TAREFAS EXPLORATÓRIAS PARA O ENSINO DE POTENCIAÇÃO

UMA PROPOSTA VIA DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Suiane Priscilla Perez Felicio da Silva
Henrique Rizek Elias
Laís Cristina Viel Gereti

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TAREFAS EXPLORATÓRIAS PARA O ENSINO DE POTENCIAÇÃO:

UMA PROPOSTA VIA DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

EXPLORATORY TASKS FOR POTENTIATION TEACHING: A PROPOSAL THROUGH THE DEVELOPMENT OF ALGEBRAIC THINKING

SUIANE PRISCILLA PEREZ FELICIO DA SILVA

HENRIQUE RIZEK ELIAS

LAÍS CRISTINA VIEL GERETI

LONDRINA

2024

4.0 INTERNACIONAL

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

TAREFAS EXPLORATÓRIAS PARA O ENSINO DE POTENCIAÇÃO:

UMA PROPOSTA VIA DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Produto Educacional desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) como um dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

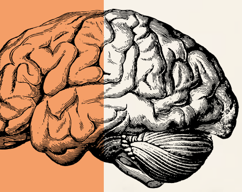
Data de aprovação: 28 de Novembro de 2023

Dr. Henrique Rizek Elias - Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Dra. Alessandra Senes Marins - Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Dra. Angela Marta P. Das Dores Savioli - Universidade Estadual de Londrina (UEL)

SUMÁRIO



APRESENTAÇÃO

Este Produto Educacional é resultado da pesquisa de mestrado profissional de título *"Desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de tarefas exploratórias sobre potenciação"*, realizada por Suiane Priscilla Perez Felício da Silva sob a orientação de Henrique Rizek Elias e coorientação de Laís Cristina Viel Gereti. O mestrado profissional foi realizado no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina.

O material é destinado a professores que ensinam Matemática na Educação Básica. Aqui, o leitor encontrará o planejamento de uma sequência didática voltada ao ensino de potenciação para o 6º ano do Ensino Fundamental. A potenciação é um tema necessário para o sucesso da aprendizagem da Matemática ao longo do período escolar, dada sua relação com diversos outros temas matemáticos (radiciação, notação científica, juros compostos, função potência, função exponencial) e de outras áreas (como a Física). O 6º ano é, particularmente, um ano escolar que merece atenção, uma vez que se trata da transição entre os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e por ser quando, geralmente, os estudantes se deparam pela primeira vez com o conteúdo de potenciação.

A perspectiva adotada neste Produto Educacional leva em conta aspectos do pensamento algébrico dos estudantes desenvolvidos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, buscando conectar os conhecimentos trazidos dos anos iniciais aos novos conhecimentos previstos para os anos finais do Ensino Fundamental. O foco deste material está na introdução do tema potenciação, por isso, ele é pensado, a princípio, para professores que lecionam no 6º ano. Entretanto, a sequência didática pode ser adaptada para outros anos escolares e para outras finalidades (por exemplo, se o professor quiser trabalhar com propriedades de potenciação). O planejamento aqui proposto não deve ser compreendido como algo pronto e imutável, como se fosse uma receita para o ensino de potenciação. Espera-se que o Produto Educacional sirva como um estímulo à criatividade do professor de forma que esse realize alterações de acordo com sua experiência e sua prática, adequando a proposta ao seu contexto.

O material começa com uma breve explicação sobre as perspectivas teóricas que fundamentaram sua elaboração, a saber: pensamento algébrico e Ensino Exploratório. Em seguida, são apresentadas duas tarefas matemáticas, aqui chamadas de tarefas de exploração, juntamente como uma proposta de planejamento de aulas para a introdução da potenciação no 6° ano do ensino fundamental. Também são apresentados trechos de diálogos entre estudantes de uma turma de 6° ano em que essas tarefas foram desenvolvidas. Esses trechos ilustram formas de pensar dos alunos, o que pode auxiliar o professor no desenvolvimento dessas tarefas em sala de aula.

Após a apresentação da sequência didática, são apresentadas algumas palavras finais, indicando potencialidades e limitações da proposta a partir da experiência vivenciada pela professora (primeira autora deste material) que conduziu as aulas na perspectiva adotada.

Esperamos que este Produto Educacional sirva de apoio aos professores que ensinam Matemática e que buscam alternativas para o ensino de potenciação, visando a superação de dificuldades comuns de serem observadas em seus alunos, como, por exemplo, quando esses, não raramente, consideram que $3^2=6$, pois multiplicaram a base com o expoente da potência.

BOA LEITURA!

AS BASES TEÓRICAS QUE FUNDAMENTAM O PRODUTO EDUCACIONAL

Iniciamos apresentando a definição de potenciação feita por Caraça (1951). O autor inicia o tópico denominado "A operação da potenciação" da seguinte maneira:

> *Símbolo* → a^n
> *Definição.* - A potência a^n define-se como um produto de factores iguais:
>
> $$a^n = \overbrace{a.\ a \ldots a.}^{(n)} \quad a^1 = a.$$
>
> Nomes. - Ao número a, factor que se repete, chama-se *base*; ao número n, número de vezes que a figura como factor, chama-se *expoente*; ao resultado, chama-se *potência*.
> Papéis. - A base desempenha um papel passivo, enquanto o expoente um papel *activo*. (CARAÇA, 1951, p. 19).

Dessa definição, podemos notar que Caraça (1951) entende a potenciação como uma operação e a potência como o resultado dessa operação. Em nossa interpretação, Caraça (1951) considera a potência a^n como sendo tanto o símbolo como o resultado a potenciação. O que significa que, para o autor, tanto 3^2 como 9 podem ser considerados potências.

Diferentemente de Caraça (1951), Paias (2019) considera que a potenciação não deve ser entendida como uma operação, uma vez que a representação é a principal característica do conceito. Paias (2019) constrói sua pesquisa pautada na teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Raymond Duval. Paias (2019) assume que:

> [...] a potenciação é uma *representação* no registro algébrico do objeto matemático potência. Entendemos que, mesmo no conjunto dos números naturais, a potenciação não *é uma operação*, pois não envolve um algoritmo entre seus elementos: base e expoente, de uma forma direta e sim representa um produto reiterado de fatores que é a base tantas vezes quanto for o expoente (PAIAS, 2019, p. 38, destaques nossos).

Paias (2019) argumenta que quando fazemos 3^2 não estamos operando, de forma direta, com os números 3 e 2. Em Paias (2009), um trabalho que precedeu Paias (2019), a autora indicou um aspecto que é frequente em salas de aula de Matemática: "O resultado das análises das respostas dos alunos indicou que, grande parte dos alunos, não tem o domínio da concepção sobre a operação potenciação; decorrendo disso, muitos a entendem como multiplicação. Assim, vários fatores agravam o erro em relação a esse tópico" (p. 201). Foram justamente as conclusões obtidas em sua dissertação (PAIAS, 2009) que levaram Paias (2019) a rever sua concepção de potenciação, passando a entendê-la não mais como uma operação (como considerava em Paias (2009)), mas, sim, como uma representação.

As conclusões apresentadas por Paias (2009, 2019) são importantes constatações que explicitam a necessidade de se dar atenção ao tema potenciação nas escolas e nas pesquisas científicas. Por isso, entendemos que esses dois modos de enxergar (ora como uma operação, ora como uma representação) devem ser objeto de atenção do professor.

PENSAMENTO ALGÉBRICO

A abordagem adotada aqui busca conectar o tema com aspectos do pensamento algébrico que os estudantes possam trazer desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa nossa intenção parece ser corroborada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) quando considera:

> Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas (BRASIL, 2018, p. 298).

Quando olhamos atentamente para os Objetos de Conhecimento apresentados na BNCC, percebemos que, na unidade temática Números, aparece, já para o 4º ano do Ensino Fundamental, "Composição e decomposição de um número natural de até cinco ordens, por meio de adições e multiplicações por potências de 10" (BRASIL, 2018, p. 290). Outro aspecto presente na BNCC para os anos iniciais do Ensino Fundamental e que pode favorecer a introdução da potenciação no 6º ano do Ensino Fundamental diz respeito ao trabalho com sequências (numéricas e não numéricas), tema que tem estreita relação entre a unidade temática Números com a unidade temática Álgebra.

Além disso, a BNCC também indica a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico e a necessidade de se trabalhar aspectos desse pensamento desde os anos iniciais:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – *pensamento algébrico* – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. [...] Nessa perspectiva, *é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade.* (BRASIL, 2018, p. 270, destaque nossos).

Sobre o pensamento algébrico, Canavarro (2007) afirma que o foco do pensamento algébrico está na generalização. De acordo com a autora, dois aspectos distinguem o pensamento algébrico de uma visão tradicional de Álgebra escolar. O primeiro é que:

> [...] no pensamento algébrico aceita-se que a notação algébrica convencional (envolvendo letras, sobretudo as últimas do alfabeto) não é o único veículo para exprimir ideias algébricas; a linguagem natural, e outros elementos como diagramas, tabelas, expressões numéricas, gráficos podem também ser usadas para expressar a generalização. (CANAVARRO, 2007, p. 87).

Portanto, falar em pensamento algébrico vai além de uma ideia simplista de associar esse pensamento exclusivamente ao uso da letra x ao resolver uma equação. Já o segundo aspecto refere-se à ênfase nos significados e compreensão.

De acordo com Canavarro (2007), a Álgebra escolar tem estado associada à manipulação dos símbolos e à reprodução de regras operatórias, tantas vezes aplicadas mecanicamente e sem compreensão, parecendo os símbolos ter adquirido um estatuto de primazia per si. Na realidade, segue a autora, o simbolismo algébrico concentra um poder insuperável, possibilitando uma agilidade ímpar na tradução e manipulação de informação e na compactação de ideias que só assim se tornam operacionalizáveis. Em virtude do uso dos símbolos e sistemas simbólicos se ter imposto, a Álgebra passou a ser encarada como o estudo ou uso destes sistemas. No entanto, no cerne do pensamento algébrico estão os significados, está o uso dos símbolos como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão (CANAVARRO, 2007).

Para Ponte (2006, p. 7, destaque do autor), a "melhor forma de indicar os grandes objetivos do estudo da Álgebra, ao nível escolar, é dizer então que se visa desenvolver o *pensamento algébrico* dos alunos". Segundo esse autor, no pensamento algébrico, a atenção é dada não apenas aos objetos matemáticos, mas, também, às relações existentes entres eles, "[...] representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e *abstracto*. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de padrões e regularidades" (PONTE, 2006, p. 8).

Compreendemos os termos padrão e generalização da mesma forma que Vale (2012). Para essa autora, a "ideia fundamental num padrão envolve repetição e mudança" (VALE, 2012, p. 186), sendo possível identificar dois tipos de padrão: "Um padrão será de repetição quando há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente. Um padrão será de crescimento quando cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior" (VALE, 2012, p. 186). Além disso, tarefas que abordam padrões podem envolver dois tipos de generalização:

> [...] a *generalização próxima* que se refere à descoberta do termo seguinte e que podem ser obtidos por contagem, desenho ou por recurso a uma tabela e que normalmente envolve relações recursivas, e a *generalização distante* que envolve a descoberta do padrão e que requer uma compreensão da lei de formação, ou seja uma regra geral através de uma expressão matemática, e requer a procura de relações funcionais (VALE, 2012, p. 190).

Vale (2012) diz ainda que a seleção das tarefas é crucial se o professor pretende criar experiências de resolução de problemas que permitam aos alunos fazer generalizações.

ENSINO EXPLORATÓRIO

O Ensino Exploratório surge a partir da necessidade de se trabalhar com tarefas bem elaboradas, centradas nos trabalhos dos alunos e envolvendo a exploração Matemática, oportunizando uma aula interativa envolvendo professor e alunos em discussões matemáticas coletivas.

> O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. (CANAVARRO, 2011, p.11).

É possível perceber, portanto, que a escolha da tarefa é essencial para o desenvolvimento de um ensino pautado no Ensino Exploratório. Para Ponte (2014, p. 16), “as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática”. Ao classificar diferentes tipos de tarefas, Ponte (2005) considera duas dimensões fundamentais: (i) o seu grau de desafio matemático e (ii) o seu grau de estrutura. O grau de desafio matemático está relacionado à percepção da dificuldade da questão, variando entre o “reduzido” e “elevado”. Já o grau de estrutura varia entre os polos “aberto” e “fechado”, sendo uma tarefa fechada aquela em que é “claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta comporta alguma indeterminação pelo menos num destes aspetos” (PONTE, 2014, p. 20). Cruzando as duas dimensões, Ponte (2014) apresenta quatro tipos de tarefa:

> •Um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido;
> •Um problema é uma tarefa também fechada, mas com desafio elevado;
> •Uma investigação é uma tarefa aberta com desafio elevado;
> •Uma exploração é uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos.
> (PONTE, 2014, p. 21)

Para Vale (2012) a aula de matemática depende, para além do professor, sobretudo da ênfase em tarefas matematicamente ricas, em particular as de natureza exploratória e investigativa que permitam gerar interações de aprendizagem. Nesse sentido, as tarefas do tipo exploratórias são fundamentais para o desenvolvimento do Ensino Exploratório. Ponte (2005, p.16) afirma que:

> A realização de tarefas abertas, de carácter exploratório e investigativo é um elemento marcante neste tipo de ensino, mas importância idêntica assumem os momentos de discussão em que os alunos apresentam o seu trabalho, relatam as suas conjecturas e conclusões, apresentam as suas justificações e questionam-se uns aos outros e que o professor aproveita para procurar que se clarifiquem os conceitos e procedimentos, se avalie o valor dos argumentos e se estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática. Os momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento.

Em outras palavras, Ponte (2005, p. 02) considera que "Não basta, no entanto, selecionar boas tarefas – é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula". É fundamental escolher tarefas apropriadas, que possam servir de base a uma atividade matemática rica e multifacetada por parte dos alunos.

Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) relatam que a partir do Ensino Exploratório é possível trabalhar com tarefas matemáticas valiosas, permitindo que os alunos partilhem com os colegas e o professor as suas ideias. Os autores apresentam o Ensino Exploratório em quatro fases: "introdução da tarefa", "realização da tarefa", "discussão da tarefa" e "sistematização das aprendizagens matemáticas". O Quadro 1 apresenta as ações do professor na prática do Ensino Exploratório de Matemática.

Quadro 1 – Ações intencionais do Professor na prática do ensino exploratório de Matemática

	Promoção da Aprendizagem Matemática	**Gestão da Aula**
INTRODUÇÃO DA TAREFA	*Garantir a apropriação da tarefa:* -Familiarizar com o contexto da tarefa - Esclarecer a interpretação da tarefa - Estabelecer objetivos *Promover a adesão dos alunos à tarefa:* - Estabelecer conexões com experiência anterior - Desafiar para o trabalho	*Organizar o trabalho dos alunos:* - Estipular tempos para o trabalho a desenvolverem cada uma das fases da aula - Definir formas de organização do trabalho (individual, pares, pequenos grupos, ...) - Organizar materiais da aula.

REALIZAÇÃO DA TAREFA	*Garantir o desenvolvimento da tarefa:* - Colocar questões e dar pistas - Sugerir representações - Focar ideias produtivas - Pedir clarificações e justificações *Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:* - Cuidar de promover o raciocínio dos alunos - Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos alunos	*Promover o trabalho de pares/grupos:* - Regular as interações entre alunos - Providenciar materiais para o grupo *Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:* - Pedir registos escritos; - Fornecer os materiais a serem usados; - Dar tempo para preparar a apresentação *Organizar a discussão a fazer:* - Identificar e selecionar resoluções variadas (com erro a explorar, menos ou mais completas, com representações relevantes); - Sequenciar as resoluções selecionadas.
DISCUSSÃO DA TAREFA	*Promover a qualidade matemática das apresentações:* - Pedir explicações claras das resoluções; - Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas; - Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas; *Regular as interações entre os alunos na discussão:* - Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas; - Incentivar análise, confronto e comparação entre resoluções. - Identificar e colocar à discussão erros matemáticos das resoluções.	*Criar ambiente propício à apresentação e discussão:* Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos; - Providenciar a reorganização dos lugares/espaço para a discussão; - Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados; *Gerir relações entre os alunos:* - Definir a ordem das apresentações; - Cuidar de justificar as razões da não apresentação de algumas resoluções; - Promover e gerir. escrito nos cadernos dos alunos
SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS MATEMÁTICAS	*Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa:* - Identificar conceito(s) matemático(s), clarificar a sua definição e explorar representações múltiplas - Identificar procedimento(s) matemático(s), clarificar as condições da sua aplicação e rever a sua utilização - Reconhecer o valor de uma regra com letras. *Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a capacidades transversais suscitadas pela exploração da tarefa:* - Identificar e relacionar dimensões da(s) capacidade(s) transversal(ais) presentes. - Reforçar aspetos-chave para o seu desenvolvimento. *Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores:* - Evidenciar ligações com conceitos matemáticos, procedimentos ou capacidades transversais anteriormente trabalhadas.	*Criar ambiente adequado à sistematização:* - Focar os alunos no momento de sistematização Coletiva. - Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada. *Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização:* - Fazer registo em suporte físico ou informático (quadro, QI, acetato, cartaz ...) por aluno ou professor - Pedir registo escrito nos cadernos dos alunos

Fonte: Oliveira, Menezes e Canavarro (2013, p. 5)

Para Canavarro, Oliveira e Menezes (2013), o Quadro 1 é um passo na construção de um quadro de referência que relaciona as intenções e ações do professor no ensino exploratório da Matemática.

Para que aconteça uma participação efetiva dos alunos durante o Ensino Exploratório, algumas práticas podem ser consideradas na construção do planejamento e durante o momento de ensino (MARINS; SAVIOLI; TEIXEIRA, 2022). Stein *et al.* (2008) apresentam cinco práticas para promover discussões matemáticas produtivas em torno de tarefas matemáticas rica, a saber: *antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões.*

A prática de *antecipar* relaciona-se ao planejamento da aula e envolve: explorar o potencial da tarefa, desenvolver expectativas sobre a interpretação e o envolvimento dos alunos na tarefa, elencar uma diversidade de estratégias – corretas e incorretas – que os alunos poderão fazer com diferentes graus de sofisticação, relacionar essas interpretações e estratégias com os conceitos, representações, procedimentos, práticas, que deseje para o aprendizado dos alunos (STEIN *et al.*, 2008).

A prática de *monitorar* realiza-se, de acordo com Canavarro (2011), já em sala de aula e é apoiada pelo trabalho realizado pelo professor na antecipação. Essa prática envolve observar e ouvir os alunos/grupos durante o desenvolvimento da tarefa, avaliando a validade matemática das ideias e respostas manifestadas pelos alunos e interpretando o pensamento matemático dos alunos (STEIN *et al.*, 2008).

A prática de *selecionar* ocorre também em sala de aula, nos minutos finais do trabalho autônomo dos alunos, e é facilitada pelo trabalho realizado pelo professor durante a prática de monitorar (CANAVARRO, 2011). Essa prática envolve identificar e selecionar os alunos/grupos cujas respostas são relevantes para partilhar com toda a turma na fase de discussão, de modo a proporcionar uma diversidade de ideias matemáticas adequadas ao propósito da aula (STEIN *et al.*, 2008).

A prática de *sequenciar* ocorre quase que simultaneamente à prática de selecionar (CANAVARRO, 2011) e refere-se à ordem das apresentações das resoluções dos alunos e dos objetivos visados pelo professor. Os critérios para sequenciar são definidos pelo professor (STEIN *et al.*, 2008). Por exemplo, das diferentes formas de pensar apresentadas pelos alunos, iniciar por uma ideia incorreta e, em seguida, colocar uma resposta correta que possa permitir aos alunos compararem ambas as formas e tirarem conclusões.

A prática de estabelecer conexões ocorre imediatamente após a discussão das diferentes resoluções dos alunos ou, até mesmo, durante (CANAVARRO, 2011). A prática de estabelecer conexões e confrontar as diferenças e semelhanças apresentadas nas resoluções, estabelecendo conexões matemáticas entre elas (STEIN *et al*., 2008). Canavarro (2011, p. 16) destaca que

> [...] o propósito das discussões não é realizar um desfile de apresentações separadas de diferentes respostas ou estratégias de resolver uma dada tarefa; o propósito das discussões é relacionar as apresentações com vista ao desenvolvimento colectivo de ideias matemáticas poderosas que sintetizam as aprendizagens matemáticas dos alunos.

Por fim, convém informar que a sequência didática apresentada na próxima seção é resultado de um projeto de pesquisa mais amplo desenvolvido pelo *Grupo Matemática Escolar: práticas, pesquisas e estudos* (MEPPE) vinculado à Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *campus* Londrina. Diversos estudos e pesquisas realizados pelo grupo MEPPE sobre potenciação antecedem e fundamentam a elaboração deste Produto Educacional. Alguns resultados já foram publicados, a saber: Lopes (2023), Elias, Martelozo, Gereti e Lopes (2022), Elias, Gereti, Martelozo e Silva (2023) e Elias, Gereti, Lopes e Silva (2023).

Em síntese, podemos dizer que a perspectiva de trabalho com potenciação apresentada neste material está fundamentada nas seguintes ideias apresentadas por Lopes (2023):

(i) a potenciação dever ser incluída no contexto mais amplo do pensamento algébrico, na medida em que a notação (convencional ou não) é parte constituinte do conceito e, também, considerando que a generalização é uma característica importante para sua compreensão;

(ii) a potenciação pode ser interpretada ora como uma operação (nesse caso, a potenciação é a multiplicação de fatores iguais) ora como uma representação (nesse caso, a potenciação "é uma representação no registro algébrico do objeto matemático potência" (PAIAS, 2019, p. 38));

(iii) as tarefas exploratórias, por serem do tipo abertas e de desafio reduzido, permitem aos estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental retomarem o trabalho com identificação de regularidades e padrões de sequências numéricas e de generalização desses padrões, conectando-o ao (novo) conceito matemático de potenciação. Com isso, busca-se evitar um ensino pautado pela apresentação da simbologia e pela explicação da técnica de operação;

(iv) uma abordagem de ensino que favorece o trabalho com tarefas exploratórias, visando o desenvolvimento do pensamento algébrico, é o Ensino Exploratório.

Com base nessas hipóteses, elaboramos e apresentamos a sequência didática na próxima seção.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

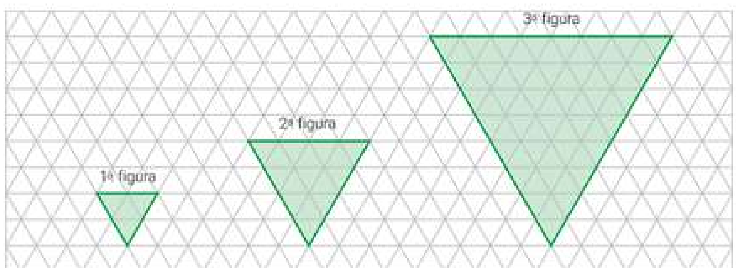
Nesta seção, apresentamos duas tarefas exploratórias, uma nomeada de Tarefa dos triângulos (Tarefa 1) e a outra nomeada de Tarefa da árvore genealógica (Tarefa 2). Junto a cada uma das tarefas, apresentamos seus objetivos, aspectos do pensamento algébrico possíveis de serem mobilizados, o planejamento das aulas para o uso dessas tarefas (com base nas quatro fases do Ensino Exploratório) e trazemos, em alguns momentos, trechos de diálogos entre estudantes de uma turma de 6º ano de uma escola estadual do Paraná em que foram desenvolvidas as tarefas no ano de 2022. Esses trechos ilustram formas de pensar dos alunos, o que pode auxiliar o professor a antecipar a maneira como seus alunos podem lidar com as tarefas e, portanto, colaborar com as demais práticas *(monitorar*, *selecionar*, *sequenciar e estabelecer conexões)* para promover discussões matemáticas produtivas (STEIN *et al*., 2008) por meio do Ensino Exploratório em suas turmas.

De uma maneira geral, o objetivo dessa sequência didática é introduzir o conceito de potenciação utilizando duas tarefas de natureza exploratória voltadas para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Mais detalhes são apresentados na descrição de cada tarefa.

TAREFA 1

Figura 1 – A Tarefa dos triângulos

A imagem abaixo contém diversos triângulos pequenos. A partir desses triângulos pequenos, podemos formar triângulos maiores, como os que estão pintados de verde nas figuras 1, 2 e 3 da imagem:



a) Quantos triângulos pequenos há em cada triângulo verde?
b) Quantos triângulos pequenos terão na Figura 4? E na Figura 5? Por quê?
c) Como a quantidade de triângulos pequenos está mudando de uma figura para a outra? Escreva o que você e seu grupo descobriram.
d) Quantos triângulos pequenos terão na Figura 10? Por quê?

Fonte: grupo MEPPE

Objetivo da tarefa: com essa tarefa, espera-se que os alunos: (i) reconheçam um padrão de crescimento, estabelecendo uma relação entre a quantidade de triângulos verdes de uma figura com a anterior; (ii) busquem uma generalização (próxima ou distante); e (iii) façam uso de uma notação própria para externalizar a forma de pensar.

Aspectos do pensamento algébrico a serem mobilizados: na primeira figura (triângulo verde), é possível notar quatro triângulos menores. Na segunda, 16 triângulos menores; na terceira figura, 64 triângulos menores. No item "a" da tarefa, espera-se que os alunos realizassem a contagem dos triângulos pequenos e chegassem à resposta. A estratégia utilizada para a contagem pode ser diversa. O item "b" busca-se que os alunos manifestassem a compreensão/percepção de um *padrão de crescimento* (VALE, 2012) para identificar quantos triângulos pequenos teriam nas figuras 4 e 5, fato que deveria ser justificado e sistematizado no item "c". Já no item "d", espera-se que os alunos busquem uma *generalização (próxima ou distante)* (VALE, 2012). Sobre a *generalização próxima*, os alunos podem perceber que a quantidade de triângulos pequenos em uma figura é quatro vezes a quantidade de triângulos pequenos na figura anterior($Q_n = 4.Q_{n-1}$ com $Q_1 = 4$ e $n = 2,3,4,\dots$). No caso da *generalização distante*, os alunos podem perceber que a primeira figura tem 4 triângulos, a segunda tem 4.4, a terceira tem 4.4.4, a quarta tem 4.4.4.4 e assim por diante. Nesse caso, os alunos podem manifestar uma relação entre o número da figura e a quantidade de vezes que o 4 está sendo multiplicado. Dessa forma, poderiam afirmar que a décima figura tem $\underbrace{4.4.4\dots4}_{10\ vezes}$ triângulos. Como ainda não conheciam a potenciação, não é esperado que utilizassem o símbolo 4^{10} (ou 4^n, no caso geral). Essa notação convencional será abordada pelo professor somente ao final, nas últimas aulas, quando definiria a nova operação.

PROPOSTA DE PLANEJAMENTO

Inicialmente, gostaríamos de frisar que o tempo dedicado a cada etapa é apenas sugestão conforme o que desenvolvemos na pesquisa. Sabemos dos contratempos que podem ocorrer e por isso o professor deve se sentir livre para fazer as adaptações de cada etapa conforme sua realidade didática. Para essa proposta, sugerimos que seja desenvolvida em 2 aulas de 50 minutos.

AULA 1

Início da aula: Caso os alunos não estejam habituados com a dinâmica de uma aula pautada no Ensino Exploratório, esclarecer a eles essa perspectiva[1] antes de sua aplicação. Dividir os alunos em pequenos grupos (sugestão: três ou quatro alunos). Entregar a Tarefa 1 e uma malha triangular impressa para os grupos (entregar um enunciado e uma malha triangular para cada integrante do grupo). Sugestão de tempo: 5 minutos.

Introdução da Tarefa 1 (primeira fase do Ensino Exploratório). Ler o enunciado da Tarefa 1 com a turma inteira. Certificar-se de que os alunos compreenderam o enunciado. Se for preciso, releia a tarefa ou peça para algum aluno ler e dizer o que compreendeu do enunciado. Solicitar aos grupos que registrem por escrito as formas de pensar. Se houver mais do que uma forma de pensar, solicitar que escrevam todas elas na folha. Sugestão de tempo: 5 minutos.

Realização da Tarefa 1 (segunda fase do Ensino Exploratório). Enquanto os alunos realizam a Tarefa, o professor deve circular entre os alunos para *monitorar* o desenvolvimento e as formas de pensar. O professor deve buscar estimular o pensamento e promover diferentes formas de pensar a tarefa, fazendo questionamentos e cuidando da interação entre os integrantes do grupo. O professor não deve validar respostas dos alunos ou dar respostas que diminuam o nível cognitivo da tarefa. Enquanto circula, o professor deve observar as diferentes formas de resolver dos alunos e, mentalmente, *selecionar e sequenciar* algumas dessas formas para que, no momento posterior, possa solicitar que os alunos as apresentem. Sugestão de tempo: 40 minutos.

AULA 2

Discussão da Tarefa 1 (terceira fase do Ensino Exploratório). Na próxima aula, após os grupos finalizarem a realização da tarefa, o professor convidará um integrante de cada grupo para ir à lousa apresentar sua forma de resolver, um a um. Não precisa, necessariamente, chamar todos os grupos. Leve em consideração as práticas de selecionar e sequenciar as apresentações, pois, conforme apontam Stein et al. (2008), ao fazer seleções intencionais sobre a ordem em que o trabalho dos alunos será compartilhado, aumentam as chances dos professores alcançarem seus objetivos para a discussão matemática. A intenção é apresentar estratégias (corretas ou incorretas) distintas na lousa e estabelecer conexões matemáticas entre elas: como que uma resolução correta pode ajudar a compreender uma resolução incorreta? Como que o grupo que resolveu por meio de figuras pode passar a compreender a forma como o grupo resolveu de maneira puramente numérica? Como que a maneira do grupo que generalizou pode auxiliar os alunos a perceberem a generalização? Toda essa etapa de discussão da Tarefa 1, por meio das resoluções dos grupos na lousa, é extremamente importante para o Ensino Exploratório. O

[1] Se o professor optar por outra abordagem de ensino, permanece a sugestão de esclarecer aos alunos essa abordagem caso os alunos não estejam habituados.

professor precisa envolver os estudantes na discussão (não é um momento para o professor dizer o que é certo ou errado e fazer correções), incentivar a análise e a comparação entre resoluções, além de identificar e discutir os erros matemáticos. Se o professor perceber que os estudantes chegaram a uma generalização, estimular os alunos a pensarem sobre a necessidade de uma notação para representar a multiplicação de fatores iguais (estimular a pensar sobre a necessidade não é passar para eles a notação de potenciação, é deixá-los pensarem sobre isso e formularem notações próprias). Sugestão de tempo: 30 minutos.

Sistematização das aprendizagens matemáticas a partir da Tarefa 1 (quarta fase do Ensino Exploratório). Na sistematização da Tarefa 1 ainda não se espera que o professor apresente a potenciação formalmente, pois isso será feito somente após a realização da Tarefa 2. Nesse momento da sistematização da Tarefa 1, o professor deve organizar as aprendizagens dos estudantes manifestadas durante a aula. Espera-se que os alunos cheguem a uma generalização (próxima ou distante), mesmo que ainda sem uma notação convencional, percebam que se trata de uma multiplicação de fatores iguais e percebam a necessidade de uma representação para essa multiplicação. Essa sistematização deve favorecer e auxiliar a sequência das aulas, que envolve a Tarefa 2 e a formalização da potenciação. Sugestão de tempo: 20 minutos.

Exemplos de um grupo de alunos lidando com a Tarefa 1

Trazemos agora alguns exemplos de como uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado do Paraná lidou com a Tarefa 1. Os nomes dos alunos apresentados são fictícios, mas os diálogos são reais de sala de aula.

Exemplo 1

No primeiro exemplo, apresentamos uma maneira incorreta que um aluno iniciou a resolução do item “a” da Tarefa 1.

[1] Thiago: *Eu contei de todos.*

[2] Lúcia: *É para contar um por um.*

[3] Thiago: *64 deu grande, 16 deu médio e 4 deu [a primeira figura]. Vamos somar tudo: 16, 64 e 4.*

[4] Lúcia: *O meu segundo deu 16, o todo deu 84.*

[5] Brenda: *A figura 3 deu 64 né?*

[6] Thiago: A gente já somou juntos.

O grupo conclui que a resposta para o item “a” é a soma de todos os triângulos pequenos encontrados nas três figuras, conforme resume Brenda:

[7] Brenda: A resposta é: tem 84 triângulos pequenos em cada figura verde.

É possível notar que os estudantes souberam lidar com o item “a”, como pode ser visto na fala de Thiago (em [3]), mesmo que a resposta (em [7]) não tenha sido aquela pedida no enunciado. No entanto, a resposta 84 poderia atrapalhar a continuidade da tarefa, uma vez que os estudantes poderiam não perceber o padrão que se estava buscando para resolver os itens posteriores.

Exemplo 2

No segundo exemplo, apresentamos o momento em que os alunos do grupo reconhecem o padrão de crescimento.

[8] Professora: *Tá, até aqui vocês conseguiram perceber alguma coisa?*

[9] Thiago e Brenda: *Não.*

[10] Professora: *Não, então vamos... o que vocês perceberam nos três primeiros triângulos?*

[11] Brenda: *Ah, entendi! É o dobro de cada um. Não, não é! É? [...] Ah, é o quádruplo!*

Após a intervenção da professora, Brenda, em [11], levanta outra conjectura, acreditando que a quantidade de triângulos de uma figura é o dobro da quantidade da figura anterior. No entanto, ainda em [11], ela se coloca em dúvida: “Não, não é! É?”, e levanta a possibilidade de ser o quádruplo. Os estudantes discutem, analisam se é o triplo. Enquanto isso, Brenda continua a fazer contas e conclui:

[12] Brenda: *Achei, é o quádruplo; 4 vezes 4 é 16, 16 vezes 4 é 64. Quantos triângulos pequenos terão na figura 4 e 5? 64 vezes 4 na* [figura] *4 e 64 vezes 5 na* [figura] *5. Não! Vai ser 64 vezes 4 na figura 4, e o resultado vezes 4 na* [figura] *5, porque dá o quádruplo. 4 vezes 4 é 16 e 16 vezes 4 é 64.*

Em [11], Brenda levanta a conjectura e, em [12], explica seu pensamento, evidenciando o padrão que encontrou: a quantidade de triângulos pequenos de uma figura é igual a quatro vezes a quantidade de triângulos pequenos na figura anterior. A partir desse momento, todos os estudantes do grupo começam a fazer contas para conferir e ver se, realmente, a conclusão de Brenda fazia sentido. Inclusive Brenda continuou fazendo contas para confirmar se estava certa ou não. A busca de Brenda em confirmar se suas contas estavam corretas é um aspecto importante para o processo de encontrar uma generalização, uma vez que permite experimentar, testar, explicar, conjecturar, levando a uma consciência das ações realizadas.

[13] Brenda: *Ô! Pelas minhas contas, 64 vezes 4 vai dar 256.*

Depois de algum tempo e muitas contas feitas pelos estudantes, Lúcia diz:

[14] Lúcia: *A figura 4 vai dar 256 e a figura 5 vai dar 1024.* Vamos colocar *assim: A figura 4 vai ter 256 e a figura 5 vai ter 1024.*

Em [14], percebemos que Lúcia chega ao resultado da quantidade de triângulos que terão as figuras 4 e 5. Continuando a resolução da tarefa, Brenda apresenta a justificativa para a resposta do grupo.

[15] Brenda: Na letra B eu fiz: na figura 4 tem 256 triângulos e na figura 5 tem 1024 triângulos, porque na figura 2 é o quádruplo da figura 1 e na figura 3 é o quádruplo da figura 2.

O grupo concorda com a justificativa dada por Brenda (em [15]) e os estudantes pedem sua folha para copiar a justificativa.

Ao final da Tarefa 1, com base nos diálogos, notamos que os estudantes não estabeleceram uma relação direta entre o número da figura e a quantidade de vezes que o fator 4 aparece na multiplicação, fato que permitiria a eles determinarem uma regra para encontrar a quantidade de triângulos para uma figura , chegando a uma generalização distante. Com base em Vale (2012), podemos dizer que os estudantes chegaram a uma generalização próxima, uma vez que descobriram os termos seguintes envolvendo relações recursivas, sendo esse aspecto fundamental para o avanço em outras situações, com outros contextos que envolvam a exploração de padrões.

Exemplo 3

No terceiro exemplo, apresentamos um momento em que, ao resolverem o item “d” da Tarefa 1, os alunos ficaram em uma situação difícil, pois foram obrigados a realizar uma conta cujo resultado era um número grande. No trecho abaixo, é possível perceber a dificuldade enfrentada pelos alunos ao externalizarem o resultado da multiplicação $\underbrace{4.4\ldots4}_{10\text{ vezes}}$

[16] Brenda: *Eu fiz 64 vezes 4, depois o resultado vezes 4, o resultado vezes 4 e assim vai.*

[17] Brenda: *noventa e seis... noventa e seis, oitenta e cinco, setenta e seis.*

[18] Lúcia: *Qual é o número?*

[19] Brenda: *Eu não sei falar. Noventa e seis, oitenta e cinco, setenta e seis.*

[20] Thiago: *Mas no caso a nossa [resposta] seria, novecentos e sessenta e oito milhões, quinhentos e setenta e seis mil, é isso?*

Em [16], Brenda comenta como resolveu a questão. Em [17], [19] e [20] os integrantes do grupo anunciam a resposta incorreta. Por ser um número grande, os estudantes tiveram dificuldades tanto em realizar a conta como em pronunciar o valor. O grupo só foi perceber que sua resposta estava incorreta quando os demais grupos apresentaram e explicaram suas respostas para toda a turma. O grupo percebeu que foi um erro nos cálculos.

Compreendemos que o erro nos cálculos não comprometeu o reconhecimento do padrão envolvido e a percepção de uma *generalização próxima* (fato que pode ser observado em [16]).

Nesse momento, percebemos que, na hora da sistematização da aprendizagem dos estudantes, esse aspecto pode ser explorado pelo professor no sentido de servir como um motivador para a introdução da notação de potenciação. A notação de potenciação (4^{10}), quando aprendida pelos estudantes, será uma forma de facilitar a escrita do número grande a ser encontrado pelos estudantes.

Exemplo 4

No quarto exemplo, apresentamos uma resposta incorreta de um grupo de alunos ao responderem o item “b” da Tarefa 1. Quando questionados pela professora, durante a plenária, sobre a maneira como responderam ao item "b", o aluno Inácio, representante do Grupo 3, respondeu:

[21] Inácio: *Na figura 4, dá 76* [triângulos] *e na figura 5, 88* [triângulos].

[22] Professora: *Olha, então nós temos duas formas aqui que foi resolvida, uma que deu 1024* [triângulos] *e 256* [triângulos] *e a outra que deu?*

[23] Inácio: *76* [triângulos] *e 88* [triângulos].

Na sequência da aula, após os grupos escreverem na lousa as formas como resolveram, a professora conduziu a discussão:

[24] Professora: *Olha só, pessoal. Observando aqui no quadro, nós temos duas contas diferentes, certo? Então, olhem só, o grupo 1, continuou multiplicando por 4, fez 64 vezes 4, que deu 256. 256 vezes 4 que foi 1024. Já o grupo 3, na letra B, somou 12 mais 64, que dá 76. E 76 mais 12, que dá 88. Explica para mim, grupo 3, o que vem a ser esse 12?*

[25] Inácio: *Porque se pegar a segunda figura menos a primeira figura vai dar 12 [...]. Tipo, se você contar a primeira figura mais 12, vai dar o resultado da segunda figura e aí vai indo.*

É possível perceber que o grupo 3 tentou reconhecer um padrão, mas considerou apenas a diferença entre a quantidade de triângulos da figura 2 para a figura 1, como podemos ver em [25]. Ao fazer isso, o grupo desconsidera a quantidade de triângulos na figura 3, fundamental para reconhecer o padrão. Se o padrão reconhecido pelo grupo 3 estivesse correto, a figura 3 deveria ter 28 triângulos e não 64. Vale destacar que o próprio grupo 3 considerou a figura 3 com 64 (e não 28) triângulos, como pode ser observado em [24], quando a professora relata a maneira como o grupo 3 resolveu o item "b" da tarefa.

Acreditamos que o erro cometido pelo grupo 3 possa ser comum entre muitos alunos, ao estabelecerem um padrão a partir somente das duas primeiras figuras.

Com a intenção de que o grupo 3 identificasse o padrão correto e relatado pelos demais grupos, a professora retoma o número de triângulos nas figuras 1, 2 e 3.

[26] Professora: *Então, olha só. A primeira figura tinha 4, a segunda figura multiplicou por quanto? E depois? O que está acontecendo aqui gente?*

Os demais integrantes dos grupos acabam indicando que, de uma figura para outra, a quantidade de triângulos está sendo multiplicada por 4, convencendo os integrantes do grupo 3 sobre a resposta correta.

TAREFA 2

Figura 2 – Tarefa da árvore genealógica

A professora Elisa escreveu a seguinte frase na lousa

"Nossos pais e nossos avós ocupam um espaço importante na história de vida de cada família. Somos frutos de toda essa árvore, fomos constituídos com a essência de cada personagem dessa história"

Em seguida, pediu a seus alunos que fizessem uma árvore genealógica de sua família. O aluno João apresentou sua família, conforme a imagem abaixo.

a) Quantos trisavós João tem?
b) Considerando que tataravô é o pai do trisavô, quantos tataravós João tem? Explique como você e seu grupo pensaram.
c) Quantos são os bisavós dos bisavós do João. Explique como você e seu grupo pensaram.

Fonte: adaptado de Lopes (2013)

Objetivo da tarefa: com essa tarefa, espera-se que os alunos: (i) reconheçam um padrão de crescimento, estabelecendo uma relação entre a quantidade de pessoas em cada geração (avós, bisavós, trisavós etc) e a geração anterior; (ii) busquem uma generalização (próxima ou distante); e (iii) façam uso de uma notação própria para externalizar a forma de pensar.

Aspectos do pensamento algébrico a serem mobilizados: de forma inicial, os alunos podem desenhar uma árvore genealógica (tal como na Figura 3), a fim de compreender a tarefa e resolvê-la. Por meio dessa árvore genealógica (Figura 3), ampliando-a, os alunos podem responder a todos os itens da tarefa, mas o professor deve conduzir a discussão de modo que os alunos pensem de outras formas, buscando o reconhecimento de um padrão de crescimento (VALE, 2012). Os alunos podem perceber que, tomando o João como o ponto de partida, a quantidade de pessoas em uma geração (pais, avós, bisavós, trisavós, tataravós etc.) é igual ao dobro da quantidade de pessoas na geração anterior $Q_n = 2 . Q_{n-1}$, com, $Q_1 = 1$ e $n = 2, 3, 4,...$), o que se caracterizaria como uma *generalização próxima*. Indo além, os alunos podem associar o número de cada linha (primeira linha, os pais de João; segunda linha, os avós de João; terceira linha, os bisavós de

João e assim por diante) à quantidade de vezes que o número 2 está sendo multiplicado. Por exemplo, no caso dos bisavós de João (terceira linha), a quantidade bisavós seria $\underbrace{2.2.2}_{3\ vezes}$ chegando a uma *generalização distante*. Como ainda não conhecem a potenciação, não é esperado que utilizem o símbolo 2^3 (ou 2^n, no caso geral). Essa notação convencional deve ser abordada pelo professor somente ao final, quando for definir a nova operação.

Diferentemente da Tarefa 1, a Tarefa 2 permite ao professor, em momentos posteriores do ensino de potenciação, abordar o fato de que, se assumirmos que o João está na linha zero no esquema (Figura 3), temos $2^0 = 1$, Foi justamente por essa possibilidade (de chegar ao $2^0 = 1$) que, nesta sequência didática, decidimos deixar a Tarefa dos triângulos como sendo a primeira e a Tarefa da árvore genealógica como sendo a segunda. Enquanto, na Tarefa 1, o primeiro termo é $4^1 = 4$, na Tarefa 2 o primeiro termo é $2^0 = 1$, o que pode gerar dificuldades na aprendizagem dos estudantes.

PROPOSTA DE PLANEJAMENTO

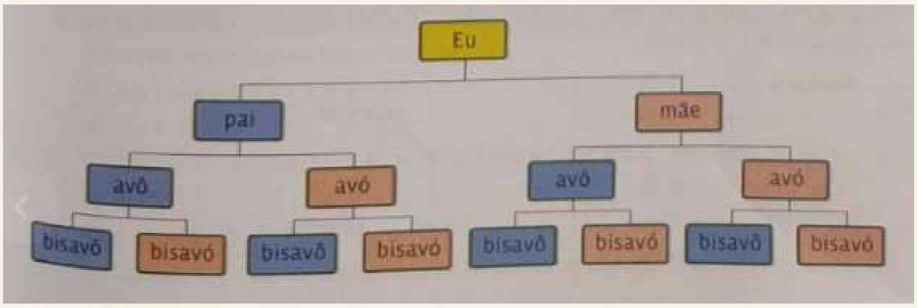
Do mesmo modo que no planejamento referente à Tarefa 1, sugerimos que essa proposta seja desenvolvida em 2 aulas de 50 minutos.

AULA 1

Início da aula: Dividir os alunos em pequenos grupos (sugestão: três ou quatro alunos). Entregar a Tarefa 2 e, se o professor considerar adequado, um esquema com a árvore genealógica (entregar um enunciado e uma árvore genealógica para cada integrante do grupo). Sugestão de tempo: 3 minutos (como os estudantes já tiveram a experiência das aulas anteriores baseadas no Ensino Exploratório, entende-se que não precisará explicar novamente sobre as etapas).

Introdução da Tarefa 2 (primeira fase do Ensino Exploratório). Ler o enunciado da Tarefa 2 com a turma inteira. Os alunos precisam, antes de tudo, compreender a ideia de uma árvore genealógica, caso ainda não conhecessem esse esquema. Uma estratégia que ajudaria os alunos a resolverem o item “a” da tarefa seria fazer um esquema (desenho) representando o João, seus dois pais (primeira linha), os dois pais de cada um dos seus pais (segunda linha) e assim por diante, conforme Figura 3.

Figura 3 – Esquema possível para resolver a Tarefa 2



Fonte: Lopes (2013)

Durante o planejamento coletivo realizado pelo grupo MEPPE, ficou decidido que não seria apresentado o esquema (Figura 3) aos alunos, eles que deveriam fazer, caso achassem necessário. No entanto, caso o professor compreenda ser necessário entregar aos alunos o esquema, pode ser uma ferramenta útil. Certificar-se de que os alunos compreenderam o enunciado. Se for preciso, releia a tarefa ou peça para algum aluno ler e dizer o que compreendeu do enunciado. Solicitar aos grupos que registrem por escrito as formas de pensar. Se houver mais do que uma forma de pensar, solicitar que escrevam todas elas na folha. Sugestão de tempo: 10 minutos (caso seja preciso explicar sobre o esquema da árvore genealógica).

Realização da Tarefa 2 (segunda fase do Ensino Exploratório). Enquanto os alunos realizam a Tarefa, o professor deve circular entre os alunos para *monitorar* o desenvolvimento e as formas de pensar. O professor deve buscar estimular o pensamento e promover diferentes formas de pensar a tarefa, fazendo questionamentos e cuidando da interação entre os integrantes do grupo. O professor não deve validar respostas dos alunos ou dar respostas que diminuam o nível cognitivo da tarefa. Enquanto circula, o professor deve observar as diferentes formas de resolver dos alunos e, mentalmente, mas com o apoio de um registro, *selecionar e sequenciar* algumas dessas formas para que, no momento posterior, possa solicitar que os alunos as apresentem. Sugestão de tempo: 27 minutos (ou mais, dependendo do quanto foi gasto na etapa anterior).

AULA 2

Discussão da Tarefa 2 (terceira fase do Ensino Exploratório). Na próxima aula, após os grupos finalizarem a realização da tarefa, o professor convidará um integrante de cada grupo para ir à lousa apresentar sua forma de resolver, um a um. Não precisa, necessariamente, chamar todos os grupos. Leve em consideração as práticas de selecionar e sequenciar as apresentações, pois, conforme apontam Stein et al. (2008), ao fazer seleções intencionais sobre a ordem em que o trabalho dos alunos será compartilhado, aumentam as chances dos professores alcançarem seus objetivos para a discussão matemática. A intenção é apresentar estratégias (corretas ou incorretas) distintas na lousa e *estabelecer conexões* matemáticas entre elas: como uma resolução correta pode ajudar a compreender uma resolução incorreta? Como que o grupo que resolveu por meio de figuras pode passar a compreender a forma como o grupo resolveu de maneira puramente numérica? Como que a maneira do grupo que generalizou pode auxiliar os alunos a perceberem a generalização? O professor precisa envolver os estudantes na discussão (não é um momento para o professor dizer o que é certo ou errado e fazer correções), incentivar a análise e a comparação entre resoluções, além de identificar e discutir os erros matemáticos. Se o professor perceber que os estudantes chegaram a uma generalização, estimular os alunos a pensarem sobre a necessidade de uma notação para representar a multiplicação de fatores iguais (estimular a pensar sobre a necessidade não é passar para eles a notação de potenciação, é deixá-los pensarem sobre isso e formularem notações próprias). Sugestão de tempo: 30 minutos.

Sistematização das aprendizagens matemáticas a partir da Tarefa 2 (quarta fase do Ensino Exploratório). Na sistematização das aprendizagens da Tarefa 2, o professor deve estabelecer relações com as aprendizagens da Tarefa 1. Espera-se que os alunos cheguem a uma *generalização (próxima ou distante)*, mesmo que ainda sem uma notação convencional, percebam que se trata de uma multiplicação de fatores iguais e percebam a necessidade de uma representação para essa multiplicação.

Após esse momento, o professor pode utilizar os resultados das Tarefas 1 e 2 para sistematizar e consolidar a *generalização distante*. Em seguida, o professor pode apresentar formalmente a operação de potenciação e a notação convencional. Nesse momento, o professor pode apresentar 4^n(com n um número natural maior do que 0) e (com n um número natural maior ou igual a zero) como sendo as respostas, respectivamente, da Tarefa 1 e da Tarefa 2. Sugestão de tempo: 20 minutos.

Exemplos de um grupo de alunos lidando com a Tarefa 2

Trazemos agora alguns exemplos de como uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado do Paraná lidou com a Tarefa 2. Os nomes dos alunos apresentados são fictícios, mas os diálogos são reais de sala de aula.

Exemplo 1

No primeiro exemplo, mostramos um caso em que um grupo de alunos começa a discussão sobre como resolver o item “a” da tarefa. Alguns alunos manifestam dificuldades e Brenda apresenta uma forma de pensar, buscando identificar o padrão de crescimento.

[1] Brenda: *Ô professora ...*

[2] Professora: *Vocês podem realizar em forma de conta, em forma de desenho, a forma que vocês acharem mais fácil.*

[3] Thiago: *Desenho é comigo!*

[4] Renato: *Tá, como que é a primeira?*

[5] Lúcia: *Quantos trisavôs João tem? Gente, João tem dois trisavôs.*

[6] Brenda: *Não ó, ele tem 2 pais, esses dois pais têm mais 2.*

[7] Renato: *Mas os pais não contam, quantos João tem?*

[8] Brenda: *Não peraí, deixa eu terminar de falar, ele tem 2 pais, um pai tem 2, a mãe tem 2, 4. Daí esses 4 tem mais 2, cada 2, 4 vezes 2 (...) é que eu não tô conseguindo explicar, mas, é 62, certeza. É tipo assim tem 1 pai, você tem 1 pai, seu pai tem 1 bisavô, tem 1 vô, por exemplo, então tem 2 vôs, sua mãe também tem 2, aí você vai contar os 2, 4 daí.*

Em [5], é possível perceber que Lúcia tem uma conjectura: “*João tem dois trisavós*”. Pode ser que Lúcia tenha pensado apenas nos pais de um dos bisavós de João. Após a fala de Lúcia, Brenda inicia sua explicação, em [6]. Só que para justificar sua maneira de pensar, Brenda inicia falando da quantidade de pais do João e de pais dos pais (isto é, de avós) de João. Ao que Renato, em [7], rebate o argumento de Brenda. Esta, por sua vez, tenta explicar melhor seu pensamento em [8], mas tem dificuldades (*é que eu não tô conseguindo explicar)* e parece errar nas contas *(mas, é 62, certeza)*. Pela forma de pensar manifestada por Brenda em [8], não seria possível chegar em 62 como resultado, uma vez que 62 não é uma potência de 2. Brenda logo percebeu seu erro nas contas e corrigiu, afirmando (ainda incorretamente) que seria 64.

O trecho acima ilustra o início de uma negociação entre os alunos, na busca de reconhecerem o padrão de crescimento. Nessa etapa inicial, diferentes erros podem surgir. Um erro de intepretação *(Gente, João tem dois trisavôs)*, um erro de multiplicação *(é 62, certeza)*, ou um erro em compreender a quantidade de vezes que se deve multiplicar por dois. Este último caso pode ser ilustrado pela própria fala de Brenda (em [8]), que percebe o padrão (multiplicar por dois de uma geração para a outra), mas não encerra a multiplicação por dois quando chega nos trisavós, chegando até o número 64. Isso fica ainda mais evidente quando outro aluno, ao questionar o argumento de Brenda, disse que “*mas, se for essa lógica, não tem fim, porque tem mais 2, depois...*”, indicando que o momento correto de parar a multiplicação por dois ainda não estava claro para o grupo.

Exemplo 2

No segundo exemplo, Brenda consegue explicar melhor sua forma de pensar aos demais alunos do grupo, mas estes continuam sem compreender. Um aspecto que aparece nesse excerto diz respeito ao fato de os alunos acharem que Brenda está se referindo à sua família, não à família de João, o personagem na Tarefa 2.

[9] Lúcia: *Vamos perguntar pra professora se ela entendeu essa lógica [da Brenda], prô (...), mas, é quantos trisavôs João tem.*

[10] Professora: *Oi, gente.*

[11] Renato: *A gente não conseguiu entender a lógica da Brenda.*

[12] Professora: *Qual que foi sua lógica, Brenda?*

[13] Brenda: *Ó, esses 2 pais que o João tem, cada um tem 2 avós, então 2 + 2 é 4. Então, ele tem, esses 4 avós, eles também, cada um, tem 2 também, 2 bisavôs, então 4 vezes 2, [igual a] 8. E esses 8 também tem mais 2, então 2 vezes 8, 16. Daí, esse daqui tem mais 2, 8 vezes 8, 16 vezes 16, 32 [...] Não, 16 vezes 2, vai dar 32. 32 vezes 2, vai dar 64.*

[15] Professora: *Vocês acham que ela está certa?*

Neste momento, em [13], a professora busca explorar o pensamento de Brenda a partir da interpretação dos demais integrante do grupo.

[16] Thiago: *Eu não entendi nada.*

[17] Professora: *A lógica que ela falou está certa? Vocês não entenderam o que ela falou? Eu entendi.*

[18] Lucia: *Mais ou menos, mais ou menos.*

[19] Renato: *Eu pensei que fosse os trisavôs que o João tem, porque é da família do João, não a dela, eu entendi meio assim.*
a interpretação dos demais integrante do grupo.

Em [19], Renato inclui um elemento importante para a discussão sobre a tarefa: o fato de que os alunos podem fazer referência à sua própria família ou a de um colega na hora de resolver a Tarefa 2. Isso fica ainda mais evidente no trecho a seguir:

[20] Professora: *Então, Brenda, faz o seguinte, escreve todo esse seu pensamento no papel, para os seus colegas entenderem. Pelo raciocínio dela que ela tá indo, ela está indo no raciocínio certo, mas escreve no papel, escreve para os seus amigos entenderem.*

[21] Thiago: *O, mas se for essa lógica, daí não tem fim, porque tem mais 2, depois...*

[22] Felipe: *Mas é até dar trisavô.*

[23]Professora: *Mas deixa eu te fazer uma pergunta, a sua família tem fim?*

[24] Thiago: *Ah não sei.*

[25]Professora: *Ué, quando vocês escutam a história dos avôs ou bisavós.*

[26] Felipe: *Eu não tenho trisavôs.*

[27] Thiago: *Nem bisavô.*

[28] Professora: *Mas, a gente já teve.*

[29] Felipe: *Nenhum vivo.*

[30] Professora: *Mas a gente já teve.*

[31] Thiago: *Mas eu nunca conheci.*

[32]Professora: *Isso, mas nós tivemos, entendeu? Então, faz parte da nossa história.*

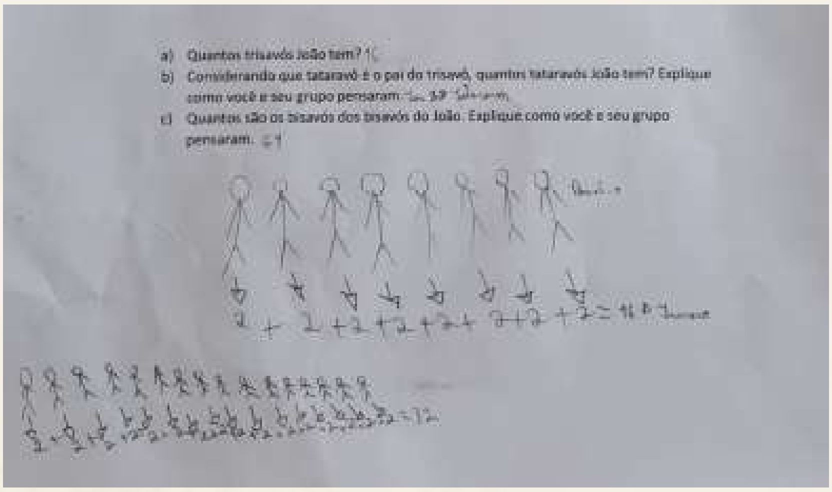
Para tentar auxiliar os alunos, a professora tenta fazer referência à família dos alunos (como em [23], [25] e [32]), mas os alunos rebatem dizendo que em suas famílias algumas dessas pessoas (bisavós, trisavós) não são mais vivos (em [29]).

Essa associação à sua própria família ou à família de um colega foi prevista no planejamento coletivo antes de desenvolver a aula na turma do 6º ano. No entanto, uma sugestão que fica ao professor que se interessar em utilizar essa tarefa é avaliar, de acordo com seus objetivos em sala de aula, a necessidade de trazer a discussão para a família dos alunos, uma vez que a composição familiar dos alunos pode ser muito diversa e a discussão pode fugir do foco da aula.

Exemplo 3

No terceiro exemplo, apresentamos três formas diferentes que os alunos resolveram o item “a” da Tarefa 2. Na primeira forma, o aluno resolveu utilizando a adição, tal como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Protocolo de resolução de um aluno utilizando a adição



Fonte: dados da pesquisa

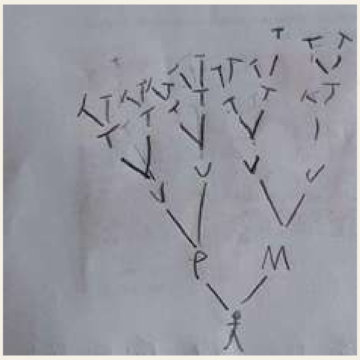
Na Figura 4, podemos perceber que o aluno considerou que João possui oito bisavós e que cada bisavô ou bisavó possui um pai e uma mãe. Assim, o aluno fez 2+2+2+2+2+2+2+2 = 16 e chegou à resposta para o item "a". O mesmo foi feito para o item "b", chegando à conclusão de que João possui 32 tataravós.

Na segunda forma, outro aluno resolveu direto pela multiplicação, como pode ser observado na fala a seguir:

[33] Thiago: *Eu fiz assim ó: 2 vezes 2, vai dar 4. Depois eu fiz 4 vezes 2, que vai dar 8. Depois eu fiz 8 vezes 2, que vai dar 16.*

Na terceira forma, um aluno utilizou o esquema (semelhante à árvore genealógica) para resolver, conforme a Figura 5.

Figura 5 – Protocolo de resolução de um aluno utilizando um esquema



Fonte: dados da pesquisa

Na Figura 5, vemos o esquema montado pelo estudante que o permite chegar à conclusão de quantos trisavós João possui. Esse esquema é uma ferramenta que pode auxiliá-lo na compreensão da tarefa, no entanto, por algum descuido, o aluno pode errar na representação e chegar a uma conclusão incorreta. Pela Figura 5, o aluno poderia chegar à conclusão de que João possui 14 trisavós, ao invés de 16, uma vez que a última linha de seu esquema desconsiderou os pais de um dos bisavôs.

As três resoluções aqui apresentadas podem levar a respostas corretas para a tarefa. No entanto, são respostas distintas e cabe ao professor, enquanto monitora os alunos, *selecionar, sequenciar e estabelecer conexões* entre essas resoluções, pois uma pode conduzir à outra e, assim, o professor pode, durante a discussão da tarefa na plenária, aproveitar essas diferentes formas de pensar para caminhar na direção de uma *generalização distante.*

Exemplo 4

No quarto exemplo, trazemos uma discussão do momento da sistematização, em que a professora introduz, a partir das resoluções das Tarefas 1 e 2, a notação de potenciação. Para realizar esse momento, a professora precisou criar um ambiente propício para promover a aprendizagem matemática (CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2013). No diálogo a seguir, podemos perceber que a professora instiga os estudantes se há outro modo de escrever a multiplicação de fatores iguais:

[34] Professora: *Que multiplica por o quê? Pelo mesmo número. Então esses mesmos números aqui, são fatores iguais, será que existe uma forma mais simples de eu pegar e ficar escrevendo 4 vezes 4 vezes 4? Será que tem uma mais simplificada pra eu escrever?*

[35] Felipe: *Sim, multiplicando.*

[36] Professora: *Mas será que não tem uma forma mais fácil de eu representar isso daqui?*

[37] Renato: *Vezes.*

[38] Lúcia: *Não, porque só tem o de adição, mas de multiplicação é difícil.*

Os alunos acreditam que não existe uma outra forma de resolver, sendo dito várias vezes por eles que a multiplicação seria a forma mais simplificada. Em [38] Lúcia ainda comenta sobre a operação de adição, se referindo a soma dos pares dos trisavós, sendo outra forma de resolver a Tarefa 2.

Como os estudantes não conseguiram indicar outras maneiras de representar essa multiplicação de fatores iguais, a professora seguiu para a introdução da notação de potenciação. Este é um momento importante, pois até então as resoluções e as tarefas não envolviam uma linguagem algébrica propriamente, no entanto, o pensamento algébrico já estava sendo manifestado, seja com as expressões numéricas ou pelos diagramas feitos pelos estudantes CANAVARRO, 2007) com o objetivo de reconhecer padrões e regularidades (PONTE, 2006) presentes nas tarefas

[39] Professora: *[...] existe uma forma mais simplificada de eu escrever isso daqui, ao invés de eu ficar repetindo, se chama: potência, o que que é essa potência? Vamos pensar aqui comigo, ó, o 4, quantas vezes o 4 repetiu? Aqui?*

[40] Felipe: *5 vezes.*

[41] Professora: *Então, pra eu conseguir resolver pela potência, o que vai virar potência é... o 4 é o número que sempre vai estar se repetindo, então, nós vamos chamar ele de base. A quantidade que esse número vai repetir, que foi o que nós vimos tanto no triângulo [referindo-se à Tarefa dos Triângulos] quanto nos trisavôs [referindo-se à Tarefa da Árvore Genealógica], então, o 4 repetiu quantas vezes aqui?*

[42] Brenda: *5.*

[43] Professora: *5! Então, esse 5 ele vai vir aqui em cima e nós iremos chamar ele de expoente. Se eu quiser representar tudo o que vocês escreveram, tanto na atividade do triângulo [Tarefa 1] como na atividade dos trisavôs [Tarefa 2], eu posso representar eles em forma de potência, porque quando ele aparece desse jeito , ele tá dizendo o quê? Que eu vou pegar o 4, que é o que vai repetir, que é a minha base, e repetir ele 5 vezes.*

Os alunos questionavam o porquê de ter números em cima de outros números. A professora segue com a explicação:

[44] Professora: *2 elevado a 4. Se eu quiser representar os bisavôs... A gente não está falando multiplicação por 2? Por 2, então nós temos que pegar quantos bisavôs do 2 pra representar o bisavô, ele vai ser elevado a quantos aqui? Olha, o 2 elevado a 4 dá 16, que foram 16 trisavôs. Se eu quero representar os bisavôs, vai ser 2 elevado a quantos? Por que quantos bisavôs vocês acharam? Foram 8 certo?*

Neste momento, a professora tenta dar significado aos elementos da notação relacionando com a Tarefa 2, mostrando a que se refere a base e o expoente. Outros exemplos de potenciação podem ser dados aos alunos, sendo solicitado a eles que falem os nomes e os números que se encontram na posição ora de base ora de expoente.

PALAVRAS FINAIS

Neste Produto Educacional, apresentamos uma sequência didática cujo objetivo é auxiliar o professor a introduzir o conceito de potenciação utilizando duas tarefas de natureza exploratória voltadas para o desenvolvimento do pensamento algébrico. A abordagem de ensino sugerida é a do Ensino Exploratório.

Ao professor que se interessar em trabalhar pela primeira vez com suas turmas na perspectiva do Ensino Exploratório, sugere-se algum estudo prévio, preparação e planejamento. A experiência vivenciada pela professora que realizou a pesquisa de mestrado que resultou neste Produto Educacional indica alguns desafios de se trabalhar na perspectiva do Ensino Exploratório. Tais desafios são compatíveis com o que está apresentado na literatura científica (por exemplo, ver Canavarro (2011)). Como menciona Canavarro (2011, p. 11), "O ensino exploratório da Matemática é, pois, uma actividade complexa e considerada difícil por muitos professores".

Listamos aqui quatro desafios que surgiram no decorrer da pesquisa, mas outros desafios estão muito bem descritos por Canavarro (2011).

O primeiro desafio envolve a seleção de tarefas exploratórias apropriadas e a antecipação das formas de pensar dos alunos ao resolveram essas tarefas. Muitas vezes, o professor planeja suas aulas de forma isolada, sozinho. Isso limita a percepção sobre as tarefas e a antecipação das diversas formas de pensar (corretas e incorretas), uma vez que não há diálogo e trocas de experiências com outras pessoas. Nesse sentido, seria pertinente a formação de um grupo de professores trabalhando colaborativamente, ampliando as compreensões a respeito das tarefas e das formas de pensar dos alunos.

O segundo desafio envolve a orquestração das discussões matemáticas coletivas, isto é, a busca por manter os alunos ativos e interessados e, ao mesmo tempo, evitando dar respostas que diminuam o nível cognitivo das tarefas. É necessário "Controlar as questões e comentários que se oferecem aos alunos durante a apresentação da tarefa e durante o trabalho autónomo de modo a não lhes indicar «a» estratégia a seguir" (CANAVARRO, 2011, p. 17).

O terceiro desavio envolve a gestão do tempo durante uma aula pautada no Ensino Exploratório. É comum ultrapassar o tempo planejado e isso ocorreu na pesquisa de mestrado da primeira autora. Dar voz aos alunos para discutirem entre si exige do professor habilidade para manter o controle do tempo e seguir com as fases do Ensino Exploratório. Como afirma Canavarro (2011, p. 17), é necessário "Gerir sem desperdícios todos os minutos para que na mesma aula se complete o trabalho em torno de uma tarefa, evitando ao máximo adiar para a aula seguinte a discussão e/ou a síntese dos conhecimentos produzidos pelos alunos em resposta à tarefa”. Um bom planejamento (antecipando diferentes formas de pensar dos alunos, selecionando algumas delas, sequenciando-as e estabelecendo conexões matemáticas) e usar essa perspectiva com mais frequência podem pode auxiliar o professor a gerir o tempo durante as aulas.

O quarto desafio envolve o cuidado com a sistematização das aprendizagens matemáticas dos estudantes. É importante que o professor consiga organizar as ideias apresentadas pelos alunos, sistematize-as e formalize-as de acordo com os conceitos matemáticos previstos. A organização dessas ideias começa com a prática de monitorar, orientando os alunos no registro de suas resoluções para facilitar o momento da discussão. Além disso, essa organização permeia também a ordem das apresentações dos alunos, para que haja uma discussão matematicamente mais coerente (STEIN et al., 2008). O professor tem papel crucial no durante todo o processo. Como afirma Canavarro (2011, p. 11), o Ensino Exploratório

> [...] não advoga que os alunos descobrem sozinhos as ideias matemáticas que devem aprender, nem tão pouco que inventam conceitos e procedimentos ou lhes adivinham os nomes. Muito menos advoga que isso acontece enquanto o professor espera tranquilamente sentado pelos rasgos iluminados e criativos dos seus alunos – não que estes não os tenham quando lhes é dada oportunidade.

Para concluir, desejamos que este material sirva de apoio a diversos professores, não apenas do 6º ano do Ensino Fundamental, mas, também, professores de outros anos escolares, inclusive dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A proposta de se trabalhar a potenciação a partir de aspectos do pensamento algébrico é central, pois, a nosso ver, permite que seja um trabalho conectado ao que já foi iniciado nos anos iniciais do Ensino Fundamental com reconhecimento de padrões de sequências numéricas e de generalização desses padrões. Dessa maneira, busca-se evitar um ensino de potenciação pautado pela apresentação da simbologia e pela explicação da técnica de operação, como comumente ocorre.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007.

CANAVARRO, A. P. Ensino Exploratório da matemática: Práticas e desafios. **Educação e matemática**, n.115, p.11-17, 2011.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. São Paulo: Gradiva, 2003.

ELIAS, H. R.; MARTELOZO, D. P. DA S.; GERETI, L. C. V.; LOPES, S. F. Conocimiento Especializado de Potenciación movilizado por docentes a partir de una Investigación Basada en Design. **Revista Paradigma**, 2022.

ELIAS, H. R.; GERETI, L. C. V., MARTELOZO, D. P. DA S.; SILVA, S. P. P. F. Tarefas exploratórias para o ensino de potenciação: manifestações do pensamento algébrico a partir de uma Investigação Baseada em Design. **Perspectivas da Educação Matemática**, 2023.

ELIAS, H. R.; GERETI, L. C. V.; LOPES, S. F.; SILVA, S. P. P. F. Investigação Baseada em Design: descrição de uma trajetória de pesquisa. In: Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 16, 2023, Lima, Peru. **Anais eletrônicos** [...], 2023.

LOPES, A. J. **Matemática 6o ao 9o** (Ensino Fundamental). Antônio José Lopes (Bigode). 1.ed-São Paulo: Scipione, 2013.

MARINS, A. S.; SAVIOLI, A. M. P. D.; TEIXEIRA, B. R. Potencialidades de práticas de ensino exploratório de Matemática para o desenvolvimento profissional de futuros professores de Matemática. **Revista Paradigma**, v. XLIII, Edición Temática n.1, 2022.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, Vol. XXII, Nº 2, 2013.

PAIAS, A. M. **Diagnóstico dos erros sobre a operação potenciação aplicado a alunos os Ensinos Fundamental e Médio**. 2009. 218f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo, 2009.

PAIAS, A. M. **Obstáculos no Ensino e na Aprendizagem do Objeto Matemático Potência**. 2019. 308f. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo, 2019.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

PONTE, J. P. Números e Álgebra no currículo escolar. In VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, A. P. (Orgs.), **Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores**. Porto: SEM/SPCE, 2006, p. 5-27.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.), **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p.13-27.

STEIN, M. K.; ENGLE, R.; SMITH, M.; HUGHES, E. Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. **Mathematical Thinking and Learning**, 2008.

VALE, I. As tarefas de padrões na aula de Matemática: Um desafio para professores e alunos. **Interacções**, Campo Grande, 20, p.181-207, 2012.