

CAROLINE CRISTINA DE SOUZA

**MODELO MATEMÁTICO PARA PREVISÃO
DO NÚMERO DE CASOS DE COVID-19**

TOLEDO

2021

CAROLINE CRISTINA DE SOUZA

**MODELO MATEMÁTICO PARA PREVISÃO DO
NÚMERO DE CASOS DE COVID-19
MATHEMATICAL MODEL FOR PREDICTING THE NUMBER OF
COVID-19 CASES**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção
do título de Licenciada em Matemática da
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR).

Orientador: Suellen Ribeiro Pardo Garcia

TOLEDO

2021



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

CAROLINE CRISTINA DE SOUZA

MODELO MATEMÁTICO PARA PREVISÃO DO NÚMERO DE CASOS DE COVID-19

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção
do título de Licenciada em Matemática da
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR).

Data de aprovação: 10 de dezembro de 2021.

Suellen Ribeiro Pardo Garcia

Doutorado

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Marcia Regina Piovesan

Mestrado

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Karen Carrilho da Silva Lira

Mestrado

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

TOLEDO

2021

Este trabalho é dedicado aos meus pais Claudinei e Marili que sempre me apoiaram.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela minha vida, por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados até aqui e pela minha filha que veio para me dar ainda mais força nessa caminhada.

Agradeço a minha família por todo apoio e ajuda, principalmente pelos incentivos para que eu nunca desistisse nos momentos mais difíceis.

Agradeço aos meus amigos, pela amizade e por todo o apoio ao longo dessa trajetória.

Agradeço todos os professores que conheci ao longo do curso, por terem contribuído de alguma forma no meu processo de formação profissional, pelos ensinamentos e amizades. Em especial agradeço a minha orientadora Suellen, por ter sido tão paciente, tão dedicada em me ajudar neste trabalho, por me ouvir e sempre me incentivar.

*“Não podemos prever o futuro,
mas podemos criá-lo.”
(Paul Zane Pilzer)*

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo de como os modelos matemáticos são utilizados para previsões dos números de casos de pessoas infectadas e de óbitos pela COVID-19, no Estado do Paraná. Apresenta-se um estudo dos modelos de crescimento exponencial, logístico e SIR (Suscetível - Infectado - Removido) e como o software Insight Maker é utilizado para as simulações. A abordagem da pesquisa é de caráter quantitativo, classificada como uma pesquisa exploratória e o procedimento técnico é um estudo de caso. Este estudo permitiu analisar e comparar graficamente o comportamento das funções do número de infectados e número de óbitos previstos pelo Modelo SIR em relação aos dados reais de casos de pessoas infectadas e de óbitos pela COVID-19, considerando o período de 19 de abril de 2020 até 17 de julho de 2020.

Palavras-chave: SIR. Insight Maker. Simulação.

Abstract

This paper aims to present a study of how mathematical models are used to predict the number of cases of infected people and deaths caused by COVID-19, in the State of Paraná. A study of the exponential, logistical and SIR (Susceptible - Infected - Removed) growth models is presented and how the Insight Maker software is used for the simulations. The research approach is quantitative in character, classified as exploratory research and the technical procedure is a case study. This study allowed us to graphically analyze and compare the behavior of the functions of the number of infected and number of deaths predicted by the SIR Model in relation to actual data on cases of infected people and deaths by COVID-19, considering the period of April 19, 2020 until July 17, 2020.

Keywords: SIR. Insight Maker. Simulation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Modelo exponencial ajustado aos dados de Maringá-PR	18
Figura 2 – Epidemia de Coronavírus na Coréia do Sul	23
Figura 3 – Gráficos para análise das epidemias	27
Figura 4 – Modelo Epidemiológico SIR para COVID-19	31
Figura 5 – Simulação Insight Maker - Modelo Epidemiológico SIR para COVID-19 . . .	33
Figura 6 – Simulação Insight Maker - Infectados e Óbitos	34
Figura 7 – Infectados x Infectados Previstos	35
Figura 8 – Óbitos x Óbitos Previstos	36

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela com as descrições e representações dos 4 objetos de construção (Primitivas) do Insight Maker	30
Tabela 2 – Tabela com as descrições das Primitivas do modelo SIR	31
Tabela 3 – Erros relativos para o número de infectados	35
Tabela 4 – Erros relativos para o número de óbitos	36

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO	13
2.1	Modelos Matemáticos e COVID-19	15
2.2	Modelo de Crescimento Exponencial e Logístico	17
2.3	Modelo SIR	23
3	MATERIAL E MÉTODOS	28
4	SIMULAÇÃO NO INSIGHT MAKER	29
4.1	Insight Maker	29
4.2	O Modelo SIR no Insight Maker	30
4.3	Aplicação	32
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	37
	REFERÊNCIAS	38

1 Introdução

Sempre existiram doenças infecciosas causando milhares de mortes ao redor do mundo. Foram registradas ao longo do tempo doenças como varíola, sarampo, gripe, peste negra, dentre outras, que resultaram em inúmeras mortes.

Em 2020 surge uma nova doença, a COVID-19, causada pelo novo coronavírus, que apresenta um espectro clínico variando de infecções assintomáticas a quadros graves. Diante da transmissão desse vírus que iniciou-se em dezembro de 2019, em Wuhan na China, causando inúmeras mortes, o mundo alterou sua rotina como com o fechamento de escolas, o cancelamento de eventos públicos, restrição de viagens, entre outras medidas utilizadas.

Pesquisadores do mundo todo utilizaram os modelos epidemiológicos já existentes e fizeram adequações para a COVID-19, com o intuito de caracterizar o comportamento da doença, determinando seus fatores causadores e buscando formas para o controle da mesma. O estudo de modelos epidemiológicos, que são modelos matemáticos aplicados à área, que permite projetar diferentes cenários e analisá-los, contribuindo com elementos para a tomada de decisões sobre como solucionar problemas em saúde pública.

Neste contexto, este trabalho levanta o seguinte problema: como um modelo matemático é utilizado para previsão do número de casos da COVID-19? Os modelos matemáticos encontrados na literatura fornecem o número previsto de infectados, o número previstos de mortes, em alguns modelos até uma expectativa do número de hospitalizações, o que permite explorar cenários diferentes e testar a eficácia de intervenções para reduzir o contágio.

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo matemático para previsão do número de casos de pessoas infectadas pela COVID-19 no estado do Paraná. Para isso será necessário estudar sobre epidemiologia e aspectos da doença COVID-19, como sintomas, transmissão, tratamento e as medidas tomadas para conter/diminuir a propagação do vírus, apresentar alguns trabalhos que envolvem modelos matemáticos na previsão dos casos de COVID-19 em países como China, Coreia do Sul, Itália, Espanha, entre outros. E por fim, baseando-se nos dados históricos registrados no estado do Paraná, apresentar a simulação do modelo para previsão do número de casos de pessoas infectadas.

Esta pesquisa justifica-se por que os modelos matemáticos orientam pesquisadores nas mais diferentes áreas permitindo projetar diferentes cenários e analisá-los, contribuindo com elementos para a tomada de decisões sobre como compreender a dinâmica dos problemas em saúde pública, por exemplo. Os modelos matemáticos são muito importantes no estudo de pandemias, pois podem descrever o comportamento da trajetória da doença

e através deles é possível fazer estimativas do número de infectados em um determinado período, bem como o número de mortos ou de recuperados. Esse fator pode contribuir muito nas tomadas de decisões sobre medidas de prevenção da doença.

A abordagem da pesquisa teve caráter quantitativo, pois o ambiente natural é fonte direta para coleta de dados, interpretação de fenômenos e atribuição de significados. Quanto à natureza da pesquisa, trata-se de uma pesquisa aplicada, pois objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática por meio das simulações realizadas no software Insight Maker. Pode ser classificada como uma pesquisa exploratória, visando proporcionar maior familiaridade com o problema, tornando-o explícito ou construindo hipóteses sobre ele. E quanto ao procedimento técnico, é um estudo de caso, que ocorre quando o pesquisador coloca questões do tipo “como” e “por que”, quando se tem pouco controle sobre os eventos e quando o foco se encontra em fenômenos contemporâneos inseridos em algum contexto da vida real.

O atual capítulo aborda as considerações iniciais a respeito do tema deste trabalho, ou seja, apresenta a proposta de trabalho, sua problemática, seus objetivos e sua justificativa.

O segundo capítulo trata-se da introdução do referencial teórico, nele consta sobre a COVID-19, como transmissão, sintomas e cuidados, apresenta-se um breve relato sobre os modelos matemáticos utilizados para compreender a dinâmica de propagação do vírus e também a descrição de três modelos utilizados neste contexto: o Modelo de Crescimento Exponencial, Logístico e o Modelo SIR (Suscetível - Infectado - Removido).

O terceiro capítulo apresenta características da pesquisa e como será desenvolvida. O quarto capítulo aborda sobre o software Insight Maker, como ele é utilizado e como criar modelos, dando ênfase em como utilizar o Modelo SIR e, por fim, apresenta-se a simulação do Modelo SIR para COVID-19, além de uma análise entre os valores obtidos na simulação e os dados reais. E, o quinto capítulo trata-se das considerações finais deste trabalho.

2 Referencial Teórico

Já existiram momentos de epidemia como o cenário de 2020, quando surgiu a doença COVID-19. Como a Ebola, por exemplo, que teve sua identificação em 1976, foi responsável por mais de 20 epidemias, a maior delas entre 2013 a 2016, que afetou países da África Ocidental, com mais de 28 mil casos confirmados e 11 mil mortes. “Os surtos de Ebola foram limitados a países africanos e casos secundários foram relatados na Espanha e nos Estados Unidos, porém a doença tem alto potencial de disseminação internacional, uma vez que é facilmente transmitido entre os seres humanos”. [MENDES, I. C. M., 2019]

Para cada doença que aparece existem estudos realizados por pesquisadores para tomar medidas de prevenção antes que o vírus se propague cada vez mais, tornando-se um surto, uma epidemia ou até mesmo uma pandemia. Estes estudos tem como o objetivo descrever a dinâmica da evolução da doença, o que é realizado por meio da modelagem matemática. A epidemia da COVID-19 surgiu em dezembro de 2019, na cidade de Wuhan, na China, e logo se espalhou rapidamente para o mundo, se tornando uma pandemia, assim, pesquisadores do mundo todo iniciaram seus estudos para prever possíveis cenários de evolução da doença e estabelecer as medidas que diminuiriam o número de infectados e consequentemente, o número de mortes.

“A COVID-19 é uma infecção respiratória aguda causada pelo coronavírus SARS-CoV-2, potencialmente grave, de elevada transmissibilidade e de distribuição global.” [Ministério da Saúde - Governo Federal, 2021b].

O vírus é transmitido da mesma maneira que outros vírus respiratórios, ou seja, por contato, gotículas ou aerossol. De acordo com o Ministério da Saúde (2021b), a maioria das infecções ocorrem por contato próximo, isso quer dizer menos de um metro, principalmente por gotículas respiratórias. No entanto, a transmissão por gotículas menores suspensa no ar são incomuns, mas podem ocorrer quando uma pessoa infectada produz gotículas respiratórias por um período prolongado em um espaço fechado.

Nessas situações, uma quantidade suficiente de vírus pode permanecer presente no espaço de forma a causar infecções em pessoas que estiverem a mais de 1 metro de distância ou que passaram por aquele espaço logo após a saída da pessoa infectada. [Ministério da Saúde - Governo Federal, 2021b].

A infecção pelo coronavírus pode variar de casos assintomáticos a casos graves levando a hospitalização do paciente. Alguns sintomas da doença são: “Tosse, dor de garganta, coriza, anosmia, ageusia, diarreia, dor abdominal, febre, calafrios e fadiga.” [Ministério da Saúde - Governo Federal, 2021b]

Algumas medidas podem ser tomadas para diminuir a propagação do vírus, como o distanciamento social, uso de máscaras, limpeza de ambientes, isolamento de casos suspeitos e quarentena dos casos de COVID-19. Além dessas medidas, desde janeiro de 2021, o estado do Paraná conta com a vacina da COVID-19, o que é de extrema importância para conter a propagação do vírus e também diminuir a ocorrência da forma grave da doença.

Jacco Wallinga é um matemático e o principal modelador de epidemias no Instituto Nacional de Saúde Pública e Meio Ambiente (RIVM), que está acessorando o governo holandês, nas tomadas de decisões sobre isolamento. De acordo com Enserink e Kupferschmidt (2020), Wallinga usa um modelo epidêmico bem estabelecido que divide a população holandesa em quatro grupos ou compartimentos na linguagem do campo: saudáveis, doentes, recuperados ou mortos. As equações determinam quantas pessoas se movem entre os compartimentos com o passar das semanas e meses. Mas os resultados do modelo variam muito, dependendo das características de um patógeno e da população afetada.

Como o vírus que causa a COVID-19 (coronavírus) é novo, os modeladores precisavam de estimativas para os principais parâmetros do modelo. Já nos primeiros dias de surto, vários grupos publicaram estimativas aproximadamente semelhantes do número de novas infecções causadas por cada pessoa infectada quando nenhuma medida de controle é tomada, o parâmetro que os epidemiologistas chamam de R_0 .

Segundo Majumder, epidemiologista computacional da Harvard Medical School, cujo grupo produziu uma dessas estimativas iniciais,

esse consenso aproximado tão cedo na pandemia deu aos modeladores a chance de alertar sobre o potencial epidêmico e pandêmico desse novo patógeno menos de três semanas após o primeiro relatório do Disease Outbreak News que foi divulgado pela OMS (Organização Mundial da Saúde) sobre o surto. [ENSERINK; KUPFERSCHMIDT, 2020].

Muitos países ficaram em “*lockdown*” durante meses do ano de 2020, por conta da COVID-19, com a esperança de amenizar a propagação do vírus. No Brasil, escolas e comércios foram fechados no início da pandemia, março de 2020. Enquanto o comércio alternava períodos de fechamento e abertura, as escolas funcionaram por meio do ensino remoto emergencial, de acordo com cada município do país. Porém, essas medidas causaram grandes impactos econômicos à sociedade. “É uma disputa de três vias, entre proteger a saúde, proteger a economia e proteger o bem-estar/saúde emocional das pessoas.” [ENSERINK; KUPFERSCHMIDT, 2020]. E ainda, Longini (apud ENSERINK; KUPFERSCHMIDT, 2020) diz que os modelos epidêmicos não abordam as consequências econômicas, mas que isso seria importante e que provavelmente os modelos epidêmicos deverão se conectar com as modelagens em economia para considerar este aspecto.

2.1 Modelos Matemáticos e COVID-19

Pesquisadores propuseram vários modelos matemáticos com o intuito de compreender a propagação do vírus da COVID-19 e conseqüentemente contribuir com informações que poderiam ser úteis nas tomadas de decisões para diminuir a propagação da doença. Abaixo segue uma breve descrição de alguns destes modelos encontrados na literatura.

Um modelo matemático utilizado para prever o número de casos de pessoas infectadas pela COVID-19 foi o modelo exponencial. Segundo Dodonov (2020) esse é modelo mais simples utilizado para descrever o crescimento populacional e quando observa-se o número de casos de pessoas com COVID-19 (em março de 2020) em relação ao tempo, uma curva de crescimento exponencial se assemelha.

O crescimento exponencial representa um processo multiplicativo, ou seja, um indivíduo se reproduz, gerando dois indivíduos, cada um desses novos indivíduos se reproduz, gerando dois indivíduos cada, e agora temos quatro novos indivíduos, de quatro passamos pra oito, de oito pra dezesseis e assim sucessivamente, desta forma se dá o contágio de algumas doenças.

Yang e Wang (2020), pesquisadores do Departamento de Matemática da Universidade do Tennessee, nos Estados Unidos, fizeram uso de dados coletados em Wuhan (China), no período de 23 de janeiro a 10 de fevereiro de 2020, e propuseram um modelo compartimental para descrever a dinâmica da doença.

Nesse modelo, a população é dividida em “compartimentos” sendo eles suscetíveis, infecciosos assintomáticos, infecciosos sintomáticos, recuperados e reservatório ambiental, em que o vírus se hospeda. Utilizaram um sistema de equações diferenciais sendo que cada equação correspondia a cada compartimento, para que fosse possível identificar a evolução temporal das variáveis de cada compartimento através da resolução do sistema de equações diferenciais.

Gomes e Monteiro (2020), com o objetivo de analisar a dinâmica evolutiva da epidemia da COVID-19, escolheram utilizar o modelo do tipo SIR (Suscetíveis, Infectados, Recuperados), pois segundo eles é um modelo dinâmico mais simples quando comparado a outros modelos compartimentais. Porém, para tornar o modelo com melhor predição eles fizeram algumas alterações como, incluir a limitação de circulação da população e incluir o fenômeno dinâmico intitulado região de aderência. No início dos estudos dos dados reais, os autores notaram que a taxa de crescimento é variável ao longo do tempo e isso ocorre principalmente por conta das mudanças impostas ao percentual de circulação da população, ou seja, quanto menos circulação, menos propagação do vírus e conseqüentemente ocorre a diminuição no parâmetro taxa de crescimento. A outra adaptação imposta ao modelo SIR tradicional foi a consideração da chamada zona ou região de aderência, fenômeno que deve ocorrer na prática caso algumas condições sejam reunidas.

Desta forma, o modelo SIR modificado recebeu o nome MdSIR e os resultados obtidos pelos autores em sua utilização foi um bom caráter preditivo, permitindo a análise em simulação de vários cenários, incluindo com controle epidêmico a partir da variável percentual de circulação da população.

Oro *et. al* (2020), com o intuito de obter uma previsão do número de casos novos de COVID-19 no Estado do Paraná, realizaram um estudo por meio dos modelos autorregressivos de defasagens distribuídas. Nas informações fornecidas pelos órgãos de saúde não é possível saber exatamente o dia em que houve o contágio do vírus, assim os modelos geralmente consideram a data dos resultados dos exames. Como esse modelo admite defasagens nas variáveis, os autores apresentam o modelo como um modelo dinâmico capaz de estimar o número de casos de COVID-19 no Paraná, considerando os dias de atraso de divulgação dos dados pela Secretaria da Saúde, o número de casos investigados e as estimativas da taxa de transmissão. Segundo os autores os modelos autorregressivos de defasagens distribuídas apresentaram resultados satisfatórios para estimar e prever o número de casos diários de pessoas infectadas.

Logo que a pandemia da COVID-19 iniciou no Brasil, medidas de isolamento social foram tomadas, como uma maneira de controlar a propagação do vírus e é por esse e outros motivos que Valenti *et al.*, (2020) bem como outros autores elaboraram modelos para verificar se de fato o distanciamento social obteve influência sobre o desfecho de mortes esperadas relacionadas à COVID-19.

Os autores realizaram uma projeção matemática sobre o número contabilizado de óbitos da COVID-19 no período de 09 de março a 17 de abril de 2020. As projeções matemáticas do modelo proposto projetaram a estimativa de 17.452 mortes para a hipótese otimista, com 22.623 mortes para o modelo realista e 32.825 mortes para o modelo pessimista. Até a data de 24 de maio de 2020, 22.965 mortes relacionadas à COVID-19 foram confirmadas. Desta maneira, os autores concluíram que o modelo realista foi o que melhor estimou o número de mortes.

Além do estudo em relação a COVID-19 realizada no Estado do Paraná, encontra-se um estudo realizado por Lopes *et al.*, (2020) em relação a Região Sul do Brasil (Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul). Neste estudo foi considerado dados entre os dias 01 de março de 2020, primeiro caso na região até 06 de maio de 2020, sendo estes os 65 primeiros dias de pandemia contra a COVID-19 no sul do país.

“A classificação de endemicidade da COVID-19 foram utilizados porcentagem de cura, coeficientes de prevalência, de detecção, de detecção de novos casos diagnosticados e taxa de expansão territorial.” [LOPES *et al.*, 2020]. A análise dos casos confirmados foi realizada através de estatística descritiva e comparativa entre os estados. Os gráficos de previsão foram elaborados utilizando o modelo epidemiológico SIR utilizando os recursos do software Insight Maker.

Nesta pesquisa realizada por Lopes et al. (2020) foi possível comparar número de infectados e número de óbitos entre os estados, além de realizar uma comparação com o país, utilizando dados reais. Diante do modelo, foi possível estimar previsões de infectados para os próximos 30 dias após o último dia da coleta de dados, com comparações entre os estados.

2.2 Modelo de Crescimento Exponencial e Logístico

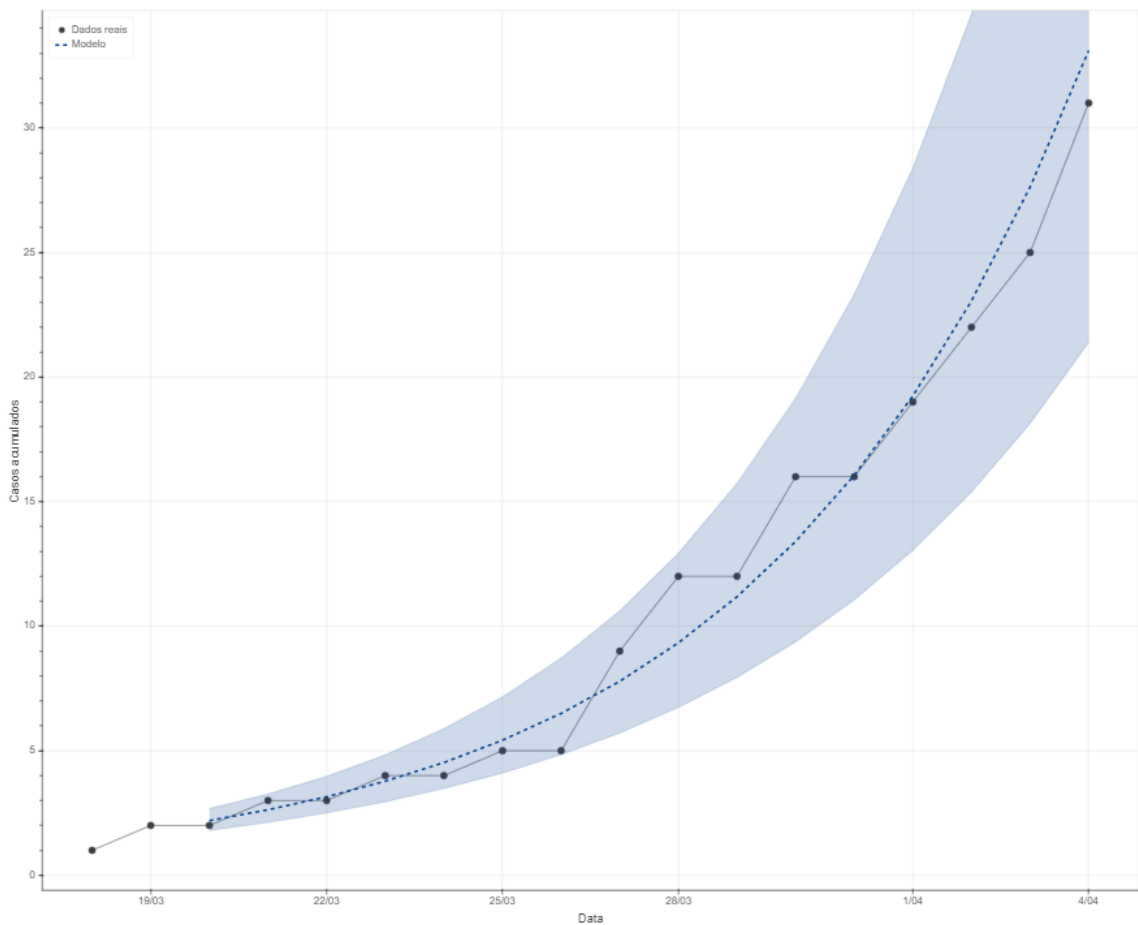
A grande maioria das epidemias apresenta um crescimento exponencial em seu início, pois nenhum indivíduo está imune à doença e aqueles que contraem o vírus geralmente o transmitem para mais de uma pessoa. Matematicamente, o modelo exponencial é dado por

$$C(t) = C_0 e^{rt},$$

na qual C representa o número de casos da doença, t o tempo em dias, C_0 é uma constante que representa o número inicial de casos e r representa a taxa de crescimento do número de casos. A taxa r indica o quão rápido o número de casos está crescendo, ou seja, quanto maior o valor de r , mais rapidamente o número de casos aumenta com o passar do tempo.

Na Figura 1 apresenta-se um exemplo de simulação com o modelo exponencial, o número acumulado de pessoas infectadas em função do tempo (círculos em preto) para os 20 primeiros dias após o primeiro caso de COVID-19 em Maringá, no dia 18 de março de 2020. A linha tracejada representa o modelo exponencial ajustado aos dados e a área sombreada em azul mostra a região de incerteza do modelo. “A função exponencial descreve bem o comportamento dos dados reais no início, entretanto, esse modelo passou a superestimar o número de infectados após esse período inicial.” [Observatório COVID-19 Maringá, 2021].

Figura 1 – Modelo exponencial ajustado aos dados de Maringá-PR



Fonte: Observatório COVID-19 Maringá (2021)

Depois dessa fase inicial a evolução da propagação da epidemia deixa de seguir o modelo exponencial, pois a população é finita e seus indivíduos são infectados de modo que o crescimento tende a se estabilizar. Além disso, os indivíduos após contrair a doença eventualmente serão curados e podem deixar de ser transmissores dela.

Após o período inicial do crescimento do número de casos deve ocorrer um decréscimo até se chegar num patamar máximo e a função logística tem esse comportamento. O modelo de crescimento logístico é descrito pela equação diferencial

$$\frac{dC}{dt} = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) \quad (2.1)$$

onde C é o número de casos acumulados, $r > 0$ é a taxa de infecção e $K > 0$ é o tamanho final da epidemia. Se $C(0) = C_0 > 0$ é o número inicial de casos, então a solução de 2.1 é dada por

$$C(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}, \quad (2.2)$$

onde $A = \frac{K - C_0}{C_0}$. [BATISTA, 2020].

Obtem-se 2.2 à partir da equação diferencial 2.1 da seguinte forma.

Após algumas manipulações a equação 2.1 pode ser reescrita como

$$\frac{dC}{dt} = \frac{r}{K}C(K - C)$$

o que permite a separação de variáveis e a integração em ambos os membros da equação

$$\frac{1}{C(K - C)}dC = \frac{r}{K}dt,$$

$$\int \frac{1}{C(K - C)}dC = \int \frac{r}{K}dt.$$

Com isso, obtem-se a solução de forma implícita dada por

$$\frac{1}{K} \ln \left(\frac{C}{K - C} \right) = \frac{r}{K}t + c_1$$

onde c_1 é a constante de integração.

Para obter $C(t)$ de forma explícita seguem algumas manipulações algébricas:

$$\ln \left(\frac{C}{K - C} \right) = rt + Kc_1,$$

$$\frac{C}{K - C} = e^{rt+Kc_1},$$

$$C = Ke^{rt+Kc_1} - Ce^{rt+Kc_1},$$

$$C(1 + e^{rt+Kc_1}) = Ke^{rt+Kc_1}$$

e finalmente,

$$C(t) = \frac{Ke^{rt+Kc_1}}{1 + e^{rt+Kc_1}} \quad (2.3)$$

Agora, utiliza-se o valor da condição inicial $C(0) = C_0$, assim:

$$C_0 = \frac{Ke^{Kc_1}}{1 + e^{Kc_1}}.$$

Após algumas manipulações algébricas, segue que

$$c_1 = \frac{1}{K} \ln \left(\frac{C_0}{K - C_0} \right).$$

Substituindo c_1 em 2.3 tem-se:

$$C = \frac{Ke^{rt+\ln(\frac{C_0}{K-C_0})}}{1+e^{rt+\ln(\frac{C_0}{K-C_0})}} = \frac{Ke^{rt}\frac{C_0}{K-C_0}}{1+e^{rt}\frac{C_0}{K-C_0}} = \frac{Ke^{rt}}{\frac{K-C_0}{C_0}+e^{rt}} = \frac{K}{\frac{K-C_0}{C_0}e^{-rt}+1}$$

tomando $A = \frac{K-C_0}{C_0}$, segue a solução dada em 2.2.

Quando $t \ll 1$ (t muito menor do que 1), assumindo $K \gg C_0$ (número final da epidemia muito maior que o número inicial), e portanto $A \gg 1$. De fato, isso ocorre pois, como $\frac{K-C_0}{C_0}$ segue $K-C_0 \gg C_0$, logo essa razão é muito maior do que 1. Com essas condições tem-se um crescimento natural. De fato,

$$C = \frac{Ke^{rt}}{e^{rt}+A} = \frac{Ke^{rt}}{\left(\frac{e^{rt}}{A}+1\right)A} = \frac{Ke^{rt}}{\left(\frac{e^{rt}}{A}+1\right)\left(\frac{K-C_0}{C_0}\right)} = \frac{e^{rt}}{1+\frac{e^{rt}}{A}} \cdot \frac{KC_0}{K-C_0} = \left(\frac{e^{rt}}{1+\frac{e^{rt}}{A}}\right) \left(\frac{C_0}{1-\frac{C_0}{K}}\right)$$

Da última expressão segue que $\frac{C_0}{K}$ tende a zero, assim como $\frac{e^{rt}}{A}$, pois $\frac{e^{rt}}{A} = \frac{1}{e^{rt}(K/C_0-1)}$ e K/C_0 é um número muito grande. Portanto, quando $t \ll 1$, assumindo $K \gg C_0$, e portanto $A \gg 1$, tem-se o crescimento natural

$$C = \left(\frac{e^{rt}}{1+\frac{e^{rt}}{A}}\right) \left(\frac{C_0}{1-\frac{C_0}{K}}\right) \approx C_0 e^{rt}.$$

A taxa de crescimento $\frac{dC}{dt}$ atinge seu valor máximo quando $\frac{d^2C}{dt^2} = 0$ (ponto de inflexão de $C(t)$). Logo, o pico da taxa de crescimento ocorre no instante $t_p = \frac{\ln(A)}{r}$ e neste instante, o número de casos é dado por $C_p = \frac{K}{2}$. De fato, como

$$\frac{d^2C}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dC}{dt} \right)$$

então basta derivar a equação diferencial em 2.2, utilizando a Regra do Produto. Tem-se:

$$\frac{d^2C}{dt^2} = r \left(1 - \frac{C}{K}\right) + rC \left(\frac{-1}{K}\right) = r - \frac{rC}{K} - \frac{rC}{K} = r \left(1 - \frac{2C}{K}\right)$$

Segue que,

$$\frac{d^2C}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2C}{K} = 0 \Leftrightarrow \frac{2C}{K} = 1 \Rightarrow C = \frac{K}{2}$$

Substituindo $C = \frac{K}{2}$ na função $C(t)$, segue que

$$\frac{K}{2} = \frac{KC_0}{(K-C_0)e^{-rt}+C_0}$$

$$(K-C_0)e^{-rt}+C_0 = 2C_0$$

$$e^{-rt}(K - C_0) = C_0 \Rightarrow e^{-rt} = \frac{C_0}{K - C_0}$$

$$\frac{K - C_0}{C_0} = e^{rt} \Rightarrow rt = \ln\left(\frac{K - C_0}{C_0}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln(A)}{r}$$

A taxa de crescimento quando $t_p = \frac{\ln(A)}{r}$ e $C_p = \frac{K}{2}$ é

$$\frac{dC}{dt_p} = r \frac{K}{4}.$$

De fato,

$$\frac{dC}{dt_p} = r \frac{K}{2} \left(1 - \frac{K}{K}\right) = r \frac{K}{2} - r \frac{K}{4} = r \frac{K}{4}$$

É interessante determinar quanto tempo leva para duplicar o número de casos, ou seja, $C(t + \Delta t) = 2C(t)$ para qual Δt ?

Tem-se que $\Delta t = \frac{\ln(2)}{r} - \frac{1}{r} \ln\left(\frac{1}{A} - e^{-rt}\right) - t$. De fato, se

$$C(t + \Delta t) = 2C(t)$$

Segue a sequência de manipulações algébricas para determinar Δt .

$$\frac{K}{1 + Ae^{-r(t+\Delta t)}} = \frac{2K}{1 + Ae^{-rt}} \Rightarrow 1 + Ae^{-rt} = 2 + 2Ae^{-r(t+\Delta t)}$$

$$-1 + Ae^{-rt} = 2Ae^{-r(t+\Delta t)} \Rightarrow \frac{-1 + Ae^{-rt}}{2A} = e^{-r(t+\Delta t)}$$

$$\frac{-1 + Ae^{-rt}}{2A} = e^{-rt} \cdot e^{-r\Delta t} \Rightarrow \frac{-1 + Ae^{-rt}}{2Ae^{-rt}} = e^{-r\Delta t}$$

$$e^{-r\Delta t} = \frac{-1}{2Ae^{-rt}} + \frac{1}{2} \Rightarrow -r\Delta t = \ln\left(\frac{-1}{2Ae^{-rt}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$-r\Delta t = \ln\left(\frac{-1 + Ae^{-rt}}{2Ae^{-rt}}\right)$$

$$-r\Delta t = \ln(Ae^{-rt} - 1) - \ln(2Ae^{-rt})$$

$$-r\Delta t = \ln(Ae^{-rt} - 1) - (\ln(2A) + \ln(e^{-rt}))$$

$$-r\Delta t = \ln(Ae^{-rt} - 1) - \ln(2) - \ln(A) + rt$$

$$-r\Delta t = \ln\left(\frac{Ae^{-rt} - 1}{A}\right) - \ln(2) + rt$$

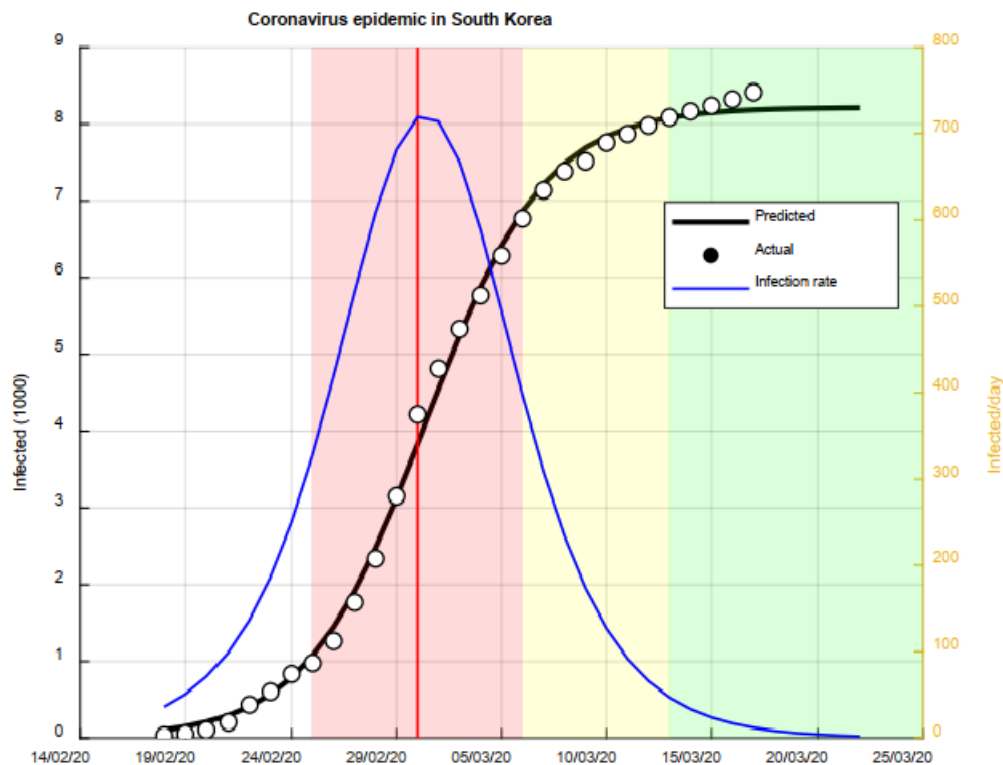
$$-r\Delta t = \ln\left(e^{-rt} - \frac{1}{A}\right) - \ln(2) + rt$$

$$\Delta t = \frac{\ln(2)}{r} + \frac{-1}{r} \ln\left(e^{-rt} - \frac{1}{A}\right) - t$$

O primeiro termo representa um crescimento exponencial inicial, quando Δt cresce com o tempo t . Quando $t \rightarrow t_p = \frac{\ln(A)}{r}$, isto é, $C \rightarrow \frac{k}{2}$ então $\Delta \rightarrow \infty$. Para $C \geq \frac{k}{2}$ o tempo de duplicação perdeu seu significado.

Com a utilização do modelo de crescimento logístico para previsão do número de casos de pessoas infectadas pelo coronavírus, Batista (2020), com base nos dados disponíveis, apresentou a previsão de que o tamanho final da epidemia de coronavírus na Coréia do Sul seria de aproximadamente 8050 ± 70 casos e que o pico da epidemia seria em 1 de março de 2020 (Figura 2). A epidemia na Coréia do Sul naquele momento estava em transição para a fase estável. Em 7 de março, o atual número de casos foi 7134 e o número diário de casos foi 367. A previsão feita pelo modelo, apresentada no artigo foi 6572 casos acumulados e 259 casos diários. O autor apresenta que os erros são de 8% e 30%, respectivamente.

Figura 2 – Epidemia de Coronavírus na Coréia do Sul



Fonte: Batista (2020)

2.3 Modelo SIR

O Modelo SIR (Suscetível - Infectado - Removido) foi proposto por Kermack e Mckendric em 1927, e descreve a dinâmica da população dividida em três partes:

- $I(t)$ é o número de membros infectados, transmissores da doença;
- $S(t)$ é o número de membros suscetíveis a contraírem a doença;
- $R(t)$ é o número de membros removidos da população;

O modelo epidêmico SIR é um dos modelos epidêmicos mais simples, mas é capaz de descrever várias epidemias. Neste modelo a população está homogeneamente misturada, ou seja, todos podem interagir e cada indivíduo da população está Suscetível (ou saudável), Infectado ou Recuperado (imune) da doença, assim:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (\text{constante})$$

ou seja, esse modelo matemático despreza os nascimentos e fenômenos migratórios. Em uma pandemia, o fato da remoção de membros, pode ser ocasionada por mortes, imunidade ou isolamento até obter a cura ou adquirir imunidade.

A dinâmica do modelo é que indivíduos suscetíveis podem se tornar infectados ao entrar em contato com indivíduos infectados ($S \rightarrow I$), e que indivíduos infectados se recuperam ($I \rightarrow R$) após um período de tempo, tornando-se potencialmente imunes.

Além disso, existem casos de transições entre as subpopulações citadas. São eles:

- $\frac{dS}{dt}$ é a taxa de mudança de suscetíveis;
- $\frac{dI}{dt}$ é a taxa de mudança de infectados;
- $\frac{dR}{dt}$ é a taxa de mudança de removidos;

e as hipóteses como:

1. A razão de variação da população suscetível é proporcional ao número de encontros entre as populações suscetível e infectada.
2. A razão de variação da população removida é proporcional à população infectada.

Assim, o modelo SIR é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -kSI \\ \frac{dI}{dt} = kSI - rI \\ \frac{dR}{dt} = rI \end{cases} \quad (2.4)$$

sendo k a taxa de infecção e r a taxa de remoção, supondo k e r constantes.

O modelo possibilita responder duas questões:

1. Em que condições surge uma epidemia?
2. Por que uma epidemia desaparece antes que toda a população venha a óbito?

“Para a análise da primeira pergunta, supõem-se que as doenças são transmitidas somente por vírus ou bactérias e ignora-se a dinâmica de seu hospedeiro.” [LIMA, 2018]. Sabe-se que o surto de uma epidemia aumenta de acordo com o crescimento do número de pessoas infectadas, ou seja, se a taxa de mudança dos infectados é positiva, $\frac{dI}{dt} > 0$.

Assim, da segunda equação do sistema 2.4, tem-se

$$\frac{dI}{dt} = kSI - rI = (kS - r)I > 0.$$

Assim,

$$(kS - r)I > 0 \Leftrightarrow kS > r \Leftrightarrow \frac{kS}{r} > 1,$$

tomando $\rho = \frac{r}{k}$, tem-se que $\frac{k}{r} = \frac{1}{\rho}$ e segue que

$$\frac{kS}{r} > 1 \Rightarrow \frac{1S}{\rho} > 1 \Rightarrow \frac{S}{\rho} > 1.$$

Portanto, para que uma epidemia se propague é necessário que

$$S > \rho,$$

onde, ρ é chamado de limiar da epidemia.

Seja $R_0 = \frac{S}{\rho}$, em que R_0 é o número médio de infecções causadas por um indivíduo. Então, tem-se uma epidemia se o número reprodutivo básico for maior que 1, ou seja, $R_0 > 1$. Caso contrário, $R_0 < 1$, não existirá epidemia.

Se o número de pessoas suscetíveis for igual ao número de habitantes da população, nesse caso não teremos epidemia, ou seja,

$$R_0 < 1 \Leftrightarrow \frac{S}{\rho} < 1,$$

Sendo $S = N$, temos

$$N < \rho.$$

Portanto, para que haja uma epidemia é necessário que

$$N > \rho.$$

Desta maneira, concluí-se que acontecerá casos epidêmicos em uma população se o número de habitantes for maior que o valor limiar da epidemia.

Agora, analisando a questão 2, utiliza-se as duas primeiras equações do sistema 2.4, assim

$$\frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} = \frac{kSI - rI}{-kSI} \Rightarrow \frac{dI}{dS} = -1 + \frac{r}{kS},$$

obtem-se a seguinte equação diferencial separável

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\rho}{S}. \quad (2.5)$$

Separando as variáveis e integrando ambos os lados da equação

$$\int dI = \int \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) dS$$

$$\int dI = -\int dS + \rho \int \frac{1}{S} dS,$$

obtem-se a seguinte solução geral para a equação diferencial 2.5

$$I(S) = -S + \rho \ln S + c \quad (2.6)$$

Considerando que no instante $t = t_0$ os valores iniciais para I e S são respectivamente, $I_0 > 0$ e $S_0 > 0$ e substituindo estes valores na solução geral 2.6, encontra-se o valor da constante c . De fato,

$$I_0 = -S_0 + \rho \ln S_0 + c.$$

Logo, o valor de c será dado por

$$c = I_0 + S_0 - \rho \ln S_0.$$

Portanto, a solução particular de 2.5 será dada por,

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \ln \frac{S}{S_0}, \text{ com } S > 0. \quad (2.7)$$

Para construir o gráfico de $I(S)$ nota-se que

$$\frac{dI}{dS} = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{\rho}{S} = 0 \Leftrightarrow S = \rho.$$

Assim, $S = \rho$ é um ponto crítico de $I(S)$. Além disso, $\frac{dI}{dS} > 0$ se $S < \rho$ e $\frac{dI}{dS} < 0$ se $S > \rho$, isso significa que $I(S)$ assume um valor máximo em $S = \rho$. Com a equação para $I(S)$ (2.7) fazendo $S \rightarrow 0^+$ tem-se

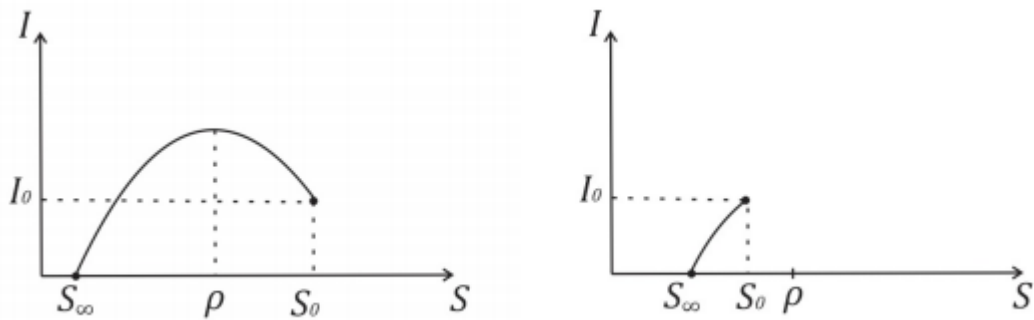
$$I(S) = -S + \rho \ln S + c$$

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} I(S) = \lim_{S \rightarrow 0^+} \left(I_0 + S_0 - S + \rho \ln \frac{S}{S_0} \right) = -\infty$$

Então, $I(S) \rightarrow -\infty$ quando $S \rightarrow 0^+$, como a condição inicial $I_0 > 0$, segue que $I(S)$ se anulará para um valor $0 < S_\infty < S_0$.

Se o número inicial S_0 de indivíduos suscetíveis em uma população for superior a ρ , então tem-se um caso de epidemia, seja qual for o número inicial de infectados I_0 . O número de infectados aumenta até o número de suscetíveis atingir ρ e depois disso o número de infectados decresce até se anular (Gráfico 1 na Figura 3). Isso ocorre pelo desaparecimento dos transmissores da doença. Se o número inicial S_0 de indivíduos suscetíveis em uma população for inferior a ρ , então seja qual for o número inicial de infectados I_0 , este número de infectados decrescerá e resultará no desaparecimento da doença (Gráfico 2 na Figura 3).

Figura 3 – Gráficos para análise das epidemias



Fonte: Lima (2018)

Concluí-se que uma epidemia termina antes que todos os indivíduos suscetíveis adquiram a doença. Este modelo mostra que os indivíduos suscetíveis contraem a doença tornam-se infectados e adquirem a imunidade tornando-se removidos e permanecem nesta subpopulação o resto da vida.

3 Material e Métodos

“A abordagem da pesquisa teve caráter quantitativo, pois o ambiente natural é fonte direta para coleta de dados, interpretação de fenômenos e atribuição de significados.” [PRODANOV; FREITAS, 2013]. Quanto à natureza da pesquisa, trata-se de uma pesquisa aplicada, pois objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática por meio das simulações realizadas com os recursos do *software online open-source Insight Maker*.

A pesquisa pode ser classificada como exploratória pois, segundo Prodanov e Freitas (2013), visa proporcionar maior familiaridade com o problema, tornando-o explícito ou construindo hipóteses sobre ele. Quanto ao procedimento técnico é um estudo de caso,

que ocorre quando o pesquisador coloca questões do tipo “como” e “por que”, quando se tem pouco controle sobre os eventos e quando o foco se encontra em fenômenos contemporâneos inseridos em algum contexto da vida real [PRODANOV; FREITAS, 2013].

Embora os modelos matemáticos sejam utilizados no contexto atual, esta pesquisa não tem pretensão de contribuir com as tomadas de decisões, apenas compreender alguns modelos matemáticos epidemiológicos e promover uma discussão sobre o assunto.

A metodologia proposta neste trabalho consiste em cinco etapas. A primeira etapa consiste em estudar sobre a COVID-19 e sobre alguns modelos matemáticos utilizados para compreender a propagação do vírus. A segunda etapa consiste em estudar e descrever o Modelo de Crescimento Logístico e o Modelo SIR (Suscetível - Infectado - Removido). A terceira etapa consiste em compreender como é realizada a simulação do modelo SIR por meio do *software online open-source Insight Maker*¹.

E por fim, a quarta etapa, consiste em fazer simulações no *Insight Maker* utilizando os dados obtidos confirmados da epidemia que foram disponibilizados *on-line* pelo Ministério da Saúde do Brasil (2021a). Os dados confirmados da epidemia são comparados aos dados previstos na simulação com o modelo matemático SIR e os erros relativos são calculados.

¹ <https://insightmaker.com/>

4 Simulação no Insight Maker

Neste capítulo apresenta-se na primeira seção o *software online open-source Insight Maker* com suas possibilidades e como funciona. Na segunda seção descreve-se como o modelo SIR foi construído pelo professor Paulo Villela (2020), para fins didáticos. Na última seção apresenta-se uma aplicação utilizando dados reais.

4.1 Insight Maker

O Insight Maker é um *software online open-source* Copyright (2021) projetado para tornar a modelagem e a simulação acessíveis ao público menos familiarizado com linguagem computacional. Ele possibilita a modelagem de sistemas dinâmicos a partir da diagramação em blocos de elementos básicos (níveis, taxas e variáveis). “O programa dispensa conhecimentos de programação para construir modelos, sendo bastante útil em diversos contextos educacionais, além disso ele funciona através de comandos no idioma inglês.” [LOPES; HEIDEMANN; VEIT, 2020].

“No Insight Maker pode-se trabalhar com dois tipos distintos de modelos: o modelo baseado em agentes, utilizados principalmente para simular sistemas econômicos e sociais e os modelos de sistemas dinâmicos.” [GONSALVES et al., 2017]. Este trabalho é uma aplicação do modelo SIR que é um sistema dinâmico.

É possível montar diagramas em que mostram a realidade que se pretende investigar através da criação de um sistema com componentes interligadas. As componentes são chamadas de *primitives*, em português, primitivas. Uma das razões para que esses diagramas sejam tão úteis na construção da aprendizagem é que é possível visualizar como uma primitiva individual impacta no coletivo do sistema, por exemplo, como cada fluxo impacta no nível de acumulação que ocorre na população de suscetíveis, infectados ou recuperados, como no modelo deste trabalho.

Essas acumulações são representadas por retângulos associadas a população, neste exemplo, que podem variar pela existência de um fluxo, representado por uma seta com linha contínua, ou seja, o fluxo corresponde à taxa de variação do nível da população.

Existem também componentes que podem influenciar no comportamento de um fluxo. São as chamadas variáveis, no software *variables*. Apesar do significado do nome, elas podem ser variáveis ou constantes. Todas as variáveis do sistema são ligadas ao fluxo por meio de ligações, os denominados *links*, representados através de linhas pontilhadas. As ligações não servem estritamente para conectar variáveis aos fluxos, mas também podem indicar como uma população influencia em outra ou como uma variável compõe outra

variável. Ou seja, fazem ligações entre diferentes componentes. Na Tabela 1 apresenta-se as representações e descrições dos 4 objetos de construção do modelo que compõem as Primitivas.

Tabela 1 – Tabela com as descrições e representações dos 4 objetos de construção (Primitivas) do Insight Maker

Armazenamento:	São objetos de formato retangular que fazem o papel de uma variável armazenadora. Onde a quantidade acumula com o tempo, por exemplo, em um sistema de presa-predador, a variável de armazenamento seria a população, que guarda o número de indivíduos.
Fluxos:	São objetos, em formato de uma seta cheia, que indicam a taxa de variação em função do tempo dos objetos de armazenamento. Seguindo o exemplo do problema presa-predador, a taxa de nascimento e de morte seriam dois exemplos de objetos de fluxo. O fluxo, precisa estar ligado à algum Armazenamento.
Variáveis:	São objetos, em formato de uma elipse, que podem ser constantes ou calculadas dinamicamente. Servem para sintetizar dados ou para utilizar como parâmetros do modelo. No caso de presa-predador, podem ser os valores das taxas de nascimento ou de morte da população, bem como podem ser a população inicial.
Ligação:	Objetos, em formato de uma seta tracejada, que servem para ligar e indicar relação entre dois outros objetos. O objeto de ligação não pode ser usado individualmente, serve para ligar outros objetos.

Fonte: Gonsalves (2017)

Uma característica importante do *Insight Maker*, é que a variável tempo é uma variável independente implícita neste *software*. Para executar os modelos, basta informar a unidade de tempo (segundos, minutos, horas, dias, meses,...), o tempo inicial e o final.

Para construir um modelo no *software*, é necessário criar uma conta livre na página inicial do programa e iniciar a construção do modelo, adicionando primitivas, fluxos, variáveis e links. Em cada item citado você consegue inserir dados e equações para que quando finalizado o software apresente uma simulação do modelo. “As simulações podem ser em série temporal, gráfico de dispersão, tabelas ou um *Agent Map*”. [LOPES; HEIDEMANN; VEIT, 2020].

“Existem também ferramentas como comparação de gráficos, otimização de modelos matemáticos, testes de sensibilidade, modelagem de sistemas baseadas em agentes, e construção *storytelling*”. [LOPES; HEIDEMANN; VEIT, 2020].

4.2 O Modelo SIR no Insight Maker

O modelo SIR do Insight Maker é de autoria do professor Paulo Villela (2020). As primitivas estão descritas na Tabela 2.

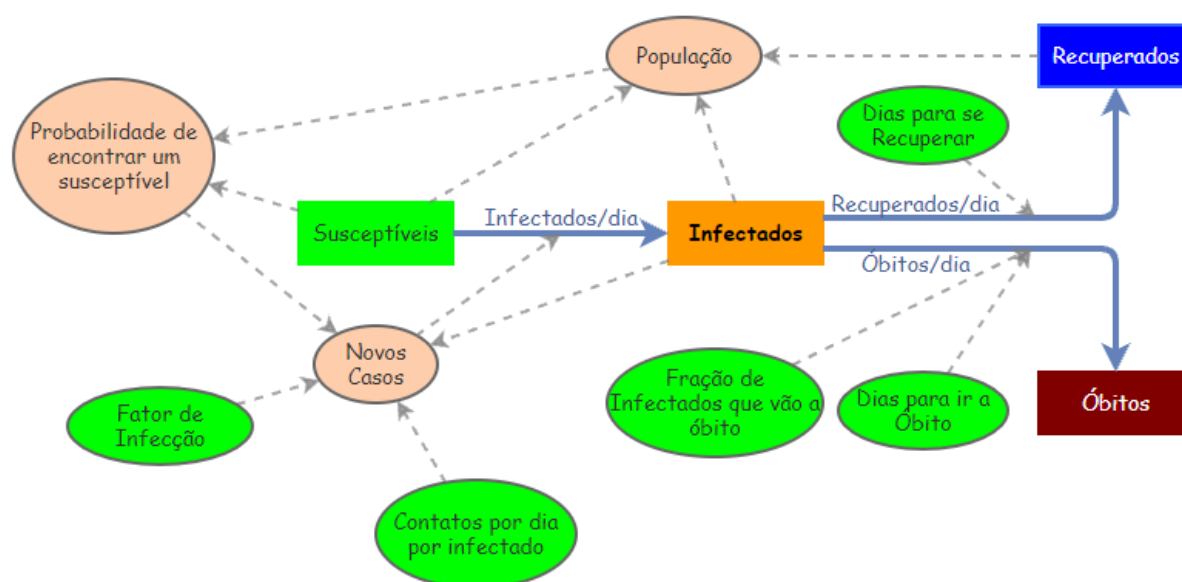
Tabela 2 – Tabela com as descrições das Primitivas do modelo SIR

Armazenamento:	Suscetíveis, Infectados, Recuperados e Óbitos
Fluxos:	Infectados/dia, Recuperados/dia e Óbitos/dia
Variáveis:	Fator de Infecção, Contatos por dia por infectado, Fração de Infectados que vão a óbito, Dias para ir a Óbito, Dias para se Recuperar, População, Probabilidade de encontrar um susceptível e Novos Casos
Ligação:	Linhas pontilhadas que ligam as primitivas

Fonte: Autoria própria (2021)

A Figura 4 mostra o fluxograma do modelo SIR no Insight Maker.

Figura 4 – Modelo Epidemiológico SIR para COVID-19



Fonte: Villela (2020)

A construção do modelo foi realizada da seguinte maneira: primeiramente as primitivas foram criadas. As pessoas “Suscetíveis” são aquelas que podem contrair o vírus, os “Infectados” são as pessoas que já estão com o vírus, os “Recuperados” são as pessoas que tiveram a doença e estão recuperadas e, por fim, os “Óbitos” que são as pessoas que não se recuperaram e faleceram.

Em seguida é realizada a construção dos fluxos ligando as primitivas. Um fluxo faz a ligação dos “Suscetíveis” à “Infectados”, o qual é denominado “Infectados/dia”. Outro fluxo faz a ligação dos “Infectados” à “Recuperados”, o qual é denominado “Recuperados/dia”. E, um fluxo faz a ligação dos “Recuperados” à “Óbitos”, o qual é denominado “Óbitos/dia”.

Seguindo para a criação das variáveis, cria-se a variável “População” e a fórmula que será colocada nessa variável é “Suscetíveis” + “Infectados” + “Recuperados”. Esta

variável tem ligação com os “Suscetíveis”, “Infectados” e “Recuperados”.

Quando a população migra de suscetíveis para infectados (“Suscetíveis” → “Infectados”), surge a variável “Novos Casos” ligando essas duas populações. Para saber qual vai ser a quantidade de novos casos, cria-se uma nova variável, a “Probabilidade de encontrar um suscetível”. Essa última variável depende da “População” e do número de pessoas suscetíveis (“Suscetíveis”). Para definir quanto vai ser essa probabilidade, calcula-se a razão entre “Suscetíveis” e “População”. Essa fórmula é colocada na variável.

Outra variável criada é a “Fator de Infecção”, fator que depende do tipo de vírus e do ambiente. Este fator vai variando conforme a evolução da doença e depende de pesquisas mais avançadas para ser determinado, assim, neste trabalho será utilizado um valor que melhore o ajuste do modelo, sem pretensão de uma avaliação mais precisa deste parâmetro.

É criada a variável “Contatos por dia por infectado” que é o número de pessoas que uma pessoa com o vírus teve contato, por exemplo, se o infectado ficou em casa, em isolamento, o número de contatos é 0, se ele mora sozinho, ou o número de pessoas que ele convive. Agora se o infectado sai de casa, isso pode aumentar consideravelmente.

Construídas essas novas três variáveis, liga-se as três em “Novos Casos” e também faz-se a ligação da primitiva “Infectados” em “Novos casos”. Na variável “Novos Casos” é adicionada a seguinte fórmula matemática:

$$NC = p.c.f.I,$$

onde NC é “Novos Casos”, p é “Probabilidade de encontrar um suscetível” c é “Contatos por dia por infectado”, f é “Fator de Infecção” e I é “Infectados”. Observa-se que “Novos casos” é a variável que vai controlar a migração de suscetíveis para infectados, por isso coloca-se a fórmula “Novos Casos” em “Infectados/dia”.

Para encontrar o número de pessoas recuperadas (“Recuperados”), adiciona-se a variável “Dias para se Recuperar” e depois faz a ligação com “Recuperados/dia”. E, para encontrar o número de pessoas que vão à óbito (“Óbitos”), adiciona-se a variável “Dias para ir a Óbito”, que é a quantidade de dias que a pessoa leva para ir à óbito, após hospitalização. Após isso, faz a conexão no fluxo de “Óbitos/dia”. Além dessas, cria-se a variável “Fração de Infectados que vão a óbito” e faz a ligação com “Óbitos/dia”.

4.3 Aplicação

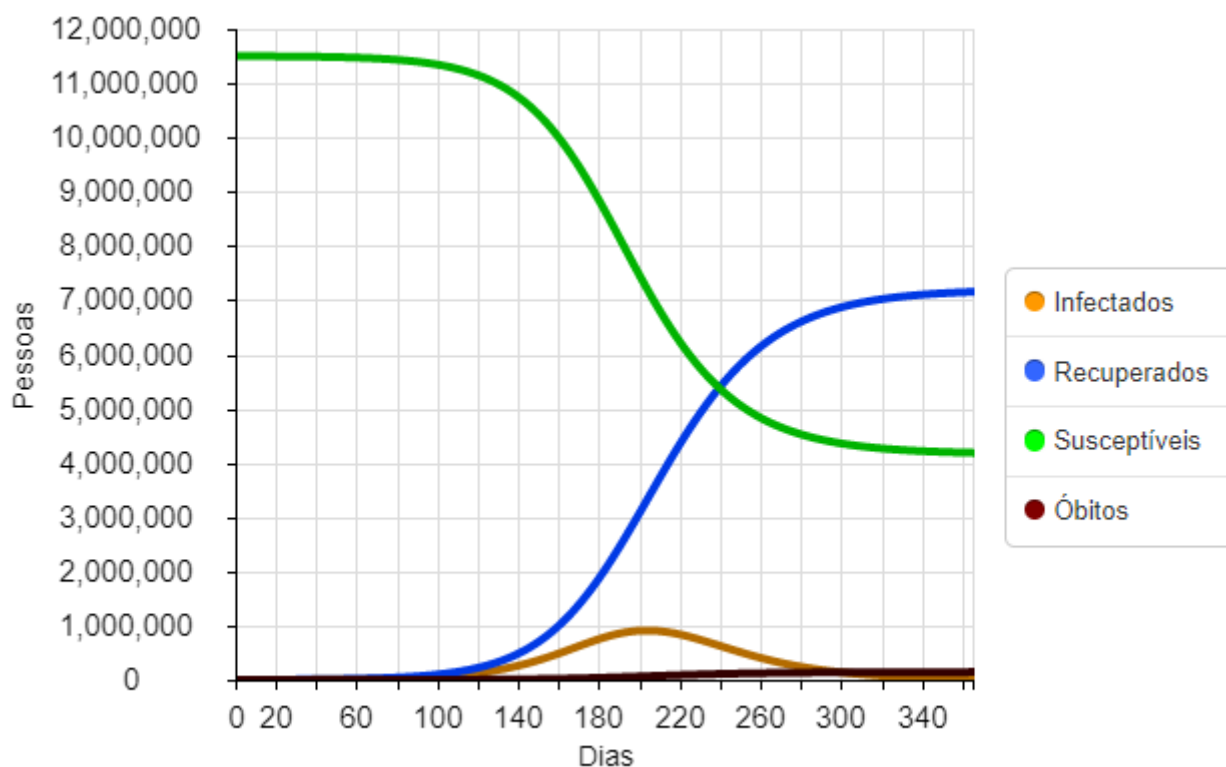
Para a simulação do modelo considerou-se os dados referentes ao estado do Paraná e dia 19 de abril de 2020 como dia 1. A população do estado do Paraná que segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2021) é de 11.597.484 habitantes. Esta estimativa com o total de habitantes de estados e municípios se refere a 1º de julho de

2019. Assim, em suscetíveis considerou-se 11.500.000 habitantes. O número de infectados pelo vírus no dia 19 de abril de 2020 era de 987, considerou-se 1000 como entrada. O número de pessoas recuperadas da doença neste dia foi de 419 e considerou-se 420. Quanto ao número de óbitos, considerou-se 50, assim como informado no boletim epidemiológico do estado.

Para o fator de infecção considerou-se 0,05 [LOPES et al., 2020]. Os contatos por dia de um infectado considerou-se 2,3, que segundo Lopes et al. (2020) pode estar entre 1 e 3. Para as variáveis dias para recuperação e dias para ir a óbito considerou-se 14 dias e por fim, a fração de infectados que vão a óbito considerou-se 0,02.

Com esses dados a simulação no software foi realizada e foram gerados os gráficos das curvas dos “Suscetíveis”, “Infectados”, “Recuperados” e “Óbitos”, como apresenta a Figura 5.

Figura 5 – Simulação Insight Maker - Modelo Epidemiológico SIR para COVID-19



Fonte: Insight Maker (2021)

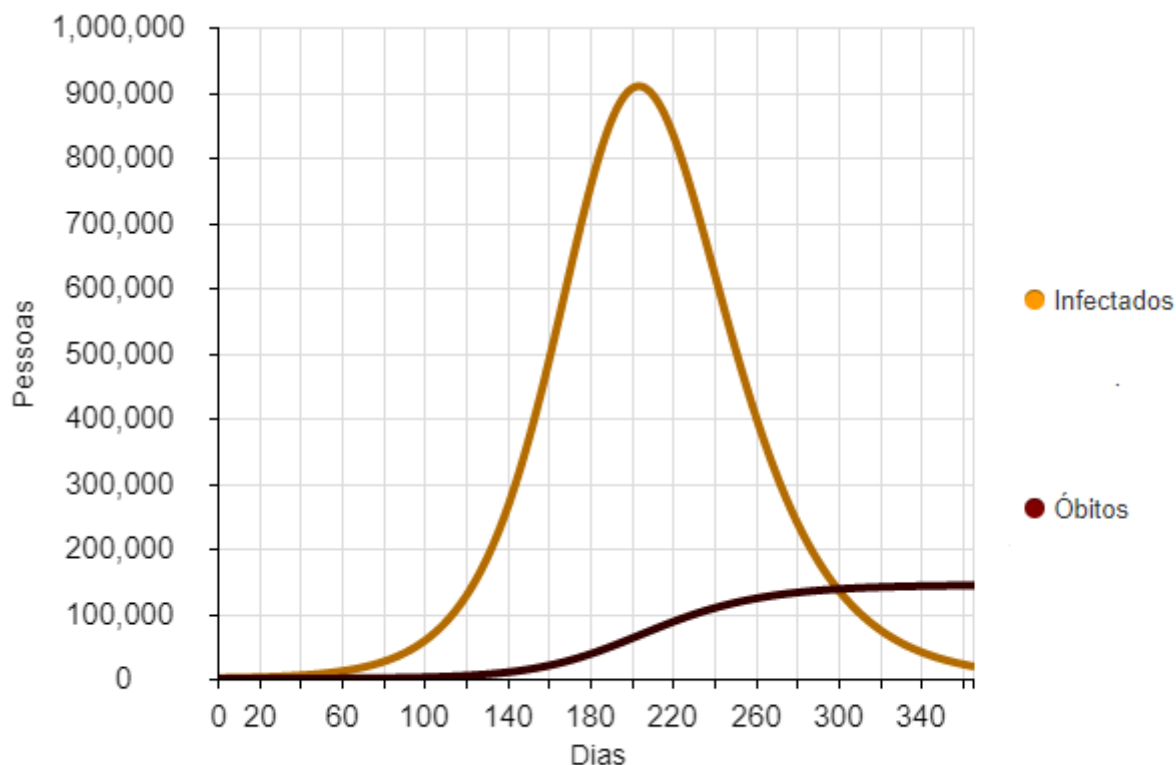
Analisando o comportamento das funções $I(t)$ (Infectados) e $S(t)$ (Susceptíveis) tem-se o exposto na teoria do modelo SIR na seção 2.3, o número de infectados aumenta até o número de suscetíveis atingir $\rho = 7.197.837$ e depois disso o número de infectados decresce tendendo a zero.

Para trazer uma avaliação entre os valores obtidos pelo modelo e os valores reais encontrados nos Boletins Epidemiológicos, opta-se por gerar um gráfico no Insight Maker

apenas com as curvas que representam os “Infectados” e os “Óbitos”(Figura 6).

Na Figura 6 observa-se que o maior número de infectados seria no dia 12/09/2020, 147 dias após a data inicial da simulação (19/04/2020) com um valor de 909.177 infectados. O número de óbitos se estabilizaria à partir do dia 25/01/2021, que seria 282 dias após a data inicial da simulação.

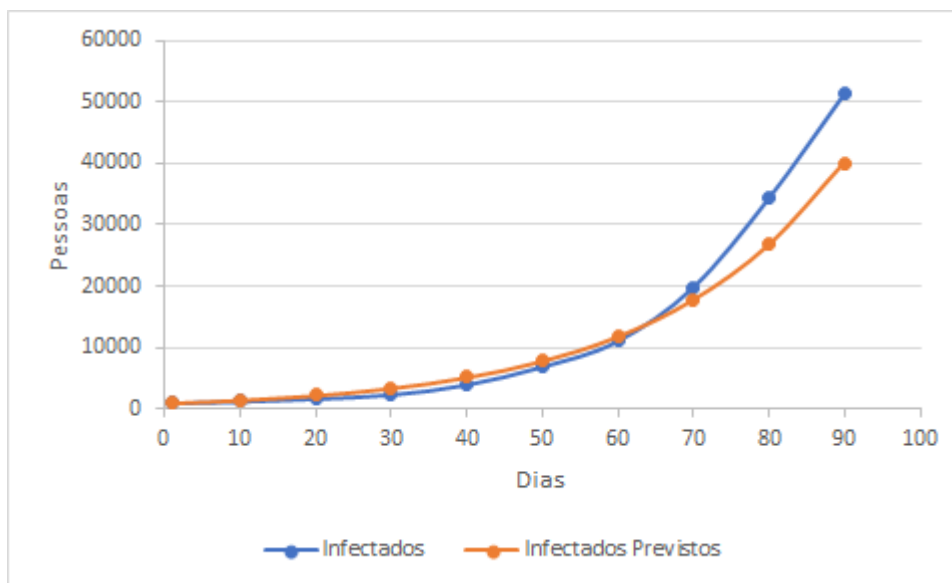
Figura 6 – Simulação Insight Maker - Infectados e Óbitos



Fonte: Insight Maker (2021)

Analisando agora a previsão do modelo para 90 dias apresenta-se na Figura 7 o gráfico com os dados reais do número de infectados (Infectados) e a previsão dada pelo modelo para esse número (Infectados Previstos). Os valores previstos pelo modelo para o número de infectados para 60 dias de previsão estão superestimados, à partir desse horizonte observa-se que as previsões ficam com valores subestimados, ou seja, o número real de infectados teve um crescimento maior do que o estimado pelo modelo.

Figura 7 – Infectados x Infectados Previstos



Fonte: Autoria própria (2021)

A Tabela 3 apresenta os erros relativos do modelo para o número de infectados. Observa-se que o erro relativo mais alto (46%) foi em 18/05/2020, com 30 dias após o início e o menor erro relativo foi de 7% em 17/06/2020, com 60 dias.

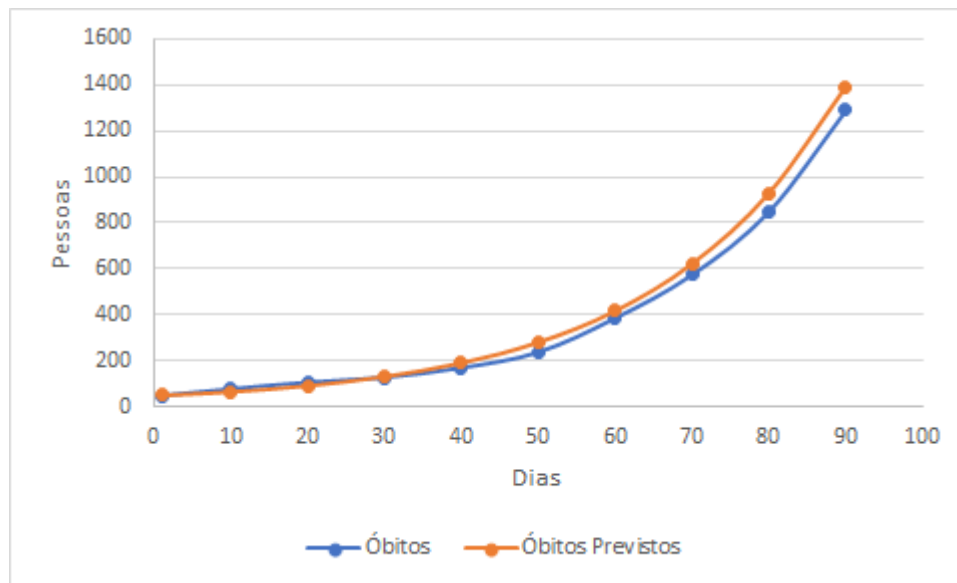
Tabela 3 – Erros relativos para o número de infectados

Data	Dia	Infectados	Infectados Previstos	Erro Relativo
28/04/2020	10	1.271	1.510	19%
08/05/2020	20	1.711	2.281	33%
18/05/2020	30	2.369	3.445	46%
28/05/2020	40	3.984	5.201	31%
07/06/2020	50	6.897	7.847	14%
17/06/2020	60	11.085	11.830	7%
27/06/2020	70	19.819	17.810	10%
07/07/2020	80	34.308	26.765	22%
17/07/2020	90	51.321	40.107	22%

Fonte: Autoria própria (2021)

Analisando agora a previsão do modelo para 90 dias apresenta-se na Figura 8 os dados reais do número de óbitos (Óbitos) e a previsão dada pelo modelo para esse número (Óbitos Previstos). Os valores previstos pelo modelo para o número de óbitos estão subestimados até os primeiros 20 dias de previsão, à partir desse horizonte observa-se que as previsões ficam com valores superestimados, ou seja, o número real de óbitos foi menor do que o estimado pelo modelo.

Figura 8 – Óbitos x Óbitos Previstos



Fonte: Autoria própria (2021)

A Tabela 4 apresenta os erros relativos do modelo para o número de óbitos. Observe-se que o erro relativo mais alto (19%) foi em 07/06/2020, com 50 dias após o início e o menor erro relativo foi de 5% em 18/05/2020, com 30 dias.

Tabela 4 – Erros relativos para o número de óbitos

Data	Dia	Óbitos	Óbitos Previstos	Erro Relativo
28/04/2020	10	77	67	13%
08/05/2020	20	106	93	12%
18/05/2020	30	127	133	5%
28/05/2020	40	169	192	14%
07/06/2020	50	237	282	19%
17/06/2020	60	386	418	8%
27/06/2020	70	575	623	8%
07/07/2020	80	851	930	9%
17/07/2020	90	1.292	1.392	8%

Fonte: Autoria própria (2021)

Para esta função que descreve a evolução do número de óbitos com o passar do tempo, observa-se erros relativos bem menores do que o da função que descreve a evolução do número de infectados.

5 Considerações finais

É de suma importância que pesquisadores se dediquem a modelos matemáticos com o intuito de compreender a dinâmica de doenças como a COVID-19. Muitos modelos contribuíram no começo da pandemia, início de 2020, para que fossem tomadas medidas de prevenção para atrasar a propagação do vírus. Esse tempo de atraso foi fundamental para que a saúde estruturasse atendimento e a vacina fosse desenvolvida.

Essa doença causou grandes impactos na sociedade, tanto na saúde física e emocional, quanto no sistema econômico. Muitas famílias perderam entes queridos, ficaram isoladas em casa por vários meses por conta da pandemia, trabalhando em *home office*, comércios fecharam, o que trouxe muito desemprego. As crianças deixaram de ir pra escola, ficaram no início sem aulas e depois no regime de ensino remoto emergencial que se estendeu durante todo o ano de 2020, o que trará uma defasagem muito grande na aprendizagem. Todos esses aspectos vão impactar por muito tempo a sociedade.

A respeito da consideração dos valores que foram utilizados na entrada do modelo, vale salientar que são parâmetros que mudam ao longo das fases de uma epidemia, por exemplo, o número médio de dias que uma pessoa leva para ir a óbito é menor no início da pandemia e tende a aumentar um pouco à medida que a ciência avança no sentido de um tratamento mais eficaz. Os contatos por dia de um infectado também varia de acordo com as medidas adotadas pela sociedade, especialmente quando combinado ao isolamento de casos e à quarentena dos contatos.

Além da variabilidade dos parâmetros em cada fase da epidemia, tem-se algumas limitações do modelo SIR como: as previsões consideram o estado atual da pandemia caso nenhuma medida seja tomada. O que foi visto é que cada região foi adotando medidas com o objetivo de achatar a curva que descrevia o crescimento do número de infectados pelo vírus. Por isso a importância de realizar um monitoramento contínuo de atualização periódica dos dados. Outras dificuldades apontadas por Ribeiro (2020) são a baixa qualidade dos testes, as subnotificações e a baixa disponibilidade de testes. Todos esses aspectos influenciam na confiabilidade do modelo. E por fim, o modelo SIR é o modelo epidemiológico mais simples, muitas variantes do modelo são encontradas na literatura, entretanto essa simplicidade é o que o faz ser muito utilizado para previsões em epidemias.

Acredita-se que assim como outros modelos matemáticos, o Modelo SIR, pode de alguma forma contribuir para tomadas de decisões em uma pandemia, visto que ele é mais eficaz no começo de uma pandemia.

Referências

BATISTA, M. Estimation of the final size of the second phase of coronavirus epidemic by the logistic model. *medrxiv*, Cold Spring Harbor Laboratory Press, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 18, 22 e 23.

Copyright. *Insight Maker*. 2021. Disponível em: <<https://insightmaker.com/>>. Acesso em: 08 abril 2021. Citado na página 29.

DODONOV, P. Dinâmica de populações, crescimento exponencial e coronavírus. 2020. Citado na página 15.

ENSERINK, M.; KUPFERSCHMIDT, K. Mathematics of life and death: How disease models shape national shutdowns and other pandemic policies. *Science Magazine*, 2020. Citado na página 14.

GOMES, S. C.; MONTEIRO, I. O. Estudo preliminar sobre a dinâmica da epidemia do novo coronavírus. 2020. Citado na página 15.

GONSALVES, J. J. et al. O software de modelização insight maker. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

LIMA, J. I. Um estudo sobre equações diferenciais ordinárias aplicado á epidemiologia. Universidade Federal de Campina Grande, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 27.

LOPES, L. F. D. et al. Descrição do perfil epidemiológico da covid-19 na região sul do brasil. *Hygeia-Revista Brasileira de Geografia Médica e da Saúde*, v. 16, p. 188–198, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 33.

LOPES, M. L.; HEIDEMANN, L. A.; VEIT, E. A. Tutorial para o uso do software insight maker. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

MENDES, I. C. M. *Ebola: Conheça o vírus que ressurgiu no Congo recentemente*. 2019. Disponível em: <<https://pebmed.com.br/ebola-conheca-o-virus-que-ressurgiu-no-congo-recentemente/>>. Acesso em: 08 novembro 2021. Citado na página 13.

Ministério da Saúde - Governo Federal. *Boletins Epidemiológicos*. 2021. Disponível em: <<https://www.gov.br/saude/pt-br/coronavirus/boletins-epidemiologicos>>. Acesso em: 08 novembro 2021. Citado na página 28.

Ministério da Saúde - Governo Federal. *Coronavírus*. 2021. Disponível em: <<https://www.gov.br/saude/pt-br/coronavirus/o-que-e-o-coronavirus>>. Acesso em: 08 novembro 2021. Citado na página 13.

Observatório COVID-19 Maringá. *Modelos Epidêmicos*. 2021. Disponível em: <<http://complex.pfi.uem.br/covid/project/modelos/>>. Acesso em: 08 novembro 2021. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

ORO, S. R. et al. Modelagem dinâmica para previsão dos casos novos de covid-19 no estado do paraná. *Anais da Sociedade Brasileira de Automática*, v. 2, n. 1, 2020. Citado na página 16.

Portal do Governo Brasileiro. *IBGE - Paraná*. 2021. Disponível em: <<https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pr/panorama>>. Acesso em: 08 novembro 2021. Citado na página 32.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. *Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acad mico-2  Edi o*. [S.l.]: Editora Feevale, 2013. Citado na página 28.

RIBEIRO, R. S. M. Proje es a partir do modelo epidemiológico sir para os casos de infec o pelo covid-19. *UFMG - Cedeplar*, 2020. Citado na página 37.

VALENTI, V. E. et al. Medidas de distanciamento social podem ter reduzido as mortes estimadas relacionadas à covid-19 no brasil. *J Hum Growth Dev*, v. 30, n. 2, p. 164–169, 2020. Citado na página 16.

VILLELA, P. *Modelo Epidemiológico SIR para COVID-19: Suscetíveis - Infectados - Recuperados*. 2020. Disponível em: <<https://insightmaker.com/insight/190896/Modelo-SIR-simples-Covid-19>>. Acesso em: 08 novembro 2021. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 31.

YANG, J. W. C. Um a mathematical model for the novel coronavirus epidemic in wuhan, china. *AIMS Press*, v. 17, n. 3, 2020. Citado na página 15.