

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
CÂMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO  
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

LUCAS HENRIQUE SALAME DE ANDRADE

TÉCNICAS DE CONTROLE ROBUSTO MISTO  $H_2/H_\infty$  APLICADAS A UM  
SISTEMA MULTIVARIÁVEL NÃO-LINEAR

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

**LUCAS HENRIQUE SALAME DE ANDRADE**

**TÉCNICAS DE CONTROLE ROBUSTO MISTO  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  APLICADAS A UM SISTEMA MULTIVARIÁVEL NÃO-LINEAR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Mestre em Engenharia Elétrica”.

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari

**CORNÉLIO PROCÓPIO**  
**2016**

---

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

---

A553 Andrade, Lucas Henrique Salame de  
Técnicas de controle robusto misto  $H_2/H_\infty$  aplicadas a um sistema multivariável não-linear /  
Lucas Henrique Salame de Andrade. – 2016.  
64 f. : il. color. ; 30 cm

Orientador: Cristiano Marcos Agulhari.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-  
graduação em Engenharia Elétrica. Cornélio Procópio, 2016.  
Bibliografia: p. 60-64.

1. Sistemas não-lineares. 2. Teoria do controle. 3. Software de aplicação - Desenvolvimento. I.  
Agulhari, Cristiano Marcos, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD (22. ed.) 621.3



## TERMO DE APROVAÇÃO

Título da Dissertação Nº 029:

**“Técnicas de Controle Robusto Misto  $H_2 / H_\infty$  Aplicadas a um Sistema Multivariável Não-Linear”.**

por

**Lucas Henrique Salame de Andrade**

Orientador: **Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari**

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA – Área de Concentração: Sistemas Eletrônicos Industriais, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – PPGEE – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Câmpus Cornélio Procópio, às **10 horas** do dia **25 de maio de 2016**. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos professores:

---

Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari  
(Presidente)

---

Prof. Dr. Bruno Augusto Angélico  
(USP)

---

Prof. Dr. Alessandro do Nascimento Vargas  
(UTFPR-CP)

Visto da coordenação:

---

Prof. Dr. Alessandro do Nascimento Vargas  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa”

## RESUMO

ANDRADE, L. H. S. de. **TÉCNICAS DE CONTROLE ROBUSTO MISTO  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  APLICADAS A UM SISTEMA MULTIVARIÁVEL NÃO-LINEAR**. 2016. 64 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

Este trabalho consiste na investigação, síntese e validação prática de um sistema de controle robusto baseado na minimização das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , por meio da utilização de desigualdades matriciais lineares, para a estabilização de um processo multivariável. Propõe-se a utilização de um sistema não-linear com duas entradas e duas saídas, que consistem no controle de variáveis de temperatura e nível de fluido em um reservatório. Serão apresentados os principais aspectos estruturais e tecnológicos do sistema a ser utilizado, assim como os fundamentos de estratégias de controle robusto moderno. As estruturas de controle serão implementadas por meio do controlador programável para automação CompactRIO, em conjunto com o software de desenvolvimento LabVIEW.

**Palavras-chave:** Sistemas Multivariáveis, Controle Linear, Controle Moderno, LabVIEW, CompactRIO

## ABSTRACT

ANDRADE, L. H. S. de. **ROBUST MIXED  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  CONTROL TECHNIQUES APPLIED TO A NONLINEAR MULTIVARIABLE SYSTEM.** 2016. 64 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procopio, 2016.

This work consists of the investigation, synthesis and practical validation of a robust control system based on minimization of  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  norms, using linear matrix inequalities, for stabilization of a multivariable process. A study case on a nonlinear system with two inputs and two outputs is proposed, which consists of the control of temperature variables and fluid level in a reservoir. The main structural and system technology to be used and the fundamentals of modern control strategies will be presented. Control structures will be implemented by the programmable automation controller CompactRIO, together with LabVIEW software development.

**Keywords:** Multivariable Systems, Linear Control, Modern Control, LabVIEW, CompactRIO

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Esquemático do sistema. ....	12
FIGURA 2	– Sistema de controle com perturbação externa. ....	17
FIGURA 3	– Diagrama de blocos de um sistema de controle com realimentação de estados e integrador. ....	20
FIGURA 4	– Diagrama de blocos de um sistema de controle anti- <i>windup</i> . ....	21
FIGURA 5	– Configuração da malha multivariável. ....	22
FIGURA 6	– Programação em diagrama de blocos. ....	23
FIGURA 7	– Estrutura interna do CompactRIO. ....	24
FIGURA 8	– Vazão medida em função da tensão de entrada da Baf. ....	26
FIGURA 9	– Vazão medida em função da tensão de entrada da Baq. ....	27
FIGURA 10	– Vazões medida e aproximada em função da tensão de entrada da Baf. ....	27
FIGURA 11	– Vazões medida e aproximada em função da tensão de entrada da Baq. ....	27
FIGURA 12	– Identificação da constante $C_v$ . ....	28
FIGURA 13	– Degrau de nível - Baf. ....	29
FIGURA 14	– Degrau de temperatura - Baf. ....	29
FIGURA 15	– Degrau de nível - Baq. ....	30
FIGURA 16	– Degrau de temperatura - Baq. ....	30
FIGURA 17	– Simulação do sistema de controle linear. ....	38
FIGURA 18	– Simulação do sistema de controle misto. ....	45
FIGURA 19	– Ensaio 1 – Controlador linear. ....	47
FIGURA 20	– Ensaio 1 – Controlador P0. ....	48
FIGURA 21	– Ensaio 1 – Controlador P1. ....	48
FIGURA 22	– Ensaio 1 – Controlador P2. ....	49
FIGURA 23	– Ensaio 1 – Controlador P3. ....	49
FIGURA 24	– Ensaio 2 – Controlador linear. ....	50
FIGURA 25	– Ensaio 2 – Controlador P0. ....	51
FIGURA 26	– Ensaio 2 – Controlador P1. ....	51
FIGURA 27	– Ensaio 2 – Controlador P2. ....	52
FIGURA 28	– Ensaio 2 – Controlador P3. ....	52
FIGURA 29	– Ensaio 3 – Controlador linear. ....	53
FIGURA 30	– Ensaio 3 – Controlador P0. ....	53
FIGURA 31	– Ensaio 3 – Controlador P1. ....	54
FIGURA 32	– Ensaio 3 – Controlador P2. ....	54
FIGURA 33	– Ensaio 3 – Controlador P3. ....	55
FIGURA 34	– Ensaio 4 – Controlador linear. ....	55
FIGURA 35	– Ensaio 4 – Controlador P0. ....	56
FIGURA 36	– Ensaio 4 – Controlador P1. ....	56
FIGURA 37	– Ensaio 4 – Controlador P2. ....	57
FIGURA 38	– Ensaio 4 – Controlador P3. ....	57

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Ângulos de inclinação das retas de aproximação da curva Baf. ....	25
TABELA 2	– Ângulos de inclinação das retas de aproximação da curva - Baq. ....	26
TABELA 3	– Vazão - Baf .....	26
TABELA 4	– Vazão - Baq .....	26
TABELA 5	– Valores mínimos de $\gamma$ para $\xi = 1$ .....	43
TABELA 6	– Valores de máximos sobressinais e ITAE para o Ensaio 1. ....	50
TABELA 7	– Valores de máximos sobressinais e ITAE para o Ensaio 2. ....	51
TABELA 8	– Valores de máximos sobressinais e ITAE para o Ensaio 3. ....	54
TABELA 9	– Valores de máximos sobressinais e ITAE para o Ensaio 4. ....	57



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>7</b>
1.1 MOTIVAÇÃO	7
1.2 OBJETIVOS	9
1.2.1 Objetivo Geral	9
1.2.2 Objetivos Específicos	9
1.3 JUSTIFICATIVA	10
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	10
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>11</b>
2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA EM ESPAÇOS DE ESTADOS	11
2.1.1 Modelo da dinâmica de nível	11
2.1.2 Modelo da dinâmica de temperatura	13
2.2 LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES	13
2.3 SISTEMAS LPV	14
2.4 ESTABILIDADE QUADRÁTICA	15
2.5 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES	16
2.6 NORMAS DE SISTEMAS	17
2.6.1 Norma $\mathcal{H}_2$	18
2.6.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$	19
2.7 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	19
<b>3 DESCRIÇÃO DO SISTEMA</b>	<b>22</b>
3.1 PLANTA INDUSTRIAL DIDÁTICA	22
3.2 LABVIEW	23
3.3 COMPACTRIO	23
<b>4 IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA</b>	<b>25</b>
4.1 IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA	25
4.2 MODELAGEM LPV	30
<b>5 SÍNTESE DOS CONTROLADORES</b>	<b>34</b>
5.1 SISTEMA DE CONTROLE LINEAR $\mathcal{H}_\infty$	34
5.2 SISTEMA DE CONTROLE ROBUSTO MISTO $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	38
<b>6 RESULTADOS FINAIS</b>	<b>46</b>
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>58</b>
7.1 CONTINUIDADE DO TRABALHO	59
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>60</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentada a motivação para se desenvolver e consolidar o trabalho proposto, os objetivos que servirão como forma de elucidar o foco pretendido com a conclusão desta investigação e os fatores que justificam sua relevância e elaboração.

Ao término deste capítulo é apresentada a organização textual do manuscrito, com um breve resumo do que será abordado nos capítulos posteriores.

### 1.1 MOTIVAÇÃO

Hoje em dia, são frequentemente encontrados em plantas industriais processos nos quais mais de uma variável deve ser controlada, isto é, processos que apresentam duas ou mais variáveis de entrada e de saída, denominados como sistemas multivariáveis (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007). Tais processos podem ser divididos em lineares, que admitem o princípio da superposição, o que traz diversas ferramentas para análise dos mesmos como função de transferência e resposta em frequência, e sistemas não-lineares, em que não é válido o princípio da superposição, o que dificulta a análise dos mesmos, pois restringe as ferramentas que podem ser utilizadas para este propósito (KHALIL; GRIZZLE, 2002; LATHI, 2009).

O comportamento de um processo linear pode ser observado por características da resposta quando o mesmo é submetido a uma excitação na entrada. No entanto, muitas malhas apresentam fatores como a presença de ruídos, falhas e incerteza nos parâmetros da sua dinâmica de operação, que dificultam esta observação e, conseqüentemente, a identificação do modelo matemático estimado do processo (NELLES, 2013).

De acordo com Aguirre (2007), a referida situação de imprecisão no modelo do processo implica no aumento da complexidade no procedimento de projetar o controlador para o sistema. Em Ogata, Maya e Leonardi (2010), afirma-se que um controlador mal projetado pode levar o sistema a situações de operação não admissíveis, ou até à instabilidade.

Neste sentido, a aplicação de um sistema de controle a um processo tem o objetivo de atuar de forma eficaz para controlar o comportamento de uma determinada variável. Este controle pode ser em virtude de um ponto de operação desejado ou para satisfazer um conjunto de parâmetros observados na malha a ser controlada (OGATA; MAYA; LEONARDI, 2010).

Para a classificação dos sistemas a serem controlados, além da linearidade, deve-se levar em conta o número de entradas e saídas do processo. As seguintes classificações são possíveis:

- *Single-Input and Single-Output* (SISO) : única entrada e única saída;
- *Multiple-Input and Single-Output* (MISO) : múltiplas entradas e única saída;
- *Single-Input and Multiple-Output* (SIMO) : única entrada e múltiplas saídas;
- *Multiple-Input and Multiple-Output* (MIMO): múltiplas entradas e múltiplas saídas.

Muitas técnicas de identificação de sistemas MIMO são consideradas na literatura, tais como em Albertos e Sala (2004), Cornieles et al. (2006), Skogestad e Postlethwaite (2007). Estas técnicas são baseadas em procedimentos que tendem a diminuir a interação entre as variáveis controladas, de forma a estruturar subsistemas do tipo SISO, resultando na utilização de procedimentos de identificação e projeto de controladores semelhantes aos de sistemas com única entrada e única saída. Uma das formas de controlar tais sistemas consiste na estratégia descentralizada, onde se busca desacoplar a interação entre as malhas de controle e então obter controladores individuais para cada uma delas. Muitas vezes, os próprios controladores individuais são responsáveis também pelo desacoplamento (COSTA et al., 2012; GUERRERO et al., 2013; MAZO; TABUADA, 2011). Entretanto, este tipo de controle apresenta algumas dificuldades de implementação que podem comprometer a eficácia do controlador, como, por exemplo, a presença de erros e incertezas no modelo matemático do sistema (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007).

Porém, como já mencionado, além dos problemas advindos da presença de múltiplas entradas ou saídas, é também importante considerar possíveis não linearidades do sistema. Existem diversas formas de controlar sistemas MIMO não-lineares. Uma das técnicas mais comuns advém da linearização do modelo não-linear em torno de um ponto de operação (CHEN, 1995). Tal técnica tem sido ainda utilizada devido ao fato de que a maioria dos sistemas reais encontrados são não-lineares e que grande parte da teoria de controle foi desenvolvida para sistemas lineares (HAUGHTON; HEYDT, 2013; XIA et al., 2015). Porém, esta técnica possui a desvantagem de não estabilizar o sistema para todos os valores possíveis de saída do mesmo e sim em apenas uma região próxima do ponto de operação para o qual o controlador foi projetado (CHEN, 1995).

Existem também outras técnicas já fundamentadas para a identificação e controle de sistemas MIMO não-lineares como as presentes em Nelles (2013), Sastry (2013), Suykens e Vandewalle (2012). Porém, tratam-se de metodologias com uma complexidade mais elevada e caso não seja escolhida uma forma flexível ou suficiente na obtenção do modelo não-linear, este pode não ter um bom desempenho (NELLES, 2013). Uma boa estratégia para evitar este efeito indesejável é utilizar uma estrutura de modelo não-linear que, em um caso especial, contenha um modelo linear, como por exemplo as técnicas de modelagem LPV (*Linear Parameter Varying*) que possibilitam a representação de sistemas não-lineares como um conjunto parametrizado de sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (LIT) determinados por um vetor de parâmetros conhecidos (CHEN; WEN, 2013).

Em conjunto com o desenvolvimento de técnicas para modelagem de tais sistemas, muitos estudos têm sido realizados a fim de encontrar novas estratégias de controle para fornecer um melhor comportamento dinâmico para sistemas multivariáveis, como os presentes em: Ramli, Hussain e Jan (2016), Tai et al. (2014), onde os autores utilizaram redes neurais, ferramenta alocada na teoria de sistemas inteligentes; e Bououden et al. (2012), Xu, Jiang e Shi (2014), cujo tema abordado é o controle preditivo.

Há também propostas na literatura de outras estratégias de controle para sistemas multivariáveis não-lineares as baseadas na resolução de LMIs (Linear Matrix Inequalities), que, dependendo do conjunto de LMIs utilizado, possuem a vantagem de estabilizar o sistema enquanto otimiza algum critério de desempenho, como minimização da energia de controle ou maximização da robustez aos ruídos (BOYD et al., 1994; GHAOUI; NICU-

LESCU, 2000; ORIHUELA et al., 2014; SADABADI; KARIMI, 2013).

Devido a avanços computacionais em conjunto com os êxitos obtidos em suas aplicações, a técnica de controle via LMIs tem sido bastante aplicada na elaboração de controles robustos, sendo normalmente utilizadas para a minimização das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , que consistem numa forma de medida de determinados sinais de interesse do sistema, como pode ser encontrado em (SHEN et al., 2014; ZHANG; SHI; MEHR, 2012; CHUN; RONG, 2013).

Este trabalho apresenta uma investigação, síntese e validação prática de uma estratégia de controle linear e de uma estratégia de controle robusto misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  baseado em LMIs, com uma análise da influência dos parâmetros das mesmas, relacionados com a estabilidade, no desempenho do controlador. Tais estratégias foram desenvolvidas para o controle e estabilização de um sistema multivariável não-linear, sendo a primeira para um modelo linearizado do sistema e as demais para um modelo LPV do mesmo. Ambas estratégias de controle foram implementadas por meio do PAC (*Programmable Automation Controller*) CompactRIO em conjunto com o *software* de desenvolvimento LabVIEW em uma malha de controle multivariável já existente em uma planta industrial didática modificada da fabricante Festo (ALMEIDA, 2014). Esta malha de controle está estruturada com base em duas variáveis a serem controladas, a saber, nível e temperatura de água em um reservatório pela atuação no fluxo de entrada de água fria (temperatura ambiente) e quente (temperatura controlada), estas últimas caracterizando as entradas do processo.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é obter um modelo matemático e realizar o controle de uma malha multivariável não-linear, que possui duas variáveis de entrada e duas de saída, utilizando técnicas de controle linear e controle moderno baseadas em LMIs, implementadas por meio do PAC CompactRIO em conjunto com o *software* de desenvolvimento LabVIEW.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são divididos da seguinte forma:

- obter o modelo aproximado da dinâmica do sistema multivariável;
- realizar a remodelagem com base em técnicas LPV;
- estudar técnicas de controle linear e moderno, baseadas em LMIs;
- simular, implementar e validar por meio de experimentos práticos as técnicas de controle estudadas;
- comparar os resultados obtidos.

### 1.3 JUSTIFICATIVA

Embora trabalhos já tenham sido desenvolvidos utilizando a malha multivariável de nível e temperatura da planta industrial didática, ainda não foi realizada sua modelagem matemática. Desta forma, esta pesquisa proporcionará a possibilidade de realização de outros estudos a partir do modelo matemático obtido, como a utilização de técnicas de controle moderno, por exemplo, as baseadas na resolução de LMIs e também de métodos de otimização para a sintonia de controladores PID (Proporcional, Integral e Derivativo).

Outra contribuição do trabalho advém da implementação prática de um sistema de controle multivariável, uma vez que aplicações do mesmo geralmente envolvem a validação e análise de desempenho apenas por meio simulações. Sem mencionar o fato de que normalmente as técnicas de controle são mais voltadas para o caso SISO.

### 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica que será a base para o desenvolvimento proposto. São apresentados conceitos de modelagem de sistemas em espaços de estados, linearização de sistemas multivariáveis, sistemas de identificação LPV, conceito de estabilidade quadrática e normas de sistemas, definição de LMIs e controle de sistemas por realimentação de estados com e sem saturação.
- O Capítulo 3 aborda os componentes do sistema multivariável que foi utilizado neste trabalho. São apresentadas a planta industrial didática, a malha multivariável e seu princípio de funcionamento, também são abordados o PAC e o *software* de programação gráfica que foram utilizados para a implementação das estratégias de controle linear e moderno.
- Em seguida, no Capítulo 4, é apresentada as etapas realizadas e os resultados obtidos na identificação do sistema.
- O procedimento de projeto e desenvolvimento dos sistemas de controle está explicado no Capítulo 5.
- No Capítulo 6 estão expostos os resultados experimentais. Análises e comparações foram realizadas a fim de validar a proposta do trabalho.
- As conclusões do trabalho e as propostas para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 7.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentados os principais tópicos da teoria que foi utilizada para a elaboração deste trabalho. Primeiramente, serão apresentados os conceitos básicos sobre modelagem de sistemas em espaços de estados, seguido pela abordagem em linearização de sistemas não lineares, conceitos de estabilidade quadrática, índice de desempenho dado pelas normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , desigualdades matriciais lineares e por ultimo, controle por realimentação de estados sem e com saturação (controle *anti-windup*).

### 2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA EM ESPAÇOS DE ESTADOS

Modelos matemáticos podem ser definidos de muitas formas diferentes, sendo que para a escolha do modelo deve-se levar em conta o sistema que é alvo de interesse. Por exemplo, em problemas de controle ótimo, é vantajosa a representação no espaço de estados (OGATA; MAYA; LEONARDI, 2010). Um modelo tipicamente utilizado em espaços de estados está apresentado nas Equações (1) e (2).

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t)), \quad (2)$$

sendo  $x(t)$  o vetor das variáveis de estado do sistema, que correspondem ao menor conjunto de variáveis que determinam o estado do sistema;  $u(t)$  as variáveis de entrada do sistema;  $y(t)$  as variáveis de saída do sistema; e  $f(x(t), u(t))$  e  $g(x(t), u(t))$  funções advindas do modelo do sistema.

As variáveis de estado do sistema em questão neste trabalho, assim como as variáveis de saída, é o nível e a temperatura de um reservatório (módulo de controle), e as variáveis de entrada são as duas bombas centrífugas, pertencentes à malha multivariável que será melhor detalhada no Capítulo 3.

#### 2.1.1 Modelo da dinâmica de nível

O sistema a ser considerado para a determinação da variável de estado de nível do módulo de controle é mostrado na Figura 1, sendo a variável representada por  $h(t)$ .

Como pode ser observado na Figura 1, o nível depende das vazões de entrada provocadas pela bomba de água fria (Baf) e pela bomba de água quente (Baq) e da vazão de saída do sistema. De acordo com o princípio da conservação de massa, a massa acumulada no módulo de controle é igual à diferença entre a taxa de massa de entrada e a de saída. Segundo Smith e Corripio (1997) esta relação pode ser expressa como

$$\rho f_e(t) - \rho f_s(t) = \rho \frac{dm_t}{dt} \quad (3)$$

$$m_t(t) = \rho S h(t) \quad (4)$$

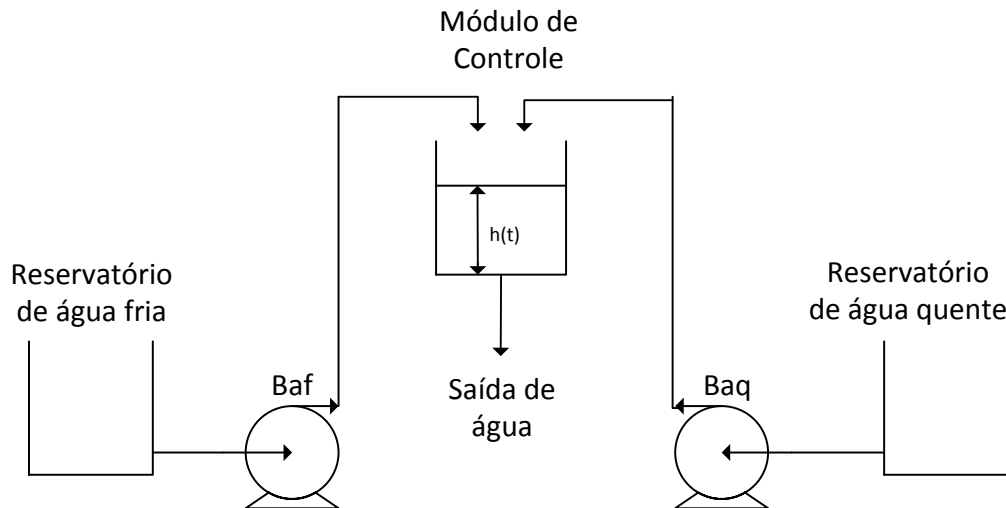


Figura 1 – Esquemático do sistema.

Fonte: Autoria própria

$$f_s(t) = C_v \sqrt{h(t)} \quad (5)$$

Sendo:

$\rho$  a densidade específica do líquido ( $kg/mm^3$ );

$f_e(t)$  a vazão de entrada do sistema ( $mm^3/s$ );

$f_s(t)$  a vazão de saída do sistema ( $mm^3/s$ );

$m_t(t)$  a massa acumulada no sistema;

$S$  a área do módulo de controle ( $mm^2$ );

$C_v$  o coeficiente da válvula ( $mm^2/s$ ) e;

$h(t)$  o nível do módulo de controle ( $mm$ ).

Ainda, segundo Smith e Corripio (1997), para sistemas onde os fluidos de entrada e de saída são os mesmos, com área do reservatório de controle constante a Equação (3) pode ser reescrita conforme a Equação (6).

$$f_e(t) - C_v \sqrt{h(t)} = S \frac{dh}{dt} \quad (6)$$

Como o módulo de nível consiste em duas bombas para entrada e uma válvula de saída de líquido, a Equação (6) pode ser reescrita de acordo com a Equação (7).

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{S} \left( u_{af}(t) + u_{aq}(t) - C_v \sqrt{h(t)} \right) \quad (7)$$

Sendo:

$u_{af}$  a vazão da bomba de água fria em função do tempo ( $mm^3/s$ );

$u_{aq}$  a vazão da bomba de água quente em função do tempo ( $mm^3/s$ ) e;

as demais variáveis como definido anteriormente.

### 2.1.2 Modelo da dinâmica de temperatura

Para a obtenção do modelo matemático da variável de temperatura, foi utilizada a equação de equilíbrio térmico, que pode ser expressa de acordo com a Equação (8) (BERGMAN; INCROPERA; LAVINE, 2011):

$$f_e(t)(T_e - T(t)) = Sh(t) \frac{dT}{dt} \quad (8)$$

Sendo:

$T_e$  a temperatura do fluido de entrada ( $^{\circ}C$ );

$T(t)$  a temperatura do módulo de controle ( $^{\circ}C$ );

E as demais variáveis como definido anteriormente.

Como o sistema tratado neste trabalho possui duas entradas com temperaturas constantes, porém, com fluxos diferentes entre si, a Equação (9) pode ser reescrita como:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{h(t)S} \left( u_{af}(t)(T_{af} - T(t)) + u_{aq}(t)(T_{aq} - T(t)) \right) \quad (9)$$

Sendo:

$T_{af}$  a temperatura fixa do reservatório de água fria ( $^{\circ}C$ );

$T_{aq}$  a temperatura fixa do reservatório de água quente ( $^{\circ}C$ );

## 2.2 LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

A linearização de um sistema não linear consiste na aproximação do comportamento do mesmo em torno de um ponto de equilíbrio, por meio de um sistema equivalente. Esta técnica é bastante utilizada, uma vez que grande parte das teorias de projeto de sistemas de controle foi desenvolvida para sistemas lineares, sendo que a maioria dos sistemas reais são não lineares. A linearização de um sistema modelado conforme Equações (1) e (2), apresentadas na seção anterior, resulta nas Equações (10) e (11) (CHEN, 1995):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (10)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (11)$$

Sendo:

$A$  representa a matriz de estados;

$B$  é a matriz de entrada;

$C$  é a matriz de saída;

$D$  é a matriz de transmissão direta.

Para realizar a linearização de um sistema, o primeiro passo consiste em determinar os pontos de equilíbrio do mesmo, ou seja, os pontos de operação em que as derivadas dos estados do sistema são iguais a zero. Em seguida deve-se determinar as matrizes jacobianas de  $A, B, C$  e  $D$ . A título de elucidar os passos descritos no parágrafo anterior,



considere um sistema formado por duas variáveis de entradas ( $u_1$  e  $u_2$ ) e duas variáveis de estado ( $x_1$  e  $x_2$ ), cujas saídas correspondam a essas variáveis de estado e a matriz de transmissão direta  $D$  é igual zero. A determinação das matrizes do modelo linear deste sistema para um determinado ponto de operação ( $p_1, p_2$ ) é dada pelas Equações (12) - (17).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(x_1, x_2) &= f_1 \\ \dot{x}_2(x_1, x_2) &= f_2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} f_1(p_1, p_2) &= 0 \\ f_2(p_1, p_2) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=p_1, x_2=p_2} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x_1=p_1, x_2=p_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=p_1, x_2=p_2} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x_1=p_1, x_2=p_2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial u_1} \Big|_{x_1=p_1, x_2=p_2} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial u_2} \Big|_{x_1=p_1, x_2=p_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial u_1} \Big|_{x_1=p_1, x_2=p_2} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial u_2} \Big|_{x_1=p_1, x_2=p_2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

### 2.3 SISTEMAS LPV

Sistemas lineares a parâmetros variantes no tempo são denominados como a classe de sistemas com dimensão finita, cujos espaços de estados dependem de um vetor de parâmetros variantes no tempo, onde se assume que os valores deste vetor não são conhecidos com antecedência, porém, podem ser acessados (medidos) em tempo real (SHAMMA, 2012; MARCOS; BALAS, 2004).

Tal técnica foi introduzida em meados de 1988 e foi desenvolvida como uma alternativa para a identificação de sistemas não lineares, dividindo os mesmos em um conjunto parametrizado de sistemas LIT (CHEN; WEN, 2013; SHAMMA, 1988).

Um sistema LPV pode ser descrito por meio das equações a seguir (MOREIRA,

2008):

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \quad (18)$$

$$y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \quad (19)$$

sendo que as matrizes  $A, B, C$  e  $D$  são dependentes do parâmetro  $\theta(t)$  continuamente variante no tempo.

Em geral, o vetor de parâmetros  $\theta(t)$  é caracterizado como exógeno quando a sua dinâmica só depende do tempo e é independente das variáveis internas (estados) do sistema. Quando dependem não só do tempo, mas também de um ou mais estados do sistema, são chamados de endógenos, o que caracteriza um sistema *quasi*-LPV (CHEN; WEN, 2013). Tal definição é mais apropriada para sistemas com esta característica, pois a dependência com relação aos estados do sistema pode resultar numa realimentação não-linear (MARCOS; BALAS, 2004; MOREIRA, 2008).

Um sistema *quasi*-LPV pode ser determinado de acordo com as seguintes equações:

$$\dot{x}(t) = A(\theta_x(t))x(t) + B(\theta_x(t))u(t) \quad (20)$$

$$y(t) = C(\theta_x(t))x(t) + D(\theta_x(t))u(t) \quad (21)$$

sendo  $\theta_x(t)$  o vetor de parâmetros dependente de um ou mais estados do sistema.

Uma das formas de se obter um modelo LPV ou *quasi*-LPV para um determinado sistema não linear é por meio da substituição da não-linearidade do mesmo por um vetor de parâmetros com magnitude e taxa de variação limitados e definidos de acordo a variável do sistema substituída (TÓTH, 2010). Esta foi a técnica utilizada neste trabalho e é melhor explorada na Seção 4.2, onde são dados mais detalhes sobre a substituição realizada, as variáveis substituídas e o modelo do sistema em função dos parâmetros variantes no tempo.

## 2.4 ESTABILIDADE QUADRÁTICA

A estabilidade de um ponto de equilíbrio pode ser determinada utilizando a teoria de Lyapunov. Intuitivamente, a estabilidade de um sistema dinâmico está relacionada com a função de energia deste sistema (função de Lyapunov) sendo que, se esta função é sempre não negativa e decrescente com relação ao tempo, as trajetórias do sistema tendem ao ponto de equilíbrio (KHALIL; GRIZZLE, 2002).

Fazendo uma análise para sistemas lineares invariantes no tempo, a teoria de Lyapunov garante que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável, se existir uma função escalar  $v(x)$  que satisfaça as condições expostas nas Equações (22) e (23) (SILVA et al.,

2009).

$$v(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \in B_x \quad (22)$$

$$\dot{v}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \in B_x \quad (23)$$

onde  $B_x$  caracteriza uma região da vizinhança do ponto de equilíbrio.

A maneira mais fácil de obter uma função de Lyapunov,  $v(x)$ , adequada para representar a estabilidade de um sistema dinâmico é utilizando a classe das funções quadráticas, como a apresentada na Equação (24).

$$v(x) = x'Px \quad (24)$$

onde  $P$  é uma matriz constante, real, positiva definida e simétrica.

A título de exemplo da obtenção de uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de um sistema LTI, considere o sistema apresentado na Equação (25)

$$\dot{x} = Ax, \quad (25)$$

sendo  $x$  os estados do sistema e  $A$  uma matriz constante. Considerando uma função de Lyapunov  $v(x) = x'Px$  e o sistema (25), a expressão  $\dot{v}(x)$  é dada por:

$$\dot{v}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x \quad (26)$$

Então, podemos escrever que:

$$v(x) > 0 \quad \leftrightarrow \quad \exists P = P' > 0 \quad e \quad \dot{v}(x) < 0 \quad \leftrightarrow \quad (A'P + PA) < 0 \quad (27)$$

Logo, uma condição necessária e suficiente para este sistema ser globalmente quadraticamente estável é:

$$\exists P = P' > 0 \quad : \quad (A'P + PA) < 0 \quad (28)$$

A relação acima é conhecida na literatura como inequação de Lyapunov para sistemas lineares e se tornou a primeira motivação documentada para a aplicação de LMIs (AGULHARI, 2013).

## 2.5 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

As LMIs têm sido muito utilizadas em sistemas de controle para a solução de uma grande variedade de problemas de otimização, sendo que, por meio da utilização destas, uma grande quantidade de problemas decorrentes da teoria de sistemas de controle podem ser descritos como um conjunto de LMIs e reduzidos para poucos padrões de otimização convexa ou quasi-convexa (FARHOODI; BEHESHTI, 2008), o que justifica o grande inte-

resse e crescimento na sua utilização (BOYD et al., 1994; GHAOUI; NICULESCU, 2000).

Outro fator que ajudou no crescimento da utilização dessa metodologia é que por ser convexa é possível utilizar diversos pacotes computacionais eficientes para a resolução das mesmas (STURM, 1999; LÖFBERG, 2004).

Genericamente, toda LMI pode ser escrita na forma (BOYD et al., 1994)

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0, \quad (29)$$

sendo  $x \in \mathfrak{R}^n$  as variáveis do problema e  $F_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  matrizes desconhecidas. A LMI (29) é uma condição convexa em  $x$ , ou seja, o conjunto  $x F(x) > 0$  é convexo. A desigualdade (29) pode representar uma ampla variedade de restrições convexas em  $x$ , tais como desigualdades lineares, desigualdades quadráticas, desigualdades na forma matricial e restrições utilizadas em teoria de controle (FREIRE, 2014). Maiores detalhes podem ser obtidos em Oliveira e Peres (2007), Gahinet, Apkarian e Chilali (1996), Dullerud e Paganini (2013).

## 2.6 NORMAS DE SISTEMAS

No desenvolvimento de um sistema de controle um dos principais objetivos que se deseja atingir é o de garantir certas especificações de desempenho. Uma das maneiras mais utilizadas para atender tais especificações é a realização de uma medida de energia de determinados sinais de interesse (TROFINO; COUTINHO; BARBOSA, 2005).

Considere a Figura 2 que ilustra um sistema LIT  $G$ , sob a ação de uma perturbação externa. O modelo do sistema é dado pela Equação (30), sendo  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  o vetor de estados,  $w(t) \in \mathfrak{R}^r$  a entrada exógena e  $z(t) \in \mathfrak{R}^d$  a saída controlada.



Figura 2 – Sistema de controle com perturbação externa.

Fonte: Adaptado de (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007)

$$G(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \end{cases} \quad (30)$$

Para o sistema apresentado na Equação (30) a função de transferência  $G_{wz}(s)$  é dada por:

$$G_{wz}(s) = C_z (sI - A)^{-1} B_w + D_{zw} \quad (31)$$

Assim, o desempenho do sistema depende do valor da relação entre  $w(t)$  e  $z(t)$ , denotada por  $G_{wz}$ , cujo valor pode estar ligado, por exemplo, à robustez do sistema a ruídos ou a alguma medida de energia que se deseja otimizar. Entre as formas existentes para quantificar este valor para sistemas, as mais comuns e utilizadas são as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , que estão respectivamente definidas nas subseções a seguir.

### 2.6.1 Norma $\mathcal{H}_2$

Considere que o sistema apresentado na Figura 2 seja excitado por sinais  $w(t)$  impulsivos, e seja  $z(t)$  a saída controlada. A norma  $\mathcal{H}_2$  do operador  $G_{wz}$  é definida como sendo a energia da resposta ao impulso da entrada  $w(t)$  à saída  $z(t)$ , como apresentado na Definição 1 (PAGANINI; FERON, 1999). Vale ressaltar que esta energia somente será finita se assumirmos que o sistema é estritamente próprio e estável, isto é, a matriz  $A$  é Hurwitz e  $D_{zw} = 0$  (TROFINO; BARBOSA; COUTINHO, 2000; YEDAVALLI, 2014).

**Definição 1** (Norma  $\mathcal{H}_2$ ) A norma  $\mathcal{H}_2$  de um sistema (30), é definida como

$$\|G_{wz}\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} \text{traço}[g(t)'g(t)]dt} \quad (32)$$

onde  $g(t)$  é a resposta impulsiva do sistema (30) sendo que  $A$  é Hurwitz,  $D_{zw} = 0$  e  $g(t) = 0$  para  $-\infty < t < 0$ .

Como a norma  $\mathcal{H}_2$  é também relacionada com a teoria de estabilidade de Lyapunov apresentada na Seção 2.4, é possível calcular a norma  $\|G_{wz}\|_2$  por meio de condições LMI (TROFINO; BARBOSA; COUTINHO, 2000).

Para isto, considere a condição de estabilidade (28) para sistemas LIT reescrita na seguinte maneira:

$$Q = Q' > 0 \quad \exists P = P' > 0 \quad : \quad (A'P + PA) = -Q \quad (33)$$

A solução da expressão (33), conhecida como a equação de Lyapunov para sistemas lineares, é dada por (BLANCHINI; MIANI, 2008):

$$P = \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt \quad (34)$$

Na Definição 2.1, o operador entrada/saída  $G_{wz}(s) = C(sI - A)^{-1}B_w + D_{zw}$  e sua resposta impulsiva é dada por  $g(t) = Ce^{At}B_w(t)$ . Então, podemos escrever que

$$\|G_{wz}\|_2^2 = \int_0^{\infty} \text{traço}[B_w' e^{A't} C' C e^{At} B_w] dt = \text{traço} \left[ B_w' \left( \int_0^{\infty} e^{A't} C' C e^{At} dt \right) B_w \right] \quad (35)$$

Note que o termo  $\int_0^{\infty} e^{A't} C' C e^{At} dt$ , conhecido como Gramiano de Observabilidade, é uma solução para a equação de Lyapunov (33) com  $Q = C' C \geq 0$ . Logo, podemos determinar a norma  $\mathcal{H}_2$  por (HINAMOTO et al., 2002):

$$\|G_{wz}\|_2^2 = \text{traço} \left[ C \left( \int_0^{\infty} e^{At} B_w B_w' e^{A't} dt \right) C' \right] = \text{traço}[C P_c C'] \quad (36)$$

onde  $P_c$  é a solução da equação  $AP_c + P_c A' + B_w B_w' = 0$ .

A determinação da norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser facilmente obtida por meio de um problema de otimização convexa. Por exemplo, considerando o Gramiano de observabilidade, se  $P_0$  satisfaz  $A'P_0 + P_0 A + C' C = 0$  e existe uma matriz  $P = P' > 0 : A'P + PA + C' C < 0$  então  $P > P_0$  e, com a minimização,  $P \rightarrow P_0$ . Portanto, a norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser calculada mediante

a resolução do seguinte problema de otimização na forma de LMI (MACKENROTH, 2013; TROFINO; BARBOSA; COUTINHO, 2000).

$$\|G_{wz}\|_2^2 < \text{traço} [B'PB] \quad : \quad \begin{cases} P = P' > 0 \\ A'P + PA + C'C < 0 \end{cases} \quad (37)$$

### 2.6.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  está associada ao maior ganho que pode existir entre a(s) entrada(s) e a(s) saída(s) de um determinado sistema (AGULHARI, 2013). Considerando o sistema apresentado na Figura 2 cujo índice de desempenho é dado por  $G_{wz}$  sua definição pode ser dada como a seguir:

**Definição 2** (Norma  $\mathcal{H}_\infty$ ) *A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema representado pela Figura 2 é o valor máximo resultante da relação entre a energia dos sinais de saída  $z(t)$  e de entrada  $w(t)$ , para todo  $w(t)$  de energia limitada, ou seja*

$$\|G_{wz}\|_\infty = \max_{w(t) \in L_2} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}, \quad w \neq 0 \quad (38)$$

Tal norma atingiu um grande nível de importância dentro da teoria de controle robusto principalmente devido ao sucesso de sua aplicabilidade como um índice de desempenho na presença de incertezas, para análise e síntese de controle de sistemas lineares invariantes no tempo Freire (2014), Oliveira (2006), Doyle et al. (1989). A norma  $\mathcal{H}_\infty$  é comumente usada como medida de robustez. Suponha que  $w(t)$  seja um sinal de ruído, e  $z(t)$  a saída controlada. Pode-se notar pela Equação (38) que, minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , equivale a minimizar a energia do ruído que afeta a saída controlada. Assim, quanto menor a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , maior a robustez do sistema ao ruído  $w(t)$ .

O Lema 2.1, conhecido por *Bounded Real Lemma*, apresenta uma condição para o cálculo do limitante da norma  $\mathcal{H}_\infty$  para um dado sistema.

**Lema 2.1** (*Bounded Real Lemma*) (BOYD et al., 1994): *O sistema (39) é assintoticamente estável e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é menor que um escalar  $\gamma > 0$  se, e somente se, existir uma matriz  $P = P' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  definida positiva tal que*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C_z'C_z & PB_w + C_z'D_{zw} \\ B_w'P + D_w'C_z & D_{zw}'D_{zw} - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (39)$$

## 2.7 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

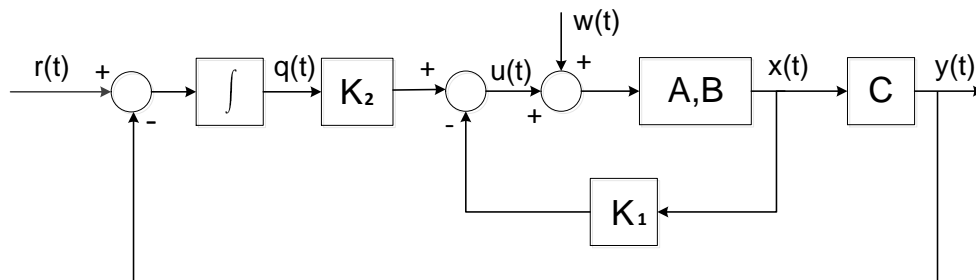
Considere o sistema mostrado na Equação (40):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \end{cases} \quad (40)$$

Sendo  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  o vetor de estados,  $w(t) \in \mathfrak{R}^r$  as perturbações externas,  $z(t) \in \mathfrak{R}^q$  as saídas controladas e  $u(t) \in \mathfrak{R}^p$  as entradas de controle.

Supondo que todos os estados do sistema (40) são mensuráveis e que o sistema é controlável, é possível determinar uma matriz  $K \in \mathfrak{R}^{p \times n}$  de realimentação de estados, tal que a lei de controle  $u = Kx$  seja capaz de estabilizar este sistema.

Uma estratégia de controle por realimentação de estados bastante utilizada para a estabilização de sistemas em que se deseja seguir um sinal de referência e os mesmos estão sujeitos a perturbações externas, é a adição de um termo integrador na estrutura. A Figura 3 ilustra o diagrama de blocos desta estratégia de controle.



**Figura 3 – Diagrama de blocos de um sistema de controle com realimentação de estados e integrador.**  
Fonte: Adaptado de (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007)

Como pode ser observado na Figura 3 neste tipo de estrutura ocorre a adição da matriz de ganhos  $K_q$ . Assim, a matriz de realimentação de estados passa a ser  $K_n = [K_1 \ K_2]$  e  $u = K_1x + K_2q$ . Dessa forma as matrizes do sistema aumentado são definidas pela Equações (41) e (42).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [K_1 \ K_2] \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$y(t) = [C \ 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \quad (42)$$

Em sistemas reais, a entrada de controle  $u(t)$  apresenta limites em sua magnitude, devido a limitações físicas dos atuadores. Esta saturação, se não for tratada, pode causar problemas de desempenho e até levar o sistema à instabilidade (HU; LIN, 2001). Uma maneira de lidar com tal situação é adicionar um bloco anti-*windup* ao sistema de controle. Tal bloco consiste em calcular a diferença entre o sinal de controle  $u(t)$  computado e o sinal de controle  $u_s(t)$  saturado, ponderar esta diferença por um ganho  $E$ , e subtrair o resultado do sinal de referência  $r(t)$ . No caso do presente trabalho, por critério de projeto, tal matriz foi definida como sendo unitária. A Figura 4 mostra a estrutura deste tipo de controle.

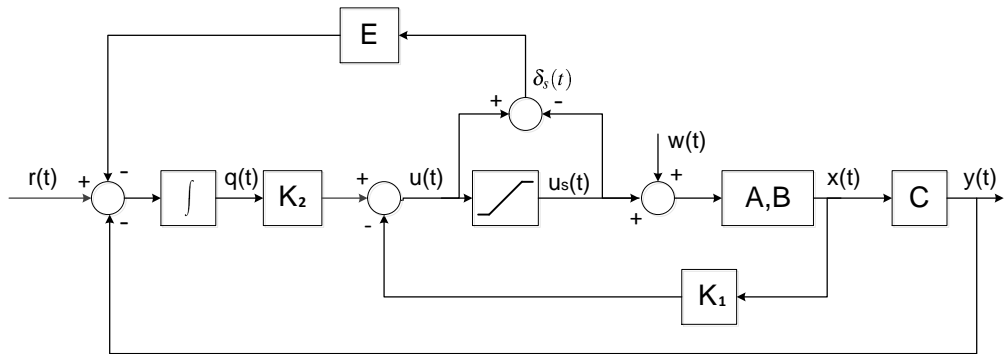


Figura 4 – Diagrama de blocos de um sistema de controle anti-*windup*.

Fonte: Autoria Própria

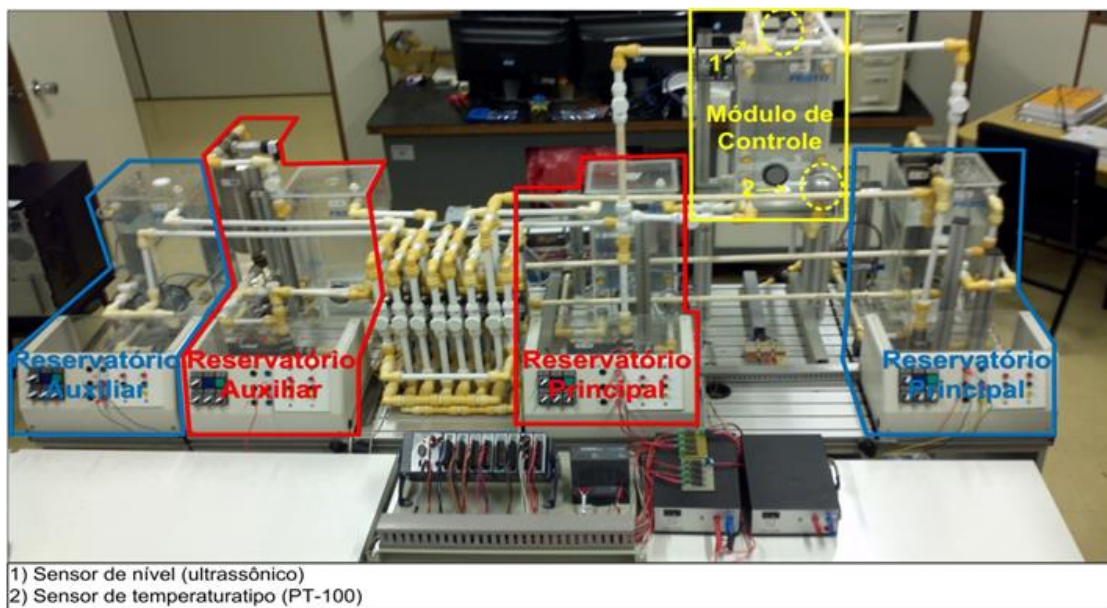


### 3 DESCRIÇÃO DO SISTEMA

Neste capítulo serão abordados os principais componentes pertencentes ao sistema multivariável, bem como os que constituem o sistema que será utilizado para a elaboração e implementação do controle.

#### 3.1 PLANTA INDUSTRIAL DIDÁTICA

Neste trabalho será utilizada uma planta industrial didática da fabricante Festo, cuja estrutura original foi modificada para a configuração de uma malha multivariável de nível e temperatura (ALMEIDA, 2014), conforme apresentado na Figura 5.



**Figura 5 – Configuração da malha multivariável.**

**Fonte: Autoria própria**

Esta malha é formada por cinco reservatórios de água: dois reservatórios de água fria (temperatura ambiente), dois reservatórios de água quente (aquecida a uma temperatura constante) e um módulo de controle, destacados, respectivamente, em azul, vermelho e amarelo na Figura 5.

O módulo de controle é o reservatório onde ocorre o monitoramento das variáveis envolvidas no processo, que possui, para tal finalidade, um sensor de nível do tipo ultrassônico e um sensor de temperatura do tipo PT-100. Os atuadores do sistema (entradas do módulo de controle) estão presentes nos reservatórios principais e consistem em duas bombas centrífugas, responsáveis pelo deslocamento de água destes reservatórios para o módulo de controle.

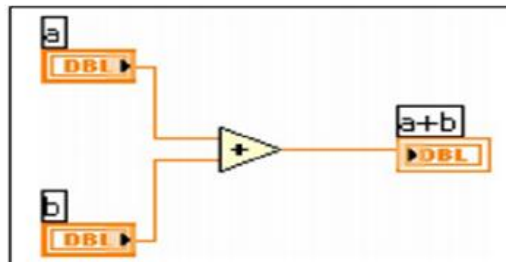
Cada reservatório auxiliar também possui uma bomba centrífuga que realiza o deslocamento de água para os reservatórios principais (reabastecimento automático). Tais bombas possuem apenas dois modos de funcionamento: desligadas ou acionadas com tensão nominal. Vale ressaltar que cada reservatório de água quente possui uma resistên-

cia de aquecimento que, neste caso, são utilizadas para manter a temperatura nos tanques fixa num valor desejado.

### 3.2 LABVIEW

O LabVIEW é um software utilizado em processos de controle e automação baseado em linguagem de programação gráfica, fabricado pela *National Instruments*, que emprega ícones ao invés de textos para criar aplicações, ou seja, o programa é feito na forma de um diagrama de blocos, como ilustra a Figura 6. Todo programa elaborado no LabVIEW é chamado de instrumento virtual (*VI-Virtual Instrument*) devido à sua aparência e operação assemelharem-se às de instrumentos de medição e controle reais. Um VI é constituído por duas partes, que são:

- Diagrama de blocos é a estrutura do programa onde a programação é realizada, ou seja, é parte que contém o código fonte construído de forma gráfica pelo usuário;
- Painel frontal é a interface com o usuário, onde são alocados todos os controles, gráficos e indicadores, resultando em uma tela que simula o painel físico de um instrumento.



**Figura 6 – Programação em diagrama de blocos.**

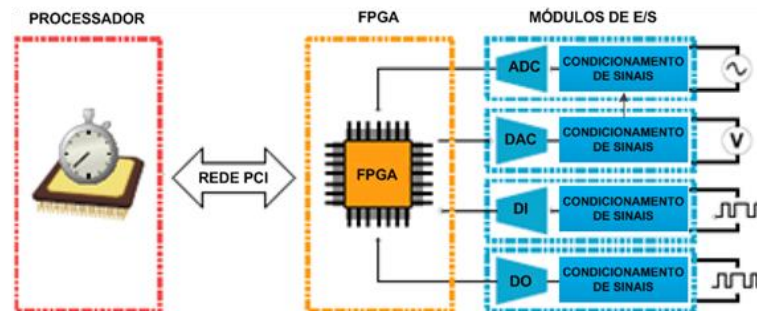
Fonte: Adaptado de (BILIK; KOVAL; HAJDUK, 2008)

Inicialmente, este *software* foi desenvolvido apenas para facilitar a coleta de dados dos instrumentos de laboratório, provenientes de sistemas de aquisição. Atualmente, o LabVIEW pode ser utilizado para adquirir dados de instrumentos, análise e processamento de dados, automação e para controlar instrumentos e equipamentos (LARSEN, 2011). Este *software* possibilita, através do módulo LabVIEW *Real-Time*, a realização de vários tipos de operações em tempo real e determinado. Tais operações podem ir desde uma simples indicação gráfica do sinal proveniente de um sistema de medição até o desenvolvimento de um sistema de controle.

### 3.3 COMPACTRIO

O CompactRIO consiste em um PAC fabricado pela National Instruments, formado por um chassi reconfigurável baseado na tecnologia FPGA (*Field-Programmable Gate Array*).

Cada chassi aloja um processador de ponto flutuante embarcado com operação em tempo real, um FPGA de alto desempenho, módulos de E/S (entradas e saídas) com troca a quente. Cada módulo de E/S é conectado diretamente ao FPGA, promovendo um rápido processamento de sinais. A conexão entre o FPGA e o processador embarcado é realizada através de uma rede PCI de alta velocidade (BILIK et al., 2008). A Figura 7 ilustra a estrutura interna citada acima.



**Figura 7 – Estrutura interna do CompactRIO.**

Fonte: Autoria própria

A programação deste dispositivo, tanto do processador quanto do FPGA, é realizada por meio do software LabVIEW através de dois modos, LabVIEW FPGA e *Scan mode*, sendo que ambos estão alocados no módulo *Real-Time* do programa. O primeiro é mais utilizado em sistemas que exigem loops de controle analógico acima de 1kHz e com taxa de atualizações de E/S acima de 20kHz e o segundo possui uma programação menos complexa, porém deve ser utilizado em sistemas com exigências inferiores às citadas acima.

## 4 IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA

Neste Capítulo será abordada a metodologia utilizada e os resultados obtidos na determinação do modelo matemático aproximado do sistema multivariável não linear, referido na seção 3.1, seguido pela obtenção do modelo LPV do mesmo.

### 4.1 IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA

Como pode ser observado nas Equações (7) e (9), expostas na Seção 2.1, que mostram o modelo do sistema, tanto as variáveis de estado nível, como a temperatura dependem dos fluxos de entrada e saída do módulo de controle. Sendo assim, é necessária a determinação dos mesmos.

Uma vez que os fluxos de entrada dependem das bombas centrífugas dos reservatórios principais, e estas dependem da tensão aplicada nas respectivas entradas, foram realizados ensaios práticos de maneira a determinar a relação entre a tensão de entrada e o fluxo de saída de cada bomba.

Para a determinação do modelo de cada dispositivo, primeiramente foram coletados os dados de deslocamento de nível do módulo de controle, variando-se a tensão de entrada das bombas centrífugas em degraus de  $0,5[V]$  na faixa de  $5,5[V]$  à  $10[V]$ , com taxa de amostragem de  $200ms$ , por meio do PAC CompactRIO e do *software* LabVIEW.

Foram realizados seis ensaios diferentes para cada bomba, sendo três para acréscimo de tensão e três para decréscimo, de forma a diminuir a possibilidade de ocorrência de erros nas medidas e verificar se havia diferenças na curva de resposta dos dispositivos nas duas situações (histerese), o que não ocorreu. Dessa forma, pôde-se considerar apenas uma curva para a dinâmica de cada bomba.

Depois de realizados os ensaios, foram gerados os gráficos de nível por tensão aplicada nas bombas. Em seguida, foi realizada uma aproximação por retas das curvas obtidas, de modo que cada reta foi atribuída para cada faixa de tensão que resultou numa dinâmica de nível aproximadamente linear. Em seguida, foram encontrados os ângulos de inclinação das retas utilizadas para a aproximação.

As Tabelas 1 e 2 mostram as tangentes dos ângulos de inclinação das retas para cada faixa de tensão aplicada nas bombas de água fria e água quente, respectivamente. Uma vez que a tangente do ângulo de inclinação das retas foi obtida pela relação entre a variação do nível e o número de amostras e sendo a área do módulo de controle conhecida, foi possível obter a vazão de cada bomba, mostradas nas Tabelas 3 e 4.

**Tabela 1 – Ângulos de inclinação das retas de aproximação da curva Baf.**

<i>Faixa de Tensão</i>	<i>Tangente do ângulo de inclinação</i>
5,5	0,33125
6,0 - 6,5	0,46
7,0 - 7,5	0,61
8,0	0,72
8,5	0,80357
9,0 - 10,0	1

As Figuras 8 e 9 mostram as vazões em função da tensão das bombas de água

Tabela 2 – Ângulos de inclinação das retas de aproximação da curva - Baq.

<i>Faixa de Tensão</i>	<i>Tangente do ângulo de inclinação</i>
5,5	0,2745
6,0 - 6,5	0,412884
7,0 - 7,5	0,55063
8,0	0,70192
8,5	0,83019
9,0 - 10,0	1,01818

Tabela 3 – Vazão - Baf

<i>Faixa de Tensão</i>	<i>Vazão (<math>\times 10^3 \text{ mm}^3 / \text{s}</math>)</i>
5,5	67,1
6,0 - 6,5	98
7,0 - 7,5	126,885
8,0	149,18
8,5	162,51
9,0 - 10,0	209,48

Tabela 4 – Vazão - Baq

<i>Faixa de Tensão</i>	<i>Vazão (<math>\times 10^3 \text{ mm}^3 / \text{s}</math>)</i>
5,5	55,5
6,0 - 6,5	84,35
7,0 - 7,5	114,81
8,0	144,57
8,5	164,57
9,0 - 10,0	207,98

fria e água quente, respectivamente. Como pode ser observado em ambas figuras, o comportamento de cada bomba foi aproximadamente linear, mantendo praticamente constante o aumento de vazão para cada incremento do valor de tensão. Assim, as curvas foram aproximadas para uma única reta que relacionasse a dinâmica de cada bomba. A aproximação foi realizada utilizando a função *regression* do MATLAB, que fornece os parâmetros da equação da reta aproximada.

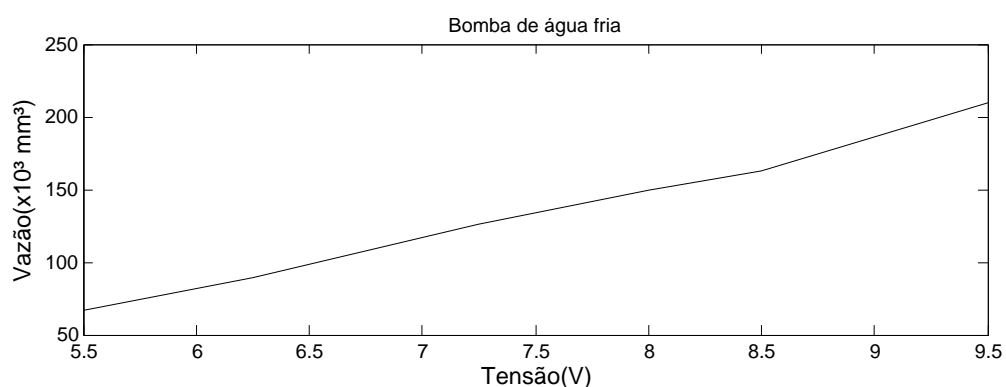
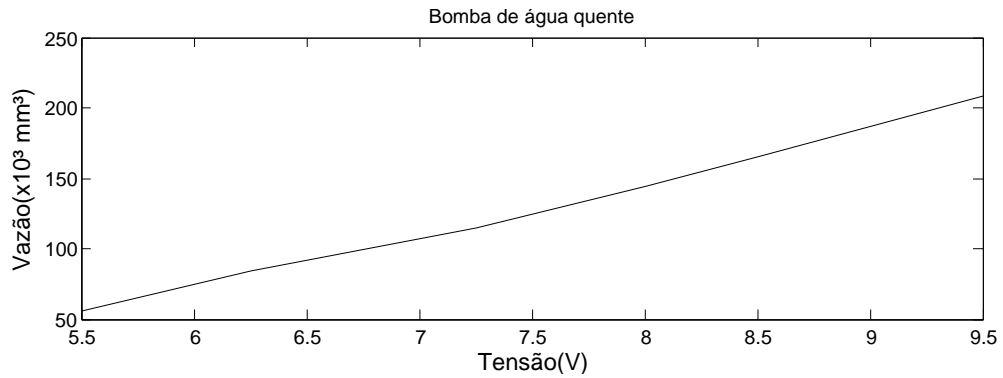


Figura 8 – Vazão medida em função da tensão de entrada da Baf.

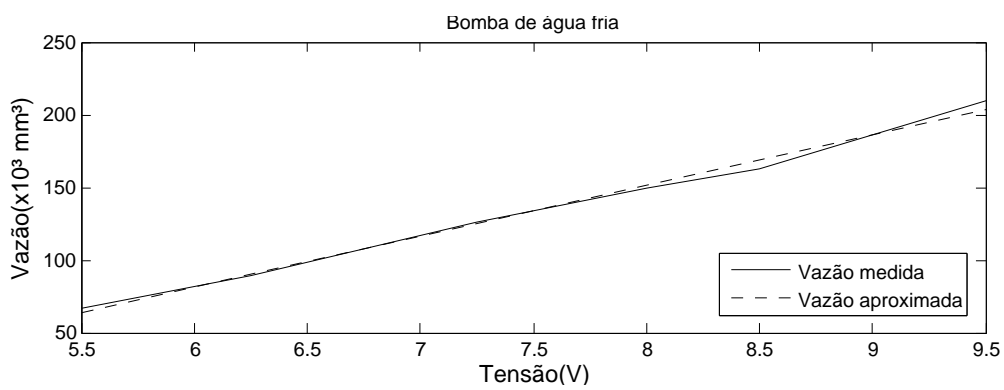
Fonte: Autoria própria

O resultado desta aproximação pode ser observado nas Figuras 10 e Figura 11 que mostram tanto a vazão medida como a vazão aproximada das bombas de água fria e quente, respectivamente. Uma vez obtida a reta de aproximação da dinâmica de cada bomba, foi possível obter as equações das mesmas.



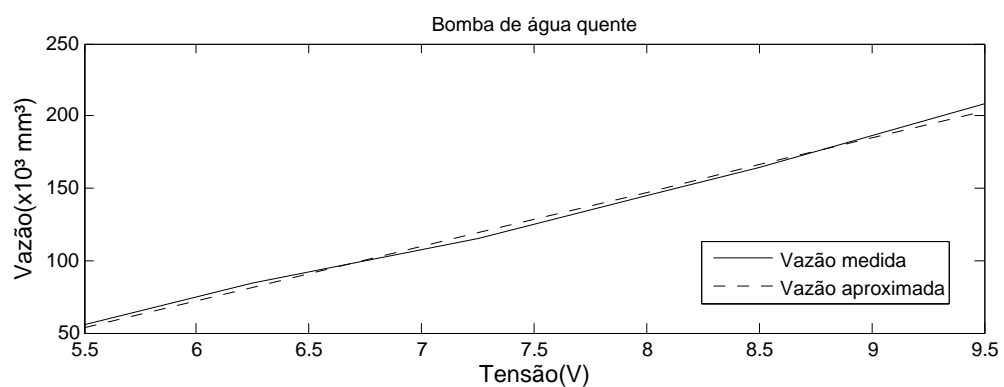
**Figura 9 – Vazão medida em função da tensão de entrada da Baq.**

Fonte: Autoria própria



**Figura 10 – Vazões medida e aproximada em função da tensão de entrada da Baf.**

Fonte: Autoria própria



**Figura 11 – Vazões medida e aproximada em função da tensão de entrada da Baq.**

Fonte: Autoria própria

Abaixo estão apresentadas as equações das vazões aproximadas em função da tensão de entrada das bombas de água fria ( $V_{af}$ ) e água quente ( $V_{aq}$ ), respectivamente. O valor da área do módulo de controle que foi obtida por meio das medidas físicas do mesmo.

$$u_{af} = a_f V_{af} - b_{af} \quad (43)$$

$$u_{aq} = a_q V_{aq} - b_{aq} \quad (44)$$

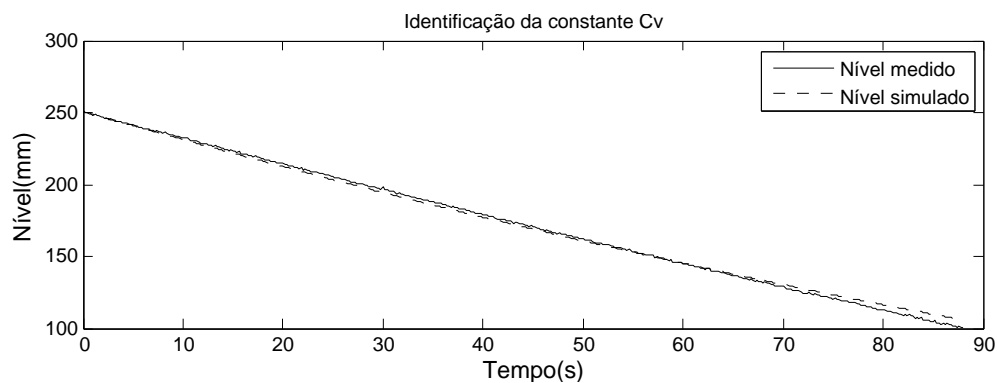
$$u_{aq} = 41,012 \cdot 10^3 V_{aq} - 149,52 \cdot 10^3 (\text{mm}^3/\text{s})$$

$$S = 40,832 (\text{mm}^2) \quad (45)$$

Para a determinação da constante  $C_v$  foi realizado um ensaio prático onde o reservatório do módulo de controle foi preenchido até um determinado nível com a válvula de saída fechada e ambas as bombas foram desligadas. Em seguida com a válvula de saída totalmente aberta foram coletados os dados da variação do nível ( $\text{mm}/\text{s}$ ).

A partir da comparação entre os dados coletados e o resultado obtido na simulação, nas mesmas condições do ensaio prático, da dinâmica da variável de nível definida pela Equação (7), utilizando a função Ode45 do MATLAB 2009, foi possível obter um valor para a constante  $C_v$ . Tal comparação resultou no valor mostrado na Equação (46) para  $C_v$ . As curvas da variação de nível medida e simulada estão apresentadas na Figura 12.

$$C_v = 5,150 \times 10^3 (\text{mm}^2/\text{s}) \quad (46)$$



**Figura 12 – Identificação da constante  $C_v$**

**Fonte: Autoria própria**

Com o valor da constante  $C_v$  determinado, todas as variáveis necessárias para a composição do modelo matemático aproximado do sistema foram obtidas.

Feito isto, foram realizados ensaios em malha aberta para a obtenção da dinâmica real de nível e temperatura de cada bomba, de forma a validar o modelo teórico obtido. Foram coletados dados para três níveis de tensão diferentes (5,5[V]; 6,5[V]; 7,5[V]) de forma a garantir uma aproximação mais exata do modelo.

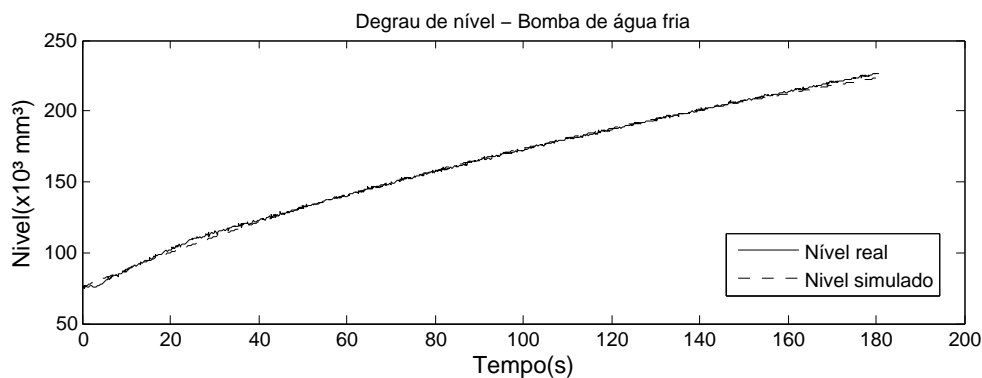
Em seguida, comparações entre as dinâmicas das curvas reais e simuladas foram feitas, e por meio de tais análises foi constatada a necessidade de se realizar ajustes empíricos, por meio da adição de constantes nas Equações 7 e 9, de forma a garantir uma melhor aproximação para o modelo dos fluxos das bombas, o que resultou nas Equações 47 e 48.

$$\dot{h} = \frac{1}{S} \left( \frac{(a_f V_{af} - b_f)}{C_1} + \frac{(a_q V_{aq} - b_q)}{C_2} - C_v \sqrt{h(t)} \right) \quad (47)$$

$$\dot{T} = \frac{C_3}{Sh(t)} \left( \frac{(a_f V_{af} - b_f)}{C_4} (T_{af} - T) + (a_q V_{aq} - b_q) (T_{aq} - T) \right) \quad (48)$$

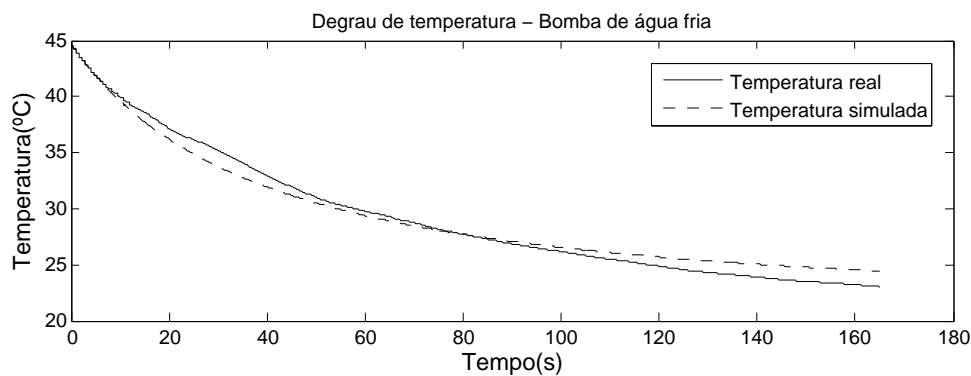
onde  $C_1 = 1,045$ ;  $C_2 = 1,05$ ;  $C_3 = 0,65$  e;  $C_4 = 0,8$ .

As Figuras 13, 14, 15 e 16 ilustram os resultados das curvas reais e simuladas, para uma tensão de 6,5[V], para as variáveis de nível e temperatura das bombas de água fria e água quente, respectivamente, obtidas após a adição das constantes no modelo do sistema.



**Figura 13 – Degrau de nível - Baf.**

Fonte: Autoria própria

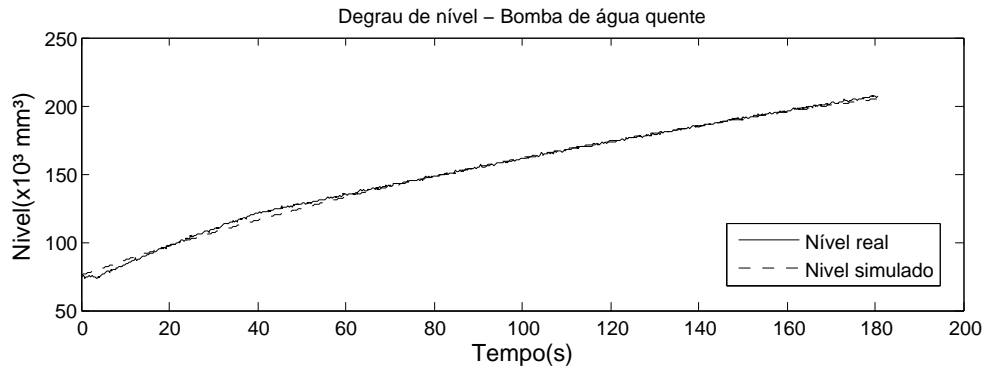


**Figura 14 – Degrau de temperatura - Baf.**

Fonte: Autoria própria

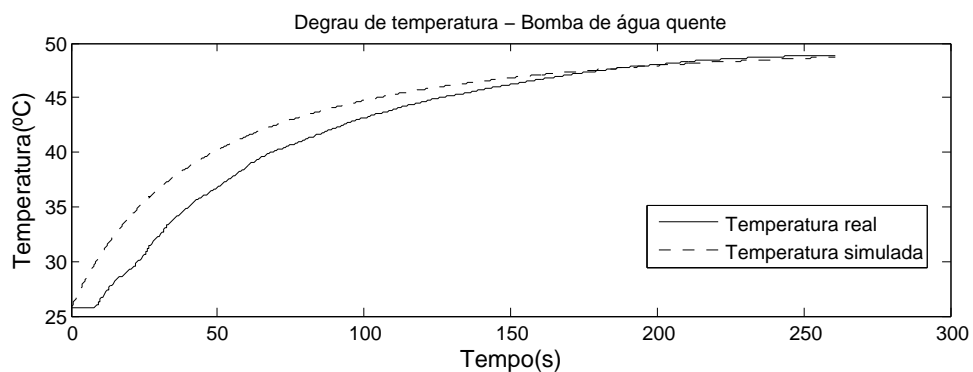
Como pode ser observado nas Figuras 14 e 16, as curvas das dinâmicas das temperaturas reais do módulo de controle apresentam um atraso de transporte devido ao fato de que a uniformização da temperatura do líquido dentro do reservatório não é instantânea. Tais incertezas são modeladas neste trabalho como perturbações do sistema e o tratamento das mesmas foi realizado por meio do emprego da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Maiores detalhes são apresentados no Capítulo 5.





**Figura 15 – Degrau de nível - Baq.**

Fonte: Autoria própria



**Figura 16 – Degrau de temperatura - Baq.**

Fonte: Autoria própria

## 4.2 MODELAGEM LPV

Para a determinação do modelo LPV do sistema, optou-se pelo método de substituição algébrica como já mencionado na seção 2.3, de forma a eliminar a não linearidade  $\sqrt{h}$  presente na Equação (7), caracterizando assim, um sistema *quasi*-LPV. Para isto, foram escolhidos os seguintes parâmetros para realizar a substituição.

$$\theta_1(h,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (49)$$

$$\theta_2(T,t) = T \quad (50)$$

Como os intervalos de valores dos mesmos são definidos pelas variáveis que substituem e como a variável de nível possui um intervalo de aproximadamente  $[1 \ 200](mm)$  e a variável de temperatura de aproximadamente  $[24 \ 50](^{\circ}C)$ , os intervalos de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  ficaram definidos da seguinte forma:

$$\theta_{1m} \leq \theta_1 \leq \theta_{1M} \quad \rightarrow \quad 0,070711 \leq \theta_1 \leq 1 \quad (51)$$

$$\theta_{2m} \leq \theta_2 \leq \theta_{2M} \rightarrow 24 \leq \theta_2 \leq 50 \quad (52)$$

Dessa forma, as Equações (7) e (9) em função dos parâmetros  $\theta_1(h,t)$  e  $\theta_2(T,t)$  ficaram conforme as Equações (53) e (54):

$$\dot{h} = \frac{1}{S} \left( \frac{u_{af}(t)}{C_1} + \frac{u_{aq}(t)}{C_2} - C_v \theta_1 h(t) \right) \quad (53)$$

$$\dot{T} = \frac{C_3 \theta_1^2}{S} \left( \frac{u_{af}(t)}{C_4} (T_{af} - \theta_2) + u_{aq}(t) (T_{aq} - \theta_2) \right) \quad (54)$$

Logo, as matrizes de estados e entradas do sistema em função dos parâmetros  $\theta$  são:

$$A(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} \frac{C_v \theta_1}{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$B(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 S} & \frac{1}{C_2 S} \\ \frac{C_3 \theta_1^2 (T_{af} - \theta_2)}{C_4 S} & \frac{C_3 \theta_1^2 (T_{aq} - \theta_2)}{S} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Como pode ser observado nas Equações (51) e (52), cada parâmetro possui valores e domínios diferentes. De forma a garantir a convergência do sistema em qualquer ponto de operação por meio da utilização do conjunto de LMIs escolhidos, é necessário que ambos variem dentro de um polítopo convexo. Uma forma de garantir tal variação é por meio da utilização de simplex unitários  $(\alpha_1, \alpha_2)$  como mostrados nas Equações (57) e (58) (OLIVEIRA; BLIMAN; PERES, 2008; FRANKE; KRAUS, 2014). Sendo que cada parâmetro  $\alpha$  varia entre  $[0 \ 1]$  e  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ .

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \alpha_1^{(1)} \theta_{1m} + \alpha_2^{(1)} \theta_{1M} \\ \alpha_2^{(1)} &= 1 - \alpha_1^{(1)} \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \alpha_1^{(2)} \theta_{2m} + \alpha_2^{(2)} \theta_{2M} \\ \alpha_2^{(2)} &= 1 - \alpha_1^{(2)} \end{aligned} \quad (58)$$

Dessa forma, as matrizes A e B passaram a ser definidas como a seguir:

$$A(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} \frac{C_v (\alpha_1^{(1)} \theta_{1m} + \alpha_2^{(1)} \theta_{1M})}{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1^{(1)} \begin{bmatrix} \frac{C_v \theta_{1m}}{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2^{(1)} \begin{bmatrix} \frac{C_v \theta_{1M}}{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 S} \\ \frac{C_3(\alpha_1^{(1)}\theta_{1m} + \alpha_2^{(1)}\theta_{1M})^2 (T_{af} - (\alpha_1^{(2)}\theta_{2m} + \alpha_2^{(2)}\theta_{2M}))}{C_4 S} \\ \frac{1}{C_2 S} \\ \frac{C_3(\alpha_1^{(1)}\theta_{1m} + \alpha_2^{(1)}\theta_{1M})^2 (T_{aq} - (\alpha_1^{(2)}\theta_{2m} + \alpha_2^{(2)}\theta_{2M}))}{S} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Uma vez definida as matrizes do modelo *quasi*-LPV, para a resolução das LMIs utilizadas, é necessário realizar a distribuição dos elementos das mesmas de forma a separá-las em matrizes de constantes multiplicadas por cada parâmetro ou conjunto de parâmetros  $\alpha$ . Além disso, é também necessário que os graus dos parâmetros  $\alpha$  que multiplicam cada uma das matrizes constantes sejam iguais.

Tal processo foi obtido de forma direta no caso da matriz  $A(\alpha_1, \alpha_2)$ , formada por parâmetros  $\alpha$  com índices iguais a um (apenas um  $\alpha$  por matriz de constantes), como pode ser observado na Equação (59).

Já para a matriz  $B(\alpha_1, \alpha_2)$  isso não ocorreu de maneira direta, uma vez que, o processo de distribuição de seus elementos resultou em matrizes de constantes multiplicadas por parâmetros  $\alpha$  com índices dois e três. Sendo assim, foi necessária a realização da homogeneização da mesma, que é um processo que consiste na multiplicação de cada um dos conjuntos de parâmetros com índice menor por  $(\alpha_1 + \alpha_2)$ , lembrando que tal soma é igual a um. As matrizes resultantes deste processo estão listadas nas Equações (61) - (66) e a matriz  $B(\alpha_1, \alpha_2)$  passa a ser definida de acordo com a Equação (67).

$$B_1 = \left( \alpha_1^{(1)2} \alpha_1^{(2)} \right) \begin{bmatrix} \frac{a_f}{C_1 S} & \frac{a_q}{C_2 S} \\ \frac{\theta_{1m}^2 a_f C_3 (T_{af} - \theta_{2m})}{C_4 S} & \frac{\theta_{1m}^2 a_q C_3 (T_{aq} - \theta_{2m})}{S} \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$B_2 = \left( \alpha_1^{(1)2} \alpha_2^{(2)} \right) \begin{bmatrix} \frac{a_f}{C_1 S} & \frac{a_q}{C_2 S} \\ \frac{\theta_{1m}^2 a_f C_3 (T_{af} - \theta_{2M})}{C_4 S} & \frac{\theta_{1m}^2 a_q C_3 (T_{aq} - \theta_{2M})}{S} \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$B_3 = \left( \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \alpha_1^{(2)} \right) \begin{bmatrix} \frac{2a_f}{C_1 S} & \frac{2a_q}{C_2 S} \\ \frac{2\theta_{1m}\theta_{1M}a_f C_3 (T_{af} - \theta_{2m})}{C_4 S} & \frac{2\theta_{1m}\theta_{1M}a_q C_3 (T_{aq} - \theta_{2m})}{C_4 S} \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$B_4 = \left( \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \alpha_2^{(2)} \right) \begin{bmatrix} \frac{2a_f}{C_1 S} & \frac{2a_q}{C_2 S} \\ \frac{2\theta_{1m}\theta_{1M}a_f C_3 (T_{af} - \theta_{2M})}{C_4 S} & \frac{2\theta_{1m}\theta_{1M}a_q C_3 (T_{aq} - \theta_{2M})}{C_4 S} \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$B_5 = \left( \alpha_2^{(1)2} \alpha_1^{(2)} \right) \begin{bmatrix} \frac{a_f}{C_1 S} & \frac{a_q}{C_2 S} \\ \frac{\theta_{1M}^2 a_f C_3 (T_{af} - \theta_{2m})}{C_1 S} & \frac{\theta_{1M}^2 a_q C_3 (T_{aq} - \theta_{2m})}{S} \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$B_6 = \left( \alpha_2^{(1)2} \alpha_2^{(2)} \right) \begin{bmatrix} \frac{a_f}{C_1 S} & \frac{a_q}{C_2 S} \\ \frac{\theta_{1M}^2 a_f C_3 (T_{af} - \theta_{2M})}{C_4 S} & \frac{\theta_{1M}^2 a_q C_3 (T_{aq} - \theta_{2M})}{S} \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^6 B_i \quad (67)$$

Com isso, foi obtido o modelo *quasi*-LPV do sistema de acordo com a necessidade advinda do presente trabalho, o que possibilitou a utilização do pacote computacional *Robust LMI Parser* (ROLMIP) para a obtenção dos ganhos de realimentação, que são apresentados no Capítulo a seguir (AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2012).

## 5 SÍNTESE DOS CONTROLADORES

Como já mencionado no Capítulo 1, neste trabalho foram desenvolvidos dois sistemas de controle diferentes, sendo um para o modelo linearizado (controle linear) e um para o sistema modelado em LPV (controle robusto misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ). Neste Capítulo são apresentadas as etapas seguidas para a formulação destes controladores e as estruturas dos mesmos.

### 5.1 SISTEMA DE CONTROLE LINEAR $\mathcal{H}_\infty$

Considerando um sistema LTI descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (68)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  os estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  as entradas,  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  as entradas exógenas e  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  as saídas do sistema.

Como já mencionado na Seção 2.7, para a síntese de uma lei de controle para seguir um sinal de referência, foram adicionados dois integradores, um para cada estado, em malha fechada. Sendo as entradas dos integradores os erros entre as saídas  $y(t)$  e os sinais de referência  $r(t)$ , e as saídas  $q(t)$  subtraídas da lei de controle por realimentação de estados. Assim, para o processo tratado neste trabalho, o sistema aumentado pode ser descrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{T}(t) \\ \dot{q}_h(t) \\ \dot{q}_T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \\ q_h(t) \\ q_T(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{saf} \\ u_{saq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_h(t) \\ r_T(t) \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$z(t) = C_z \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \\ q_h(t) \\ q_T(t) \end{bmatrix} + D_{zu} \begin{bmatrix} u_{af} \\ u_{aq} \end{bmatrix} + D_{zw} w(t) \quad (70)$$

$$y(t) = C \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \end{bmatrix} \quad (71)$$

E a lei de controle é dada por:

$$u(t) = K_1 \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} q_h(t) \\ q_T(t) \end{bmatrix} \quad (72)$$

Como o trabalho envolve aplicação prática, além da adição dos termos integrativos, foram consideradas as saturações advindas das faixas de operação dos atuadores

do sistema, por meio da adição de um bloco *anti-windup*, conforme exposto na Seção 2.7. Assim:

$$u_s(t) = u(t) - \delta_s(t), \quad (73)$$

sendo  $\delta_s(t)$  a diferença entre  $u(t)$  e  $u_s(t)$ , como mostrado na Figura 4.

Assim, a nova dinâmica para o controle anti-windup é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{T}(t) \\ \dot{q}_h(t) \\ \dot{q}_T(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \\ q_h(t) \\ q_T(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{af} \\ u_{aq} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_w & -B \\ 0 & -E \end{bmatrix}}_{\hat{B}_w} \begin{bmatrix} w(t) \\ \delta_s h(t) \\ \delta_s T(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_h(t) \\ r_T(t) \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$z(t) = C_z \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \\ q_h(t) \\ q_T(t) \end{bmatrix} + D_{zu} \begin{bmatrix} u_{af} \\ u_{aq} \end{bmatrix} + D_{zw} w(t) \quad (75)$$

$$y(t) = C \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \end{bmatrix}, \quad (76)$$

sendo  $E$  o ganho anti-windup, que no caso é definido como unitário.

Uma vez determinado o modelo matemático aproximado do sistema, como mostrado na Seção 4.1 e definida a estrutura do sistema de controle linear, para o desenvolvimento do mesmo, primeiramente foi realizada a linearizao do modelo aproximado, de acordo com os procedimentos exposto na Subseção 2.1.2, o que resultou nas matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  mostradas a seguir, para um ponto de equilíbrio definido em:  $h = 100 \text{ mm}$  e  $T = 35^\circ\text{C}$ .

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-C_v}{2S\sqrt{h}} & 0 \\ \frac{-C_3 u_{af} (T_{af} - T)}{C_4 S h^2} & \frac{-C_3 u_{af} (T_{aq} - T)}{S h^2} & \frac{-C_3 u_{af}}{C_4 S h} & \frac{-C_3 u_{aq}}{S h} \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{a_f}{C_1 S} & \frac{a_q}{C_2 S} \\ \frac{-C_3 u_{af} (T_{af} - T)}{C_4 S h} & \frac{-C_3 u_{aq} (T_{aq} - T)}{S h} \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Depois de determinadas as matrizes de estados do sistema linearizado, foram calculados os ganhos para a estrutura de realimentação de estados com integrador e *anti-windup* utilizando a norma  $\mathcal{H}_\infty$  por meio do MATLAB 2009 com o auxílio dos pacotes computacionais SEDUMI e YALMIP (LÖFBERG, 2004; STURM, 1999), computada pelas LMIs mostradas no Lema 5.1, que são baseadas no *Bounded Real Lema* apresentado no Lema 2.1 (DULLERUD; PAGANINI, 2013).

**Lema 5.1** Se existirem matrizes  $W$  e  $Z$  tais que

$$W > 0 \quad (81)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A}W + BZ + W\hat{A}' + Z'B' + \hat{B}_w\hat{B}_w' & WC_z' + Z'D_z' + \hat{B}_w\hat{B}_w' \\ C_zW + D_zZ + \hat{B}_w'\hat{B}_w & D_wD_w' - \gamma^2I \end{bmatrix} < 0 \quad (82)$$

então o ganho de realimentação  $K = ZW^{-1}$  estabiliza o sistema (74)–(76) e garante uma norma  $\mathcal{H}_\infty$  menor que  $\gamma$ .

Sendo (ZHOU et al., 1996):

- $A$  e  $B$  - as matrizes aumentadas de estados e de entradas, respectivamente, definidas pelo sistema;
- $B_w$  - a matriz relacionada com o valor resultante da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , que no caso não foi alterada, ou seja, foi definida como sendo unitária, pois a mesma não influencia no cálculo do controlador;
- $C_z, D_z$  - as matrizes onde são determinadas a robustez desejada aos ruídos, onde a primeira está relacionada com os estados do sistema e a segunda com as entradas do sistema;
- $W, Z$  - as matrizes a serem determinadas, respectivamente e;
- $\gamma$  - a variável a ser minimizada.

No presente trabalho foram modelados como ruídos relacionados aos estados do sistema ( $w(t)$ ), as diferenças máximas encontradas entre as curvas de identificação reais e simuladas apresentadas nas Figuras 13 - 16. E para os ruídos relacionados às entradas do sistema, as diferenças máximas encontradas entre as curvas de aproximação das dinâmicas de cada bomba, apresentadas nas Figuras 10 e 11. Assim:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-C_v}{2S\sqrt{h}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-C_3u_{af}(T_{af}-T)}{C_4Sh^2} - \frac{-C_3u_{af}(T_{aq}-T)}{Sh^2} & \frac{-C_3u_{af}}{C_4Sh} - \frac{-C_3u_{aq}}{Sh} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{a_f}{C_1 S} & \frac{a_q}{C_2 S} \\ \frac{-C_3 a_f (T_{af} - T)}{C_4 A h} & \frac{-C_3 f_{aq} (T_{aq} - T)}{S h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$C_z = [4,42 \quad 4,97 \quad 1 \quad 1] \quad (85)$$

$$D_z = [6,25 \quad 4,97] \quad (86)$$

$$D_w = [0 \quad 0] \quad (87)$$

Depois de realizados os cálculos computacionais foram obtidos os ganhos de realimentação  $K_1$  e  $K_2$ , mostrados, respectivamente, nas Equações (88) e (90), determinando assim a estrutura para o controlador linear.

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,7287 & 1,1320 \\ -0,4022 & -1,9393 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2,0003 & -0,4512 \\ -0,4023 & 0,1571 \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (90)$$

O resultado da simulação deste sistema de controle para o ponto de equilíbrio no qual foi projetado pode ser observado na Figura 17. Como pode ser observado pela análise da mesma o controlador linear desenvolvido apresentou um desempenho satisfatório estabilizando o sistema multivariável nos *set points* definidos.

Além do desempenho, na Figura 17 podem ser observados também, nos gráficos referentes às ações de controle, os limites superiores e inferiores das saturações aplicadas para cada bomba, sendo ambos limites superiores determinados em 10(V) e os limites inferiores determinados pelas tensões mínimas que iniciavam o deslocamento de água de cada bomba, valores esses que foram adquiridos por meio de ensaios em malha aberta, que foram: 3,8(V) para a Baf e; 3,9(V) para a Baq.

Uma vez atestada a eficácia deste primeiro sistema, foi realizada a implementação prática do mesmo, que está apresentada no Capítulo 6.



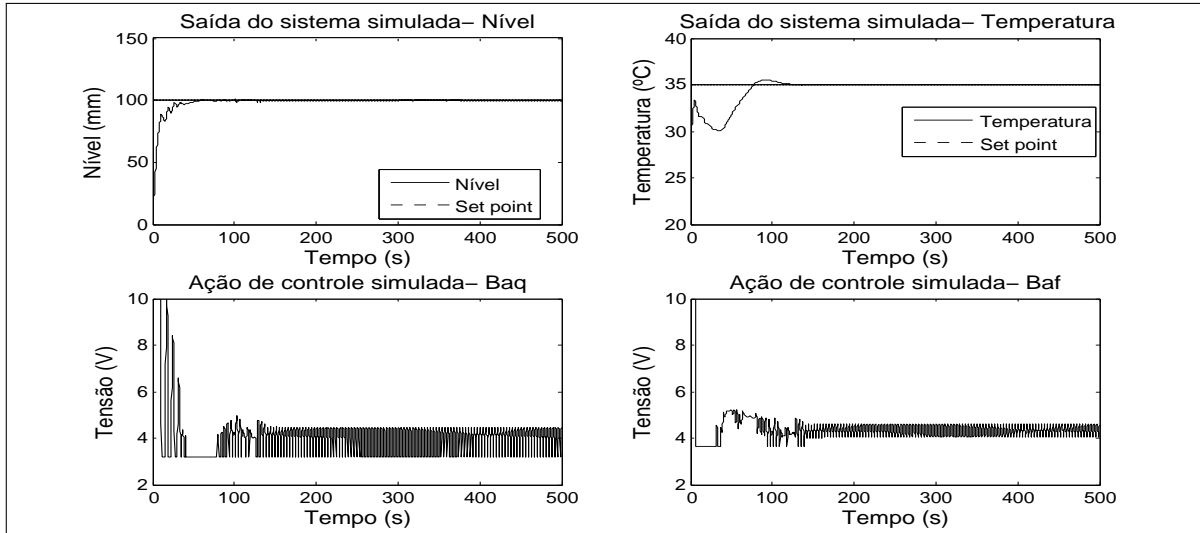


Figura 17 – Simulação do sistema de controle linear.

Fonte: Autoria própria

## 5.2 SISTEMA DE CONTROLE ROBUSTO MISTO $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Considerando um sistema LPV descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha_1, \alpha_2)x(t) + B(\alpha_1, \alpha_2)u(t) + B_w(\alpha_1, \alpha_2)w(t) \\ z(t) = C_z(\alpha_1, \alpha_2)x(t) + D_{zu}(\alpha_1, \alpha_2)u(t) + D_{zw}(\alpha_1, \alpha_2)w(t) \\ y(t) = C(\alpha_1, \alpha_2)x(t) \end{cases} \quad (91)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  os estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  as entradas,  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  as entradas exógenas and  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  as saídas do sistema. Vale ressaltar que, neste caso, os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  dependem do tempo, uma vez que substituem variáveis que dependem dos estados do sistema, cuja dinâmica dos mesmos variam no tempo. Porém, por questões de simplificação da notação de tais parâmetros, foi optado por não incluir a variável tempo nas equações e matrizes que os mesmos são citados.

No caso do sistema LPV, também foi utilizada a estrutura de controle por realimentação de estados com adição do saturador, mostrado na Seção 5.1. Porém, neste caso, as matrizes que compõem o mesmo dependem dos parâmetros  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . Assim, a dinâmica para o controle anti-windup do sistema LPV é dada por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{T}(t) \\ \dot{q}_h(t) \\ \dot{q}_T(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(\alpha_1, \alpha_2) & 0 \\ -C(\alpha_1, \alpha_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \\ q_h(t) \\ q_T(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\alpha_1, \alpha_2) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{af} \\ u_{aq} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_w(\alpha_1, \alpha_2) & -B(\alpha_1, \alpha_2) \\ 0 & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ \delta_s h(t) \\ \delta_s T(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_h(t) \\ r_T(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (92)$$

$$z(t) = C_z(\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \\ q_h(t) \\ q_T(t) \end{bmatrix} + D_{zu}(\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} u_{af} \\ u_{aq} \end{bmatrix} + D_{zw}(\alpha_1, \alpha_2)w(t) \quad (93)$$

$$y(t) = C(\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \end{bmatrix}, \quad (94)$$

sendo  $E$  o ganho anti-windup, que no caso é definido como unitário.

Como pode ser observado nas Equações (92) – (94), estão presentes as matrizes  $B_w$ ,  $C_z$ ,  $D_{zu}$  e  $D_{zw}$  que, no caso deste controlador, devem ser determinadas tanto para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , onde as mesmas serão denominadas  $B_{wi}$ ,  $C_{zi}$ ,  $D_{zui}$  e  $D_{zwi}$ , respectivamente, como para a norma  $H_2$ , onde serão denominadas  $B_{w2}$ ,  $C_{z2}$ ,  $D_{zu2}$  e  $D_{zw2}$ , respectivamente. Vale ressaltar que tanto a matriz  $D_{zwi}$ , como a matriz  $D_{zw2}$  são iguais a 0, pelo fato de que o sistema tratado é estritamente próprio.

Para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  foi utilizada a LMI apresentada no Teorema 5.1, que é baseada em aplicações do Lema de Finsler nas condições básicas de estabilidade (OLIVEIRA; GEROMEL; BERNUSSOU, 2002; GEROMEL; KOROGUI; BERNUSSOU, 2007). Os elementos denotados como  $\star$  correspondem aos blocos simétricos.

**Teorema 5.1** *Se existirem matrizes  $P_i(\alpha_1, \alpha_2) = P_i(\alpha_1, \alpha_2)' > 0$ ,  $Z(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $G$ ,  $H(\alpha_1, \alpha_2)$  e um escalar  $\xi$  tais que*

$$\begin{bmatrix} A(\alpha_1, \alpha_2)G + G'A(\alpha_1, \alpha_2)' + B(\alpha_1, \alpha_2)Z(\alpha_1, \alpha_2) + Z(\alpha_1, \alpha_2)'B(\alpha_1, \alpha_2)' - \dot{P}_i(\alpha_1, \alpha_2) \\ P_i(\alpha_1, \alpha_2) - G + \xi(A(\alpha_1, \alpha_2)G + B(\alpha_1, \alpha_2)Z(\alpha_1, \alpha_2))' \\ C_{zi}(\alpha_1, \alpha_2)G + D_{zui}(\alpha_1, \alpha_2)Z(\alpha_1, \alpha_2) \\ -H(\alpha_1, \alpha_2)'B_{wi}(\alpha_1, \alpha_2)' \\ \star & \star \\ -\xi(G + G') & \star \\ \xi(C_{zi}(\alpha_1, \alpha_2)G + D_{zui}(\alpha_1, \alpha_2)Z(\alpha_1, \alpha_2)) & -\gamma^2 I \\ 0 & -H(\alpha_1, \alpha_2)'D_{zwi}(\alpha_1, \alpha_2)' \\ \star & \\ \star & \\ \star & \\ I + H(\alpha_1, \alpha_2) + H(\alpha_1, \alpha_2)' \end{bmatrix} < 0 \quad (95)$$

então o ganho de realimentação  $K(\alpha_1, \alpha_2) = Z(\alpha_1, \alpha_2)G^{-1}$  estabiliza o sistema (92)–(94) e garante uma norma  $\mathcal{H}_\infty$  menor que  $\gamma$ .

Como neste caso as matrizes que compõe a mesma são dependentes dos simple-

xes unitários  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , para a obtenção das mesmas foi optado por utilizar a técnica *Linear Fractional Transformation* (LFT), que consiste numa ferramenta que modela as incertezas (ruídos) como um sistema a parte (FRANKE; KRAUS, 2014). E, como incertezas, foram novamente consideradas as diferenças máximas encontradas entre as curvas de identificação reais e simuladas apresentadas nas Figuras 13 - 16 e nas curvas de aproximação apresentadas nas Figuras 10 e 11. O emprego de tal técnica gerou as seguintes matrizes apresentadas nas Equações (106) – (109).

$$B_{zi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,539 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (96)$$

$$C_{zi} = \begin{bmatrix} -2,161 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0,2885 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$D_{zui} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$D_{zwi} = D_{zui} \quad (99)$$

Uma vez definida a estrutura da LMI e o valor das constantes das matrizes utilizadas para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , o passo seguinte foi definir para a norma  $\mathcal{H}_2$ , sendo que a condição LMI utilizada foi a apresentada no Teorema 5.2 (OLIVEIRA; GEROMEL; BERNUSSOU, 2002; GEROMEL; KOROGUI; BERNUSSOU, 2007).

**Teorema 5.2** *Se existirem matrizes  $P_2(\alpha_1, \alpha_2) = P_2'(\alpha_1, \alpha_2) > 0$ ,  $Z(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $G$ ,  $H(\alpha_1, \alpha_2)$  e um escalar  $\xi$ , tais que*

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{traço}(X) \\ & [\text{traço}(X) - \mu] < 0 \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{bmatrix} -X & C_{z2}(\alpha_1, \alpha_2)G + D_{zu2}Z(\alpha_1, \alpha_2) \\ \star & P_2(\alpha_1, \alpha_2) - G - G' \end{bmatrix} < 0 \quad (101)$$

$$\begin{bmatrix} A(\alpha_1, \alpha_2)G + B(\alpha_1, \alpha_2)Z(\alpha_1, \alpha_2) + G'A'(\alpha_1, \alpha_2) + Z'(\alpha_1, \alpha_2)B'(\alpha_1, \alpha_2) - \dot{P}_2(\alpha_1, \alpha_2) \\ \star \\ \star \end{bmatrix}$$

$$P_2(\alpha_1, \alpha_2) - G' + \xi(A(\alpha_1, \alpha_2)G + B(\alpha_1, \alpha_2)Z(\alpha_1, \alpha_2)) \quad (102)$$

$$\xi(-G - G')$$

★

$$\left[ \begin{array}{c} B_{w2}(\alpha_1, \alpha_2)H(\alpha_1, \alpha_2) \\ 0 \\ I + H'(\alpha_1, \alpha_2) + H(\alpha_1, \alpha_2) \end{array} \right] < 0$$

então o ganho de realimentação  $K(\alpha_1, \alpha_2) = Z(\alpha_1, \alpha_2)G^{-1}$  estabiliza o sistema (92)–(94) e garante uma norma  $\mathcal{H}_2$  menor que  $\mu$ .

Sendo que (ZHOU et al., 1996):

- $B_{w2}$  é a matriz relacionada com o valor resultante da norma  $\mathcal{H}_2$ , que no caso foi definida com os mesmos valores obtidos por meio da LFT utilizada na norma  $\mathcal{H}_\infty$ ;
- $C_{z2}$  é a matriz relacionada com a velocidade de resposta dos estados do sistema, sendo essa relação diretamente proporcional, ou seja, aumentando o valor do termo da matriz relacionado a um determinado estado, este respondera mais rapidamente do que os demais, e diminuindo, a resposta do mesmo será mais lenta;
- $D_{zu2}$  - é a matriz relacionada com a energia de controle aplicada em cada uma das entradas do sistema, sendo essa relação inversamente proporcional, ou seja, ao aumentar o valor do termo da matriz relacionado a uma das entradas, a energia de controle da mesma é atenuada, e diminuindo, é liberada uma maior energia de controle para a mesma;
- $G, Z, H$  são as matrizes a serem determinadas,  $\mu$  é a variável a ser minimizada e;
- $\xi$  é uma variável auxiliar, cujo valor é definido empiricamente, sendo que neste trabalho foram atribuídos os valores (0, 1; 1; 10) para a mesma.

Como no caso da norma  $\mathcal{H}_2$  as matrizes  $B_{w2}$ ,  $C_{z2}$  e  $D_{zu2}$  estão ligadas às dinâmicas do sistema, as mesmas são definidas empiricamente de acordo com os critérios de desempenho desejado pelo projetista, por meio de uma análise de como cada uma influencia no sistema. Para isto, foram realizadas simulações do sistema de controle para o ajuste e determinação de tais matrizes, sendo que foram utilizados como ferramentas os pacotes computacionais ROLMIP e SEDUMI, em conjunto com o MATLAB 2009 (AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2012; STURM, 1999). Vale ressaltar que o cômputo das derivadas matriciais  $\dot{P}_1(\alpha_1, \alpha_2)$  e  $\dot{P}_2(\alpha_1, \alpha_2)$  nos Teoremas 5.1 e 5.2, respectivamente, são realizados automaticamente pelo pacote ROLMIP, com os limitantes  $\dot{\alpha}$  definidos com os seguintes valores:

$$\dot{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (103)$$

$$\dot{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (104)$$

Porém, antes de realizar tais simulações, foi realizada uma alteração na composição das LMIs a título de observar o efeito gerado no desempenho do sistema de controle. Mais especificamente essa alteração foi realizada na matriz  $P(\alpha_1, \alpha_2)$  que é relacionada com a estabilidade do sistema. Tal matriz deve ter uma estrutura pré-definida e neste trabalho foi determinada como sendo polinomial de grau  $g$ , como mostrado na Equação (105). Segundo Oliveira e Peres (2007), o incremento no grau dos polinômios pertencentes a mesma pode gerar melhores resultados para o controlador projetado, porém deve-se tomar cuidado, pois a complexidade para a resolução das LMIs também aumenta. A matriz  $P(\alpha_1, \alpha_2)$ , definida como um polinômio de grau  $g$  pré-determinado, é dada por:

$$P(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k, \ell \in \mathcal{K}(g)} (\alpha_1^{(1)k_1} \alpha_2^{(1)k_2} \alpha_1^{(2)\ell_1} \alpha_2^{(2)\ell_2} P_{k, \ell}) \quad (105)$$

sendo  $\mathcal{K}(g)$  o conjunto de todas as possíveis combinações de  $k$  e  $\ell$ , tais que  $k_1 + k_2 = \ell_1 + \ell_2 = g$  (OLIVEIRA; PERES, 2007). Neste trabalho, será realizada uma comparação dos controladores obtidos ao se considerar graus no conjunto  $g = \{0, 1, 2, 3\}$ .

Além disso, teve que se levar em consideração que este caso envolve tanto a minimização da variável  $\gamma$  (norma  $\mathcal{H}_\infty$ ), como da variável  $\mu$  (norma  $\mathcal{H}_2$ ), o que caracteriza um problema multiobjetivo. A escolha para lidar com tal situação foi amparada pelo Teorema do Pequeno Ganho, que afirma que basta a norma  $\mathcal{H}_\infty$  ser menor que um dado valor para garantir a robustez do controlador, sendo que, quanto mais próximo do valor mínimo for esse valor, maior será a robustez (KHALIL; GRIZZLE, 2002). Assim, foi optado por minimizar a variável  $\mu$ , mantendo o valor da variável  $\gamma$  próximo de seus valores mínimos, para em seguida se obter os ganhos dos controladores para todos os graus da matriz  $P(\alpha_1, \alpha_2)$ . Para isso, foram realizadas as seguintes etapas:

- primeiramente as matrizes  $B_{w2}$ ,  $C_{z2}$ ,  $D_{zu2}$  e  $D_{zw2}$  foram definidas de forma a se obter um sistema de controle que garantisse a estabilização do processo multivariável não-linear, via simulação, com  $\xi = 1$ , grau de  $P(\alpha_1, \alpha_2) = 1$  e minimizando a norma  $\mathcal{H}_2$ . Tal procedimento resultou nas seguintes matrizes:

$$B_{z2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,539 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$C_{z2} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 1,12 \\ 0 & 1,144 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$D_{zu2} = \begin{bmatrix} 5,24 & 0 \\ 0 & 0,98 \end{bmatrix} \quad (108)$$

$$D_{zw2} = 0 \quad (109)$$

- em seguida, utilizando as matrizes encontradas na primeira etapa, foram gerados novas simulações minimizando desta vez a norma  $\mathcal{H}_\infty$  para todos os graus da matriz  $P(\alpha_1, \alpha_2)$  e todos os valores da variável  $\xi$ , a fim de determinar os valores mínimos para  $\mu$  em cada caso. Depois de analisados os resultados de tais simulações, foi escolhido o  $\xi = 1$  devido a este apresentar melhores resultados na minimização da norma em questão e a Tabela 5 mostra os valores mínimos de  $\mu$  para os diferentes graus da matriz  $P(\alpha_1, \alpha_2)$ .

**Tabela 5 – Valores mínimos de  $\gamma$  para  $\xi = 1$**

Grau de $P(\alpha_1, \alpha_2)$	Valor mínimo de $\gamma$
0	143,38
1	12,03
2	12,06
3	11,30

Dessa forma foi definido  $\gamma = 150$  para ser realizada a síntese de todos os controladores com os mesmos parâmetros, a fim de tornar possível a comparação de desempenho entre os mesmos. E, por fim, foram geradas as matrizes dos ganhos de realimentação para cada caso, sendo que para este controlador cada matriz de realimentação  $K_1$  e  $K_2$  são compostas por quatro matrizes cada ( $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{13}$  e  $K_{14}$ ) e ( $K_{21}$ ,  $K_{22}$ ,  $K_{23}$  e  $K_{24}$ ), respectivamente, como pode ser observado nas Equações de (112) – (127). Isso se deve a modelagem *quasi*-LPV em função dos simplex unitários ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ) e do processo de homogeneização realizado.

$$K_1 = \alpha_1^{(1)} \alpha_1^{(2)} K_{11} + \alpha_2^{(1)} \alpha_1^{(2)} K_{12} + \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} K_{13} + \alpha_2^{(1)} \alpha_2^{(2)} K_{14} \quad (110)$$

$$K_2 = \alpha_1^{(1)} \alpha_1^{(2)} K_{21} + \alpha_2^{(1)} \alpha_1^{(2)} K_{22} + \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} K_{23} + \alpha_2^{(1)} \alpha_2^{(2)} K_{24} \quad (111)$$

E os valores encontrados para cada uma das matrizes que compõe  $K_x$  e  $K_q$  estão apresentadas nas Equações 112 – 127:

- Para grau de  $P(\alpha_1, \alpha_2) = 0$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -0,8076 & 1,2825 \\ 0,1082 & -1,6985 \end{bmatrix} \quad K_{21} = \begin{bmatrix} 0,0827 & -0,2383 \\ -0,0140 & 0,2159 \end{bmatrix} \quad (112)$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -0,7276 & 0,5439 \\ -0,1495 & -0,5459 \end{bmatrix} \quad K_{22} = \begin{bmatrix} 0,1032 & -0,1751 \\ 0,0159 & 0,0452 \end{bmatrix} \quad (113)$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} -0,2876 & 1,4398 \\ -0,3131 & -1,8177 \end{bmatrix} \quad K_{23} = \begin{bmatrix} 0,0228 & -0,2056 \\ 0,0429 & 0,1886 \end{bmatrix} \quad (114)$$

$$K_{14} = \begin{bmatrix} -0,0001 & 0,6459 \\ -0,8113 & -0,1345 \end{bmatrix} \quad K_{24} = \begin{bmatrix} -0,0012 & -0,0695 \\ 0,1017 & -0,1021 \end{bmatrix} \quad (115)$$

- Para grau de  $P(\alpha_1, \alpha_2) = 1$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -0,7796 & 1,3047 \\ 0,0979 & -1,7358 \end{bmatrix} \quad K_{21} = \begin{bmatrix} 0,0927 & -0,2176 \\ -0,0130 & 0,2210 \end{bmatrix} \quad (116)$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -0,7939 & 0,5544 \\ -0,1467 & -0,5644 \end{bmatrix} \quad K_{22} = \begin{bmatrix} 0,1206 & -0,1624 \\ 0,0190 & 0,0550 \end{bmatrix} \quad (117)$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} -0,2799 & 1,4703 \\ -0,3422 & -1,8700 \end{bmatrix} \quad K_{23} = \begin{bmatrix} 0,0224 & -0,2069 \\ 0,0545 & 0,2116 \end{bmatrix} \quad (118)$$

$$K_{14} = \begin{bmatrix} 0,0069 & 0,6579 \\ -0,8521 & -0,1231 \end{bmatrix} \quad K_{24} = \begin{bmatrix} -0,0018 & -0,0728 \\ 0,1170 & -0,0824 \end{bmatrix} \quad (119)$$

- Para grau de  $P(\alpha_1, \alpha_2) = 2$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -0,8688 & 1,1528 \\ 0,0997 & -1,7032 \end{bmatrix} \quad K_{21} = \begin{bmatrix} 0,1044 & -0,2193 \\ -0,0144 & 0,2178 \end{bmatrix} \quad (120)$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -1,0325 & 0,5525 \\ -0,1305 & -0,5700 \end{bmatrix} \quad K_{22} = \begin{bmatrix} 0,1361 & -0,1929 \\ 0,0192 & 0,0573 \end{bmatrix} \quad (121)$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} -0,3396 & 1,3738 \\ -0,3204 & -1,8669 \end{bmatrix} \quad K_{23} = \begin{bmatrix} 0,0302 & -0,2060 \\ 0,0536 & 0,2082 \end{bmatrix} \quad (122)$$

$$K_{14} = \begin{bmatrix} -0,0287 & 0,5264 \\ -0,9681 & -0,2390 \end{bmatrix} \quad K_{24} = \begin{bmatrix} 0,0019 & -0,0639 \\ 0,1315 & -0,0882 \end{bmatrix} \quad (123)$$

- Para grau de  $P(\alpha_1, \alpha_2) = 3$

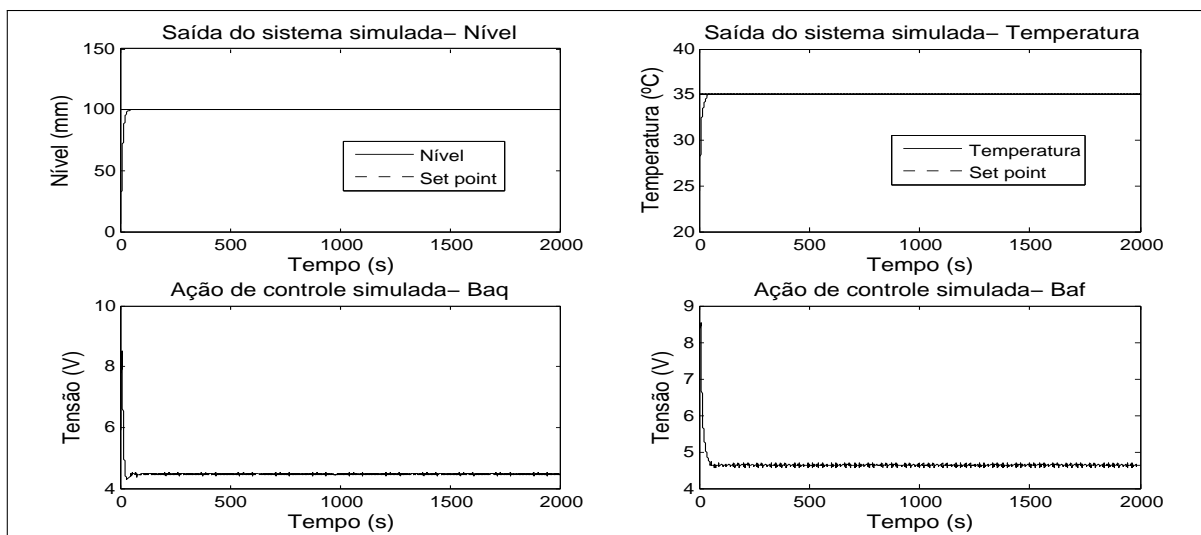
$$K_{11} = \begin{bmatrix} -0,9487 & 1,0792 \\ 0,1450 & -1,6950 \end{bmatrix} \quad K_{21} = \begin{bmatrix} 0,1137 & -0,2318 \\ -0,0174 & 0,2275 \end{bmatrix} \quad (124)$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -1,0077 & 0,5631 \\ -0,1586 & -0,5773 \end{bmatrix} \quad K_{22} = \begin{bmatrix} 0,1213 & -0,1932 \\ 0,0225 & 0,0549 \end{bmatrix} \quad (125)$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} -0,4134 & 1,3300 \\ -0,2666 & -1,8757 \end{bmatrix} \quad K_{23} = \begin{bmatrix} 0,0385 & -0,2157 \\ 0,0496 & 0,2162 \end{bmatrix} \quad (126)$$

$$K_{14} = \begin{bmatrix} -0,0264 & 0,4577 \\ -1,0473 & -0,2523 \end{bmatrix} \quad K_{24} = \begin{bmatrix} -0,0020 & -0,0569 \\ 0,1352 & -0,1013 \end{bmatrix} \quad (127)$$

A título de demonstração do desempenho obtido na simulação dos controladores projetados, foi escolhido o de grau 3 e os resultados podem ser observados na Figura 18. E como pode ser observado na mesma, o sistema de controle projetado estabilizou o sistema no ponto de operação desejado, em conjunto com uma ação de controle livre de ruídos.



**Figura 18 – Simulação do sistema de controle robusto misto.**

Fonte: Autoria própria

Com isso, ambos controladores foram projetados e simulados. A etapa seguinte consistiu na implementação prática dos mesmos. Os resultados estão apresentados no capítulo a seguir.



## 6 RESULTADOS FINAIS

Neste Capítulo estão apresentados os resultados experimentais obtidos por meio das implementações dos controladores citados na Seção ??.

De forma a identificar cada controlador, foi utilizada a seguinte nomenclatura:

- sistema de controle com grau de  $P(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \rightarrow$  controlador P0;
- sistema de controle com grau de  $P(\alpha_1, \alpha_2) = 1 \rightarrow$  controlador P1;
- sistema de controle com grau de  $P(\alpha_1, \alpha_2) = 2 \rightarrow$  controlador P2;
- sistema de controle com grau de  $P(\alpha_1, \alpha_2) = 3 \rightarrow$  controlador P3;
- sistema de controle linear  $\rightarrow$  controlador linear;

Para a análise do desempenho de cada controlador foram propostos quatro ensaios diferentes, de forma a verificar o comportamento de cada um deles em diferentes níveis de complexidade e pontos de operação ( $h(mm)$ ,  $T(^{\circ}C)$ ):

- Ensaio 1 - Referência única: ponto de operação em (100,30), com tempo de ensaio de 250 segundos;
- Ensaio 2 - Variação na referência de nível, mantendo a referência de temperatura fixa: pontos de operação em (100, 55), (150, 35) e (50, 35), com tempo de ensaio de 600 segundos;
- Ensaio 3 - Variação na referência de temperatura, mantendo a referência de nível fixa: pontos de operação em (100, 35), (100, 40) e (100, 30), com tempo de ensaio de 600 segundos e;
- Ensaio 4 - Variação simultânea nas referências de nível e temperatura: pontos de operação em (50, 30) e (100, 35), com tempo de ensaio de 250 segundos.

Em cada ensaio, tanto os reservatórios auxiliares, como os principais, foram mantidos nas temperaturas adequadas para a realização dos mesmos, sendo os de água quente mantidos à temperatura próxima a  $50^{\circ}C$  e os de água fria à temperatura ambiente, que no caso, estava em torno de  $24^{\circ}C$ . E o módulo de controle no início de cada ensaio foi mantido na mesma temperatura dos tanques de água fria.

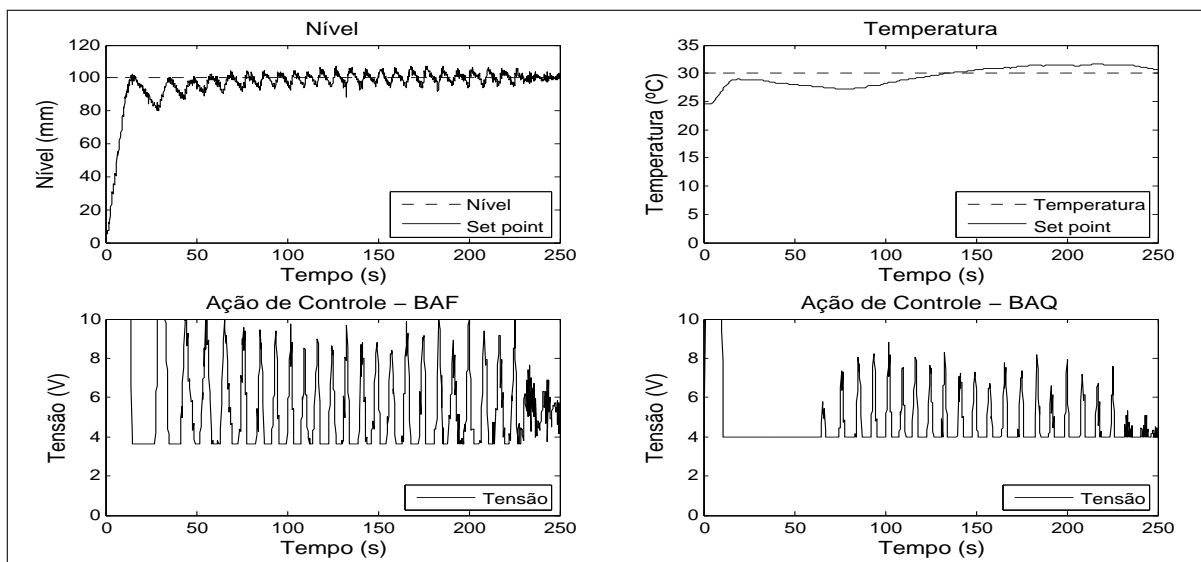
Vale ressaltar que, não foi possível manter tais temperaturas fixas nos valores desejados e sim em valores próximos aos adequados. Tal situação ocorreu tanto por fatores físicos da planta, como a potência de aquecimento dos tanques de água quente, como naturais, como a temperatura ambiente da água utilizada para o abastecimento dos tanques de água fria. Isto é um fator que aumenta complexidade para o controle, uma vez que as temperaturas iniciais e em regime de cada tanque têm influência direta na dinâmica do sistema.

Outro fator relevante foi o atraso de transporte da malha de temperatura que, mesmo havendo o tratamento desta não linearidade por meio do emprego da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , ainda não foi o suficiente para anular a sua influência negativa na dinâmica do sistema.

Estes fatores podem ser observados nas figuras dos resultados práticos a seguir, nas oscilações presentes tanto na variável de temperatura, como nas ações de controle aplicadas em cada bomba centrífuga.

A apresentação dos ensaios realizados é iniciada pelo Ensaio 1, sendo que as Figuras 19, 20, 21, 22 e 23 mostram, respectivamente, os resultados obtidos pelos sistemas de controle linear, P0, P1, P2 e P3, quando submetidos ao mesmo. Em tais figuras são apresentados tanto as saídas dos sistemas, como a ação de controle aplicada por cada controlador, para a comprovação e análise do desempenho dos controladores.

Para à análise dos resultados, considera-se satisfatório que os sistemas de controle estabilizem a malha multivariável não-linear, nos pontos de operação definidos, com máximo sobressinal igual ou inferior a 10% e oscilação inferior a 1[V] na ação de controle aplicada nos atuadores, quando em regime permanente.



**Figura 19 – Ensaio 1 – Controlador linear.**

**Fonte: Autoria própria**

Como pode ser observado na Figura 19 o sistema de controle linear não garantiu uma ação de controle dentro do especificado como satisfatório, o que já era esperado uma vez que o mesmo não foi projetado para esta região de controle. Portanto, considera-se que seu desempenho foi prejudicado, mesmo mantendo o sistema operando em uma região próxima aos *set points* definidos. Os demais controladores, por outro lado, estabilizaram o sistema aplicando uma ação de controle sem muitas variações bruscas na tensão de entrada das bombas, o que é um fator importante tendo em vista os desgastes físicos que podem ser gerados caso isso não ocorra.

Para uma melhor comparação dos resultados obtidos pelos controladores  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  foram utilizados como critérios de desempenho o máximo sobressinal ( $M_s$ ) e o ITAE (*Integral Time multiply Absolute Error*), que consiste no erro absoluto multiplicado pela integral de

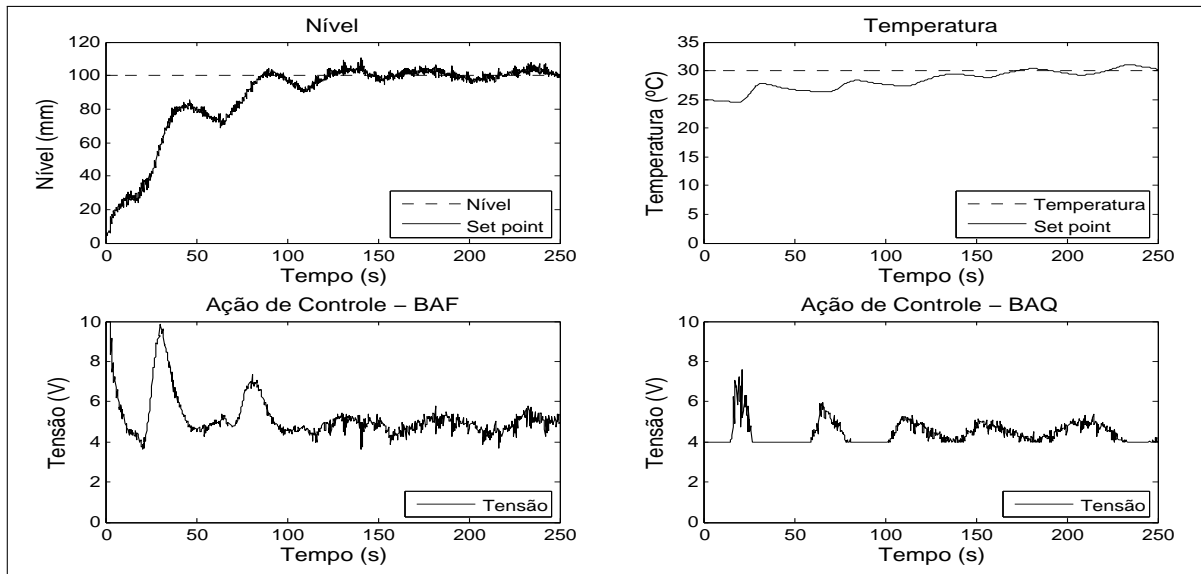


Figura 20 – Ensaio 1 – Controlador P0.

Fonte: Autoria própria

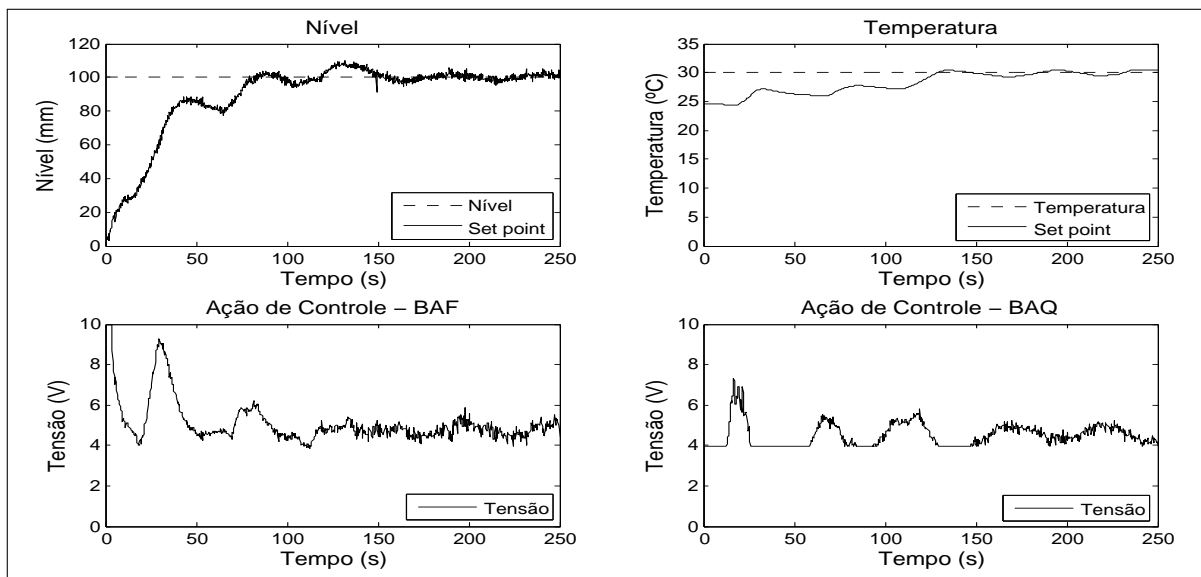
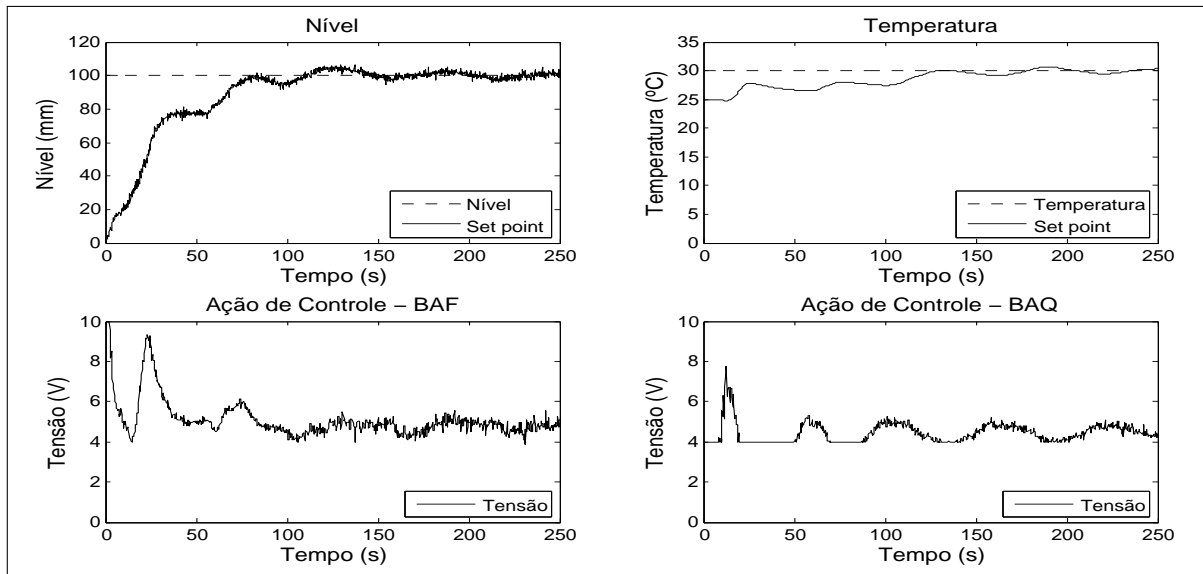


Figura 21 – Ensaio 1 – Controlador P1.

Fonte: Autoria própria

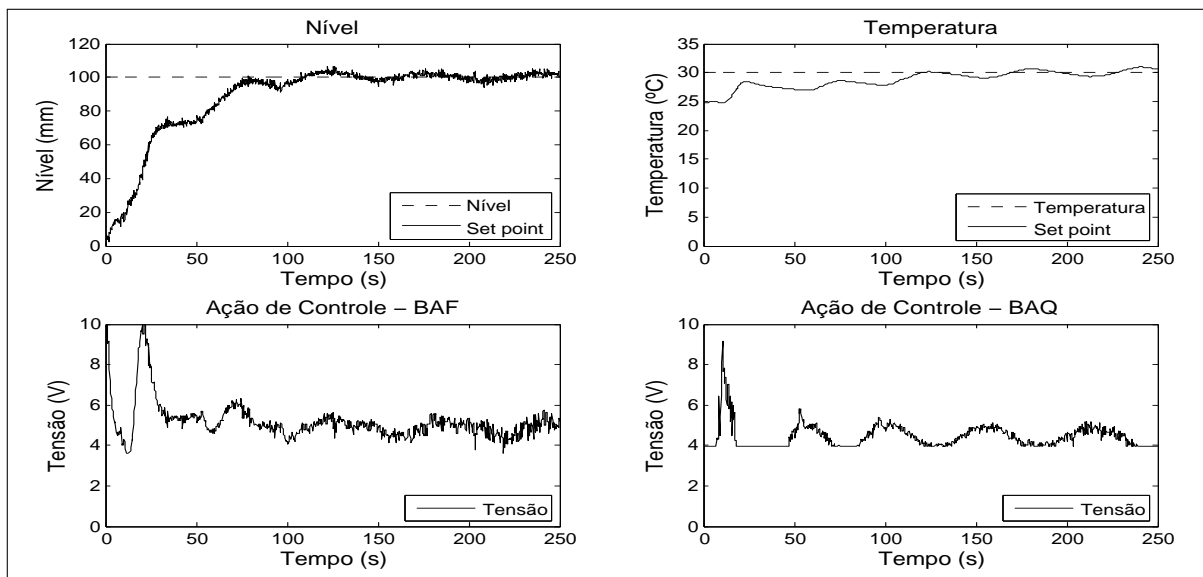
tempo e que, devido a sua formulação, dada pela Equação (128), atribui uma baixa relevância para o erro em regime transitório do sistema e prioriza o erro em regime permanente do mesmo (COSTA et al., 2015). Devido ao desempenho bem abaixo dos controladores  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  apresentado pelo controlador linear em todos os ensaios realizados, optou-se pela não inclusão do mesmo nas tabelas de ( $M_s$ ) e ITAE.

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt \quad (128)$$



**Figura 22 – Ensaio 1 – Controlador P2.**

Fonte: Autoria própria



**Figura 23 – Ensaio 1 – Controlador P3.**

Fonte: Autoria própria

A Tabela 6 mostra os valores desses critérios para cada um dos controladores no Ensaio 1. Sendo que, para uma melhor visualização, os valores dos ITAEs foram definidos em p.u (valor por unidade) onde foram escolhidos como base os valores máximos obtidos em cada caso.

Como pode ser observado na Tabela 6 apesar dos resultados serem bastante próximos, os controladores com graus maiores obtiveram um melhor resultado, principalmente com relação ao ITAE, que no caso dos controladores P2 e P3 foi apresentada uma melhora superior a 20% em relação ao controlador P0.

Em seguida os controladores foram submetidos ao Ensaio 2, onde foram testados

Tabela 6 – Valores de máximos sobressinais e ITAE para o Ensaio 1.

Controladores	$M_s$ - Nível (%)	ITAE - Nível(p.u.)	$M_s$ - Temperatura (%)	ITAE - Temperatura (p.u.)
P0	6,4	1	3,3	1
P1	8	0,825	2,0	0,908
P2	3,9	0,756	2,2	0,772
P3	3,8	0,785	3,2	0,739

quanto a robustez em relação a variação da referência de nível, com a referência de temperatura mantida constante. Os resultados deste ensaio estão apresentados nas Figuras 24, 25, 26, 27 e 28, que mostram, respectivamente, os sistemas de controle linear, P0, P1, P2 e P3. Para melhor visualização dos degraus tanto positivo, como negativo aplicados, os instantes em que cada um ocorreu foi destacado nos gráficos por meio de uma linha pontilhada.

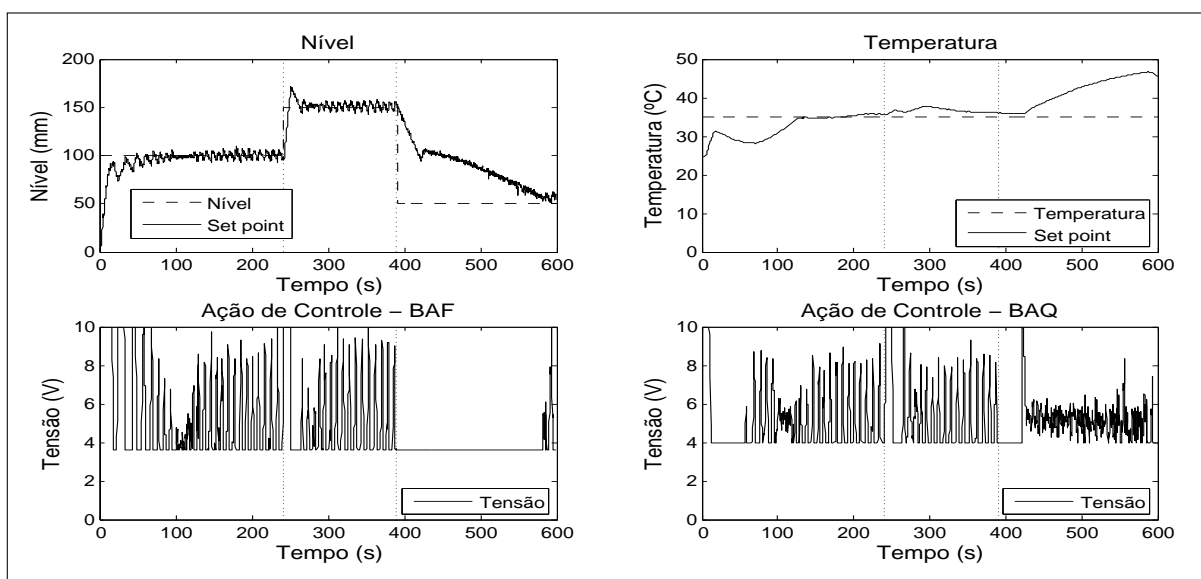


Figura 24 – Ensaio 2 – Controlador linear.

Fonte: Autoria própria

Neste ensaio é possível observar que no primeiro ponto de operação definido (100, 55), o sistema de controle linear realizou a estabilização do sistema, uma vez que foi projetado para operar em torno do mesmo. Para o segundo ponto obteve um resultado razoável, mantendo o sistema estabilizado próximo ao *set point* definido, porém, isto não ocorreu para o terceiro ponto de operação.

Já os controladores P0, P1, P2 e P3 novamente estabilizaram o sistema nos três pontos definidos e como pode ser observado, o terceiro ponto de operação apresentou uma maior dificuldade para os mesmos, gerando um sobressinal mais acentuado na variável de temperatura. Vale ressaltar também o desempenho obtido pelos controladores P0 e P2 no segundo ponto de operação, onde ambos estabilizaram o sistema sem apresentar oscilações e com uma ação de controle bastante superior aos demais sistemas de controle, no que se refere às oscilações apresentadas pelos mesmos.

A Tabela 7 mostra os valores dos máximos sobressinais e ITAEs de cada um dos controladores resultantes do Ensaio 2.

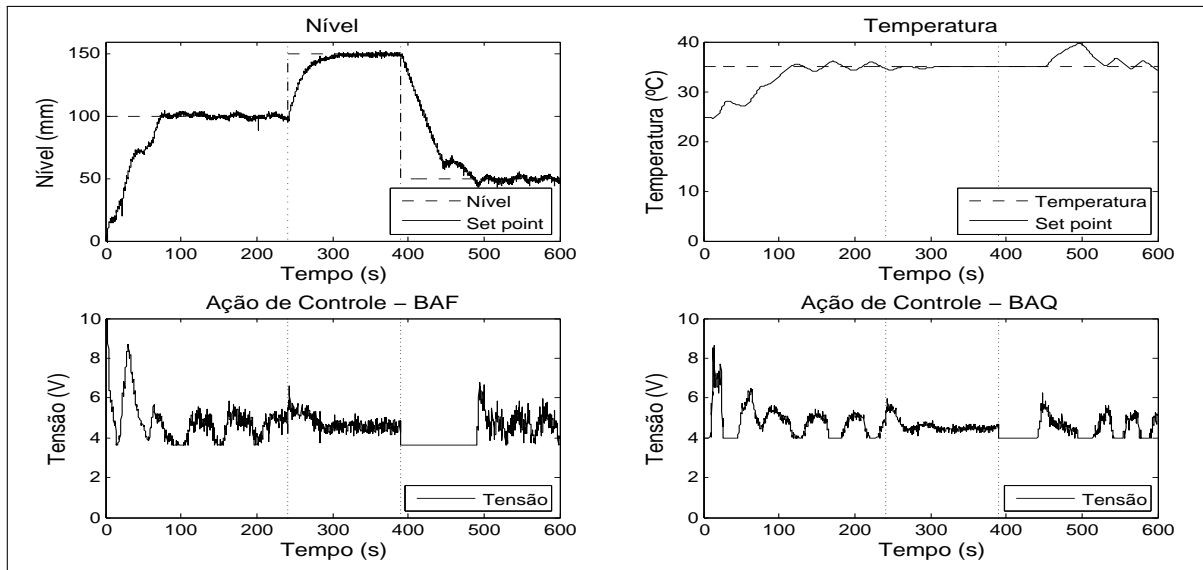


Figura 25 – Ensaio 2 – Controlador P0.

Fonte: Autoria própria

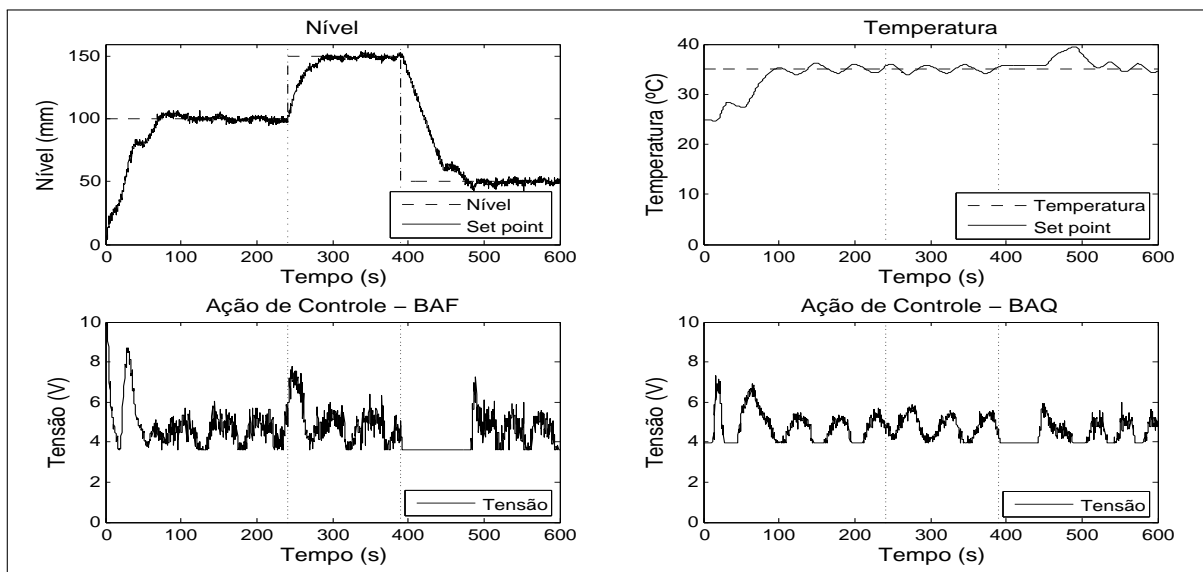


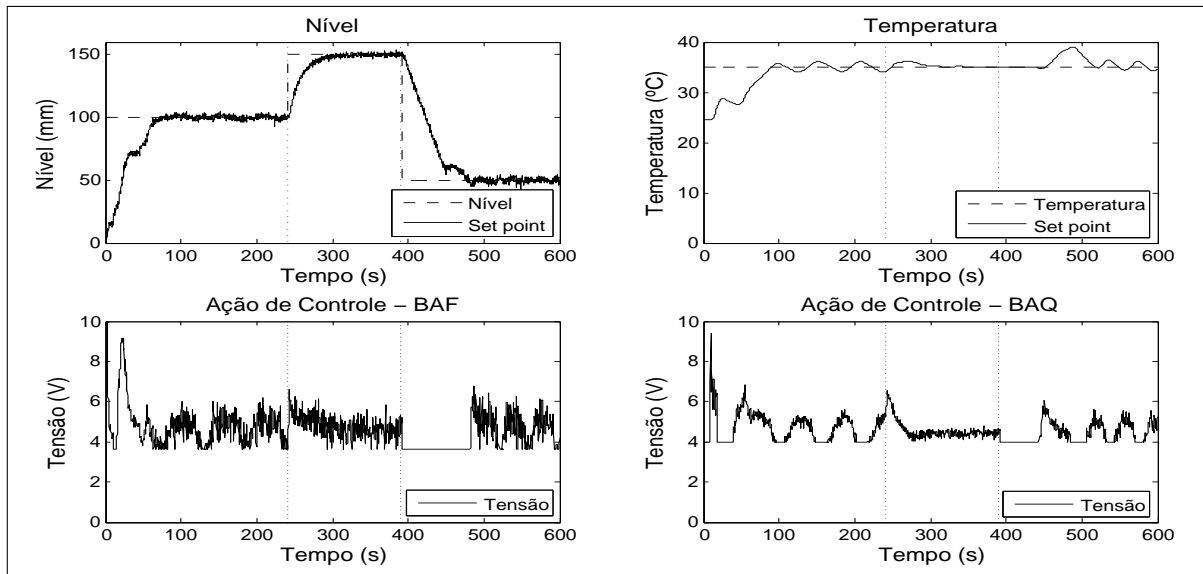
Figura 26 – Ensaio 2 – Controlador P1.

Fonte: Autoria própria

Tabela 7 – Valores de máximos sobressinais e ITAE para o Ensaio 2.

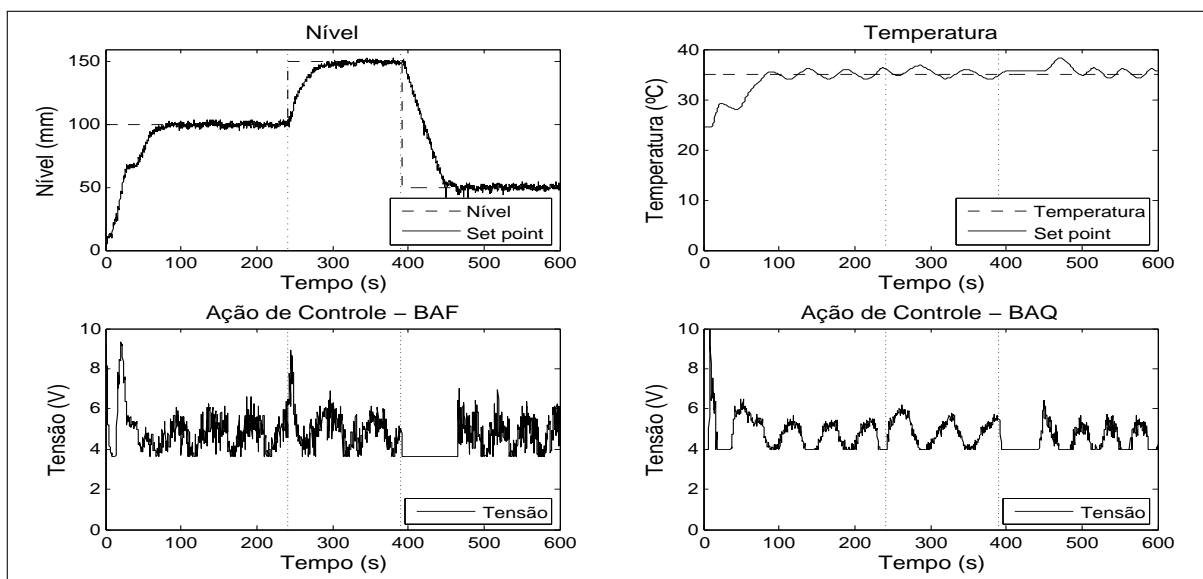
Controladores	$M_s$ - Nível (%)	ITAE - Nível (p.u.)	$M_s$ - Temperatura (%)	ITAE - Temperatura (p.u.)
P0	7,2	1	12	1
P1	7,8	0,898	12,7	0,961
P2	6,9	0,956	10,6	0,822
P3	6,9	0,806	10,6	0,809

Como pode ser observado na Tabela 7 novamente os resultados dos sistemas de controle foram bem próximos com relação aos critérios avaliados e os controladores com grau de P maior obtiveram um melhor desempenho, apresentando tanto menores sobressinais, como menores ITAEs.



**Figura 27 – Ensaio 2 – Controlador P2.**

Fonte: Autoria própria



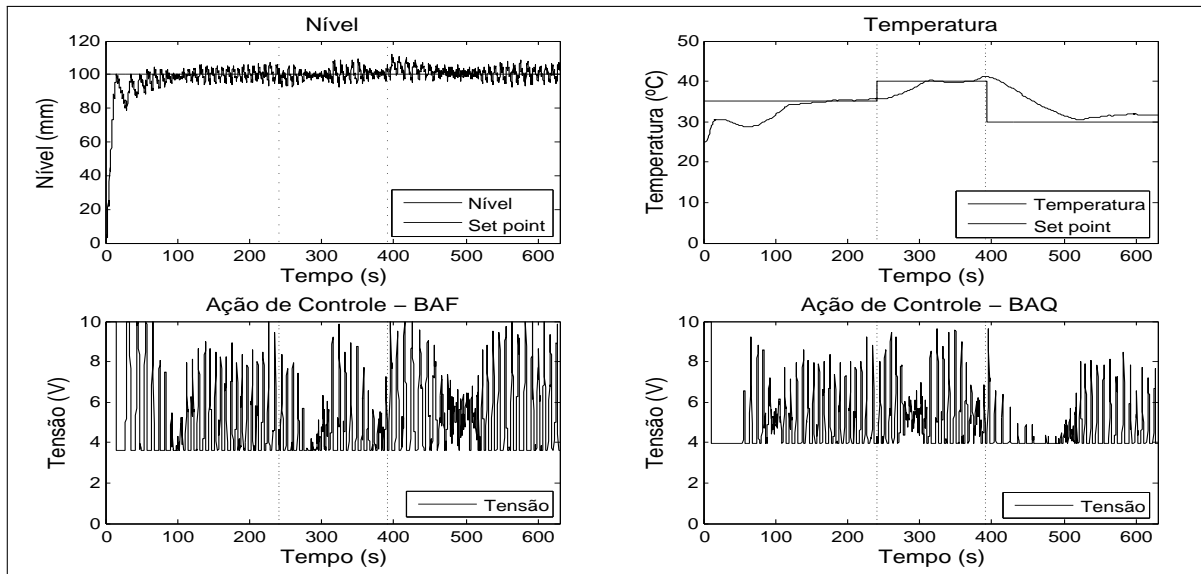
**Figura 28 – Ensaio 2 – Controlador P3.**

Fonte: Autoria própria

A robustez dos controladores à variações na referência de temperatura (degrau positivo e degrau negativo), com a referência de nível fixa, foi verificada Ensaio 3. Os resultados estão apresentados nas Figuras 29, 30, 31, 32 e 33, que mostram, respectivamente, os sistemas de controle linear, P0, P1, P2 e P3.

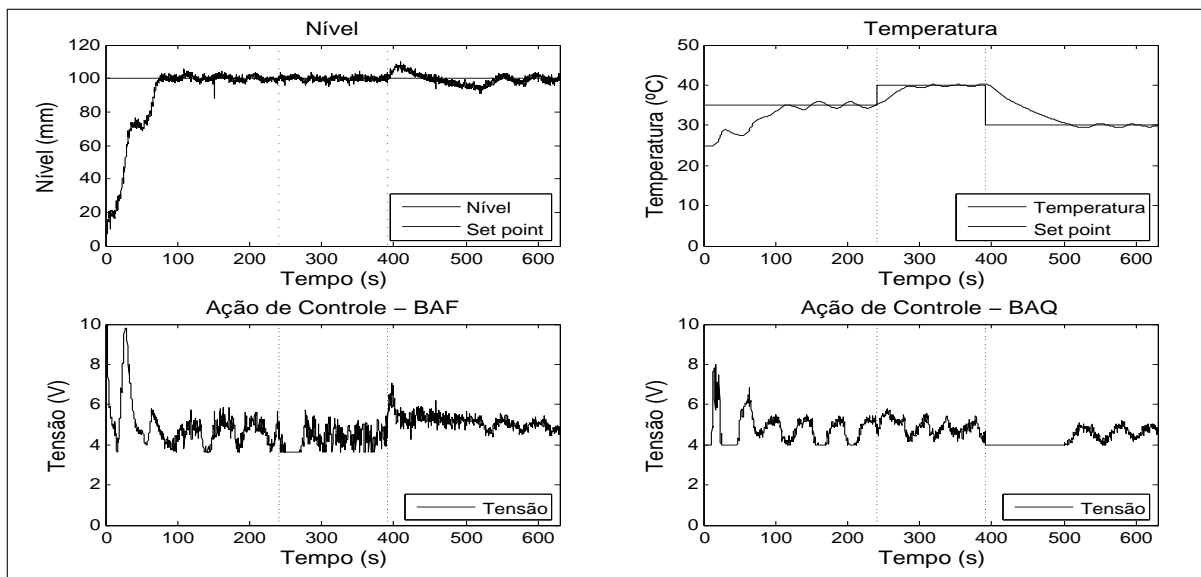
Novamente os sistemas de controle estabilizaram o sistema nos *set points* definidos e como já esperado o pior desempenho apresentado foi o do controlador linear, não atendendo tanto os requisitos de máximo sobressinal, como o da máxima oscilação da ação de controle, estipulados como satisfatórios.

Os resultados obtidos pelos demais controladores foram de novo bem próximos e



**Figura 29 – Ensaio 3 – Controlador linear.**

Fonte: Autoria própria



**Figura 30 – Ensaio 3 – Controlador P0.**

Fonte: Autoria própria

novamente os controladores P0 e P2 se destacaram dos demais no segundo ponto de operação, onde ambos apresentaram menos oscilações tanto na saída do sistema, como na ação de controle desenvolvida. E a Tabela 8 mostra os valores dos máximos sobressinais e ITAEs resultantes do Ensaio 3, para cada um dos controladores.

Neste ensaio ocorreu uma inversão no desempenho dos controladores com relação aos critérios mostrados na Tabela 8, onde pode ser observado que, para a variável de temperatura o melhor resultado foi apresentado por P0, contrariando o esperado. Já para a variável de nível o melhor resultado foi do controlador P2.

Por fim, os sistemas de controle foram submetidos a um distúrbio simultâneo, onde



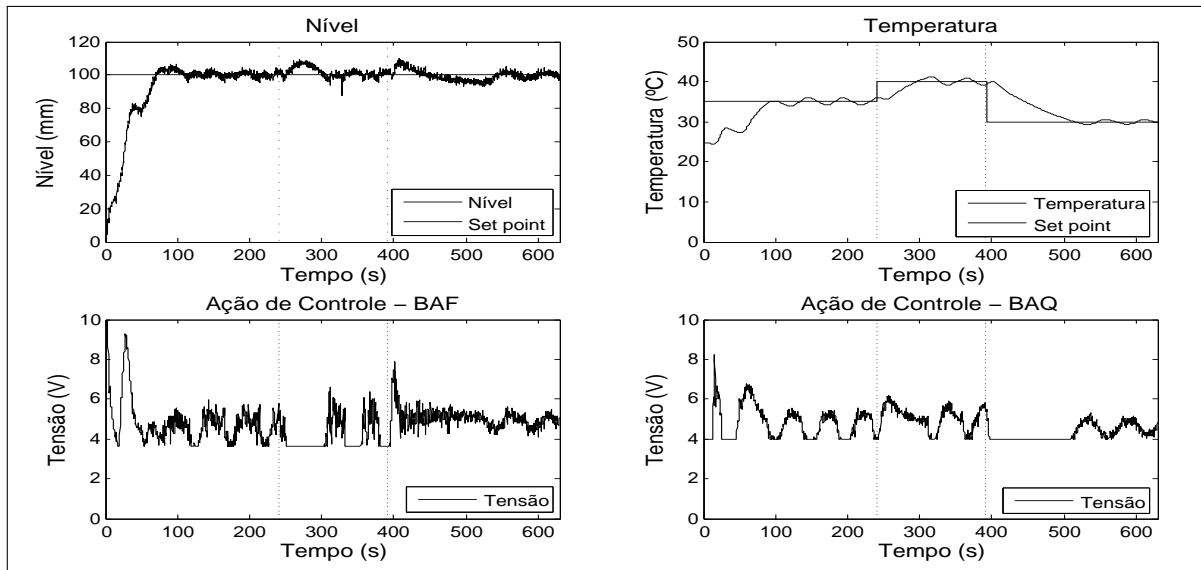


Figura 31 – Ensaio 3 – Controlador P1.

Fonte: Autoria própria

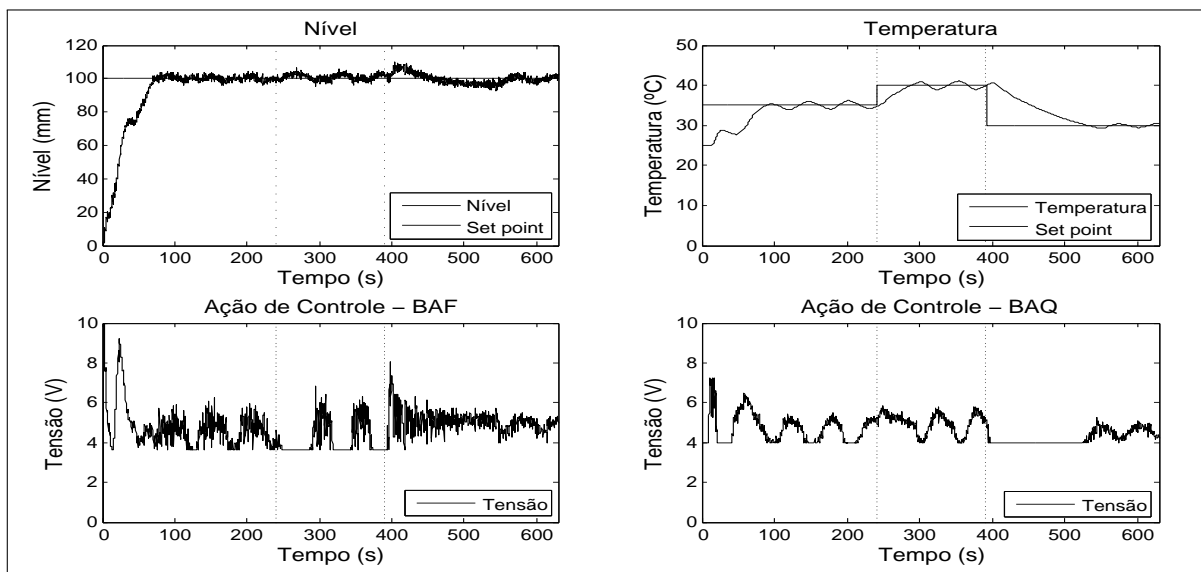


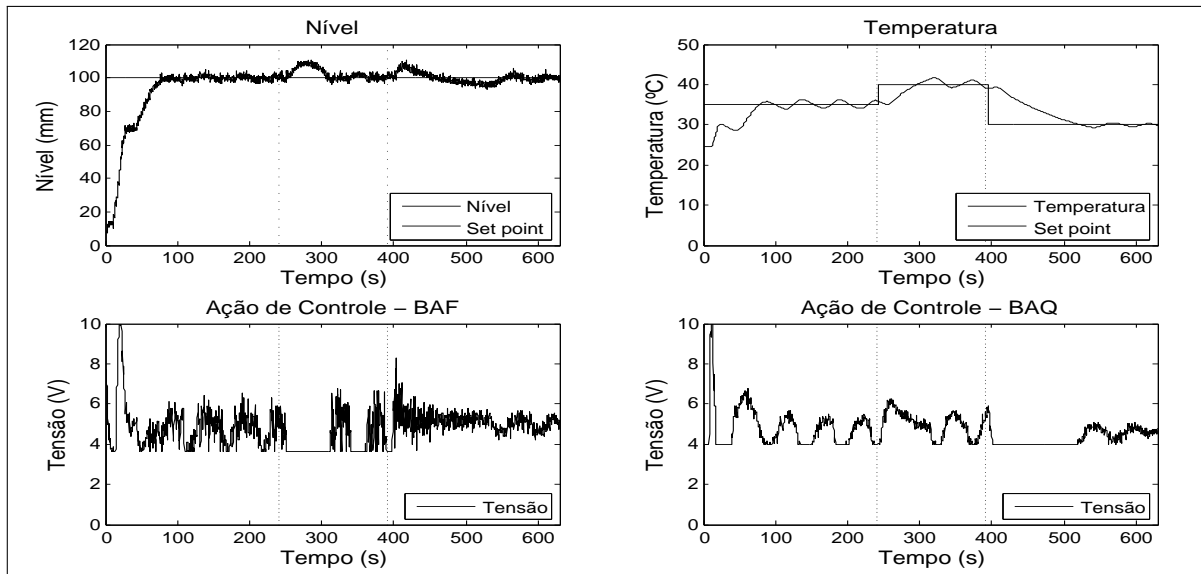
Figura 32 – Ensaio 3 – Controlador P2.

Fonte: Autoria própria

Tabela 8 – Valores de máximos sobressinais e ITAE para o Ensaio 3.

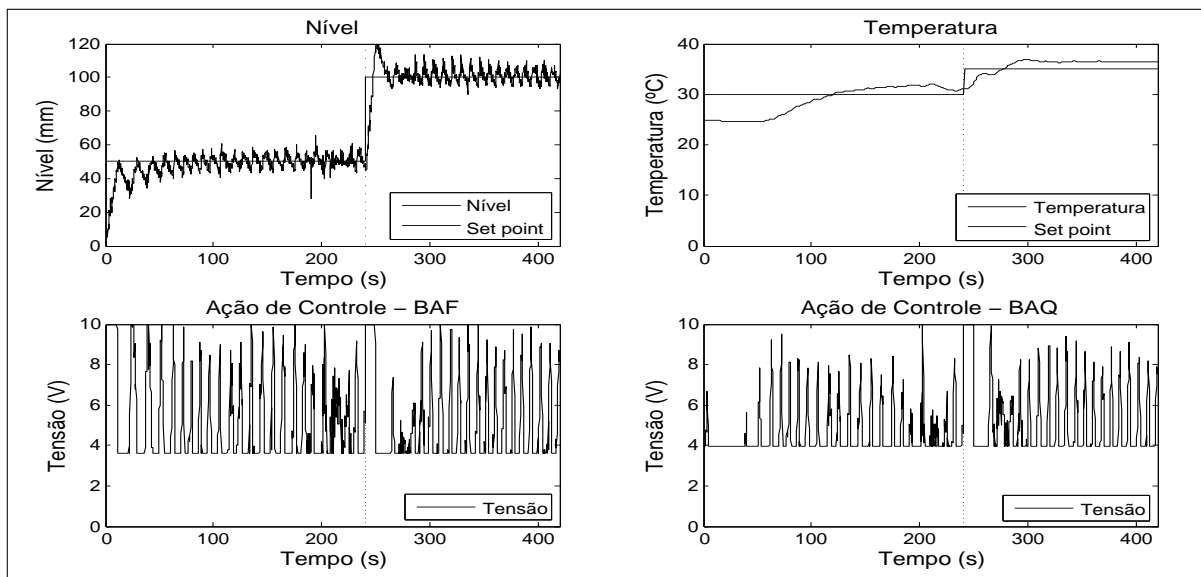
Controladores	$M_s$ - Nível (%)	ITAE - Nível (p.u.)	$M_s$ - Temperatura (%)	ITAE - Temperatura (p.u.)
P0	8,1	1	2,7	0,903
P1	7,8	0,956	3,3	0,978
P2	7,3	0,881	2,6	1
P3	8,6	0,928	4,2	0,934

foi aplicado um degrau positivo nas referências de nível e temperatura ao mesmo tempo, a fim de verificar o comportamento dos mesmos quando sujeitos a tal situação. Os resultados estão apresentados nas Figuras 34, 35, 36, 37 e 38, que mostram, respectivamente, os sistemas de controle linear, P0, P1, P2 e P3.



**Figura 33 – Ensaio 3 – Controlador P3.**

Fonte: Autoria própria

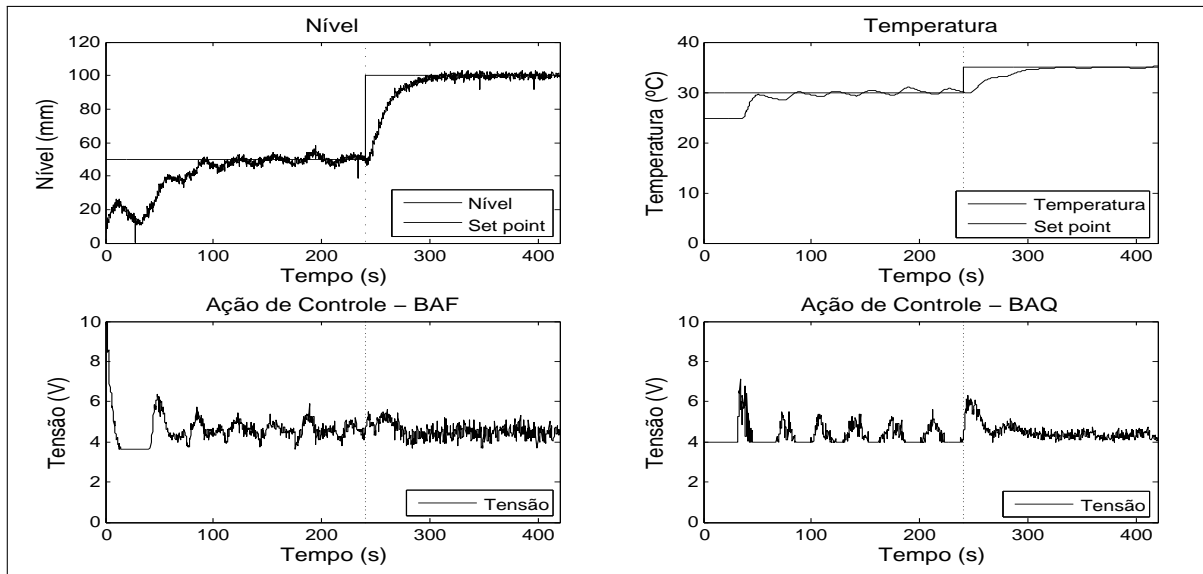


**Figura 34 – Ensaio 4 – Controlador linear.**

Fonte: Autoria própria

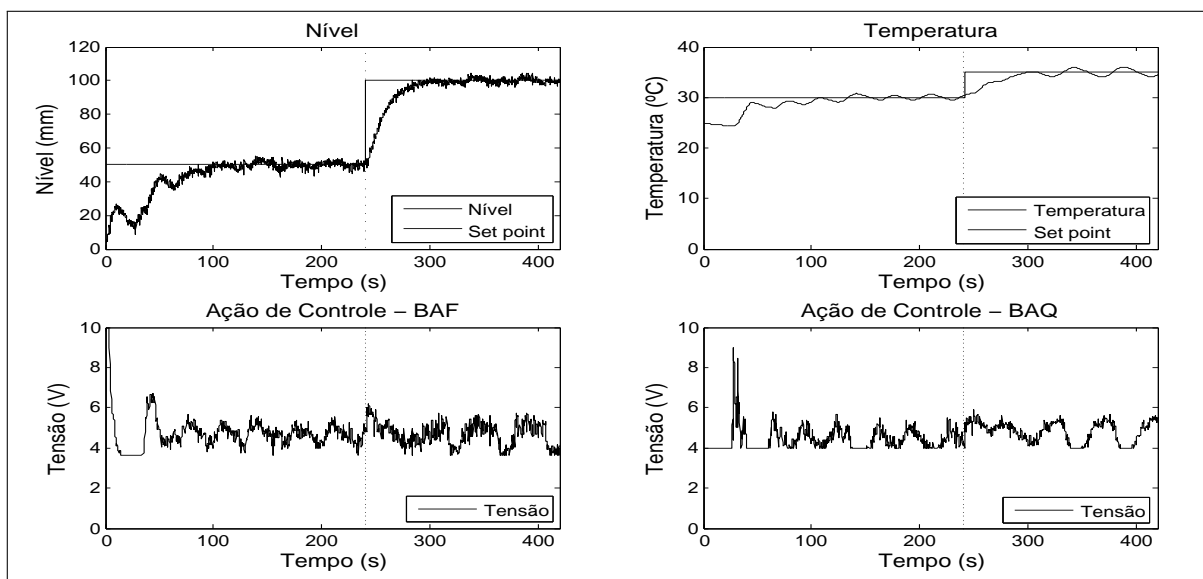
Neste ensaio o controlador linear manteve a variável de nível oscilando próximo aos *set points*, porém não conseguiu estabilizar a temperatura, mantendo um erro em regime constante, como pode ser observado na Figura 34.

Já os demais controladores apresentaram robustez suficiente ao distúrbio simultâneo, estabilizando o sistema nos pontos de operações definidos. Onde pode ser destacado o desempenho do controlador P2, que, como pode ser observado na Figura 37 apresentou novamente menos oscilações tanto nas saídas do sistema, como na ação de controle, com relação aos demais controladores. O controlador P0 apresentado na Figura 35 também apresentou um bom desempenho na estabilização da variável de temperatura e na ação



**Figura 35 – Ensaio 4 – Controlador P0.**

Fonte: Autoria própria



**Figura 36 – Ensaio 4 – Controlador P1.**

Fonte: Autoria própria

de controle aplicada, porém, isso não ocorreu na estabilização da variável de nível no primeiro ponto de operação.

A Tabela 9 mostra os valores dos máximos sobressinais e ITAEs de cada um dos controladores resultantes do Ensaio 4.

O melhor desempenho do controlador P2 é confirmado pela Tabela 9, sendo que de uma forma geral o mesmo apresentou melhores resultados nos critérios avaliados, com menores sobressinais e ITAE da variável de nível.

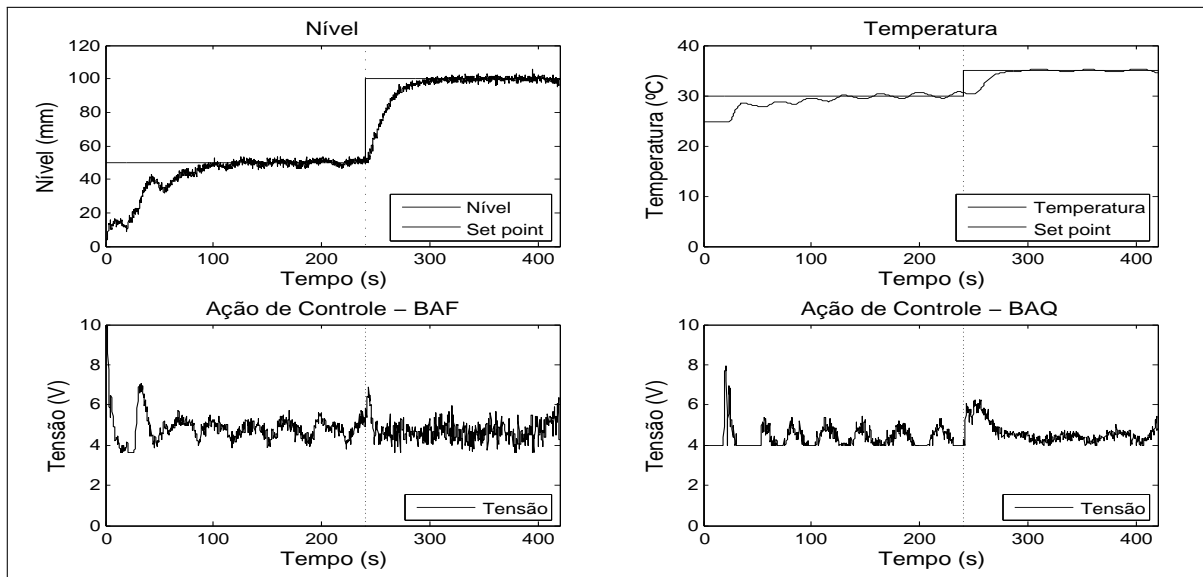


Figura 37 – Ensaio 4 – Controlador P2.

Fonte: Autoria própria

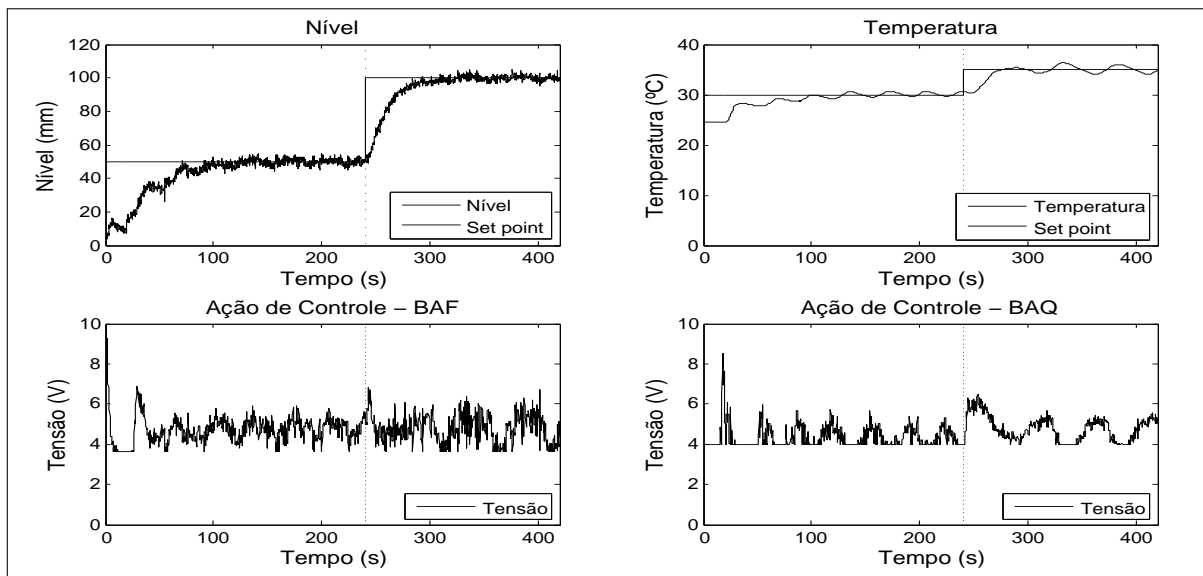


Figura 38 – Ensaio 4 – Controlador P3.

Fonte: Autoria própria

Tabela 9 – Valores de máximos sobressinais e ITAE para o Ensaio 4.

Controladores	$M_s$ - Nível (%)	ITAE - Nível(p.u.)	$M_s$ - Temperatura (%)	ITAE - Temperatura (p.u.)
P0	8,7	1	3,3	0,763
P1	6,3	0,813	3,0	1
P2	3,7	0,759	2,1	0,804
P3	3,8	0,841	3,7	0,924

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de Dissertação foi realizada uma investigação, síntese e validação de duas estratégias de controle para a estabilização de um sistema multivariável não linear, sendo uma composta por um controlador linear  $\mathcal{H}_\infty$  e a outra por um controlador robusto misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .

Para a contextualização dos temas envolvidos, foi apresentada uma revisão bibliográfica contendo os principais aspectos teóricos e ferramentas utilizadas em todas as etapas do trabalho, que foi iniciada pela identificação e obtenção do modelo da dinâmica do sistema considerado e finalizada pelos elementos que compuseram os sistemas de controle desenvolvidos.

Também foram abordados, em caráter estrutural e tecnológico, o sistema multivariável não linear controlado, onde foi explicado o funcionamento do mesmo e apresentados os elementos que o compõem, e as ferramentas utilizadas para a implementação dos sistemas de controle elaborados, compostas pelo *software* de desenvolvimento LabVIEW e pelo controlador lógico programável CompactRIO.

A apresentação dos resultados foi dividida entre a parte teórica e simulada, Capítulo 5, e a parte prática, Capítulo 6. Sendo que, na primeira foram abordadas as etapas realizadas e os resultados provenientes das mesmas, desde a apresentação do modelo aproximado da dinâmica do sistema, até a composição e simulação dos sistemas de controle robusto misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  e linear  $\mathcal{H}_\infty$ . Já na segunda parte, foram caracterizados e apresentados os resultados dos ensaios experimentais estipulados para a validação e análise de desempenho dos controladores desenvolvidos, por meio de gráficos contendo as saídas do sistema e a ação de controle aplicadas nas bombas centrífugas e tabelas com aspectos relevantes de cada ensaio.

A análise dos resultados práticos referentes ao controlador linear  $\mathcal{H}_\infty$  possibilitou a verificação de que o mesmo não só estabilizou o sistema no ponto de operação para o qual foi projetado (100,35), mas também em regiões próximas a este (100,30) e (100,40), porém com um desempenho abaixo do considerado como satisfatório, principalmente com relação à variável de temperatura e as ações de controle aplicadas, as quais apresentaram oscilações acentuadas em todos os ensaios. Assim, optou-se por não incluir este controlador nas tabelas de máximos sobressinais e ITAEs para uma análise mais específica de cada ensaio.

Já os controladores P0, P1, P2 e P3 estabilizaram o sistema nos quatro ensaios propostos, apresentando em cada um deles um bom desempenho tanto no controle da variável de nível, como na variável de temperatura, em conjunto com uma boa ação de controle. Por meio das tabelas contendo os máximos sobressinais e ITAEs de cada ensaio, foi possível observar que os controladores sintetizados com a matriz de estabilidade P com graus maiores (2 e 3) obtiveram um melhor desempenho em ambos os quesitos, validando assim a hipótese já fundamentada na literatura sobre o tema.

Com isso, os objetivos propostos foram atingidos e as contribuições advindas dos mesmos foram trazidas com a realização deste trabalho, que proporcionou a obtenção do modelo aproximado do sistema e aplicação de um sistema de controle robusto, que poderão ser utilizados tanto como base, como para suporte teórico na elaboração de trabalhos

futuros.

## 7.1 CONTINUIDADE DO TRABALHO

Para a continuidade deste trabalho propõe-se a modelagem do sistema multi-variável não linear de forma a incluir o atraso de transporte, que ocorre na variável de temperatura, na dinâmica do sistema, o que irá realizar uma melhor aproximação da dinâmica real do mesmo e por consequência possibilitará o desenvolvimento de um sistema de controle com um melhor desempenho.

Também propõe-se a o cálculo da matriz de saturação  $E$  do *anti-windup* por meio de métodos vigentes e propostos na literatura, de forma a encontrar valores que possam melhorar a atuação do saturador, o que irá proporcionar uma melhora também no desempenho para o controle do sistema em questão.

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. Introdução à identificação de sistemas. **Editora UFMG, Belo Horizonte**, v. 2, 2007.
- AGULHARI, C. M. **Estabilidade e Controle de Sistemas Lineares e Variantes no Tempo com Parâmetros Incertos**. 222 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 2013.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. de; PERES, P. L. Robust lmi parser: a computational package to construct lmi conditions for uncertain systems. In: **XIX Brazilian Conference on Automation (CBA 2012)**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 2298–2305.
- ALBERTOS, P.; SALA, A. **Multivariable Control Systems: An Engineering Approach**. London: Springer, 2004.
- ALMEIDA, J. P. L. S. **Técnicas Fuzzy Aplicadas ao Controle Descentralizado**. 82 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, PR, Brasil, 2014.
- BERGMAN, T. L.; INCROPERA, F. P.; LAVINE, A. S. **Fundamentals of heat and mass transfer**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- BILIK, P.; KOVAL, L.; HAJDUK, J. Compactrio embedded system in power quality analysis. In: **Computer Science and Information Technology, 2008. IMCSIT 2008. International Multiconference on**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 577–580.
- BLANCHINI, F.; MIANI, S. **Set-theoretic methods in control**. [S.l.]: Springer, 2008.
- BOUOUDEN, S.; CHADLI, M.; FILALI, S.; HAJJAJI, A. E. Fuzzy model based multivariable predictive control of a variable speed wind turbine: lmi approach. **Renewable Energy**, Elsevier, v. 37, n. 1, p. 434–439, 2012.
- BOYD, S. P.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. [S.l.]: SIAM, 1994.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. 3rd. ed. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., 1995.
- CHEN, N.; WEN, J. T. Lpv model identification for motion control systems. In: IEEE. **American Control Conference (ACC), 2013**. [S.l.], 2013. p. 6823–6828.
- CHUN, W.; RONG, Q. Mixed robust variance control design of pmsm servo system [j]. **Electric Machines and Control**, v. 5, p. 013, 2013.
- CORNIELES, E.; SAAD, M.; GAUTHIER, G.; SALIAH-HASSANE, H. Modeling and simulation of a multivariable process control. In: IEEE. **Industrial Electronics, 2006 IEEE International Symposium on**. [S.l.], 2006. v. 4, p. 2700–2705.
- COSTA, B. L.; ALMEIDA, J. P. L. S. de; ANGELICO, B. et al. Application of optimization heuristics in tuning decentralized pid controllers. In: IEEE. **Industry Applications (INDUSCON), 2012 10th IEEE/IAS International Conference on**. [S.l.], 2012. p. 1–8.

COSTA, B. L. G.; ANGÉLICO, B. A.; GOEDEL, A.; CASTOLDI, M. F.; GRACIOLA, C. L. Differential evolution applied to dte drive for three-phase induction motors using an adaptive state observer. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Springer, v. 26, n. 4, p. 403–420, 2015.

DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P. P.; FRANCIS, B. et al. State-space solutions to standard  $h_2$  and  $h_\infty$  control problems. **Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE**, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989.

DULLERUD, G. E.; PAGANINI, F. **A course in robust control theory: a convex approach**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

FARHOODI, M.; BEHESHTI, M. T. Extended linear matrix inequality approach to multiobjective output feedback controller design. In: IEEE. **India Conference, 2008. INDICON 2008. Annual IEEE**. [S.l.], 2008. v. 2, p. 542–547.

FRANKE, D.; KRAUS, F. **Design Methods of Control Systems: Selected Papers from the IFAC Symposium, Zurich, Switzerland, 4-6 September 1991**. [S.l.]: Elsevier, 2014.

FREIRE, V. **Controle Quantizado Há via Realimentação de Estados**. 56 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, PR, Brasil, 2014.

GAHINET, P.; APKARIAN, P.; CHILALI, M. Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty. **Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE**, v. 41, n. 3, p. 436–442, 1996.

GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H.; BERNUSSOU, J.  $H_2$  and  $h_\infty$  robust output feedback control for continuous time polytopic systems. **Control Theory & Applications, IET, IET**, v. 1, n. 5, p. 1541–1549, 2007.

GHAOUI, L. E.; NICULESCU, S.-I. **Advances in linear matrix inequality methods in control**. [S.l.]: Siam, 2000.

GUERRERO, J. M.; CHANDORKAR, M.; LEE, T.-L.; LOH, P. C. Advanced control architectures for intelligent microgrids, part i: decentralized and hierarchical control. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 60, n. 4, p. 1254–1262, 2013.

HAUGHTON, D. A.; HEYDT, G. A linear state estimation formulation for smart distribution systems. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 28, n. 2, p. 1187–1195, 2013.

HINAMOTO, T.; YOKOYAMA, S.; INOUE, T.; ZENG, W.; LU, W.-S. Analysis and minimization of  $l_2$ -sensitivity for linear systems and two-dimensional state-space filters using general controllability and observability gramians. **Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, IEEE**, v. 49, n. 9, p. 1279–1289, 2002.

HU, T.; LIN, Z. **Control systems with actuator saturation: analysis and design**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001.

KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. **Nonlinear systems**. [S.l.]: Prentice hall New Jersey, 2002.

LARSEN, R. W. **LabVIEW for Engineers**. [S.l.]: Pearson Higher Ed, 2011.



- LATHI, B. P. **Linear systems and signals**. [S.l.]: Oxford University Press, 2009.
- LÖFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: IEEE. **Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on**. [S.l.], 2004. p. 284–289.
- MACKENROTH, U. **Robust control systems: theory and case studies**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- MARCOS, A.; BALAS, G. J. Development of linear-parameter-varying models for aircraft. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 27, n. 2, p. 218–228, 2004.
- MAZO, M.; TABUADA, P. Decentralized event-triggered control over wireless sensor/actuator networks. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 56, n. 10, p. 2456–2461, 2011.
- MOREIRA, C. W. J. **Identificação linear a parâmetros variantes no tempo de sistemas não-lineares**. Tese (Doutorado) — Instituto Militar de Engenharia, 2008.
- NELLES, O. **Nonlinear system identification: from classical approaches to neural networks and fuzzy models**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- OGATA, K.; MAYA, P. Á.; LEONARDI, F. **Engenharia de controle moderno**. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2010.
- OLIVEIRA, M. C. D.; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Extended  $h_2$  and  $h$  norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 75, n. 9, p. 666–679, 2002.
- OLIVEIRA, R. **Estudo de Robustez em Sistemas Lineares por Meio de Relações em Termos de Desigualdades Matriciais Lineares**. 222 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 2006.
- OLIVEIRA, R. C.; BLIMAN, P.-A.; PERES, P. L. Robust lmis with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications. In: IEEE. **Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on**. [S.l.], 2008. p. 2226–2231.
- OLIVEIRA, R. C.; PERES, P. L. Parameter-dependent lmis in robust analysis: characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via lmi relaxations. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, 2007.
- ORIHUELA, L.; MILLAN, P.; VIVAS, C.; RUBIO, F. R. Improved  $h_2/h_\infty$  control design for time delay systems: Synthesis and analysis. In: IEEE. **Control Conference (ECC), 2014 European**. [S.l.], 2014. p. 767–772.
- PAGANINI, F.; FERON, E. Linear matrix inequality methods for robust  $h_2$  analysis: a survey with comparisons. In: SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS. **Advances in linear matrix inequality methods in control**. [S.l.], 1999. p. 129–151.
- RAMLI, N. M.; HUSSAIN, M. A.; JAN, B. M. Multivariable control of a debutanizer column using equation based artificial neural network model inverse control strategies. **Neurocomputing**, Elsevier, 2016.

- SADABADI, M. S.; KARIMI, A. Fixed-order  $h_\infty$  and  $h_2$  controller design for continuous-time polytopic systems: An lmi-based approach. In: **European Control Conference**. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1132–1137.
- SASTRY, S. **Nonlinear systems: analysis, stability, and control**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- SHAMMA, J. S. Analysis and design of gain scheduled control systems. ph. d. thesis. 1988.
- SHAMMA, J. S. An overview of lpv systems. In: **Control of linear parameter varying systems with applications**. [S.l.]: Springer, 2012. p. 3–26.
- SHEN, H.; PARK, J. H.; ZHANG, L.; WU, Z.-G. Robust extended dissipative control for sampled-data markov jump systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 87, n. 8, p. 1549–1564, 2014.
- SILVA, F. H.; GUEDES, R. B.; ALBERTO, L. F.; BRETAS, N. G. Função energia generalizada de controle para estabilização de sistemas não lineares. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, SciELO Brasil, v. 20, n. 2, p. 133–145, 2009.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable feedback control: analysis and design**. [S.l.]: Wiley New York, 2007.
- SMITH, C. A.; CORRIPIO, A. B. **Principles and practice of automatic process control**. [S.l.]: Wiley New York, 1997.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization methods and software**, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.
- SUYKENS, J. A.; VANDEWALLE, J. P. **Nonlinear Modeling: advanced black-box techniques**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- TAI, L.; XIAO-YAN, H.; LI, Z.; QI-XIANG, W.; DIAN-FEI, X.; HAI-JIAN, L. Neural network control methods of wind energy conversion systems. 2014.
- TÓTH, R. **Modeling and identification of linear parameter-varying systems**. [S.l.]: Springer, 2010.
- TROFINO, A.; BARBOSA, K.; COUTINHO, D. Controle robusto. **Apostila da disciplina de controle robusto do curso de pós-graduação de engenharia elétrica da UFSC**, 2000.
- TROFINO, A.; COUTINHO, D. F.; BARBOSA, K. A. Improved  $h_2$  and  $h_\infty$  conditions for robust analysis and control synthesis of linear systems. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, SciELO Brasil, v. 16, n. 4, p. 427–434, 2005.
- XIA, M.; ANTSAKLIS, P.; GUPTA, V.; MCCOURT, M. Determining passivity using linearization for systems with feedthrough terms. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 60, n. 9, p. 2536–2541, 2015.
- XU, D.; JIANG, B.; SHI, P. A novel model-free adaptive control design for multivariable industrial processes. **Industrial Electronics, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 61, n. 11, p. 6391–6398, 2014.

YEDAVALLI, R. K. Robust control of uncertain dynamic systems. **AMC**, Springer, v. 10, p. 12, 2014.

ZHANG, H.; SHI, Y.; MEHR, A. S. Robust  $h_\infty$  pid control for multivariable networked control systems with disturbance/noise attenuation. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Wiley Online Library, v. 22, n. 2, p. 183–204, 2012.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. et al. **Robust and optimal control**. [S.l.]: Prentice hall New Jersey, 1996.