PROFESSORES EM FORMA/AÇÃO

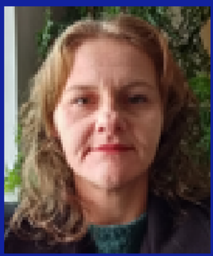
FRAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL

NELEM ORLOWSKI – LUCIANE FERREIRA MOCROSKY – MARIA APARECIDA VIGGIANI BICUDO
(ORGS.)

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Curitiba
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica

TERMO DE LICENCIAMENTO

Quem somos nós?



Nelem Orlowski, professora atuante nos anos iniciais do Ensino Fundamental na Rede Municipal de Ensino de Curitiba. Tem experiência na área de Educação com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente com a temática da Formação de Professores.

Luciane Ferreira Mocrosky, professora titular da carreira EBTT na Universidade Tecnológica Federal do Paraná e no Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET-UTFPR). Tem experiência na área de Educação com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Educação Matemática, Ensino e Aprendizagem da Matemática, Formação de Professores e Educação Profissional.

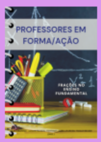
Maria Aparecida Viggiani Bicudo, professora e pesquisadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Campus de Rio Claro. Coordenadora e vice-coordenadora do PGEM da UNESP de 1984 a 1993. Co-editora do Boletim de Educação Matemática BOLEMA. Editora da Revista Pesquisa Qualitativa. Presidente da Sociedade qualitativa. Autora de livros e de artigos científico-acadêmicos de Estudos e Pesquisa Qualitativos. Editora da Revista Pesquisa Qualitativa - RPQ.

Este produto educacional em forma de Caderno Pedagógico é parte da tese de doutorado profissional intitulada "A forma/ação de professores que aprendem-ensinam Matemática", do Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Em 2019, estivemos em forma/ação com professores da Educação Básica no curso "Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco". O que vivenciamos nessa experiência formativa é discutido e compartilhado neste produto educacional, em forma de Caderno Pedagógico. Nele, você encontrará discussões acerca do aprender-ensinar frações.

Esperamos que nossas experiências docentes aqui compartilhadas possam contribuir com as suas!

Cordialmente,
As autoras.

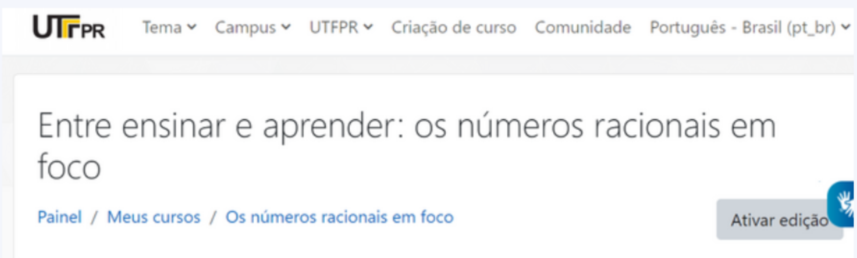


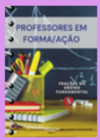
Apresentação

Em nossas trajetórias como professoras e pesquisadoras, nos mantemos envolvidas com a Formação Continuada de Professores na Educação Matemática desde 2012. Neste contexto, nossas pesquisas são desenvolvidas tendo como solo de sustentação teórica a perspectiva filosófico-fenomenológica.

Vinculadas ao Grupo de Pesquisas Fenomenologia na Educação Matemática (FEM), apresentamos este Caderno Pedagógico que é parte da tese de doutoramento profissional intitulada "A forma/ação de professores ao aprender-ensinar Matemática", produzida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET-Curitiba), na linha de pesquisa: Práticas Pedagógicas e Formação de Professores em Ensino de Ciências e Matemática.

Este Caderno Pedagógico está organizado de modo a apresentar algumas problemáticas vivenciadas e pesquisadas na elaboração da tese em conjunto com o produto educacional. Tais problemáticas foram experienciadas no curso de extensão universitária "Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco", planejado e realizado em 2019, como parte da constituição dos dados da tese já mencionada. O curso foi direcionado a professores atuantes no ensino de Matemática em redes públicas de educação, na plataforma Moodle da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR/Curitiba), tendo como tema central o ensino de frações.

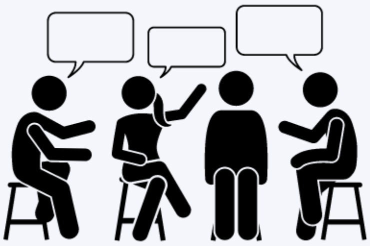




Apresentação

Buscando preservar a dinâmica entre o produzido na pesquisa (tese) e seus desdobramentos na elaboração deste Caderno Pedagógico (produto educacional), o organizamos com base em um diálogo entre duas perspectivas:

Entre professores: nos bastidores

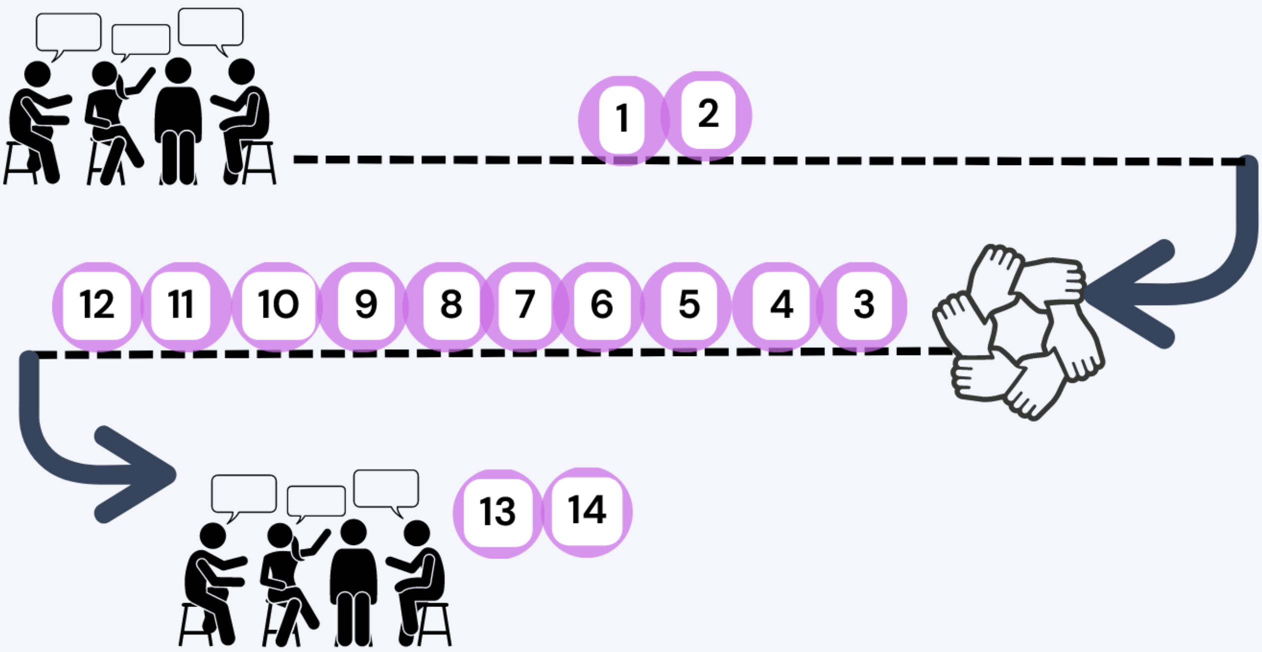


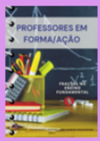
Bases teóricas de cunho fenomenológico que sustentaram a elaboração e realização do curso, culminando no Caderno Pedagógico como endereçamento à prática docente, que confere sentido à formação de professores.

Entre professores: na sala de aula

Vivências pedagógicas compartilhadas na ocasião do curso, que foram legitimadas entre os professores participantes como significativas para o ensino de frações no Ensino Fundamental.

Apresentamos algumas bases teóricas, em seguida, compartilhamos as vivências pedagógicas e finalizamos com um diálogo entre essas duas perspectivas. Nesse movimento, organizamos treze tópicos que estruturam o Caderno Pedagógico:





Sumário

Bases teóricas que sustentam a experiência formativa entre professores: nos bastidores

FORMA/AÇÃO

Discutir questões amplas que tratam com os fins da Educação Matemática, como a formação de professores, requer um proceder analítico e reflexivo, entrelaçando aspectos culturais, características da sociedade em que se vive e seu projeto de educação. Extrapola-se o imediato e utilitário, sem ignorá-los e, concomitantemente, são trazidos possíveis desdobramentos éticos, gnosiológicos e ontológicos, acolhendo os atos da própria pessoa que reflete, dando-se conta de si e do que está fazendo.

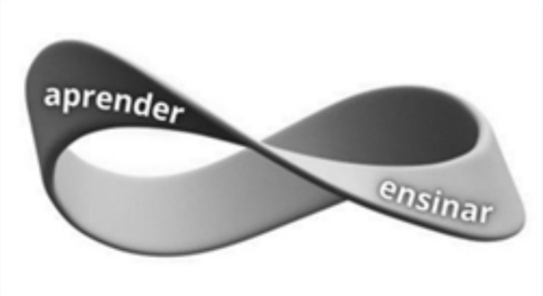
Seguindo por este caminho, compreendemos que a forma/ação se configura pelo dar-se conta da própria ação, da análise dessa ação em expressões intencionais de quem as atualiza, engendrada nos modos de realização e nos desdobramentos e reflexões do realizado. A expressão forma/ação foi cunhada por Bicudo (2003) para dar ênfase ao significado de forma como manifestação de algo que assume uma configuração por meio de um ato atualizador em ação. Esta, por sua vez, lhe serve como conteúdo e força que impulsiona à forma configurada pela ação empreendida (MIARKA; BICUDO, 2010).

É no entrelaçar das formas e ações em atos atualizadores do agir reflexivo docente, mantendo-se comprometido e em sintonia com o espaço, tempo e corporeidade de acontecimentos das vivências humanas, especificamente as vivências na Educação e na Educação Matemática, que firmamos um compromisso com o sentido de unir mútua e reflexivamente forma e ação. Esse acordo mútuo se concentra em torno do esforço de ensinar Matemática.

Bases teóricas que sustentam a experiência formativa entre professores: nos bastidores

APRENDER-ENSINAR MATEMÁTICA

Compreender-se em forma/ação solicita pensar o ensino também como uma ação: um ensinar que tem sentido em seu acontecer e que não se descola, ao menos em nível de intenção formativa, da ação de aprender.



Aprender-ensinar ou ensinar-aprender destaca-se pela possibilidade subjacente de um compromisso mútuo entre as pessoas, uma atitude assumida pelo professor.

Assim, aprender-ensinar Matemática com o hífen, como o entrelaçamento de ambos, significa um compromisso assumido consigo e com o outro, de cuidado ao formar-se e formar, em uma perspectiva crítica e reflexiva, tendo em vista a Matemática enquanto possibilidade formativa de pessoas.

Bases teóricas que sustentam a experiência formativa entre professores: nos bastidores

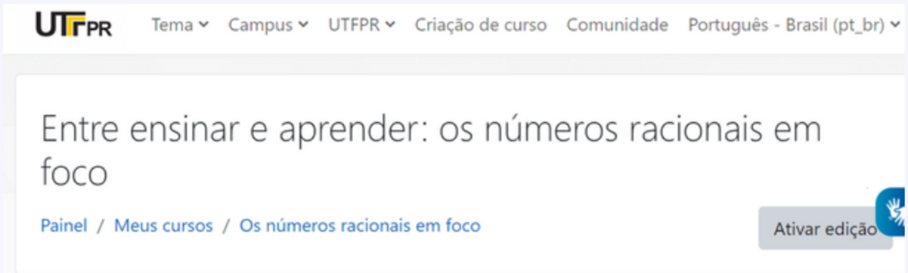
ESTRANHAMENTO

Em nossas pesquisas, temos proposto o estranhamento em vivências formativas como uma atitude que pode ser provocada e que tem o intuito de promover a perplexidade, conduzindo as pessoas ao movimento de questionar e questionar-se, especificamente sobre conteúdos escolares, ensino ou sobre a própria Matemática.

> Compreendemos o estranhamento como algo característico de uma atitude filosófica, assim como a indagação, a argumentação e a reflexão. O estranhamento acontece quando uma pessoa vivencia uma circunstância diferente da que costuma experimentar cotidianamente ou, quando no viver com o familiar, algo lhe salta aos olhos, provocando estranheza. Perplexos, ficamos em estado de alerta, atentos às coisas de modo a observarmos algo que antes não víamos ou que não nos causava incômodo. No estranhar-se com e nas coisas, questionamos o visto, que sempre é observado por alguém, de onde se entende o estranhamento como algo genuíno, dada a singularidade de cada um (MOCROSKY *et al.*, 2019, p. 1453).

No contexto do curso, o estranhamento pôde ser vivenciado como uma estratégia formativa. Ao realizarmos discussões de ensino ou de conteúdos de modo incomum para os envolvidos, tivemos a possibilidade de provocar desconforto frente ao inesperado, intensificando a atenção docente ao conhecer de modo autêntico, ou seja, ao colocar-se em movimento de compreender e compreender-se, aprendendo e ensinando Matemática e seus desdobramentos nos conteúdos e vivências escolares.

Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco



- CURSO FORMATO A DISTÂNCIA ASSÍNCRONO
- PLATAFORMA MOODLE DA UTFPR – 35 HORAS
- 25 PROFESSORES CONCLUINTES

Conteúdo programático

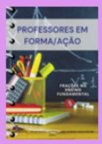
- Ambientação Moodle e apresentação dos participantes (4h)
- Discussão e compartilhamento de situações voltadas à prática de sala de aula (7h)
- Aspectos conceituais e práticos do ensino dos números racionais (7h)
- Diferentes significados das frações e suas possíveis contextualizações (7h)
- Articulações entre representações (frações, decimais e porcentagens) dos números racionais (7h)
- Avaliação (3h)

Entre ensinar e aprender: os números racionais em foco

Apesar de o conteúdo programático já estar definido antes do início do curso, a abordagem proposta objetivava que o aprofundamento ocorresse de forma progressiva por meio da realização de atividades pedagógicas junto aos professores. Ou seja, conforme vivenciávamos as discussões nos fóruns de interação, retomávamos os conteúdos para reconfigurá-los conforme as necessidades que os professores participantes manifestavam.

Cada um dos fóruns de interação foi denominado de "Unidades de Estudo" e, além das discussões, disponibilizavam diversos materiais para estudo.

Os trechos de poemas e imagens selecionados para a abertura de cada Unidade de Estudo foram pensados como convites filosóficos. Neles, além de algum aspecto do conteúdo programático, haviam elementos visuais que objetivavam despertar a atenção para um modo de compreensão crítico e reflexivo que promovesse o estranhamento (estratégia formativa).



Do curso à organização do Caderno Pedagógico

No decorrer do curso, além das discussões relacionadas às propostas elaboradas para cada Unidade de Estudo, várias atividades escolares foram compartilhadas e legitimadas entre os pares. Tratavam-se de propostas pedagógicas dos professores participantes para ilustrar alguma discussão teórica. Eram expressões da compreensão ou de como algum aspecto do conteúdo números racionais havia sido atualizado, propiciando ideias para elaboração de propostas pedagógicas tendo em vista os estudantes em sala de aula.

Na tese, as postagens dos professores foram se articulando, e neste Caderno Pedagógico, destacamos como algumas delas se mostravam a eles como significativas pelo potencial de auxiliar no ensino das frações. Foi assim que selecionamos as propostas pedagógicas apresentadas neste material, considerando:

Diferentes significados dos números racionais (quociente, parte/todo, medida, número e razão)

Articulação entre as diferentes representações dos números racionais

Possibilidades formativas aos professores e estudantes (flexibilização de pensamento, compreensões relacionais, utilização de recursos e/ou problematizações)

Para identificar momentos em que apresentamos discussões acerca da proposta ou do conteúdo envolvido em uma prática compartilhada, mantivemos a formatação de escrita como as anteriores: com destaque em fundo branco. Quando compartilhamos as propostas dos professores participantes, conforme postadas durante o curso, utilizamos o fundo mais escuro, letra azul, em negrito e itálico. Também utilizamos a nomenclatura de análise de dados da tese para preservar a identidade dos professores envolvidos: P1, P2, ..., P25.

Do curso à organização do Caderno Pedagógico

Os tópicos destinados à apresentação das propostas pedagógicas compartilhadas pelos professores seguem a seguinte organização:

Destacamos a proposta compartilhada com a nomenclatura dos professores participantes:

Primeiramente, o contato das crianças com os números fracionários, inicia com os seus primeiros engatinhar, ao dividir uma bala, chocolate ...

Fundo diferenciado para as postagens dos professores.

Hiperlinks para o material referenciado.

Formatação com fundo branco para comentários sobre aspectos da proposta pedagógica compartilhada.

Quociente

A fração indica uma divisão e seu resultado. Nas situações de quociente, temos duas variáveis, sendo que uma corresponde ao numerador e a outra ao denominador.

Como começamos a ensinar frações?

Primeiramente, o contato das crianças com os números fracionários inicia com os seus primeiros passos, ao dividir uma bala ou chocolate. Quem nunca falou ou ouviu a frase: "me dá um pedaço"? Desde então, estão sendo trabalhados conceitos fracionários que a criança não percebe. Para iniciarmos a introdução das frações, necessitamos mostrar para a criança a necessidade desse conceito. Ela é colocada à frente de diversas situações-problema que permitam a percepção de que os números naturais não são mais suficientes para expressar o resultado de uma contagem. Para ilustrar, vejamos um exemplo em que a criança começa a ter que desenvolver estratégias e adentra-se no campo dos números racionais (necessidade):

Com base nessa situação e em outras semelhantes, o modo de representação do problema pode ser pensado e construído junto com os estudantes pela necessidade de expressar o resultado dessa divisão. Inicialmente, pode-se recorrer à escrita, para depois introduzir a representação fracionária. Reforçando a ideia de que, ao dividirmos 6 barras inteiras por 4 crianças, teremos 1 barra inteira para cada criança e as outras duas barras inteiras que restaram ainda podem ser divididas novamente, mas agora em quarto partes (no caso desse problema especificamente, a quarta parte da barra é equivalente à sua metade): $1\frac{1}{2}$ ou $1\frac{2}{4}$

Ana tem 6 chocolates e vai distribuir igualmente entre seus 4 filhos. Quantos chocolates cada filho ganhará? Como vou resolver? Que estratégia vou utilizar?

$$\begin{array}{r|l} 6 & 4 \\ \cline{2-2} -4 & 1 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Quociente

A fração indica uma divisão e seu resultado. Nas situações de quociente, temos duas variáveis, sendo que uma variável corresponde ao numerador e a outra ao denominador.

Outro exemplo de discussão significativa com os estudantes é apresentado por Terezinha Nunes ao questionar: qual é maior 1/3 ou 1/5?

A maioria das crianças responde um quinto, pois cinco é maior que três. A professora logo pensa: "Essa criança não sabe nada de frações." Na verdade, a criança pensou com lógica, mas no contexto errado dos números que já conhece, os naturais. Terezinha reformula a pergunta assim:

"Imagine que você tem um chocolate para dividir por três pessoas e um chocolate igualzinho para dividir igualzinho por cinco pessoas. Em qual grupo cada pessoa vai ganhar mais chocolate?".

Por fim, todas crianças respondem:

"Ah! Quando você divide um por cinco, cada um ganha um pedaço menor."

Se a professora fala desde o início sobre fração no contexto de divisão, a criança adquire uma visão diferente: a de que a fração representa uma relação entre duas quantidades, uma que é a parte e a outra que é o todo. E é bom que a professora nunca se esqueça: as frações impróprias, apesar do nome, são objetos matemáticos perfeitamente aceitáveis. Logo, a parte talvez seja maior que o todo. {FIM}

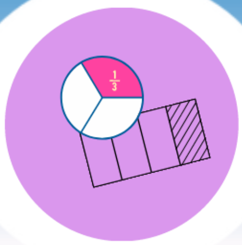
Assim como o colega P4, compreendo que o trabalho com frações está longe de ser iniciado na escola. Ele permeia a vida da criança de diferentes formas, principalmente quando o associamos ao seu significado de parte/todo.

Assim como todo conteúdo matemático para qualquer nível, acredito que os primeiros contatos devem partir de situações já vivenciadas pelo aluno, como uma placa da feira, um anúncio no jornal,, entre outras. Situações onde, assim como destacado pelo colega P4, há a necessidade de pensar para além dos números naturais e essa compreensão, a meu ver, é primordial.

Acredito que tal proposta para iniciar o assunto em sala de aula coloca os alunos e os professores para pensarem juntos sobre a situação, produzindo significados e possibilidades de compreensão (P25).

Entrevista completa em:

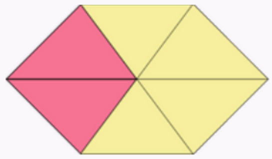
E as pizzas?



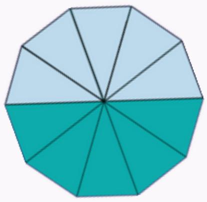
Conversando sobre a ideia de parte/todo no ensino de frações nos anos iniciais.

Parte/todo: uma noção estrutural às frações ou jogo visual de imagens?

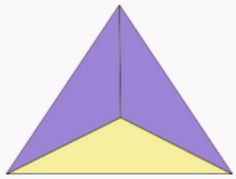
Geralmente, encontramos nos livros didáticos definições de frações nos anos iniciais, como: "uma forma de representar algo dividido em partes iguais”. Em seguida, nos deparamos com tentativas de configurar um contexto para ilustrar essa ideia. São situações que buscam contextualizar as frações com uso de imagens associadas a objetos do cotidiano ou com figuras geométricas. Essas imagens sugerem a ideia mental de parte/todo, como as que estão na lateral.



A que ideia de parte/todo essas imagens se referem? Elas contemplam o significado de parte/todo que desejamos motivar nos estudantes, ou seja, relacionado ao que significa fração?

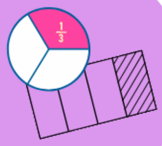


Nesses exemplos, o todo é sempre apresentado como um objeto em que o que está sendo enfatizado não é seu tamanho ou medida (comprimento, área, volume, etc.), nem a sua divisão, mas o modo como está, de antemão, dividido em partes iguais.



O todo passa a ser visto e compreendido como algo dado, próprio do objeto em questão, que ao ser apresentado já dividido em partes iguais, passa a ser representado numericamente pelo número de vezes que está dividido no denominador da fração. O que está destacado, pintado ou sendo solicitado, são as partes que estão sendo “tomadas” e representadas pelo número que fica no numerador da fração.

Nesse jogo visual que as imagens proporcionam, geralmente os estudantes acabam compreendendo (inicialmente) que as frações surgem para resolver um exercício de dupla contagem desses dois aspectos. Assim, conta-se o número de vezes que a figura está dividida e separa-se por um traço o número que representa a quantidade de vezes em que suas partes estão pintadas ou destacadas.



Conversando sobre a ideia de parte/todo no ensino de frações nos anos iniciais.

Não raro, constatamos essa ideia em nossos estudantes, quando perguntamos a eles o que pensaram ao inverter numerador e denominador. Logo entendemos que eles não pensaram em uma relação, mas apenas como um novo modo de representar a contagem de dois aspectos de um mesmo objeto apresentado em uma imagem.

Importante ressaltar que, de início, levando em consideração o explicitado e propondo exercícios como os ilustrados, as frações perdem o sentido de número.
Lembramos que nos anos iniciais, quando começa o ensino desse conteúdo escolar, os estudantes só trabalham pedagogicamente com "números para contagem", ou seja, os números naturais. As frações, por sua vez, inauguram outro campo numérico, que sendo a extensão dos naturais, os englobam e atualizam o sentido numérico ao não se referirem apenas a contagens, mas a comparações, razões e medidas, que envolvem o campo dos racionais.

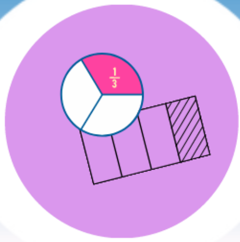
Prosseguindo nesse caminho das imagens que descaracterizam as frações inicialmente, muitos problemas didáticos vão surgindo, tornando o ensino de frações um emaranhado de regras sem articulação e, principalmente, sem um suporte teórico capaz de sustentar seu sentido matemático, afastando-as cada vez mais de seus sentidos sociais. Assim, a Matemática começa a ganhar sua fama de incompreensível, fora da realidade, tanto aos professores quanto aos alunos, ao mesmo tempo em que insistimos em repetir e tentar mostrá-la em todas as situações cotidianas.

Alguns exemplos que podem ser observados como resultantes desse caminho didático de descaracterização:

Comparação

$$\frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{4}\ ?$$

Qual a maior fração?
Os estudantes tendem a comparar frações como comparam números naturais. Assim, é comum que digam que 1/4 é maior que 1/3.



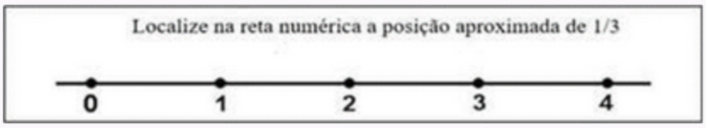
Conversando sobre a ideia de parte/todo no ensino de frações nos anos iniciais.

Frações impróprias, aparentes e números mistos

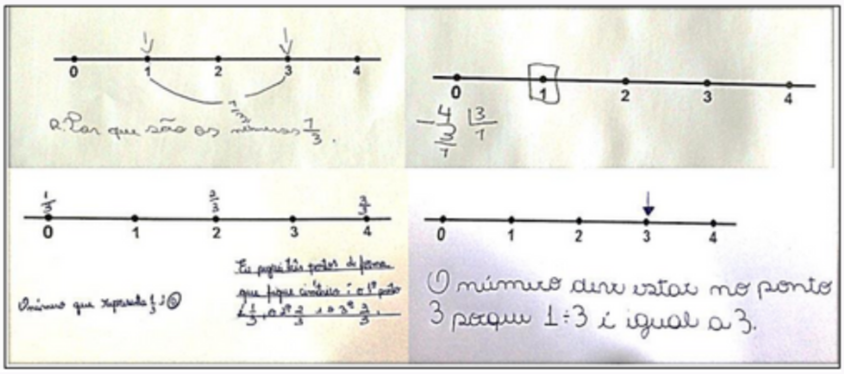
$\boxed{\frac{6}{5}}$ $\boxed{\frac{6}{3}}$ $\boxed{2\frac{3}{5}}$

Quando os estudantes realizam dupla contagem, geralmente não conseguem identificar e nem compreender frações impróprias, aparentes e números mistos.

Localizar frações na reta numérica



Não conseguir localizar frações na reta numérica.

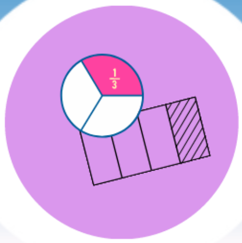


Fonte: Mocrosky *et al.*, 2019, p. 1455

Nesta ilustração acima, importante notar como alguns estudantes tentam usar a imagem da pintura das figuras geométricas à reta numérica inteira, ou partes dela, como se fosse possível dividi-la em três grandes partes e "tomar uma" representasse o lugar da reta onde estaria a fração 1/3.

https//www.

Mais detalhes em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/FK477dCbhhQTYn4yzt47DdC/abstract/?lang=pt

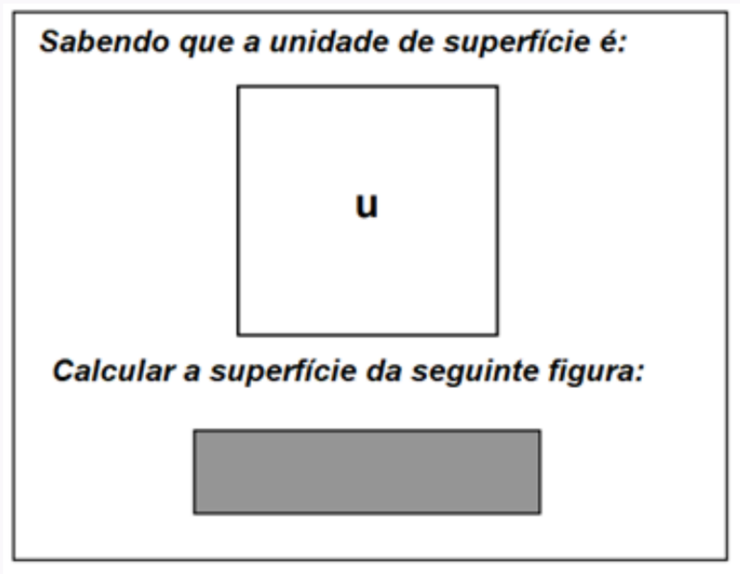


Conversando sobre a ideia de parte/todo no ensino de frações nos anos iniciais.

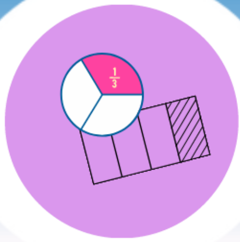
Quando os estudantes fixam sua atenção no jogo visual da dupla contagem, como discutido, as impossibilidades de continuar o ensino de modo articulado dos anos iniciais aos anos finais se acentuam. A cada nova situação é requerido do estudante que abandone a ideia anterior, e uma nova "regra" é apresentada para realizar as atividades.

Em outras palavras, há uma descontinuidade no ensino de frações, principalmente quando os estudantes se encaminham dos anos iniciais para os anos finais do Ensino Fundamental.

Para repensar a descontinuidade no ensino de frações,
vamos realizar um exercício com uso de imagens:

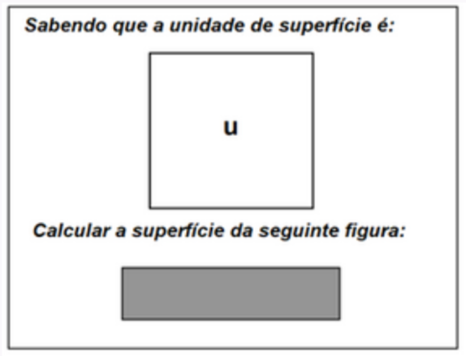


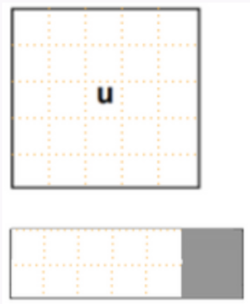
Agora, a resposta para a tarefa não é evidente. Estamos enfrentando um problema cuja solução não é imediata, pois o resolvedor precisa tomar decisões e prosseguir realizando medições.



Conversando sobre a ideia de parte/todo no ensino de frações nos anos iniciais.

Uma possibilidade é realizar medições com dobraduras e sobreposição de folhas recortadas:

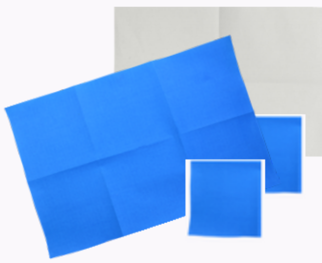




1. É evidente que a superfície a ser medida não contém um número inteiro de vezes a unidade de medida *u*; portanto, é necessário decidir sobre o tamanho de uma nova unidade de medida que, necessariamente, deve ser uma parte da unidade *u*. Mas qual é essa parte ou subunidade? Metade dela, terço dela, ...?
2. Uma vez concluído o processo, o resultado da medida deve ser expresso. E esse resultado dependerá da técnica utilizada no processo de medição: será necessário mencionar a subunidade ou subunidades utilizadas e seu tamanho em relação à unidade *u*. Consequentemente, diferentes maneiras de expressar o resultado da medição podem aparecer, como 4 de *u*, 1 + 1/8 de *u*;

Em vista dessas considerações, fica claro que o significado da medida é muito diferente do significado da parte inteira, tanto pelas demandas cognitivas exigidas pela tarefa quanto pelas ideias matemáticas derivadas da resolução da tarefa" (VIZCARRA; SALLÁN, 2005, p. 20-21, tradução nossa).

Deste modo, entendemos que o exercício de pintar partes de uma figura geométrica pode ser um modo de apresentar a relação parte/todo para o ensino de frações nos anos iniciais. Entretanto, é insuficiente para oferecermos aos estudantes oportunidades pedagógicas para exercitar um modo de pensar mais flexível e relacional.



Parte todo

Partição de um todo em *n* partes iguais, em que cada parte pode ser representada como 1/*n*.

Começando o ensino de frações com o significado de parte-todo em uma atividade de construção com os estudantes.

Comecei esse ano assim, com uma folha para dobrar, e enfatizei o inteiro, que no caso era a folha. Dobramos em 8 partes e em outros papéis coloridos dobramos e recortamos vários oitavos (sem falar isso para eles).









Assim, colocamos os pedaços (oitavos) sobre o primeiro papel que só tinha as dobras e fomos discutindo, tirando e colocando no papel o tamanho das partes até chegarmos no inteiro. Como tínhamos mais oitavos recortados,, precisaríamos de outro inteiro para completar. Me parece que ficou melhor o entendimento de tamanho (medida em relação ao inteiro) no caso das frações próprias, de fração aparente e de impróprias.

Essa forma desconstruiu os exemplos dos livros que trazem diretamente os inteiros já divididos.
Conforme vão avançando na comparação entre o inteiro e suas partes divididas em oitavos, podem fazer registros com as representações fracionárias: 1/8 ,2/8, 3/8..., 8 = 1 inteiro.

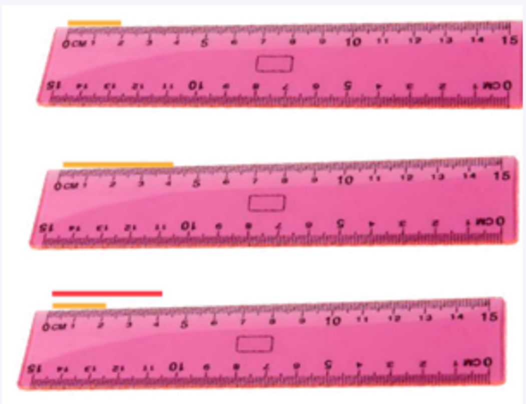
Medida

Comparação na qual a fração está relacionada à pergunta "quantas vezes?". Neste caso, uma determinada parte é tomada como referência para se medir uma outra.

"Quantas vezes uma medida cabe na outra?"

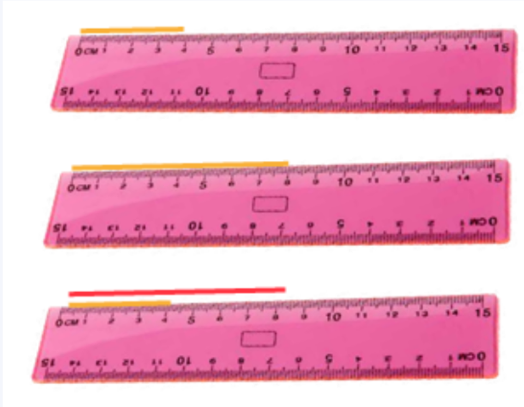
Considero que a necessidade é o que nos move. Assim, no decorrer dos anos em que leciono para turmas de sexto ano, fui modificando minha metodologia. A leitura do livro "Conceitos Fundamentais da Matemática", autoria de Bento de Jesus Caraça, contribuiu muitíssimo para a minha compreensão do que vem a ser fração. Assim como a divisão, onde o quociente é o resultado de quantas vezes o divisor cabe no dividendo, a fração segue a mesma lógica, onde busca-se um valor que expresse a quantidade de vezes que o denominador cabe no numerador, ainda que não seja possível expressá-lo na forma de número natural.

Deste modo, construo segmentos, por exemplo, um com 4 u.c. e outro abaixo com 2 u.c. E questiono:
Quantas vezes o segmento de medida 2 u.c. cabe no segmento com 4 u.c.?
E visualizando, eles respondem: duas vezes.



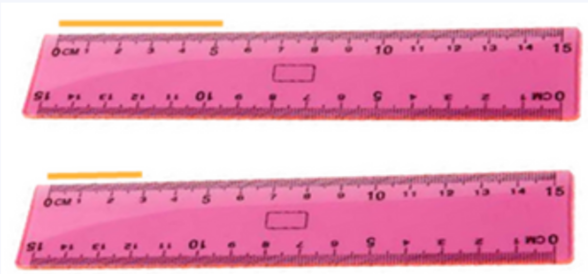
Medida

Comparação na qual a fração está relacionada à pergunta "quantas vezes?". Neste caso, uma determinada parte é tomada como referência para se medir uma outra.



E assim prossigo, com muitos exemplos, primeiramente com frações ditas aparentes.

Depois, apresento outros segmentos onde o denominador não caberá nenhuma vez inteira no numerador. Então, surge um impasse, como iremos representar isso?



O segundo segmento não cabe nenhuma vez no primeiro. Surge o impasse: o que fazer?

Vamos precisar criar uma relação que expresse essa medida de "quantos cabem", tendo como base os dois comprimentos envolvidos. Iniciamos uma discussão e deixo que eles respondam até esgotar as alternativas.

No exemplo, a fração 5/3: quantas vezes o número 3 cabe em 5? Cabe uma vez inteira e mais 2 partes de 3, ou seja, 1 2/3. Mas isto é assunto para mais adiante.

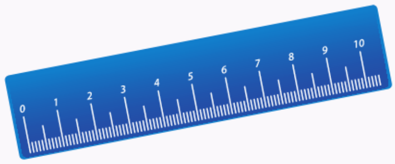
Deste modo, eles percebem que a fração surge a partir de uma necessidade. Sempre associo fração à divisão, porque assim essa relação de "quanto cabe" fica mais evidente para os alunos. Deste modo, fica também mais fácil o entendimento dos números mistos. A introdução é iniciada por meio da comparação de medidas, depois apresento as nomenclaturas e damos continuidade ao processo na reta numérica, não deixando de lado a leitura das frações.

Medida

Comparação na qual a fração está relacionada à pergunta "quantas vezes?". Neste caso, uma determinada parte é tomada como referência para se medir uma outra.

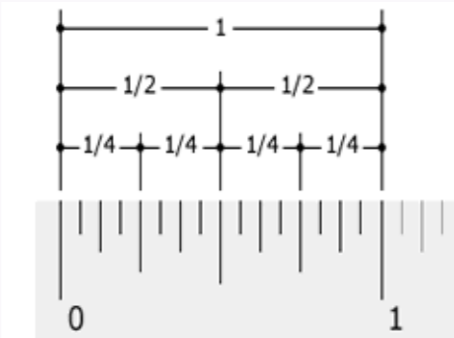
Conversando sobre a proposta da construção de segmentos para iniciar o ensino das frações nos anos finais do Ensino Fundamental.

A proposta descrita, com a construção de segmentos com uso de frações aparentes, remete à preocupação com os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à divisão, tal como a conhecem e realizam nos anos iniciais. Essa é uma das dificuldades do uso de desenhos de formas divididas e pintadas: entender como, a partir de desenhos ou materiais manipuláveis que costumam tratar as relações parte/todo de forma estática, seria possível promover uma articulação com a divisão.



A utilização de um recurso matemático, a medida de segmentos, realizando uma discussão conjunta com os estudantes avança em relação ao uso de materiais manipuláveis. Ao extrapolar a manipulação "concreta" (no sentido daquilo que se pode pegar), permite um passo em direção à abstração.

Assim, além de resolver o problema didático do "aparecimento dos números mistos" como algo que quase nunca faz sentido aos estudantes, a proposta nos incentiva a refletir que se quisermos dar concretude às ideias matemáticas, precisamos que elas nos proporcionem experiências que estimulem modos flexíveis de pensar matematicamente.



Medida

Comparação na qual a fração está relacionada à pergunta "quantas vezes?". Neste caso, uma determinada parte é tomada como referência para se medir uma outra.

P11

Construindo um percurso formativo com os estudantes nos anos finais do Ensino Fundamental: usando literatura

Ao iniciar o conteúdo frações com o sexto ano, pedi para os alunos que respondessem a seguinte pergunta: O que eu sei sobre frações?
As respostas foram bastante diversificadas:

É dividir algo em partes iguais.

Frações são partes de um número.

Frações são partes de um número.

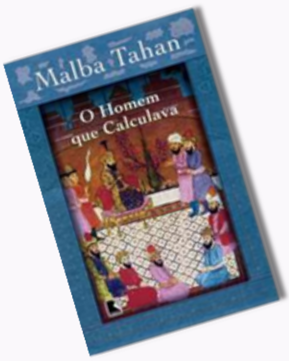
Frações são partes de um número.

É uma imagem com várias partes.

Fração é um meio de fazer divisão.

Tem que dividir uma pizza.

A partir das respostas dos alunos, busquei introduzir o conteúdo de forma lúdica. Construímos os discos das frações e também estamos trabalhando a partir da literatura infantil (estou realizando o trabalho a partir do livro "O macaco que calculava", de Anna Flora), como forma de motivar o aprendizado, fugindo da maneira tradicional que acontece nos livros didáticos. Trabalho com uma sequência didática onde são contempladas a divisão do inteiro em partes, a fração de quantidade, receitas, entre outros.



Sempre procuro aliar a literatura e as aulas de Matemática. Já trabalhei com a famosa divisão dos camelos do livro "O homem que calculava", de Malba Tahan, cujo trabalho resultou em um teatro de fantoches. Disponível em:

Número

A fração é um número em si, não sendo necessário que expresse uma relação ou contexto para ser compreendida em uma dada situação.

P11

Localizar frações na reta numérica

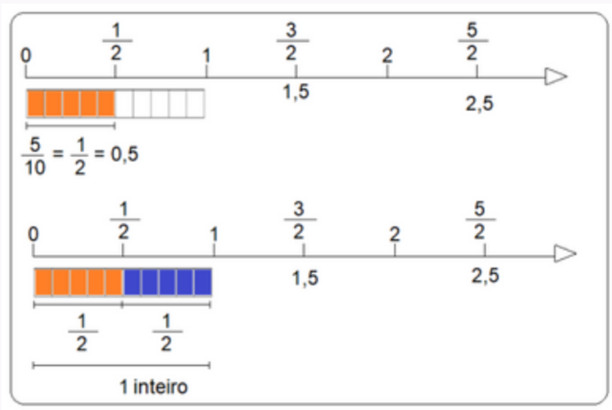
O ensino de frações ainda é um grande desafio para os professores, pois, de maneira geral, existem conhecimentos, mas não há material didático pedagógico suficiente para desenvolver significativamente os conceitos envolvidos nesse conteúdo escolar.

Enquanto a aprendizagem de números inteiros pode ser baseada na contagem de dedos, não há substituição óbvia dos dedos para o aprendizado de frações.. Pedaços de pizza claramente não fazem o trabalho.

Mesmo em livros didáticos ou materiais online é muito difícil encontrar atividades que proporcionem um trabalho mais aprofundado sobre a localização de frações na reta numérica.

Fiquei motivada (provocada) a experimentar a aprendizagem seguindo este modelo.

Para verificar o que estas mudanças causariam na sala de aula, aproveitei as sugestões do curso e apliquei para alunos do sexto ano. Propus uma atividade visando que eles compreendessem que os números racionais também possuem uma "unidade", assim como os números naturais.



Número

A fração é um número em si, não sendo necessário que expresse uma relação ou contexto para ser compreendida em uma dada situação.

Desenvolvendo a atividade

Confeccionei com EVA alguns retângulos de 15 cm de comprimento, de cores variadas.

Tracei uma reta numérica no quadro de giz e posicionei os retângulos de tal forma que cada um representasse uma unidade.

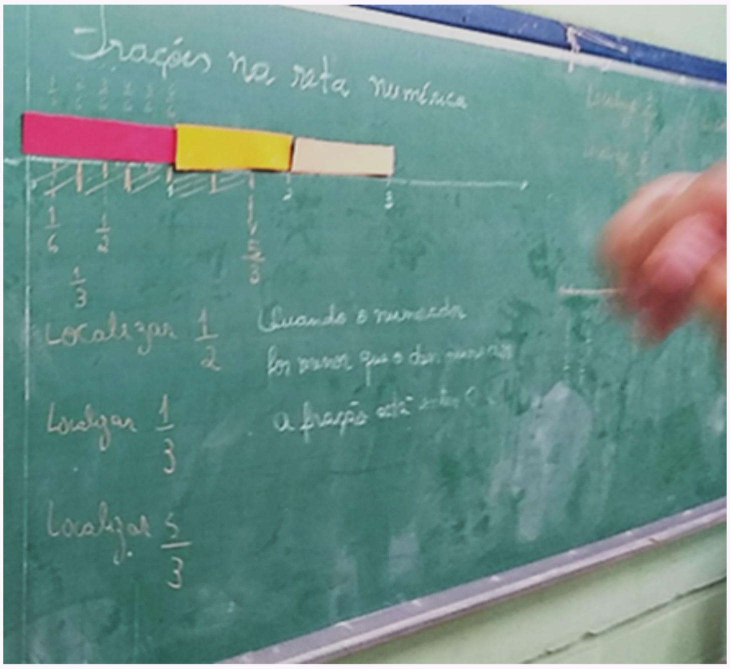
Professora: Como podemos marcar a fração 1/3 nesta reta?
Aluno: É só contar 1, 2, 3 e marcar?
Professora: Mas o que significa um terço?
Aluno: Ah, tem que dividir por 3.
Professora: Mas como podemos fazer isso?
Aluno: A gente mede do 0 até o 1 e divide em três partes, aí pegamos só um pedacinho.
Professora: E se for 4/5?
Aluno: Aí é só dividir o mesmo pedaço em 5 partes.
Professora: Será um pedaço?
Aluno: Não, é o mesmo entre 0 e 1, só que divide em 5 pedaços e marcar 4.
Professora: E agora, como podemos marcar 3/2?
Aluno: Hum, ah, já sei, tenho que pegar 3 metades, então vou precisar marcar no pedaço verde.
Professora: Mas o verde não é um pedaço.
Aluno: É mesmo, ele também é inteiro.

Número

A fração é um número em si, não sendo necessário que expresse uma relação ou contexto para ser compreendida em uma dada situação.

Aluno: Olha, quando embaixo da fração é maior que o de cima, a gente marca antes do 1. Se for o contrário, a gente marca depois do 1.
Professora: Será que podemos concluir alguma coisa?

No dia seguinte, novamente levei retângulos construídos de EVA, com 24 cm de comprimento, e solicitei que marcassem algumas frações na reta.



Os alunos observaram que os retângulos eram maiores do que na atividade anterior, mas realizaram corretamente a localização. Também notaram que quando o numerador e o denominador de uma fração têm o mesmo valor, pode ser representado pelo número inteiro.

Por meio dos materiais disponibilizados no curso, foi possível ter um novo olhar no desenvolvimento da prática pedagógica, fugindo do tradicional modelo que acaba na divisão de pizza ou na representação por número decimal.

Número

A fração é um número em si, não sendo necessário que expresse uma relação ou contexto para ser compreendida em uma dada situação.

P22

Localizar frações na reta numérica

Quero compartilhar com vocês o trabalho que a P24 e eu realizamos no mês passado com nossa turma de 6.º ano, tendo por base os estudos realizados aqui neste ambiente de formação. Trabalhamos com reta numérica, usando fração como unidade de medida.

A ideia de desenvolvimento da atividade é a mesma apresentada na página anterior. Nesse relato, ao invés dos retângulos de papel, P22 faz uso de barbante e folhas de papel para posicionar os inteiros.

Realizamos uma atividade avaliativa sobre o assunto. Qual foi a nossa surpresa? Os estudantes demonstraram compreender como localizar as frações na reta.

Em Santos (2019), encontramos mais encaminhamentos para o trabalho com as frações na reta.

Localizar frações na reta numérica implica conduzir o estudante à compreensão de fração como número. Esta condução, por sua vez, requer o entendimento de fração como medida de comprimento de segmento de reta.

Razão

A fração refere-se a quantidades intensivas, em que a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.

P25 Resolver problemas: um modo de aprender-ensinar Matemática com o outro

Um dos conteúdos que considero com mais dificuldade de aprendizagem é a ideia de proporção. A proporção é uma igualdade entre duas razões, mas apenas falar isso para os alunos pode não trazer significados. A atividade a seguir envolve entender a razão como uma relação entre grandezas, ao compará-las somos capazes de determinar se são equivalentes (proporcionais). A atividade envolve determinar uma relação entre o preço e a quantidade de determinados tipos de produtos em embalagens distintas:

Quanto custa 100g de margarina?

1 kg - R$ 10,58	500 g - R$ 5,29
1 kg - 1000 g → 100 g (+10)	500 g → 100 g (+5)
$\frac{10.58}{10} = 1.05$	$\frac{5.29}{5} = 1,05$

Essa proposta oportuniza que o conteúdo, em sua forma técnica, faça sentido ao aluno pelo cotidiano, em uma situação de uso social.

Trocar resoluções de problemas enriquece nosso repertório pedagógico ao nos permitir atualizações de sentido, tanto no que se refere aos aspectos do conteúdo matemático escolar abordado quanto às estratégias de resolução.

Na próxima proposta apresentamos resoluções que os professores criaram para outro problema matemático envolvendo o significado de razão.

Razão

A fração refere-se a quantidades intensivas, em que a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.

Resolver problemas: um modo de aprender-ensinar Matemática com o outro

Dentre as várias resoluções compartilhadas entre os professores, apresentamos duas na sequência: a primeira com o uso de tabelas; a segunda, explicativa e com uso de imagens.

Duas jarras iguais contêm misturas de álcool e água nas razões de 3/5 (três para cinco) na primeira jarra e 3/7 (três para sete) na segunda. Juntando-se os conteúdos das duas jarras, qual será a razão entre álcool e água na mistura resultante? (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008)

Primeiro, eu deixaria alguns minutos para que os estudantes discutissem entre si algumas estratégias que poderiam ser utilizadas para a resolução do problema. Em seguida, começaria as intervenções pedagógicas para que, juntos, pudéssemos encontrar a resposta do problema.

Como eu resolveria esta situação?

Organizaria as informações em uma tabela similar a apresentada a seguir:

	JARRO 1	JARRO 2
$\frac{álcool}{água}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{7}$
ÁLCOOL	3 partes da mistura	3 partes da mistura
ÁGUA	5 partes da mistura	7 partes da mistura
Total de partes da mistura	8 partes	10 partes

Razão

A fração refere-se a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.

Qual a razão de álcool por mistura em cada jarro?

	JARRO 1	JARRO 2
$\frac{álcool}{mistura}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{10}$

Como os jarros devem conter a mesma quantidade de mistura, e as razões não estão na mesma proporção, precisamos considerar a mesma quantidade de partes da mistura. Precisamos buscar razões proporcionais que tenham o mesmo número de partes. Assim,

	JARRO 1	JARRO 2	JARRO 1 + JARRO 2
$\frac{álcool}{mistura}$	$\frac{3 \cdot 10}{8 \cdot 10} = \frac{30}{80}$	$\frac{3 \cdot 8}{10 \cdot 8} = \frac{24}{80}$	$\frac{30}{80} + \frac{24}{80} = \frac{54 \div 2}{80 \div 2} = \frac{27}{40}$

Portanto, juntando a mistura do jarro 1 com o jarro 2 teremos 27 partes de álcool para 40 de mistura.

Qual a razão de água por mistura em cada jarro?

	JARRO 1	JARRO 2
$\frac{água}{mistura}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{10}$

Igualmente, como os jarros devem conter a mesma quantidade de mistura, e as razões não estão na mesma proporção, precisamos considerar a mesma quantidade de partes da mistura, ou seja, precisamos buscar razões proporcionais que tenham o mesmo número de partes. Assim,

	JARRO 1	JARRO 2	JARRO 1 + JARRO 2
$\frac{água}{mistura}$	$\frac{5 \cdot 10}{8 \cdot 10} = \frac{50}{80}$	$\frac{7 \cdot 8}{10 \cdot 8} = \frac{56}{80}$	$\frac{50}{80} + \frac{56}{80} = \frac{106 \div 2}{80 \div 2} = \frac{53}{40}$

Portanto, jutando a mistura do jarro 1 com o jarro 2 teremos 53 partes de álcool para 40 partes de mistura. Qual é a razão entre álcool e água na mistura resultante?

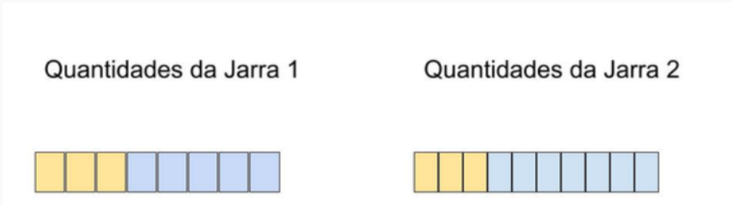
$$\frac{álcool}{água} = \frac{27}{53}$$

Razão

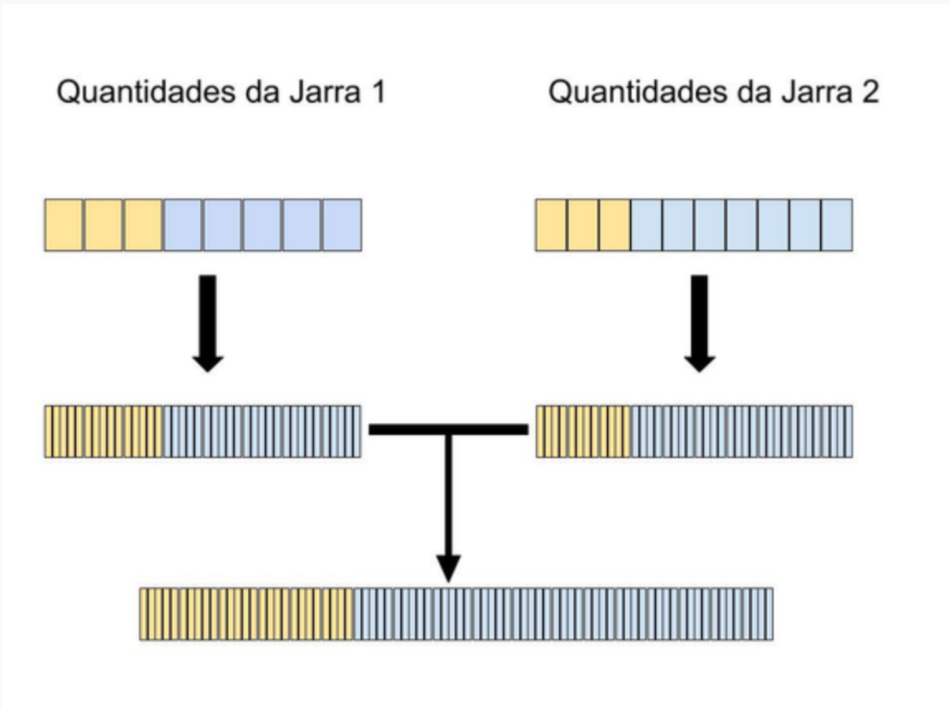
A fração refere-se a quantidades intensivas, em que a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.

Mesmo problema, outra resolução

Representamos as quantidades das jarras respectivamente de forma simples. Perceba que somar as quantidades seria o mesmo que "juntar os pedaços", mas os pedaços estão de tamanhos diferentes. Para realizar a soma, precisaríamos "que os pedaços fossem do mesmo tamanho".



Para deixar todos os pedaços com tamanho uniforme, precisaremos fazer o seguinte: na jarra 1, dividir um dos pedaços em 5 pedaços menores; e na jarra 2, dividir cada pedaço em 4 menores. Assim, teremos todos os tamanhos idênticos, pois as duas misturas agora estão com 40 pedacinhos cada (a jarra 1 com 15 unidades de álcool e 25 de água, e a jarra 2 com 12 unidades de álcool e 28 de água). Desta forma, finalizamos com a soma e obtemos a nova razão, que é 27 /43.



Estudando um problema virtual para compreender uma das versões históricas do surgimento das frações.

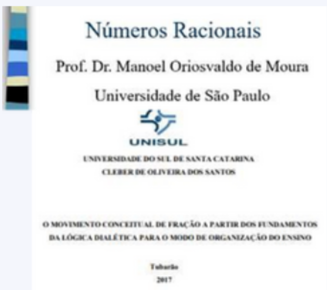
Antes de continuar a leitura, lançamos um desafio: **Resolver o problema virtual proposto por Moura (2015).**

Cordasmil é um estirador de cordas encarregado pelo Faraó para medir os terrenos que foram distribuídos aos súditos para o cultivo às margens do rio Nilo. Ele mede apenas a lateral dos terrenos, pois a medida de frente que corresponde à margem do rio é fixa. O que lhe interessa mesmo é o quanto o Nilo tem de terra cultivável às suas margens, pois os impostos serão cobrados tendo em vista esta porção de terra. Ao medir a lateral do terreno de Unopapiro, o estirador contou n cordas inteiras, mas percebeu que sobrava um tanto dessa lateral em que não cabia uma corda inteira. Sabendo que o Faraó exigirá uma representação da medida do terreno de Unopapiro, de que modo deverá proceder Cordasmil para transmitir ao Faraó a dimensão da lateral do terreno medido?

Como proceder para representar a parte que não é uma corda inteira? Qual sua proposta para Cordasmil resolver este problema?

Com base no referencial teórico da Teoria Histórico-Cultural, este problema foi criado pelo professor Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura (USP).

Moura (2015) https://www.



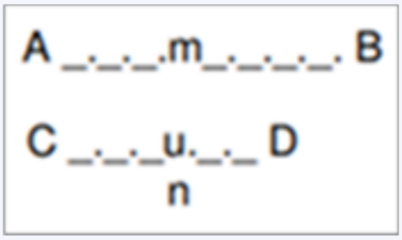
Santos (2017) https://www.

Uma das primeiras tarefas do nosso curso foi resolver o problema virtual chamado Cordasmil (MOURA, 2015). Nossa opção em propor esse problema foi por ele oportunizar uma discussão das frações do ponto de vista histórico, considerando que as frações se originaram na divisão de grandezas, tal como explicita Bento Jesus de Caraça (repartição das terras entre os egípcios) e o problema gerado pela necessidade de medição para expressar o controle de quantidades contínuas:

> É, portanto, necessário: estabelecer um estalão único de comparação para todas as grandezas da mesma espécie; esse estalão chama-se unidade de medida da grandeza de que se trata [...] há, portanto, no problema da medida, três fases e três aspectos distintos- escolha da unidade; comparação com a unidade; expressão do resultado dessa comparação por um número. (CARAÇA, 2003, p. 30).

Estudando um problema virtual para compreender uma das versões históricas do surgimento das frações.

No entanto, ao expressar o resultado de uma comparação com um número, o autor alerta sobre a dificuldade em relação ao aspecto aritmético, qual seja, ao subdividirmos uma unidade em *n* partes iguais, de tal modo que uma dessas partes caiba *m* vezes na grandeza a medir. O problema aparece quando *m* não seja divisível por *n*, impossibilitando a divisão e requisitando a necessidade da criação de um novo campo numérico:



> Satisfaz-se a estes requisitos dando a seguinte definição. Sejam, fig. 3, os dois segmentos de reta e AB e CD, em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento *u* AB contém *m* vezes e CD contém *n* vezes o segmento *u*. Diz-se, por definição, que a medida do segmento AB , tomando CD como unidade, é o número *m/n* e escreve-se AB = *m/n*. CD, quaisquer que sejam os números inteiros *m* e *n* (*n* não é nulo); se *m* for divisível por *n*, o número *m/n* coincide com o número inteiro que é quociente da divisão; se *m* não for divisível por *n*, o número diz-se fraccionário. (CARAÇA, 2003, p. 35).

Compreendemos o movimento lógico-histórico configurando-se enquanto perspectiva e didática (SOUZA, 2017). Neste sentido, o problema desencadeador pode mobilizar o pensamento teórico, suscitando o processo de significação, uma vez que quem o resolver individualmente ou coletivamente, em certa medida, "revive" não apenas a circunstância geradora da necessidade humana de medir e não ter um modo de expressá-la continuamente, mas "sente" o movimento de gênese que faz parte do desenvolvimento do próprio conhecer humano, possibilitando a compreensão da definição formal matemática de número racional.

Na sequência, apresentamos três resoluções para o problema. Todas estão discutidas mais detalhadamente na tese e no artigo ao lado:

Estudando um problema virtual para compreender uma das versões históricas do surgimento das frações.

Sem recorrer à medições:

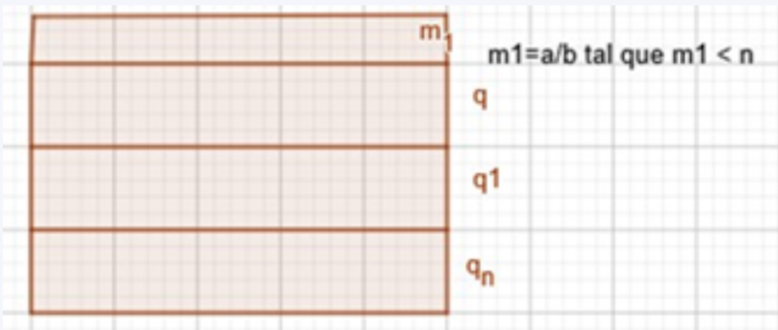
P25 **Resolvendo o Cordasmil**

Vivenciei uma situação similar a esta com professores dos primeiros anos também. Minha sugestão é que o pedaço que "sobrou" seja a medida unitária para medir o terreno, ou seja, a medida do terreno são tantas vezes essa medida.

Avançando nas buscas por solução, o professor P16 expressou a comparação de tamanhos:

P16 **Resolvendo o Cordasmil**

Eu representaria desta forma, mas não encontrei uma solução. Apenas concluí que não consigo mensurar com as "n" cordas.



Isso representa um primeiro passo para movimentar o pensamento teórico. A comparação, tal como em Caraça (2003), é o momento que surge o impasse ao subdividir uma unidade em *n* partes iguais, de tal modo que uma dessas partes caiba m vezes na grandeza a medir, ou seja, o problema aparece quando m não é divisível por n, requisitando a necessidade da criação de um novo campo numérico.

Os demais professores, mesmo que de modos diferentes, fizeram a medição. A primeira ação foi a de encontrar um modo de medir, uma vez que a unidade de medida básica não cabia um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida.

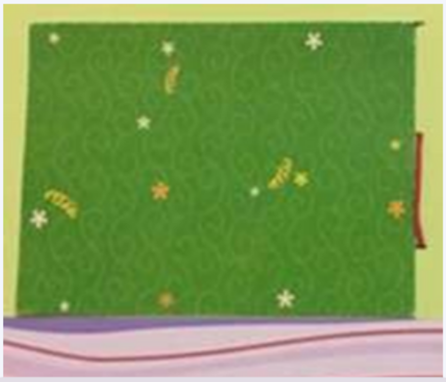
Estudando um problema virtual para compreender uma das versões históricas do surgimento das frações.

Resolvendo o Cordasmil

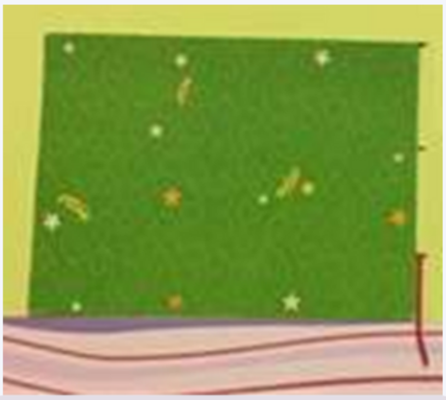
Sem recorrer a medições:

Procurei ilustrar a solução do problema do Cordasmil. Claro que não há precisão nas proporções, mas o que vale é o raciocínio. Também não usei números de propósito, fazendo de conta que os números racionais ainda não haviam sido criados.

1. Cordasmil pegou sua corda mais comprida e esticou na lateral do terreno. Marcou o ponto onde ela alcançou.



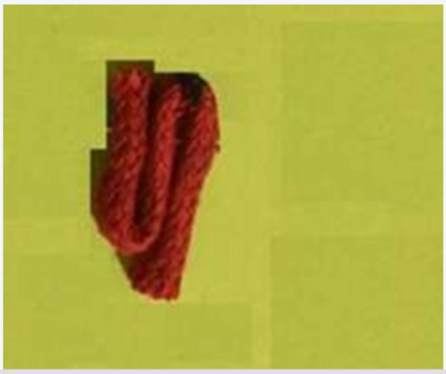
2. Mais uma vez, esticou a corda a partir do ponto marcado e outra vez sinalizou até onde a corda alcançou.



3. Na última "esticada de corda", Cordasmil percebeu que não ia usar a corda inteira.

4. Desta vez, marcou na corda onde ela alcançava o rio.

Estudando um problema virtual para compreender uma das versões históricas do surgimento das frações.



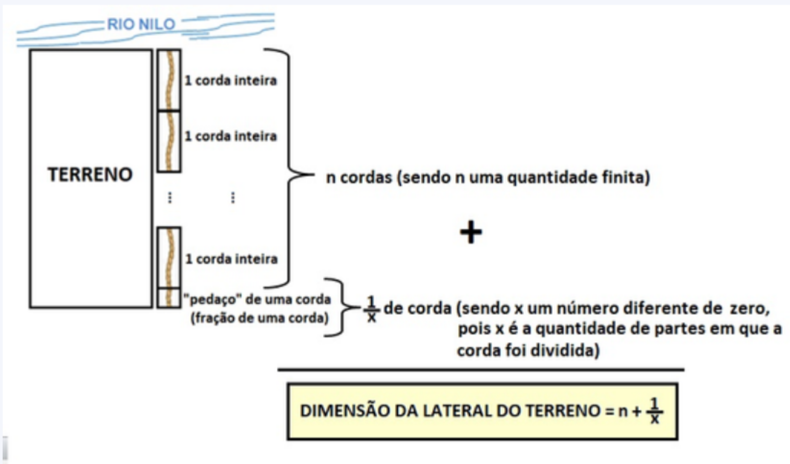
5. Cordasmil dobrou a sua corda para poder determinar em quantas partes da corda inteira correspondia o último pedaço, tendo como referência a marca na corda. Em três partes não deu certo!

6. Ao dobrar a corda em cinco pedaços, conseguiu chegar a um resultado satisfatório. O último trecho do terreno media três partes de cinco da corda inteira.

Resolvendo o Cordasmil

Uma das resoluções que recorreu à medição e ao uso de uma linguagem mais formal:

Cordasmil usará uma quantidade finita de cordas inteiras (n cordas) e um pedaço de uma corda, ou seja, uma fração de uma corda. Se considerarmos "n" como número finito de cordas inteiras e "x" um número natural diferente de zero como a quantidade de partes em que a corda foi dividida, então Cordasmil usou 1/x de uma corda. Logo, Cordasmil pode transmitir ao Faraó que o terreno tem n+1/x cordas de dimensão lateral.

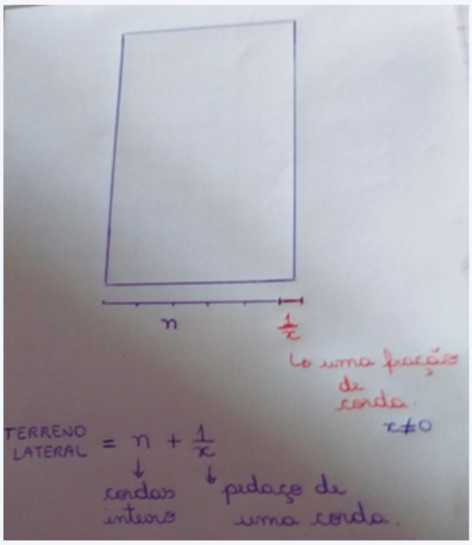


Estudando um problema virtual para compreender uma das versões históricas do surgimento das frações.

P24 também recorreu à linguagem mais formal, destacando as diversas possibilidades de trabalhar com o problema em sala de aula.

P24

Resolvendo o Cordasmil



Essa situação proposta abre várias respostas e possibilidades. É interessante a representação em sala de aula para que os alunos, com o manuseio dos materiais, possam compreender de modo significativo a resolução, a necessidade de subdividir a corda e determinar outra medida, a unidade de medida intermediária que é menor que a unidade de medida básica, que dá origem ao conceito de fração.

P23

Resolvendo o Cordasmil

Por fim, com uso de notação algébrica, P23 mostrou a relação que poderia "servir" para qualquer processo de medição (considerando as restrições necessárias):

$$n \,.\, c + \frac{p_c}{t_{pc}}$$

Além da resolução com um pedaço de corda, fazendo as subdivisões com nós (1/2 , 1/4 , 1/8 da corda, ou 1/3, 1/6...), poderíamos explorar uma abordagem algébrica da situação proposta e sistematizá-la, como, por exemplo:
n – corda inteira
c – tamanho da corda pc – partes da corda
Tpc – total de partes da corda

A professora expressa a medida da corda em função do total de unidades de medida intermediária, considerando o número total de cordas inteiras *n*, a unidade de medida intermediária *pc/tpc*, a constante c.

Estudando um problema virtual para compreender uma das versões históricas do surgimento das frações.

Ao darmos atenção ao conjunto das resoluções, observamos como expressam momentos que podem ser encadeados. Com a professora P23, temos o momento "final", em que se revela o ponto de partida e o ponto de chegada, considerando o concreto como ponto de chegada, por meio do procedimento de ascensão do abstrato ao concreto.

> Na especificidade da Matemática, o modelo gráfico é manifestação do modelo revelado durante o experimento objetal. O literal, por sua vez, é manifestação dos modelos gráficos e, consequentemente, também, do objetal. Desse modo, os modelos aparecem como meio de manifestação de outros e, em unidade, refletem a mesma relação universal. O concreto ponto de chegada resultado movimento entre o geral, particular e singular, sustentado na relação universal. No trânsito de um modelo a outro, na superação da especificidade de um modelo durante sua conversão em outro mais abstrato, a relação interna, a universal, é mantida. Eis o objeto do pensamento teórico. (SANTOS, 2017, p. 81-82).

No entanto, conforme o autor, tal processo de alcançar o conhecimento ao nível de concreto como ponto de chegada (pensado) não é imediato, mas mediado pela sucessão de abstrações.

Assim, com base na dinâmica das resoluções dos professores, compreendemos como há dependências internas do conceito de fração que não são dadas pelas caraterísticas visuais e imediatas, só pela observação. A ideia vai se revelando durante o processo de resolução na medida em que se analisa as condições de multiplicidade e divisibilidade entre as grandezas. Um movimento histórico na trajetória da dinâmica vivida com o objeto de um modo lógico, produzindo sua estrutura e simultaneamente a historicidade de seu desenvolvimento.

Temos, assim, uma possibilidade de compreensão da definição de número racional ao seguirmos o percurso de resolução do problema virtual.

Estudando um problema virtual para compreender uma das versões históricas do surgimento das frações

Tais relações de multiplicidade e divisibilidade comparecem no que, formalmente, se define como conjunto dos números racionais:

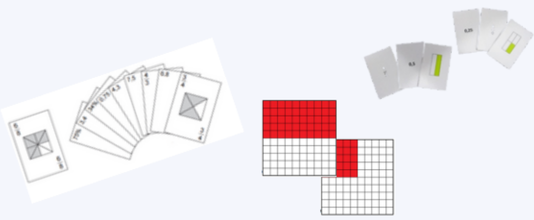
> Um número racional pode ser escrito na forma
>
> $$\frac{m}{n}$$
>
> Onde m e n são números inteiros, sendo n≠0, isto é, n deve ser diferente de zero. Comumente, usamos m/n para significar a divisão de m por n. Quando não existe possibilidade de divisão, simplesmente usamos uma letra como Q para entender que este número é um número racional.
>
> Observamos que os números racionais podem ser obtidos através da razão (em latim: ratio=razão=divisão=quociente) entre dois números inteiros, motivo pelo qual o conjunto de todos os números racionais é denotado pela letra Q de quociente.
>
> Assim, é comum lermos na literatura a notação:
>
> $$Q = \{m/n : m, n \in Z, n \neq 0\}$$
>
> Fonte: http://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/fundamental/racionais.html

Resolver problemas bem elaborados não se trata apenas de um caminho (meio) para ensinar um conteúdo escolar, mas de um caminhar (modo). Ao se ter em vista caminhos para dinamizar como o conhecimento matemático na sua forma escolar pode ser aprendido-ensinado, evidencia-se a possibilidade de desenvolver modos mais flexíveis de pensar.

A proposta de resolver esse problema foi indicado por vários professores no curso, como uma oportunidade formativa significativa para eles.

Assim, a metodologia de Resolução de Problemas, para além de exercícios escolares e como ponto de partida para ensinar Matemática, revela-se como um modo de organizar o ensino que tem a possibilidade de promover a flexibilização do pensamento, permitindo que o conteúdo seja colocado em perspectiva e, com isso, sejam possíveis compreensões relacionais.

Na sequência, apresentamos outra discussão pedagógica que foi legitimada entre pares: a equivalência entre as diferentes representações dos números racionais.



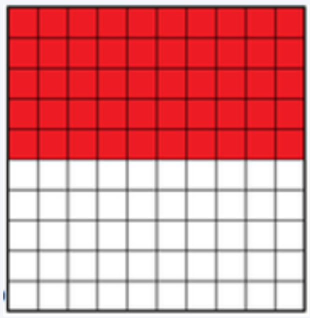
Equivalências entre representações

Reconhecimento e discussão das equivalências entre as representações: fracionária, decimal e percentual.

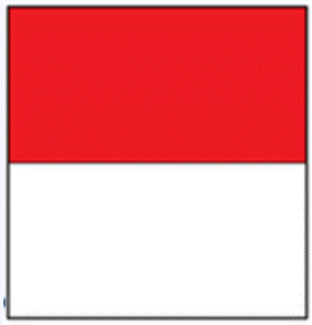
Equivalência entre as diferentes respresentações dos números racionais: malha quadriculada

Compartilho uma atividade que realizo com os alunos para calcularmos as porcentagens notáveis a partir de frações equivalentes:

A proposta inicial foi pedir que os alunos desenhassem um quadrado com 10 quadradinhos de lado – lembrando a placa do material dourado (que os alunos estão familiarizados).

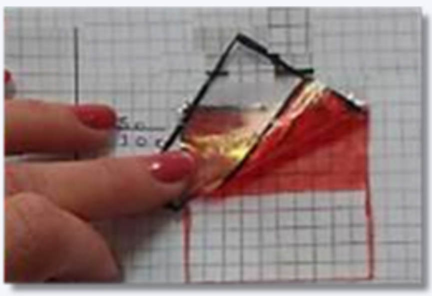


Contornado os quadradinhos da malha quadriculada, foi solicitado que pintassem 50 quadrinhos, ou seja, estaríamos representando um todo dividido em 100 partes e selecionadas 50 partes 50/100.

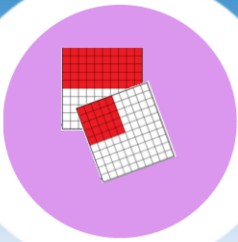


Em seguida, sobrepuseram um plástico e contornaram apenas o entorno e o meio (o equivalente à parte pintada anteriormente, mas sem a divisão em 50 quadradinhos). Fixaram o plástico com fita adesiva e visualizaram o mesmo "todo" sendo dividido de duas maneiras diferentes.

Nesse momento, os alunos foram questionados de que modo poderiam expressar em forma de fração o novo desenho no plástico. Alguns responderam prontamente: 1/2. Novamente, questionados como se referir a essa fração de outro modo, associaram-na à metade.



Ao ver as imagens sobrepostas, discutimos a equivalência das frações e chegamos à ideia de que, se quiséssemos calcular 50% de um todo qualquer, poderíamos fazer isso calculando a metade, ou ainda, dividindo por 2. Por fim, registramos os quatro modos de expressar matematicamente o realizado com o desenho: 50 = 1/2 = 50 % = 0,50

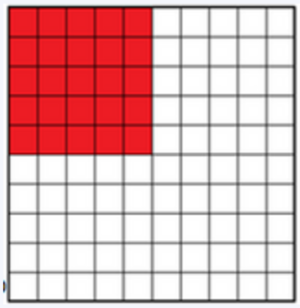


Equivalências entre representações

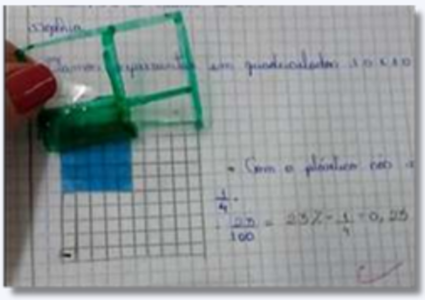
Reconhecimento e discussão das equivalências entre as representações: fracionária, decimal e percentual.

A representação decimal foi apenas descrita (esse conteúdo estava sendo trabalhado também, mas não era o enfoque no momento da atividade) para mostrar aos alunos.

Na sequência, os alunos foram questionados sobre a metade de 50 e, respondendo 25, foi solicitado que novamente desenhassem um quadrado com 10 quadradinhos de lado e pintassem 25. Como se tratava da metade do 50 que já haviam feito anteriormente em um todo de 100, falamos de "metade da metade", expressando a fração 25/100.



Como já haviam realizado a primeira parte, na sequência já anteciparam que deveriam contornar o plástico em quatro partes e pintar uma delas. Questionados sobre esse modo de expressar, responderam que poderiam fazê-lo com a fração 1/4.



Novamente registramos os quatro modos de representar matematicamente o realizado: 25/100 = 1/4 = 25% = 0,25

Em vez de plástico, é possível utilizar papel vegetal, que é mais fácil de obter para todos os alunos e também fica transparente.

Equivalências entre representações
Reconhecimento e discussão das equivalências entre as representações: fracionária, decimal e percentual.

Equivalência entre as diferentes respresentações dos números racionais: jogos

As atividades com jogos também são muito bem-vindas, pois o aluno aprende brincando (P11).

Verdade P11, muito me interessa o ensino pela ludicidade, embora fiquemos engessadas, algumas vezes, num currículo com prazos a cumprir e avaliações por realizar. Então, sempre me permito desviar um pouco a rota e buscar uma Matemática mais leve e atrativa, por meio dos jogos (P6).

Reforçando o interesse dos professores participantes do curso, iniciamos uma de nossas Unidades de Estudo com a seguinte questão:

No contexto da Matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

A) 9
B) 7
C) 5
D) 4
E) 3

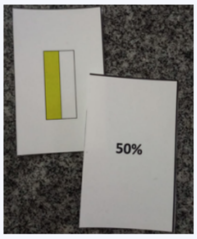
Questão 139 do caderno de prova azul do segundo dia do Enem 2015. Disponível em: https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2015/segundo-dia/no-contexto-da-matematica-recreativa-utilizando-diversos-materiais-didaticos-para-motivar-seus-alun/.

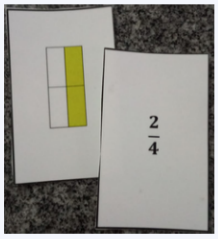
Equivalências entre representações

Reconhecimento e discussão das equivalências entre as representações: fracionária, decimal e percentual.

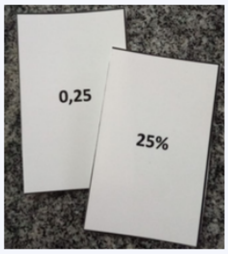
Equivalência entre as diferentes respresentações dos números racionais: jogos

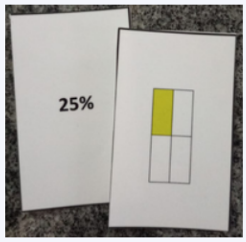
PM4



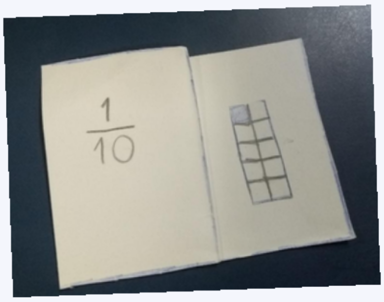


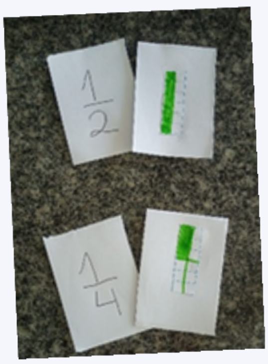
Me inspirei nesta questão do Enem e elaborei alguns jogos. A ideia é fazer cartas com diferentes representações. Pode ser o que estivermos trabalhando no momento: representações fracionárias, decimais, porcentagens e pictóricas.





Geralmente, utilizo duas representações em um primeiro momento e vou acrescentando outras conforme os alunos vão se habituando com as equivalências entre elas. Os próprios alunos confeccionam suas cartas (utilizo papel mais duro e folha de quadriculado para fazer os desenhos) e jogamos memória com elas.



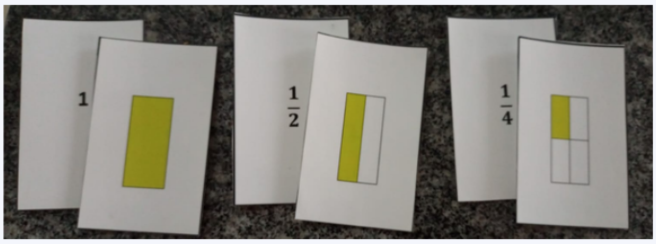


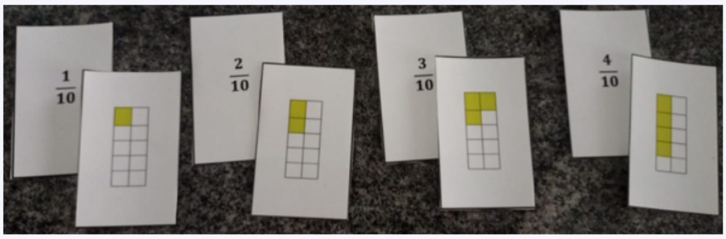
Jogo da memória com equivalência de representações

Em um segundo momento, acrescento uma representação e proponho um jogo para formar pares ou trios com as diferentes representações.

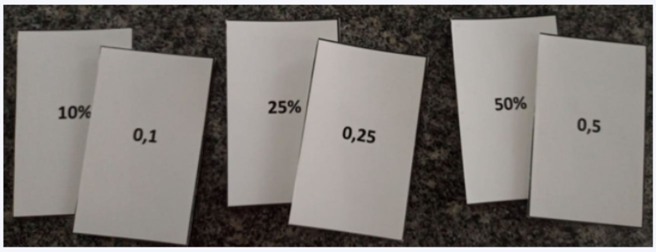
Equivalências entre representações
Reconhecimento e discussão das equivalências entre as representações: fracionária, decimal e percentual.

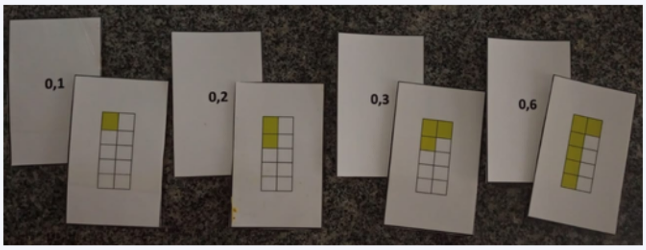
Como já confeccionaram as representações, fracionária e pictórica, acrescentamos a decimal, por exemplo (mas poderia ser a porcentagem). Cada aluno confecciona seu jogo com 8 ou 16 cartinhas (com 16 eles podem jogar em trios).





Em duplas, juntam dois jogos de cartinhas, embaralham e distribuem 6 para cada jogador. O objetivo é formar 3 pares de equivalências. O jogador que formar os 3 pares primeiro é o vencedor. As cartas que sobram ficam sobre a mesa, viradas para baixo em um monte, para que cada aluno, na sua vez, possa pegar uma.





Dependendo do nível dos alunos, pode-se colocar mais uma regra: a de que não pode fazer pares iguais, ou seja, eles precisam ser equivalentes com diferentes representações.

Equivalências entre representações

Reconhecimento e discussão das equivalências entre as representações: fracionária, decimal e percentual.

Em outro momento, acrescento mais uma representação, a decimal, por exemplo. A diferença agora é que cada jogador recebe 9 cartas e precisa fazer 3 trios para ganhar o jogo (descartam e pegam as cartas até que alguém consiga formar os trios). Também é possível envolver a porcentagem no jogo.

Cada jogador, na sua vez, tem a opção de pegar uma carta. Se a carta lhe convier, ele a mantém e descarta outra da mão. Além disso, se na vez de um jogador a carta que lhe interessar for a descartada pelo jogador anterior, pode pegá-la da mesa e descartar outra carta da sua mão.
Pode-se jogar em grupos com 5 ou 4 alunos, juntando os jogos confeccionados.

Importante destacar a diversidade de possibilidades pedagógicas na abordagem da equivalência de representações dos números racionais com a utilização de jogos, bem como a atenção às características dos estudantes e da turma. É com base nas interações com eles que PM4 vai adaptando, modificando e construindo regras com o mesmo material.

Equivalências entre representações

Reconhecimento e discussão das equivalências entre as representações: fracionária, decimal e percentual.

Equivalência entre as diferentes representações dos números racionais

Em pesquisa realizada com alunos, Ponte e Quaresma (2011) atestaram as contribuições da abordagem integrada das diferentes representações dos números racionais:

> O trabalho com representações múltiplas ajudou-os [alunos pesquisados] a desenvolverem a sua capacidade de converter informação de uma representação para outra. A valorização da representação pictórica revelou-se importante para que eles desenvolvessem as suas estratégias informais, com compreensão, na resolução de problemas. O facto de as fracções terem sido trabalhadas em estreita ligação com as representações decimal e pictórica ajudou a promover a sua compreensão por parte dos alunos. O trabalho num plano secundário com as percentagens, em ligação com as representações em fracção e decimal, revelou-se útil para o desenvolvimento da compreensão desta representação e da capacidade de converter. (PONTE; QUARESMA, 2011, p. 76).

Segundo Brown (2015), desenvolver propostas pedagógicas com representações numéricas diferentes e complexas, e relacionar símbolos e números racionais, constituem uma base para a ampliação do modo como se compreende e se opera com esses números. Assim, entendemos que ao se ter a oportunidade de experienciar diferentes contextos com o conteúdo, compartilhamos compreensões mais abrangentes. Consequentemente, há a possibilidade de pensar não apenas na compreensão de número racional como uma relação, mas de entender seu caráter relacional.

Na sequência, voltamos aos bastidores para as reflexões finais acerca da experiência formativa.

Essa gama de propostas e ações endereçadas ao ensino dos números racionais nos revela que a busca pelo que pode se manifestar em oportunidades significativas de ensino de Matemática para os professores se concentra em meios de tornar o ensino de Matemática mais “perceptível” para os alunos. Disto, entendemos que uma perspectiva da forma/ação significativa para os professores foi o endereçamento à prática de propostas e discussões que articulem possibilidades perceptíveis ao ensino dos números racionais.

Entre professores: nos bastidores

Características do vivenciado

Findado o curso com os professores, passamos à constituição e análise de dados na tese, como o anunciado no início desse Caderno Pedagógico. Nesse processo, retomamos nossa proposta inicial, considerando o estranhamento como uma das estratégias formativas, tendo em vista o aprender-ensinar Matemática.

APRENDER-ENSINAR MATEMÁTICA

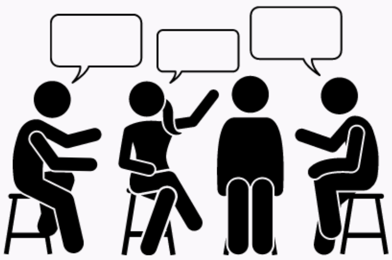
ESTRANHAMENTO

Nesse movimento, dialogamos, interpretamos, atualizamos sentidos e compreendemos novos aspectos da ***forma/ação*** no contexto da formação de professores, dos quais destacamos:

CUIDAR E OUVIR

As interações vivenciadas durante o curso se revelaram com base no cuidado. O cuidado é entendido como *sorge* (HEIDEGGER, 2012), um modo de ser que indica a responsabilidade ontológica inerente às pessoas, tanto em relação a si mesmas, quanto para com tudo o que há. Uma responsabilidade plena enquanto possibilidade de ser (existir), a que o filósofo denomina de cuidado. De modo que a experiência formativa foi se constituindo mediante o ouvir o outro (pares, alunos e estudos), cuidando para que suas possibilidades formativas e as dos outros se realizassem.

> A conexão do discurso com a compreensão e sua compreensibilidade torna-se clara a partir de uma possibilidade existencial inerente ao próprio discurso, qual seja a escuta. Não é por acaso que dizemos que não "compreendemos" quando não escutamos "bem". A escuta é constitutiva do discurso. E, assim como a fala está fundada no discurso, a percepção acústica também se funda na escuta. Escutar é o estar aberto existencial da presença enquanto ser-com os outros. (HEIDEGGER, 2005, p. 222).



Quando usamos propositadamente as palavras nos inserindo na forma/ação, não estamos apenas afirmando que a condição de mediadoras não nos coloca em uma posição superior aos professores, mas também se refere ao diálogo em forma/ação. Trata-se de uma relação horizontal, de respeito às diferenças, ou seja, uma relação entre professores participantes e professores mediadores constituída reciprocamente.

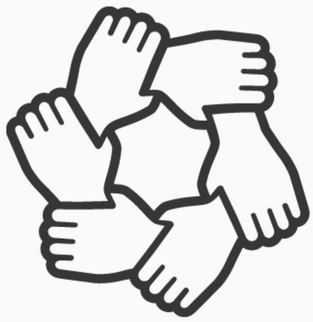
Cuidar e ouvir foram sendo compreendidos como elementos que geravam reciprocidade, tornando a experiência formativa a todos os envolvidos.

Entre professores: nos bastidores

RECIPROCIDADE

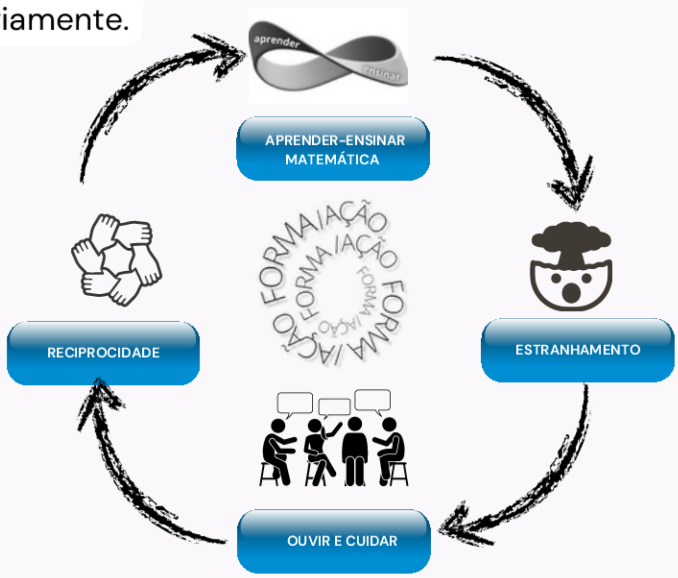
A reciprocidade no ouvir e cuidar nos possibilitou outra noção de diálogo na experiência formativa. Essa noção aproxima-se às reflexões de Martin Buber sobre a relação EU-TU, que nos acenam a considerar o caráter das relações e experiências humanas dialogicamente. Tal consideração tem sido a base de pesquisas recentes no âmbito da educação, com desdobramentos na formação de professores (BECKER, 2019; PENA; NUNES; KRAMER, 2018; PARREIRA, 2016; SILVA, 2020), impulsionadas especialmente pela discussão das relações que se estabelecem na ação educativa, como possibilidade para uma forma/ação que, em condição humana que é, se desenvolva na autenticidade das relações dialógicas entre as pessoas.

> O apelo de Martin Buber é pelo redescobrir humano de sua realidade existencial no momento histórico em que vive, com a tomada de consciência e reflexão para viver legitimamente em condição social, com os outros. Condição essa que o filósofo considera como caráter humano. Não se trata simplesmente como processo psicológico ou meio de comunicação, mas como prática que se vivencia no encontro genuíno entre humanos. O dialógico é para Buber a forma explicativa do fenômeno do inter-humano. Inter-humano implica a presença ao evento de encontro mútuo. Presença significa presentificar e ser presentificado. Reciprocidade é a marca definitiva da atualização do fenômeno da relação. (ZUBEN, 2006, p. 27).



Ao compreendermos nossa relação com os professores no curso como um encontro genuíno entre pessoas com as mesmas intenções voltadas à aprender-ensinar Matemática, foi possível atualizar sentidos ao formar. Sem desconsiderar caminhos prontos, mas por eles formar-se legitimando a prática pedagógica e legitimando-se como professor que aprende-ensina Matemática, deixamos caminhos abertos para sentidos possíveis, sem fornecê-los previamente.

Esses sentidos foram sendo constituídos no fluxo de vivências entre professores, podendo ser caracterizado como um modo fenomenológico de pensar na elaboração e realização de experiências formativas.



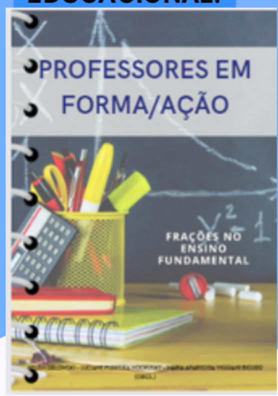
Entre professores: nos bastidores

Vislumbramos o modo de pensar fenomenológico na experiência formativa ao findarmos as análises. Compreendemos que a vivenciamos como: Movimento que tende a ser, que vai se constituindo no entrelaçamento do processo criador e criativo de acolhimento das atualizações de sentidos produzidos, refletidos, expressados e compartilhados entre os professores (poíesis), e a busca de modos pelos quais aprender-ensinar Matemática (mathema) desdobra-se em possibilidades formativas às pessoas.

MATHEMA

Termo de etimologia grega que significa a condição daquilo que se conhece, compreende, explica, aprende e, consequentemente, que se tem a possibilidade de ensinar. Compreendida no contexto da pesquisa como modos pelos quais a Matemática, em condição de aprender-ensinar, é refletida entre professores, tendo em vista suas possibilidades formativas.

Dialogar endereçado à prática pedagógica: PRODUTO EDUCACIONAL.



POÍESIS

Processo criador e criativo de acolhimento das atualizações de sentidos produzidos, refletidos, expressados e compartilhados entre os professores, advindos de momentos de estranhamento no cotidiano docente, fomentando atitudes críticas, valorizando a contingência de processos formativos autênticos.

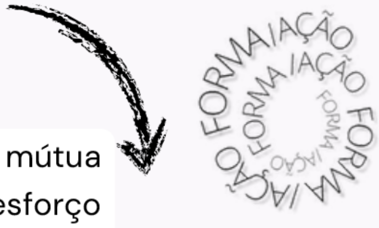
Entendemos também que a condição docente, ao ser perspectivada na atitude fenomenológica de forma/ação, solicita compreensões de ser, estar no mundo, relacionar-se com os outros e consigo mesmo, constituindo-se em uma complexidade que expressa o fenômeno humano. Por assim ser, não há possibilidade da dissociação entre o teórico e o prático, entre o planejado e o aplicável. Tal complexidade só se permite presentificar em uma unidade indissociável entre teórico e prático, em vivência pedagógica, entre pessoas imersas nessas condições.

Entre professores: nos bastidores

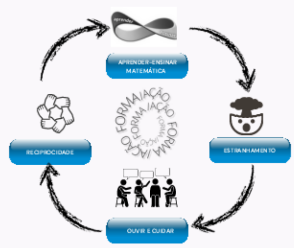
Assim, neste Caderno Pedagógico, elaboramos um texto em diálogo para que o que foi compartilhado no curso e analisado na tese fosse retratado da maneira como aconteceu: aspectos estruturantes do nosso solo de sustentação teórico, em seguida, com os professores, em sala de aula, compartilhando suas e nossas experiências, em que a Matemática como *mathema* foi *poieticamente* movimentada ao aprender-ensinar. Finalizamos retomando alguns aspectos que expressam atualizações de sentido que sustentaram o vivenciado e que nutrem aberturas à sala de aula, como uma espiral.

A formação de professores na Educação Matemática, na perspectiva de um pensar fenomenológico, constitui-se em um renovar e renovar-se contínuo – no movimento de compreender e interpretar – do projeto humano de Educação. Nele, está o seu "vivenciar pedagógico" de aprender-ensinar Matemática com o outro, inseparável da interpretação e, sobretudo, na articulação da linguagem e do problematizar dialógico crítico entre pessoas.

Assim, a formação de professores na Educação Matemática na perspectiva de um pensar fenomenológico significa abrir possibilidades para o desenvolvimento e a investigação de processos permanentes de elucidação de vivências pedagógicas ao aprender-ensinar Matemática com o outro.



Forma/ação revela-se no compromisso de unir mútua e reflexivamente forma e ação em torno do esforço para aprender-ensinar Matemática, dando-se conta da própria ação, de sua análise em expressões intencionais de quem as atualiza, nos modos de ser realizados e nos desdobramentos e reflexões do realizado com os pares.



Entre professores: nos bastidores

Um pouco sobre nossas pesquisas

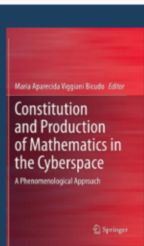
Conheça alguns livros e artigos acadêmicos publicados no âmbito do grupo de pesquisa Fenomenologia na Educação Matemática.

LIVROS

Filosofia da Educação Matemática: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático pedagógicas

Ciberespaço: Possibilidades que se abrem ao mundo da educação

Pesquisa Qualitativa: Segundo a visão fenomenológica



Constitution and Production of Mathematics in the Cyberspace: A Phenomenological Approach

ARTIGOS ACADÊMICOS

Aprender-ensinar matemática

Professoras em tempos de pandemia: do que estamos nos dando conta?

Para mais informações sobre o Grupo Fenomenologia na Educação Matemática, acesse: http://fem.sepq.org.br/

Referências

BECKER, C. **Um olhar para as relações na introdução da educação inclusiva no Colégio Militar de Porto Alegre: reflexões a partir de Buber.** 2019. 161f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2019.

BICUDO, M. A. V. (Org.). **Filosofia da Educação Matemática:** Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: Editora UNESP, 2010.

BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa Qualitativa:** segundo a visão fenomenológica. São Paulo: Cortez Editora, 2011.

BICUDO, M. A. V. A formação de professores: um olhar fenomenológico. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Formação de Professores? Da incerteza à compreensão.** 1.ed. Bauru: EDUSC, 2003. p. 19-46.

BICUDO, M. A. V. Concepção de forma/ação de professores e possibilidades investigativas. **REMATEC**: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, ano 15, n. 36, p. 95-107, 2020.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da educação matemática: sua importância na formação de professores de matemática. In: SILVA, R. S. R. (Org.). **Processos formativos em educação matemática.** Porto Alegre: Editora Fi, 2018. p. 29-46.

BICUDO, M. A. V.; MOCROSKY, L. F.; ORLOWSKI, N. Aprender-Ensinar Matemática numa Perspectiva Formativa. **REMATEC**, [S. l.], v. 17, n. 41, p. 92–105, 2022. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141. 2022.n41.p92-105.id438. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/438. Acesso em: 3 maio. 2023

BOFF, L. **Saber cuidar:** ética do humano – compaixão pela terra. 14.ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

BROWN, B. The relational nature of rational numbers. **Pythagoras**, v. 36, n. 1, p. 1-8, 2015. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1209478.pdf. Acesso em: 10 jan. 2023.

HEIDEGGER, M. **Ser e Tempo**. 14.ed. Traduzido por Márcia Sá Cavalcante Schuback. Petrópolis: Vozes, 2005.

HEIDEGGER, M. **Ser e tempo**. Tradução de Fausto Castilho. Campinas: Editora da Unicamp; Petrópolis: Vozes (Original publicado em 1927), 2012.

Referências

MOCROSKY, L. F. et al. Frações na Formação Continuada de Professoras dos Anos Iniciais:fragmentos de uma complexidade. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 65, p. 1444-463, dez. 2019.

MOURA, M. O. de. Números racionais. [S.l.], 2015. Documento PowerPoint. Disponível em: https://disciplinas.stoa.usp.br/mod/resource/view.php?id=155570. Acesso em: 10maio. 2021.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, G. As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 79- 102, 2008.

ORLOWSKI, N.; PANOSSIAN, M. L.; MOCROSKY, L. F.; ASSIS,J. S. Um problema desencadeador do conceito de fração: desdobramentos para o processo de formar-se professor. Revista **Paradigma**, v. 63, edição temática, p. 184-206, jan. 2022.

PARREIRA, G. G. M**artin Buber e o sentido da educação**. Goiânia: Editora IFG, 2016.

PENA, A. C.; NUNES, M. F. R.; S. KRAMER. FORMAÇÃO HUMANA, VISÃO DE MUNDO, DIÁLOGO E EDUCAÇÃO: A ATUALIDADE DE PAULO FREIREE MARTIN BUBER. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n.34, 2018.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. **Quadrante**, Lisboa, v. 20, n. 1, p. 55-81, 2011. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/6562. Acesso em: 23 jan. 2023.

SANTOS, C. O. **O movimento conceitual de fração a partir dos fundamentos da logica dialética para o modo de organização do ensino**. 2017. 89.f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

SANTOS, L. C. R. Ensino de Frações na Reta Numérica: Proposta de Atividades. – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro: Volta Redonda, 2019.

Referências

SILVA, L. dos S. **O pensamento pedagógico de Martin Buber : contribuições à formação humana dos pibidianos.** 2020. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

VIZCARRA, R. E.; SALLÁN,J. M. G. Modelos de medida para la enseñanza del número racionalen Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 1, p. 17-35, mar. 2005. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2219009. Acesso em: 10 maio. 2021.