

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

LAÍS DE SOUZA ROCHA

**MATEMÁTICA E ARTE: CRIANDO POSSIBILIDADES DE APRENDIZADO
A PARTIR DE UM ESTUDO DO PERÍODO RENASCENTISTA**

CURITIBA

2022

LAÍS DE SOUZA ROCHA

**MATEMÁTICA E ARTE: CRIANDO POSSIBILIDADES DE APRENDIZADO
A PARTIR DE UM ESTUDO DO PERÍODO RENASCENTISTA**

**Mathematics and Art: creating learning possibilities from a Renaissance period
study**

Trabalho de conclusão de curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do título de
Licenciada em Matemática, Curso de Licenciatura em
Matemática da Universidade Tecnológica Federal do
Paraná (UTFPR).

Orientadora: Profa. Dra. Leônia Gabardo Negrelli

Curitiba

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

LAÍS DE SOUZA ROCHA

**MATEMÁTICA E ARTE: CRIANDO POSSIBILIDADES DE APRENDIZADO
A PARTIR DE UM ESTUDO DO PERÍODO RENASCENTISTA**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do título de
Licenciado em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 18/novembro/2022

Leônia Gabardo Negrelli
Doutora
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Simone Landal
Mestre
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Olga Harumi Saito
Doutora
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

CURITIBA

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à minha família, em especial aos meus pais Rosemeire e Carlos por todo carinho, apoio e compreensão durante a minha graduação e o desenvolvimento deste trabalho. Sem vocês, nenhuma conquista minha seria possível.

Agradeço à professora Leônia Gabardo Negrelli por ter aceitado ser minha orientadora e por ter orientado este trabalho com dedicação e gentileza, tornando engrandecedor o processo de desenvolvimento desta pesquisa.

Agradeço às professoras da banca examinadora, Simone Landal, Olga Harumi Saito e Angelita pelas considerações e contribuições que auxiliaram o andamento deste estudo.

Agradeço também a todos os meus professores da UTFPR que contribuíram direta e indiretamente na produção deste trabalho e em minha caminhada acadêmica.

Por fim, gostaria de deixar registrado, também, a minha gratidão a todos os meus colegas de curso pelo apoio e amizade.

RESUMO

Este trabalho surgiu do interesse em estudar o período renascentista na História da Arte e da Matemática, identificando nele elementos relevantes à formação e atuação do professor de Matemática. Para tanto destacou-se no referido contexto histórico o surgimento da perspectiva linear, trazendo para seu entendimento as contribuições dos arquitetos escultores italianos Filippo Brunelleschi e Leon Battista Alberti e do ilustrador matemático alemão Albrecht Dürer. Também por meio de um estudo bibliográfico identificou-se, no âmbito da Educação Matemática, dois outros estudiosos que contemplaram o tema da perspectiva linear no contexto da história da ciência e do ensino de geometria, respectivamente. Constatou-se que a perspectiva linear como um método de representação no plano contempla componentes de natureza matemática, como proporcionalidade e dimensão, que, quando considerados no contexto do ensino e da aprendizagem da matemática, podem proporcionar a aquisição de competências e habilidades presentes na BNCC para o Ensino Médio, tais como a aquisição do pensamento geométrico e a mobilização de estratégias conhecidas e formulação de conjecturas. No presente trabalho, dois desses componentes são identificados e explorados com o propósito de criar atividades que se configuram como possibilidades de aprendizado que entrelaçam Matemática e Arte no âmbito do Ensino Médio. Como resultado da investigação empreendida, são apresentadas duas propostas de atividades sendo que a primeira envolve a construção e o uso de um artefato proposto por Dürer, o perspectógrafo, e a segunda oportuniza a mobilização de conhecimentos e técnicas relativas à perspectiva, por meio da reconstrução do método de Alberti, em um ambiente dinâmico proporcionado pelo software GeoGebra. A pesquisa bibliográfica realizada permitiu entrelaçar aspectos experimentais e teóricos que subsidiam as propostas de abordagem didática do tema perspectiva linear tanto no Ensino Médio como em atividades de natureza extensionista em cursos de graduação.

Palavras-chave: ensino e aprendizagem de geometria, arte, renascença, perspectiva linear.

ABSTRACT

This work arose from the interest in studying the Renaissance period in the History of Art and Mathematics, identifying relevant elements to the formation and performance of a Mathematics teacher. To do so, the emergence of linear perspective stood out in that historical context, bringing to its knowledge the contributions of the Italian sculptor architects Filippo Brunelleschi and Leon Battista Alberti and the German mathematical illustrator Albrecht Dürer. Also, through a bibliographic study, two other scholars were identified within the scope of Mathematics Education who addressed the theme of linear perspective in the context of the history of science and the teaching of geometry, respectively. It was verified that the linear perspective as a method of representation in the plane includes components of a mathematical nature, such as proportionality and dimension, which, when considered in the context of teaching and learning mathematics, can provide the acquisition of skills and abilities present in the BNCC for High School, such as the acquisition of geometric thinking and the mobilization of known strategies and the formulation of conjectures. Two of these components are identified and explored to create activities that configure learning possibilities that intertwine Mathematics and Art in the High School context. As a result, two activities proposals are presented, the first one involving the construction and use of an artifact created by Dürer. The second one provides an opportunity to mobilize perspective techniques, through the reconstruction of Alberti's method, in a dynamic environment provided by the software GeoGebra . The bibliographic research carried out allowed to intertwine experimental and theoretical aspects that support the proposals for a didactic approach of linear perspective both in High School and activities of an extension nature in undergraduate courses

Keywords: teaching and learning geometry; art; renaissance, linear perspective.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Madonna de Magnificat de Sandro Botticelli. Florença, Itália, 1481 ..	14
Figura 2 - Nascimento de Vênus, de Sandro Botticelli. Florença, Itália, 1486....	15
Figura 3 - Comparação dos rosto de uma Santidade Católica e um Deusa Pagã	15
Figura 4 - Vaso em perspectiva, de Paolo Uccello. Florença, Itália, sec. XV	19
Figura 5 - A Anunciação, de Simone Martini. Florença, Itália, 1333.....	20
Figura 6 - Anunciação de Cestello, de Sandro Botticelli. Florença, Itália 1489 ..	21
Figura 7 - Adoration of the Magi, de Pietro Lorenzetti. Paris, França 1340	22
Figura 8 - Expulsion of the Money-changers, de Giotto di Bondone. Pádua, Itália 1304-1306	24
Figura 9 - Cúpula da Catedral Santa Maria del Fiore	27
Figura 10 - Representação do experimento de Brunelleschi	29
Figura 11 - Representação do resultado obtido com a o experimento de Brunelleschi.....	29
Figura 12 - A Santíssima Trindade, de Masaccio. Florença, Itália, 1427-1428 ...	31
Figura 13 - A Coroação da Virgem Enguerrand Quarton. Avinhão, França, 1453-1454	32
Figura 14 - Representação da analogia da janela de Alberti	35
Figura 15 – Triângulo visual	36
Figura 16 Formação da pirâmide visual pelos raios extrínsecos	37
Figura 17 – Representação dos raios visuais	38
Figura 18 - Representação da pirâmide visual	39
Figura 19 – Base da pirâmide formada pela intersecção do plano	39
Figura 20 - Representação do posicionamento relativo entre quadro, pintor e base quadriculada	41
Figura 21 - Representação da base quadriculada no plano do quadro do ponto de vista do observador	41
Figura 22 - A Anunciação, de Ambrogio Lorenzetti. Bolonha, Itália, 1344	42
Figura 23 - Regra dos dois terços.....	43
Figura 24 - Distorção das diagonais na regra dos dois terços	43
Figura 25 - Diagonais distorcidas no quadro A Anunciação de Lorenzetti.....	44
Figura 26 – Técnica de perspectiva de Alberti.....	45
Figura 27 - Estrutura auxiliar na tecnica de perspectiva de Alberti	46
Figura 28 - Diagonais conservadas nos quadriláteros da base	46
Figura 29 - Aplicação da base quadriculada	47
Figura 30 - Semelhança de triângulo	47
Figura 31 – Traços do esboço para a construção da perspectiva na obra Architecture de Jacopo Belline, 1950.	48
Figura 32 - Cinq hommes debout dans une architecture voutée en perspective, de Antonio Pisanello. Paris, França 1445.....	49
Figura 33 - Releitura da obra de Pisanello elaborada por Edgerton	50
Figura 34 -. Architectural Veduta. Francesco di Giorgio Martini. Berlin, Alemanha 1495.	51
Figura 35 - Escola de Atenas, de Rafael. Vaticano, 1510-1511	52
Figura 36 - Christ Handing the Keys to St. Peter. Pietro Perugino, Vaticano, 1481-1483	53
Figura 37 – A Última Ceia, de Duccio. Siena, Itália 1308- 1311.....	54

Figura 38 - Última Ceia, de Leonardo da Vinci. Milão, Itália. 1495-1498	54
Figura 39 - A perspectiva linear na obra Última Ceia de Leonardo da Vinci.....	55
Figura 40 - Retrato de Luca Pacioli, de Jacopo de' Barbari. Nápoles, Itália, 1495	57
Figura 41 - Perspectógrafo de Dürer	59
Figura 42 - Representação de uma mesa de tampo circular	61
Figura 43 - Representação geométrica da técnica de Alberti.....	65
Figura 44 - Representação da proposição 1	65
Figura 45 - Representação da proposição 2	66
Figura 46 - A secção de um hexágono é um hexágono.	67
Figura 47 - Sistemas de projeção	68
Figura 48 - Perspectógrafo construído.....	71
Figura 49 - Desenho em malhas quadriculadas de diferentes dimensões.....	72
Figura 50 - Desenho utilizando razão de proporcionalidade igual a 0.5.....	72
Figura 51 - Visualização de um objeto através do perspectógrafo.....	73
Figura 52 - Representação bidimensional do objeto observado	74
Figura 53 - Visualização de um ambiente através do perspectógrafo.....	74
Figura 54 – Identificação do ponto de fuga na representação de um ambiente	75
Figura 55 – Quadrângulo com um ponto de fuga.....	77
Figura 56 – Divisão do segmento base	77
Figura 57 – Construções auxiliares	78
Figura 58 – Ponto auxiliar e inserção de segmentos	78
Figura 59 – Pontos de intersecção	79
Figura 60 – Inserção das retas paralelas	79
Figura 61 – Destaque dos segmentos paralelos	80
Figura 62 - Malha quadriculada bicolor.....	80
Figura 63 - Construção de paredes na cena	81
Figura 64 - Outras possibilidades de construção	81

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	RENASCIMENTO E MATEMÁTICA	13
2.1	O contexto renascentista.....	13
2.2	A Matemática na Renascença Europeia	16
2.3	Criação e História da Perspectiva Linear	19
2.3.1	Brunelleschi e a descoberta da perspectiva linear	25
2.3.2	Leon Battista Alberti e a teorização da perspectiva linear	32
2.3.3	Albrecht Dürer e a utilização de um artefato	55
2.4	Dois estudos relacionando Matemática e Perspectiva	60
2.4.1	Perspectiva natural e perspectiva artificial	60
2.4.2	Geometria Projetiva e Perspectiva Linear.	63
3	MATEMÁTICA E ARTE EM CONTEXTOS EDUCATIVOS	69
3.1	Matemática e Arte no Ensino Médio	69
3.2	Criando possibilidades de aprendizagem	70
3.2.1	Utilização do perspectógrafo de Dürer para desenho em perspectiva ...	71
3.2.2	Utilização do GeoGebra para reconstrução do método de Alberti.	76
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
	REFERÊNCIAS.....	85

1 INTRODUÇÃO

A Renascença compreende um período entre a Idade Média e a Idade Moderna marcado por acentuadas mudanças na mentalidade da época. Com a queda do Sacro Império Romano Germânico e a contínua descentralização do poder da Igreja Católica, os ideais europeus ganharam novas constituições. Segundo Byington (2009) a Europa Ocidental, em sua nova realidade, além de enxergar na natureza a mais perfeita fonte de inspiração, busca agora se espelhar nos ideais da Antiguidade Clássica, estabelecendo essa como uma “segunda natureza”. Nesse sentido, os mais variados segmentos artísticos são também submetidos aos reflexos das mudanças da sociedade da época e é possível ver então o estudo da matemática sendo fortemente refletido nas produções artísticas da Renascença.

A Arte renascentista, ao buscar inspiração nos modelos clássicos greco-romanos, se distancia das produções realizadas até meados do século XIV. Por conta dos padrões de inspirações estabelecidos, é possível observar o rigor do método matemático regendo desde a composição das obras arquitetônicas de Filippo Brunelleschi (1377-1446) às famosas pinturas de Leonardo da Vinci (1452-1519). Os conceitos de ótica, perspectiva e harmonia são elementos que se destacam nas obras da época. Através dos aspectos levantados, é possível considerar um padrão de beleza artística ditado por parâmetros matemáticos.

Nesse contexto é possível situar o propósito deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) que foi investigar relações entre a Matemática e a Arte Renascentista por meio de um estudo bibliográfico de cunho histórico, com o intuito de identificar possibilidades de entrelaçamento entre temas abordados na formação inicial de um professor de matemática e demandas atuais da Educação Básica, em especial do Ensino Médio, no que diz respeito ao ensino de matemática.

A trajetória de estudo do tema escolhido para produção deste TCC foi iniciada no decorrer da disciplina optativa intitulada Filosofia da Matemática, ofertada remotamente no primeiro semestre de 2021 aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba (UTFPR-CT). Nessa disciplina, além de estudar aspectos relativos aos fundamentos históricos e filosóficos da matemática, cada estudante matriculado foi convidado a abordar filosoficamente um tema de seu interesse, situado no âmbito da matemática e seu ensino. Para aquela ocasião foi realizada uma pesquisa sobre Arte e

Matemática, cujos resultados foram socializados em um seminário do qual participaram os frequentadores da referida disciplina; também foi produzido um texto dissertativo e reflexivo a respeito do assunto. Por se tratar de um tema amplo, percebeu-se a necessidade de delimitar o foco da pesquisa a um período da história: o referente à Renascença Europeia foi o período escolhido.

Importante registrar que, anteriormente a essa vivência no contexto da formação inicial de professores, o tema escolhido para a produção desse já figurava entre aqueles que despertavam o interesse pessoal da autora desde a época em que cursava o Ensino Médio. Dentre os estudos realizados desde aquela época, sempre houve um apreço pela história do Renascimento e da Arte. Por isso, encontrar espaço para que o interesse antigo por um tema pudesse ser entrelaçado à demanda iminente de produção do trabalho de conclusão de curso, significa mais que o cumprimento de um requisito para a obtenção de um título.

O presente trabalho pretendeu, portanto, dar continuidade a estudos exploratórios vivenciados anteriormente, trazendo uma ampliação e aprofundamento do referencial teórico, bem como a oportunidade de empregar resultados desse estudo na produção de propostas didáticas.

Para tanto optou-se por um enfoque maior para a história da teoria da perspectiva linear, com o objetivo de compreender como foram desenvolvidos métodos de representação de figuras tridimensionais no plano e como estes métodos podem ser empregado em situações que oportunizem o aprendizado de matemática e a percepção de seu vínculo natural com outras áreas do conhecimento.

Desse modo, a partir de um estudo bibliográfico que contém História da Arte, com destaque para algumas obras e artistas, pretendeu-se trazer à tona entrelaçamentos entre esse estudo e a Educação Matemática, visando criar possibilidades para promover a educação matemática em parceria com a educação artística, favorecendo desse modo o desenvolvimento de um ensino mais criativo e atrativo, bem como uma aprendizagem eficaz.

Ao situar tal interesse de estudo no âmbito da matemática e seu ensino, para orientar a condução da pesquisa, as seguintes questões norteadoras foram formuladas: Que situações/condições de ensino um professor de matemática pode criar a partir de um estudo sobre a relação entre Arte e Matemática? Como utilizar elementos da História da Arte, em especial da perspectiva linear, como subsídios para a criação de possibilidades de aprendizagem de Matemática? Que atividades podem

ser propostas a estudantes do Ensino Médio ou a Licenciandos em Matemática a fim de explorar conceitos matemáticos presentes na perspectiva linear?

O objetivo geral deste trabalho está baseado na criação de possibilidades de aprendizagem entrelaçando Matemática e Arte no Ensino Médio. Para isso, o foco do trabalho está na identificação das conexões entre a Arte renascentista e o estudo da Matemática. Pontuando reflexos e mudanças produzidas na arte dos séculos XIV, XV e XVI, foram considerados os seguintes objetivos específicos:

- I. realizar um estudo bibliográfico sobre a Arte e a Matemática no período renascentista (séculos XIV a XVI), com ênfase na criação/surgimento da perspectiva linear;
- II. entrelaçar resultados do estudo indicado em I. com os componentes curriculares Arte e Matemática no Ensino Médio;
- III. elaborar propostas de atividades (possibilidades de aprendizagem) para abordar a história, o conceito e a técnica da perspectiva linear, com destaque para seus componentes matemáticos.

Essa pesquisa está fundamentada em um estudo bibliográfico multidisciplinar, buscando subsídio em autores das áreas de Matemática, Arquitetura, História e História da Arte, além de considerar documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para fundamentar sua adequação ao âmbito educacional.

Para finalizar esta introdução, segue uma descrição dos conteúdos dos capítulos seguintes. No capítulo 2 são apresentados estudos sobre a Matemática do período renascentista e, para isso, julgou-se necessário a realização de uma contextualização histórica prévia desse período, situando as principais características que moldaram os séculos que hoje são designados como Renascimento. Ainda no capítulo 2 são destacadas a criação e história da perspectiva linear, apresentando o desenvolvimento da técnica e salientando três artistas/estudiosos que tiveram grandes contribuições para esse campo matemático e artístico. Por fim, são apresentados dois estudos que contribuem com novos olhares para a temática principal do trabalho.

No capítulo 3 tem-se que o principal objetivo é contextualizar a relação entre a Matemática e a Arte no campo educacional. Para isso, há o destaque de determinações curriculares que regem a conduta multidisciplinar no Ensino Médio. Além disso, são apresentadas duas contribuições em forma de atividades práticas

que associam estudos matemáticos com a prática artística no campo da perspectiva linear.

Por fim o capítulo 4 é dedicado às considerações finais, nas quais além de uma retomada da trajetória de estudo percorrida são apresentados questionamentos que surgiram e são apresentados como um convite a novas investigações acerca dos temas tratados.

2 RENASCIMENTO E MATEMÁTICA

2.1 O contexto renascentista

Renascimento é o período histórico cuja caracterização está nas intensas mudanças artísticas, culturais, sociais e políticas ocorridas na Europa Ocidental entre meados do século XIV e o século XVII, marcando a transição entre a Idade Média e a Idade Moderna. O termo “Renascimento” refere-se à retomada dos padrões artísticos e culturais clássicos, através de uma reinterpretação dos legados greco-romanos (BURKE, 2008).

De acordo com Boyer (2012), a queda de Constantinopla em 1453 acarretou o declínio do Império Bizantino e, por esse motivo, acredita-se que refugiados que buscaram abrigo na Itália transportaram a bagagem cultural grega através de manuscritos, fazendo com que a Europa Ocidental entrasse em contato com obras da antiguidade clássica. Entretanto, é possível que o colapso de Constantinopla tenha acarretado um efeito oposto: a Europa Ocidental não dispunha mais de uma fonte precisa de materiais da antiguidade clássica. Contudo, independente das hipóteses citadas, em meados do século XV, ao que tudo indica, a Europa Ocidental voltava a dedicar-se à atividade matemática.

[...] na metade do século quinze, a atividade matemática estava outra vez aumentando. A Europa estava se recuperando do choque físico e espiritual da peste negra, e a invenção, então recente, da impressão com tipos móveis tornava possível uma difusão de obras eruditas muito maior do que em qualquer período anterior. (BOYER, 2012, p. 193)

Conforme Burke (2008), o movimento Renascentista, que resulta de avanços socioeconômicos, políticos e técnicos, relacionados com o desenvolvimento comercial, teve como uma de suas características mais expressivas o esforço, através de diferentes métodos, para reviver a cultura clássica, idealizando, assim, a Antiguidade. Esse novo cenário implica em um paradoxo que se destaca nos aspectos culturais do período: ao mesmo tempo em se apegava aos ideais clássicos, o homem renascentista permanece imerso nas questões pertinentes à fé católica. Segundo Pessanha (1984), a Renascença não significou uma ruptura imediata com a bagagem cultural proveniente do período medieval, mas se consolidou como um período de contradições internas no qual permaneceu entrelaçada com a herança da cultura medieval. Essas contradições impactaram diretamente a produção cultural, artística e científica da época.

Com a cautela sugerida por essas ressalvas, pode-se dizer que o Renascimento é um momento histórico-cultural complexo e heterogêneo, que se desenrola ao longo de aproximadamente dois séculos na Europa: o XIV e o XV. Mais do que mera “passagem” do medieval ao moderno, possui características próprias, surgindo como expressão de nova forma de vida, de pensamento, de criação artística — a partir de mudanças ocorridas na estrutura socioeconômica europeia. (PESSANHA, 1985, n.p.)

A contradição paradoxal da Renascença se reflete estruturada nas obras de um dos pintores mais conhecidos do período, Sandro Botticelli (1445-1510). Ao mesmo tempo que Botticelli retrata o sagrado através da figura de Virgem Maria, ele a representa com a beleza mundana e humana das italianas da época. Além disso, em suas obras as temáticas cristã e pagã coexistem, sendo expressas de forma similar, como afirma Pessanha (1984): “[...] percebemos que a serena beleza das Madonas é a mesma que reaparece no rosto da Vênus nascida das águas, deusa da beleza” (PESSANHA, 1984, n.p.).

As obras *Madonna de Magnificat* (Figura 1) e *Nascimento de Vênus* (Figura 2) ao expressarem, respectivamente, a santidade de uma figura cristã e o nascimento de uma deusa romana, evidenciam o paradoxo renascentista, que ao mesmo tempo em que é contraditório, é representado de maneira harmoniosa nas obras de Botticelli.

Figura 1 - Madonna de Magnificat de Sandro Botticelli. Florença, Itália, 1481



Fonte: WikiArt (2022).

Figura 2 - Nascimento de Vênus, de Sandro Botticelli. Florença, Itália, 1486



Fonte: WikiArt (2022).

Figura 3 - Comparação dos rostos de uma Santidade Católica e um Deusa Pagã



Fonte: WikiArt. Disponível em: <www.wikiart.org>
(Editado pela autora)

Nota-se, portanto, uma humanização de figuras sagradas representadas nas obras renascentistas. “E eis por que desaparece a postura hierática e solene da representação gótica das santas figuras: a santidade agora está imersa no mundo físico, na natureza no cotidiano.” (PESSANHA, 1985, n.p.). Além disso, o período marca uma ressignificação da relação do homem com a natureza.

Os novos paradigmas renascentistas que regem a relação homem-natureza estão pautados na curiosidade e apreço. Ao mesmo tempo que serve como objeto de estudo para pensadores como Giordano Bruno (1548-1600), a natureza está presente como plano de fundo e se funde ao sagrado nas retratações religiosas nas artes de Sandro Botticelli. Essa relação do homem com a natureza é conduzida através de novas dinâmicas, sendo que a razão humana não se limita mais apenas à contemplação, mas também permite ações do próprio homem sobre o mundo, como bem colocou Flores (2002) ao abordar a questão da perspectiva.

Burckhardt (1991) descreve os italianos como o primeiro povo moderno a enxergar beleza na natureza. Além disso, com a ascendência da nova concepção da

relação humana com a natureza, surge uma significativa mudança na produção cultural e científica. O autor ainda afirma que apesar de todo o contexto da inquisição punir aqueles que eram considerados blasfemadores, no século XV com nomes como Paolo Toscanelli (1397-1482), Luca Pacioli (1447-1517) e Leonardo da Vinci, a Itália estava no mais alto nível, entre a Europa Ocidental, no desenvolvimento da matemática e das ciências naturais, sendo assim reconhecida como o berço da Renascença.

O movimento surgiu nas cidades-Estados italianas e, graças a seus humanistas, artistas, matemáticos e engenheiros, banqueiros e homens de negócio, a península Itálica foi vanguarda dessa revolução cultural que dali se estendeu para o resto da Europa. (BYINGTON, 2009, p.8)

Percebe-se que, do ponto de vista da História da Ciência, o Renascimento se destaca como um período com contribuições importantes para o desenvolvimento da Matemática. Nesse cenário ocorreram grandes avanços técnicos e científicos, dentre os quais é possível destacar o surgimento da teoria da perspectiva linear - uma das maiores contribuições matemáticas do período, que se deu justamente pelo desejo de realizar representações da natureza esteticamente mais realistas.

2.2 A Matemática na Renascença Europeia

De acordo com Saito (2008), apesar do conhecimento matemático estar presente no cotidiano humano desde a Antiguidade, a motivação para utilizá-lo de forma a compreender as dinâmicas da natureza surgiu apenas na Renascença. É justamente a relação entre a natureza e a matematização presente no Renascimento Europeu que torna esse período único e revolucionário nas questões que abrangem as Ciências Exatas.

Um exemplo desta presença matemática está na busca pelo entendimento de fenômenos relacionados à astronomia. A expansão marítima dos séculos XV e XVI transformou as concepções acerca do planeta e os instrumentos óticos permitiram avanços nos conhecimentos sobre os cosmos. Nicolau Copérnico (1473-1543) propõe o modelo heliocêntrico, se opondo ao tradicional ideal geocentrista, defendido pelo pensamento aristotélico-tomista. A proposta não geocêntrica de Copérnico, não somente rejeita o modelo astronômico aceito e imposto na época, mas também contradiz os teólogos ao afirmar que a Terra não era estática.

Segundo Lopes (2014), Copérnico, ao propor a teoria heliocêntrica, se preocupa com a problemática dos movimentos dos planetas perante uma perspectiva matemática, não adentrando no campo da finitude do universo. Entretanto, o modelo astronômico proposto por ele possibilita a contestação sobre a finitude cósmica, deixando esta discussão em aberto. É Giordano Bruno, admirador das ideias de Copérnico, quem vai atrair a inquietação da Igreja ao declarar a infinitude do universo.

Segundo Bruno, o modelo heliocêntrico não somente determina a posição relativa entre o Sol, a Terra e os planetas, mas também altera a concepção de movimento. A tradição aristotélica-ptolomaica além de afirmar a centralidade da Terra no universo, impunha a concepção da finitude do cosmos. Para Bruno “[...] o modelo cosmológico aristotélico estabeleceu uma estrutura do cosmo a partir de certas condições hipotéticas falsas as quais foram, posteriormente, reforçadas pelo matemático Ptolomeu” (LOPES, 2014, p. 19).

Apesar de causar grande revolta por parte do Clero, o estudo de Copérnico não foi o primeiro a concluir um sistema astronômico não geocêntrico, e foi justamente por imposição da Igreja que esse pressuposto foi refutado durante a Idade Média.

É bem verdade que a hipótese não geocêntrica tivera antecedentes no pitagorismo antigo e que a universalidade das leis da física repetia tese platônica. Mas tais ideias haviam sido sufocadas, na Idade Média, com a oficialização pela Igreja do pensamento aristotélico-tomista. Por isso, o que renasce com pensadores renascentistas como Galileu é a linhagem platônica e neoplatônica, aliada — na Antiguidade como agora — ao matematismo pitagórico, em oposição à física qualitativista do aristotelismo. (PESSANHA, 1985, n.p.)

Ainda de acordo conforme Pessanha (1984), o Renascimento científico é de modo geral a retomada de concepções platônico-pitagóricas acrescentado da experimentação controlada e instrumentalizada.

Além dos estudos de Copérnico, os instrumentos óticos foram essenciais para os ensaios de Galileu Galilei (1564-1642). Segundo Thuillier (1994) Galileu Galilei afirmava que através da Matemática é possível compreender as estruturas da realidade. Com a luneta aperfeiçoada ele vê a falência da física aristotélica. Tem-se em Galileu uma relação forte entre a matematização e a experiência superando concepções aristotélicas, concepções essas que levaram a conclusão da existência de “lugares naturais”.

Os instrumentos matemáticos desenvolvidos e aperfeiçoados, marcam a experimentação como uma das tendências da ciência renascentista. Segundo Saito (2013), a confecção de instrumentos em meados do século XV, proporciona às

práticas matemáticas uma visibilidade mais ampla, além de fortalecer a relação de filósofos naturais e artesãos com a prática matemática. Ainda sobre a matemática produzida no século XV, o autor afirma: “Podemos dizer que os praticantes de matemática, em geral, tinham uma orientação mais empirista, no sentido de que as técnicas matemáticas por eles desenvolvidas eram aplicadas ao mundo real” (SAITO, 2013, p.5).

No campo da Arte e da Ciência, Leonardo da Vinci teve grande expressividade ao implementar estudos matemáticos às técnicas artísticas através de processos de experimentação. De acordo com Isaacson (2017) o pintor caracterizava sua experimentação como uma forma de compensar o fato de não ter recebido uma educação formal. Leonardo foi um discípulo de sua própria experiência e era adepto de uma concepção na qual a produção artística, assim como o método de conhecimento, era fundamentada em observações e experimentação. Nesse sentido, a estética artística de da Vinci está pautada na investigação da natureza. (Pessanha, 1985).

Leonardo não se limitou apenas à prática e, com a evolução de seus estudos, foi capaz de relacionar sua experimentação à teoria. Como consta em Isaacson (2017), no campo da perspectiva, da Vinci foi capaz de compreender a relação de teoria e prática:

Da mesma forma, seus estudos sobre a perspectiva linear lhe revelaram a importância de combinar experiência com teoria. Ele observou a maneira como os objetos pareciam menores conforme ficavam mais distantes, mas também usou a geometria para elaborar regras sobre a relação entre tamanho e distância. (ISAACSON, 2017, p. 200)

Ainda de acordo com o autor, entender a importância da relação entre a teoria e a prática tornou Leonardo da Vinci uma das mais importantes figuras intelectuais ocidentais, mesmo com mais de um século o distanciando da busca de Galileu pela ciência pautada na teoria e experimentação.

A experimentação presente nos estudos renascentistas revolucionou a prática científica da época. De acordo com Saito (2008) no período renascentista, a relação entre Matemática, natureza e técnica encontrou espaço de aplicação nos mais variados segmentos da atividade humana, estando presente em pinturas, esculturas, arquitetura e também na filosofia natural: “Mas, no que diz respeito especificamente à matemática, podemos dizer que foi o desenvolvimento da perspectiva linear, a partir

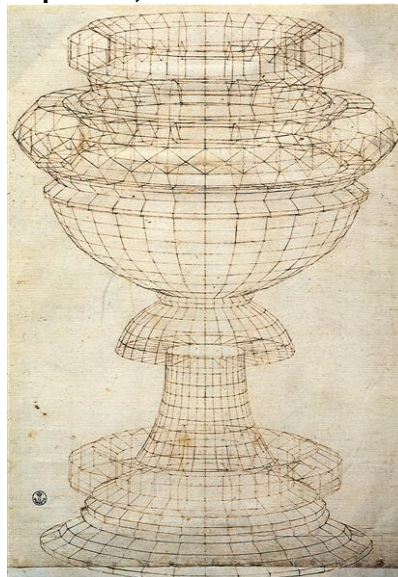
do século XV, que impulsionou e propiciou novos desdobramentos na geometria.” (SAITO, 2008, p. 388).

Percebe-se, portanto, que o desenvolvimento da ciência através da experimentação é característico na Matemática do período renascentista. De Leonardo a Galileu, o desenvolvimento teórico aliado à prática impulsionou muitos progressos em diversos campos de aplicação, resultando em uma base para diferentes segmentos do conhecimento humano. No campo artístico, conhecimentos e desenvolvimentos matemáticos foram de extrema importância para a arte da representação. Será apresentada a seguir uma visão das contribuições e da importância da experimentação para o desenvolvimento da perspectiva linear, sendo esta, a precursora da teorização desta técnica.

2.3 Criação e História da Perspectiva Linear

O cenário renascentista foi palco para o surgimento do conceito, técnicas e teorizações acerca de um dos elementos centrais deste estudo: a perspectiva linear, que reúne elementos da arte e da matemática com o objetivo de ser uma ferramenta que possibilita a construção da representação de objetos tridimensionais em uma superfície bidimensional. Ao olhar um desenho em perspectiva, o observador tem a sensação de profundidade de um objeto representado no plano, como pode ser constatado na obra Vaso em Perspectiva do pintor Paolo Uccello (1397-1475) (Figura 4).

Figura 4 - Vaso em perspectiva, de Paolo Uccello. Florença, Itália, sec. XV



Fonte: WikiArt (2022).

Ao se observar o desenho, a sensação de tridimensionalidade é captada mesmo sem a necessidade de uma análise técnica e aprofundada da obra. Como será pontuado mais à frente, não cabe a esse trabalho explorar questões anatômicas e fisiológicas que explicam o senso de profundidade do olhar humano. O objetivo principal expresso nessa pesquisa é o entendimento acerca da origem do desenvolvimento do desenho em perspectiva e as influências matemáticas em sua teorização.

Nesse sentido, quais questionamentos relevantes podem ser levantados ao se realizar uma análise em uma figura com aspectos tridimensionais? Em termos de comparação, em relação a disposições espaciais, quais elementos fazem com que uma obra seja mais realista do que outra? Essa comparação pode ser realizada ao se observar as Figuras 5 e 6, obras que retratam uma mesma cena: momento em que o arcanjo Gabriel anuncia à Virgem Maria que fora designada a ser mãe de Jesus. Tem-se que na primeira pintura, elaborada em um período pré renascentista, não existe uma preocupação com a representação da tridimensionalidade da cena. Já na obra de Botticelli, o cenário é composto de maneira a prevalecer disposições espaciais mais próximas à realidade.

Figura 5 - A Anunciação, de Simone Martini. Florença, Itália, 1333



Fonte: WikiArt (2022).

Figura 6 - Anunciação de Cestello, de Sandro Botticelli. Florença, Itália 1489



Fonte: WikiArt (2022).

Apesar de captada sensorialmente, questões sobre a composição espacial de uma obra constituem interessantes temas de estudo e reflexão, embora

[...] poucas vezes nos questionamos a respeito de quais dificuldades podemos encontrar na visualização e na representação destas imagens, ou melhor, raramente problematizamos sobre a origem de nossas verdades, sobre o modo de ver e representar as imagens tridimensionais. (FLORES, 2002, p.81)

É por conta do potencial para o debate acerca da importância da problematização da história de um elemento a ser estudado, principalmente na Educação Básica, que esse trabalho se propõe a abordar a origem do desenvolvimento da técnica da perspectiva linear. O estudo da história da perspectiva linear, aponta para os elementos da mentalidade renascentista, necessidade de representação da natureza e experimentação matemática que convergem no surgimento da técnica que revolucionou o modo como o espaço tridimensional é retrato em obras de arte.

A história da perspectiva linear se inicia na Itália no período renascentista. Como visto anteriormente, nos séculos XV e XVI a relação entre homem e natureza ganham novas configurações. Entretanto, antes de entender como diferentes aspectos renascentistas culminaram no desenvolvimento de uma técnica que combina Arte e Ciência, é interessante compreender como os cenários eram retratados bidimensionalmente no período que antecede as descobertas e estudos do *quattrocento*.

Segundo Flores (2002), as pinturas medievais tinham como principal preocupação estética uma representação hierárquica em detrimento da proporcionalidade. As obras de arte da época desempenhavam um papel de divulgação de passagens e ensinamentos religiosos, sendo um reflexo de uma sociedade imersa em uma conduta sacra.

Zaleski (2013) afirma que a Geometria como campo formal de estudo teve pouca expressividade no período marcado pelo fim do Império Romano e os séculos XII e XIII, sendo um conhecimento quase inexplorado e pouco aplicado. Ao analisar as pinturas medievais, além da ausência de aspectos geométricos, nota-se a inexistência de um ponto de vista central nas obras, sendo comum a presença de diversas cenas combinadas em apenas um quadro (Figura 7). Essas cenas eram compostas por objetos, pessoas e construções justapostas em um mesmo plano, guiando o olhar do observador em diferentes pontos no decorrer da leitura da obra, fazendo com que o foco da visão seja alterado em diferentes posicionamentos. (Flores 2002)

Figura 7 - Adoration of the Magi, de Pietro Lorenzetti. Paris, França 1340



Fonte: WikiArt (2022).

Tem-se que no período pré-renascentista, o espaço vazio entre os objetos não era considerado na composição de uma pintura. Na Baixa Idade Média, o pintor

Giotto di Bondone (1267-1337) se destacou ao se preocupar em representar o espaço de maneira mais realista em suas obras. Entre os anos de 1302 e 1305, pintando nas paredes da *Cappella degli Scrovegni*, Pádua-Itália, o pintor foi responsável por descrever passagens da vida de Jesus Cristo e da Virgem Maria. Giotto ainda se dedicava a retratar temáticas sacras, assim como os demais pintores contemporâneos à sua época, entretanto o motivo pelo qual suas obras se tornam um marco na História da Arte medieval é o fato de expressarem cenas onde a profundidade dos ambientes é valorizada. Gombrich (2000) descreve as produções de Bondone como algo inédito no período medieval. Para o autor, e reafirmado por Flores (2002), Giotto foi o responsável por redescobrir a arte da ilusão tridimensional no plano.

Agora a superfície não se limita mais a ser a parede ou o painel em que se inscrevem as formas de objetos e figuras isoladas. Ela assume um papel de plano quase transparente, através do qual se pretende que acreditemos estar a contemplar um espaço, mesmo que esse espaço esteja limitado por todos os lados. (FLORES, 2002, p. 89)

Giotto di Bondone é considerado uma figura importante dentro do estudo e aplicação de técnicas de construção de profundidade em obras bidimensionais. Apesar do pintor não estudar e aplicar técnicas de perspectiva linear, suas obras eram munidas de determinados mecanismos de pintura para criar uma noção de profundidade, construindo uma ilusão de tridimensionalidade, mesmo sem a utilização de métodos geométricos. Na pintura *Expulsion of the Money-changers* (1304-1306), Giotto expressa a tridimensionalidade do espaço ao trabalhar as nuances das cores em relação à exposição da luz e geração de sombras e através da disposição dos objetos na cena. Ao observar a obra, fica evidente que as técnicas de Giotto culminam na representação da profundidade, contudo seus conhecimentos não são matematicamente fundamentados.

Não se tinha um sistema fortemente baseado na Matemática, ou seja, uma unidade de medida que ditasse rigorosamente as distancias entre os objetos, mas um sentimento de profundidade, mais ou menos homogêneo, guiado pelo grande desejo de imprimir em suas pinturas a terceira dimensão (FLORES, 2002, p.89)

Figura 8 - Expulsion of the Money-changers, de Giotto di Bondone. Pádua, Itália 1304-1306



Fonte: WikiArt (2022).

Apesar de noções e técnicas para a construção da noção espacial serem constatadas em obras pré-renascentista, foi apenas no século XV que o conhecimento sobre perspectiva se consolidou como um conhecimento sistematizado, uma vez que novas configurações sociais surgiram e os estudos sobre a Geometria Euclidiana voltam a ganhar expressividade na Europa Ocidental.

No fim da Idade Média, a expansão comercial e urbana beneficiou a península itálica, principalmente cidades como Florença, Veneza e Gênova, ao favorecer trocas culturais, científicas e artísticas que delinearam e caracterizaram o homem humanista da Renascença. Além disso, o enriquecimento de nobres e burgueses proveniente do novo cenário comercial, alterou a dinâmica na produção artística da época. As obras de arte não eram mais destinadas apenas ao ensinamento do sagrado, como afirma Flores (2002) as produções artísticas passam a ser o alvo do interesse aquisitivo de burgueses, nobres e pessoas cuja base da riqueza está fundada na eclosão do mercantilismo.

Fazio (2011) constata que o epicentro dos impactos do emergente comércio europeu do século XV foi Florença, cidade de importantes banqueiros e comerciantes como a notória família Medici, uma das mais ricas e ascendentes do período renascentista. A consagração de Florença como o “berço” da Renascença se deu justamente pela influência dessas famílias, uma vez que elas incentivavam a produção de importantes monumentos e obras artísticas ao financiarem artistas como Donatello

(1386-1466), Michelangelo (1475-1564), Sandro Botticelli, Leonardo Da Vinci, além de investirem em projetos do arquiteto Filippo Brunelleschi.

Grande parte das obras de artes produzidas no *quattrocento*, passam a ter finalidade diferente da determinada no período histórico anterior. Em sua grande maioria, as obras ainda possuem temáticas religiosas, todavia, por serem encomendas de nobres e burgueses e por serem concebidas em um cenário cultural de valorização à natureza, as produções alcançam novos entendimentos, olhares e percepções. Nesse sentido, tem-se nas obras desse período uma inovação na assimilação do espaço tridimensional representado. Portanto, entender as novas concepções artísticas e científicas de um determinado período, exige, primeiramente, uma compreensão dos seus aspectos socioculturais que regem as condutas humanas.

A transitoriedade que marca o período renascentista em suas questões filosóficas, está presente também nas artes. A Renascença não significou uma ruptura imediata com o modo de representação medieval, mas sim uma nova forma de se interpretar o mundo concreto que passa a ser concebido na infinitude. Nesse sentido, um novo estilo de concepção de imagem surge pautado na unicidade do ponto de vista. A adoção dessa novidade auxilia a construção do efeito visual de profundidade nas pinturas.

2.3.1 Brunelleschi e a descoberta da perspectiva linear

Além das questões do mercantilismo e da relação homem-natureza, outro aspecto que marca o momento renascentista e a produção cultural da época é a contemplação e redescoberta da estética harmônica Clássica. De acordo com Burke (2008) a arquitetura desse período é o segmento artístico que mais permite observar o desejo da busca pelo ideal clássico. A Itália caracterizou um cenário propício à retomada do estilo greco-romano clássico, uma vez que monumentos como o Panteão, Coliseu e o Arco de Constantino resistiram parcialmente intactos.

Pela bagagem cultural clássica que ainda residia em Roma, diversos arquitetos como Filippo Brunelleschi, Donato Bramante (1444-1514), e Andrea Palladio (1508-1580) viajam para Roma com o intuito de estudar as ruínas da Antiguidade. Além das ruínas romanas, os arquitetos renascentistas contavam com o tratado escrito pelo romano Vitrúvio no século I a.C. Publicado apenas em 1486, a obra “Dez Livros Sobre Arquitetura”, comparava os componentes da arquitetura ao

corpo humano, destacando a simetria e a proporção como elementos importantes na arquitetura. Segundo Fazio (2011), os artistas renascentistas tinham, também, como fonte de estudo os textos do filósofo grego Platão. Inspirados com os escritos da Antiguidade Clássica, os arquitetos italianos tinham como objetivo o desenvolvimento de uma arquitetura baseada nas mais perfeitas proporções matemáticas.

Em busca de tal objetivo, eles se voltaram para as relações entre os números inteiros (como 1:1, 1:2, 2:3 e 3:4) expressas nas consonâncias musicais descobertas pelo matemático grego Pitágoras e concluíram que sua harmonia inata afetaria todos os que vivenciassem os espaços por elas determinados. Os humanistas estavam certos de que a ordem cósmica divina poderia ser expressa na terra por meio de tais proporções matemáticas, que estavam inevitavelmente relacionadas às medidas do corpo humano. (FAZIO, 2011, p. 305)

Filippo Brunelleschi foi um arquiteto renascentista, nascido em 1377 na cidade de Florença, filho de Giuliana Spini e Brunellesco di Lippo, homem de notória relevância política e econômica. Pouco se sabe sobre sua vida antes de 1418, ano em que venceu a competição para se tornar o arquiteto responsável pela cúpula da Catedral Santa Maria del Fiore, episódio que elevou seu nome a um dos mais célebres entre os renascentistas. Além de arquiteto, Filippo Brunelleschi é descrito como matemático, geômetra, escultor, pintor e engenheiro, tendo desenvolvido projetos e máquinas para o auxílio em construções. (FANELLI, 1980)

Como mencionado previamente, Filippo Brunelleschi foi o responsável pela criação de construções inovadoras para sua época, sendo a cúpula Catedral Santa Maria del Fiore (Figura 9) seu projeto mais importante, tornando-se um dos mais memoráveis símbolos do período renascentista. Também conhecida como Catedral de Florença, a igreja de Santa Maria del Fiore teve sua construção iniciada no ano de 1292, e desde o princípio previa-se a projeção de uma grandiosa cúpula em sua estrutura.

Figura 9 - Cúpula da Catedral Santa Maria del Fiore



Fonte: Vírus da Arte (2022).

Conforme Gombrich (2000), durante quase dois séculos nenhum arquiteto foi capaz de solucionar o dilema que era construir o zimbório entre os pilares que determinavam um vão de quase 46 metros de diâmetro sem nenhuma sustentação central. Assumindo a frente do projeto, Brunelleschi baseou-se em seus conhecimentos adquiridos nos estudos de estruturas romanas para concretizar um dos maiores feitos da arquitetura mundial. Além do plano arquitetônico, Brunelleschi foi o responsável por projetar a estrutura do maquinário utilizado para elevar toneladas de materiais de alvenaria para a construção da cúpula, mostrando um conhecimento avançado nos campos da Matemática e Engenharia.

Para diminuir a carga morta, criou uma casca dupla com nervuras radiais e concêntricas – uma estratégia encontrada em monumentos antigos, como o Panteão, e em obras florentinas medievais, incluindo o batistério da catedral próxima. Para reduzir a quantidade de estruturas temporárias, criou um cimbramento portátil que sustentava fiadas de alvenaria concêntricas até que se tornassem anéis comprimidos estáveis e, posteriormente, usou a alvenaria ascendente para sustentar os andaimes que, por sua vez, sustentavam mais um cimbramento. (FAZIO, 2011, p. 307)

O feito inédito de Brunelleschi é apenas um dos inúmeros destaques presentes em sua carreira. O início do século XV marca um importante momento na trajetória de Brunelleschi, pois em 1401 o arquiteto viaja para Roma, onde desenvolve grande parte do seu conhecimento sobre arquitetura e Matemática. Esses estudos não apenas embasaram o conhecimento de Brunelleschi de modo a torná-lo apto para o desenvolvimento do projeto de sua cúpula, mas também o influenciou na descoberta

que mudaria os padrões de pintura da época. Ao estudar e registrar as ruínas romanas, o arquiteto desenvolve a análise da perspectiva linear. Desse modo, Brunelleschi possibilitou um registro preciso de superfícies tridimensionais.

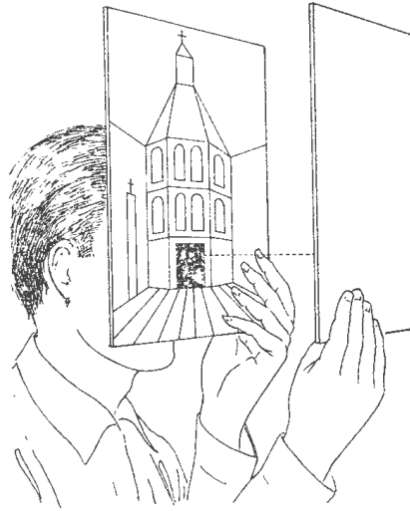
Ao desenhar cuidadosamente elementos repetitivos, como os arcos dos aquedutos, ele percebeu que as linhas horizontais paralelas convergiam para um ponto no horizonte e que os elementos do mesmo tamanho diminuía proporcionalmente conforme a distância. O desenvolvimento desse novo sistema de representação espacial afetou significativamente a arte, a arquitetura e o projeto urbano tanto durante como após o Renascimento. (FAZIO, 2011, p. 306)

Como afirma Thuillier (1994), e é fundamentado posteriormente por Flores (2003), de acordo com Brunelleschi é necessário que o observador assuma uma posição fixa e central em relação ao objeto observado. É então a partir desse ponto de vista estabelecido que é possível conceber os aspectos geométricos da representação da tridimensionalidade. Para demonstrar a eficácia da representação em perspectiva, Brunelleschi fez dois painéis os quais apresentavam, em superfícies planas, as ilustrações de duas construções florentinas: a *Piazza della Signoria* e o Batistério San Giovanni. Com esses painéis, Brunelleschi determina dois experimentos para demonstrar a acurácia da técnica da perspectiva desenvolvida por ele.

Os experimentos realizados pelo arquiteto são detalhados em sua biografia escrita por seu contemporâneo Antonio Manetti (1423-1497), a qual apresenta de maneira prática os panoramas relativos à perspectiva linear descobertos. De acordo com Edgerton (1975), o primeiro experimento muito provavelmente foi realizado antes de 1425, uma vez que Donatello e Masaccio (1401-1428) se apropriaram da nova técnica para a composição de suas obras *O Banquete de Herodes* (1427) e *A Santíssima Trindade* (1427-1428), respectivamente. Quanto ao segundo experimento, não há uma certeza sobre a época de sua realização, independentemente disso, Edgerton (1975) afirma que nas pinturas realizadas após o ano de 1425, pintores dependiam cada vez mais da técnica da perspectiva como subsídio teórico e prático.

Através dos experimentos, Brunelleschi demonstrou que os painéis por ele pintados coincidiam exatamente com os locais representados. Para tal demonstração, Brunelleschi posicionou um espelho na frente de um painel, e neste perfurou um pequeno orifício por onde o observador posicionaria os olhos (Figura 10).

Figura 10 - Representação do experimento de Brunelleschi



Fonte: Thuillier (1994, p. 64).

Ao se estabelecer a frente do monumento real, o espectador deveria olhar através do orifício o reflexo do painel pintado. Entretanto, como consta Flores (2003), para que a imagem refletida coincida com a construção real, é essencial que o observador se situe no mesmo local correspondente ao ponto de vista do artista ao elaborar a obra. Através desse dispositivo prático, a pessoa que utiliza o experimento terá o reflexo da pintura ao mesmo tempo encobrendo e “completando” a construção real (Figura 11).

Figura 11 - Representação do resultado obtido com a o experimento de Brunelleschi



Fonte: Flores (2003, p. 67).

Os painéis desenvolvidos por Brunelleschi infelizmente não resistiram ao tempo e foram perdidos. De acordo com Edgerton (1975):

Sua perda pode ser enfaticamente lamentada, além das considerações estéticas. Brunelleschi queria que suas duas demonstrações fossem admiradas, não como obras de arte em si, mas porque mostravam uma nova construção geométrica que poderia dar um sentido de unidade e consistência a qualquer imagem ilusória. Ele queria provar que, aplicando seu método, as convenções familiares do naturalismo poderiam ser superadas. (EDGERTON, 1975, p.129)

Apesar de determinar os aspectos que regem a caracterização da perspectiva linear, Brunelleschi se limita à natureza prática da representação, não elaborando uma teoria sistematizada que exprima seus estudos. Mesmo não sendo o responsável pela teorização, Brunelleschi com o seu experimento marca um momento importante na história da representação em perspectiva que Flores (2003) denomina de a “conquista da profundidade”.

O pintor Masaccio, entre os anos de 1427 e 1428, é apontado como o responsável por empregar pela primeira vez em uma pintura a representação da perspectiva central. Na igreja de Santa Maria Novella de Florença, Masaccio produziu o afresco A Santíssima Trindade (Figura 12), considerada a primeira obra de arte rigorosamente elaborada utilizando o ponto de fuga. Aqui faz-se necessário um esclarecimento, assim como pontua Edgerton (1975), o termo ponto de fuga é utilizado para se referir a técnica empregada por artistas renascentistas, entretanto essa expressão só viria a ser criada na era moderna.

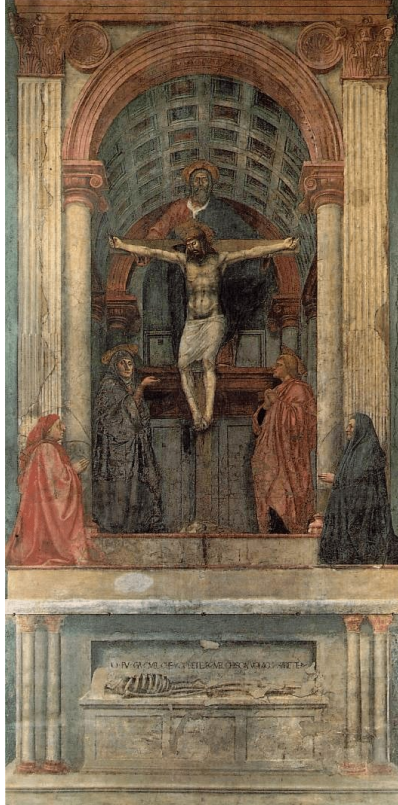
Voltando com enfoque na obra de Masaccio, Flores (2003) aponta uma possível controvérsia na qual Brunelleschi teria sido o responsável pela pintura da arquitetura da cena e Masaccio o autor das representações dos personagens. Entretanto, o que de fato pode ser constatado é a utilização dos recursos de perspectiva linear anos antes desenvolvidos por Filippo Brunelleschi.

Relacionando a perspectiva com o Renascimento, a obra é um tributo à racionalidade, com sua simetria e ordem austera. As duas figuras ajoelhadas orando, dos dois patrocinadores, formam a base de um triângulo que se fecha no topo da composição. Outros triângulos podem ser traçados a partir das cabeças dos personagens de Jesus, Maria e João. O ponto de fuga da composição localiza-se nos pés da Cruz de Cristo, sendo o ponto de vista do espectador, colocando-o como um participante da cena. (ALBUQUERQUE, 2017)

Tanto no experimento de Brunelleschi, já destacado previamente, quanto no afresco de Masaccio, um atributo importante das obras que carregam as características da representação da perspectiva do *quattrocento*, é a determinação do de um ponto de vista estático e único, diferente do conceituado nas obras medievais

abordadas previamente, as quais tinham uma característica heterogênea na construção do modo de observação da composição.

Figura 12 - A Santíssima Trindade, de Masaccio. Florença, Itália, 1427-1428

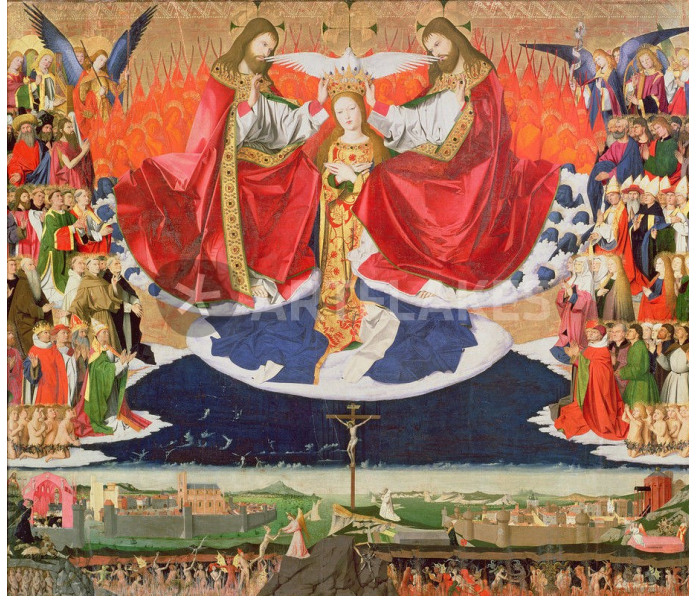


Fonte: WikiArt (2022).

É válido ressaltar que o novo método não representou uma unanimidade no modo como obras de arte foram produzidas durante os séculos da Renascença. Afinal, como já pontuado anteriormente, esse período significou uma era de gradual mudança entre a Idade Média e a Moderna e não um bloqueio à tudo que era produzido e difundido até então. Flores (2003) exemplifica esse fato ao expor a obra *Virgem com a criança* de Jean Fouquet (1420-1481), cuja característica de representação da perspectiva não segue o método central proposto por Brunelleschi (Figura 13).

Quando olhamos, temos o sentimento de nunca esgotá-la. Por mais que a olhamos, descobrimos sempre alguma outra parte que ainda não tínhamos nos dado conta. Não conseguimos contemplá-la no conjunto, nossos olhos têm que percorrer em todas as direções, vai dos lados para o centro e também abaixo do quadro. E, quando finalmente nos detemos na cena representada na parte inferior do quadro, ali sim, vemos o sinal daquilo que é a representação em perspectiva central. Ali nossos olhos irão encontrar o seu rumo e cair na profundidade do infinito. (FLORES, 2003, p. 72)

Figura 13 - A Coroação da Virgem Enguerrand Quarton. Avinhão, França, 1453-1454



Fonte: WikiArt (2022).

Como mencionado anteriormente, Brunelleschi não se comprometeu com a teorização de um tratado sobre a perspectiva linear, seus estudos se fundamentaram na experiência. Atualmente sabe-se do protagonismo de Brunelleschi no campo do desenvolvimento da perspectiva linear por conta dos registros realizados por terceiros sobre sua vida, entretanto o arquiteto nunca registrou estudos que documentaram seus métodos. Quem primeiro irá se dedicar a elaboração formal e sistematizada da teoria da perspectiva linear será Leon Battista Alberti (1404-1472), o qual inspirado no experimento de Brunelleschi determina a ideia de interseção da pirâmide visual.

2.3.2 Leon Battista Alberti e a teorização da perspectiva linear

Leon Battista Alberti nasceu em 14 de fevereiro de 1404 na cidade de Gênova, na Itália. Filho de um florentino exilado, Alberti estudou nas cidades de Pádua e Bolonha e só em 1428, ano que marca o fim do exílio de sua família, viria a conhecer e morar na cidade natal de seu pai. Pintor, escultor, escritor, arquiteto e um dos mais importantes teóricos do *quattrocento*, Alberti por anos se dedicou, também, aos estudos de Matemática e Física, como afirma Grayson na introdução que precede os escritos de Alberti no livro *Da Pintura*. (ALBERTI, 1999)

Procurando embasar suas áreas de atuação nas ciências exatas, Alberti escreveu três tratados com enfoque na escultura, arquitetura e pintura. *Della Pintura* (traduzido para o português como *Da Pintura*) foi escrito entre os anos de 1435 e 1436 e apresenta os estudos desenvolvidos pelo teórico sobre a perspectiva aplicada na

pintura. A técnica na qual Alberti se aprofunda e desenvolve em seu tratado é uma herança das demonstrações desenvolvidas por Brunelleschi. Contudo, apesar de seus métodos serem derivados dos estudos do famoso arquiteto florentino, Alberti os desenvolveu de maneira única, destacando seus termos teóricos (EDGERTON, 1975). O procedimento sistematizado por Alberti determinaria o rumo da técnica de perspectiva dos anos que o sucedeu, segundo Grayson, ainda na Introdução do tratado de Alberti “[...] antecipou, se não determinou diretamente, o desenvolvimento dessa arte em pleno Renascimento” (ALBERTI, 1999, p.69).

No prólogo que antecede os três livros que compõem o tratado, Alberti dedica sua escrita a Filippo Brunelleschi, a quem demonstra notável admiração. Em suas palavras, Alberti exclama a Brunelleschi contemplação aos estudiosos da Antiguidade e, ao mesmo tempo que os diferencia exaltando suas virtuosidades, compara artistas como Donatello, Masaccio e o próprio arquiteto da famosa cúpula de Florença aos grandiosos romanos clássicos.

Por isso passei a acreditar, de acordo com o que ouvia de muitas pessoas, que a natureza, mestra das coisas, tinha se tornado velha exaurida e já não produzia nem gigantes nem engenhos extraordinários e admiráveis, como nos tempos de sua juventude e esplendor.

Mas, depois que, de um longo exílio em que os Alberti envelheceram, voltei a esta minha pátria, a mais bela entre as demais, compreendi que muitos homens, mas principalmente em ti, Filippo, no nosso queridíssimo escultor Donato em outros como Nencio, Luca e Masaccio, existe engenho capaz de realizar qualquer obra de valor e de rivalizar com qualquer artista antigo e famoso. (ALBERTI, 1999, p.71)

Após o prólogo destinado a seu amigo arquiteto, Alberti divide seu tratado em três livros. Alberti explicita o fato de a obra ser escrita por um pintor e destinada a pintores, o autor se aventura no campo da Matemática com o claro objetivo de embasar o ofício da pintura nas ciências exatas e colocar recursos matemáticos à disposição de artistas.

Alberti explora a geometria euclidiana, detalhando seus pormenores de modo a elucidar esse campo matemático para o público-alvo de seu tratado. Em diversas passagens da obra, pode-se encontrar explicações que remetem aos tópicos mais primários da geometria euclidiana. Nesse sentido, tem-se que o autor parte do esclarecimento de definições dos entes primitivos da geometria para posteriormente descrever seu método de pintura. Tendo em mente os objetivos de Alberti ao longo de sua escrita, é interessante observar o modo como a Matemática é descrita em uma linguagem compatível com o público que é destinada, de modo a não ser apenas um

estudo conceitual, mas também um subsídio teórico para uma área que tem como finalidade a aplicação.

Digo inicialmente que devemos saber que o ponto é um sinal que não podemos dividir em partes. Chamo aqui sinal qualquer coisas que esteja na superfície, de modo que o olho possa vê-la. As coisas que não podemos ver, ninguém negará que elas não pertencem ao pintor. O pintor só se esforça por representar aquilo que se vê. Os pontos, se em sequência se juntarem um ao lado do outro, produzirão uma linha. Para nós a linha será uma figura cujo comprimento pode ser dividido, mas será de largura tão tênue que não poderá ser cindida. (ALBERTI, 1999, p.76)

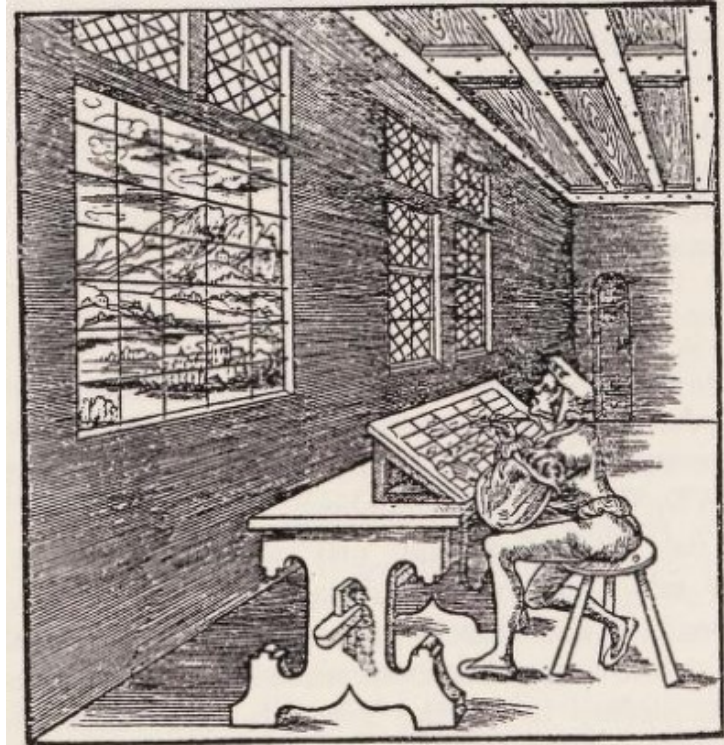
Neste trabalho, procurou-se entender e destacar os aspectos da Matemática os quais contribuem como subsídio teórico para o desenvolvimento de uma prática artística. Assim como Alberti em seu tratado, as propostas de atividades que serão apresentadas no capítulo 3 também contemplam entes geométricos primitivos para o desenvolvimento da perspectiva linear.

Todos os entes geométricos detalhados na obra de Alberti são a base para a descrição de algo maior: a apresentação do método da pirâmide visual. Antes de adentrar propriamente no estudo sobre a técnica, é válido ressaltar o modo como Alberti apresenta seus primeiros passos ao desenvolver uma pintura, relacionando seu procedimento metaforicamente a uma janela aberta para o cenário que será retratado. Essa janela tem como função enquadrar e limitar o que estará dentro da sua representação.

Inicialmente, onde devo pintar, traço um quadrângulo de ângulos retos, do tamanho que me agrada, o qual reputo ser uma janela aberta por onde possa eu mirar o que aí será pintado e aí determino de que tamanho me agrada que sejam os homens da pintura. (ALBERTI, 1999, p. 94)

A partir da analogia realizada pelo autor, entende-se que a tela onde será retratada a pintura deverá ser, na realidade, uma espécie de janela por onde o pintor observa o cenário a ser representado em perspectiva. Ou seja, entre o observador e o objeto retratado, existe a pintura que representa o que o pintor está observando em seu determinado posicionamento.

Figura 14 - Representação da analogia da janela de Alberti



Fonte: Edgerton (1975, p. 119).

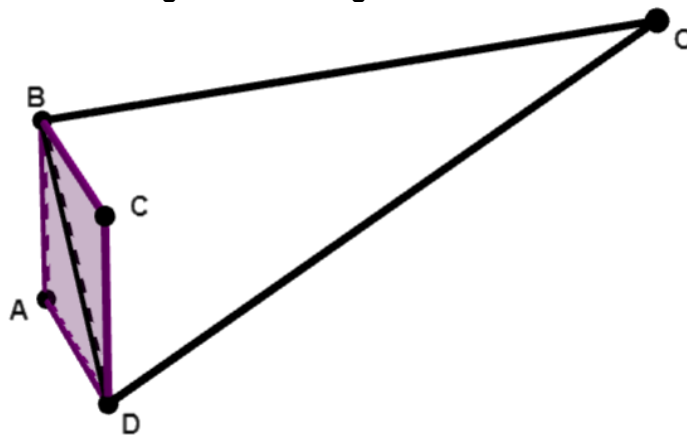
Estabelecido o modo como o pintor limita seu campo visual, pode-se, agora, entender a relação entre a visão e os objetos. Para Alberti, o sentido visual é captado pelo olho através dos raios visuais. Segundo o autor renascentista, “[...] nós imaginamos esses raios como se fossem fios extremamente tênues, ligados por uma cabeça de maneira muito estreita como se fossem um feixe dentro do olho.” (ALBERTI, 1999, p.79). Alberti faz, então, a distinção dos raios visuais de acordo com a força e ofício em três tipos: extremos ou extrínsecos, médios e cêntricos.

Os raios extremos ou extrínsecos são aqueles que partem do olho do observador e atingem a orla dos objetos e, segundo Alberti, determinam a base de mensuração da superfície observada, nos quais auxiliam os olhos do observador a medir distâncias como um par de compassos. Ou seja, através dos raios extremos o observador tem a noção de distância entre dois pontos: “A altura de baixo para cima, a largura da mão direita à esquerda, a espessura entre o que está perto e o que está longe e qualquer mensuração ou dimensão que se faça com a vista, para isso nos servimos dos raios extremos.” (ALBERTI, 1999, p. 81). Nesse sentido, Alberti determina que em tudo que se observa, tem-se a produção de um triângulo, na qual a quantidade vista é a base e os raios extremos são os lados do triângulo. Portanto,

tendo dois vértices situados no objeto, o terceiro vértice do triângulo situa-se no olho do observador, onde há a intersecção dos raios visuais.

Exemplificando essa constituição, na Figura 15 tem-se um quadrado ABCD e o ponto O que representa o olho de um observador. Do ponto O partem dois raios visuais, que no desenho são representados pelos segmentos OB e OD. Com os vértices O, B e D tem-se a formação de um triângulo visual, cuja base é o segmento BD (diagonal do quadrado ABCD). Segundo Alberti, o ângulo oposto a base do triângulo se situa dentro do olho e a seguinte regra é proposta: quanto mais agudo for o ângulo, menor parecerá a quantidade vista. “Daqui se conhece a razão por que uma quantidade muito distante chega a parecer quase não maior que um ponto” (ALBERTI, 1999, p.81) De fato, em um triângulo na geometria euclidiana quanto menor a amplitude de um ângulo, menor será a medida de seu lado oposto, ou seja, quanto menor a amplitude do ângulo BOD, menor será o segmento BD observado, conseqüentemente, pode-se afirmar que mais longe estará o observador.

Figura 15 – Triângulo visual



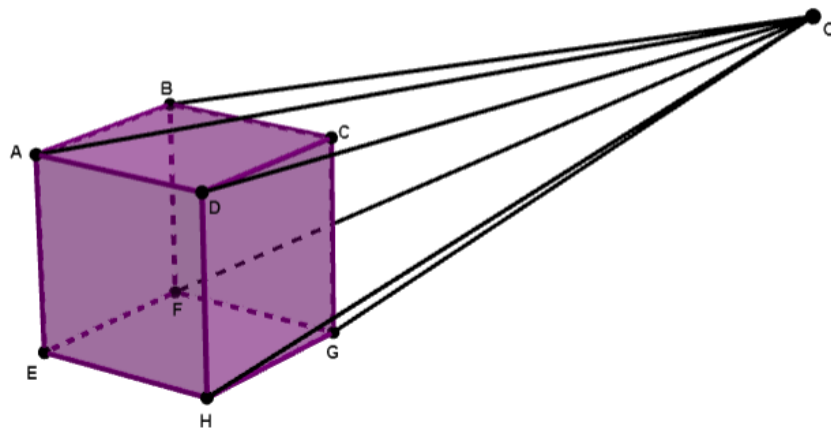
Fonte: Autoria própria (2022).

Portanto, a função dos raios extremos está fundada na medição de distância. Além disso, tem-se que esses raios atingem toda a orla do objeto, tocando um nos outros contornando sua superfície. O conjunto dos raios extrínsecos formam o que Alberti denomina de pirâmide visual.

Vou descrevê-la à minha maneira. A pirâmide é afigura de um corpo no qual todas as linhas retas que partem da base dessa pirâmide é uma superfície que se vê. Os lados da pirâmide são aqueles raios que chamei de extrínsecos. O vértice, isto é, a ponta da pirâmide, está dentro do olho, onde está o ângulo das quantidades. (ALBERTI, 1999, p. 82)

A Figura 16 exemplifica a formação dessa pirâmide ao se observar um cubo, o ponto O representa o olho do observador ao olhar o cubo ABCDEFGH. Tem-se que os lados da pirâmide são constituídos pelos raios extremos que chegam do ponto O ao cubo, nesse caso, por fins de praticidade visual, apenas os segmentos das arestas da pirâmide foram representados.

Figura 16 Formação da pirâmide visual pelos raios extrínsecos



Fonte: Autoria própria (2022).

Mais adiante será explorada a importância da formação da pirâmide visual na prática de Alberti, porém antes é necessário compreender o papel dos demais raios visuais.

A segunda categoria de raios mencionada por Alberti é a dos raios médios, os quais, diferentemente dos raios extrínsecos, partem da superfície do objeto e atingem o olho do observador. O autor descreve que ao partirem da superfície que tocam, esses raios se apropriam das cores e luzes de seu ponto de partida, desse modo a principal função é carregar as apropriações das cores gerando o sentido visual do observador.

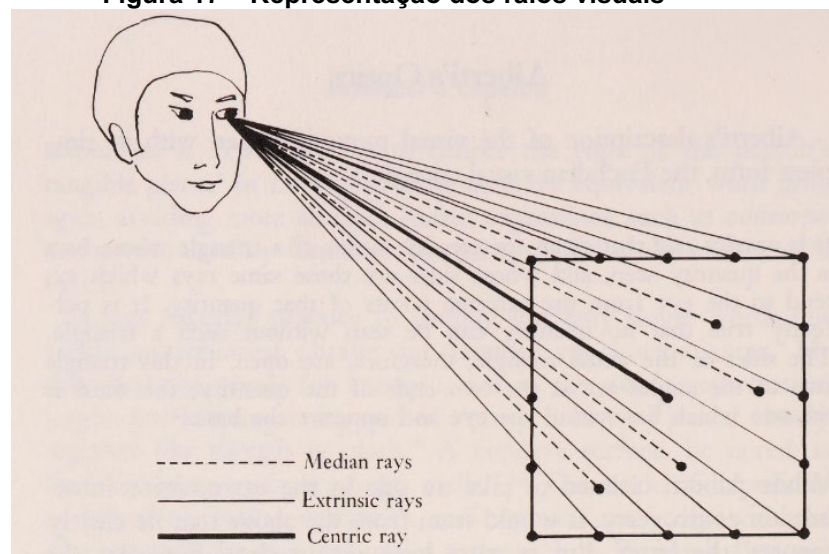
Tem-se que, independentemente do ponto em que o raio visual médio seja interrompido, a cor que ele carrega não se altera. Entretanto, Alberti afirma que conforme a distância aumenta, os raios visuais tendem a enfraquecer. Nesse sentido, ele propõe a seguinte regra: “[...] quanto maior for a distância, mais embaçada parecerá a superfície vista.” (ALBERTI, 1999, p. 83). Esse conceito será importante para a representação pictórica em profundidade mais realista.

Por fim, tem-se o raio cêntrico, denominado por Alberti como o “príncipe dos raios” devido sua importância. No raio cêntrico reside a função de atingir a superfície em um ângulo de 90° e, segundo o autor, é apenas ele que faz com que nenhuma

quantidade vista seja maior do que de fato é na realidade. Para Alberti, o raio cêntrico é o mais penetrante e ativo dos raios, sendo o último a abandonar o objeto visto. Nesse sentido, cria-se a regra: “[...] mudada a distância e a posição do raio cêntrico, imediatamente parece alterada a superfície. A distância e a posição do raio cêntrico contribuem muito para a certeza da visão.” (ALBERTI, 1999, p. 84).

Na Figura 17, tem-se a ilustração que representa a dinâmica de cada raio visual no momento que um indivíduo observa um objeto.

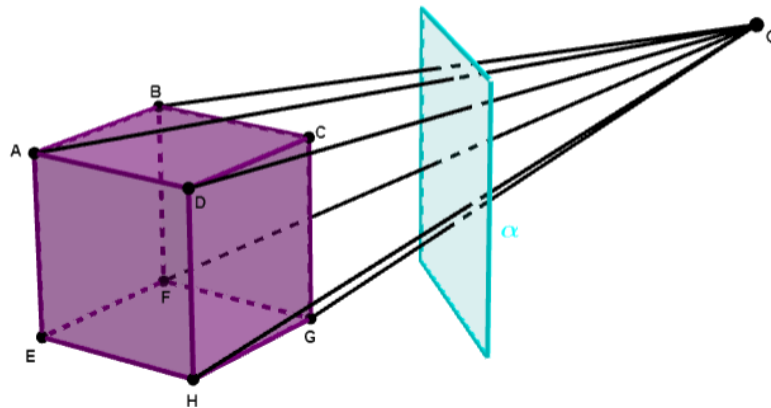
Figura 17 – Representação dos raios visuais



Fonte: Edgerton (1975, p. 84).

Estabelecida a descrição dos raios visuais e a formação da pirâmide visual, pode-se entender a relação desta com a pintura. Para Alberti, a pintura deve ser a interseção da pirâmide visual por um plano. Este plano refere-se então a tela onde será reproduzida a pintura. Na Figura 18, tem-se a pirâmide visual, já construída anteriormente, e um plano que a intersecta. O plano intersecta os raios visuais e funciona como a janela por onde o pintor observa o objeto e reproduz aquilo que vê.

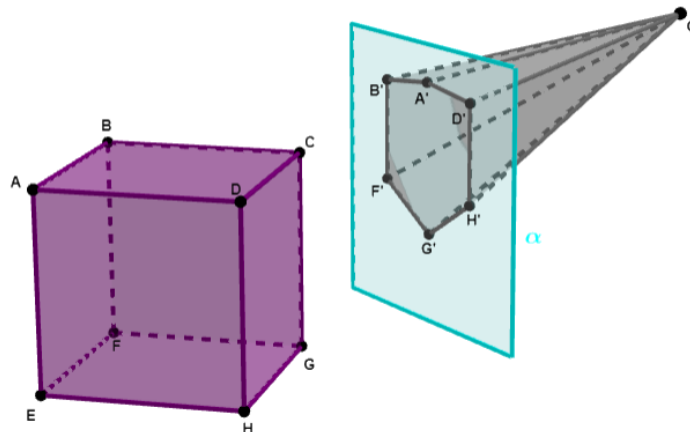
Figura 18 - Representação da pirâmide visual



Fonte: Autoria própria (2022).

Os raios visuais extremos representados na figura anterior partem do ponto O e atingem os vértices A, B, D, F, G e H do cubo. Na Figura 19, pode-se observar o plano intersectando esses raios determinando a projeção no plano dos vértices da pirâmide visual pelo pintor. Os vértices A', B', D', F', G' e H' são determinados pela projeção dos vértices A, B, D, F, G e H respectivamente. Ou seja, os pontos de partida dos segmentos de reta dos raios visuais devem ser representados no plano na posição ocupadas por suas projeções.

Figura 19 – Base da pirâmide formada pela intersecção do plano



Fonte: Autoria própria (2022).

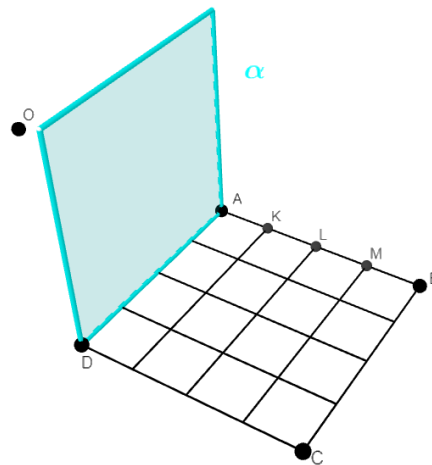
Acerca do entendimento de Alberti sobre a pintura, é importante, ainda, pontuar dois aspectos. O primeiro é em relação à multiplicidade de pirâmides visuais formadas no olhar. Um corpo ou uma cena possuem diferentes superfícies em sua composição, com isso tem-se em um só olhar a formação de uma pirâmide composta por outras pirâmides visuais menores. Segundo Alberti, um pintor só atingirá a excelência quando compreender as conjunções e relações de proporção inerente às

diferentes superfícies. Já o segundo aspecto a ser pontuado é quanto à posição do observador. O ponto de vista do pintor é considerado de extrema importância no processo de composição da pintura. Segundo Alberti, “[...] cada pintor quando, inspirado pela natureza, põe-se à distância do que está pintado como que à procura do vértice e do ângulo da pirâmide de onde pensa que pode contemplar melhor as coisas pintadas.” (ALBERTI, 1999, p.87)

Após compreender a teoria da captação do sentido visual e a relação desta com a pintura, pode-se analisar como Alberti determina a composição de sua arte baseado naquilo que observa. Para instruir o método de composição da tela, Alberti propõe uma técnica baseada na determinação de uma malha quadriculada. Flores (2005), ao realizar um estudo acerca da representação tridimensional no plano, na qual considera aspectos relativos ao ensino de geometria, aponta que a utilização dessa base que imita um tabuleiro de xadrez tem como objetivo guiar o pintor quanto ao posicionamento dos elementos na obra. Segundo a autora, para que o artista renascentista conseguisse reproduzir sua pintura o mais próximo possível da realidade, era necessário a utilização de algum tipo de regra ou método, mesmo que rudimentar. Para essa demanda, um chão ou um teto quadriculado apresentava-se como uma estratégia de auxílio.

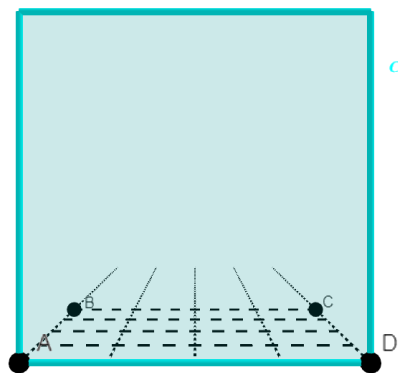
Na Figura 20, tem-se a imagem que descreve o posicionamento do olhar do pintor (ponto O), o plano vertical que representa o quadro e a base quadriculada delimitada pelos pontos A, B, C e D. Nesse posicionamento, os segmentos de reta paralelos AB e DC são perpendiculares ao segmento de base do plano, logo são ortogonais ao plano, desse modo, todos os outros segmentos paralelos à AB e DC também são ortogonais ao plano. Nesse tipo de representação, os prolongamentos dos segmentos AB e DC e dos segmentos paralelos a eles convergem para um único ponto, o qual posteriormente será denominado de ponto de fuga central (FLORES, 2005) (Figura 21).

Figura 20 - Representação do posicionamento relativo entre quadro, pintor e base quadriculada



Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 21 - Representação da base quadriculada no plano do quadro do ponto de vista do observador



Fonte: Autoria própria (2022).

Anterior ao método descrito por Alberti, métodos fundamentados na Matemática para a determinação de uma base quadriculada já vinham sendo utilizados na tentativa de representações mais realistas de cenários na pintura. Panofsky (1993) aponta o quadro *A Anunciação* (Figura 22) pintada em 1344 por Ambrogio Lorenzetti (1290-1348) como uma importante obra na História da Arte, uma vez que pela primeira vez em uma pintura, os segmentos do cenário ortogonais ao plano do quadro se dirigem a um único ponto. De acordo com o autor, a utilização da técnica evidencia o conhecimento que Lorenzetti tinha em relação à Matemática e simboliza a descoberta do infinito.

Porém, outro aspecto relevante deste quadro reside no sentido totalmente novo que confere ao plano de fundo enquanto tal. Esse plano deixa de ser apenas a superfície inferior de uma caixa espacial, fechada à direita e à esquerda, cujos limites são definidos pelos cantos do quadro. Torna-se a superfície do fundo de uma faixa de espaço que, embora esteja delimitada

atrás pelo tradicional fundo Dourado e, na parte da frente, pelo plano do quadro, se pode considerar como um prolongamento arbitrário para qualquer dos lados. E, o que talvez seja mais significativo ainda, nota-se que o plano de fundo nos permite a leitura clara dos tamanhos, bem como as distâncias dos corpos nele disposto. (PANOFSKY, 1993, p. 54)

Figura 22 - A Anunciação, de Ambrogio Lorenzetti. Bolonha, Itália, 1344



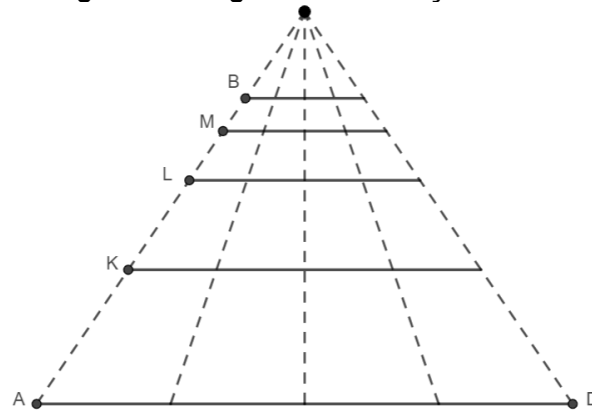
Fonte: WikiArt (2022).

Uma vez determinada a propriedade que rege o comportamento dos segmentos ortogonais, é necessário determinar o posicionamento dos segmentos transversais, ou seja, os segmentos paralelos à base do plano do quadro. Na técnica empregada por Lorenzetti, a propriedade Matemática que fundamenta a representação das paralelas, baseia-se na progressiva redução do distanciamento desses segmentos. Segundo Flores (2005), a diminuição da distância entre as paralelas se dava através de um coeficiente de uma progressão já conhecida. Usualmente, o coeficiente escolhido era $\frac{2}{3}$ e, por isso, atualmente, essa técnica é reconhecida como “regra dos dois terços”.

A regra dos dois terços consiste na diminuição das distâncias, tendo como base o afastamento entre a linha da base do plano do quadro e a primeira paralela. A partir desse afastamento, as demais distâncias entre as paralelas se reduzem progressivamente a um coeficiente constante de $\frac{2}{3}$. Na Figura 23 é possível observar a aplicação da regra dos dois terços em uma malha quadriculada. Nesse sentido, sendo AD o segmento da base do plano do quadro, tem-se que:

$$\overline{KL} = \frac{2}{3} \overline{AK}; \overline{LM} = \frac{2}{3} \overline{KL}; \overline{BM} = \frac{2}{3} \overline{LM}.$$

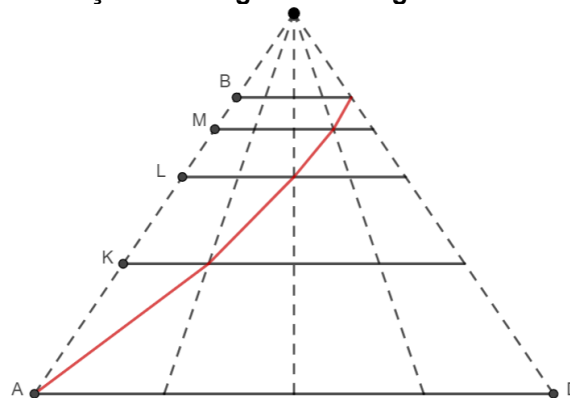
Figura 23 - Regra dos dois terços



Fonte: Autoria própria (2022).

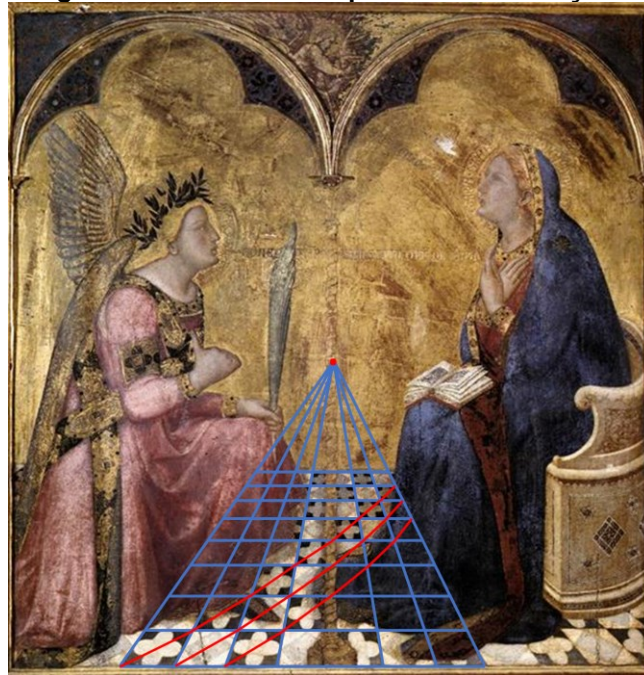
O princípio adotado por Lorenzetti é alvo de críticas de Leon Battista Alberti uma vez que essa estratégia era limitada na representação das diagonais. De acordo com o pintor se o primeiro segmento é colocado ao acaso, mesmo que as outras linhas sejam determinadas seguindo uma progressão com coeficiente fixo, não seria possível saber com precisão onde o vértice da pirâmide visual está posicionado. Na Figura 24 é possível analisar como a regra não conserva a disposição das diagonais, distorcendo o alinhamento entre elas. Essa problemática pode ser claramente observada na obra *A Anunciação*, já apresentada anteriormente (Figura 25).

Figura 24 - Distorção das diagonais na regra dos dois terços



Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 25 - Diagonais distorcidas no quadro A Anunciação de Lorenzetti



Fonte: Adaptado de Wikiart (2022).

Apesar de ultrapassada em relação a técnica de Alberti, a qual será explorada a seguir, é importante enfatizar a relevância do estudo de diferentes tipos de representação, mesmo que rudimentares. Variadas experiências e técnicas apresentam a realidade do desenvolvimento de um estudo. Para a determinação de métodos cada vez mais precisos, são necessárias progressivas investigações que só evoluem, pois, tentativas anteriores foram realizadas.

[...] o importante nisto tudo é ver que para se chegar a um procedimento tido como “correto” foram necessárias tentativas, discussões, descartes e, sobretudo, que a configuração de uma base quadriculada em profundidade, na qual serão representados personagens e objetos da cena, constituiu-se como um destes primeiros modos de representação tridimensional. (FLORES, 2005, p. 84)

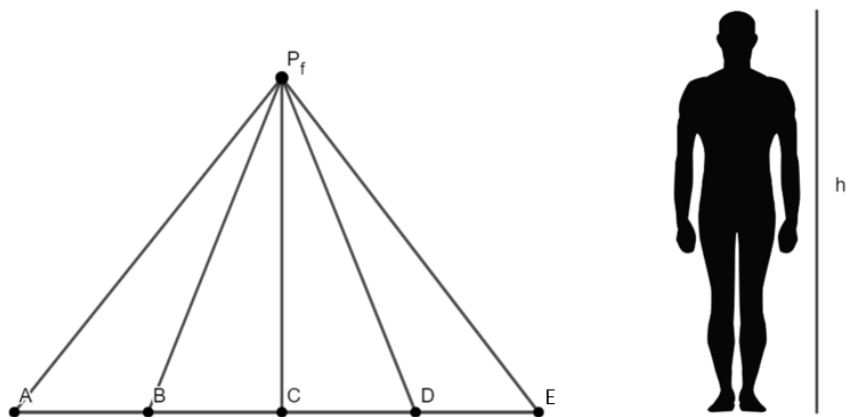
Voltando ao enfoque do método descrito no tratado Da Pintura, Alberti propõe sua técnica que promete ser mais precisa e acurada. Para determinar o a construção do plano horizontal quadriculado, Alberti propõe o seguinte procedimento que será apresentado na Figura 26: após estabelecer o quadrilátero do tamanho desejado que limitará a obra, determina-se a altura que os homens irão assumir na pintura e, em seguida, divide-se sua altura em três. A altura estipulada para o homem é significativa para o desenvolvimento da perspectiva, uma vez que o segmento da base do plano deverá ser dividido em partes iguais relativas à terça parte dessa altura. Após a divisão do segmento base, determina-se o melhor posicionamento para o ponto de

fuga, a regra aqui é estabelecer esse ponto de modo a não ultrapassar a altura do homem. Na Figura 26, tem-se o segmento AE representando o segmento da base do plano da tela. Esse segmento é dividido em partes iguais conforme $\frac{1}{3}$ da altura determinada para o homem. Nesse sentido, sendo h a altura do homem na pintura,

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \frac{1}{3} h.$$

Além disso, tem-se que o ponto de fuga P_f está localizado à uma altura inferior à h em relação ao segmento base.

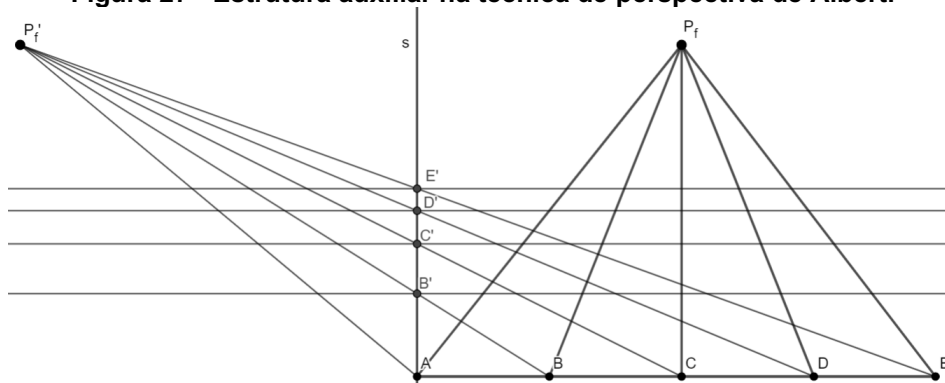
Figura 26 – Técnica de perspectiva de Alberti



Fonte: Autoria própria (2022).

Para determinar as transversais é necessário criar uma estrutura auxiliar que será apresentada na Figura 27. Estabelecido o ponto de fuga, traça-se uma reta perpendicular ao segmento da base (d). Deve-se, então, determinar um novo ponto (P_f') na composição, esse ponto deve estar situado na mesma altura do ponto de fuga em relação ao segmento base e deverá se distanciar da reta perpendicular traçada anteriormente na mesma medida que os olhos do pintor se distanciam da tela. Definida a estrutura auxiliar, traça-se segmentos partindo de P_f' até cada divisão estabelecida no segmento base, ou seja, até os pontos A, B, C, D, e E. A partir das interseções dos segmentos criados com a reta d (A' , B' , C' , D' , E'), constrói-se retas paralelas ao segmento da base do plano.

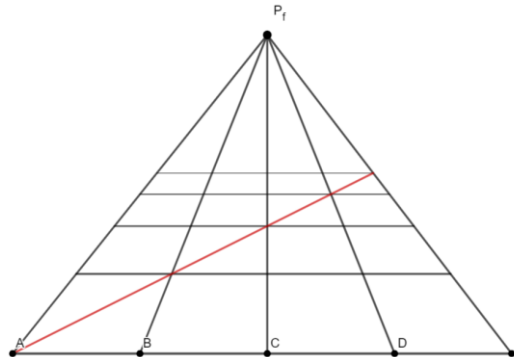
Figura 27 - Estrutura auxiliar na tecnica de perspectiva de Alberti



Fonte: Autoria própria (2022).

Com a determinação das retas paralelas à base do plano, pode-se traçar os segmentos transversais. Com esse método de construção, consta-se que as diagonais dos quadriláteros vistos em perspectiva são conservadas e, de acordo com Alberti “Se uma linha reta contiver o diâmetro de vários quadrângulos descritos na pintura, é indício para mim de que foram descritos corretamente.” (ALBERTI, 1999, p.97).

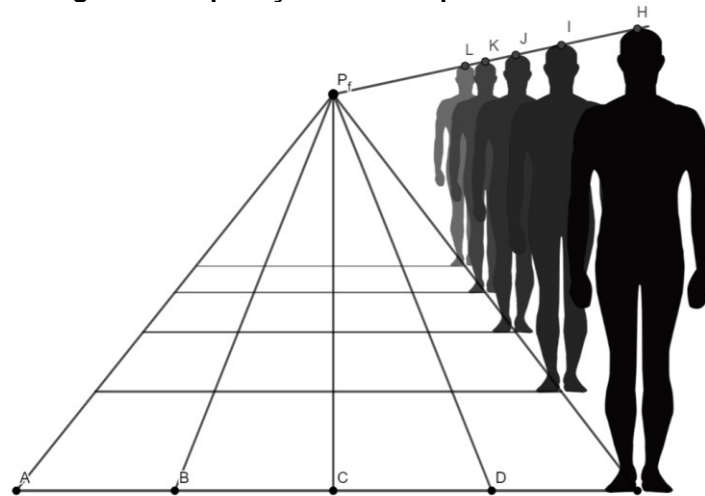
Figura 28 - Diagonais conservadas nos quadriláteros da base



Fonte: Autoria própria (2022).

A seguir, é exposto uma aplicação que mostra a aplicação do traçado quadriculado na base da pintura como ferramenta de auxílio na determinação da diminuição do tamanho e posicionamento dos objetos na cena. Conforme o personagem se “afasta” na imagem, menor é seu tamanho e sua nitidez, assim como prevê Alberti em seu tratado.

Figura 29 - Aplicação da base quadriculada

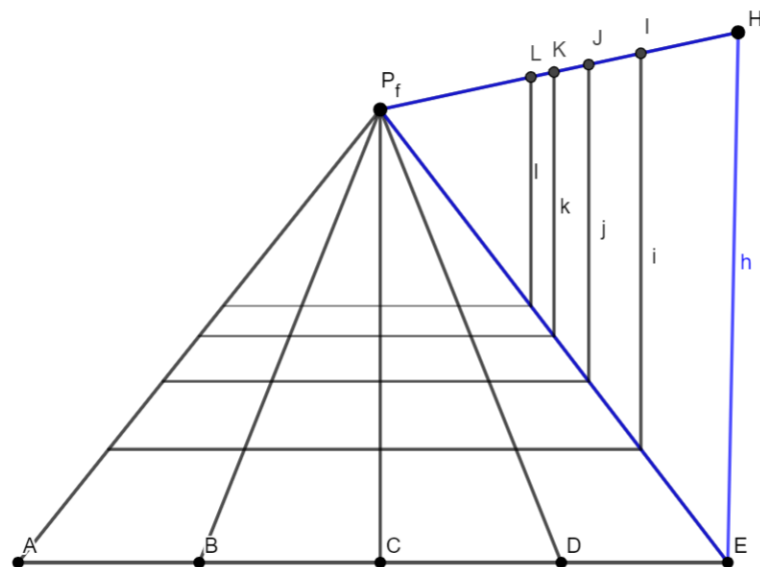


Fonte: Autoria própria (2022).

O tamanho que o personagem assume em sua posição é facilmente determinado através da relação de semelhança de triângulos (Figura 30). Como a altura inicial do homem é igual a h , tem-se no triângulo P_fHE a seguinte relação:

$$\frac{h}{i} = \frac{\overline{P_fH}}{\overline{P_fI}}; \frac{h}{j} = \frac{\overline{P_fH}}{\overline{P_fJ}}; \frac{h}{k} = \frac{\overline{P_fH}}{\overline{P_fK}}; \frac{h}{l} = \frac{\overline{P_fH}}{\overline{P_fL}}$$

Figura 30 - Semelhança de triângulo



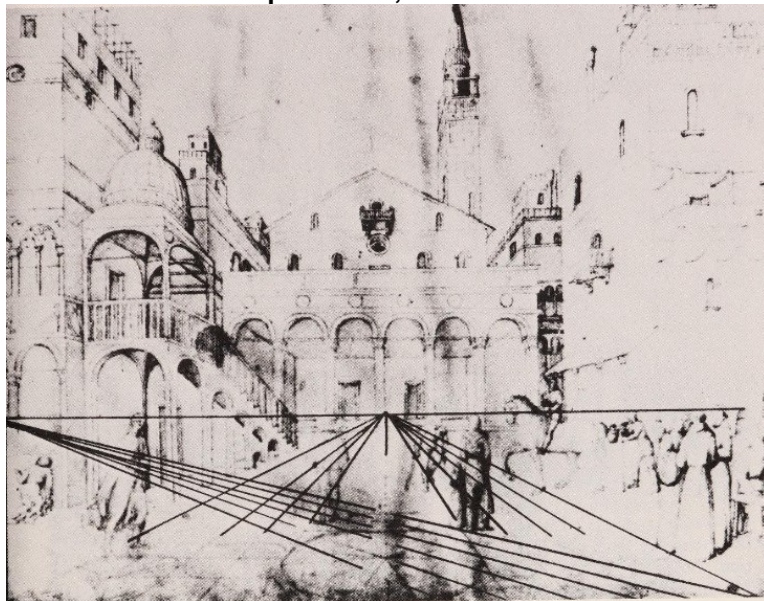
Fonte: Autoria própria (2022).

A técnica proposta por Leon Battista Alberti significou uma nova possibilidade para alcançar os objetivos da época. Como já ponderado anteriormente, o surgimento do novo método não representou uma revolução instantânea no modo como as

pinturas da época eram produzidas. Edgerton (1975) pontua que a técnica da perspectiva linear de Alberti só viria a ser utilizada na época de Leonardo da Vinci. Entretanto, os estudos de Alberti foram adotados como subsídio teórico para evolução técnica de artistas. Os estudos do autor renascentista não somente foram utilizados, mas também modificados por pintores que buscavam por representações pictóricas mais realistas

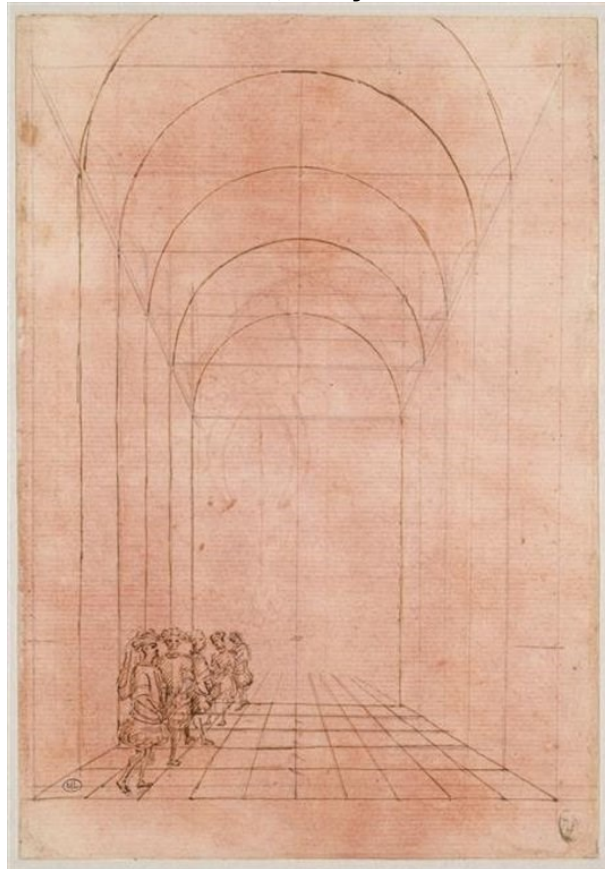
Edgerton (1975) em sua obra apresenta duas artes do século XV em que esboços da técnica de Alberti podem ser vistos sob a tinta dos desenhos. Os artistas responsáveis pelas obras são Jacopo Bellini (1396-1470) e Antonio Pisanello (1395-1455) e datam das décadas de 1440 e 1450. A Figura 31 ilustra a obra de Bellini alterada por Edgerton (1975) para que os traços dos esboços ficassem mais evidenciados. Já a Figura 32 traz a obra de Pisanello, *Cinq hommes debout dans une architecture voutée en perspective*.

Figura 31 – Traços do esboço para a construção da perspectiva na obra Architecture de Jacopo Bellini, 1950.



Fonte: Edgerton (1975, p. 51).

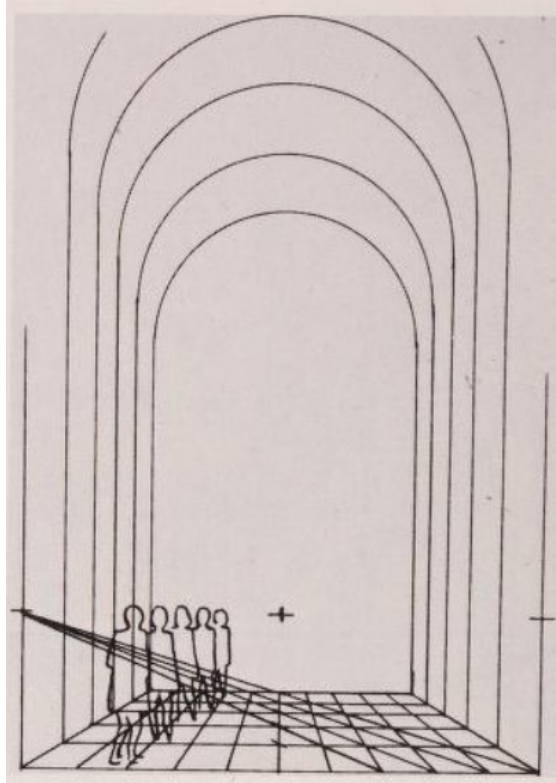
Figura 32 - Cinq hommes debout dans une architecture voutée en perspective, de Antonio Pisanello. Paris, França 1445



Fonte: Collections (2022).

Edgerton (1975) apresenta também uma releitura que fez da obra de Pisanello (Figura 33), destacando os elementos da perspectiva teorizada por Alberti. Segundo o autor, Pisanello se apropriou da técnica de perspectiva reproduzindo-a minuciosamente em seu desenho. Na composição tem-se que nas extremidades dos segmentos do chão quadriculado paralelos ao plano do quadro, há segmentos verticais que compõem as paredes do cenário, que no teto são delimitadas por arcos traçados com o auxílio de um compasso. Assim como recomenda Alberti em seu tratado, as cabeças dos personagens não ultrapassam a altura do ponto de fuga, que por sua vez se encontra ainda aparente na obra, assim como o segmento horizontal central que aparece marcado nos lados esquerdo e direito da obra. Na interseção do segmento central horizontal e o segmento vertical mais extremo, Pisanello posiciona o ponto que constitui a estrutura auxiliar para a determinação das diagonais e consequentemente a altura das transversais. As marcas dessa estrutura auxiliar também permaneceram explícitas nas obras.

Figura 33 - Releitura da obra de Pisanello elaborada por Edgerton



Fonte: Edgerton (1975, p.52).

Edgerton (1975) aponta para o fato da utilização e modificação do procedimento de Alberti terem auxiliado diversos artistas durante o século XV. Outra obra destacada pelo autor é a pintura *Architectural Veduta*, a qual Flores (2003) evidencia como uma obra que explicita os conceitos da “janela aberta” descrita no tratado *Da Pintura* para compor as linhas ortogonais que convergem para a conquista do infinito caracterizada por Panofsky (1993). O infinito que desafiava uma mentalidade milenar nos campos de estudos e debates da Filosofia e Ciências Exatas, agora era apropriado e representado na arte do plano.

Trata-se de uma perspectiva que é aberta ao infinito e cujo ponto de fuga é enviado ao horizonte, mesmo que na cena desta obra ele esteja enquadrado na trama central do quadro, na região interna entre as colunas, como se fosse um funil a escorrê-lo em direção ao infinito. Vê-se aí que a janela abre-se para o infinito. (FLORES, 2003, p. 64)

Figura 34 - . Architectural Veduta. Francesco di Giorgio Martini. Berlin, Alemanha 1495.



Fonte: Useum (2022).

Sob os ideias humanistas da época, Rafael Sanzio (1483-1520), entre os anos de 1509 e 1510, produziu nas paredes da *Stanza della Segnatura* o que viria ser sua obra mais conhecida. Sob encomenda do Papa Júlio II, Rafael destina cada uma das paredes da sala para simbolizar quatro diferentes temáticas do conhecimento humano: Poesia, Teologia, Direito e Filosofia. A representação mais famosa de Rafael é a produção dedicada à Filosofia, a obra *Escola de Atenas* (Figura 35). Na pintura, Rafael celebra a Filosofia Grega Clássica e utilizando a Matemática difundida na perspectiva linear para compor e posicionar os elementos da cena, propondo uma estética realista à obra. Simultânea à celebração de Rafael ao conhecimento humano, Michelangelo, a poucos metros de distância do mestre da *Escola de Atenas*, produzia no teto da Capela Sistina uma das mais renomadas pinturas religiosas que se tem conhecimento.

Figura 35 - Escola de Atenas, de Rafael. Vaticano, 1510-1511



Fonte: WikiArt (2022).

Algumas décadas antes, em 1483, na mesma Capela que seria ambientada nas obras primas de Michelangelo, Pietro Perugino finaliza a pintura *Christ Handing the Keys to St. Peter*, uma das artes designadas para compor a decoração interna da Capela Sistina. A obra de Perugino representa uma passagem do Novo Testamento e está localizada na parede norte da igreja. (PRITCHARD, s.d)

Perugino desenvolve a pintura visando criar uma sensação de tridimensionalidade, para isso o pintor constrói a perspectiva através de um ponto de fuga. Perugino estabelece uma base quadriculada com o objetivo de direcionar os segmentos do pavimento, ortogonais ao plano do quadro, até um ponto de convergência localizado na área central da pintura. O ponto está estrategicamente posicionado na linha do horizonte, a qual divide o cenário criando uma separação entre o chão e o céu. Além disso, toda a composição da obra “acompanha” o distanciamento da paisagem de maneira proporcional, nesse sentido os objetos que se distanciam do observador ficam cada vez menores e menos nítidos, assim como já propunha Leon Battista Alberti em seu tratado.

Figura 36 - Christ Handing the Keys to St. Peter. Pietro Perugino, Vaticano, 1481-1483



Fonte: Adaptado de WikiArt (2022).

Anos mais tarde à Perugino, era vez de Leonardo da Vinci protagonizar a conquista da tridimensionalidade com sua obra *A Última Ceia*. De maneira imponente, com mais de quatro metros de comprimento e oito de altura, a pintura retrata de maneira dramática e teatral a cena que Cristo anuncia aos seus apóstolos que estava sendo traído. A obra de Da Vinci foi produzida na Igreja Santa Maria delle Grazie em Milão, mais especificamente na sala utilizada como refeitório pelos monges. De acordo com Gombrich “Nunca o episódio sacro fora apresentado tão próximo e tão real. Era como se outra sala fosse acrescentada à deles, na qual a Última Ceia assumia uma forma tangível” (GOMBRICH, 2000, p. 286).

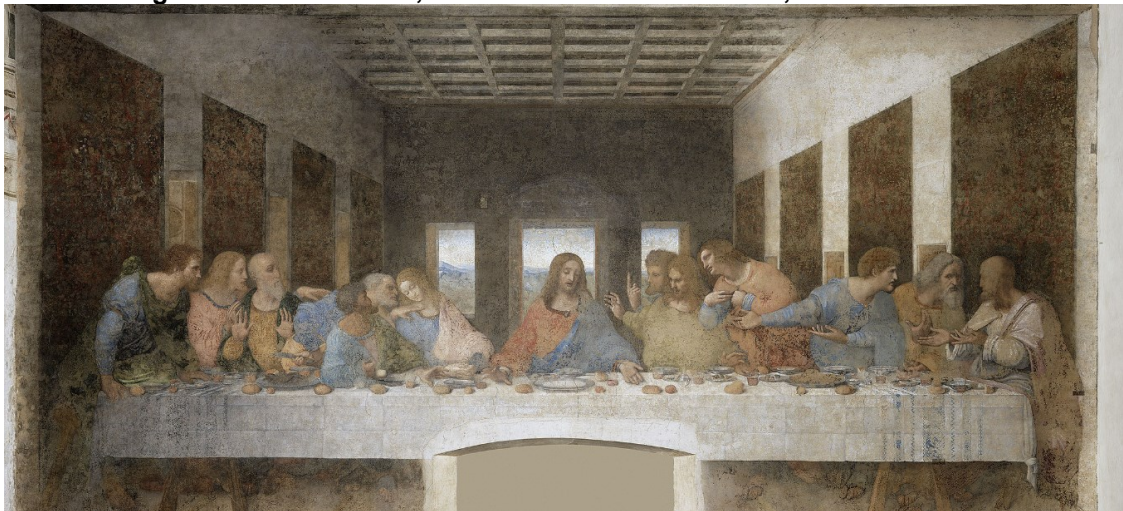
Uma breve comparação com obras que retratam o mesmo episódio, produzidas antes de Leonardo, expõe a maestria de Da Vinci ao retratar a cena de maneira tão realista. Contemporâneo à Giotto, Duccio (1255-1318) é também um artista reconhecido pelas tentativas de representação tridimensional mais realistas. Contudo, ao se analisar a pintura *A Última Ceia* elaborada por Duccio (Figura 37), comparando-a com a obra de Da Vinci (Figura 38), é evidente como a técnica sistematizada matematicamente por Alberti favorece a representação tridimensional.

Figura 37 – A Última Ceia, de Duccio. Siena, Itália 1308- 1311



Fonte: WikiArt (2022).

Figura 38 - Última Ceia, de Leonardo da Vinci. Milão, Itália. 1495-1498

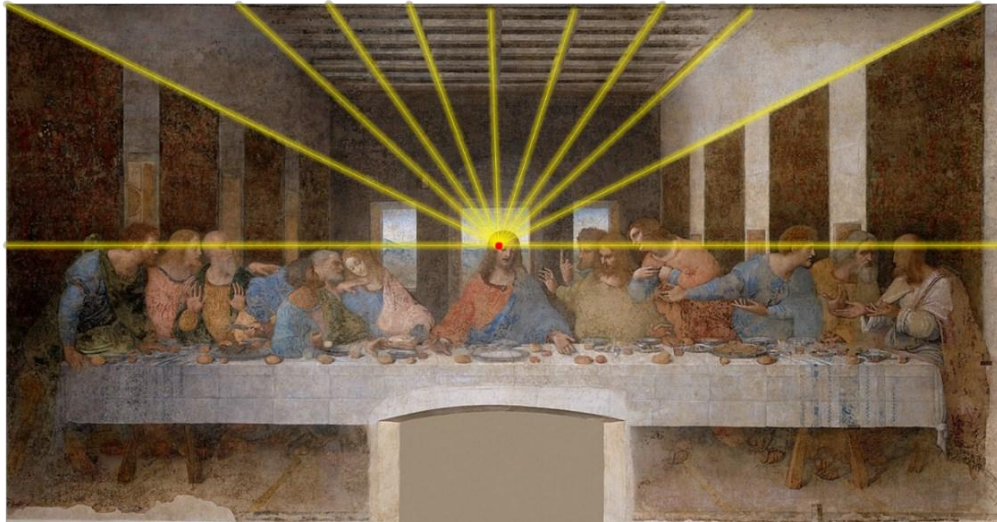


Fonte: WikiArt (2022).

Enquanto Duccio utiliza uma técnica semelhante à aplicada por Giotto descrita anteriormente, em sua obra Da Vinci emprega a técnica de criação de uma base quadriculada descrita por Alberti. Contudo, diferentemente das obras vistas anteriormente, Leonardo utiliza o teto da cena como suporte para a malha. Os segmentos ortogonais ao plano do quadro convergem para um ponto de fuga posicionado de maneira categórica na cabeça de Jesus Cristo, elemento central da obra. Através dessa técnica de perspectiva, Da Vinci compõe o afresco de forma a

determinar o componente principal da obra, sendo ele o ponto de convergência da pintura, além de criar a sensação de profundidade e infinitude nas janelas posicionadas no fundo da cena (Figura 39).

Figura 39 - A perspectiva linear na obra Última Ceia de Leonardo da Vinci



Fonte: Adaptado de Wikiart (2022).

Ao analisar e comparar as obras renascentistas, fica evidente como a técnica de Alberti produziu um impacto significativo no modo de composição pictórica. Ao longo dos séculos, o procedimento elucidado no *Da Pintura* foi reproduzido e aperfeiçoado em novos estudos, tratados e pinturas. Novas estratégias surgiram em virtude da técnica desenvolvida por Brunelleschi e sistematizada por Alberti. O recurso criado e desenvolvido pelos italianos se estendeu pela Europa, e foi no norte do continente que o estudo de Alberti inspirou e conduziu o pintor humanista alemão Albrecht Dürer (1471-1528) no desenvolvimento de seus trabalhos sobre perspectiva.

2.3.3 Albrecht Dürer e a utilização de um artefato

Em seções anteriores, esse trabalho já abordou o caráter experimental renascentista pontuando como os instrumentos auxiliaram Galileu a estudar os cosmos e como a experiência e matemática de Da Vinci o guiou na elaboração de seus estudos e composições. Na Alemanha do século XVI, Albrecht Dürer também irá se destacar pelo caráter sistemático e matematicamente embasado de suas produções. De acordo com Boyer (2012), o artista alemão compartilhava com seu

contemporâneo Leonardo o mesmo interesse em combinar a arte com as ciências exatas.

Dürer nasceu em 1471 em Nuremberg, na Alemanha, cidade na qual Regiomontanus (1436-1476) estabeleceria uma impressora com o objetivo de imprimir traduções de obras de Arquimedes e Diofante (BOYER, 2012, p.194). Os planos de Regiomontanus não se concretizaram devido à sua morte precoce e não esclarecida, contudo, segundo Panofsky (1995), a impressão de livros e xilogravuras permitiu, pela primeira vez, uma disseminação de conhecimento em uma escala global.

Ainda segundo o autor, com o surgimento da possibilidade de divulgação e propagação de estudos diversificados, a Alemanha do século XV atinge o patamar de grande influência no campo das artes e parte significativa dessa preponderância alemã está baseada nos trabalhos de Albrecht Dürer. Por conta de suas impressões, o alemão influenciou artistas de todo o continente europeu.

Além do conhecimento adquirido através dos livros impressos, Dürer teve contato direto com pensadores renascentistas italianos. Ao longo de sua vida, o artista alemão realizou viagens no continente europeu, tendo duas vezes Veneza como seu destino. Na Itália, Dürer se interessou pela cultura da região vendo na pintura aspectos não encontrados em seu país de origem. De acordo com Flores (2007), em suas viagens, Dürer se familiarizou com a língua italiana e obteve acesso à estudos teóricos da arte de estudiosos como Leon Battista Alberti, Leonardo Da Vinci, Piero della Francesca e Luca Pacioli, amigo matemático de Leonardo.

Suárez (2006) aponta essa conexão entre estudiosos dos dois países europeus como marco importante dos séculos XV e XVI. Na obra Retrato de Luca Pacioli, de autoria relacionada a Jacopo de' Barbari, acredita-se que estejam representados o mestre Luca Pacioli ao lado de seu discípulo Albrecht Dürer. Para Suárez (2006) essa pintura simboliza um dos encontros mais importantes do período renascentista, o encontro da tradição italiana com a tradição alemã.

Figura 40 - Retrato de Luca Pacioli, de Jacopo de' Barbari. Nápoles, Itália, 1495



Fonte: WikiArt (2022).

Segundo Flores (2007), além do matemático italiano, o artista alemão encontrou no astrônomo Johan Werner (1468-1528) um conselheiro na área da Matemática. Através de estudiosos humanistas, Dürer consolidou uma base de conhecimentos matemáticos que o auxiliaram a compreender as composições artísticas de sua época. No campo da perspectiva linear, Dürer é influenciado majoritariamente pelos estudos desenvolvidos por Alberti e foi o responsável por disseminar a teoria da perspectiva linear na Alemanha.

Em seu tratado de geometria intitulado *Underweysung der messung / mit dem zirckel und richtscheyt/ in Linien ebenen unnd gantzen corporen/ durch Albercht Dürer zu samen getzogen/ und zu nutz aller kunstliebhabenden mit zu gehörigen figure/ in truck gebracht/ im jar M. D. XXV*, traduzido como Instruções para a medida/ com régua e compasso/ das linhas, planos e corpos sólidos/ reunidas por Albrecht Dürer/ e impressas com as figuras correspondentes/ para o uso de todos os amadores da arte/ no ano de 1525, Dürer abrange a relação entre Matemática e Arte, dirigindo-se a artesãos e pintores não familiarizados com a Geometria Euclidiana. De acordo com Flores (2007), o artista alemão, em sua obra, contempla a geometria como uma geometria construtiva.

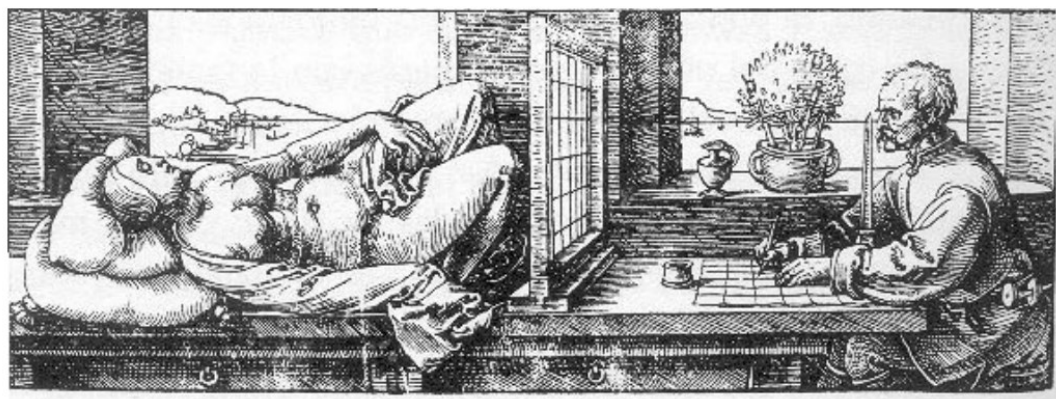
A terminologia empregada é em conformidade com o conteúdo e a forma que Dürer quis dar em seu livro. Ela reflete o duplo objetivo que foi fixado: fundar a pintura sobre a certeza matemática e tornar as instruções reunidas em sua obra amplamente acessíveis aos leitores pintores, artesãos e matemáticos. (FLORES, 2007, p. 181)

Entende-se, portanto, nas obras de Dürer um forte aspecto didático, uma vez que o alemão pretendia através de seus estudos criar meios pelos quais artistas iniciantes compreendessem a aplicação matemática e desenvolvessem uma propriedade técnica ao aplicá-las em suas composições. Aliado ao texto teórico, Dürer disponibilizava em suas obras construções visuais com o objetivo de facilitar a compreensão da técnica explicitada. Flores (2007) afirma a importância didática da representação gráfica nas obras. As figuras contidas nos tratados estabeleciam uma espécie de mediação entre a abstração e a prática, uma vez que Dürer tinha seu público dividido entre artistas e matemáticos.

A interseção dos caracteres científico, artístico e prático, levaram Dürer a produzir não somente estudos teóricos sobre o desenho em perspectiva, mas também à construção de máquinas para o auxílio na constituição da representação bidimensional de objetos tridimensionais, os denominados perspectógrafos. Os aparatos de Dürer, baseados na concepção da janela visual de Alberti, consistem em estruturas na qual o observador imobiliza o olhar a uma determinada distância do objeto a ser reproduzido bidimensionalmente e o observa através de uma espécie de moldura que representa a janela. Através desses aparatos, o pintor estabelece a interseção dos raios visuais com o plano do quadro (FLORES, 2003).

Na Figura 41 tem-se a imagem de uma das máquinas idealizadas pelo artista alemão. Nessa estrutura, Dürer prevê uma malha quadriculada na estrutura de vidro, a qual auxilia o observador a compreender a disposição da cena, facilitando a reprodução desta em uma malha igualmente quadriculada. Com esse instrumento, Dürer materializa a teorização desenvolvida por Alberti, e, assim como Da Vinci, empregou a experimentação para embasar matematicamente representações artísticas.

Figura 41 - Perspectógrafo de Dürer



Fonte: Joshua Nava Arts. Disponível em: <joshuanava.biz>

Segundo Saito (2013) os instrumentos matemáticos são compreendidos uma vez considerado o contexto histórico de seu desenvolvimento.

Análise e estudos em História da Ciência têm revelado que esses instrumentos não são meros objetos, mas artefatos que incorporam conhecimentos matemáticos e, portanto, não devem ser vistos como neutros, pois a sua construção e seu uso apontam para aspectos importantes do fazer matemático de uma época. (SAITO, 2013, p. 3)

Além disso, ao se avaliar a importância de um instrumento matemático é importante dissociar de anacronismos, ou seja, como afirma Saito (2013), não se pode atribuir aos instrumentos antigos características modernas. Nesse sentido, ao se analisar as contribuições de Dürer é necessário considerar seu momento histórico, e isso leva a compreensão de sua importância ao se estabelecer um método experimental para uma teoria que seria reconhecida como revolucionária para todo um continente em um momento já marcado por intensas mudanças.

Como será apresentado no capítulo 3, uma das possibilidades de atividades desenvolvidas neste trabalho é a utilização do perspectógrafo de Dürer como material didático manipulável fisicamente no ambiente educacional. Para isso, foi construído um artefato de perspectiva baseada nos conceitos desenvolvidos por Dürer, cuja descrição se encontra na seção 3.2.1. Neste momento destaca-se apenas o fato de que um dos resultados do trabalho realizado se deu na materialização de um instrumento matemático histórico tomado como material didático manipulável.

Por meio de experiências pessoais bem-sucedidas, o aluno desenvolve o gosto pela descoberta, a coragem para enfrentar desafios e para vencê-los, desenvolvendo conhecimento na direção de uma ação autônoma [...] Nessa concepção de aprendizagem, o material concreto tem fundamental importância pois, a partir de sua utilização adequada, os alunos ampliam sua

concepção sobre o que é, como e para que aprender Matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos. (LORENZATO, 2009, p. 43)

Com ideais aliados ao de Lorenzato (2009) sobre a concepção da importância de materiais didáticos diversificados na educação matemática e com a oportunidade de resgatar um instrumento histórico, julgou-se adequado e interessante a utilização do perspectógrafo de Dürer para o desenvolvimento de uma possibilidade de atividade.

2.4 Dois estudos relacionando Matemática e Perspectiva

Nas próximas duas seções serão apresentados dois estudos considerados relevantes para a pesquisa sobre a perspectiva linear quando situada como objeto de estudo e ensino. O primeiro estudo aborda a relação da ótica e a representação do tridimensional e o segundo trata da Geometria Projetiva como segmento descendente das ideias e teorias desenvolvidas pelos renascentistas.

Tem-se que os autores de ambos os textos estão situados no campo da Educação Matemática, sendo o primeiro estudo realizado por Fumikazu Saito, doutor e mestre em História da Ciência pelo Programa de Estudos Pós-Graduados em História da Ciência da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Já o segundo trabalho abordado trata-se de uma dissertação de mestrado desenvolvida por Gonçalves (2013) no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT na Universidade Federal do Rio Grande- FURG.

2.4.1 Perspectiva natural e perspectiva artificial

Como já abordado neste trabalho, a descoberta e a teorização da perspectiva linear revolucionou o modo como a arte passou a ser concebida após o século XIV. Imagens cada vez mais realistas passam a ser representadas no plano com o objetivo de aproximar representações pictóricas cada vez mais da realidade observada. Entretanto, é válido ressaltar que a perspectiva linear não caracteriza de forma exata a imagem captada pelo olho humano. O autor e historiador da ciência Fumikazu Saito, em seu artigo intitulado *Entre o Natural e o Artificial: Visualização e Representação no Século XVI*, investiga as relações e inconsistências existentes entre a representação da perspectiva e a ótica. Nesse sentido, apesar desse trabalho não ter a intenção de

abordar estudos sobre ótica, justificou-se válido apresentar alguns apontamentos realizados por Saito (2020).

Ao ser retratado no plano, o tampo de uma mesa de formato circular ganha representação elíptica (Figura 41). Para Saito (2020) essa representação não causa estranheza, pois associa-se o formato elíptico do desenho ao formato circular já captado pela experiência sensorial, construindo uma relação entre o que já foi observado com o que é representado bidimensionalmente. Entretanto, apesar da associação entre a representação e observação do objeto ser estabelecida, nada é garantido na correspondência entre a representação de um objeto e o próprio objeto representado. O autor questiona até que ponto pode-se estabelecer a certeza de que a representação elíptica mencionada anteriormente é de fato uma mesa de tampo circular uma vez captada pela experiência visual.

Figura 42 - Representação de uma mesa de tampo circular



Fonte: Autoria própria (2022).

A problemática descrita anteriormente, que pode ser caracterizada fundamentalmente no campo epistemológico, é considerada, dentro dos estudos de História da Ciência como o início de uma transformação conceitual ampla (SAITO, 2020, p.70). Segundo o autor, as relações entre a percepção visual de um objeto com sua representação no plano nunca foram indubitáveis em termos de compreensão. Contudo, no século XVI, questões que tangem a relação entre objeto e sua representação conduzem a uma transformação das noções acerca da concepção do espaço físico e geométrico. Tais mudanças estão pautadas nas novas idealizações do conhecimento baseado na natureza e refletem na discussão entre a visão natural e artificial.

Segundo Flores (2002), o termo perspectiva possui diversas significações. Contudo neste trabalho, assim como pontua a autora, o uso do termo perspectiva foi restrito ao conceito que remete à: “[...] arte de representar os objetos sobre um plano como se apresentam no espaço.” (FLORES, 2002, p. 84). Entretanto, é importante pontuar os significados atribuídos ao termo “perspectiva” ao longo da história e identificar os conceitos que impactaram no estudo da técnica abordada neste trabalho.

Como consta Saito (2020), a expressão perspectiva é a tradução latina referente à palavra grega *optiké*, cujo significado remete a visão direta, ou seja, à própria ciência da visão. Nesse sentido, no período medieval, os estudos referentes à ótica eram designados pelo mesmo termo referente a representação bidimensional. “Para distingui-los, comumente se opunha à perspectiva “comum” ou “natural” à *perspectiva artificialis* dos pintores.” (SAITO, 2020, p.71). Além desses termos, os tratados medievais sobre ótica apresentavam outras nomenclaturas para designar o mesmo conceito, dentre eles os termos *aspectibus*, *visu* e *prospettiva* (perspectiva em italiano).

Esses termos designavam a ótica em geral, embora tratassem de diferentes aspectos da mesma. Assim, o termo perspectiva durante a Idade Média era empregado para se referir a um conjunto de teorias ligado à visão. O termo *aspectibus*, por sua vez, fazia referência aos problemas de aparência visual, ao aspecto ou à forma das coisas tal como apareciam à visão. Além disso, *aspectibus* geralmente traduzia para o latim os estudos de ótica que foram desenvolvidos pelos árabes (séculos IX a XII) e referia-se basicamente à teoria ótica desenvolvida por Alhazen (965-1040). Quanto ao termo *visu*, ele designava apenas o sentido da vista no que dizia respeito aos problemas da visão e da evidência das coisas sensíveis. (SAITO, 2020, p. 71)

Já os termos perspectiva e *prospettiva* ganharam interpretações diferentes nos tratados renascentistas sobre perspectiva linear. Por um lado, a perspectiva era interpretada como o estudo da visão em termos da recepções de impulsos ópticos. Por outro, *prospettiva* estava relacionada com o conceito das representações planas de objetos tridimensionais. Saito (2020) ainda pontua a impossibilidade de determinar a separação exata entre a *perspectiva artificialis* e *naturalis*, uma vez que se relacionam de modos gerais. Entretanto, a análise dos tratados sobre perspectiva revela uma progressiva cisão entre os termos a partir do século XVII. Estudos sobre a ótica em termos anatômicos e fisiológicos gradativamente perderam o espaço nos estudos sobre a perspectiva linear.

Tem-se, então, encaminhamentos diferentes em relação aos dois tipos de estudo. Saito (2020) pontua tratados e autores que exemplificam a especificação dessas duas áreas distintas do estudo.

Tratados como, *La pratica della perspettiva* de Daniele Barbaro, por exemplo, traz vários elementos encontrados em tratados de óptica tradicional. Nela, há referências a raios visuais e a outras propriedades da visão. Entretanto, algumas considerações de caráter puramente óptico, tais como o estudo anatômico e fisiológico do olho, são eliminadas.

[...] outros tratados dedicados mais exclusivamente às questões de óptica começaram, aos poucos, a dar importância maior à luz, ao mesmo tempo em que a perspectiva linear passou a agregar outras questões ligadas ao traçado da sombra. Soma-se ainda a isso, o fato de que as questões de natureza anatômica e fisiológica do olho foram gradativamente migrando para outros tratados relacionados à medicina ou à física. (SAITO, 2020, p.72)

Tendo em vista as duas vertentes do estudo da ótica, tem-se que a perspectiva artificialis passa a não se preocupar mais com assuntos referentes a perspectiva naturalis. Ou seja, tópicos referentes à análise de raios visuais e feixes luminosos deixam de ser do interesse do campo da perspectiva linear cuja preocupação se estende apenas a aspectos geométricos.

Pode-se concluir então que a técnica da perspectiva linear não pode ser entendida como a reprodução do olhar humano expresso no plano bidimensional, pois, como afirma o autor, a técnica da perspectiva linear “1) limitava o campo visual; 2) imobilizava o olho; 3) ignorava a esfericidade do campo visual; e 4) reduzia o olhar a uma visão monocular”. (SAITO, 2020, p.73)

Apesar do surgimento de novos modos de entender a representação bidimensional da tridimensionalidade e estudos apontarem incoerências dessa técnica, o procedimento da perspectiva linear marcou um período de grande relevância na história da humanidade e, como pontua Flores (2003).

[...] a reflexão que cabe momentaneamente é aquela sobre o uso de um olhar que se fez novo, no Renascimento, e que se firmou sob um único ponto de vista e uma única direção, bem definida tecnicamente. De um olhar que a perspectiva tratou de ser o efeito e o suporte e, cujas máquinas perspectivas trataram de afiná-lo. O olho é o furo que atravessa a superfície opaca da pintura e o olhar aí é direcionado, perspectivado, organizado. Está aí colonizado nosso modo de olhar e de representar as figuras no espaço. (FLORES, 2003, p. 80)

2.4.2 Geometria Projetiva e Perspectiva Linear.

Nesta seção serão destacadas duas proposições do trabalho de Gonçalves (2013) com suas demonstrações a fim de evidenciar os panoramas teóricos que

embasam aspectos experimentais e visuais da perspectiva linear. Como será evidenciado, tem-se que essas proposições intrínsecas aos fundamentos da Geometria Projetiva são frutos de estudos derivados dos desenvolvimentos e conquistas no campo da Matemática renascentista.

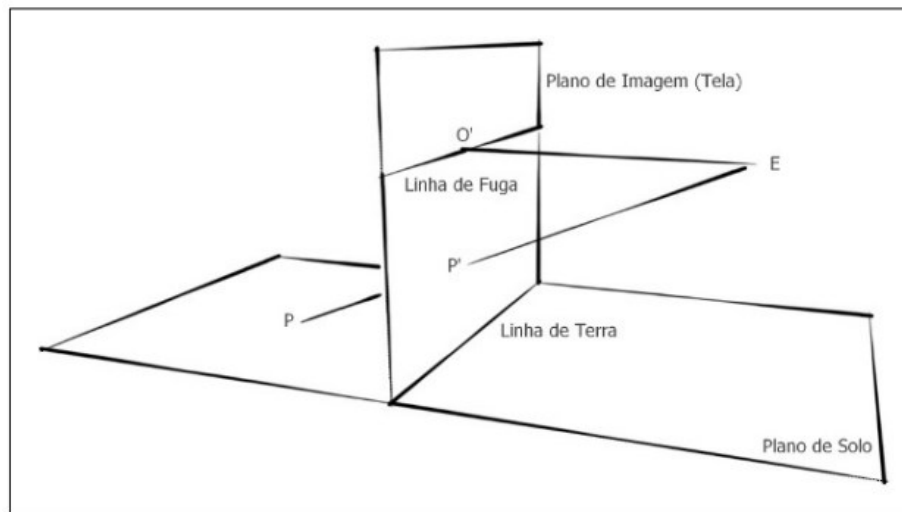
Os estudos e tratados desenvolvidos por artistas e teóricos renascentistas não somente revolucionaram o modo como as representações tridimensionais no plano eram produzidas, mas também permitiram o desenvolvimento de um campo da Matemática que viria a ficar conhecido como Geometria Projetiva. Não cabe a esse trabalho adentrar a esse campo da Matemática de forma a aprofundá-lo, entretanto, tem-se nos fundamentos da Geometria Projetiva conceitos interessantes à delimitação desta pesquisa. Nesse sentido, nessa seção apresenta-se alguns tópicos relevantes sobre os fundamentos da Geometria Projetiva apontados por Gonçalves (2013) em sua dissertação de mestrado e tem-se também a sinalização de campos de interesse para futuras pesquisas de aprofundamento no tema do trabalho.

Analisando novamente o procedimento de Alberti, pode-se entender o método desenvolvido pelo renascentista através da Geometria Projetiva.

Imaginemos, agora, que sejam traçadas linhas (chamadas linhas de projeção) partindo do olho até alcançar vários pontos nos objetos da cena. Este conjunto de linhas é denominado projeção. Se colocarmos uma tela de vidro (vidraça) entre o olho e a cena, então, ao olharmos através do vidro, as linhas de projeção irão intersectar a tela determinando sobre esta, outros pontos. A figura formada por todos estes pontos sobre tela de vidro é chamada seção. (GONÇALVES, 2013, p.30)

O autor apresenta uma representação geométrica dos resultados obtidos com o perspectógrafo de Albrecht Dürer, que por sua vez é a materialização dos princípios de Alberti. Na Figura 43, tem-se representados dois planos perpendiculares entre si: um plano horizontal denominado Plano Solo e um plano vertical designado por Plano Imagem. O ponto E presente na imagem corresponde ao olho do observador e é denominado de Centro da Perspectiva. A Linha de Fuga, também conhecida como Linha do Horizonte, é determinada a partir da intersecção do Plano Imagem com um plano paralelo ao Plano Solo que contém o ponto E. Já o Ponto de Fuga representado pelo ponto O' é determinado a partir da intersecção entre a Linha de Fuga e um plano perpendicular ao plano solo que contém o ponto E. (Gonçalves, 2013, p. 31)

Figura 43 - Representação geométrica da técnica de Alberti

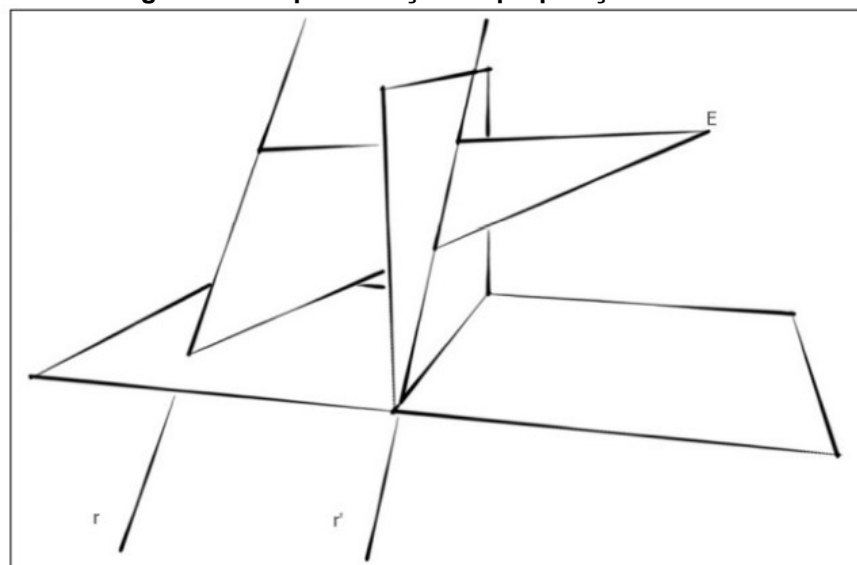


Fonte: Gonçalves (2013, p.31).

A partir dessa representação geométrica, é possível compreender alguns princípios que regem a fundamentação teórica oferecida pela Geometria Projetiva, a qual Gonçalves (2013) denomina por perspectiva matemática. O autor apresenta alguns resultados tratando-os como proposições, com esses resultados é possível compreender melhor algumas conclusões propostas por Alberti em seu tratado. Nas proposições enunciadas a seguir, entende-se por imagem o resultado da projeção dos entes geométricos que serão citados.

Proposição 1. A imagem de uma reta é sempre uma reta

Figura 44 - Representação da proposição 1



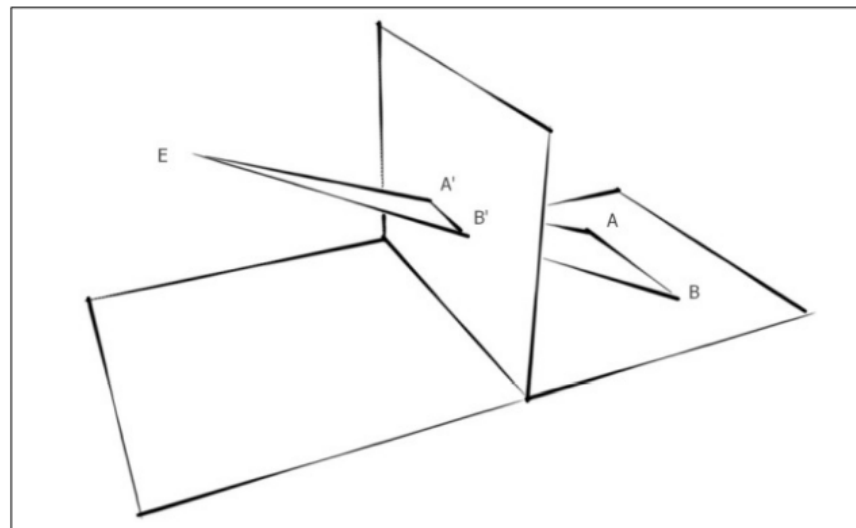
Fonte: Gonçalves (2013, p.32).

Demonstração: Seja r uma reta qualquer. Tem-se que r e ponto E determinam um plano que intersecta o plano imagem em uma reta r' , determinando a imagem de r por E .

Em um caso particular, se a reta r contém o segmento $O'E$, tem-se que a imagem determinada é o próprio Ponto de Fuga. Além disso, pode-se determinar uma consequência direta da proposição descrita: a imagem de um ponto sempre será um ponto. Considerando um ponto P tem-se que a reta determinada por P e E intersecta o plano de imagem em um ponto P' , que por sua vez é a imagem de P por E (Figura 45).

Proposição 2. A imagem de uma reta horizontal paralela ao Plano Imagem é horizontal

Figura 45 - Representação da proposição 2



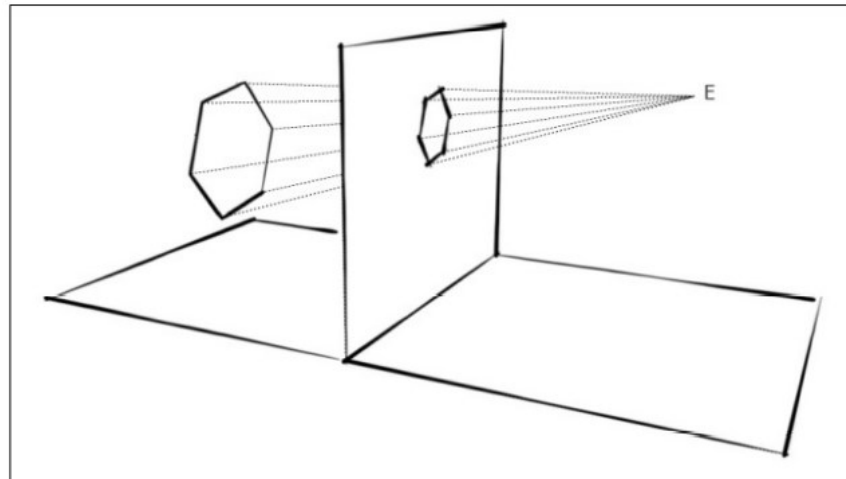
Fonte: Gonçalves (2013, p.33).

Demonstração: Seja AB um segmento de reta horizontal paralelo ao Plano Imagem. Considere um plano paralelo ao Plano Imagem que contenha AB . Então o plano determinado por E e AB intersecta o Plano Imagem e o plano paralelo a ele e, tem-se que um plano ao intersecta dois planos paralelos determina sobre cada um deles retas paralelas entre si. Nesse sentido, o segmento $A'B'$ é paralelo a AB e, uma vez que AB é horizontal, $A'B'$ também é.

De maneira direta, tem-se que a consequência dessa proposição é o fato de que ao se representar uma linha horizontal, o artista deverá mantê-la horizontal. Analogamente, pode-se demonstrar que a imagem de uma reta vertical paralela ao Plano Imagem também deverá ser representada verticalmente. Nesse sentido, ao se

projetar matematicamente objetos em um Plano Imagem, a imagem desses objetos não sofrerá alterações em relação à sua forma, as alterações estarão restritas apenas em relação às medidas. Na Figura 46 tem-se representado graficamente a consequência descrita anteriormente. Comparado com o objeto observado, a projeção da imagem de um hexágono sofre alteração apenas em relação ao seu tamanho.

Figura 46 - A secção de um hexágono é um hexágono.



Fonte: Gonçalves (2013, p.34)

Aqui apresenta-se, portanto, o embasamento da determinação proposta por Alberti de que quanto mais distante o objeto observado, menor ele apresenta-se ao observador. Os estudos apresentados nessa seção trataram de apresentar embasamentos da perspectiva linear desenvolvida por artistas e teóricos renascentistas uma vez que campo da Matemática conhecido como Geometria Projetiva surge da tentativa de fundamentar a representação de figuras tridimensionais.

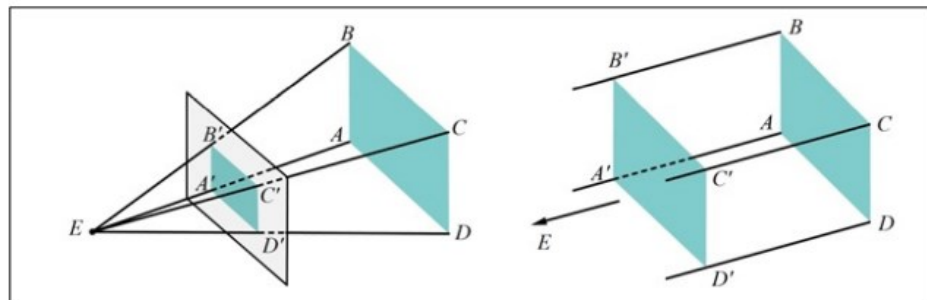
De fato, a Geometria Projetiva, no tocante às suas inter-relações com o desenho em perspectiva, ocupa-se de um único problema em que uma figura ou curva é projetada em relação a um ponto arbitrário que, na metáfora com o desenho em perspectiva, corresponde ao olho do pintor. Nesta situação, linhas de projeção partem do ponto *E* e atingem cada ponto da curva ou figura a ser projetada. O feixe das linhas projetivas que partem de *E* assume, portanto, o formato aproximado de um cone. O ponto *E* é chamado de Centro da Projeção, e este sistema projetivo recebe o nome de Projeção Central ou Projeção Cônica. (GONÇALVES, 2013, p. 81)

Cabe aqui também apontar para um caso particular da Geometria Projetiva: o deslocamento do ponto *E* indefinidamente na direção oposta ao Plano Imagem. Nessa situação, tem-se as linhas projetivas tornando-se paralelas umas às outras. Nesse caso, com o ponto *E* situado no infinito, o feixe de linhas projetivas não se apresenta

mais como um cone, mas sim como um cilindro. Logo esse sistema projetivo assume o nome de Sistema de Projeção Paralela ou Sistema de Projeção Cilíndrica.

Na Figura 47 é possível compreender melhor a diferença obtida com cada tipo de projeção. No caso de figuras contidas em um plano paralelo ao Plano Imagem, tem-se, por um lado, a projeção cônica gerando uma imagem semelhante à figura original e, por outro, a projeção cilíndrica entregando uma imagem congruente à figura projetada.

Figura 47 - Sistemas de projeção



Fonte: Gonçalves (2013, p.82)

O objetivo dessa seção foi apresentar alguns princípios base da Geometria Projetiva que sustentam o procedimento desenvolvido por estudiosos renascentistas. Como já mencionado anteriormente, o foco deste trabalho não é aprofundar neste campo da Matemática, entretanto afirma-se nessa seção o interesse em futuros desenvolvimentos de pesquisa na área da Geometria Projetiva e em outros campos de estudo das Ciências Exatas com enfoque na representação de objetos e cenas tridimensionais.

3 MATEMÁTICA E ARTE EM CONTEXTOS EDUCATIVOS

Ao analisarmos as influências da arte renascentista, destaca-se a relação existente entre esse segmento cultural e a matemática. Em suas diferentes vertentes, a arte do Renascimento buscou representar a natureza sob o olhar de critérios matemáticos a qual está submetida. A relação da Arte e da Matemática não surgiu apenas no período renascentista, desde os primeiros registros da humanidade é possível observar a relação existente entre as duas áreas.

Arte e Matemática, Matemática e Arte. Essas duas áreas do conhecimento aparecem juntas desde os primeiros registros feitos pelo homem pré-histórico nas cavernas, as quais abrigavam os grupos de humanos das intempéries e que talvez já prenunciassem o início da Arquitetura. Ao retratar paisagens e animais e, mais tarde, esculpir em ossos marcas que representavam os animais capturados, o homem primitivo iniciou a busca da organização do seu entorno por meio da Arte e da Matemática. (ZALESKI, 2013, p. 13)

Na Educação Básica, é necessário que o conhecimento matemático seja construído dialogando com outras áreas do conhecimento. De acordo com os Parâmetros Curriculares de Matemática (1998) é necessário “estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares” (BRASIL, 1998, p. 37). A Base Nacional Comum Curricular também afirma a importância da interdisciplinaridade no contexto da educação matemática. Segundo a BNCC, “Cumpra também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento” (BRASIL, 2017, p. 299).

Entende-se, portanto, que, por meio de componentes da História e da História da Arte, é possível estabelecer possibilidades para o ensino da Matemática. Nesse sentido, a pesquisa realizada neste trabalho resulta na estruturação e proposta de duas atividades práticas direcionadas a alunos da Educação Básica. Essa proposta tem como objetivo apresentar possibilidades de atividades práticas baseadas na interdisciplinaridade ao introduzir o estudo da perspectiva linear adentrando no campo da História da Ciência e da Arte.

3.1 Matemática e Arte no Ensino Médio

De acordo com a legislação vigente acerca do Novo Ensino Médio, a educação artística encontra-se na área de Linguagens e suas Tecnologias. De acordo

com BNCC, a Arte, enquanto área do conhecimento, contribui com o senso crítico e social do estudante, desenvolvendo sua autonomia reflexiva e criativa.

Ela é, também, propulsora da ampliação do conhecimento do sujeito sobre si, o outro e o mundo compartilhado. É na aprendizagem, na pesquisa e no fazer artístico que as percepções e compreensões do mundo se ampliam e se interconectam, em uma perspectiva crítica, sensível e poética em relação à vida, que permite aos sujeitos estar abertos às percepções e experiências, mediante a capacidade de imaginar e ressignificar os cotidianos e rotinas. (BRASIL, 2018, p. 482)

Entende-se também que, aliado ao conhecimento artístico é importante e necessário que o estudante desenvolva seu pensamento geométrico

Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, 2018, p. 543)

As possibilidades de aprendizagem apresentadas a seguir visam unir o desenvolvimento do pensamento geométrico e conhecimento artístico, criando oportunidades para que em uma aula de Matemática o estudante possa explorar seus conhecimentos matemáticos no campo da representação artística.

3.2 Criando possibilidades de aprendizagem

Nas próximas seções serão apresentadas duas propostas de atividades sobre perspectiva linear que envolvem os elementos históricos abordados neste estudo. Ambas as atividades podem ter como público alvo estudantes do Ensino Médio, sendo desenvolvidas em aulas regulares de Matemática ou em uma oficina dedicada somente para o estudo da perspectiva, Estima-se que o tempo necessário à realização completa de cada atividade no contexto de aulas regulares seja algo em torno de três aulas, no caso de serem desenvolvidas em formato de oficina, estima-se uma hora e meia para a realização de cada atividade.

Naturalmente, de acordo com o público em questão, as propostas apresentadas podem ser modificadas e adequadas, visando inclusive contemplar objetivos diversos do objetivo principal deste estudo que está relacionado ao aprendizado de matemática. O intuito das próximas seções é o de apresentar possibilidades, não se restringindo a planejamentos prontos e impassíveis de alterações.

3.2.1 Utilização do perspectógrafo de Dürer para desenho em perspectiva

A primeira atividade pensada tendo como base a História da Matemática é uma prática a ser desenvolvida utilizando um perspectógrafo construído baseado nas máquinas desenvolvidas por Albrecht Dürer. O protótipo construído é constituído por uma placa de acrílico com dimensões 55 cm x 55 cm envolta por uma moldura de madeira. A placa é inteira quadriculada sendo que cada quadrado possui uma dimensão de 5 cm x 5 cm. Essa estrutura é acoplada em uma base de madeira através de dobradiças, permitindo que a máquina possa ser aberta e fechada. Do lado oposto ao acrílico está fixado um suporte de maneira com um orifício para a fixação do olhar, além disso, essa estrutura conta com uma barra para que o rosto do observador seja estabilizado, facilitando, assim, a imobilização do olhar.

Figura 48 - Perspectógrafo construído

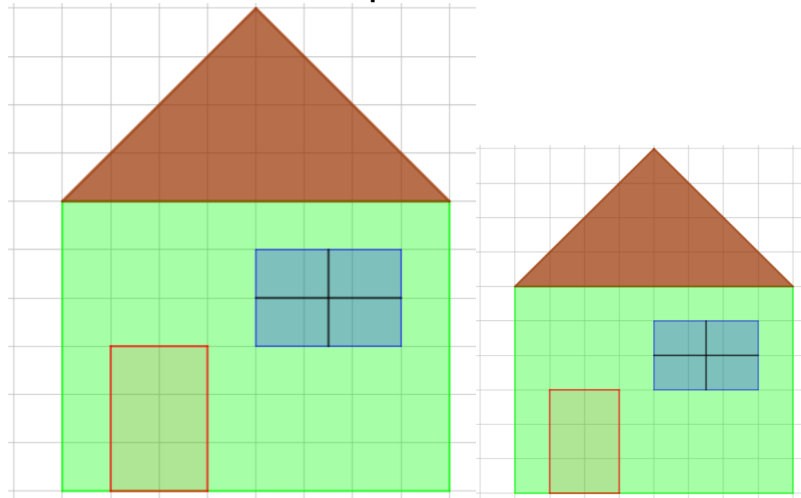


Fonte: Autoria própria (2022)

A escolha desse modelo de perspectógrafo para a elaboração da atividade se dá pela viabilidade de estudantes sem o conhecimento prévio de desenho em perspectiva, se envolverem em uma prática que possibilita e incentiva o desenvolvimento de noções geométricas de espacialidade. Como já detalhado anteriormente, a malha quadriculada da janela de exibição permite que o observador divida e organize a cena observada com o objetivo de reproduzir essa organização em um papel com uma malha quadriculada semelhante. Nesse sentido, as malhas

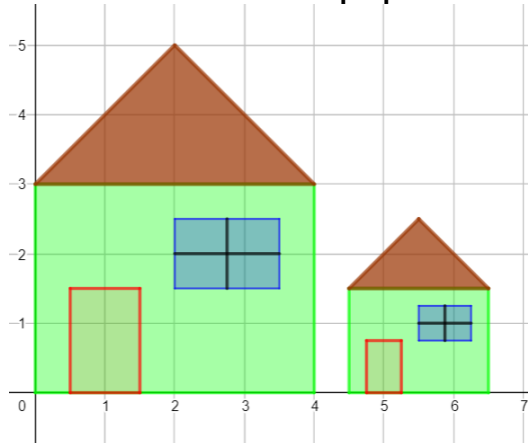
quadriculadas permitem que o observador tenha uma estrutura que funciona como guia no desenvolvimento de figuras semelhantes, afinal ao reproduzir a imagem observada existirão duas possibilidades: utilizar no papel a mesma quantidade de quadrados que o objeto ocupa na malha do perspectógrafo ou trabalhar com uma constante de proporcionalidade para determinar uma razão entre as quantidades quadrados da estrutura observada e da folha de reprodução.

Figura 49 - Desenho em malhas quadriculadas de diferentes dimensões.



Fonte: Autoria própria (2022).

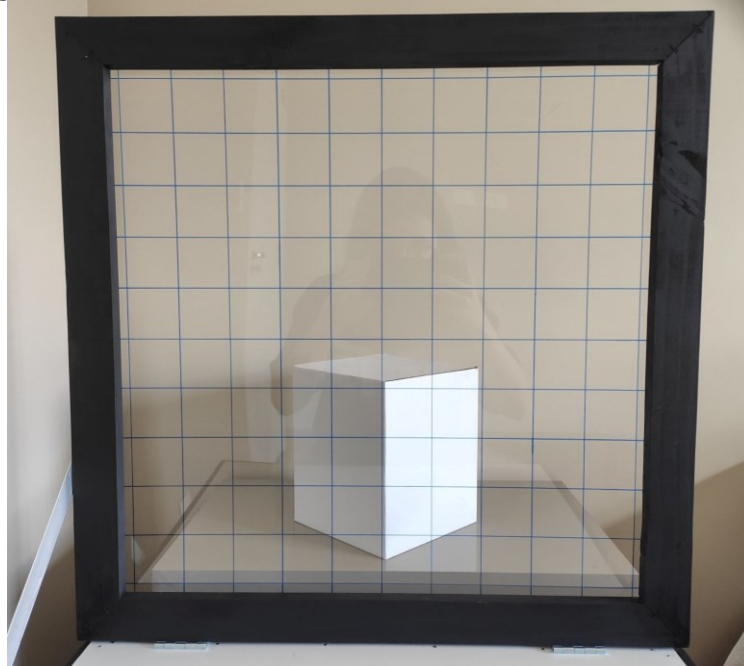
Figura 50 - Desenho utilizando razão de proporcionalidade igual a 0.5.



Fonte: Autoria própria (2022).

Portanto, nessa atividade propõe-se que os estudantes sejam convidados a utilizar o perspectógrafo com o objetivo de reproduzir imagens tridimensionais. A Figura 51 expõe um exemplo dessa prática, pode-se observar como o perspectógrafo é utilizado como auxílio para a reprodução bidimensional de uma caixa no formato de um paralelepípedo. Para essa prática é necessário que o observador fixe o olhar, posicionando-o através do orifício contido na barra de suporte.

Figura 51 - Visualização de um objeto através do perspectógrafo

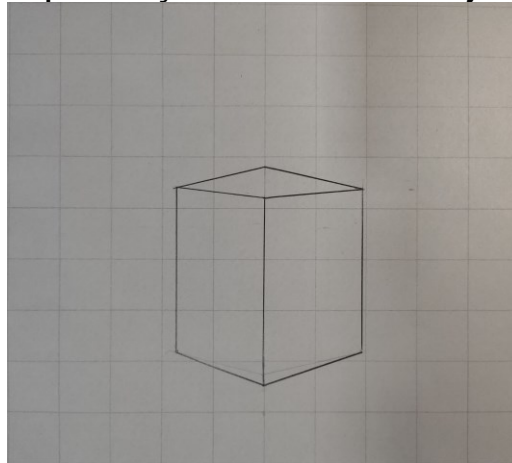


Fonte: Autoria própria (2022).

Uma vez posicionado, o observador deve utilizar a malha quadriculada do perspectógrafo como guia e base de organização da cena contemplada. Nesse caso, como o objetivo é apenas representar o paralelepípedo, é necessário que o observador compreenda como cada elemento do objeto está posicionado em relação à malha. Através desse processo de organização espacial, é possível compreender melhor como cada estrutura do objeto observado é disposta a partir de determinado ponto de vista, permitindo maior precisão da reprodução do desenho a mão livre.

A Figura 52 representa uma possibilidade de processo de construção do paralelepípedo observado. Inicialmente, tendo como base o posicionamento dos vértices do objeto real, foram demarcados os pontos referentes aos vértices do desenho. Em seguida traçou-se os segmentos referentes às arestas.

Figura 52 - Representação bidimensional do objeto observado



Fonte: Autoria própria (2022).

Após a prática com objetos mais simples, é possível compor cenas mais detalhadas como na Figura 53.

Figura 53 - Visualização de um ambiente através do perspectógrafo



Fonte: Autoria própria (2022).

Os conceitos para a representação bidimensional de cenas tridimensionais mais detalhadas não se diferem dos conceitos aplicados do desenvolvimento de figuras mais simples, uma vez que a malha quadriculada é utilizada justamente para delimitar a cena em espaços menores para uma melhor compreensão espacial sobre o que está sendo observado.

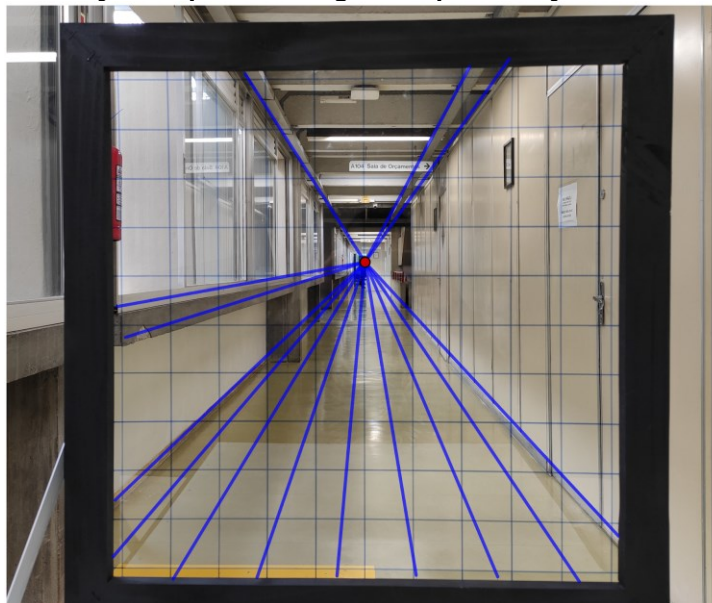
Nesta atividade, um artefato desenvolvido por um artista é empregado em contexto educacional como um material didático manipulável. Aponta-se aqui, portanto, o caráter multidisciplinar da proposta apresentada, uma vez que tópicos da

História da Arte são utilizados para o embasamento teórico e prático no desenvolvimento de uma atividade que, em um primeiro momento pode ser entendida como apenas uma proposta no campo artístico, mas que gera diversas possibilidades no campo da Matemática.

Como abordado no tema principal deste trabalho, Arte e Matemática se entrelaçam e através dessa relação diversos desdobramentos emergem como possibilidades de estudo. Portanto, a atividade apresentada oportuniza o desenvolvimento de conceitos matemáticos pertinentes à Educação Básica.

O perspectógrafo pode ser utilizado no primeiro contato do estudante com o desenho em perspectiva. Neste caso, a atividade pode seguir em uma concepção investigativa, na qual o aluno será instigado a pensar no espaço tridimensional de modo a entendê-lo e descrevê-lo matematicamente. A organização visual proporcionada pelo perspectógrafo, auxilia o estudante a compreender e caracterizar o espaço tridimensional de maneira análoga à Brunelleschi e seus contemporâneos.

Figura 54 – Identificação do ponto de fuga na representação de um ambiente



Fonte: Autoria própria (2022).

Uma vez estabelecido o conceito da convergência dos segmentos paralelos em um ponto no infinito, o perspectógrafo de Dürer pode ser utilizado para um estudo mais aprofundado sobre os conceitos matemáticos intrínsecos na teoria da perspectiva linear.

3.2.2 Utilização do GeoGebra para reconstrução do método de Alberti.

A segunda atividade prática proposta é a utilização do software dinâmico GeoGebra para a construção de malhas quadriculadas em perspectiva, para isso o estudante será convidado a aplicar as técnicas propostas por Alberti já descritas nesse trabalho. O intuito dessa atividade, além de trabalhar a técnica em perspectiva, é envolver os estudantes em uma prática nas quais eles terão que associar técnicas desenvolvidas há mais de cinco séculos à tecnologias modernas de representação geométrica.

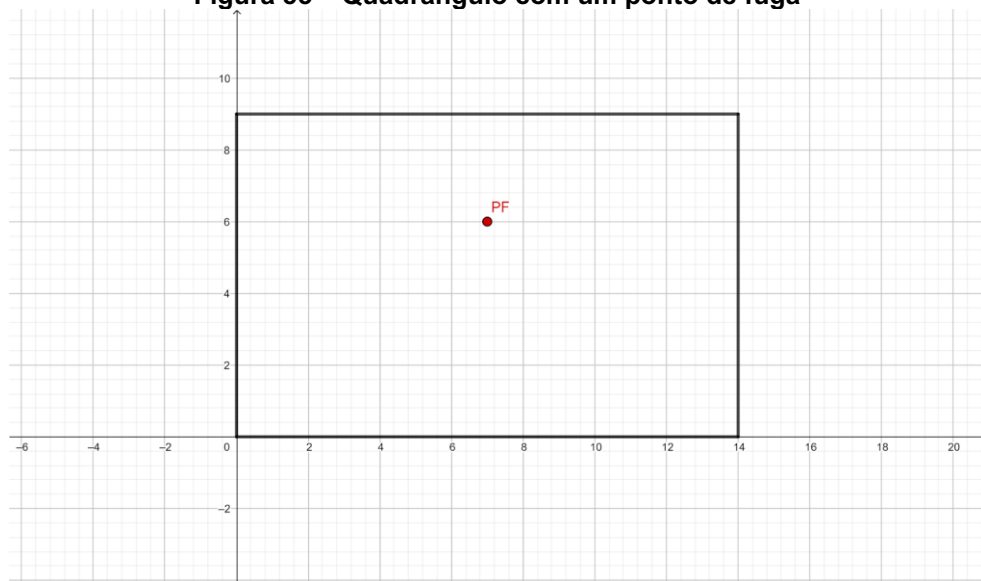
O GeoGebra é um software dinâmico de Matemática que reúne ferramentas para a exploração, em apenas um ambiente, de diferentes campos da Matemática como a geometria, álgebra, estatística e cálculo. O GeoGebra se apresenta como uma ferramenta interessante no contexto educacional pois dispõe de uma interface fácil de ser explorada e utilizada por estudantes de todos os níveis de Ensino. Para esta atividade, o GeoGebra será explorado como uma ferramenta de construção geométrica.

Ao estudante não familiarizado com o GeoGebra e suas ferramentas, recomenda-se a leitura e a realização de atividades práticas contidas no livro Introdução ao GeoGebra¹. Esse material é resultado de um projeto desenvolvido durante a graduação com o objetivo de desenvolver um tutorial para a apresentação de ferramentas, utilidades e atividades do GeoGebra Classic.

A seguir será apresentada uma possibilidade de construção de uma malha quadriculada utilizando o GeoGebra. O intuito da atividade não é fazer com que o estudante utilize um passo a passo pronto, mas sim que ele mobilize conhecimentos geométricos para relacionar a técnica desenvolvida no Renascimento na criação de diferentes tipos de cenas.

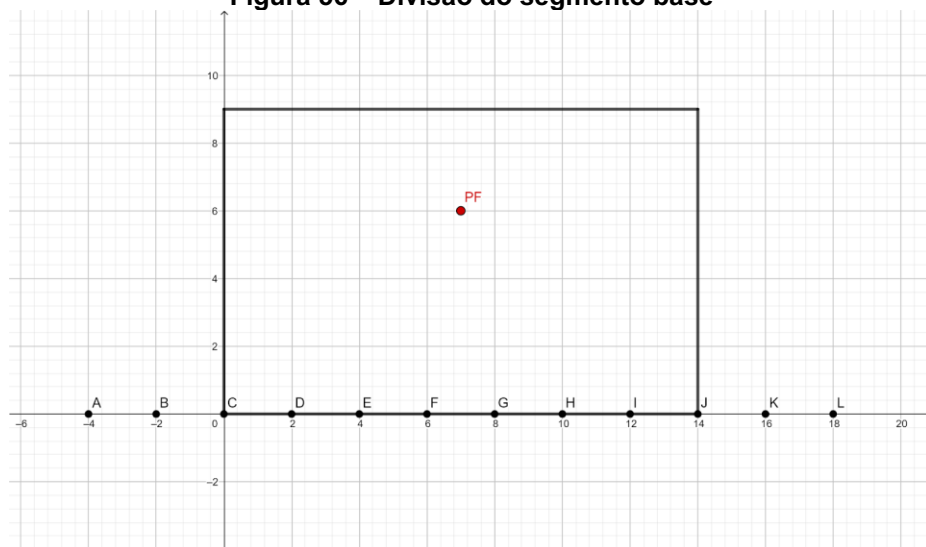
1º Passo: determinação do quadrângulo o qual delimita o plano da composição e posicionamento do ponto de fuga (Figura 55).

¹ Material disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/dcbbwgtgz>>

Figura 55 – Quadrângulo com um ponto de fuga

Fonte: Autoria própria (2022).

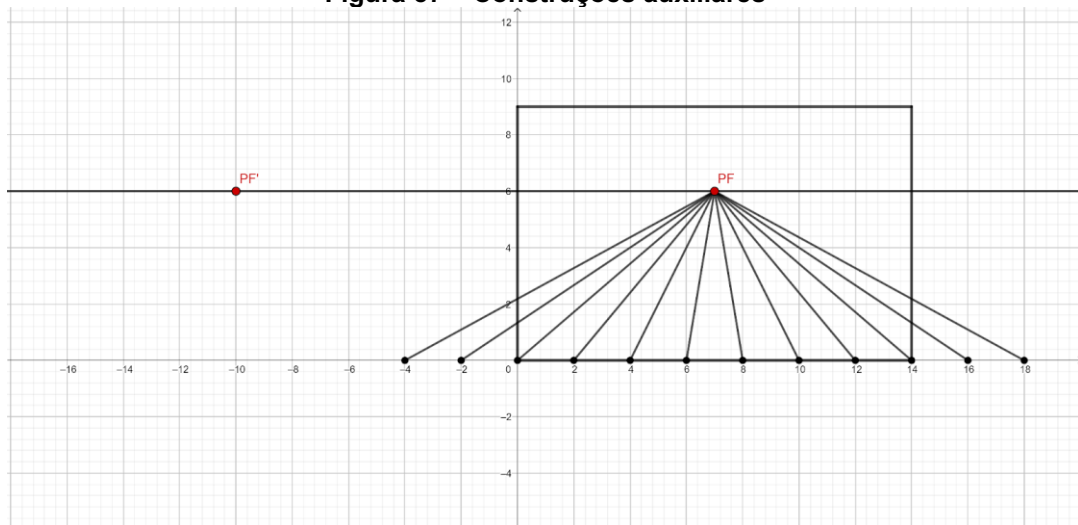
2º Passo: divisão do segmento base. De acordo com Alberti, essa divisão deve ser proporcional à altura estipulada para o homem da pintura. Entretanto, nessa proposta, o estudante deverá determinar essa divisão de acordo com a quantidade de quadriláteros e profundidade desejada para a composição (Figura 56).

Figura 56 – Divisão do segmento base

Fonte: Autoria própria (2022).

3º Passo: Construção dos segmentos determinados pelos pontos da divisão do segmento base e pelo ponto de fuga. Construção do ponto auxiliar situado na mesma altura do ponto de fuga (Figura 57).

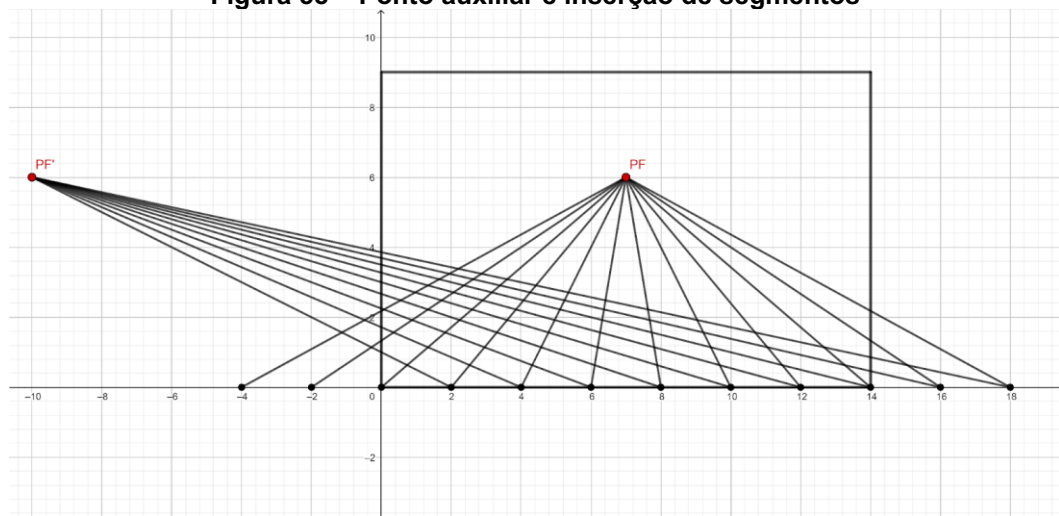
Figura 57 – Construções auxiliares



Fonte: Autoria própria (2022).

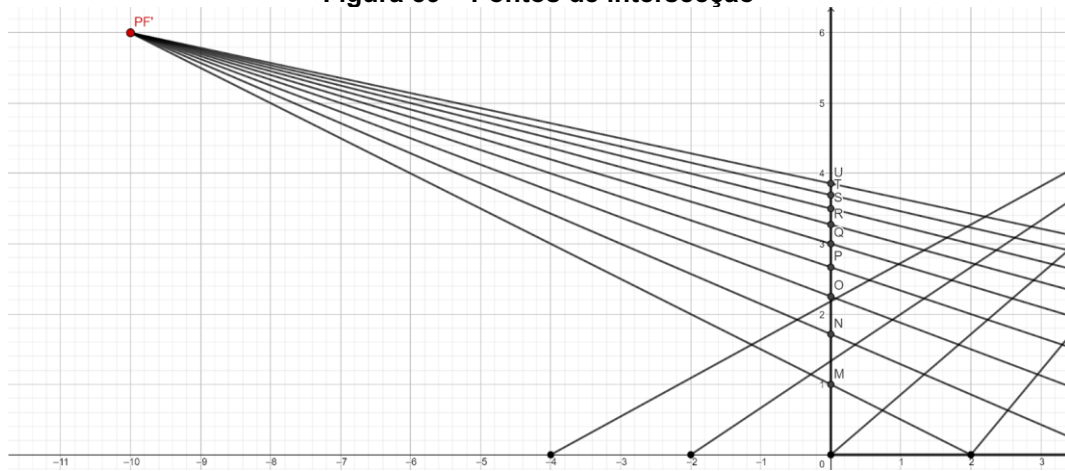
4º Passo: Construção dos segmentos determinados pelo ponto auxiliar e os pontos da divisão do segmento base (Figura 58).

Figura 58 – Ponto auxiliar e inserção de segmentos



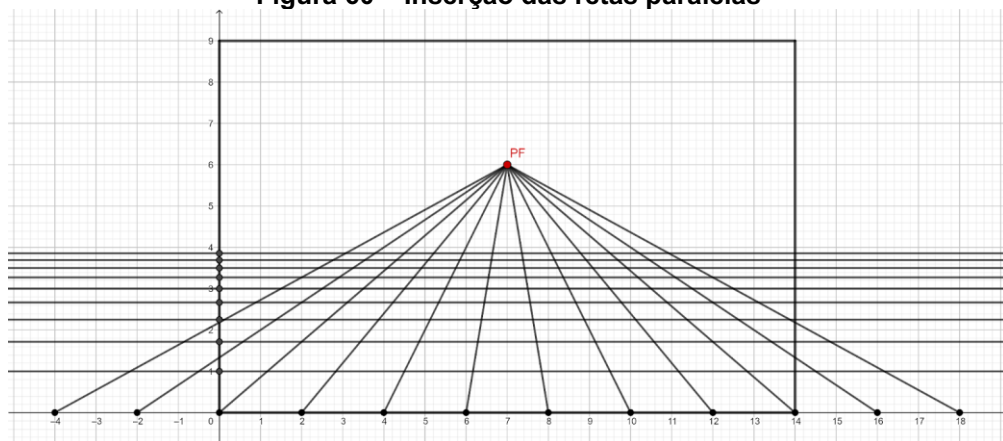
Fonte: Autoria própria (2022).

5º Passo: Determinação dos pontos de intersecção entre os segmentos construídos anteriormente e o segmento vertical do quadrângulo (Figura 59).

Figura 59 – Pontos de intersecção

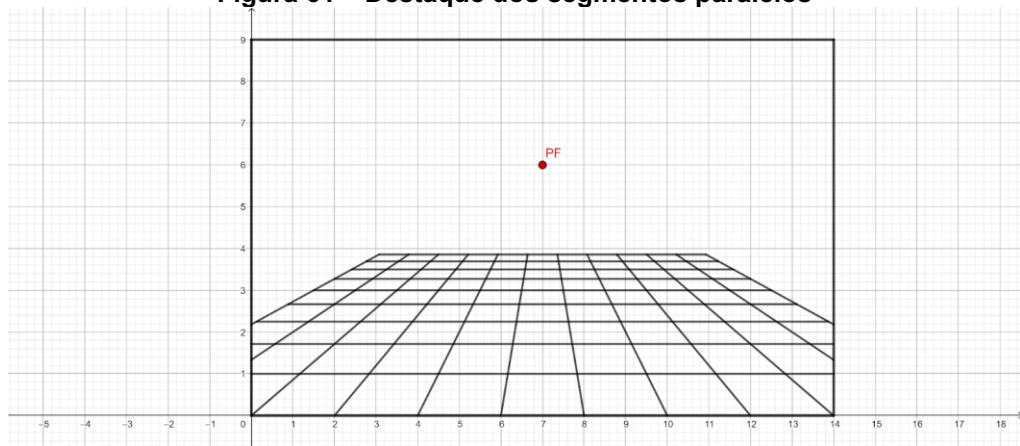
Fonte: Autoria própria (2022).

6º Passo: Construção de retas paralelas ao segmento base a partir dos pontos de intersecção determinados anteriormente (Figura 60).

Figura 60 – Inserção das retas paralelas

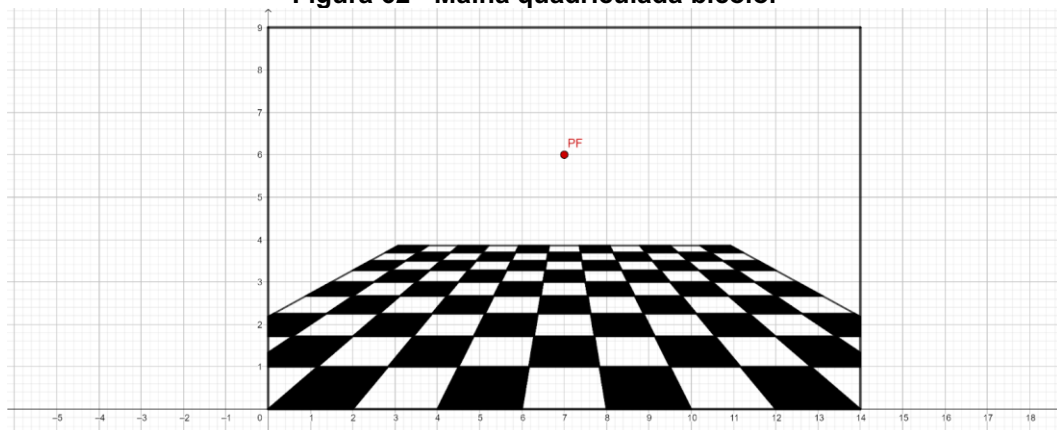
Fonte: Autoria própria (2022).

7º Passo: Determinação dos segmentos paralelos ao segmento base (Figura 61).

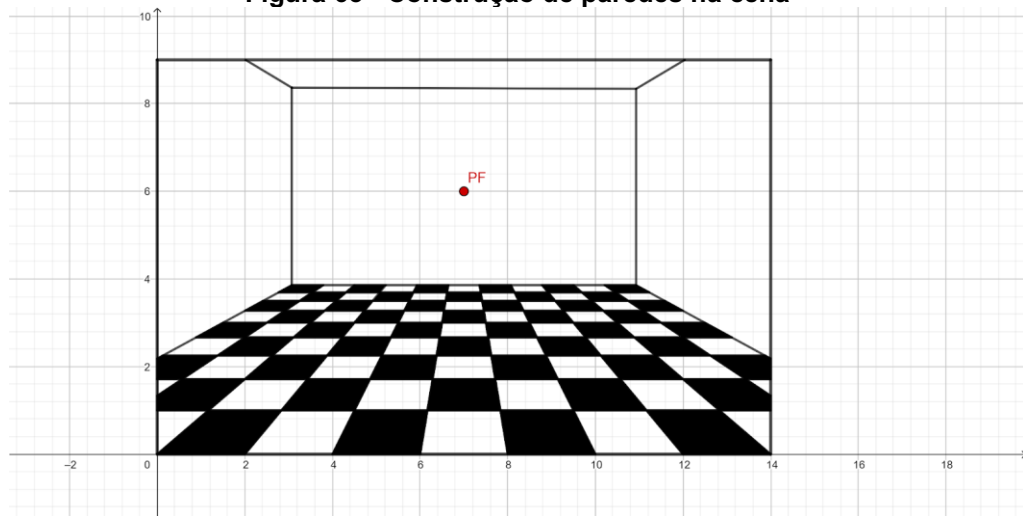
Figura 61 – Destaque dos segmentos paralelos

Fonte: Autoria própria (2022).

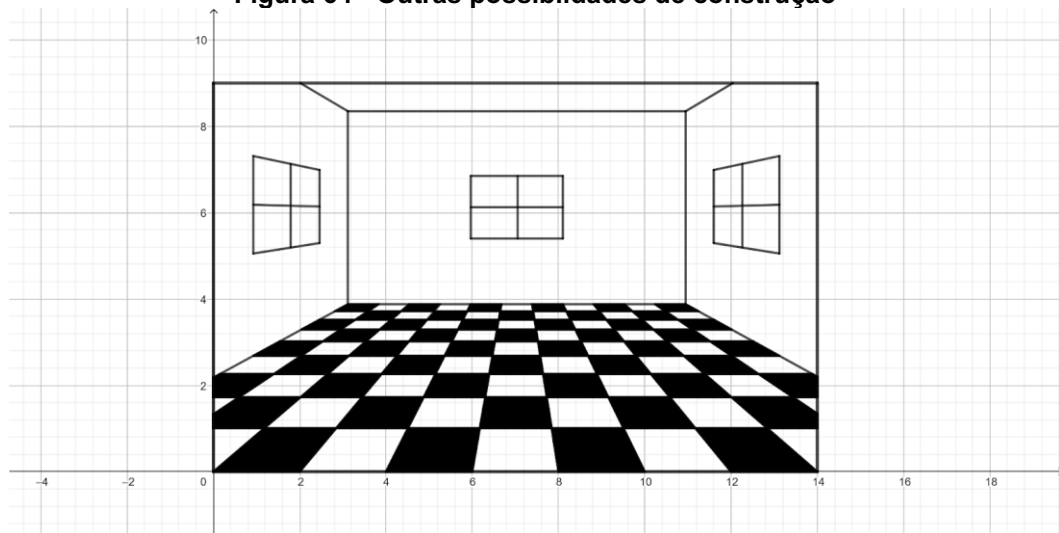
Com os passos determinados anteriormente, é possível construir no GeoGebra uma malha quadriculada mantendo as propriedades de proporção determinadas por Alberti. A partir da atividade desenvolvida, pode-se avançar com propostas de novas práticas. Os estudantes podem incrementar as construções já realizadas, podendo adicionar cores à malha quadriculada ou construir cenários em perspectiva através da base já produzida (Figuras 62, 63 e 64).

Figura 62 - Malha quadriculada bicolor

Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 63 - Construção de paredes na cena

Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 64 - Outras possibilidades de construção

Fonte: Autoria própria (2022).

O propósito dessa atividade é fazer com que o estudante coloque em prática, através de um software dinâmico de construção geométrica, o processo de desenvolvimento de imagens tridimensionais proposto por Alberti no século XIV. A priorização do GeoGebra para o desenvolvimento da atividade é justificada pela série de possibilidades que um ambiente dinâmico proporciona no processo de aprendizagem de um conceito matemático.

Um ambiente dinâmico pode ser caracterizado como

[...] aquele que possibilita ao aluno manipular os objetos dentro do próprio site ou por meio de ferramentas por ele disponibilizadas. A manipulação, ao tornar objetos abstratos em concretos, favorece os processos de construção do conhecimento. Segundo a perspectiva construtivista, ao manipular objetos o indivíduo desenvolve relações que o auxiliam a entender os conteúdos a ele relacionados. (KALINKE, 2003, p.121)

Desse modo, ao estudante é criada a possibilidade de aplicar os conceitos teóricos da perspectiva linear de forma dinâmica e que favorece a manipulação de diferentes objetos matemáticos. Com a utilização do GeoGebra na construção de uma malha quadriculada em perspectiva, acredita-se que há o favorecimento do entendimento das relações matemáticas em cada escolha feita para a construção do procedimento ditado por Alberti. Em outras palavras, é considerado pertinente a mobilização de conhecimentos por parte do estudante ao determinar as diferentes ferramentas necessárias na realização da construção geométrica. Para construir cada ente matemático no GeoGebra, o estudante deve compreender o conceito teórico a ser utilizado para em seguida selecionar a ferramenta adequada. Nesse sentido, o processo da atividade não se resume apenas na repetição das etapas do método estudado.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como foco realizar um estudo sobre a história da representação do espaço tridimensional, delimitando o período temporal nos séculos referentes à Renascença Europeia. Por meio das pesquisas realizadas, alguns tópicos da História da Arte e da Ciência se mostraram relevantes para o ensino e aprendizagem na Educação Básica.

De modo geral, procurou-se construir um embasamento histórico e científico de modo a expor a importância do período renascentista na História da Matemática, justificando, assim, a necessidade de trazer os resultados deste estudo para o ambiente educacional, mais especificamente para o ensino da Matemática.

O intuito de estudar práticas renascentistas não se limitou ao desejo de destacar fatos históricos, mas se expandiu para o interesse em conhecer e reconstruir práticas experimentais, procurando entender como elas foram úteis e relevantes para a época e investigar como podem ser utilizadas no contexto educacional atual.

Ao se realizar um estudo bibliográfico sobre Arte e Matemática no período renascentista (séculos XIV a XVI), com ênfase na criação da perspectiva linear, foi possível destacar as contribuições provenientes dos estudos de Brunelleschi, Alberti e Dürer, revelando seus impactos na realidade as quais estavam inseridas, bem como as possibilidades que ainda hoje podem ser resgatadas através de um estudo histórico.

Por fim, ao elaborar propostas de atividades para abordar a história, o conceito e a técnica da perspectiva linear, com destaque para seus componentes matemáticos encontrou-se na construção e uso de um artefato concebido na Renascença uma oportunidade significativa de aprendizagem.

No início deste estudo cogitou-se a possibilidade de realização de oficinas práticas no Colégio Estadual do Paraná (CEP), que possui um espaço para a realização de atividades artísticas curriculares e extracurriculares, a Escolinha de Arte. No entanto, o trabalho de restauração do edifício que abriga essa instituição, previsto para o ano de 2020, entendeu-se de modo que, até a presente data, o espaço não apresenta condições de uso e não está totalmente acessível ao público interno e externo à Instituição.

Abordar um tema sob aspectos históricos pode parecer tarefa audaciosa demais frente aos recursos disponíveis nas etapas finais de um curso de graduação,

de modo especial na licenciatura. Recortes significativos, e alguns até limitadores, foram necessários, como a seleção de somente três personalidades históricas para a abordagem de um tema amplo e frutífero. No entanto, a audácia também permite adentrar a contextos desconhecidos que revelam entendimentos inéditos, dificilmente atingidos por outra via.

A realização deste estudo permitiu revisitar temas abordados em várias disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, de modo especial Geometria Plana e Espacial, Construções Geométricas, Laboratório de Ensino de Matemática, Didática da Matemática e Tecnologias no Ensino da Matemática, estando essa última em andamento. Isso ressalta o alcance de um dos principais objetivos da elaboração de um trabalho de conclusão de curso, que é o oportunizar ao graduando um espaço para o aprendizado e a vivência do processo de pesquisa em sua área de formação.

Ao entrelaçar resultados do estudo acerca da arte e da matemática no período renascentista com os componentes curriculares Arte e Matemática no Ensino Médio encontrou-se um contexto favorável e instigador para as propostas que foram apresentadas. No entanto alguns questionamentos ainda permanecem em aberto cuja investigação podem trazer consideráveis contribuições. Um deles seria: como entrelaçar o estudo da perspectiva linear com a Geometria Analítica no contexto da formação de professores, tendo o contexto histórico como norteador?

Para finalizar, uma citação de Alberti que revela o sentimento de convite ao permanente aprimoramento da investigação até aqui conduzida: “Todo aquele que deseja que suas coisas sejam agradáveis e aceitas pela posteridade deve primeiramente refletir com cuidado sobre o que tem a fazer, e depois, torná-lo bem-acabado com todo o esmero.” (ALBERTI, p. 1999).

REFERÊNCIAS

- ALBERTI, L. B. **Da Pintura**. Tradução de Antonio da Silveira Mendonça, 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1999.
- ALBUQUERQUE, Marcelo. **Perspectiva**. Belo Horizonte, 2017. Disponível em: <<https://arteculturas.com/2017/04/26/perspectiva>> Acesso em: 29 out. 2021.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo. Editora: Blucher, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**, 1998.
- BURKE, P. **O renascimento**. 1. ed. Lisboa: Texto & Grafia, 2008.
- BURCKHARDT, J. **A cultura do Renascimento na Itália**. Brasília: Universidade de Brasília, 1991.
- BYINGTON, E. **O projeto do Renascimento**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.
- CINQ HOMMES DEBOUT DANS UNE ARCHITECTURE VOUTÉE EN PERSPECTIVE. **Louvre**, 2022. Disponível em: <collections.louvre.fr/en/ark:/53355/cl020003337>
- EDGERTON, S, Y. **The Renaissance rediscovery of linear perspective**, New York: Basic Books, 1975.
- FAZIO, M.; MOFFETT, M.; WODEHOUSE, L. **A história da arquitetura mundial**. 3. Ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.
- FANELLI, G. **BRUNELLESCHI**. New York: Firenze Scala Books, 1980.
- FLORES C. R. A problemática do desenho em perspectiva: uma questão de convenção. **Revista Zetetiké**, Campinas, v. 11, n. 19, p.81-99, jan/jun, 2002.
- FLORES, C. R. **Olhar, Saber, Representar**: Ensaio sobre a representação em perspectiva. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003
- FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Como representar um piso quadriculado: história da perspectiva e ensino de geometria. **Bolema**, Rio Claro, v. 18, n. 24, p. 79-93, set. 2005.

FLORES, C.R. Teoria e representação geométrica na obra de Albrecht Dürer: um ensino de matemática para pintores e artesãos. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 11, p. 179-188, set, 2007.

GOMBRICH, E. H. **A História da Arte**. 16. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2000 .

GONÇALVES, T. S. **Uma introdução à geometria projetiva para o ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Curso de Mestrado Profissional-PROFMAT, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2013.

ISAACSON, W. **Leonardo da Vinci**. 1. Ed. – Rio de Janeiro: Intrínseca, 2017.

KALINKE, M. A, **Internet na educação**. Curitiba: Chain, 2003.

KLINE, M. **Mathematics in western culture**. New York: Oxford Univ, 1953.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 2. ed. rev. Campinas: Autores associados, 2009.

LOPES, I. C. Giordano Bruno: entre o geocentrismo e o heliocentrismo. **Griot: Revista de Filosofia**, Sobral, v. 9, n. 1, p. 1-25, 2014.

PANOFSKY, E. **A perspectiva como Forma Simbólica**. Lisboa: Edições 70, 1993.

PESSANHA, J. A. M. **Humanismo e Pintura**. Arte e Pensamento, 1994, Disponível em: < <https://artepensamento.ims.com.br/item/humanismo-e-pintura/>> Acesso em: 20 abr, 2022.

THUILLIER, P. **De Arquimedes a Einstein: A face oculta da invenção científica**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1994.

SAITO, F. Instrumentos e o "saber-fazer" matemático no século XVI. **Tecnologia e Sociedade**, Curitiba, v. 9, n. 18, 2013.

SAITO, F. Entre o Natural e o Artificial: Visualização e Representação no Século XVI. **Revista Científica das áreas de História, Letras, Educação e Serviço Social**, Belo Horizonte v. 13, n.1, 2020.

SAITO, F. Geometria e óptica no século xvi: a percepção do espaço na perspectiva euclidiana . **Educ. Mat. Pesqui**, São Paulo, v. 10, n. 2, pp. 386-416, 2008.

SUÁREZ, C. A. C. **La geometria de Alberto Durero**: estudio y modelación de sus construcciones. Bogotá: Fundación Universidade de Bogotá, 2006.

Vírus da Arte. Disponível em: <www.virusdaarte.net>

WikiArt. Disponível em: <www.wikiart.org>

ZALESKI F. D. **Matemática e Arte**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.