

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ILDERNON VINICIUS DA PAIXÃO TEIXEIRA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA AO PROJETO DE UM MECANISMO
FLEXÍVEL DE INVERSÃO DE DESLOCAMENTO**

CURITIBA

2022

ILDERNON VINICIUS DA PAIXÃO TEIXEIRA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA AO PROJETO DE UM MECANISMO
FLEXÍVEL DE INVERSÃO DE DESLOCAMENTO**

**Topology Optimization Applied to the Design of a Compliant Displacement
Reversal Mechanism**

Trabalho de conclusão de curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do título de
Bacharel em Engenharia Mecânica da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientador(a): Prof^a. Dr^a. Ana Paula Carvalho da Silva
Ferreira

CURITIBA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Esta licença permite download e compartilhamento do trabalho desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-lo ou utilizá-lo para fins comerciais. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

ILDERNON VINICIUS DA PAIXÃO TEIXEIRA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA AO PROJETO DE UM MECANISMO
FLEXÍVEL DE INVERSÃO DE DESLOCAMENTO**

Trabalho de conclusão de curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do título de
Bacharel em Engenharia Mecânica da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 24/junho/2022

Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Cláudio Tavares da Silva
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Marcio Henrique de Avelar Gomes
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

CURITIBA

2022

RESUMO

Mecanismos flexíveis são uma categoria de dispositivos mecânicos que possuem a sua mobilidade devido à deformação elástica do seu próprio corpo. Essas características tornam complexo o projeto e desenvolvimento de um mecanismo flexível, visto que as análises cinemáticas e cinéticas não podem ser resolvidas separadamente. Afim de contornar esse problema, a aplicação de métodos de otimização topológica ao projeto de mecanismos flexíveis tem apresentado bons resultados, por ser uma abordagem mais genérica e sistemática. Impulsionado por algumas vantagens relacionadas a aspectos econômicos e de desempenho desses componentes, quando comparado a um mecanismo tradicional, juntamente com o avanço tecnológico na área computacional, o surgimento de novos materiais e a utilização de *softwares de CAE (Computer Aided Engineering)*, a implementação da otimização topológica no projeto de mecanismos flexíveis torna mais atrativa a utilização desses componentes em soluções industriais. Mesmo com o auxílio de *softwares de CAE* ainda existem grandes desafios, instabilidades causadas pela dependência da malha, o aumento do gasto computacional a cada restrição e filtros impostos ao domínio, são alguns dos exemplos. Para demonstrar essa abordagem é apresentado neste trabalho a aplicação da otimização topológica ao projeto de um mecanismo flexível de baixa complexibilidade, sendo esse um inversor de descolamento, com o auxílio da ferramenta de *CAE Altair HyperWorks*. São apresentadas todas as etapas, análises e decisões tomadas para obtenção da topologia final do mecanismo. A utilização de um filtro de vizinhança é aplicada no desenvolvimento do mecanismo com o intuito de demonstrar as suas vantagens e desvantagens, incluindo os impactos nos gastos computacionais e aumentos do número de iterações.

Palavras-chave: mecanismos flexíveis; otimização topológica; *Computer Aided Engineering*; filtros de vizinhança.

ABSTRACT

Compliant mechanisms are a category of mechanical devices that have their mobility due to the elastic deformation of their own body. These characteristics make the design and development of a compliant mechanism complex, since kinematic and kinetic analyzes cannot be solved separately. In order to get around this problem, the application of topology optimization methods to the design of compliant mechanisms has shown good results, as it is a more generic and systematic approach. Driven by some advantages related to economic and performance aspects of these components, when compared to a traditional mechanism, together with technological advances in the computational area, the emergence of new materials and the use of CAE (Computer Aided Engineering) software, the implementation of topology optimization in the design of compliant mechanisms makes the use of these components in industrial solutions more attractive. Even with the help of CAE software, there are still great challenges, instabilities caused by mesh dependence, the increase in computational expenditure with each restriction and filters imposed on the domain, are some of the examples. To demonstrate this approach, this work presents the application of topology optimization to the design of a compliant mechanism of low complexity, which is a detachment inverter, with the help of the Altair HyperWorks CAE tool. All steps, analyzes and decisions taken to obtain the final topology of the mechanism are evidenced. The use of a neighborhood filter is applied in the development of the mechanism in order to demonstrate its advantages and disadvantages, including impacts on computational costs and increases in the number of iterations.

Keywords: compliant mechanisms; topology optimization; Computer Aided Engineering; neighborhood filter.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Exemplos de mecanismos rígidos: (a) Mecanismo de Hoeken e (b) biela-manivela.....	9
Figura 2 - Exemplos de mecanismos flexíveis: (a) Mecanismo de quatro barras, (b) biela-manivela e (c) pinça	10
Figura 3 - Representação de arco e catapulta utilizando a flexibilidade para transferência de energia.....	11
Figura 4 - Otimização topológica aplicada ao projeto de um mecanismo de agarrar.....	12
Figura 5 - Tipos de mecanismos flexíveis: (a) flexibilidade distribuída e (b) flexibilidade concentrada.	16
Figura 6 - Domínio fixo inicial de um mecanismo genérico	17
Figura 7 - Graus de liberdade em um espaço tridimensional: a) um ponto; b) corpo rígido	19
Figura 8 - Exemplo de mecanismo com dois graus de liberdade	19
Figura 9 - Exemplo de mecanismo com um grau de liberdade	20
Figura 10 - Otimização Dimensional (esquerda), Otimização de Forma (centro) e Otimização Topológica (direita).....	21
Figura 11 - Otimização Topológica: (a) arranjos de “tabuleiro de xadrez”, (b) distribuição uniforme de material.....	24
Figura 12 - Destaque de regiões com instabilidade de tabuleiro em um mecanismo de agarrar	25
Figura 13 - Malha de elementos finitos aplicada em um domínio.....	27
Figura 14 - Exemplos de diferentes tipos de elementos finitos	28
Figura 15 - Algoritmo para Otimização Topológica.....	31
Figura 16 - Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica	32
Figura 17 - Moonie: (a) domínio inicial e (b) topologia obtida após otimização topológica	33
Figura 18 - Alicate: (a) domínio inicial e (b) topologia obtida após otimização topológica	34
Figura 19 - Inversor: (a) domínio inicial e (b) topologia obtida após otimização topológica	34
Figura 20 - Mecanismo rígido inversor de deslocamento.....	35
Figura 21 - Domínio superior do mecanismo inversor com a condição de simetria	36
Figura 22 - Domínio superior do mecanismo inversor com a condição de simetria e distribuição das forças e restrições para gerar uma superfície de contato	37
Figura 23 - Domínio discretizado em uma malha de elementos finitos, com todas as forças e restrições aplicadas.....	37
Figura 24 - Fluxograma da reanálise aplicada ao projeto do mecanismo inversor	39
Figura 25 - Tensões internas do domínio inicial	41
Figura 26 - Deslocamentos do domínio inicial	41
Figura 27 - Topologia obtida para o inversor de deslocamento sem a utilização do parâmetro <i>minimum member size</i>	42

Figura 28 - Topologia obtida para o inversor de deslocamento com a utilização do parâmetro minimum member size	43
Figura 29 - Topologia do inversor de deslocamento, com a utilização do parâmetro minimum member size e fator de corte de densidades de 0,25.....	43
Figura 30 - Topologia do inversor de deslocamento para reanálise das tensões e deslocamentos	44
Figura 31 - Tensões internas do novo domínio após aplicar o filtro de corte de densidades de 0,25	45
Figura 32 - Deslocamento do novo domínio após aplicar o filtro de corte de densidades de 0,25	45
Figura 33 - Tensões internas após a redução da espessura do novo domínio para 11 mm	46
Figura 34 - Deslocamentos após a redução da espessura do novo domínio para 11 mm.....	46
Figura 35 – Comparativo do estado inicial e final de deslocamento após a redução da espessura do novo domínio para 11 mm.....	47
Figura 36 - Comparativo do estado inicial e final de deslocamento do mecanismo inversor para o domínio completo	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Contexto do tema	9
1.2	Caracterização do problema.....	12
1.3	Objetivos	13
1.3.1	Objetivos específicos.....	13
1.4	Justificativa.....	13
1.5	Conteúdo do trabalho	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	Mecanismo flexível.....	15
2.2	Mecanismo com flexibilidade distribuída.....	16
2.3	Graus de liberdade de um mecanismo	18
2.4	Otimização	20
2.5	Método da otimização topológica (MOT).....	22
2.6	Problemas relacionados a otimização topológica.....	24
2.7	Filtros	25
2.8	Método dos elementos finitos (MEF)	27
2.9	Parametrização Material	29
2.10	Procedimento computacional	30
3	METODOLOGIA	33
3.1	Inversor de deslocamento	35
3.2	Domínio inicial.....	36
3.3	Formulação do problema de otimização	38
3.4	Interpretação da topologia e reanálise estrutural.....	39
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	41
5	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	49
	REFERÊNCIAS.....	50

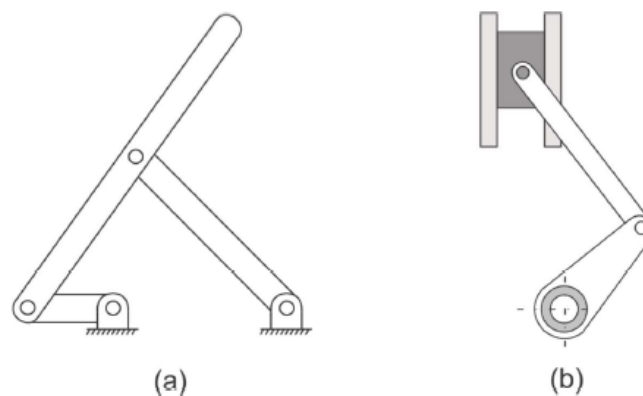
1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma introdução sobre os mecanismos flexíveis e rígidos, método de otimização topológica, motivação e objetivo deste presente trabalho.

1.1 Contexto do tema

Pode-se definir um mecanismo como um dispositivo mecânico cuja função é transferir ou transformar movimento, força ou energia (BUSCH-VISHNIAC, 1998). Os mecanismos mais utilizados tradicionalmente são formados por diversas peças rígidas, as deformações elásticas são depressíveis de modo a garantir a integridade e eficiência desses dispositivos. Esses mecanismos, denominados rígidos, são constituídos de elos rígidos conectados através de juntas, formando pares cinemáticos que serão responsáveis por executar o movimento projetado. Como o movimento nesses casos não é função da geometria dos elos, ou das forças aplicadas, as análises cinemáticas e cinéticas podem ser realizadas separadamente. A independência dessas análises torna menos complexa a solução dos problemas relacionados ao desenvolvimento desse tipo de produto. No entanto, em algumas situações a deformação elástica pode ser desejável e proporcionar um melhor desempenho e funções adicionais, além de aplicações que antes não eram possíveis pelos métodos tradicionais. Alguns exemplos de mecanismos rígidos são mostrados na Figura 1, sendo eles o mecanismo de Hoeken e a biela-manivela.

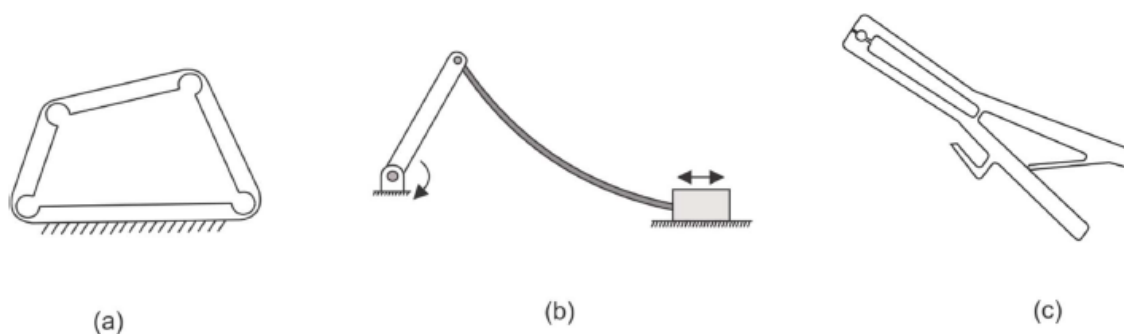
Figura 1 - Exemplos de mecanismos rígidos: (a) Mecanismo de Hoeken e (b) biela-manivela



Fonte: Howell (2001, p. 277)

Mecanismos flexíveis são dispositivos mecânicos de corpos monolíticos cujo movimento relativo é realizado pela deformação elástica do seu próprio corpo. Devido algumas vantagens, geralmente relacionadas ao aspecto de desempenho e custos, os mecanismos flexíveis estão ganhando cada vez mais espaço nas aplicações industriais. Em linhas gerais os mecanismos flexíveis podem desempenhar as mesmas funções de um mecanismo similar rígido, com a vantagem normalmente de possuírem um número reduzido de peças, maior precisão e um menor custo. A crescente aplicação e estudo de mecanismos flexíveis tem grande influência do desenvolvimento de novos materiais, tecnologias computacionais, entre outros. Esses avanços tecnológicos permitem resolver ou contornar determinados problemas encontrados no projeto desses mecanismos, relacionados a complexibilidade na análise das relações entre a força e deslocamento de seus corpos (HOWELL, 2001). São apresentados na Figura 2 exemplos de mecanismos flexíveis (mecanismo de quatro barras e pinça) e mecanismos híbridos (biela-manivela). Os mecanismos híbridos são dispositivos que possuem partes formadas por mecanismo rígido e por flexível, mesclando assim as principais características desses componentes.

Figura 2 - Exemplos de mecanismos flexíveis: (a) Mecanismo de quatro barras, (b) biela-manivela e (c) pinça

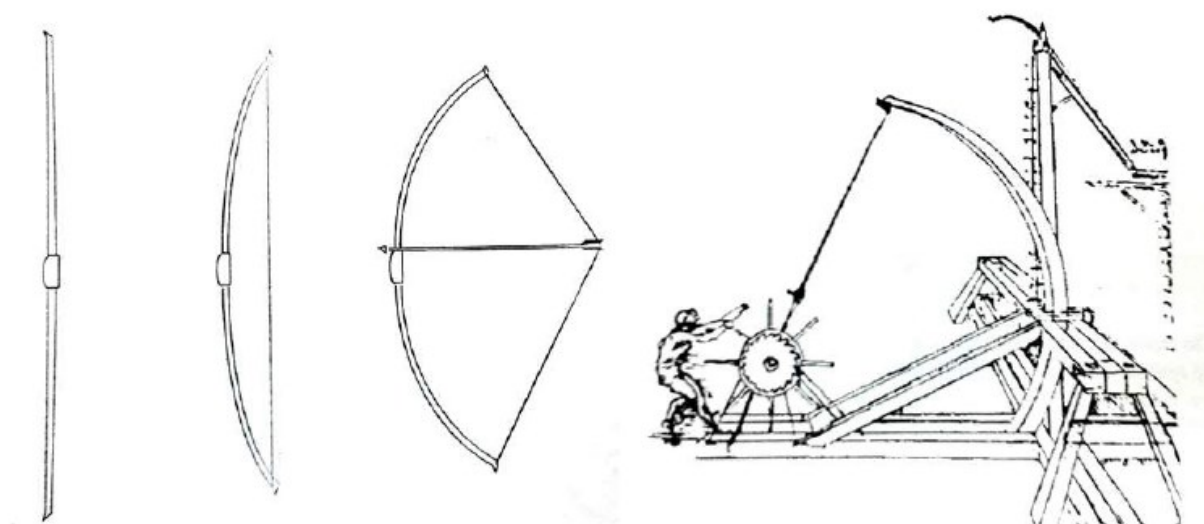


Fonte: Howell (2001, p. 201, 221, 245)

A aplicação de mecanismos flexíveis para o armazenamento de energia e criação de movimento é uma técnica milenar. Pode-se citar como exemplo o arco utilizado para atirar flechas e catapultas que lançavam projéteis em tempos remotos. No caso do arco a energia é armazenada na sua deformação e é transmitida para a flecha em forma de energia cinética. O mesmo princípio é utilizado para as catapultas, sendo a deformação do braço de madeira responsável pelo armazenamento da energia, que após ser liberada é utilizada para impulsionar os projéteis. A Figura 3

ilustra os dois exemplos citados anteriormente. É possível observar nela a deformação realizada pelos corpos dos mecanismos flexíveis para o armazenamento da energia potencial elástica (HOWELL, 2001).

Figura 3 - Representação de arco e catapulta utilizando a flexibilidade para transferência de energia

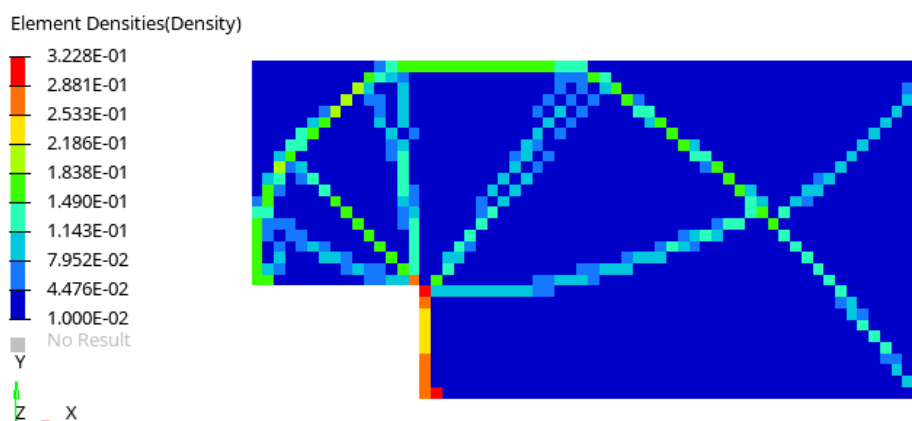


Fonte: Howell (2001, p. 8)

Devido a complexibilidade em executar o projeto genérico de mecanismos flexíveis, por algum tempo esse procedimento foi realizado por métodos de tentativa e erro. O desenvolvimento nas áreas da computação e materiais permitiu que trabalhos mais recentes abordassem de forma mais sistemática o procedimento de projeto de mecanismos flexíveis, dentre eles pode-se citar Ananthasuresh et al. (1994), Frecker et al. (1996), Sigmund (1997) e Nishiwaki et al. (1998). Dentre esses trabalhos destacam-se os métodos baseados na síntese do contínuo, abordagem com destaque no cenário atual.

A teoria da síntese do contínuo é baseada no método de Otimização Topológica (BENDSOE; KIKUCHI, 1988), no qual o projeto de mecanismos flexíveis passa a ser um problema de otimização estrutural. Dessa forma, por meio do Método de Otimização Topológica (MOT), busca-se a melhor distribuição de material dentro de um domínio inicial fixo, de forma a maximizar ou minimizar a função objetivo especificada para o mecanismo.

A Figura 4 se refere a aplicação do MOT no projeto de um mecanismo flexível de agarrar. Nota-se nessa imagem a concentração de estruturas mais densas em determinadas regiões do domínio, formando assim a topologia a ser interpretada.

Figura 4 - Otimização topológica aplicada ao projeto de um mecanismo de agarrar

Fonte: Autor (2022)

Devido a malha utilizada na solução apresentada na Figura 4, com poucos elementos, é perceptível que os contornos da geometria não possuem uma resolução muito boa, esse problema poderia ser contornado aumentando o número de elementos da malha. Porém, esse refino da malha pode trazer alguns inconvenientes, pois existe uma dependência da solução em relação a malha utilizada, o que poderia resultar em uma geometria mais complexa.

1.2 Caracterização do problema

A menor complexibilidade na análise e construção dos mecanismos rígidos faz com que sejam o tipo de aplicação mais comum encontrada atualmente, em comparação aos mecanismos flexíveis. Isso se deve ao fato de que a deformação dos segmentos que compõem esse tipo de mecanismos é considerada desprezível em relação ao movimento desempenhado por ele. Dessa forma as análises cinemática e cinética podem ser realizadas separadamente, uma vez que o movimento do mecanismo não é uma função da geometria dos seus componentes ou das forças aplicadas. Entretanto a presença de juntas, que são responsáveis pela sua mobilidade, ocasiona algumas inconveniências como o atrito, ruído, folga, vibração, entre outros. Esses problemas ocorrem, pois há um movimento relativo entre as partes que compõem o mecanismo rígido, gerando também uma maior complexibilidade em suas montagens e redução de precisão em suas aplicações (HOWELL, 2001).

Uma forma de tornar mais competitiva a utilização dos mecanismos flexíveis é através da sua otimização topológica. Pode-se entender a otimização como sendo

um procedimento matemático que visa encontrar um valor extremo de um funcional que satisfaça um conjunto de restrições (ARORA, 2007). A aplicação do MOT no projeto de mecanismos flexíveis tem como objetivo tornar mais viável e sistemático o desenvolvimento desse tipo de produto.

1.3 Objetivos

O objeto geral desse trabalho é modelar um mecanismo flexível utilizando o método de otimização topológica. Propõe-se alcançar essa meta através da utilização de *softwares* de CAE (*Computer Aided Engineering*) para análises, otimização e simulação de resultados. No presente trabalho é utilizado o *software Altair HyperWorks Student* (versão de estudante) auxiliado de rotinas de otimização existentes no próprio *software*.

A fim de tornar a execução do objetivo proposto viável, a aplicação do método de otimização topológica é realizada através da utilização de um exemplo de mecanismo de baixa complexibilidade, similar a outros já existentes na literatura. Para isso é necessária uma revisão das principais referências no tema, além da leitura complementar de publicações recentes relacionadas ao foco desta pesquisa.

1.3.1 Objetivos específicos

Para que a pesquisa atinja o resultado proposto, são estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Estudo de mecanismos flexíveis e otimização;
- Estudo do *software HyperWorks Student* e suas funções;
- Modelar o mecanismo flexível por meio da Otimização Topológica com auxílio do *software Altair HyperWorks Student*;
- Discutir os resultados obtidos.

1.4 Justificativa

A aplicação do método de otimização topológica no projeto de mecanismos flexíveis tem como objetivo tornar mais viável e sistemático o desenvolvimento desse tipo de produto. A alta complexibilidade gerada pela dependência das análises cinemáticas e cinéticas é uma das principais barreiras para a aplicação desses mecanismos em soluções industriais. Mesmo com grande domínio da utilização dos

mecanismos rígidos no cenário mundial, a crescente demanda por alternativas com menor custo, maior desempenho, redução de componentes e complexibilidade das montagens, juntamente com o desenvolvimento de novas tecnologias e materiais, deram espaço e incentivo para o estudo e aplicação de componentes não tradicionais. Sendo um deles os mecanismos flexíveis.

1.5 Conteúdo do trabalho

O presente trabalho aborda os principais temas referentes a utilização do método de otimização topológica estrutural em mecanismos flexíveis. Ele possui o intuito de fornecer um embasamento conceitual sobre os principais conceitos referentes a essa abordagem. Além disso, é aplicado o MOT ao projeto de um mecanismo flexível de baixa complexibilidade, de modo a demonstrar as etapas do processo, dificuldades e discussão dos resultados obtidos.

O capítulo 1 apresenta uma breve introdução sobre os mecanismos flexíveis e rígidos, método de otimização topológica, motivação e objetivo aqui almejado. Sobre os mecanismos flexíveis é ainda abordado as suas principais características, vantagens e desafios envolvidos no projeto.

O capítulo 2 é dedicado a revisão bibliográfica dos conceitos fundamentais para a execução dessa proposta de pesquisa, possuindo um enfoque maior a respeito da utilização da otimização topológica no projeto de mecanismos flexíveis e na caracterização desse tipo de componente. Dessa forma são mencionados brevemente algumas as principais metodologias utilizadas na resolução de problemas de otimização topológica estrutural.

No capítulo 3 é mostrado a metodologia aqui aplicada, definição do objeto de estudo de caso, premissas para a convergência do processo de otimização topológica e interpretação dos resultados.

O capítulo 4 é destinado a apresentação e comentário dos resultados obtidos. Mostra-se também nessa seção todas as decisões tomadas ao longo do projeto para a interpretação da topologia obtida, através do processo de otimização, e definição do modelo final do dispositivo.

Por fim, o último tópico consiste nas conclusões e considerações finais a respeito do assunto, além de sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

São apresentados neste capítulo conceitos básicos de mecanismos flexíveis, otimização estrutural e métodos dos elementos finitos. A otimização topológica possui uma ênfase maior e mais detalhada do que os demais temas, visto que este é o objeto de estudo principal do presente trabalho.

2.1 Mecanismo flexível

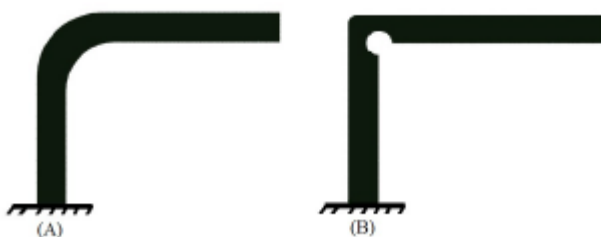
Um mecanismo flexível é formado por apenas uma peça, não havendo a presença de juntas, ou seja, é um corpo elástico monolítico. Dessa forma o movimento relativo realizado entre as suas partes é derivado inteiramente pela deformação elástica do seu próprio corpo. A utilização de um mecanismo composto por apenas um corpo monolítico e sem juntas apresenta, para uma grande gama de aplicações, vantagens no aspecto de desempenho e econômico. Isso se deve ao fato de que a redução do número de componentes faz com que haja uma diminuição do peso e da complexibilidade da montagem, ou seja, reduz custos. Outro ponto importante devido à ausência de juntas é a não necessidade de lubrificação, redução do desgaste, maior precisão (uma vez que a presença de articulações, por menor que seja a tolerância, existe folgas), menos ruídos e vibrações (HOWELL, 2001).

Apesar de grandes vantagens apresentadas pela a utilização de mecanismos flexíveis em certas aplicações, a dificuldade em realizar a análise das relações entre força e deslocamento é o principal motivo desse tipo de componente não ser uma opção muito tradicional. Esse fato é evidenciado por Howell (2001), "*a combinação de dois corpos conhecidos em um mecanismo flexível requer não apenas um conhecimento de ambos, mas também um entendimento de suas interações em uma situação complexa*". Outra complexibilidade apresentada é que o próprio comportamento esperado desse tipo de componente possui requisitos conflitantes, uma vez que um mecanismo flexível deve se deformar para atingir o deslocamento desejado, e ao mesmo tempo deve possuir uma determinada rigidez que suporte os esforços envolvidos no movimento e sua aplicação (SIGMUND, 1997). A fim de solucionar essas solicitações mecânicas conflitantes surgiram algumas propostas baseadas na maximização da energia mútua e minimização da energia de deformação através de uma razão entre estas grandezas. A energia mútua está relacionada com o deslocamento desejado (ponto e direção) do mecanismo em função dos esforços,

em outro ponto e direção qualquer, que ele está submetido. Já a minimização da energia de deformação se refere a rigidez do mecanismo, de forma a atender os requisitos estruturais mecânicos.

Os mecanismos flexíveis podem ser categorizados basicamente em duas classes: mecanismos de flexibilidade distribuída e mecanismos de flexibilidade concentrada. Os mecanismos de flexibilidade distribuída flexionam ao longo de toda a sua estrutura quando sujeitos a um carregamento. Já em um mecanismo com flexibilidade concentrada, apenas os pontos conhecidos por pivôs flexíveis é que sofrem essa flexão, quando submetidos a aplicação de um carregamento (ANANTHASURESH et al., 1994).

Figura 5 - Tipos de mecanismos flexíveis: (a) flexibilidade distribuída e (b) flexibilidade concentrada.



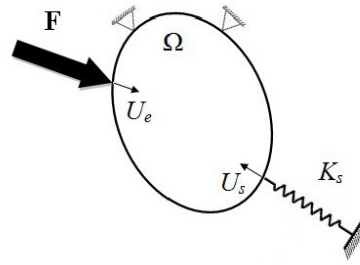
Fonte: Meneghelli (2013, p. 36)

A Figura 5 mostra a comparação entre um mecanismo flexível de flexibilidade concentrada e outro de flexibilidade de distribuída. O foco do presente trabalho são mecanismos com flexibilidade distribuída.

2.2 Mecanismo com flexibilidade distribuída

O projeto de otimização topológica de um mecanismo flexível possui como etapa inicial, a definição do domínio fixo, Ω , onde a estrutura final deverá estar totalmente contida. Com esse domínio já estruturado é necessário definir as condições de contorno, assim como a rigidez do meio externo, K_s . Essa rigidez representa ação do mecanismo e o conjunto de deslocamentos de entrada, U_e , e de saída, U_s , associados ao comportamento cinemático que o corpo é submetido ao exercer a sua aplicação. Para realizar uma formulação correta de um projeto de mecanismos com flexibilidade distribuída é necessário impor que uma parte da energia disponível seja armazenada pela própria estrutura, sob forma de energia de deformação elástica. (CARDOSO; FONSECA, 2004).

Figura 6 - Domínio fixo inicial de um mecanismo genérico



Fonte: Meneghelli (2013, p. 38)

Mesmo em problemas com condições de não linearidade geométrica e/ou material, é imprescindível que a formulação adotada seja facilmente aplicável e considere as características impostas pelo meio externo (CARDOSO; FONSECA, 2004).

Segundo estudos conduzidos por Cardoso e Fonseca (2004) a energia de deformação efetiva de um elemento, \bar{E}_{def} , é inversamente proporcional a sua pseudo densidade

$$\bar{E}_{def} = \frac{1}{\rho_e^p} E_{def}^0 \quad (1)$$

onde ρ_e é a pseudo densidade do elemento, E_{def}^0 é a energia de deformação considerando o material isotrópico base e p é o expoente da penalização SIMP. Em seu trabalho proposto Cardoso e Fonseca utilizaram essa formulação particularizada para o caso onde $p = 1$.

É possível notar que o ponto ótimo de E_{def}^0 seria encontrado fazendo $\rho_e \rightarrow 0$, porém dessa forma não seria possível obter uma solução que resultasse numa topologia sólida. Com o intuito de contornar esse problema foi proposto a utilização de uma função baseada na energia de deformação de um elemento finito

$$\Psi_e = \rho_e^n \bar{E}_{def} = \rho_e^{n+p} U_e^T K_e^0 U_e = \rho_e^n U_e^T K_e U_e, \quad (2)$$

sendo ρ_e a pseudo densidade do elemento, U_e é o vetor deslocamento do elemento, n é um expoente que permite ajustar o comportamento da função Ψ_e e K_e e K_e^0 são

a matriz de rigidez do elemento, com e sem a pseudo densidade, respectivamente (CARDOSO; FONSECA, 2004).

A nova função proposta tem o objetivo de penalizar o aparecimento de pseudo densidades intermediárias além de reter o comportamento da energia de deformação original para o material sólido ($p = 1$). Pela expressão é possível notar que a sua maximização é obtida ao maximizar o armazenamento de energia no material (sólido) que constitui o mecanismo flexível. Para isso é necessário que o comportamento cinemático esteja sujeito a um conjunto de restrições sobre deslocamentos em graus de liberdade, a quantidade de material necessária deve ser imposta por meio de uma restrição de volume. Procedendo dessa forma é obtido uma formulação de otimização da forma:

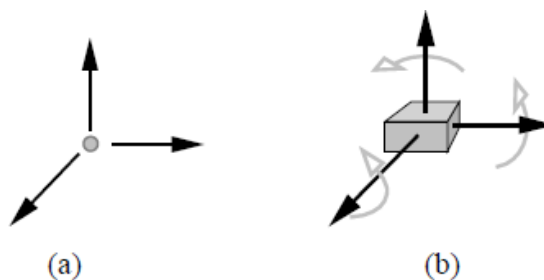
$$\begin{aligned} & \max \Psi \\ T.q \quad & \int_{\Omega} \rho d\Omega \leq V_{max} \\ & \mathbf{KU} = \mathbf{F} \\ & U_j \leq \bar{U}_j \quad j = 1..n_{rd} \end{aligned} \quad (3)$$

onde U_j representa a j -ésima componente do vetor de deslocamento global, \bar{U}_j é o seu valor limite, n_{rd} é o número de restrições de deslocamento e V_{max} é o volume máximo de material. Nessa formulação também é necessário avaliar se o comportamento cinemático imposto permite o armazenamento de energia suficiente para o projeto de um mecanismo flexível (CARDOSO; FONSECA, 2004).

2.3 Graus de liberdade de um mecanismo

Graus de liberdade ou mobilidade é definido pelo número de variáveis independentes necessárias para descrever o posicionamento de um mecanismo dentro de um sistema. Se um mecanismo precisa de n variáveis independentes para indicar o seu posicionamento no sistema, é dito que esse mecanismo possui n graus de liberdade. A Figura 7 apresenta os três graus de liberdade que um ponto material pode ter no espaço tridimensional, permitindo assim movimentos de translação em três direções. Já um corpo rígido, nesse mesmo espaço tridimensional, apresenta seis graus de liberdade, sendo três possíveis movimentos de translação e rotação (SOUZA; 2003).

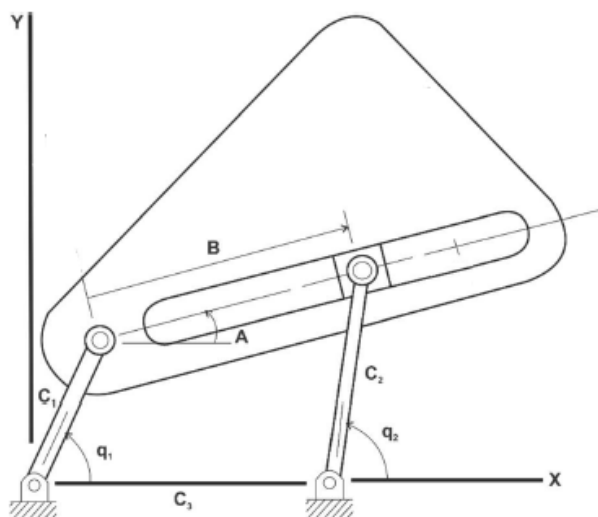
Figura 7 - Graus de liberdade em um espaço tridimensional: a) um ponto; b) corpo rígido



Fonte: Souza (2003, p. 5)

A Figura 8 exemplifica um mecanismo que depende de duas variáveis independentes (q_1 e q_2) para definir o seu posicionamento no sistema, dessa forma esse mecanismo possui dois graus de liberdade. Ao determinar as variáveis q_1 e q_2 é dito que o sistema está definido. Isso significa que as variáveis B (distância entre as juntas no elo de acoplamento) e A (ângulo de inclinação do elo de acoplamento) podem ser calculadas quando as variáveis independentes são conhecidas.

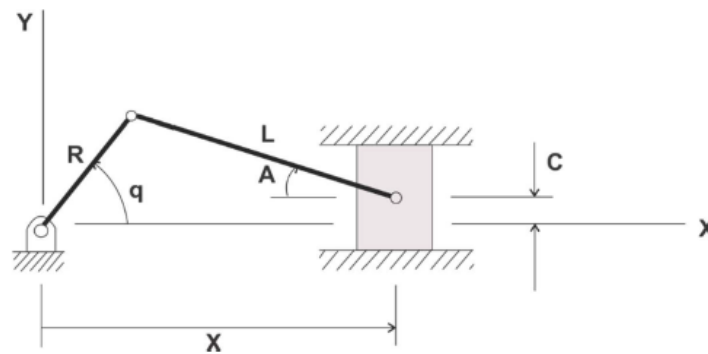
Figura 8 - Exemplo de mecanismo com dois graus de liberdade



Fonte: Adaptado de Doughty (1988, p. 86)

Um mecanismo com um grau de liberdade é ilustrado na Figura 9. Ao definir a variável q é possível calcular X (custos do pistão) e A (ângulo de inclinação da biela). As equações que fornecem as variáveis dependentes são as equações de posição. Derivando sucessivamente, obtém-se as equações de velocidade, aceleração e pulso. Esse procedimento consiste na análise cinemática do mecanismo.

Figura 9 - Exemplo de mecanismo com um grau de liberdade



Fonte: Doughty (1988, p. 23)

Para o estudo aqui realizado é importante o conhecimento do conceito de graus de liberdade de um ponto no espaço tridimensional. Este entendimento é necessário para formulação do domínio e restrições impostas sobre ele, etapas que são abordadas no capítulo 3.

2.4 Otimização

A otimização tem como objetivo encontrar o valor extremo de um funcional, máximo ou mínimo, que satisfaça um conjunto de restrições (ARORA, 2007). Dessa forma um método de otimização se dá por meio da modificação de um conjunto de parâmetros associados ao projeto, denominado por variáveis de projeto. A modificação desses parâmetros só é possível após uma formulação matemática do problema real, a qual denomina-se por função objetivo, $f(x)$. Baseado em Arora (2007) a formulação geral do problema de otimização segue a forma de notação padrão:

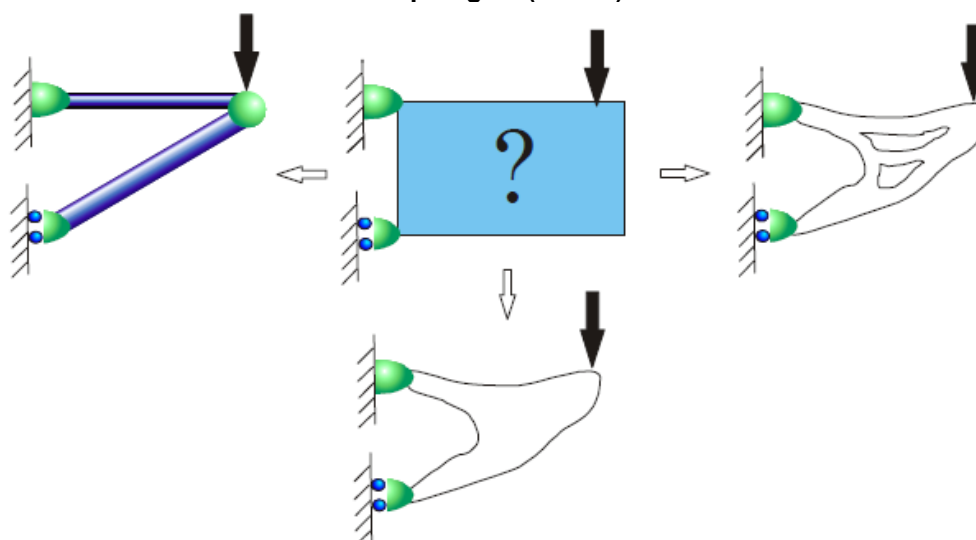
$$\begin{aligned}
 & \text{Min ; Max ; } f(x); x \\
 & g_j(x) \leq 0 \quad , \quad j = 1..m_g \\
 & h_j(x) = 0 \quad , \quad j = 1..m_h \\
 & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad , \quad i = 1..n_v
 \end{aligned} \tag{4}$$

Em que x : vetor de variáveis de projeto; $g_j(x)$: funções de restrições de desigualdade; $h_j(x)$: funções de restrições de igualdade; \bar{x}_i : limite superior da i -ésima variável de projeto; \underline{x}_i : limite inferior da i -ésima variável de projeto; m_g : número de

restrições de desigualdade; m_h : número de restrições de igualdade; n_v : número de variáveis de projeto.

Se tanto o funcional quanto as restrições estiverem associadas a um problema de engenharia estrutural, ou seja, os cálculos envolvem estruturas mecânicas, é dito que o tipo de otimização é estrutural. Tradicionalmente a otimização estrutural pode ser classificada em dimensional (“size optimization”), de forma (“shape optimization”), ou topológica (“topology optimization”), dependendo do conjunto variáveis de projeto que são escolhidas (HOWELL, 2001). Pela Figura 10 é possível verificar a diferença entre a otimização dimensional, a de forma e topológica.

Figura 10 - Otimização Dimensional (esquerda), Otimização de Forma (centro) e Otimização Topológica (direita)



Fonte: Meneghelli (2013, p.21).

A otimização dimensional pode ter como objetivo, por exemplo, maximizar a rigidez com o mínimo volume de material, ou minimização de massa. No geral as variáveis de projeto são parâmetros geométricos da estrutura como diâmetro, comprimento, largura, altura, espessura, diâmetro de furações, entre outros.

Em relação a otimização de forma uma das grandes dificuldades de sua utilização é definir variáveis de projeto adequadas para parametrizar as formas no espaço do projeto, além de exigir uma maior complexibilidade e sofisticação na implementação numérica, em comparação com a otimização dimensional. As variáveis de projeto utilizadas nesse método estão associadas as formas dos contornos dos segmentos e posições de furos.

Já na otimização topológica o processo de otimização se dá por meio da variação da disposição espacial e do padrão de conectividades dos segmentos da estrutura. Esse tipo de abordagem é mais genérico do que os apresentados anteriormente, uma vez que permite tanto a criação de novos contornos quanto a inserção de “vazios” no domínio do projeto.

2.5 Método da otimização topológica (MOT)

Historicamente os estudos sobre a otimização topológica são considerados recentes, sendo o primeiro trabalho apresentado nessa área no início do século XX por Michell (MICHELL, 1904). Apesar do crescimento bastante acelerado no contexto de mecânica estrutural e em outras áreas, as pesquisas sobre otimização topológica ficaram “esquecidas” por décadas, sendo retomadas principalmente por ROZVANY e ADIDAM (1972) no início dos anos 70. Com uma base matemática já estabelecida para a parametrização correta de material no domínio, Sigmund (1994, 1997) trouxe grandes contribuições ao propor a utilização de filtros para suavizar distribuição espacial das pseudo densidades, de forma a contornar um problema conhecido como instabilidade de tabuleiro ou *checkerboard*.

Segundo Lima (2002) a otimização estrutural topológica pode ser dividida em duas categorias distintas, uma a partir do meio discreto e a outra de um meio contínuo.

- Otimização topológica a partir de um meio discreto: essa categoria é subdividida em estruturas de malhas contínuas ou discretas. O processo de otimização de estrutura de malhas contínuas (“*gridlike continua*”) se dá por meio de um número infinito de barras rígidas que são separadas por um espaço infinitesimal, onde a sua solução ótima é obtida de forma analítica. A otimização de estruturas de malha discreta (“*ground structure*”) leva em conta um domínio de projeto onde existem vários pontos distribuídos e que podem ser considerados possíveis juntas ou treliças. Sua solução pode ser obtida através de métodos numéricos como a programação linear, SAND (“*Simultaneous Analysis and Design*”) ou critério de otimalidade, entre outros (BENDSOE *et al.*, 1994).

- Otimização topológica a partir de um meio contínuo: pode-se definir esse tipo de otimização como a determinação da melhor forma de distribuição de material dentro do domínio, cada ponto presente nesse espaço é determinado independente da presença de material ou não (BENDSOE; KIKUCHI, 1988). As variáveis de projeto

definidas para o processo de otimização possuem uma relação com a distribuição do material, dessa forma elas apresentam características de funções distribuídas ao longo de todo o domínio de análise. Como exemplo de variáveis de projeto pode-se citar parâmetros como a densidade, espessura, parâmetros geométricos da microestrutura, entre outros. Nesse campo de estudo é importante apresentar o trabalho de Cheng e Olhoff (1981), onde esses pesquisadores conseguiram observar a influência da malha na solução do problema discretizado, dessa forma quanto mais fina for a discretização do domínio maior será o número de reforços obtidos. Um ponto extremamente negativo gerado por essa abordagem, por mais que ela possibilitasse a solução do problema de distribuição de material em um meio contínuo, é a introdução de regiões porosas no material, tornando difícil tanto a interpretação dos resultados quanto a fabricação do componente em si. A fim de solucionar esse problema é proposta a parametrização SIMP (*Simple Isotropic Material with Penalization*) por Bendsoe (1989).

Em um projeto de topologia de uma estrutura tem-se como objetivo determinar a melhor forma de distribuição (distribuição ótima) de um material isotrópico dentro do domínio, sendo definido por uma região de projeto, condições de contorno de deslocamento e de forças prescritas. A determinação da melhor forma de distribuição do material depende basicamente da função objetivo a ser maximizada ou minimizada, e das restrições impostas no domínio. O domínio do projeto é mantido fixo e a sua limitação se deve aos pontos de apoio da estrutura e aplicação de carregamento. Dessa forma, deve-se determinar a distribuição das propriedades do material ao longo de todo o domínio, onde os pontos materiais que formam esse domínio necessitam de ser caracterizados como vazios ou cheios. Em uma implementação numérica esse domínio é discretizado em uma malha de elementos finitos, esta permanece inalterada ao longo do processo de otimização (BENDSOE; SIGMUND, 2003). A otimização topológica pode ser considerada, de forma genérica, como um problema pontual de presença de material ou vazio dentro da estrutura.

As etapas típicas de um processo de otimização topológica se iniciam por meio de uma estimativa inicial das variáveis de projeto que definem o domínio. A limitação do espaço de projeto é dada pelas condições de contorno, restrições de deslocamento, e regiões de aplicação dos carregamentos. Esse domínio é discretizado em uma malha de elementos finitos, e logo em seguida uma análise de

elemento finitos é utilizada para o cálculo da função objetivo. Posteriormente calcula-se os gradientes e sensibilidades das variáveis de projeto, e inicia-se então o processo de otimização. A etapa de otimização se destina a obtenção da melhor forma de distribuição do material dentro do domínio, de modo a maximizar ou minimizar a função objetivo escolhida para o projeto. Caso haja a convergência do processo de otimização, dentro dos limites de tolerância especificados no projeto, o procedimento é finalizado. Não havendo essa convergência o procedimento é iniciado novamente com a atualização das variáveis de projeto (HOWELL, 2001).

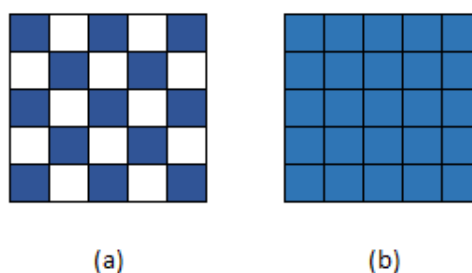
2.6 Problemas relacionados a otimização topológica

Algumas dificuldades podem ser encontradas durante o processo de otimização, na qual é possível destacar entre elas:

- Mínimos locais: na resolução de problemas de otimização topológica é possível que estes não sejam convexos, dessa forma eles possuem muitos mínimos locais. Isso faz que o processo de otimização se direcione a estes diferentes mínimos, ou seja, é possível encontrar diversos resultados diferentes dependendo dos parâmetros e variáveis utilizadas inicialmente no algoritmo. Devido a esse problema não é possível garantir que o ponto mínimo encontrado é o global, isto é, aquele que fornece o menor valor possível para a função objetivo (MENEGHELLI, 2013).

- A instabilidade do tabuleiro: a distribuição de material no domínio em alguns casos pode introduzir regiões em que a pseudo densidade dos elementos vizinhos varie de forma periódica. É possível comparar o aspecto dessa região a um tabuleiro de xadrez, de forma que o domínio fica alternando entre espaços vazios e espaços sólidos que não correspondem a distribuição ótima de material (Figura 11). Este fenômeno é conhecido como *checkerboard* (MENEGHELLI, 2013).

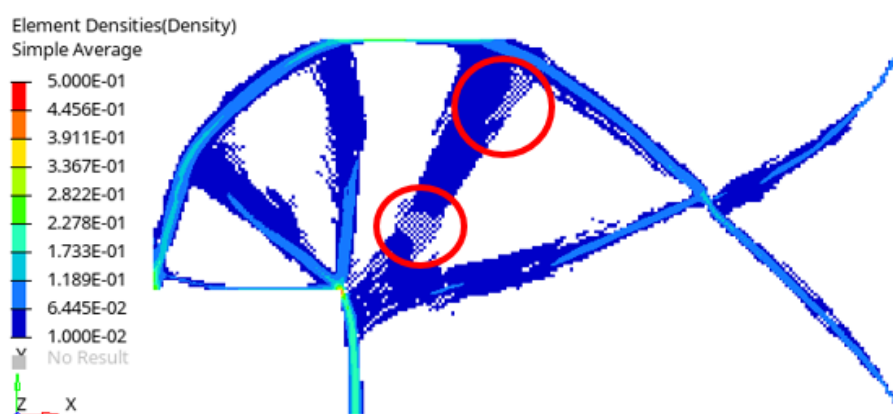
Figura 11 - Otimização Topológica: (a) arranjos de “tabuleiro de xadrez”, (b) distribuição uniforme de material



Fonte: Autor (2002)

De acordo com os resultados obtidos por Díaz e Sigmund (1995), esse fenômeno origina-se devido a um modelamento inadequado do método dos elementos finitos (MEF), sendo que nas regiões onde se constata a sua ocorrência, a rigidez obtida aparenta artificialmente ter um valor elevado em comparação com outra região da mesma estrutura que possua o mesmo volume, porém com uma distribuição homogênea. Pela Figura 12 é exemplificado a influência do refino da malha e a ocorrência de regiões de tabuleiro de instabilidades, algumas das regiões em que aparecem esse fenômeno estão destacadas com círculos em vermelho. Esse resultado pode ser comparado com a Figura 4, visto que são a mesma aplicação de otimização topológica, porém, com malhas diferentes. A Figura 12 possui uma malha muito mais refinada em comparação com a Figura 4.

Figura 12 - Destaque de regiões com instabilidade de tabuleiro em um mecanismo de agarrar



Fonte: Autor (2022)

- A dependência da malha: A parametrização SIMP não evita o problema da dependência do resultado com o refino da malha. Dessa forma, à medida que se refina a malha, tem-se um aumento do número de reforços, tornando a solução para o problema de otimização mais complexa. Em teoria, o refino da malha deveria apenas melhorar a resolução dos contornos da geometria (MENEGHELLI, 2013).

2.7 Filtros

Os filtros podem ser definidos como operadores matemáticos que quando aplicados sobre uma função não regular possibilitam a suavização da sua distribuição espacial. Instabilidades numéricas, como o *checkerboard* citado anteriormente, são evitadas e permite também um maior controle sobre a topologia obtida durante o

processo de otimização (CARDOSO; FONSECA, 1999). A utilização de filtros possibilita também a obtenção de resultados com um grau de independência menor em relação ao refino da malha.

Segundo Sigmund (2007) os filtros basicamente são classificados em três categorias, sendo elas os filtros de vizinhança espacial, métodos restritivos e métodos híbridos. Pela facilidade de implementação e eficiência, os filtros de vizinhança espacial são os mais utilizados atualmente. Os métodos restritivos não são muito aplicados devido à dificuldade de sua utilização, uma vez que nele existe a dependência da geometria e das condições do problema.

Os filtros de vizinhança espacial atuam através de uma média ponderada das grandezas dos elementos vizinhos, dessa forma é obtida a grandeza associada a um elemento finito, onde a vizinhança é gerada a partir de um raio delimitado em torno do elemento. No geral a aplicação desses filtros destina-se às sensibilidades ou pseudo densidades dos elementos, embora nada impeça a sua utilização em outras grandezas (CARDOSO; FONSECA, 1999).

Utilizando o filtro espacial de densidades da equação 2, calcula-se a pseudo densidade de um elemento ρ_e através da média ponderada, descrita na forma:

$$\rho_e = \frac{\sum_{j=1}^{nev} w_j v_j \rho_j}{\sum_{j=1}^{nev} w_j v_j} \quad (5)$$

onde j um elemento vizinho, v_j seu volume, w_j uma função peso que tem como objetivo ponderar a influência dos vizinhos em função de sua distância e nev é o número de vizinhos ao elemento. Porém, a abordagem mais utilizada é a linear, onde ela possuiu a forma dada por:

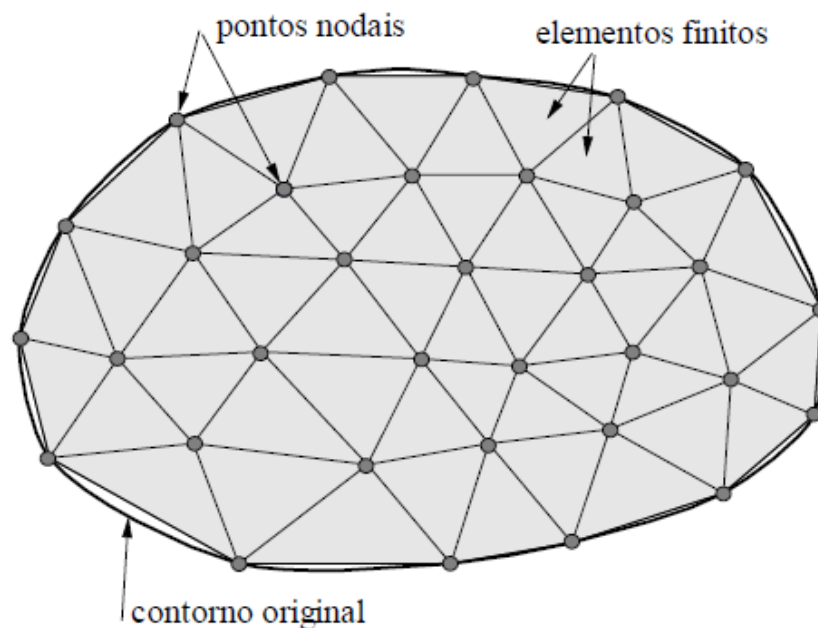
$$w_j = \frac{R_{max} - R_{ej}}{R_{max}} \quad (6)$$

sendo R_{max} é o raio de filtragem previamente estipulado para abranger uma determinada vizinhança, R_{ej} é a distância entre o elemento central e um determinado vizinho j . Verifica-se então que o raio de abrangência R_{max} é o parâmetro de controle do filtro e a função w_j será zero caso o seu vizinho esteja além do raio abrangência (MENEGHELLI *et al.*, 2013).

2.8 Método dos elementos finitos (MEF)

O MEF parte do processo intuitivo de transformar um problema complexo em vários outros mais simples. Dessa forma, um domínio inicial qualquer (simples ou complexo) é dividido em uma quantidade finita de domínios menores e com geometria mais simples (elementos), formando uma malha de elementos que se aproximam do domínio inicial. Cada elemento carrega propriedades e equações físicas, correspondentes ao problema inicial, e fazem contato com os elementos vizinhos (SOUZA; 2003). A Figura 13 representa a discretização de um domínio qualquer em uma malha de elementos finitos, nela nota-se que em algumas regiões há uma diferença considerável entre o contorno original e a geometria formada pela malha de elementos finitos.

Figura 13 - Malha de elementos finitos aplicada em um domínio



Fonte: Souza (2003, p. 1)

Com o intuito de tornar o domínio discretizado em um problema contínuo, a malha dos elementos é gerada de modo que as vizinhanças dos elementos sejam coincidentes. Essa transformação permite a aproximação por combinação linear de funções polinomiais conhecidas ϕ_i e coeficientes C_i não determinados.

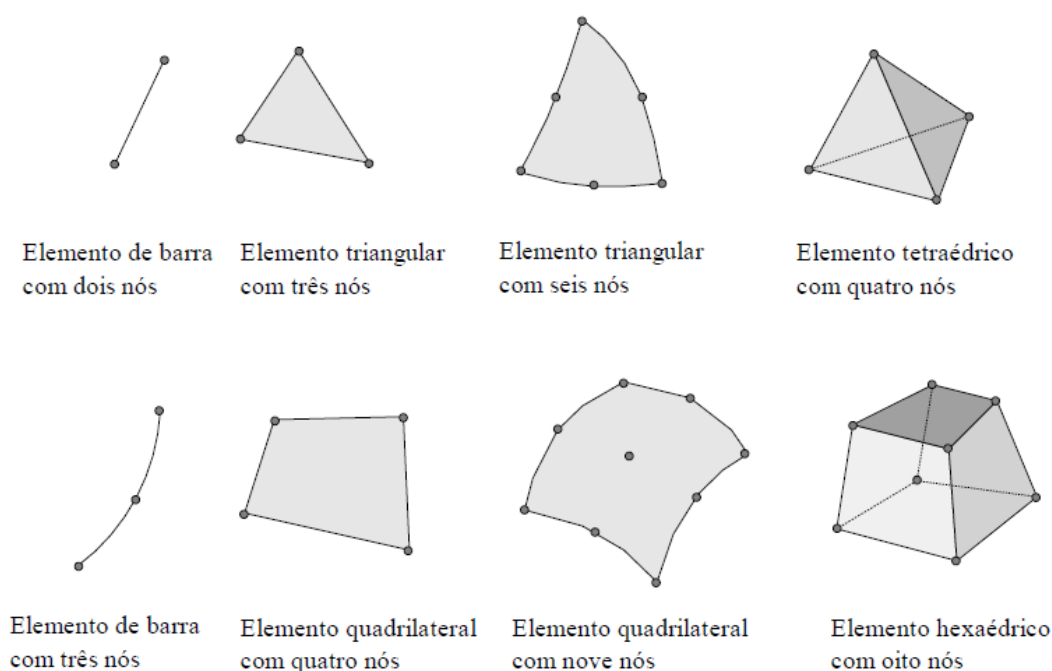
$$U \approx U_h = \sum C_i \phi_i \quad (7)$$

Os coeficientes C_i são determinados por meio das equações governantes de cada elemento, funcionando como peso para as funções polinomiais ϕ_i .

O comportamento de um elemento é definido praticamente pelo número e disposição dos nós, além dos graus de liberdade de cada nó (GDL). Os GDL representam a quantidade de coordenadas necessárias para descrever o posicionamento exato de um nó, ou seja, indicam os possíveis movimentos permitidos naquele nó (translações, rotações bi ou tridimensionais) (SOUZA; 2003).

A escolha do tipo e forma do elemento (Figura 14) são fatores que influenciam de forma significativa na convergência dos resultados referentes ao problema inicial. Além disso, o número de elementos da malha é determinante para a precisão da solução final. Isso ocorre pois há um erro introduzido nos resultados gerado pela utilização das aproximações, a geometria dos elementos e quantidade interferem diretamente na qualidade da malha em representar o domínio real.

Figura 14 - Exemplos de diferentes tipos de elementos finitos



Fonte: Souza (2003, p. 2)

Uma forma de reduzir o erro gerado pelas aproximações é através do aumento da quantidade de elementos presentes na malha (refinamento da malha), o que reduz a diferença entre a malha e o domínio real. Teoricamente a solução exata é obtida ao passo que a quantidade elementos tende ao infinito. Porém, o aumento do número de

elementos requer um maior tempo de processamento dos dados e custo computacional, o que pode inviabilizar a análise a depender dos recursos disponíveis para a sua execução (SOUZA, 2003).

2.9 Parametrização Material

Formulada por meio de uma distribuição de um ou mais materiais contidos em um domínio fixo, a otimização topológica visa maximizar ou minimizar um funcional sujeito a um conjunto de restrições (BENDSOE; SIGMUND, 2003). Definido o domínio (Ω), objetiva-se encontrar o domínio que efetivamente contém material (Ω_{mat}). Para a distribuição de um material isotrópico, o desejável seria utilizar a parametrização

$$\mathbf{E}(X) = 1_{\Omega_{mat}}(X)\mathbf{E}^0, 1_{\Omega}^{mat}(X) = \begin{cases} 1 & X \in \Omega^{mat} \\ 0 & X \in \Omega/\Omega^{mat} \end{cases}$$

Com

$$\int_{\Omega} 1_{\Omega_{mat}}(X)d\Omega \leq Vol\Omega^{mat} \leq V, \quad (8)$$

onde \mathbf{E}^0 é o tensor constitutivo que representa as propriedades de um material base isotrópico, \mathbf{E} é o tensor constitutivo efetivo e V é o volume limite de material. Esse tipo de parametrização não admite valores intermediários por se tratar de uma abordagem de natureza discreta, ou seja, existe somente a presença ou ausência de material. Dessa forma o problema de otimização se torna dependente da discretização quando solucionado com o auxílio de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos. Existe geralmente uma grande dificuldade encontrada em interpretar a distribuição de material por meio desse método. Afim de evitar a utilização de uma relaxação que utilize material anisotrópico, é comumente utilizado o método SIMP. Podemos verificar a forma da parametrização SIMP como sendo

$$\mathbf{E}(X) = \rho(X)^p \mathbf{E}^0$$

com

$$\int_{\Omega} \rho(X)d\Omega \leq V, \quad 0 \leq \rho(X) \leq 1, \quad \forall X \in \Omega \quad (9)$$

onde $\rho(X)$ é a pseudo densidade em cada ponto de X , \mathbf{E}^0 é o tensor constitutivo que representa as propriedades de um material base isotrópico, \mathbf{E} é o tensor constitutivo

efetivo na coordenada X e V é o volume disponível de material (MENEGHELLI *et al.*, 2013). Esse expoente, conforme Bendsoe e Sigmund (2003), deve satisfazer a relação para o caso 2D

$$p \geq \left\{ \frac{2}{1-\nu^0}, \frac{4}{1+\nu^0} \right\} \quad (10)$$

e para o 3D

$$p \geq \left\{ \frac{15(1-\nu^0)}{7-5\nu^0}, \frac{3}{2} \frac{1-\nu^0}{1-2\nu^0} \right\}, \quad (11)$$

onde ν^0 representa o coeficiente de Poisson do material base.

Utilizando-se um domínio discretizado por elementos finitos pode-se assumir que cada elemento é constituído de um material cuja a sua propriedade será dada pela expressão $\mathbf{E} = \rho_e^p \mathbf{E}^0$. Dessa forma a matriz rigidez local deste elemento será

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega_e = \rho_e^p \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{B} d\Omega_e = \rho_e^p \mathbf{K}_e^0, \quad (12)$$

onde \mathbf{K}_e representa a rigidez efetiva do elemento, \mathbf{B} é a matriz de derivadas das funções de interpolação e \mathbf{K}_e^0 é matriz de rigidez sem considerar a pseudo densidade. A rigidez global da malha de elementos finitos, \mathbf{K} , é dada através de um operador de sobreposição local-global:

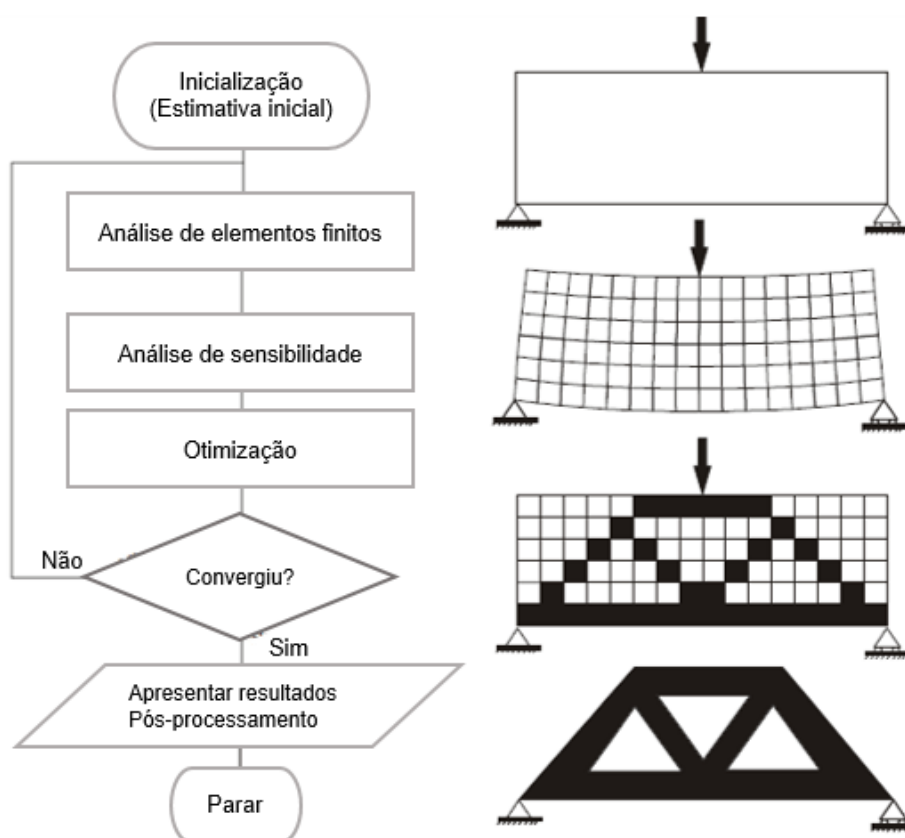
$$\mathbf{K} = \bigoplus_{e=1}^{nelems} \mathbf{K}_e \quad (13)$$

onde $nelems$ é o número de elementos finitos na malha. Na prática este operador é implementado por meio de um algoritmo, no qual o número de pseudo densidades da malha será igual ao número de elementos finitos (MENEGHELLI *et al.*, 2013).

2.10 Procedimento computacional

Referente a problemas relacionados à otimização topológica, é possível dizer que a implementação computacional consiste na realização sequencial de diversas etapas (BENDSOE; SIGMUND, 2003). A Figura 15 mostra em forma de um fluxograma o funcionamento de um algoritmo medida que o processo converge.

Figura 15 - Algoritmo para Otimização Topológica



Fonte: Meneghelli (2013, p. 33).

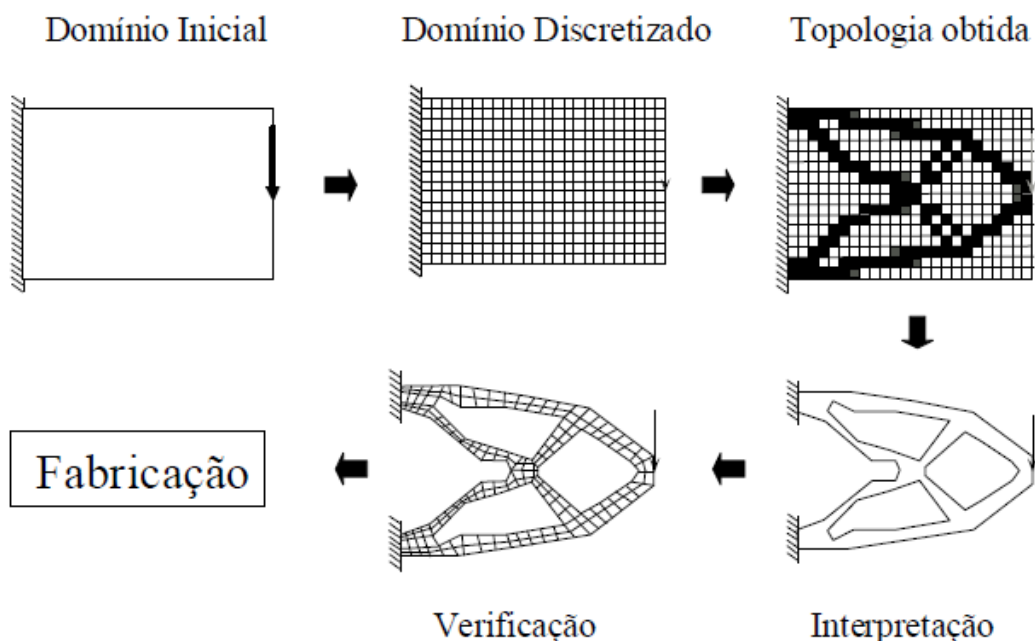
Segundo Arora (2007) um problema de otimização é composto basicamente por três elementos fundamentais: o primeiro é a definição da função objetivo que se deseja maximizar ou minimizar, o segundo está relacionado com o conjunto de variáveis envolvidas no problema e por fim, o terceiro, são as funções de restrição que limitam os valores assumidos pelas variáveis de projeto.

O procedimento aqui adotado, possibilitado pela utilização de um *software* de otimização, é resumido nas etapas apresentadas abaixo:

- Discretização do domínio de projeto usando uma malha de elementos finitos adequado que permita a definição das cargas aplicadas e condições de contorno;
- Realização de uma estimativa inicial das variáveis de projeto;
- Realizar a análise de elementos finitos de modo a determinar os deslocamentos nodais, as deformações a partir dos deslocamentos e tensões;
- Definição da função a ser otimizada e restrições para o problema de otimização;

- e. Utilização da rotina de otimização topológica do *software Altair HyperWorks Student*;
- f. Interpretação e análise dos resultados obtidos, e representação da topologia definida.

Figura 16 - Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica



Fonte: Lima (2002, p. 41)

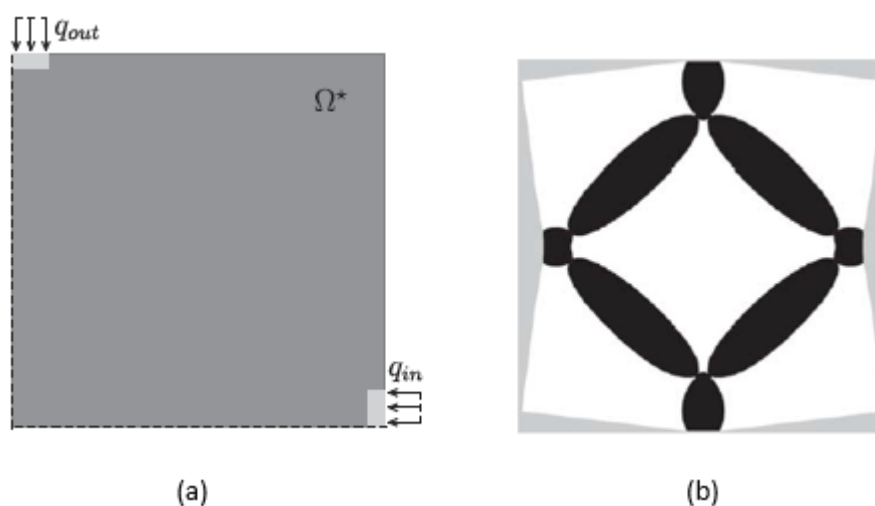
A Figura 16 ilustra uma típica aplicação de otimização topológica em um projeto de mecanismo, partindo de um domínio inicial, realização da discretização do domínio, aplicação do método de otimização, interpretação dos resultados obtidos, verificação e, por fim, a fabricação. Entre as etapas de verificação e fabricação ainda há o modelamento final do mecanismo, de forma a atender as práticas de projetos conhecidas amplamente em aplicações industriais (evitar cantos vivos, locais com geometrias favoráveis a concentração de tensões, entre outras).

3 METODOLOGIA

Para alcançar os objetivos propostos inicialmente é adotado um modelo de otimização topológica estrutural a partir de um meio contínuo. Esse modelo consiste em determinar a melhor forma de distribuição de material dentro de um domínio, podendo haver ou não a inserção de espaços vazios na estrutura. A fim de tornar a execução desse trabalho viável, a aplicação do MOT é realizada através da utilização de um mecanismo de baixa complexibilidade. As análises de elementos finitos e o processo de otimização são realizados por meio do software *Altair HyperWorks Student*.

Na literatura existem diversos exemplos de otimização topológica aplicada ao projeto de mecanismos flexíveis de baixa complexibilidade. Dentre alguns deles pode-se citar o *moonie*, mecanismo transforma uma força horizontal de entrada (q_{in}) em um deslocamento vertical de saída. A Figura 17 (a) representa o domínio inicial do projeto deste dispositivo, devido a simetria no eixo horizontal e vertical somente uma parte do domínio é representada. O resultado do seu processo de otimização é apresentado Figura 17 (b).

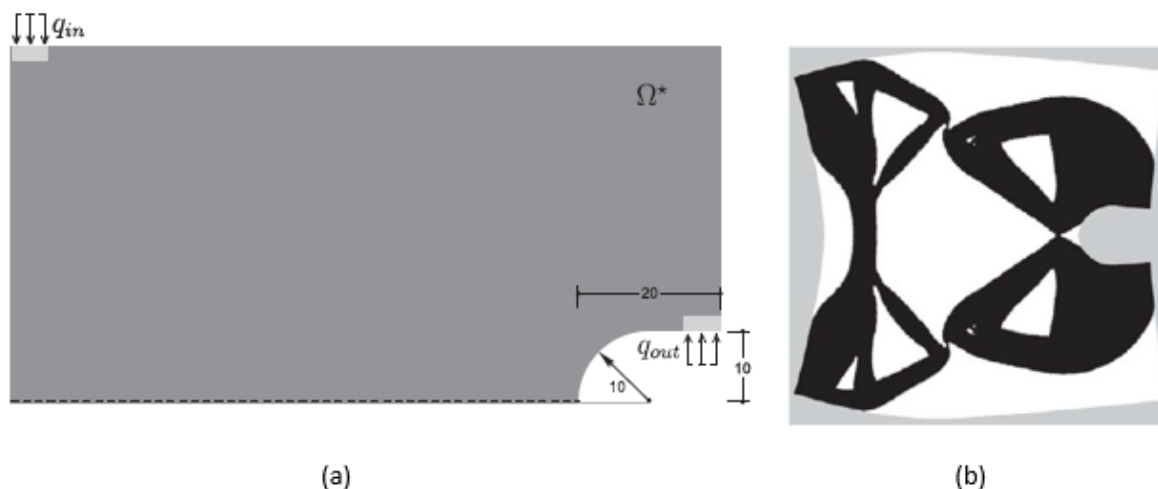
Figura 17 - Moonie: (a) domínio inicial e (b) topologia obtida após otimização topológica



Fonte: Lopes (2017, p. 46 e 48)

Outro exemplo é um mecanismo do tipo alicate, onde uma força vertical é aplicada em determinado ponto (q_{in}), provocando um deslocamento também vertical em outro ponto, porém, no sentido contrário.

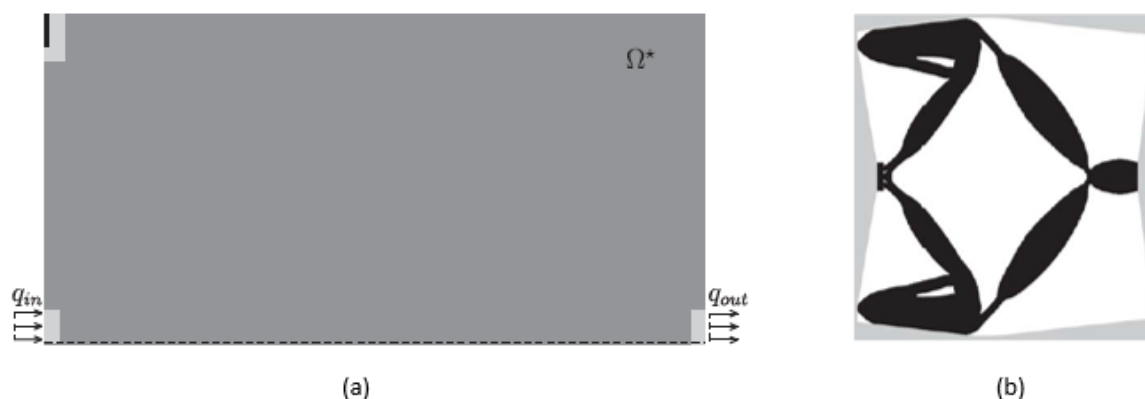
Figura 18 - Alicate: (a) domínio inicial e (b) topologia obtida após otimização topológica



Fonte: Lopes (2017, p. 52 e 53)

A Figura 18.a representa o domínio inicial do mecanismo flexível do tipo alicate, devido a simetria no eixo horizontal somente uma parte do domínio é representada. O resultado do seu processo de otimização é conforme Figura 18.b. Encontrado em diversos trabalhos, tem-se também o exemplo do mecanismo inversor de deslocamento. Neste dispositivo uma força aplicada em um determinado ponto e direção (q_{in}) gera um deslocamento contrário ao sentido da força em um outro ponto.

Figura 19 - Inversor: (a) domínio inicial e (b) topologia obtida após otimização topológica



Fonte: Lopes (2017, p. 49 e 50)

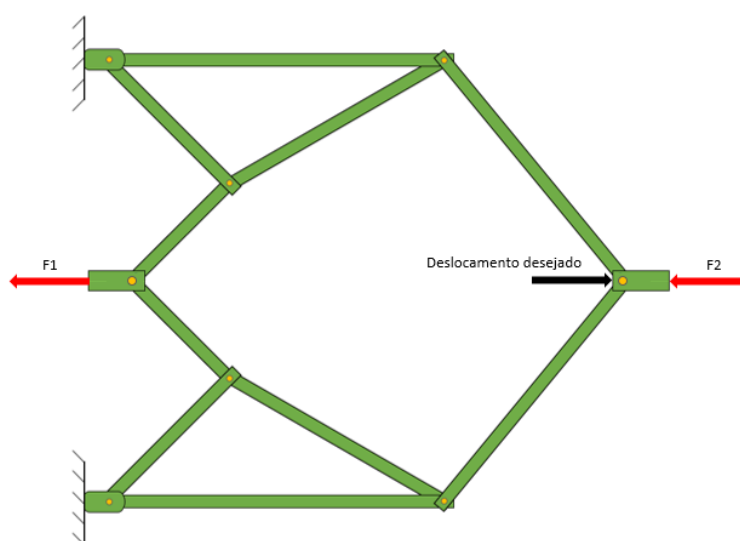
O domínio inicial do mecanismo flexível inversor é apresentado na Figura 19.a, devido a simetria no eixo horizontal somente uma parte do domínio é representada. O resultado do seu processo de otimização é conforme a Figura 19.b.

As topologias obtidas para os mecanismos aqui citados como exemplo (*moonie*, alicata e inversor) são otimizados conforme parâmetros estipulados. Dessa forma esses resultados representam uma topologia otimizada para um determinado domínio, função objetivo e restrições impostas a esses projetos.

3.1 Inversor de deslocamento

Existem atuadores eletrostáticos que produzem apenas forças de contração. Em determinadas aplicações é necessário que essa força de contração de alguma forma seja convertida em expansão. Com base nesse problema o objeto desse estudo de caso é a otimização topológica de um inversor de deslocamento flexível. É ilustrado na Figura 20 um exemplo de mecanismo rígido do tipo inversor, onde uma força F_1 , aplicada em um determinado ponto, provoca um deslocamento no sentido contrário dessa força em outro ponto. A força F_2 representa um carregamento externo no qual esse inversor está sujeito.

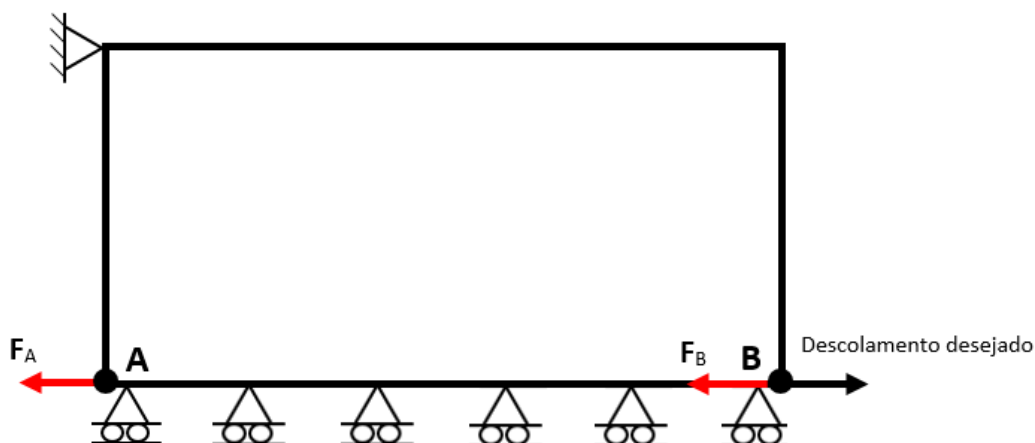
Figura 20 - Mecanismo rígido inversor de deslocamento



Fonte: Autor (2022)

A Figura 21 representa o domínio inicial simplificado do mecanismo inversor flexível. Devido a simetria em relação ao eixo horizontal somente a metade superior é representada, e todos os elementos inferiores da base são restringidos na direção do eixo vertical.

Figura 21 - Domínio superior do mecanismo inversor com a condição de simetria



Fonte: Autor (2022)

O inversor deve deslocar o ponto B na direção inversa do sentido de aplicação da Força F_A , além de suportar a força externa F_B que atua no sentido contrário do movimento do ponto B. A análise do mecanismo é realizada para um domínio bidimensional (2D).

O material do inversor tem como referência o náilon, com módulo de elasticidade (Young) igual a 3300 MPa, coeficiente de Poisson de 0,4 e tensão de escoamento de 90 MPa. Para esta análise o peso não é considerado, logo não é necessário a definição de uma densidade.

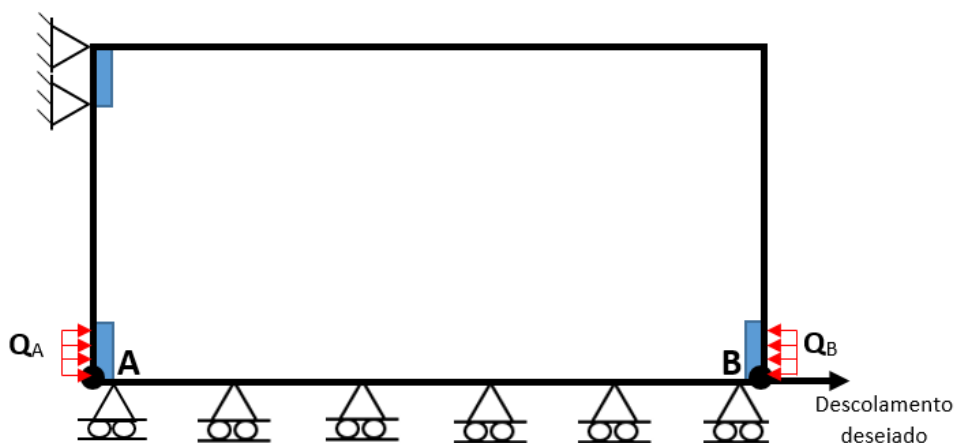
3.2 Domínio inicial

O domínio inicial do inversor é um retângulo com base igual a 60 mm e altura de 30 mm. A espessura do mecanismo é de 15 mm e seu valor é ajustado diretamente na propriedade do material, visto que a análise do problema é realizada em 2D. Conforme citado anteriormente, a existência de uma simetria em relação ao eixo horizontal, permite representar e utilizar somente a metade superior do domínio no processo de simulação. A utilização desse domínio parcial faz com que haja um menor gasto computacional no processamento de dados, requerendo assim um hardware menos robusto para execução das análises e otimização.

A base inferior do domínio possui todos os nós restringidos na direção vertical, e a aplicação das forças $F_A = -250$ N e $F_B = -50$ N, juntamente com as restrições do canto superior esquerdo, são distribuídas em 5 nós (Figura 22). Essa consideração é realizada para que haja uma superfície de contato, ao invés de apenas um ponto de

contato, simulando melhor uma aplicação real e evitando problemas gerados pela concentração de carga em apenas uma pequena região.

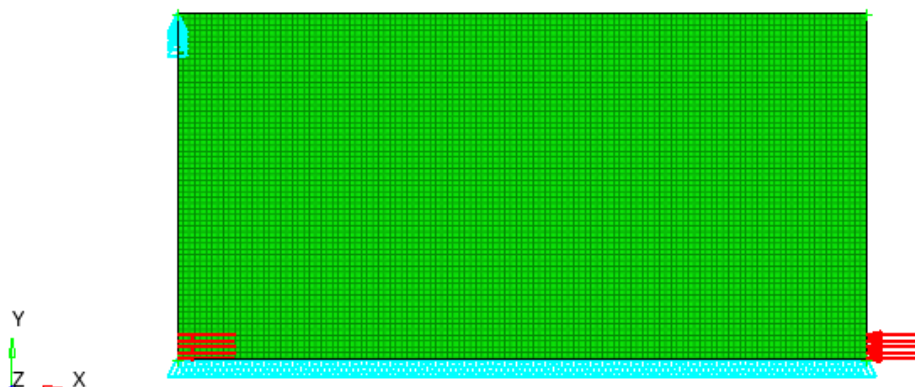
Figura 22 - Domínio superior do mecanismo inversor com a condição de simetria e distribuição das forças e restrições para gerar uma superfície de contato



Fonte: Autor (2022)

As forças F_A e F_B são divididas igualmente nos 5 nós das suas respectivas regiões de aplicação. O sinal negativo das forças indica que estas atuam no sentido contrário do eixo de aplicação. O canto superior esquerdo do domínio possui os nós dos elementos, simbolizados pelo retângulo em azul, restringidos nas direções horizontais e verticais. O comprimento dos retângulos em azul, Figura 22, que abrange os nós restringidos ou as distribuições de forças é de 2,0 mm. Os carregamentos de entrada Q_A e Q_B representam a distribuição das forças F_A e F_B , respectivamente.

Figura 23 - Domínio discretizado em uma malha de elementos finitos, com todas as forças e restrições aplicadas



Fonte: Autor (2022)

Na Figura 23 é apresentado o domínio do inversor discretizado numa malha com 7200 elementos finitos isoparamétricos quadrados de 4 nós, totalizando 7381 nós. O comprimento de cada elemento é de 0,5 mm. O volume inicial do domínio é de $2,700 \times 10^4 \text{ mm}^3$.

O domínio inicial é avaliado no intuito de verificar os pontos onde ocorrem os maiores deslocamentos e tensões, além de permitir determinar se o domínio inicial suporta as cargas aplicadas nele sem apresentar nenhuma falha. Com essa análise é possível verificar o comportamento esperado do domínio sob as condições impostas a ele.

3.3 Formulação do problema de otimização

A função definida para o projeto do inversor é a minimização do volume total do mecanismo.

Por se tratar de uma otimização de um mecanismo flexível é necessário que este além de suportar os carregamentos externos, possua um descolamento mínimo e máximo em determinados pontos. As restrições impostas nesse projeto são:

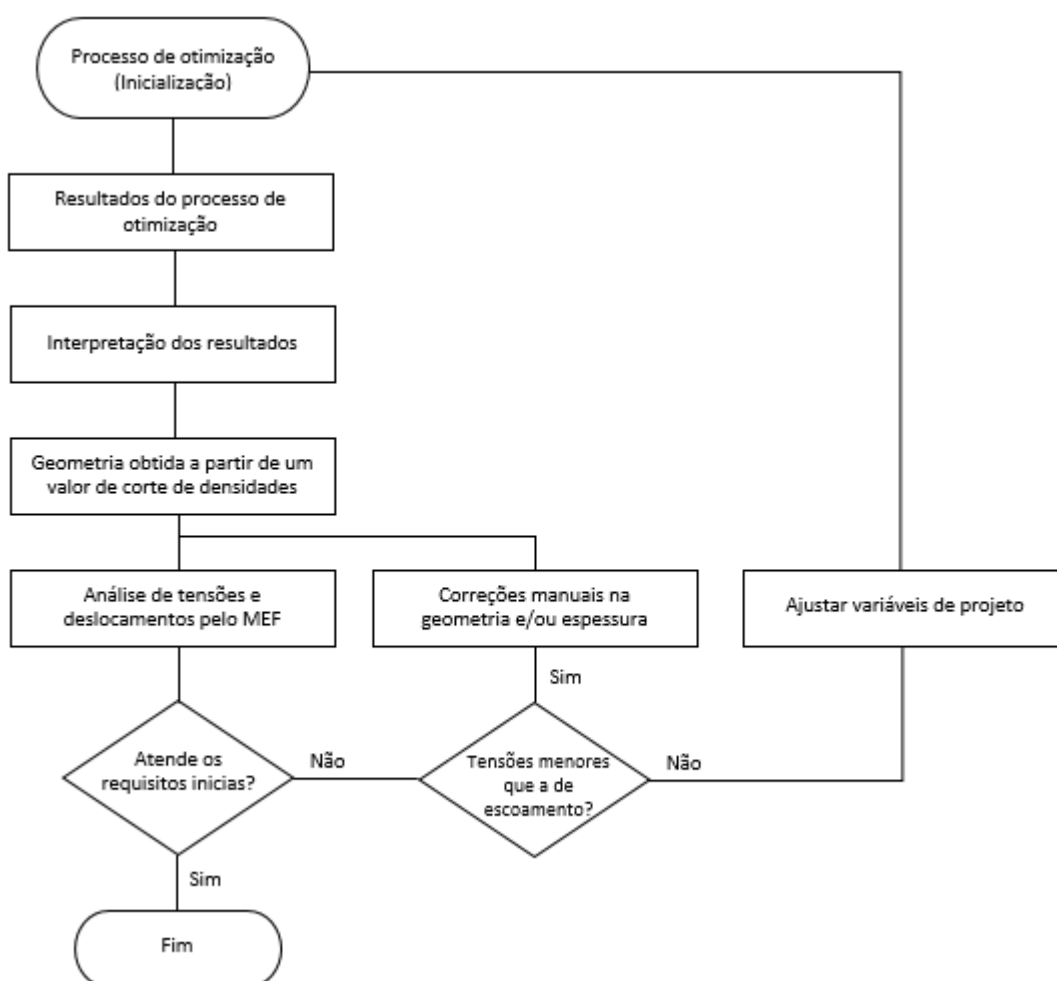
- a. Os 5 nós onde são aplicados o carregamento Q_A devem possuir um deslocamento horizontal máximo de - 5 mm. O sinal negativo indica que esse deslocamento ocorre no sentido contrário do eixo horizontal.
- b. Os 5 nós onde são aplicados o carregamento Q_B devem possuir um deslocamento horizontal mínimo igual 2 mm e máximo de 5 mm. Esse comportamento é imposto devido a configuração do domínio inicial, e para que no processo de otimização o mecanismo possua o movimento desejado, ou seja, inverter o deslocamento em relação ao sentido da força de entrada.
- c. A tensão máxima em um elemento é limitada em 90 MPa, valor referente a tensão à escoamento do material adotado para o mecanismo.
- d. Para evitar alguns problemas devido a dependência da malha será utilizado o parâmetro *minimum member size* (tamanho mínimo do membro) igual 4. Esse parâmetro é um filtro espacial de densidade, no qual evita a dispersão anormal de material dentro do domínio.

No capítulo seguinte são apresentados os resultados de otimização com e sem a utilização desse parâmetro, de modo a realizar um comparativo e demonstrar a sua influência.

3.4 Interpretação da topologia e reanálise estrutural

Após a convergência do algoritmo de otimização é necessário interpretar a topologia obtida, de forma a definir o modelo de geometria do mecanismo. Essa interpretação é realizada através da observação da topologia formada pela concentração dos elementos de maiores densidades. Caso os resultados obtidos não apresentem uma geometria muito definida deve-se refazer o processo de otimização, com ajustes nos parâmetros utilizados. Uma vez definida a geometria do mecanismo, através da aplicação de um fator de corte de densidades, deve-se refazer as análises de elementos finos, tensões e deslocamentos, para determinar se a topologia obtida ainda atende aos requisitos do projeto inicial.

Figura 24 - Fluxograma da reanálise aplicada ao projeto do mecanismo inversor



Fonte: Autor (2022)

A reanálise é realizada pois ao definir o valor de corte de densidade todos os elementos com a densidade abaixo desse limite são removidos do domínio. Os

demais elementos passam a ter uma densidade unitária, não havendo assim na estrutura valores intermediários de densidades. Devido a essas características o MOT é considerado um problema de presença de material ou vazio na estrutura, pois, no final da interpretação dos seus resultados a topologia obtida não possui densidades intermediárias. O processo de reanálise aqui adotado é apresentado em forma de um fluxograma conforme a Figura 24.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com a otimização topológica de um inversor de deslocamento flexível. Todos os dados e análises foram gerados através do *software Altair HyperWorks Student*, em um computador pessoal com processador Intel (R) Core (TM) i5-3210M, de 2.50GHz GHz e 6 GB de memória RAM, usando o sistema operacional Windows 10 (*Build 9200*).

As Figuras 25 e 26 se referem às análises das tensões internas e deslocamentos, respectivamente, que domínio inicial está sujeito devido às forças e restrições aplicadas sob ele.

Figura 25 - Tensões internas do domínio inicial



Fonte: Autor (2022)

Figura 26 - Deslocamentos do domínio inicial



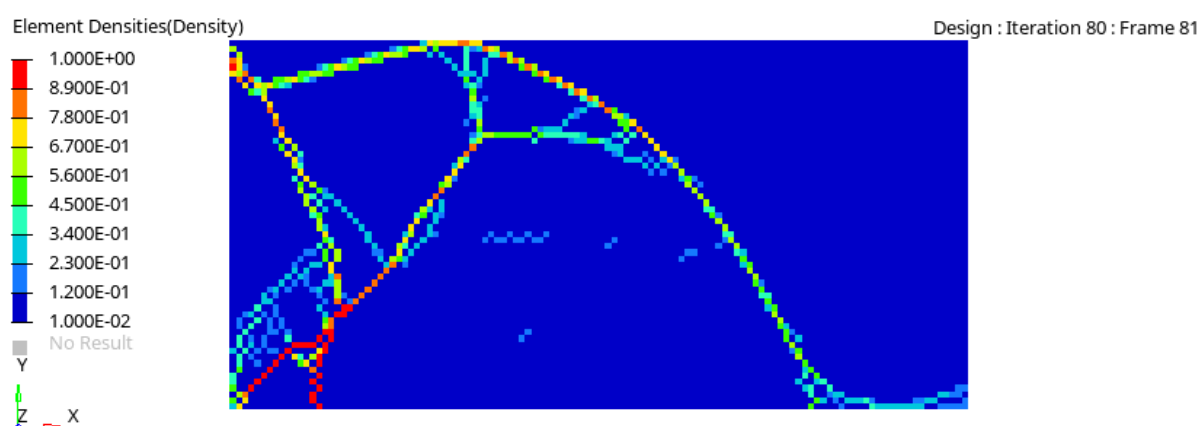
Fonte: Autor (2022)

Essa avaliação, antes da etapa de otimização, possui o intuito de verificar os pontos onde ocorrem os maiores deslocamentos e tensões, além de permitir determinar se o domínio inicial suporta as cargas aplicadas nele sem apresentar nenhuma falha. Para esse domínio a maior tensão interna é de 14,81 MPa e o

deslocamento máximo é de 0,045 mm. Espera-se que durante o processo de otimização, nas regiões onde ocorre as maiores tensões, se concentre uma quantidade maior de elementos com grandes densidades. Isso ocorre pois há uma maior exigência estrutural nessas localidades.

Sem a utilização do parâmetro *minimum member size* a convergência do processo de otimização se dá com 80 iterações, sem violação percentual de restrição e durando 3 minutos e 57 segundos para sua total execução. Como previsto, as regiões com maiores tensões possuem uma concentração maior de elementos com grandes densidades.

Figura 27 - Topologia obtida para o inversor de deslocamento sem a utilização do parâmetro *minimum member size*



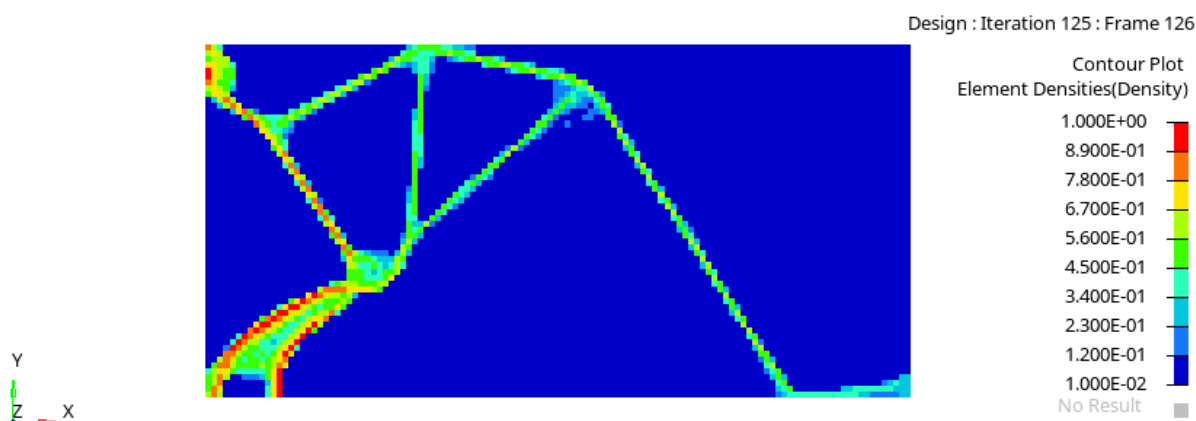
Fonte: Autor (2022)

O resultado apresentado na Figura 27 permite de certa forma identificar uma geometria, porém, devido a existência de regiões com elementos de baixa densidade, mesclados a outros de maior densidade, o resultado mostrado é de difícil reprodução física, dificultando até definir um valor de corte de densidade.

A convergência do processo de otimização com o parâmetro *minimum member size* ocorre em 125 iterações, com uma máxima violação percentual de restrição de 0,412% e gastando 6 minutos e 15 segundos para sua total execução. Novamente as regiões com maiores tensões possuem uma concentração maior de elementos com grandes densidades. A Figura 28 permite identificar uma geometria definida, possibilitando definir mais facilmente um valor de corte de densidade. A introdução do parâmetro *minimum member size* forçou o processo de otimização

topológica a criar regiões com menores variações de densidades, o que resultou, nesse caso, uma topologia mais definida. Porém, a utilização desse recurso possui influência direta no volume mínimo necessário da estrutura, além de aumentar o custo computacional.

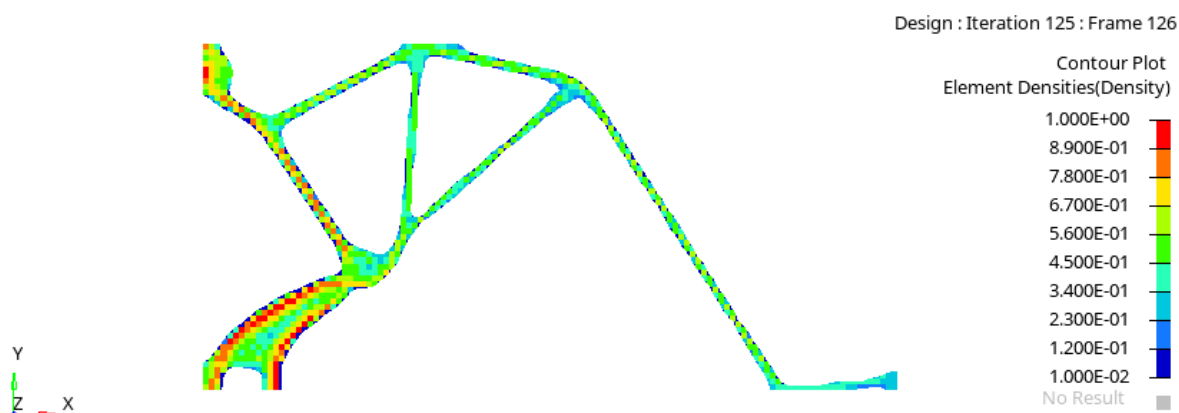
Figura 28 - Topologia obtida para o inversor de deslocamento com a utilização do parâmetro minimum member size



Fonte: Autor (2022)

Aplicado o valor de corte de 0,25 nas densidades é obtida a geometria da Figura 29. Dessa forma, todos os elementos com densidade inferior a 0,25 são desconsiderados e os demais elementos restantes são interpretados como densidade unitária.

Figura 29 - Topologia do inversor de deslocamento, com a utilização do parâmetro minimum member size e fator de corte de densidades de 0,25



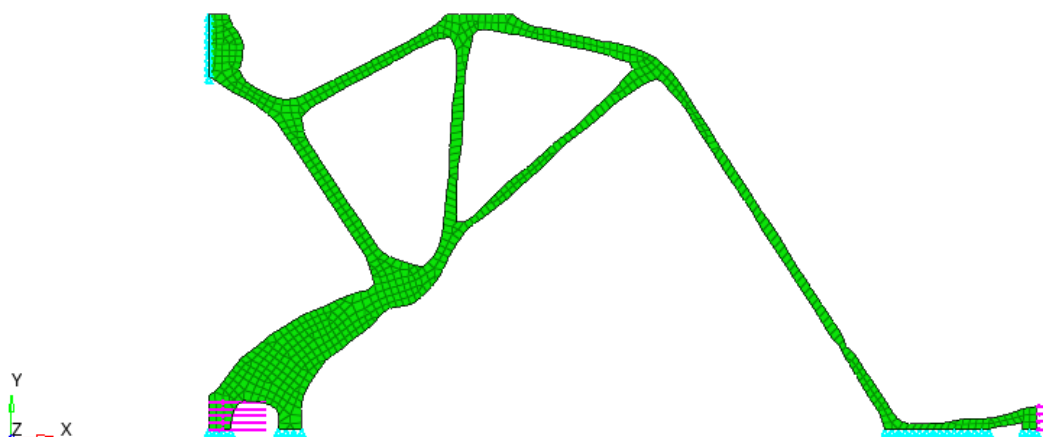
Fonte: Autor (2022)

A remoção de elementos com densidade inferior ao valor de corte, e o aumento dessa propriedade nos demais elementos, possuem grande influência na

nova estrutura gerada, podendo esta não mais atender os critérios iniciais da otimização. Por esse motivo é necessário refazer as análises de tensões e deslocamentos, de modo a definir se a nova estrutura ainda atende os requisitos definidos para o projeto. Com auxílio da função *OSSmooth*, do próprio *software Altair HyperWorks*, é gerado a topologia a ser aplicada a reanálise estrutural. É possível que nesse processo de exportação seja necessário reaplicar novamente a malha de elementos finitos, as forças e restrições. Isso ocorre devido às distorções que as geometrias dos elementos sofrem durante o processo de otimização, além da remoção de elementos a partir do valor de corte. Para o novo domínio todos os nós externos do canto superior esquerdo são restringidos nas direções horizontal e vertical.

A nova topologia da reanálise, Figura 30, possui o domínio discretizado numa malha com 1026 nós e 760 elementos finitos mistos (elementos quadrados de 4 nós e triângulos de 3 nós). O comprimento de cada elemento é de 0,5 mm. O volume inicial do domínio é de $2,061 \times 10^3 \text{ mm}^3$.

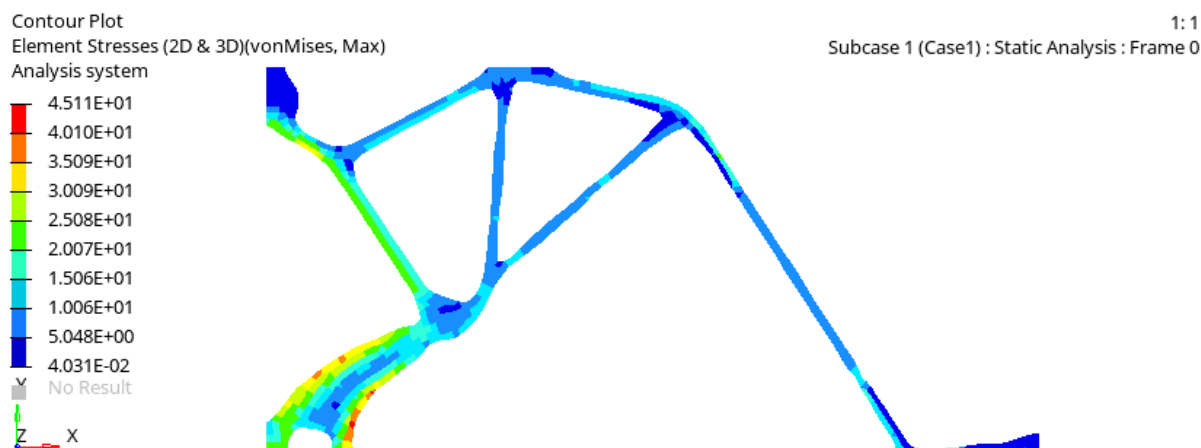
Figura 30 - Topologia do inversor de deslocamento para reanálise das tensões e deslocamentos



Fonte: Autor (2022)

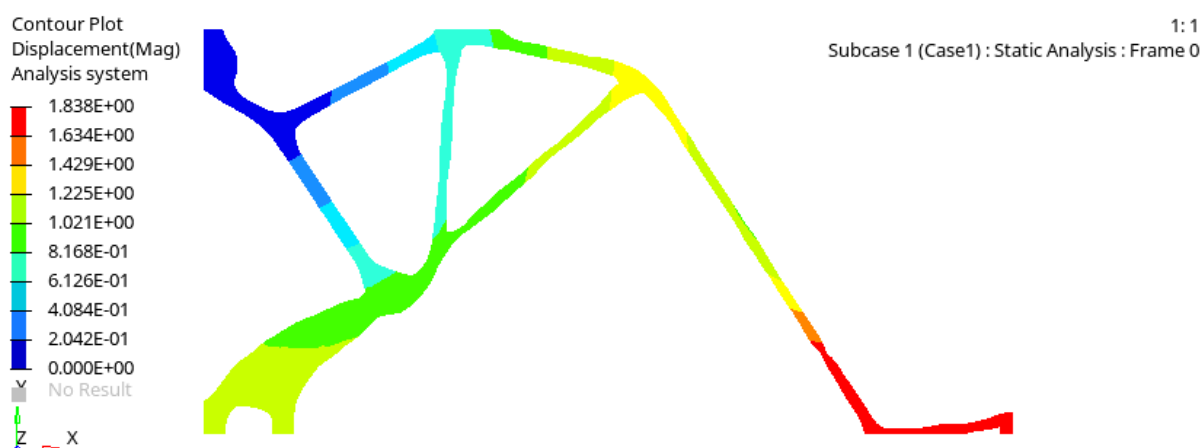
As Figuras 31 e 32 se referem a análise das tensões internas e descolamentos, respectivamente, que o novo domínio está sujeito devido às forças e restrições aplicadas sob ele. A máxima tensão no mecanismo é de 45,11 MPa, o que atende a condição de que a tensão máxima em um elemento deve ser menor que 90 MPa. O máximo deslocamento encontrado é de 1,83 mm, e ocorre nos elementos onde é aplicado o carregamento Q_B , violando a condição mínima de 2 mm para essa região.

Figura 31 - Tensões internas do novo domínio após aplicar o filtro de corte de densidades de 0,25



Fonte: Autor (2022)

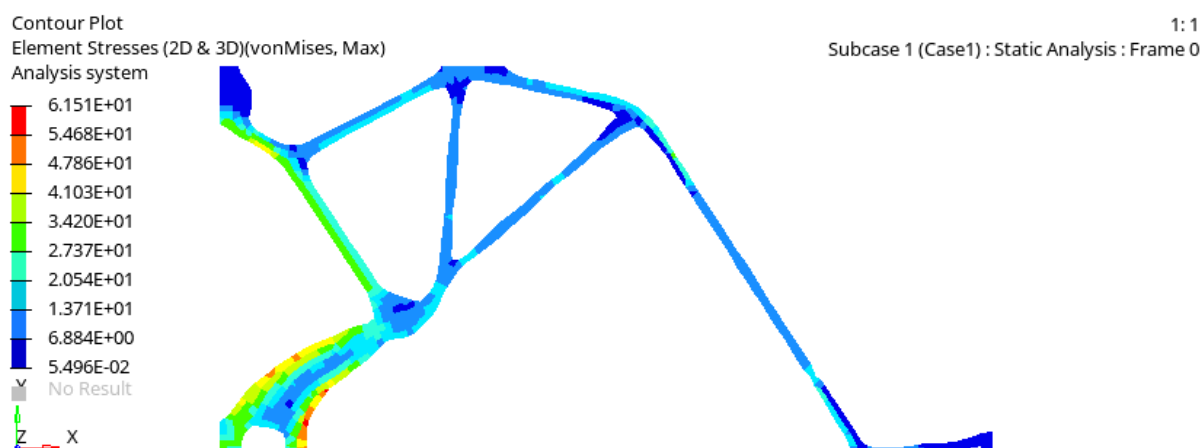
Figura 32 - Deslocamento do novo domínio após aplicar o filtro de corte de densidades de 0,25



Fonte: Autor (2022)

Como a tensão máxima na nova topologia é menor que 90 MPa, é adotado a estratégia de diminuir a espessura do componente, de modo a compensar o aumento da densidade na etapa de interpretação da geometria otimizada. A espessura do inversor é reduzida de 15 mm para 11 mm, e novamente é realizada a análise das tensões e das deformações.

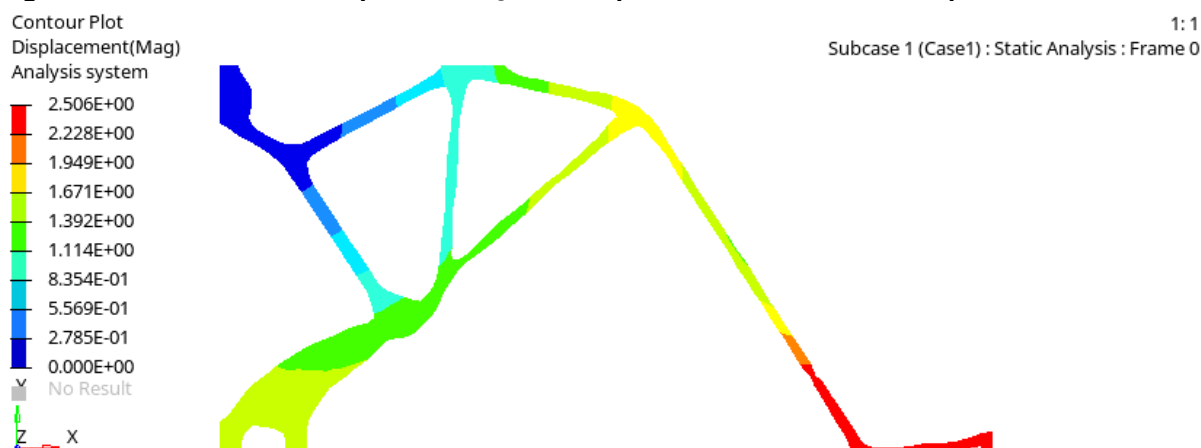
Figura 33 - Tensões internas após a redução da espessura do novo domínio para 11 mm



Fonte: Autor (2022)

Com a diminuição da espessura a máxima tensão passa a ser 61,15 MPa, Figura 33, e o deslocamento máximo é de 2,50 mm, Figura 34. Dessa forma os resultados obtidos atendem a todas as exigências iniciais do projeto do mecanismo inversor.

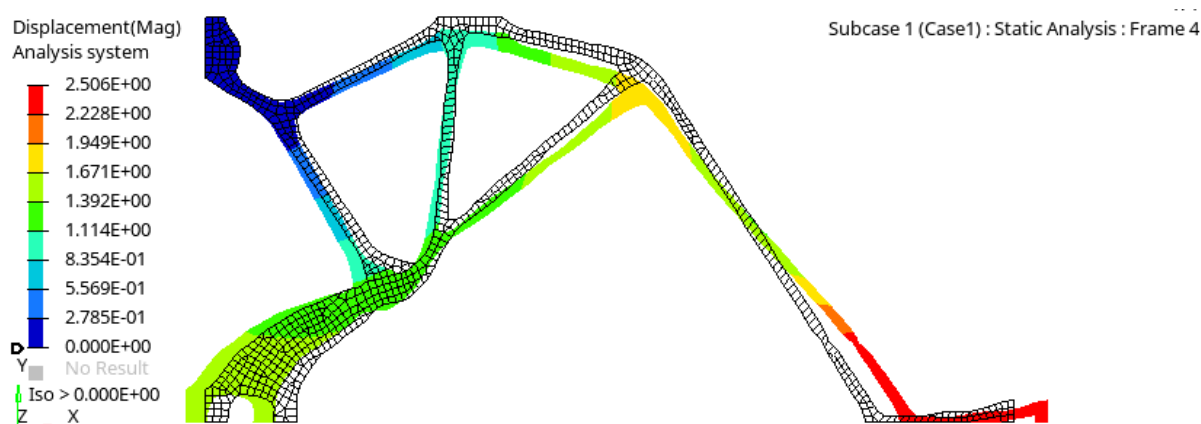
Figura 34 - Deslocamentos após a redução da espessura do novo domínio para 11 mm



Fonte: Autor (2022)

A Figura 35 permite visualizar o deslocamento máximo realizado pelo mecanismo, onde os contornos dos elementos em preto se referem a estrutura no estado inicial, ou seja, antes de qualquer deformação. A topologia obtida possui uma semelhança com a Figura 19.b, essa similaridade aponta uma coerência dos resultados apresentados neste presente trabalho.

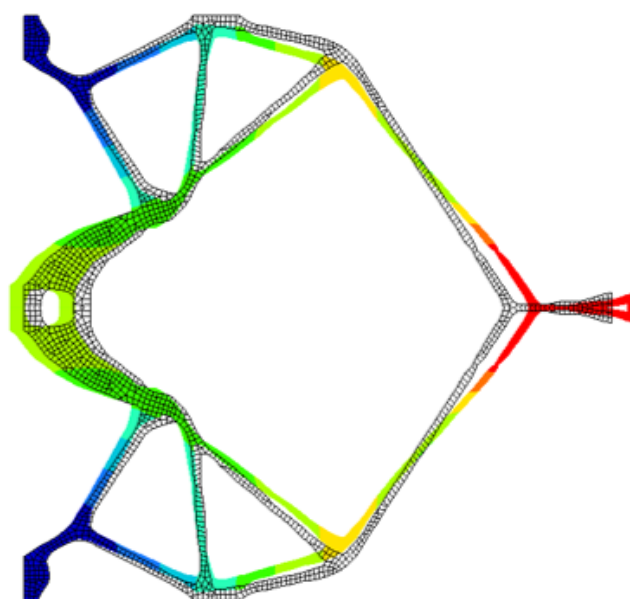
Figura 35 – Comparativo do estado inicial e final de deslocamento após a redução da espessura do novo domínio para 11 mm



Fonte: Autor (2022)

Após constatar com todas as análises que a nova geometria gerada pelo processo de otimização topológica, e redução da espessura do mecanismo para 11 mm, atendem todos os requisitos do projeto, é finalmente modelado a topologia completa do problema inicial. Espelhando os resultados da parte superior do domínio, em relação ao eixo horizontal, é formado a geometria final do inversor de deslocamentos.

Figura 36 - Comparativo do estado inicial e final de deslocamento do mecanismo inversor para o domínio completo



Fonte: Autor (2022)

Novamente é apresentado, Figura 36, o deslocamento máximo realizado pelo mecanismo, porém, dessa vez com a geometria completa. Os contornos dos elementos em preto se referem a estrutura no estado inicial, ou seja, antes de qualquer deformação. É possível notar uma similaridade entre as Figuras 36 e 20, de modo a sugerir que o resultado da otimização de um mecanismo flexível pode auxiliar no projeto desse mesmo mecanismo só que rígido.

5 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo mostrar o processo de otimização topológica aplicada ao projeto de um mecanismo flexível de baixa complexidade, com auxílio de um software de CAE (Computer Aided Engineering), sendo utilizado para essa finalidade o *Altair HyperWorks Student*. O estudo de caso é aplicado ao projeto de um inversor de deslocamento flexível, de modo a apresentar todas as análises, etapas e dificuldades envolvidas na otimização topológica deste mecanismo. É demonstrado também a influência do parâmetro de controle de *minimum member size* (tamanho mínimo do membro) nos resultados da otimização, tempo de execução, quantidade de iterações e aumento da necessidade de capacidade de processamento do hardware.

Os resultados obtidos com a otimização do mecanismo inversor atenderam a todas exigências iniciais do projeto, porém, fica notório a dificuldade em fabricar um componente onde o seu deslocamento depende da flexibilidade do seu corpo, ao mesmo tempo que é necessário uma determinada rigidez para suportar os esforços mecânicos que atuam sobre ele.

A consideração das tensões é fundamental para o projeto de mecanismos flexíveis, esse parâmetro ajuda evitar problemas relacionados à falha por fadiga desses dispositivos. Com os resultados aqui apresentados é perceptível que mesmo com deslocamentos de baixa grandeza, existem regiões do mecanismo com tensões mais elevadas, o que torna essas localidades susceptíveis a falhas mecânicas por fadiga.

A incorporação de parâmetros, como *minimum member size*, requerem um aumento considerável de custo computacional. Outro ponto negativo é que esse parâmetro força um volume maior da solução otimizada, sendo sempre válido avaliar a necessidade ou não da sua utilização. Apesar dos pontos negativos, a utilização do parâmetro *minimum member size* possibilitou a obtenção de uma geometria mais definida e com pequenas regiões de instabilidades.

Como sugestões de temas futuros, é aqui indicado a aplicação da otimização topológica ao projeto de mecanismos flexíveis que atuem com grandes deslocamentos, além do desenvolvimento desses dispositivos envolvendo múltiplas entradas e saídas, de forma a permitir a execução de mais de uma função com um único mecanismo.

REFERÊNCIAS

ANANTHASURESH, G. K.; KOTA, S.; GIANCHANDANI, Y. A methodical approach to the design of compliant micromechanisms. **SOLID-STATE SENSOR AND ACTUATOR WORKSHOP**, 1994. p. 189–192, 1994.

ARORA, J. S. **Optimization of Structural and Mechanical Systems**. 2 ed. Iowa, World Scientific, 2007.

BENDSOE, M. P., KIKUCHI, N. **Generating optimal topologies in structural design using homogenization method**. **Computer Methods in Applied Mechanics**, 1988. v. 71, n. 2, p. 197-224, 1988.

BENDSOE, M. P. **Optimal shape design as a material distribution problem**. **Structural Optimization**, 1989. v. 1, p. 192-202, 1989.

BENDSOE, M. P., Kirsch, U., 1994, **Optimization of Structural Topology, Shape and Material**. Springer-Verlag, Germany, Berlin, Heidelberg.

BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. Springer-Verlag, 2003.

BUSCH-VISHNIAC, I. J. **Electromechanical Sensors and Actuators**. Springer Verlag, 1998.

CARDOSO, E. L.; FONSECA, J. S. **Intermediate density reduction and complexity control in the topology optimization**. In: 20TH IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE99), 1999.

CARDOSO, E. L.; FONSECA, J. S. **Strain energy maximization approach to the design of fully compliant mechanisms using topology optimization**. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2004. v. 1, p. 263-275, 2004.

CHENG, T.; OLHOFF, N. **An investigation concerning optimal design of solid elastic plates**. **International Journal of Solid Structures**, 1981. v. 17, p. 305-323, 1981.

DÍAZ, A. R.; SIGMUND, O. **Checkerboard patterns in layout optimization**. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1995. v. 10, p. 40-45, 1995.

FRECKER, M. I.; KIKUCHI, N.; KOTA, S. **Optimal synthesis of compliant mechanisms to satisfy kinematic and structural requirements - preliminary results**. In: PROCEEDINGS OF THE 1996 ASME DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES AND COMPUTERS IN ENGINEERING CONFERENCE, 1996. p. 177-192.

HOWELL, L.L. **Compliant Mechanisms**. Nova York: John Wiley & Sons, Inc. 2001.

LIMA, C. R. **Projeto de Mecanismos Flexíveis Usando o Método de Otimização Topológica**. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecatrônica, São Paulo, 2002.

LOPES, C. G. **Síntese de mecanismos flexíveis com restrição em tensão e otimização topológica de estruturas sujeitas a contato e atrito**. 2017. Tese (Doutorado em Ciências) - Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Rio de Janeiro, 2017.

MENEGHELLI, L. R. **Projeto de Mecanismos Flexíveis com Restrição de Tensões Utilizando o Método da Otimização Topológica**. 2013. 85 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC. Joinville, 2013.

MICHELL, A. G. M. **The limits of economy of material in frame structures**. Philosophical Magazine, 1904. v. 6, n. 8, p. 589-597, 1904.

NISHIWAKI, S. et al. **Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998. v. 42, p. 535-559, 1998.

ROZVANY, G. I. N.; ADIDAM, S. **Rectangular grillage of least weight**. J. Eng. Mch. ASCE, 1972. v. 98, p. 1337-1352, 1972.

SIGMUND, O. **Design of Material Structures Using Topology Optimization**. Tese (PhD) - Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, Denmark, 1994.

SIGMUND, O. **On the design of compliant mechanisms using topology optimization**. Mechanics of Structures and Machines, 1997. v. 25, p. 495-526, 1997.

SIGMUND, O. **Morphology-based black and white filters for topology optimization**. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2007. v. 33, p. 401-424, 2007.

SOUZA, R. M. **O problema dos elementos finitos aplicado a condução de calor**. Material Didático. Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia, Universidade Federal do Pará, Belém, 2003. p. 1-40, 2003.