, V. 39, n. 1, p. 1-12, jun. 2018.

DASSAULT SYSTEMES. **ABAQUS/CAE student version**. 2022. Disponível em: <<https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/abaquscae/>>. Acesso em: 6 mar. 2022.

DONG, Yao Rong *et al.* **Seismic Behavior and Cross-Scale Refinement Model of Damage Evolution for RC Shear Walls**. *Engineering Structures*, v. 167, p. 13–25, jul. 2018.

ESCALES MARITIMES. **L'incroyable filiation d'un petit bateau un peu fou**. 2008. Disponível em: <<https://escales.wordpress.com/2008/11/18/l%e2%80%99incroyable-filiation-d%e2%80%99un-petit-bateau-un-peu-fou/>>. Acesso em: 16 fev. 2022.

FERNANDES, Solange Aparecida. **Análise das deformações do concreto e do comportamento de vigas submetidas à flexão simples**. 1996. 159 p. Tese (Doutorado). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

FLÓRIO, Márcio Cardozo. **Projeto e Execução de Lajes Pré-Fabricadas Unidirecionais com Vigotas em Concreto Armado**. 2004. 240 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Construção Civil. Universidade Federal de São Carlos. São Carlos. 2004.

FUSCO, Péricles Brasiliense. **Tecnologia do Concreto Estrutural**. 2 ed. São Paulo: Pini, 2012. 200 p.

GERDAU. **Produtos e mercados / Construção Civil**. 2019. Disponível em: <

<https://www2.gerdau.com.br/produtos/construcao-civil>>. Acesso em: 21 nov. 2021.

GHALI, Amin; FAVRE, Renaud; ELBADRY, Mamdouh. **Concrete Structures: Stresses and Deformation**. 3 ed. London: Spon Press, 2002. 608 p.

GUARDA, Mônica Cristina Cardoso da. **Cálculo de Deslocamentos em Pavimentos de Edifícios de Concreto Armado**. 2005. 253 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Carlos. São Carlos. 2005.

HIBBELER, Russell Charles. **Análise das Estruturas**. 8 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013. 522 p.

JUNGES, Elisabeth. **Estudo Comparativo entre Métodos Simplificados e Modelos de Elementos Finitos Não Lineares para Cálculo de Flecha Imediata em Vigas de Concreto Armado**. 2011. 361 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

LAGE, Gabriel Emídio; PELLEGRINO NETO, Januário. **Modelagem e Análise De Estruturas Reticuladas**. São Paulo, 2018. Disponível em: <<https://maua.br/files/122018/modelagem-analise-estruturas-reticuladas-281644.pdf>>. Acesso em 29 de novembro de 2021.

LEONHARDT, Fritz; MÖNNIG, Eduard. **Construções de Concreto: Princípios Básicos do Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado**. Tradução de David Fridman. Rio de Janeiro: Interciência, 2008. 336 p., v. 1.

LI, Chao; HAO, Hong; BI, Kaiming. **Numerical Study on the Seismic Performance of Precast Segmental Concrete Columns under Cyclic Loading**. Engineering Structures, v. 148, p. 373–386, oct. 2017.

LIBÂNIO, Miranda Pinheiro. **Apostila de Fundamentos do Concreto e Projeto de Edifícios**. s/d 248 f. Departamento de Engenharia de Estruturas. Universidade de São Paulo, 2007.

MARTINS, Carlos Humberto. **Consideração da Não-Linearidade Física para as Vigas de Concreto Armado, pelo Procedimento Refinado da NB1**. In: Acta Sci. Technol. Vol. 30, p. 15-18. 2008.

MARTHA, Luiz Fernando. **Método da Rigidez Direta para Modelos Estruturais Lineares e Elásticos**. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 1999.

MOURA, Marcio Wrague; MARCELINO, Narbal Ataliba. **Avaliação da Deformação em Lajes Bidirecionais de Concreto Armado**. In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, 2003.

NEVILLE, Adam; BROOKS, Jenffrey. **Tecnologia do Concreto**. 2ª. ed. London, Leeds: bookman, 2013. 468 p.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO. **FTOOL, version 4.00**. 2018. Disponível em: < [www.tecgraf.puc-rio.br/ftool/](http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool/)>. Acesso em: 26 nov. 2021.

PRÉ-MOLD RM. **Catálogo Paineis treliçados nervurados com EPS**, 2021. Mauá: PR-MOLD RM, 2021. 10 p. Disponível em: < <https://www.aecweb.com.br/empresa/pre-mold-rm/3934/downloads/1>>. Acesso em 6 dez. 2021.

SILVA, Aline Alessandra Eduarda Farias da. **Contribuições ao Estudo da Não-Linearidade Física em Vigas de Concreto Armado**. 2012. 175 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Santa Maria, Santa Maria, 2012.

SILVA, Daise Fernanda Rubio da. **Análise teórica e experimental do fenômeno de fluência em lajes unidirecionais fabricadas com concreto convencional e autoadensável**. 2021. 107 f. Monografia (Graduação em Engenharia Civil). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, 2021.

SILVA, Marcos Alberto Ferreira da. **Projeto e Construção de lajes nervuradas de concreto armado**. 2005. 239 f. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos. UFSCAR. São Carlos. 2005.

SORIANO, Humberto Lima. **Análise de estruturas – Formulação Matricial e Implementação Computacional**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005. 360 p.

TIBBETTS, Caitlin. M; PERRY, Michael C.; FERRARO, Christopher C.; HAMILTON, H. R. **Aggregate correction factors for concrete elastic modulus prediction**. ACI Structural Journal, p. 931-940, 2018.

VASCONCELOS, Augusto Carlos de. **O concreto no Brasil – Recordes, Realizações, História**. 2 ed. São Paulo: Pini, 1992. 277 p., v. 1.

VERÍSSIMO, Gustavo de Souza, CÉSAR Jr, Kléos M. Lenz. **Concreto Protendido: fundamentos básicos**. 4 ed. Viçosa, 1998. 73 p.



## **APÊNDICE A - Protótipo 1**

Tabela A.1 – Dados de entrada e propriedades obtidas (CCV)

CCV					
DADOS DE ENTRADA			PROPRIEDADES OBTIDAS		
bf [cm]	42,00	Área bruta (Ag) [cm <sup>2</sup> ]	187,992	Área homog. (Ah) [cm <sup>2</sup> ]	191,221
bw [cm]	12	ycg [cm]	3,355	yh [cm]	3,429
hf [cm]	2,476	lg [cm <sup>4</sup> ]	1439,237	lh [cm <sup>4</sup> ]	1499,881
h [cm]	9,476	alpha e	9,222	d' [m]	0,000
cobrimento [cm]	1,5	d [m]	7,726	As' [m <sup>2</sup> ]	0,000
Es [MPa]	210000	As [cm <sup>2</sup> ]	0,393	x2 [cm]	1,391
Ecs [MPa]	22771,84	fct,m [Pa]	0,1924672 46	I2 [cm <sup>4</sup> ]	183,004
Bitola armadura [cm]	0,5	fctK,inf [Pa]	0,135	Mr [kN.cm]	54,307
alpha	1,2			Ma [kN.cm]	14,200
fck [MPa]	16,25			Eleq [N.cm <sup>2</sup> ]	160432341 043
Peso especifico conc. [kg/m <sup>3</sup> ]	2500	Carga aplicada [kN/m]	2,84	alpha c	0,013
Vão [m]			2		

Fonte: Autoria Própria (2022)

Tabela A.2 – Flecha teórica – NBR 6118 (2014)

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	(Mr/Ma) <sup>3</sup>	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0,000	1439,24	0,00
10%	0,284	0,142	55,94	1439,24	0,18
20%	0,568	0,284	6,99	1439,24	0,36
30%	0,852	0,426	2,07	1439,24	0,54
40%	1,136	0,568	0,87	1280,96	0,81
50%	1,420	0,710	0,45	745,16	1,74
60%	1,704	0,852	0,26	508,32	3,07
70%	1,988	0,994	0,16	387,87	4,69
80%	2,272	1,136	0,11	320,25	6,49
90%	2,556	1,278	0,08	279,40	8,37
100%	2,840	1,420	0,06	253,27	10,26

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela A.3 – Flecha teórica – Branson (seção homogeneizada)**

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	(Mr/Ma) <sup>3</sup>	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0,000	1499,88	0,00
10%	0,284	0,142	55,94	1499,88	0,17
20%	0,568	0,284	6,99	1499,88	0,35
30%	0,852	0,426	2,07	1499,88	0,52
40%	1,136	0,568	0,87	1333,96	0,78
50%	1,420	0,710	0,45	772,29	1,68
60%	1,704	0,852	0,26	524,03	2,97
70%	1,988	0,994	0,16	397,76	4,57
80%	2,272	1,136	0,11	326,87	6,36
90%	2,556	1,278	0,08	284,05	8,23
100%	2,840	1,420	0,06	256,67	10,12

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela A.4 – Rigidez corrigida**

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0	0,00
10%	0,284	0,142	1500,14	0,17
20%	0,568	0,284	1500,14	0,35
30%	0,852	0,426	1500,14	0,52
40%	1,136	0,568	743,52	1,40
50%	1,420	0,710	450,77	2,88
60%	1,704	0,852	357,05	4,37
70%	1,988	0,994	305,96	5,94
80%	2,272	1,136	276,31	7,52
90%	2,556	1,278	256,95	9,10
100%	2,840	1,420	243,30	10,68

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela A.5 – INCREMENTO DE CARGA = 10%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	51,10	-0,054
3	90,90	-0,103
4	119,30	-0,141
5	136,30	-0,165
6	142,00	-0,173
7	136,30	-0,165
8	119,30	-0,141
9	90,90	-0,103
10	51,10	-0,054
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela A.6 – INCREMENTO DE CARGA = 20%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	102,20	-0,109
3	181,80	-0,206
4	238,60	-0,282
5	272,60	-0,330
6	284,00	-0,346
7	272,60	-0,330
8	238,60	-0,282
9	181,80	-0,206
10	102,20	-0,109
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela A.7 – INCREMENTO DE CARGA = 30%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	153,30	-0,163
3	272,70	-0,309
4	357,90	-0,423
5	408,90	-0,495
6	426,00	-0,520
7	408,90	-0,495
8	357,90	-0,423
9	272,70	-0,309
10	153,30	-0,163
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela A.8 – INCREMENTO DE CARGA = 40%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	204,40	-0,390
3	363,60	-0,751
4	477,20	-1,059
5	545,20	-1,297
6	568,00	-1,398
7	545,20	-1,297
8	477,20	-1,059
9	363,60	-0,751
10	204,40	-0,390
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela A.9 – INCREMENTO DE CARGA = 50%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	255,50	-0,815
3	454,50	-1,588
4	596,50	-2,246
5	681,50	-2,706
6	710,00	-2,882
7	681,50	-2,706
8	596,50	-2,246
9	454,50	-1,588
10	255,50	-0,815
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela A.10 – INCREMENTO DE CARGA = 60%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	306,60	-1,239
3	545,40	-2,426
4	715,80	-3,917
5	817,80	-4,115
6	852,00	-4,366
7	817,80	-4,115
8	715,80	-3,917
9	545,40	-2,426
10	306,60	-1,239
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela A.11 – INCREMENTO DE CARGA = 70%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	357,70	-1,725
3	636,30	-3,357
4	835,10	-5,198
5	954,10	-5,617
6	994,00	-5,944
7	954,10	-5,617
8	835,10	-5,198
9	636,30	-3,357
10	357,70	-1,725
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela A.12 – INCREMENTO DE CARGA = 80%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	408,80	-2,210
3	727,20	-4,289
4	954,40	-6,479
5	1090,40	-7,119
6	1136,00	-7,523
7	1090,40	-7,119
8	954,40	-6,479
9	727,20	-4,289
10	408,80	-2,210
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela A.13 – INCREMENTO DE CARGA = 90%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	459,90	-2,695
3	818,10	-5,220
4	1073,70	-7,760
5	1226,70	-8,621
6	1278,00	-9,101
7	1226,70	-8,621
8	1073,70	-7,760
9	818,10	-5,220
10	459,90	-2,695
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela A.14 – INCREMENTO DE CARGA = 100%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	511,00	-3,181
3	909,00	-6,151
4	1193,00	-9,041
5	1363,00	-10,123
6	1420,00	-10,679
7	1363,00	-10,123
8	1193,00	-9,041
9	909,00	-6,151
10	511,00	-3,181
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

## **APÊNDICE B - Protótipo 2**

Tabela B.1 – Dados de entrada e propriedades obtidas (CAA)

CCA					
DADOS DE ENTRADA		PROPRIEDADES OBTIDAS			
bf [cm]	42,00	Área bruta (Ag) [cm <sup>2</sup> ]	219,996	Área homog. (Ah) [cm <sup>2</sup> ]	222,87
bw [cm]	12	ycg [cm]	3,574	yh [cm]	3,637
hf [cm]	3,238	lg [cm <sup>4</sup> ]	1822,5178 04303	lh [cm <sup>4</sup> ]	1891,10
h [cm]	10,238	alpha e	8,326	d' [m]	0,000
cobrimento [cm]	1,5	d [m]	8,488	As' [m <sup>2</sup> ]	0,00
Es [MPa]	210000	As [cm <sup>2</sup> ]	0,3926991	x2 [cm]	1,6646
Ecs [MPa]	25222,40	fct,m [Pa]	0,218	I2 [cm <sup>4</sup> ]	216,80
Bitola armadura [cm]	0,5	fctK,inf [Pa]	0,152	Mr [kN.cm]	71,446
alpha	1,2			Ma [kN.cm]	0,000
fck [MPa]	19,55			Eleq [N.cm <sup>2</sup> ]	187686761 144
Peso especifico conc. [kg/m <sup>3</sup> ]	2500	Carga aplicada [kN/m]	3,982	alpha c	0,013
Vão [m]			2		

Fonte: Autoria Própria (2022)

Tabela B.2 – Flecha teórica – NBR 6118 (2014)

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	(Mr/Ma) <sup>3</sup>	Ieq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0,000	1822,52	0,00
10%	0,398	0,199	46,21	1822,52	0,18
20%	0,796	0,398	5,78	1822,52	0,36
30%	1,195	0,597	1,71	1822,52	0,54
40%	1,593	0,796	0,72	1376,12	0,96
50%	1,991	0,996	0,37	810,37	2,03
60%	2,389	1,195	0,21	560,30	3,52
70%	2,787	1,394	0,13	433,12	5,32
80%	3,186	1,593	0,09	361,72	7,27
90%	3,584	1,792	0,06	318,58	9,29
100%	3,982	1,991	0,05	291,00	11,30

Fonte: Autoria Própria (2022)



**Tabela B.3 – Flecha teórica – Branson (seção homogeneizada)**

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	(Mr/Ma) <sup>3</sup>	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0,000	1891,10	0,00
10%	0,398	0,199	46,21	1891,10	0,17
20%	0,796	0,398	5,78	1891,10	0,35
30%	1,195	0,597	1,71	1891,10	0,52
40%	1,593	0,796	0,72	1425,63	0,92
50%	1,991	0,996	0,37	835,73	1,97
60%	2,389	1,195	0,21	574,98	3,43
70%	2,787	1,394	0,13	442,36	5,20
80%	3,186	1,593	0,09	367,91	7,15
90%	3,584	1,792	0,06	322,93	9,17
100%	3,982	1,991	0,05	294,17	11,18

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela B.4 – Rigidez corrigida**

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0	0,00
10%	0,398	0,199	1891,36	0,17
20%	0,796	0,398	1891,36	0,35
30%	1,195	0,597	1891,36	0,52
40%	1,593	0,796	670,01	1,96
50%	1,991	0,996	447,43	3,68
60%	2,389	1,195	358,78	5,50
70%	2,787	1,394	314,30	7,33
80%	3,186	1,593	287,56	9,15
90%	3,584	1,792	269,72	10,98
100%	3,982	1,991	256,96	12,80

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela B.5 – INCREMENTO DE CARGA = 10%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	71,70	-0,055
3	127,40	-0,105
4	167,20	-0,141
5	191,10	-0,166
6	199,10	-0,174
7	191,10	-0,166
8	167,20	-0,141
9	127,40	-0,105
10	71,70	-0,055
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela B.6 – INCREMENTO DE CARGA = 20%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	143,40	-0,109
3	254,80	-0,210
4	334,40	-0,283
5	382,20	-0,331
6	398,20	-0,348
7	382,20	-0,331
8	334,40	-0,283
9	254,80	-0,210
10	143,40	-0,109
11	0,0	0,000

Fonte: Aatoria Própria (2022)

**Tabela B.7 – INCREMENTO DE CARGA = 30%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	215,10	-0,164
3	382,20	-0,314
4	501,60	-0,424
5	573,30	-0,497
6	597,30	-0,522
7	573,30	-0,497
8	501,60	-0,424
9	382,20	-0,314
10	215,10	-0,164
11	0,0	0,000

Fonte: Aatoria Própria (2022)

**Tabela B.8 – INCREMENTO DE CARGA = 40%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	286,80	-0,581
3	509,60	-1,066
4	668,80	-1,522
5	764,40	-1,851
6	796,40	-1,964
7	764,40	-1,851
8	668,80	-1,522
9	509,60	-1,066
10	286,80	-0,581
11	0,0	0,000

Fonte: Aatoria Própria (2022)

**Tabela B.9 – INCREMENTO DE CARGA = 50%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	358,50	-1,069
3	637,00	-2,032
4	836,00	-2,890
5	955,50	-3,476
6	995,50	-3,676
7	955,50	-3,476
8	836,00	-2,890
9	637,00	-2,032
10	358,50	-1,069
11	0,0	0,000

Fonte: Aatoria Própria (2022)

**Tabela B.10 – INCREMENTO DE CARGA = 60%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	430,20	-1,630
3	764,40	-3,110
4	1003,20	-4,371
5	1146,60	-5,213
6	1194,60	-5,500
7	1146,60	-5,213
8	1003,20	-4,371
9	764,40	-3,110
10	430,20	-1,630
11	0,0	0,000

Fonte: Aatoria Própria (2022)

**Tabela B.11 – INCREMENTO DE CARGA = 70%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	501,90	-2,190
3	891,80	-4,188
4	1170,40	-5,851
5	1337,70	-6,949
6	1393,70	-7,325
7	1337,70	-6,949
8	1170,40	-5,851
9	891,80	-4,188
10	501,90	-2,190
11	0,0	0,000

Fonte: Aatoria Própria (2022)

**Tabela B.12 – INCREMENTO DE CARGA = 80%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	573,60	-2,751
3	1019,20	-5,266
4	1337,60	-7,332
5	1528,80	-8,686
6	1592,80	-9,150
7	1528,80	-8,686
8	1337,60	-7,332
9	1019,20	-5,266
10	573,60	-2,751
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela B.13 – INCREMENTO DE CARGA = 90%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	645,30	-3,312
3	1146,60	-6,344
4	1504,80	-8,812
5	1719,90	-10,422
6	1791,90	-10,975
7	1719,90	-10,422
8	1504,80	-8,812
9	1146,60	-6,344
10	645,30	-3,312
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela B.14 – INCREMENTO DE CARGA = 100%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	717,00	-3,873
3	1274,00	-7,422
4	1672,00	-10,292
5	1911,00	-12,159
6	1991,00	-12,800
7	1911,00	-12,159
8	1672,00	-10,292
9	1274,00	-7,422
10	717,00	-3,873
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

## **APÊNDICE C - Exemplo 1**

**Tabela C.1 – Dados de entrada e propriedades obtidas (Exemplo 1)**

<b>Exemplo 1</b>					
<b>DADOS DE ENTRADA</b>			<b>PROPRIEDADES OBTIDAS</b>		
bf [cm]	33,00	Área bruta (Ag) [cm <sup>2</sup> ]	139,000	Área homog. (Ah) [cm <sup>2</sup> ]	143,50
bw [cm]	5	ycg [cm]	3,083	yh [cm]	3,258
hf [cm]	3	lg [cm <sup>4</sup> ]	1149,382	lh [cm <sup>4</sup> ]	1286,241
h [cm]	11	alpha e	8,221	d' [m]	0,000
cobrimento [cm]	2	d [m]	8,685	As' [m <sup>2</sup> ]	0,00
Es [MPa]	210000	As [cm <sup>2</sup> ]	0,623	x2 [cm]	1,7887
Ecs [MPa]	25544,84	fct,m [Pa]	0,221	I2 [cm <sup>4</sup> ]	306,70
Bitola armadura [cm]	0,63	fctK,inf [Pa]	0,155	Mr [kN.cm]	39,382
alpha	1,2			Ma [kN.cm]	21,357
fck [MPa]	20	Mk [N.m]	2135,726	Eleq [N.cm <sup>2</sup> ]	142796490 88
Peso específico conc. [kg/m <sup>3</sup> ]	2500	q [N/m]	2343,73	alpha c	0,013
Vão [m]			2,7		

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela C.2 – Flecha teórica – NBR 6118 (2014)**

<b>Incremento</b>	<b>g+q (kN/m)</b>	<b>Ma [kN.m]</b>	<b>(Mr/Ma) <sup>3</sup></b>	<b>leq [cm<sup>4</sup>]</b>	<b>a [mm]</b>
0	0,000	0,000	0,000	1149,38	0,00
10%	0,234	0,214	6,27	1149,38	0,55
20%	0,469	0,427	0,78	967,12	1,31
30%	0,703	0,641	0,23	502,38	3,79
40%	0,937	0,854	0,10	389,25	6,52
50%	1,172	1,068	0,05	348,97	9,10
60%	1,406	1,281	0,03	331,16	11,50
70%	1,641	1,495	0,02	322,11	13,80
80%	1,875	1,709	0,01	317,02	16,02
90%	2,109	1,922	0,01	313,95	18,20
100%	2,344	2,136	0,01	311,99	20,35

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela C.3 – Flecha teórica – Branson (seção homogeneizada)**

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	(Mr/Ma) <sup>3</sup>	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0,000	1286,24	0,00
10%	0,234	0,214	6,27	1286,24	0,49
20%	0,469	0,427	0,78	1074,38	1,18
30%	0,703	0,641	0,23	534,16	3,57
40%	0,937	0,854	0,10	402,66	6,31
50%	1,172	1,068	0,05	355,83	8,92
60%	1,406	1,281	0,03	335,14	11,37
70%	1,641	1,495	0,02	324,61	13,69
80%	1,875	1,709	0,01	318,70	15,94
90%	2,109	1,922	0,01	315,13	18,13
100%	2,344	2,136	0,01	312,84	20,29

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela C.4 – Rigidez corrigida**

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0	0,00
10%	0,234	0,214	1285,20	0,49
20%	0,469	0,427	435,15	2,92
30%	0,703	0,641	348,67	5,46
40%	0,937	0,854	317,15	8,01
50%	1,172	1,068	300,84	10,55
60%	1,406	1,281	290,43	13,12
70%	1,641	1,495	283,43	15,68
80%	1,875	1,709	278,40	18,24
90%	2,109	1,922	274,61	20,81
100%	2,344	2,136	271,64	23,37

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela C.5 – INCREMENTO DE CARGA = 10%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	77,00	-0,155
3	137,00	-0,293
4	179,00	-0,401
5	205,00	-0,470
6	214,00	-0,494
7	205,00	-0,470
8	179,00	-0,401
9	137,00	-0,293
10	77,00	-0,155
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela C.6 – INCREMENTO DE CARGA = 20%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	154,00	-0,864
3	274,00	-1,678
4	358,00	-2,348
5	410,00	-2,774
6	428,00	-2,918
7	410,00	-2,774
8	358,00	-2,348
9	274,00	-1,678
10	154,00	-0,864
11	0,0	0,000

Fonte: Aatoria Própria (2022)

**Tabela C.7 – INCREMENTO DE CARGA = 30%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	231,00	-1,650
3	411,00	-3,182
4	537,00	-4,429
5	615,00	-5,294
6	642,00	-5,463
7	615,00	-5,294
8	537,00	-4,429
9	411,00	-3,182
10	231,00	-1,650
11	0,0	0,000

Fonte: Aatoria Própria (2022)

**Tabela C.8 – INCREMENTO DE CARGA = 40%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	308,00	-2,436
3	548,00	-4,685
4	716,00	-6,511
5	820,00	-7,814
6	856,00	-8,007
7	820,00	-7,814
8	716,00	-6,511
9	548,00	-4,685
10	308,00	-2,436
11	0,0	0,000

Fonte: Aatoria Própria (2022)



**Tabela C.9 – INCREMENTO DE CARGA = 50%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	385,00	-3,222
3	685,00	-6,188
4	895,00	-8,592
5	1025,00	-10,335
6	1070,00	-10,552
7	1025,00	-10,335
8	895,00	-8,592
9	685,00	-6,188
10	385,00	-3,222
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela C.10 – INCREMENTO DE CARGA = 60%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	462,00	-4,027
3	822,00	-7,711
4	1074,00	-10,673
5	1230,00	-12,775
6	1284,00	-13,116
7	1230,00	-12,775
8	1074,00	-10,673
9	822,00	-7,711
10	462,00	-4,027
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela C.11 – INCREMENTO DE CARGA = 70%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	539,00	-4,832
3	959,00	-9,234
4	1253,00	-12,755
5	1435,00	-15,215
6	1498,00	-15,680
7	1435,00	-15,215
8	1253,00	-12,755
9	959,00	-9,234
10	539,00	-4,832
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela C.12 – INCREMENTO DE CARGA = 80%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	616,00	-5,637
3	1096,00	-10,758
4	1432,00	-14,836
5	1640,00	-17,655
6	1712,00	-18,244
7	1640,00	-17,655
8	1432,00	-14,836
9	1096,00	-10,758
10	616,00	-5,637
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela C.13 – INCREMENTO DE CARGA = 90%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	693,00	-6,442
3	1233,00	-12,281
4	1611,00	-16,918
5	1845,00	-20,095
6	1926,00	-20,808
7	1845,00	-20,095
8	1611,00	-16,918
9	1233,00	-12,281
10	693,00	-6,442
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela C.14 – INCREMENTO DE CARGA = 100%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	770,00	-7,247
3	1370,00	-13,804
4	1790,00	-18,999
5	2050,00	-22,535
6	2140,00	-23,372
7	2050,00	-22,535
8	1790,00	-18,999
9	1370,00	-13,804
10	770,00	-7,247
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

## APÊNDICE D - Exemplo 2

Tabela D.1 – Dados de entrada e propriedades obtidas (Exemplo 2)

Exemplo 2					
DADOS DE ENTRADA		PROPRIEDADES OBTIDAS			
bf [cm]	50,00	Área bruta (Ag) [cm <sup>2</sup> ]	320,000	Área homog. (Ah) [cm <sup>2</sup> ]	352,05
bw [cm]	10	ycg [cm]	5,000	yh [cm]	5,808
hf [cm]	4	lg [cm <sup>4</sup> ]	6506,667	lh [cm <sup>4</sup> ]	8801,129
h [cm]	16	alpha e	9,865	d' [m]	0,000
cobrimento [cm]	1,5	d [m]	13,875	As' [m <sup>2</sup> ]	0,00
Es [MPa]	210000	As [cm <sup>2</sup> ]	3,615	x2 [cm]	3,4649
Ecs [MPa]	21287,00	fct,m [kN/cm <sup>2</sup> ]	0,221	I2 [cm <sup>4</sup> ]	4558,06
bitola armadura [cm]	1,25	fctK,inf [kN/cm <sup>2</sup> ]	0,155	Mr [kN.cm]	156,900
alpha	1,2				
fck [MPa]	20	Mk [N.m]	15470,074		
Peso específico conc. [kg/m <sup>3</sup> ]	2500	q [N/m]	4950,42	alpha c	0,013
Vão [m]			5		

Fonte: Autoria Própria (2022)

Tabela D.2 – Flecha teórica – NBR 6118 (2014)

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	(Mr/Ma) <sup>3</sup>	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0,000	6506,67	0,00
10%	0,495	1,547	1,043	6506,67	2,91
20%	0,990	3,094	0,130	4812,17	7,87
30%	1,485	4,641	0,039	4633,36	12,25
40%	1,980	6,188	0,016	4589,83	16,49
50%	2,475	7,735	0,008	4574,33	20,69
60%	2,970	9,282	0,005	4567,48	24,86
70%	3,465	10,829	0,003	4563,99	29,03
80%	3,960	12,376	0,002	4562,04	33,19
90%	4,455	13,923	0,001	4560,85	37,35
100%	4,950	15,470	0,001	4560,10	41,50

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela D.3 – Flecha teórica – Branson (seção homogeneizada)**

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	(Mr/Ma) <sup>3</sup>	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0,000	8801,13	0,00
10%	0,495	1,547	1,04	8801,13	2,15
20%	0,990	3,094	0,13	5111,39	7,41
30%	1,485	4,641	0,04	4722,01	12,02
40%	1,980	6,188	0,02	4627,23	16,36
50%	2,475	7,735	0,01	4593,48	20,60
60%	2,970	9,282	0,00	4578,56	24,80
70%	3,465	10,829	0,00	4570,97	28,98
80%	3,960	12,376	0,00	4566,71	33,15
90%	4,455	13,923	0,00	4564,14	37,32
100%	4,950	15,470	0,00	4562,49	41,48

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela D.4 – Rigidez corrigida**

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0	0,00
10%	0,495	1,547	8802,54	2,1500
20%	0,990	3,094	5415,01	6,99
30%	1,485	4,641	4795,31	11,84
40%	1,980	6,188	4535,76	16,69
50%	2,475	7,735	4393,10	21,54
60%	2,970	9,282	4302,87	26,39
70%	3,465	10,829	4240,66	31,24
80%	3,960	12,376	4195,17	36,09
90%	4,455	13,923	4160,46	40,94
100%	4,950	15,470	4133,10	45,79

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela D.5 – INCREMENTO DE CARGA = 10%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	557,00	-0,675
3	990,00	-1,277
4	1299,00	-1,748
5	1485,00	-2,048
6	1547,00	-2,150
7	1485,00	-2,048
8	1299,00	-1,748
9	990,00	-1,277
10	557,00	-0,675
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela D.6 – INCREMENTO DE CARGA = 20%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	1114,00	-2,184
3	1980,00	-4,144
4	2598,00	-5,676
5	2970,00	-6,656
6	3094,00	-6,990
7	2970,00	-6,656
8	2598,00	-5,676
9	1980,00	-4,144
10	1114,00	-2,184
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela D.7 – INCREMENTO DE CARGA = 30%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	1671,00	-3,708
3	2970,00	-7,031
4	3897,00	-9,624
5	4455,00	-11,284
6	4641,00	-11,840
7	4455,00	-11,284
8	3897,00	-9,624
9	2970,00	-7,031
10	1671,00	-3,708
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela D.8 – INCREMENTO DE CARGA = 40%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	2228,00	-5,232
3	3960,00	-9,918
4	5196,00	-13,572
5	5940,00	-15,912
6	6188,00	-16,690
7	5940,00	-15,912
8	5196,00	-13,572
9	3960,00	-9,918
10	2228,00	-5,232
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela D.9 – INCREMENTO DE CARGA = 50%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	2785,00	-6,756
3	4950,00	-12,805
4	6495,00	-17,520
5	7425,00	-20,540
6	7735,00	-21,540
7	7425,00	-20,540
8	6495,00	-17,520
9	4950,00	-12,805
10	2785,00	-6,756
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela D.10 – INCREMENTO DE CARGA = 60%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	3342,00	-8,280
3	5940,00	-15,692
4	7794,00	-21,468
5	8910,00	-25,168
6	9282,00	-26,390
7	8910,00	-25,168
8	7794,00	-21,468
9	5940,00	-15,692
10	3342,00	-8,280
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela D.11 – INCREMENTO DE CARGA = 70%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	3899,00	-9,804
3	6930,00	-18,579
4	9093,00	-25,416
5	10395,00	-29,796
6	10829,00	-31,240
7	10395,00	-29,796
8	9093,00	-25,416
9	6930,00	-18,579
10	3899,00	-9,804
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela D.12 – INCREMENTO DE CARGA = 80%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	4456,00	-11,328
3	7920,00	-21,466
4	10392,00	-29,364
5	11880,00	-34,424
6	12376,00	-36,090
7	11880,00	-34,424
8	10392,00	-29,364
9	7920,00	-21,466
10	4456,00	-11,328
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela D.13 – INCREMENTO DE CARGA = 90%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	5013,00	-12,852
3	8910,00	-24,353
4	11691,00	-33,312
5	13365,00	-39,052
6	13923,00	-40,940
7	13365,00	-39,052
8	11691,00	-33,312
9	8910,00	-24,353
10	5013,00	-12,852
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela D.14 – INCREMENTO DE CARGA = 100%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	5570,00	-14,376
3	9900,00	-27,240
4	12990,00	-37,260
5	14850,00	-43,680
6	15470,00	-45,790
7	14850,00	-43,680
8	12990,00	-37,260
9	9900,00	-27,240
10	5570,00	-14,376
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)



**APÊNDICE E - Exemplo 3**

Tabela E.1 – Dados de entrada e propriedades obtidas (Exemplo 3)

Exemplo 3					
DADOS DE ENTRADA			PROPRIEDADES OBTIDAS		
bf [cm]	12,00	Área bruta (Ag) [cm <sup>2</sup> ]	420,000	Área homog. (Ah) [cm <sup>2</sup> ]	428,76
bw [cm]	0	ycg [cm]	17,500	yh [cm]	12,700
hf [cm]	0	lg [cm <sup>4</sup> ]	42875,000	lh [cm <sup>4</sup> ]	46137,943
h [cm]	35	alpha e	6,577	d' [m]	0,000
cobrimento [cm]	2,5	d [m]	32,000	As' [m <sup>2</sup> ]	0,00
Es [MPa]	210000	As [cm <sup>2</sup> ]	1,571	x2 [cm]	6,6116
Ecs [MPa]	31931,05	fct,m [kN/cm <sup>2</sup> ]	0,221	I2 [cm <sup>4</sup> ]	7814,87
bitola armadura [cm]	1,00	fctK,inf [kN/cm <sup>2</sup> ]	0,155	Mr [kN.cm]	637,478
alpha	1,5				
fck [MPa]	20	Mk [N.m]	23620,853		
Peso específico conc. [kg/m <sup>3</sup> ]	2500	q [N/m]	11810,43	alpha c	0,013
Vão [m]			4,0		

Fonte: Autoria Própria (2022)

Tabela E.2 – Flecha teórica – NBR 6118 (2014)

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	(Mr/Ma) <sup>3</sup>	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0,00	42875,00	0,00
10%	1,181	2,362	19,66	42875,00	0,29
20%	2,362	4,724	2,46	42875,00	0,58
30%	3,543	7,086	0,73	33339,43	1,11
40%	4,724	9,448	0,31	18583,04	2,65
50%	5,905	11,810	0,16	13328,17	4,63
60%	7,086	14,173	0,09	11005,44	6,72
70%	8,267	16,535	0,06	9824,09	8,78
80%	9,448	18,897	0,04	9160,89	10,77
90%	10,629	21,259	0,03	8760,22	12,67
100%	11,810	23,621	0,02	8504,03	14,50

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela E.3 – Flecha teórica – Branson (seção homogeneizada)**

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	(Mr/Ma) <sup>3</sup>	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0,00	46137,94	0,00
10%	1,181	2,362	19,66	46137,94	0,27
20%	2,362	4,724	2,46	46137,94	0,53
30%	3,543	7,086	0,73	35714,93	1,04
40%	4,724	9,448	0,31	19585,21	2,52
50%	5,905	11,810	0,16	13841,28	4,45
60%	7,086	14,173	0,09	11302,38	6,55
70%	8,267	16,535	0,06	10011,08	8,62
80%	9,448	18,897	0,04	9286,16	10,62
90%	10,629	21,259	0,03	8848,20	12,54
100%	11,810	23,621	0,02	8568,17	14,39

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela E.4 – Rigidez corrigida**

Incremento	g+q (kN/m)	Ma [kN.m]	leq [cm <sup>4</sup> ]	a [mm]
0	0,000	0,000	0	0,00
10%	1,181	2,362	42809,35	0,29
20%	2,362	4,724	13653,48	1,81
30%	3,543	7,086	10122,41	3,65
40%	4,724	9,448	8963,35	5,50
50%	5,905	11,810	8364,38	7,37
60%	7,086	14,173	8007,64	9,24
70%	8,267	16,535	7770,90	11,11
80%	9,448	18,897	7602,34	12,97
90%	10,629	21,259	7476,21	14,84
100%	11,810	23,621	7378,27	16,71

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela E.5 – INCREMENTO DE CARGA = 10%**

Nó	Momento [N.m]	Delta [mm]
1	0,0	0,000
2	850,00	-0,090
3	1512,00	-0,171
4	1984,00	-0,234
5	2268,00	-0,274
6	2362,00	-0,288
7	2268,00	-0,274
8	1984,00	-0,234
9	1512,00	-0,171
10	850,00	-0,090
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela E.6 – INCREMENTO DE CARGA = 20%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	1700,00	-0,506
3	3024,00	-0,982
4	3968,00	-1,405
5	4536,00	-1,708
6	4724,00	-1,806
7	4536,00	-1,708
8	3968,00	-1,405
9	3024,00	-0,982
10	1700,00	-0,506
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela E.7 – INCREMENTO DE CARGA = 30%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	2550,00	-1,076
3	4536,00	-2,075
4	5952,00	-2,909
5	6804,00	-3,472
6	7086,00	-3,654
7	6804,00	-3,472
8	5952,00	-2,909
9	4536,00	-2,075
10	2550,00	-1,076
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela E.8 – INCREMENTO DE CARGA = 40%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	3400,00	-1,646
3	6048,00	-3,168
4	7936,00	-4,413
5	9072,00	-5,236
6	9448,00	-5,502
7	9072,00	-5,236
8	7936,00	-4,413
9	6048,00	-3,168
10	3400,00	-1,646
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela E.9 – INCREMENTO DE CARGA = 50%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	4250,00	-2,232
3	7560,00	-4,276
4	9920,00	-5,927
5	11340,00	-7,010
6	11810,00	-7,370
7	11340,00	-7,010
8	9920,00	-5,927
9	7560,00	-4,276
10	4250,00	-2,232
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela E.10 – INCREMENTO DE CARGA = 60%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	5100,00	-2,817
3	9072,00	-5,384
4	11904,00	-7,441
5	13608,00	-8,784
6	14172,00	-9,238
7	13608,00	-8,784
8	11904,00	-7,441
9	9072,00	-5,384
10	5100,00	-2,817
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela E.11 – INCREMENTO DE CARGA = 70%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	5950,00	-3,402
3	10584,00	-6,492
4	13888,00	-8,955
5	15876,00	-10,558
6	16534,00	-11,106
7	15876,00	-10,558
8	13888,00	-8,955
9	10584,00	-6,492
10	5950,00	-3,402
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela E.12 – INCREMENTO DE CARGA = 80%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	6800,00	-3,987
3	12096,00	-7,600
4	15872,00	-10,469
5	18144,00	-12,332
6	18896,00	-12,974
7	18144,00	-12,332
8	15872,00	-10,469
9	12096,00	-7,600
10	6800,00	-3,987
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela E.13 – INCREMENTO DE CARGA = 90%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	7650,00	-4,573
3	13608,00	-8,708
4	17856,00	-11,983
5	20412,00	-14,106
6	21258,00	-14,842
7	20412,00	-14,106
8	17856,00	-11,983
9	13608,00	-8,708
10	7650,00	-4,573
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)

**Tabela E.14 – INCREMENTO DE CARGA = 100%**

<b>Nó</b>	<b>Momento [N.m]</b>	<b>Delta [mm]</b>
1	0,0	0,000
2	8500,00	-5,158
3	15120,00	-9,816
4	19840,00	-13,497
5	22680,00	-15,880
6	23620,00	-16,710
7	22680,00	-15,880
8	19840,00	-13,497
9	15120,00	-9,816
10	8500,00	-5,158
11	0,0	0,000

Fonte: Autoria Própria (2022)