PRODUTO EDUCACIONAL CACIONAL

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

MATEMÁTICA

SISTEMAS LINEARES

Autores : Caio Luiz Escobar dos Santos
Leonardo Sturion

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + y = 35 \end{cases}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Caio Luiz Escobar dos Santos
Leonardo Sturion

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

SOLVING PROBLEMS IN HIGH SCHOOL THROUGH LINEAR SYSTEMS WITH THE HELP OF GEO GEBRA

Produto Educacional apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do Programa de Pós-graduação em Matemática - PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Sturion

Londrina
2023

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

CAIO LUIZ ESCOBAR DOS SANTOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO, ATRAVÉS DE SISTEMAS LINEARESCOM O AUXÍLIO DO GEO GEBRA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 30 de Maio de 2023

Dr. Leonardo Sturion, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Alireza Mohebi Ashtiani, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Rogerio Mendonca Martins, Doutorado - Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp)

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este produto educacional gerado nesta pesquisa tem como objetivo principal: Levantar as principais dificuldades encontradas pelos alunos na resolução e interpretação gráfica de equações de sistemas lineares.

Este trabalho tem com motivação as atividades do autor com alunos das escolas públicas do ensino médio que o autor trabalha como docente.

A principal justificativa do trabalho pautou-se em estudos que mostravam que os alunos do Ensino Médio apresentam grandes dificuldades de resolver e interpretar sistemas lineares e trabalhar com polinômios algébricos, segundo Freitas (1999).

Observo que as razões das dificuldades dos alunos na interpretação dos resultados obtidos após a aplicação de um método de resolução a um sistema linear podem estar ligadas ao fato de que, métodos de resolução se reduzem a um algoritmo, enquanto que a interpretação dos resultados obtidos exige articulação entre diversos conceitos, que podem envolver diferentes quadros e registros de representação. Assim, as soluções de um sistema linear podem ser relacionadas, por exemplo, a pontos, retas e planos, o que permite se passar de uma manipulação algébrica a uma ilustração gráfica em dimensão 2 ou 3 (FREITAS, 1999, p. 24).

> Observo que as razões das dificuldades dos alunos na interpretação dos resultados obtidos após a aplicação de um método de resolução a um sistema linear podem estar ligadas ao fato de que, métodos de resolução se reduzem a um algoritmo, enquanto que a interpretação dos resultados obtidos exige articulação entre diversos conceitos, que podem envolver diferentes quadros e registros de representação. Assim, as soluções de um sistema linear podem ser relacionadas, por exemplo, a pontos, retas e planos, o que permite se passar de uma manipulação algébrica a uma ilustração gráfica em dimensão 2 ou 3 (FREITAS, 1999, p. 24).

Vamos ao encontro de Chervel (1990) quando destaca a relevância de situarmos historicamente um conteúdo escolar, descrevendo a sua evolução, quais as mudanças ocorridas em um determinado período e sempre estabelecendo ligações com o seu ensino e suas finalidades. Cabe-lhe dar uma descrição detalhada do ensino em cada uma de suas etapas, descrever a evolução da didática, pesquisar as razões da mudança, revelar a coerência interna dos diferentes procedimentos aos quais se apela, e estabelecer a ligação entre o ensino dispensado e as finalidades que presidem a seu exercício.

> Consideramos importante realizar um estudo histórico sobre sistemas de equações lineares, entendendo que, dessa forma, seria permitida uma melhor identificação de sua natureza epistemológica. Os vínculos de tipo epistemológico foram assim denominados por sugerirem que a finalidade da educação matemática é fazer com que

o estudante compreenda e se aproprie da própria Matemática concebida como um conjunto de resultados, métodos, procedimentos, algoritmos, etc. (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 70).

PRIMEIRA ETAPA – RETOMADA DE CONTEÚDOS

Nesta etapa os alunos irão retomar os conteúdos que serão necessários para a realização da oficina de Resolução de Problemas, aqui darei o exemplo de como dar sequência a uma atividade que irá retomar os conceitos de equação do primeiro grau com uma incógnita, conteúdo de extrema importância.

Após a realização da primeira situação problema, podemos também trabalhar com questões dentro de contexto para os alunos, mas nada impede que sejam trabalhadas com exercícios de fixação para os alunos.

SITUAÇÃO PROBLEMA

Jorge e Matheus foram a um restaurante. Na hora de pagar a conta, eles decidiram dividi-la assim: Jorge pagaria o dobro do que Matheus pagasse. O valor da conta foi de R$27,00. Quanto cada um deve pagar?

Fonte: adaptado de Dante (2015, p. 116).

Temos por objetivo com essa tarefa formalizar equação de primeiro grau com uma incógnita.

<u>Possíveis resoluções corretas:</u>

Quadro com alguns possíveis resultados:

Valores a serem pagos por Jorge e Matheus:	Valor total a ser pago:
17 + 8,50	25,50
18 + 9	27
19 + 9,50	28,50

Logo, o valor a ser pago por Jorge e Matheus será 18 e 9,50 reais, respectivamente. Pois, assim, Jorge pagará o dobro de Matheus e o total a ser pago será R$ 27,00.

$$2x + x\ 27$$

$$3x = 27$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{27}{3}$$

$$x = 9$$

Assim, Jorge pagará R$ 18,00 e Matheus R$ 9,00.

Possíveis resoluções incorretas:

$x + x = 27$

$2x = 27$

$x = \frac{27}{2}$

$x = 13,5$

Assim, Jorge irá pagar R$ 13,50 e Matheus R$ 13,50

2. $x + x = 27$

   $2x = 27$

   $x = 54$

Os dois pagarão R$ 54,00, no total.

Possíveis encaminhamentos:

Em relação às resoluções corretas pediremos aos alunos que expliquem seus procedimentos com o intuito de que possamos identificar como fizeram para resolver o problema.

Apresentamos a seguir possíveis encaminhamentos de como iremos agir diante das possíveis resoluções incorretas, apresentadas anteriormente.

No caso da primeira resolução incorreta falaremos para o aluno ler novamente o enunciado com mais cuidado e entender o que se pede, deste modo tentaremos fazer o aluno notar que o valor de um será diferente do outro, perguntando também se R$ 13,50 é o dobro de R$ 13,50 considerando que Jorge pagará o dobro de Matheus.

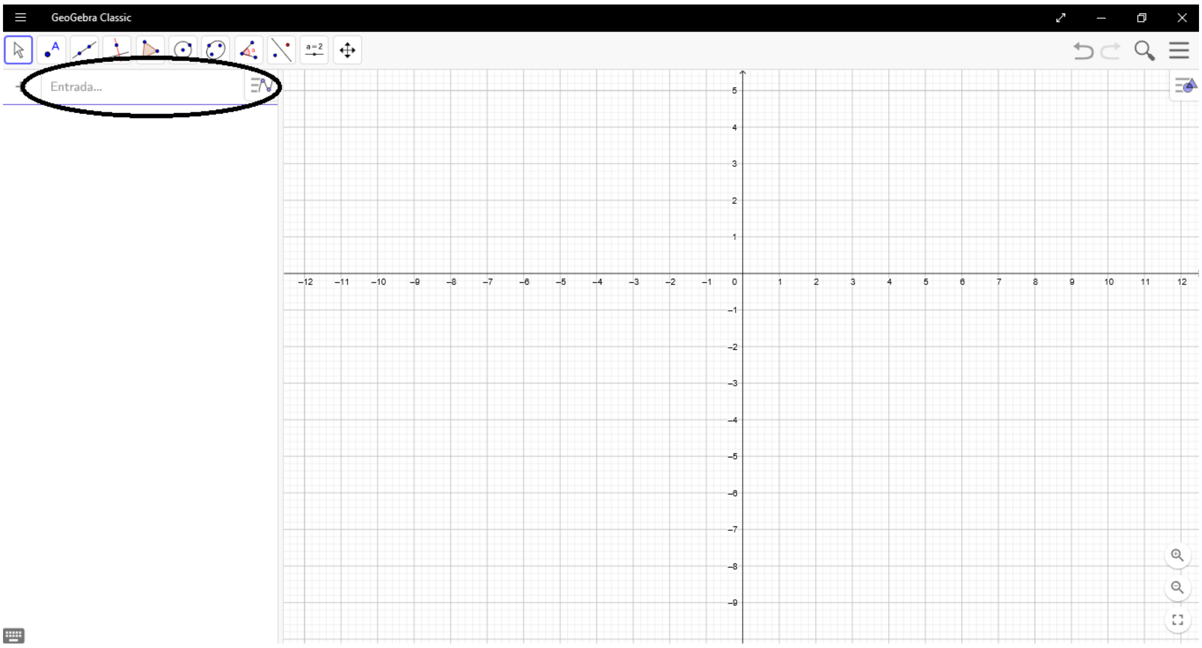
No caso da segunda resolução, faremos com que o aluno note, através de questionamentos, que o valor da conta não se alterará e sim o valor entre as pessoas. Perguntaremos ao aluno se o valor total a ser pago já está definido de alguma forma ou se ele ainda é desconhecido. Se o aluno continuar com a dificuldade de compreender o fato que o valor total é fixo, pediremos para ele ler o enunciado novamente com cuidado, auxiliando a interpretar o valor total a ser pago.

SEGUNDA ETAPA – OFICINA DE GEOGEBRA

Nesta etapa os alunos tiveram o contato com o *Software GeoGebra*, nela os estudantes foram apresentados a alguns comandos que julguei necessários para o andamento da oficina de Resolução de Problemas, por exemplo: Adicionar dados no leitor, alteração de cor na reta e Interseção de dois objetos.

No primeiro momento deixei com que os estudantes mexessem no software para conhecerem e se adaptarem ao software, na aula optei por os alunos utilizassem o software primeiramente no celular, para após irmos ao computador, pois os softwares para o celular tanto quanto no computador os comandos são idênticos, assim, neste momento optei para que os alunos fizessem algumas funções, tendo em vista sempre que iriamos trabalhar com equações do primeiro grau, de modo que, conseguíssemos estabelecer conexões durante a oficina.

Os dados são inseridos na parte descrita como “Entrada”, circulada na imagem abaixo. Aqui serão inseridas as equações pelos alunos.

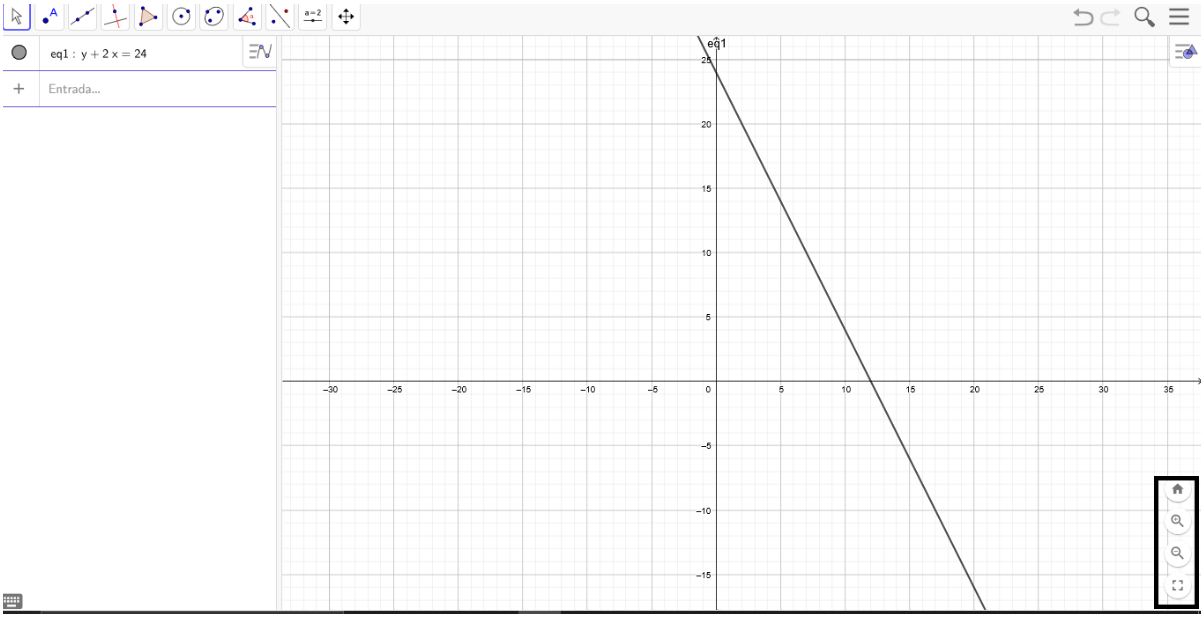


Caso a equação fique muito distante, no canto inferior direito temos alguns comandos para facilitar a localização da função, iremos focar nos três primeiros:

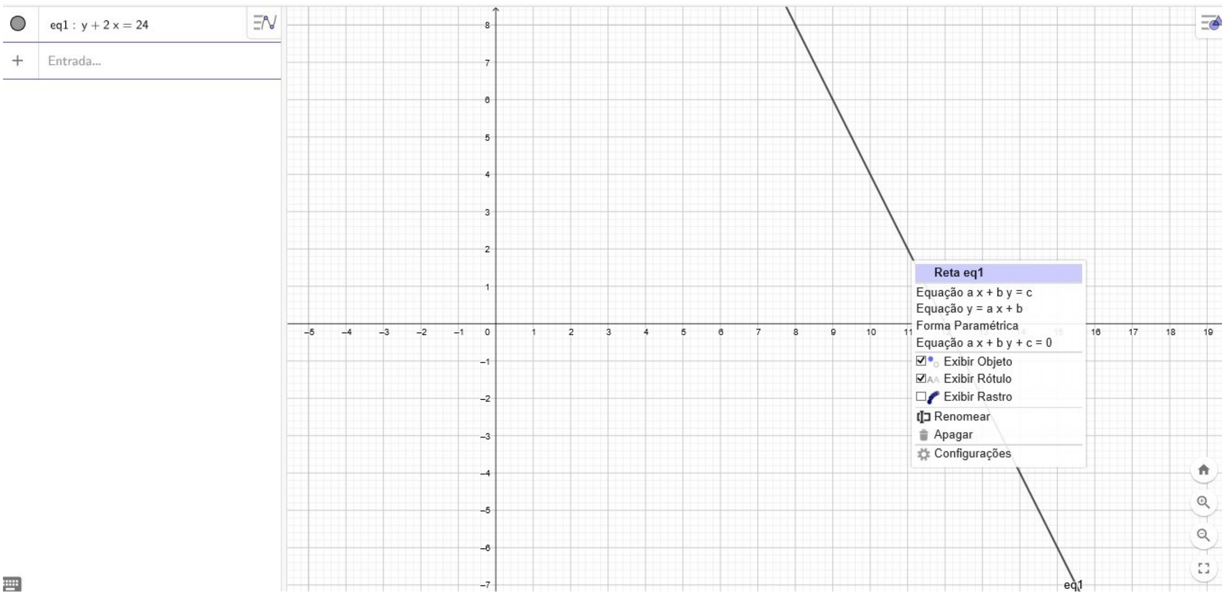
1º O primeiro representado pelo símbolo de uma casinha: ele faz com que o GeoGebra retorne a sua origem (0,0);

2º Zoom +: aproxima a imagem;

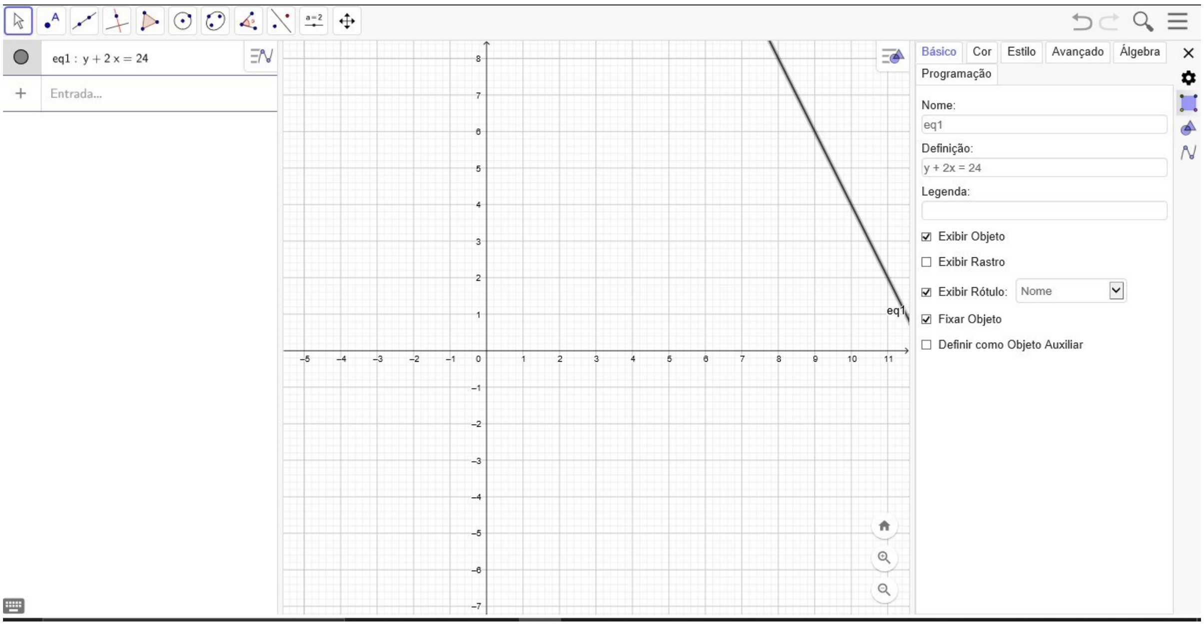
3º Zoom –: afasta a imagem.



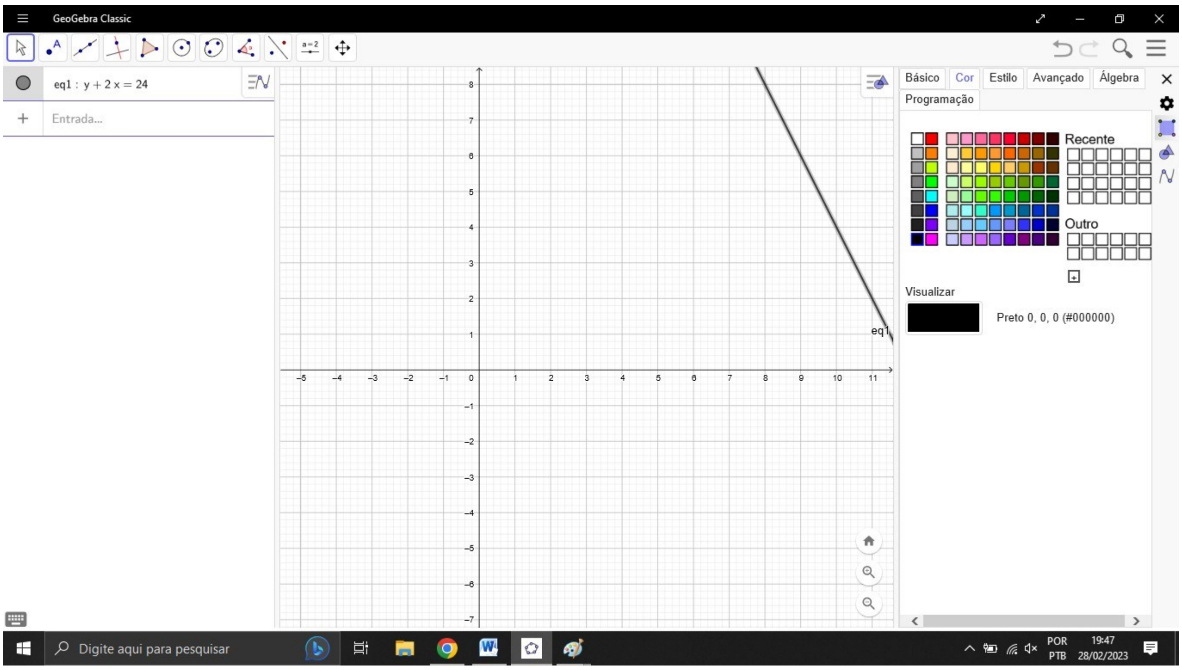
Clicando com o botão direito do mouse sobre a função teremos algumas informações acerca da mesma.



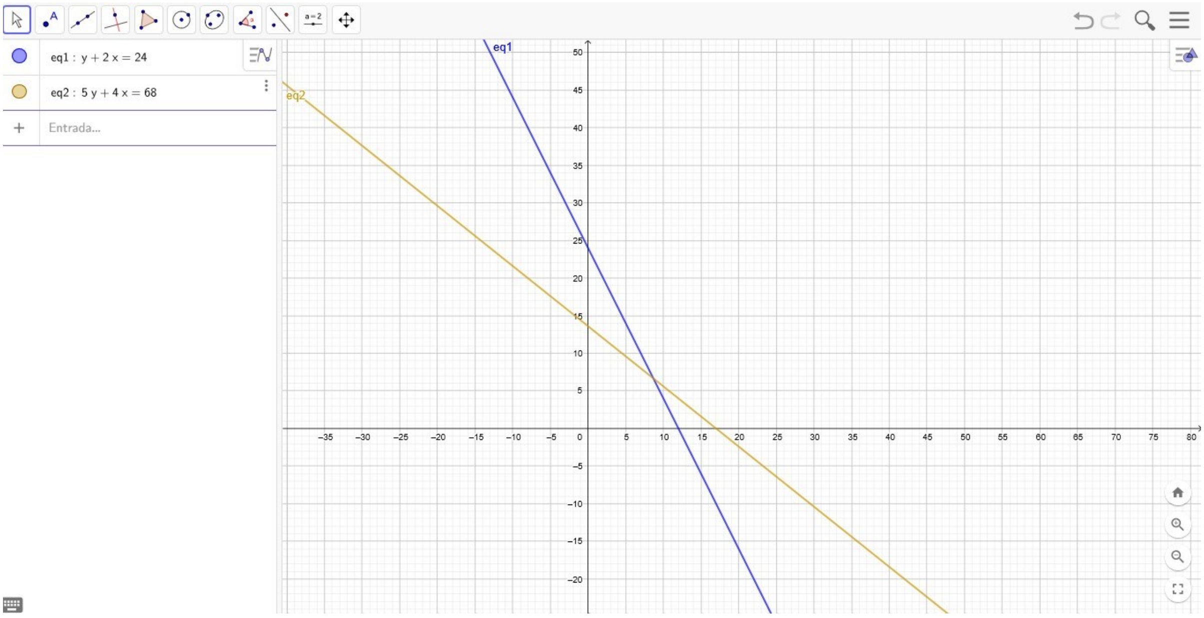
Iremos clicar em configurações e uma janela como essa deverá se abrir.



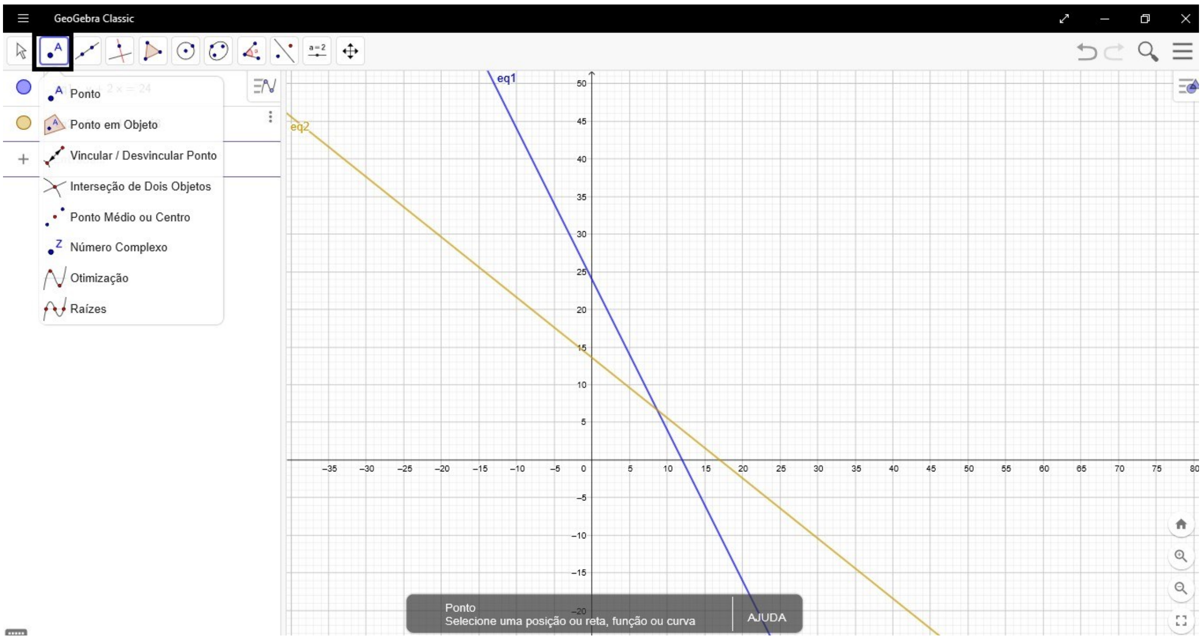
Iremos em cor, para alterar a cor da função para ficar mais fácil a identificação da mesma, após devemos escolher uma cor que lhe convém para o seu ambiente escolar, de modo a facilitar a visualização de todos na sala.



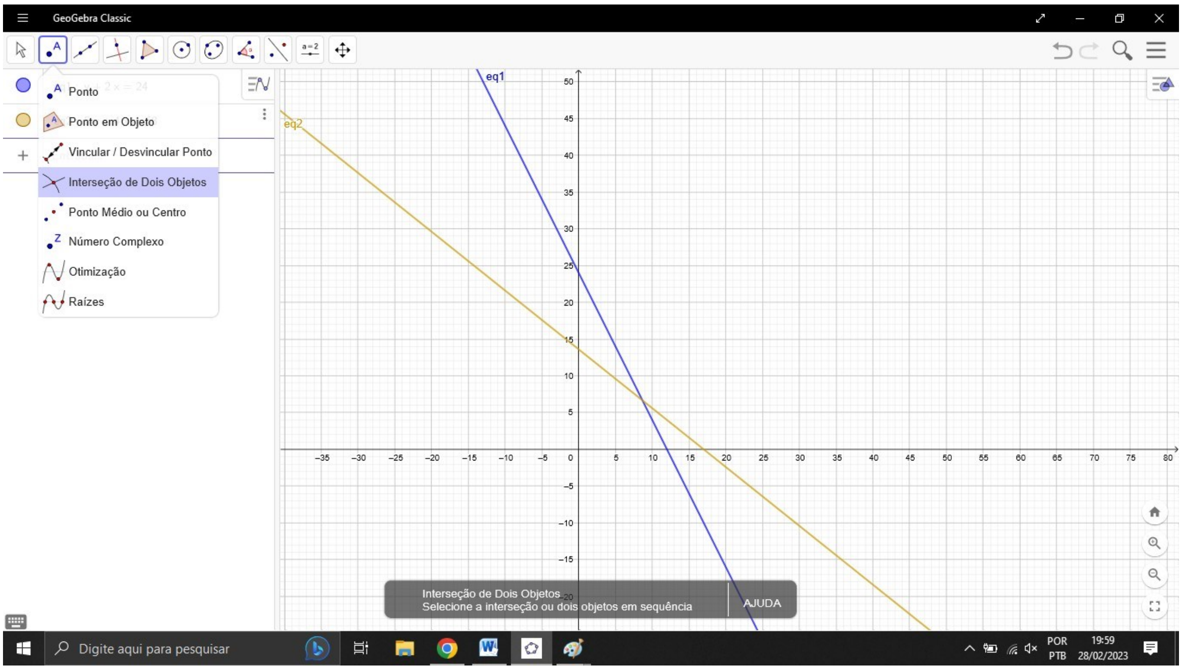
Repetiremos todos os passos para a segunda equação linear.



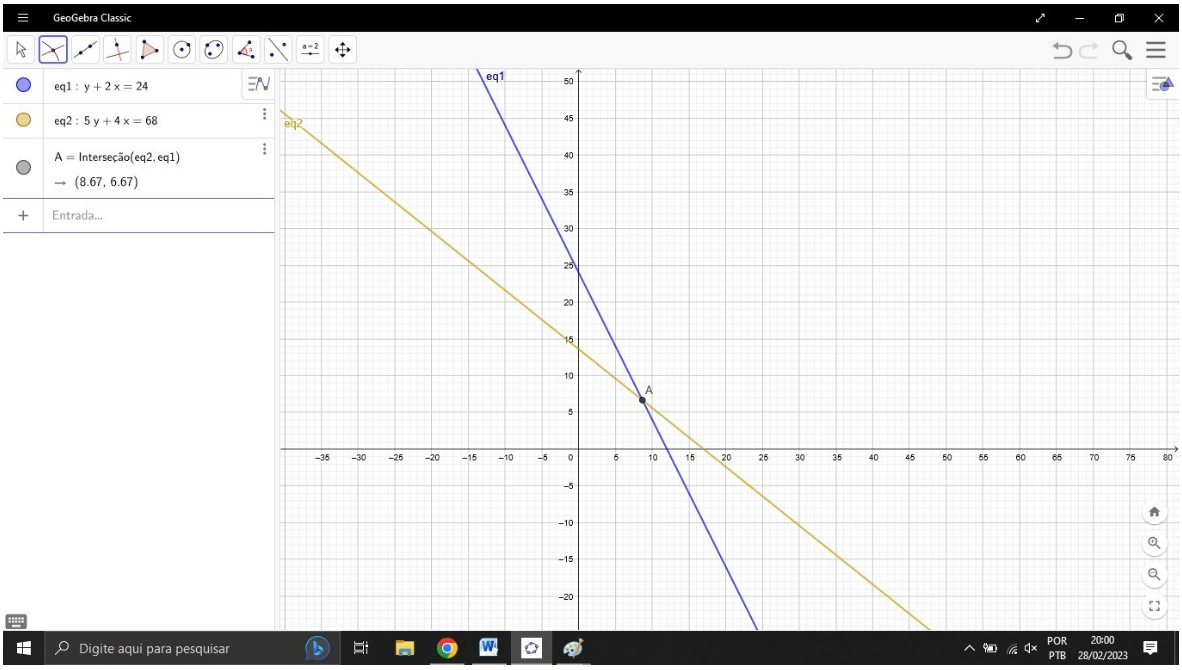
Após a entrada das duas equações e geramos suas representações gráficas devemos ir ao segundo quadrado do canto superior esquerdo, denominado ponto, e clicar com o botão esquerdo do mouse.



Após devemos clicar em “Interseção de dois objetos”.



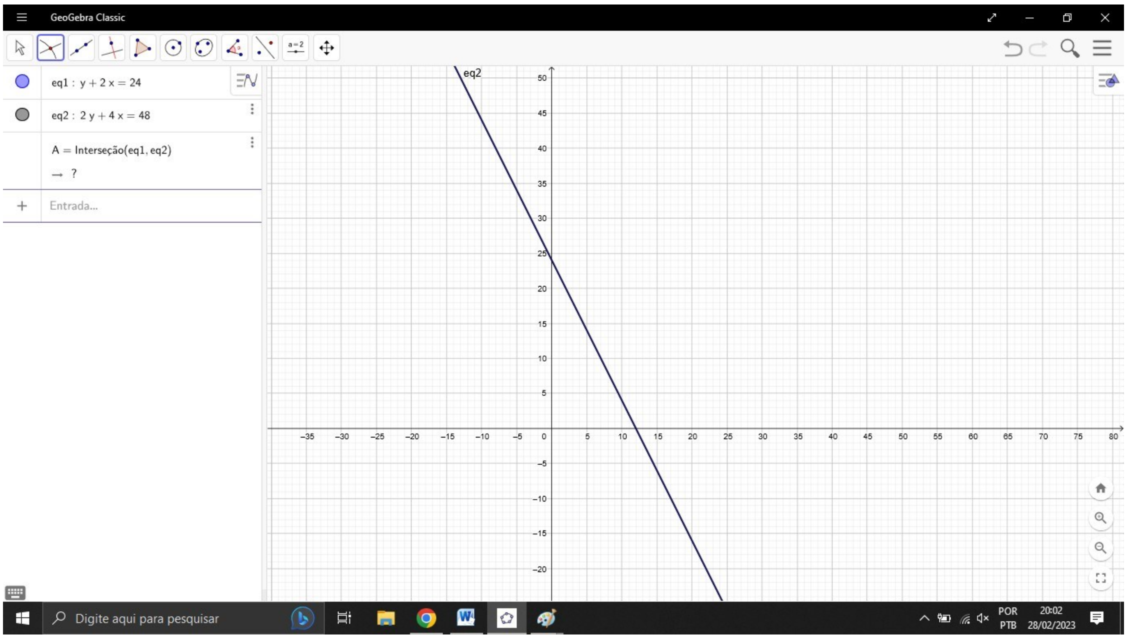
Selecionado a opção clicamos nas duas representações gráficas das equações, de modo a surgir um ponto denominado A.



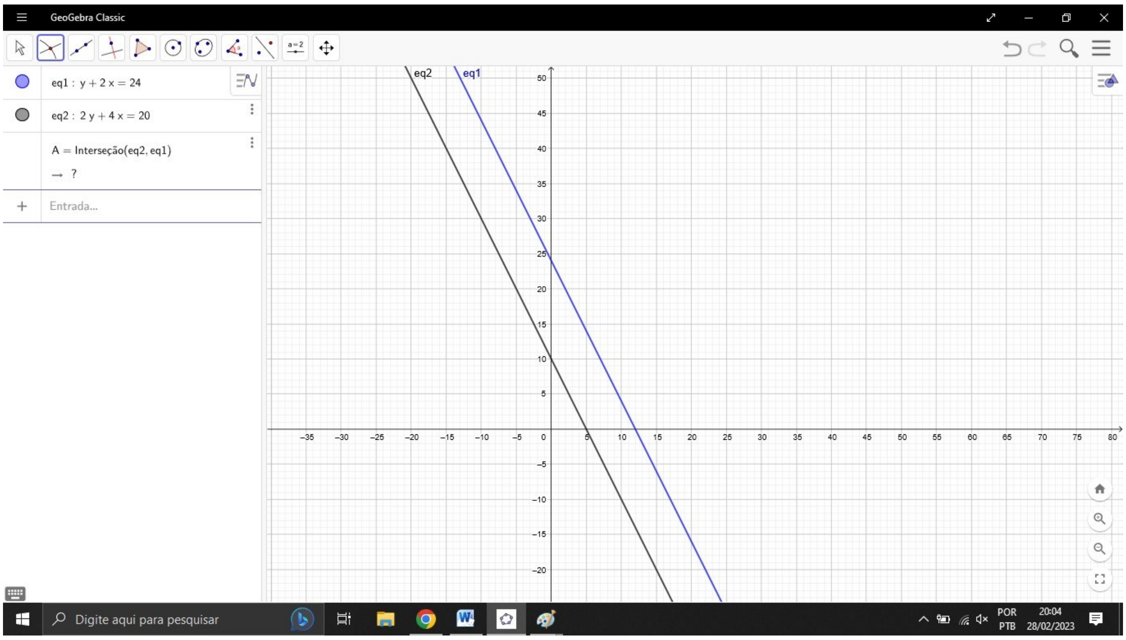
Esse ponto é a solução real dos sistemas lineares 2x2, sendo um Sistema Possível e Determinado, ou seja, um sistema possível e determinado possuindo apenas uma solução real.

Caso não surja um ponto, teremos duas opções.

Caso as duas representações gráficas das equações fiquem sobrepostas, isso é um Sistema Possível e Indeterminado, ou seja, um sistema possível e indeterminado possuindo infinitas soluções.



Caso as duas representações gráficas das equações fiquem paralelas, isso é um Sistema Impossível, ou seja, um sistema impossível não admitindo solução alguma.



TERCEIRA ETAPA – OFICINA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Aqui contará com algumas tarefas que podem ser utilizadas para a aplicação da oficina de Resolução de Problemas para o ensino de Sistemas Lineares, nada impede que você professor faça alterações para a sua realidade, deste modo, as atividades que constam aqui servem como um guia.

A parte de maior importância, além da elaboração do problema, são os passos para as possíveis duvidas do aluno, já que, ao fazer tal planejamento o professor se colocará no lugar do estudante, deste modo, você conseguirá ter um melhor desenvolvimento de sua oficina, já que, ao pensar como o estudante será possível estabelecer perguntas que nortearão os estudantes a matematizar.

TAREFA 1

Problema de sistema de duas variáveis com uma única solução.

Paguei R$ 75,00 por uma calça e uma blusa. A calça custou R$ 23,00 mais barato do que a blusa. Qual o preço da blusa?

Fonte: Autoria própria (2022).

Objetivos específicos:

- Relembrar alguns conceitos de equações;
- Descobrir como os alunos trabalham em grupos;
- Descobrir se os alunos conseguem diferenciar variável de incógnita.

Procedimentos:

- Será redigido na televisão o problema que os alunos devem resolver;
- Eles serão divididos grupos;
- Os alunos farão novamente a leitura nos grupos para iniciar a resolução, com os seus conhecimentos prévios;
- Passaremos nos grupos esclarecendo pequenas dúvidas e analisando as resoluções;
- A observar que a maioria dos grupos concluiu a tarefa, escolheremos alguns representantes para expor a resolução na lousa enquanto outros terminam;
- Faremos uma análise de todas as resoluções da lousa;

- Sistematizaremos sistema de equações com duas variáveis possível e determinado;
- E assim concluiremos a tarefa.

Possíveis dúvidas:
- Interpretar o problema;
- Resolver o sistema;
- Verificar se a resolução é correta.

Possíveis encaminhamentos:

No caso de o aluno não conseguir interpretar o problema, pedirei para que o aluno releia o problema, caso a dúvida persista perguntarei quais palavras do enunciado o aluno tem dúvida, e explicaremos, com ajuda do dicionário, o seu significado.

No caso de o aluno não conseguir resolver o sistema, pediremos para o aluno utilizar outra técnica, caso ainda assim não consiga, farei questionamentos que o induza a compreender o que é necessário para a resolução.

No caso de o aluno não conseguir verificar se a resolução está correta, pediremos para que o aluno substitua os valores calculados no lugar das incógnitas x e y.

Possíveis resoluções:

1) $C + B = 75$

$B - C = 23$

$2B = 98 \rightarrow B = 49$

$C + 49 = 75 \rightarrow C = 26$

2) Construção da tabela de resolução:

C	B	$C + B$	$B - C$	Correto?
0	75	75	75	Errado
10	65	75	55	Errado
20	55	75	35	Errado
25	50	75	25	Errado
26	49	75	23	Correto

Fonte: Autoria própria (2022).

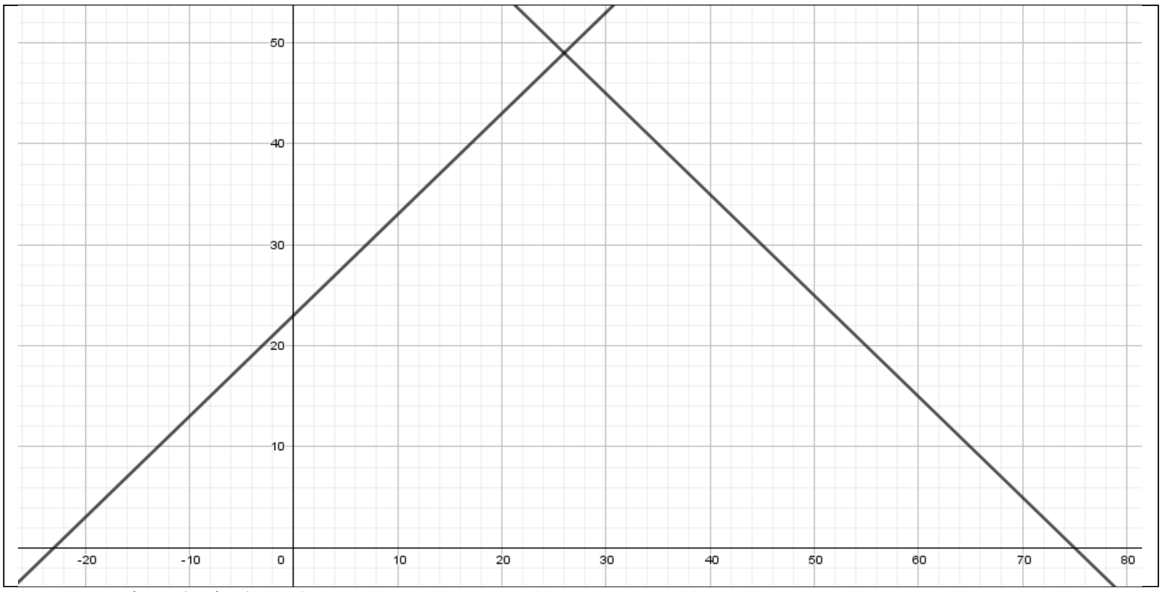
3) Geometricamente:

Se analisarmos as retas formadas pelas retas montadas pelo sistema e observar como ela se comporta, com algumas suposições podemos saber qual é o ponto onde as duas se cruzam e esta será a solução do sistema.

Supondo na primeira equação que $C = \mathbf{0}$ temos $B = \mathbf{75}$, quando $B = \mathbf{0}$ temos $C = \mathbf{75}$, com esses dois pontos podemos fazer a primeira reta.

Supondo na segunda equação que $C = \mathbf{0}$ temos $B = \mathbf{23}$, quando $B = \mathbf{0}$ temos $C = -\mathbf{23}$, como não conseguimos uma interseção entre as duas retas, supomos então outro ponto e supondo $C = \mathbf{30}$ temos $B = \mathbf{53}$, assim, completando o segundo segmento de reta conseguimos uma intersecção entre elas e descobrimos qual é a solução do sistema.

Resolução geométrica de um SPD:



Fonte: Autoria própria (2022).

<u>Proposta de sistematização:</u>

Um sistema de equações lineares $\mathbf{2}x\mathbf{2}$ com coeficientes reais é um conjunto de duas equações lineares reais, cada uma com as duas mesmas incógnitas x e y.

Uma solução de um sistema linear $\mathbf{2}x\mathbf{2}$ com coeficientes reais a_1, b_1, a_2·,b_2, c_1 e c_2

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

É um par $(x_1, y_1) \in R^2$ cujas coordenadas $x_1, y_1 \in R$ e satisfazem ambas as equações.

O sistema se diz possível e determinado quando admite uma única solução. Cada equação tem como soluções os valores encontrados para as incógnitas x e y, quando fazemos a conexão com a geometria as incógnitas são as coordenadas (x, y) dos pontos de uma reta, demodo que o sistema determinado, conforme as retas r_1 e r_2, representadas pelas duas equações,coincidam (DANTE, 2003).

TAREFA 2

Problema de sistema de duas variáveis com infinitas soluções.

Joana comprou uma borracha e dois lápis e pagou R$ 3,50. Marcos comprou 4 borrachas e 8 lápis e pagou quatro vezes mais que Joana. Quanto custou cada borracha e cada lápis?

Fonte: Autoria própria (2022).

<u>Objetivos específicos:</u>

- Relembrar alguns conceitos de equações;
- Descobrir como os alunos trabalham em grupos;
- Descobrir se os alunos conseguem diferenciar variável de incógnita.

<u>Procedimentos:</u>

Semelhante ao procedimento da Tarefa 1.

<u>Possíveis dúvidas:</u>

- Interpretar o problema;
- Resolver o sistema;
- Verificar se a resolução é correta.

<u>Possíveis encaminhamentos:</u>

Semelhante aos possíveis encaminhamentos da Tarefa 1.

<u>Possíveis resoluções:</u>

1) $B + 2L = 3{,}50$

$4B + 8L = 14,00$

Isolando o L na primeira equação obtemos: $B = 3,50 - 2L$.

Isolando o L na segunda equação obtemos: $4B = 14,00 - 8L \Rightarrow B = 3,50 - 2L$.

Logo, o sistema possui infinitas soluções.

2) Construir a tabela de resolução:

B	L	$B + 2L$	Correto?
3,50	0,00	3,50	SIM
0,00	1,75	3,50	SIM
1,50	1,00	3,50	SIM
0,50	1,50	3,50	SIM
1,00	1,25	3,50	SIM

Fonte: Autoria própria (2022).

Possui infinitas soluções.

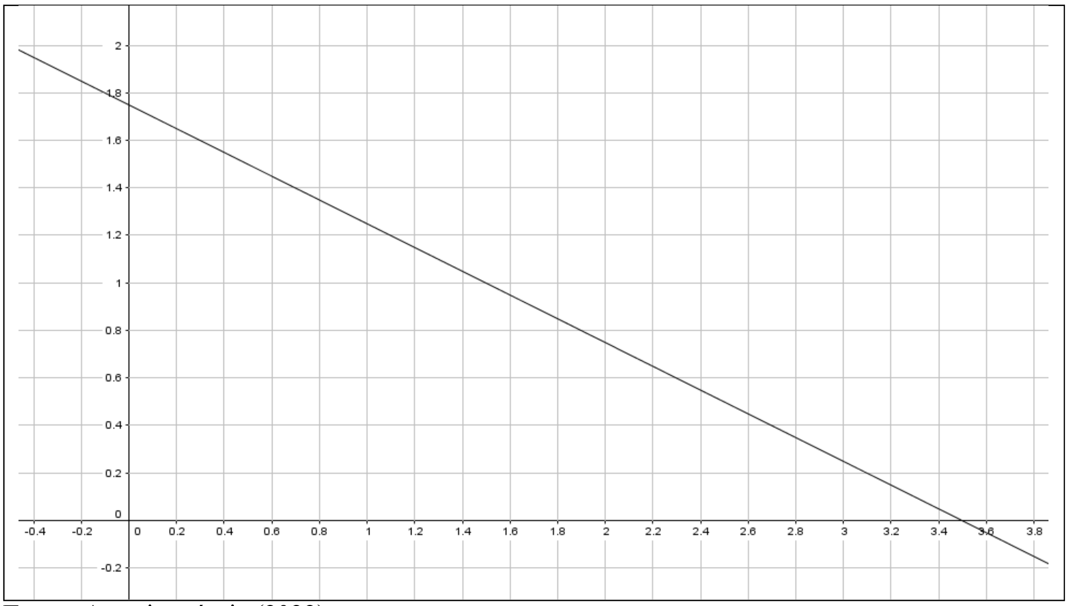
3) Geometricamente:

Se analisarmos as retas oriundas das equações do sistema e observarmos como elas se comportam, com algumas suposições, podemos saber qual é o ponto onde as duas retas se cruzam e esta será a solução do sistema.

Supondo na primeira equação que $B = 3,50$ $C = 0$ temos $L = 0$, quando $B = 0$ temos $L = 1,75$, com esses dois pontos podemos traçar a primeira reta.

Supondo na segunda equação que $B = 1,50$ temos $L = 1,00$, quando $B = 1,00$ temos $L = 1,25$, conseguimos então uma infinidade de interseções entre as duas retas e, assim, descobrimos a solução do sistema, ou seja, que as retas são coincidentes.

Resolução Geométrica de um SPI:



Fonte: Autoria própria (2022).

<u>Sistematização:</u>

Um sistema de equações lineares $2x2$ com coeficientes reais é um conjunto de duas equações lineares reais, cada uma com as duas mesmas incógnitas x e y.

Uma solução de um sistema linear $2x2$ com coeficientes reais a_1, b_1, a_2·,b_2, c_1 e c_2

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

É um par (x_1, y_1) ϵ R² cujas coordenadas x_1, y_1 ϵ R e satisfazem ambas as equações.

O sistema se diz possível e indeterminado quando admite infinitas soluções. Cada equação tem como soluções os valores encontrados para as incógnitas x , y quando fazemos a conexão com a geometria as incógnitas são as coordenadas (x, y) dos pontos de uma reta, demodo que o sistema possível e indeterminado, conforme as retas e r_1, r_2 representadas pelas duas equações, se sobrepõem, sendo elas coincidentes (DANTE, 2015).

TAREFA 3

Problema de sistema de duas variáveis sem solução.

João foi ao mercado e comprou 2L de leite e um pacote de bolacha e pagou R$ 5,50. Maria foi nesse mesmo mercado e compro 4L de leite e dois pacotes de bolacha e pagou R$ 9,00. Qual o preço do pacote de bolacha?

Fonte: Autoria própria (2022).

Objetivos específicos:

- Relembrar alguns conceitos de equações;
- Descobrir como os alunos trabalham em grupos;
- Descobrir se os alunos conseguem diferenciar variável de incógnita.

Procedimentos:

- Semelhante ao procedimento da Tarefa 1.

Possíveis dúvidas:

- Interpretar o problema;
- Resolver o sistema;
- Verificar se a resolução é correta.

Possíveis encaminhamentos:

Semelhante aos possíveis encaminhamentos da Tarefa 1.

Possíveis Resoluções:

1) $\mathbf{2}L + B = 5{,}50$

$\mathbf{4}L + \mathbf{2}B = 9{,}00$

Ao resolver o sistema, notamos que é impossível. Logo, não existe uma solução.

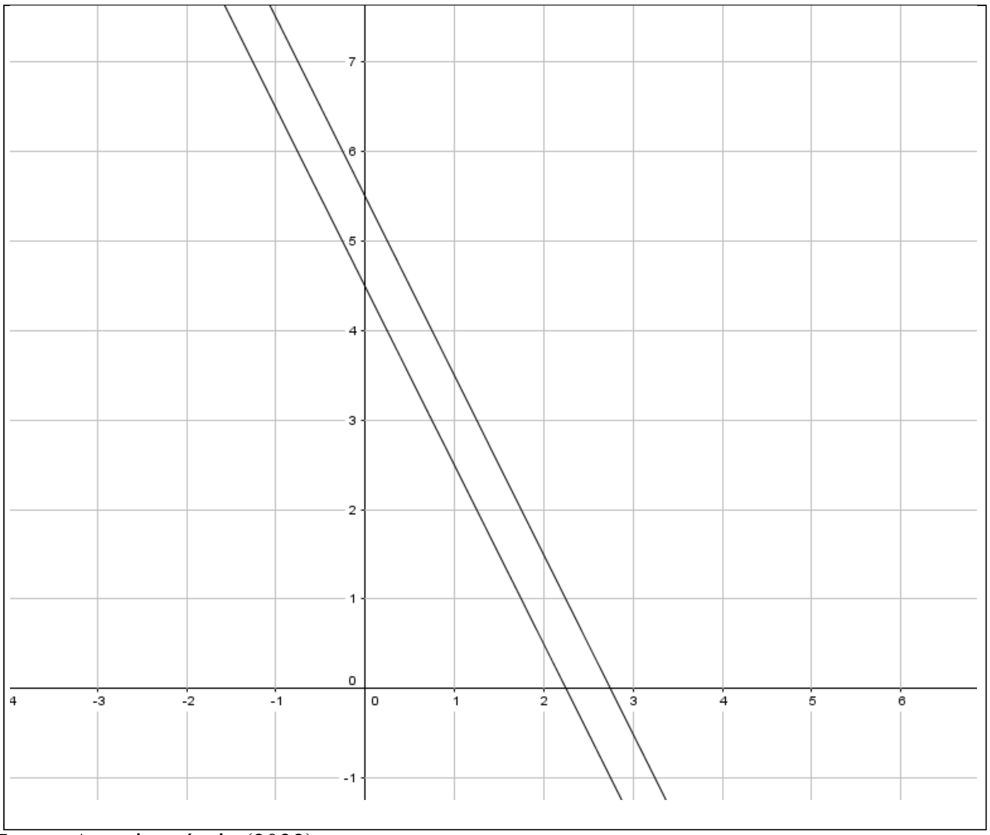
2) Geometricamente

Se analisarmos as retas oriundas das equações do sistema e observarmos como elas se comportam, com algumas suposições podemos saber qual é o ponto onde as duas retas se cruzam e esta será a solução do sistema.

Supondo na primeira equação que $L = 2{,}75$ temos $B = 0{,}00$, quando $L = 0{,}00$ temos $B = 5{,}50$, com esses dois pontos podemos traçar a primeira reta.

Supondo na segunda equação que $L = 2{,}25$ temos $B = 0{,}00$, quando $L = 0{,}00$ temos $B = 4{,}50$, conseguimos então nenhuma interseção entre as duas retas e, assim, descobrimos que solução do sistema é inexistente, ou seja, as retas são paralelas.

Resolução Geométrica de um Sistema Impossível:



Fonte: Autoria própria (2022).

Sistematização:

Um sistema de equações lineares $2x2$ com coeficientes reais é um conjunto de duas equações lineares reais, cada uma com as duas mesmas incógnitas x e y.

Uma solução de um sistema linear $2x2$ com coeficientes reais a_1, b_1, a_2, b_2, c_1 e c_2.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

É um par $(x1, y1)$ ϵ $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas $x1, y1$ ϵ $\mathbb{R}$ e satisfazem ambas as equações.

O sistema se diz possível indeterminado quando não admite solução. Cada equação tem como soluções os valores encontrados para as incógnitas x e y, quando fazemos a conexão com a geometria as incógnitas são as coordenadas (x, y) dos pontos de uma reta, de modo que o sistema é impossível, conforme as retas r_1 e r_2 representadas pelas duas equações, nunca se encontram, ou seja, são paralelas (DANTE, 2003).

TAREFA 4

Problema de sistema de três variáveis.

Ana, Bia e Sara subiram juntas em uma balança e ela registrou 152 kg. Sara desceu e a balança registrou 99 kg. Em seguida, Sara subiu novamente na balança, mas Ana desceu, e o registro foi de 102 kg. Quanto pesa cada uma delas?

Fonte: Autoria própria (2022).

Objetivos específicos:

- Relembrar alguns conceitos de equações;
- Descobrir como os alunos trabalham em grupos;
- Descobrir se os alunos conseguem diferenciar variável de incógnita.

Procedimentos:

- Será redigido na televisão o problema que os alunos devem resolver;
- Eles serão divididos grupos;
- Os alunos farão novamente a leitura nos grupos para iniciar a resolução, com os seus conhecimentos prévios;
- Passarei nos grupos esclarecendo pequenas dúvidas e analisando as resoluções;
- Ao observar que a maioria dos grupos concluiu a tarefa, escolherei alguns representantes para expor a resolução na lousa enquanto outros terminam;
- Farei uma análise de todas as resoluções da lousa;
- Sistematizarei sistema de equações com duas variáveis possível e determinado;
- E assim concluirei a tarefa.

Possíveis encaminhamentos:

No caso de o aluno não conseguir interpretar o problema, pedirei para que o aluno releia o problema, caso a dúvida persista perguntarei quais palavras do enunciado o aluno tem dúvida, e explicarei, com ajuda do dicionário, o seu significado.

No caso de o aluno não conseguir resolver o sistema, irei pedir para o aluno utilizar outra técnica, caso ainda assim não consiga, farei questionamentos que o induza a compreender o que é necessário para a resolução.

No caso de o aluno não conseguir verificar se a resolução está correta, pedirei para que o aluno substitua os valores calculados no lugar das incógnitas x e y.

Possíveis Resoluções:

i) $A + B + S = 152$

ii) $A + B = 99$

iii) $B + S = 102$

De i) e iii) temos que $A = 50$, substituindo em A na ii) temos que $B = 49$, substituindo B em iii) temos que $S = 53$.

Sistematização:

Consideramos agora o sistema

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

de três equações com três incógnitas (x, y, z) . Estas equações definem, nesta ordem, os planos γ_1, γ_2 e $\gamma_3 \gamma_3$. Um termo (x, y, z) є R³ é solução do sistema quando o ponto $P = (x, y, z)$ pertence à interseção $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \gamma_3$, isto é, quando P está simultaneamente em cada um dos três planos.

Esperamos que este produto possa auxiliar futuros alunos e Professores no estudo sobre Sistemas Lineares.

REFERÊNCIAS

ANJOS, C. I.; SARAIVA, M. R. O. Crianças, sociabilidades e tecnologias digitais: contribuições para pensar a(s) infância(s) no mundo contemporâneo. In: BAIRRAL, M.; CARVALHO, M. **Dispositivos móveis no ensino de matemática:** tablets & smartphones.São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.**
Tradução de Hygino Hugueros Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto,1994.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa.
Teoria & Educação, n. 2, p. 177-229, 1990.

COLLETTE, J-P. **Historia de las matemáticas**. Tradução de Pilar González Gayoso.México: Siglo Veintiuno Editores, 1986.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. 1. ed. São Paulo:

Ática, 2003. DANTE, L. R. **Projeto Teláris:** matemática ensino

fundamental 2. São Paulo: Ática, 2015.

FREITAS, I. M. **Resolução de sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno.** 1999. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de SãoPaulo, São Paulo, 1999.

HATFIELD, L. L. Heuristical emphasis in the instrution of mathematical problem solving: Rationales and research. In: HATFIELD, L. L.; BRADBARD, D. A. (orgs.). **Mathematical Problem Solving:** papers from a research workshop. Colombus: ERIC, 1978.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática:** propostas e desafios.Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio deJaneiro: Ed. Interciência, 1978.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático.Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.