UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

RENATA BARALDI DE PAULI BASTOS

SÍNTESE DE CONTROLADORES MISTO $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ PARA SISTEMAS DE CONTROLE VIA REDE

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

RENATA BARALDI DE PAULI BASTOS

SÍNTESE DE CONTROLADORES MISTO $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ PARA SISTEMAS DE CONTROLE VIA REDE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Engenharia Elétrica" – Área de Concentração: Controle e Automação Industrial.

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

P327 Pauli, Renata Baraldi de

Síntese de controladores misto H2/H∞ para sistemas de controle via rede / Renata Baraldi de Pauli Bastos. – 2017.

65 f. : il. color. ; 31 cm

Orientador: Cristiano Marcos Agulhari.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Cornélio Procópio, 2017.

Bibliografia: p. 63-65.

1. Sistemas de parâmetros distribuídos. 2. Controladores elétricos. 3. Controle robusto. 4. Engenharia Elétrica – Dissertações. I. Agulhari, Cristiano Marcos, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD (22. ed.) 621.3

Biblioteca da UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

TERMO DE APROVAÇÃO

Título da Dissertação Nº 036:

Síntese de Controladores Misto H2/H∞ para Sistemas de Controle via Rede.

por

Renata Baraldi de Pauli Bastos

Orientador: **Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari**

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA – Área de Concentração: Sistemas Eletrônicos Industriais, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – PPGEE – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Câmpus Cornélio Procópio, às 14h do dia 09 de Março de 2017. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos professores:

Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari
(Presidente)

Prof. Dr . Márcio Júnior Lacerda
(UFSJ)

Prof. Dr . Emerson Ravazzi Pires da Silva
(UTFPR-CP)

Visto da coordenação:

Alessandro do Nascimento Vargas
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa.

Dedico esta dissertação às pessoas mais especiais em minha vida:

Meu marido João Henrique pelo amor, por sempre estar ao meu lado me ajudando a tomar as melhores decisões, pelo incentivo e apoio, mesmo nos momentos de desespero.

Meus pais Dirceu e Ofélia pelo amor incondicional, pelas orações e também por acreditarem sempre em tudo que faço.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus pela vida e também por me dar a oportunidade de estar concluindo mais esta etapa em minha vida, ao Senhor Jesus Cristo por ser minha fortaleza nos momentos de dificultade e a Nossa Senhora por me acalmar durante as tribulações.

Ao meu marido que esteve sempre ao meu lado, compartilhando de cada vitória e seguiu esta caminhada comigo.

À minha família em especial meus pais e irmãs que sempre me incentivaram e acompanharam toda esta tragetória.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari por ser um ótimo exemplo de professor, orientador e pessoa, por estar presente em cada etapa do trabalho, por solucionar as inumeras dúvidas e principalmente por todos os ensinamentos.

Aos demais professores do PPGEE, por todos conhecimento trasmitido e à Tati por sempre estar disponível para ajudar nas questões burocráticas.

Aos meus colegas de classe, em especial ao Daniel, Jacqueline e Luciana, por todo apoio, paciência e principalmente por me ajudarem em todos os momentos deste trabalho. Tenho um carinho enorme por vocês.

Aos meus colegas do LabControl, Thainara, Marcos, Ronaldo, Anderson, por todo apoio e por tornarem os dias no laboratório mais divertidos.

A Universidade Tecnológica Federal do Paraná, por disponibilizar a estrutura necessária para a conclusão desta dissertação de mestrado.

À CAPES e Fundação Araucária pela bolsa de estudos.

Deus dá as batalhas mais difíceis aos seus melhores soldados.

(Papa Francisco)

RESUMO

BASTOS, Renata Baraldi de Pauli. SÍNTESE DE CONTROLADORES MISTO $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ PARA SISTEMAS DE CONTROLE VIA REDE. 67 f. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

Este trabalho propõe uma nova técnica de síntese de controladores via rede (*Networked Control System* - NCS), projetado para sistemas lineares a parâmetros variantes no tempo (*Linear Parameter Varying* - LPV), considerando que tanto a entrada de controle, quanto as variáveis de estados, estão sujeitas a atrasos inerentes à rede. Para o fato, é proposta a utilização de um método de análise de estabilização robusta com base na Função de Lyapunov-Krasovskii, usando a técnica de controle misto $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ através da resolução de um conjunto de desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalitiy* - LMIs). O trabalho apresenta o desenvolvimento da condição de síntese do controlador $\mathscr{H}_2$ e, para o controlador $\mathscr{H}_\infty$, foram utilizadas as condições já estabelecidas pela literatura. As LMIs são tratadas de forma politópica, considerando as variáveis dependentes de parâmetros e de um grau polinomial arbitrário. A validação do método de controle será através de um exemplo numérico, comparando os resultados obtidos com o controle misto, controle $\mathscr{H}_\infty$ e controle $\mathscr{H}_2$.

Palavras-chave: NCS, LPV, Sistemas com atrasos, Controle Misto $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$, Norma $\mathscr{H}_2$, Norma $\mathscr{H}_\infty$.

ABSTRACT

BASTOS, Renata Baraldi de Pauli. SYNTHESIS OF MIXED $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ CONTROLLERS FOR NETWORKED CONTROL SYSTEMS. 67 f. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

The problem addressed in this work is a Networked Control System (NCS) design for linear parameter varying (LPV) systems, considering that both the input signal and states variables are subject to delays inherent to the network. This work proposes the use of a robust stabilization method based on the Lyapunov-Krasovskii functional, using a mixed $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ control technique, which relies on the resolution of a set of Linear Matrix Inequalities (LMIs) conditions. To this end, it is developed a synthesis condition for the $\mathscr{H}_2$ controller and, for the $\mathscr{H}_\infty$ controller, conditions established in the literature are used. The LMI problem is solved in a polytopical way, considering that the variables are polynomially dependent of parameters, being the polynomials of arbitrary degree. The effectiveness of the technique is illustrated by a numerical experiment, comparing the results obtained with the mixed control, $\mathscr{H}_\infty$ control and $\mathscr{H}_2$ control.

Keywords: NCS, LPV, Delayed Systems, Mixed Control $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$, $\mathscr{H}_2$ Norm, $\mathscr{H}_\infty$ Norm.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

NCS	Networked Control Systems
LMIs	Linear Matrix Inequalities
LPV	Linear Parameter Varying
LIT	Linear Invariante no Tempo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de controle, desde o mais simples até o mais complexo, têm em comum a sua estrutura básica, composta por atuadores (dispositivos capazes de alterar o valor físico de certas grandezas), controladores (calculam a quantidade de energia que o atuador deve entregar ao sistema para que o mesmo antinja o comportamento desejado) e os sensores (transformam o valor da grandeza medida em um sinal elétrico, compatível com o controlador). Normalmente, estes dispositivos são interligados ponto-a-ponto por cabos, responsáveis pelo fluxo de informações (TAN et al., 2015).

Entretanto, com os avanços tecnológicos na área de controle e automação industria tem-se observado uma crescente utilização de sistemas de controle em que os atuadores, controladores e sensores são fisicamente separados e ligados por uma rede. Esse tipo de estrutura é conhecida como sistema de controle via rede, ou em inglês, *Networked Control Systems* (NCS). Os NCS representam a evolução das arquiteturas de controle, pois facilitam a manutenção em respeito aos cabos e tem menor custo de aplicação (ZHANG et al., 2013).

Em NCS existem alguns fenômenos que podem degradar o desempenho do sistema e até mesmo desestabilizá-lo, sendo necessário, portanto, considerá-los na síntese dos controladores. Um dos problemas mais encontrados quando se lida com NCS é o atraso de transmissão entre os dispositivos do sistema. De fato, em muitos trabalhos este é o centro de discussões sobre NCS (TAN et al., 2015; JUNGERS et al., 2013; ZHANG et al., 2013; TIPSUWAN; Y., 2003). Além disso, a discretização do sinal de transmissão, importante para o controle digital, também pode ser modelada como um atraso de tempo, isto é, os dados são amostrados e decodificados em um formato digital, criando uma diferença de tempo na comunicação do sinal do sensor para o controlador e do controlador para o atuador (TIPSUWAN; Y., 2003). Os atrasos de comunicação em NCS podem ser categorizados como se segue (TIPSUWAN; Y., 2003):

- Tempo de espera: relacionado com a espera da disponibilidade da rede para enviar a informação.

- Tempo de processamento: relacionado com o tempo de processamento dos dados pela rede.

- Propagação: relacionado com o tempo de transmissão de dados através da rede.

De acordo com Zhang et al. (2001), o atraso global de rede pode variar no tempo de forma constante ou aleatória, dependendo do protocolo de rede. O atraso variante no tempo é mais comumente encontrado na literatura, por representar um número maior de características e situações reais.

Outro problema que deve ser considerado ao trabalhar com NCS é a possibilidade de ocorrer perdas de pacotes, esta ocorrência apresenta grande influência na estabilização e desempenho deste tipo de sistema. Alguns dados podem ser perdidos durante o tráfego de informações, devido a erros ou congestionamento da rede, assim o receptor não recebe as informações enviadas e, portanto, elas não podem ser processadas. Segundo Naghstabrizi e Hespanha (2005), dependendo do protocolo de rede utilizado, a perda de pacotes pode ser vista como um atraso adicional. Nesta situação, considera-se que a informação não tenha sido perdida e sim retransmitida diante de uma falha na transmissão. Este atraso proveniente da perda de pacotes soma-se ao atraso de comunicação e desta forma há um acréscimo no limitante superior deste atraso.

Além dos problemas inerentes aos NCS para a síntese do controlador, também se faz necessário considerar que muitas vezes não se tem todas as informações necessárias sobre o sistema devido à presença de incertezas, como ruídos, imprecisões ou distúrbios que dificultam o controle. Assim, para garantir a eficiência do controle nesta situação, torna-se recomendável incluir estas incertezas ou perturbações no modelo da planta (SCHERER et al., 1997).

Nas últimas décadas, houve um notável avanço na utilização de estratégias baseadas na resolução de um conjunto de desigualdades matriciais lineares, ou do inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs), para gerar controladores que garantam a robustez do sistema na presença de incertezas (FARHOOD; BEHESHTI, 2008). A principal vantagem da utilização destas ferramentas matemáticas é a possibilidade de obter os ganhos de realimentação que estabilizem o sistema e que otimizem algum parâmetro de desempenho, como por exemplo a minimização da energia de controle ou maximização da robustez aos ruídos (BOYD et al., 1994).

Esta metodologia tem sido bastante utilizada para solucionar problemas envolvendo sistemas lineares dependente de parâmetros variantes no tempo, do inglês *Linear Parameter Varying* (LPV) (AGULHARI et al., 2013; BORGES et al., 2010; TAN et al., 2015), e sistemas incertos com limitantes conhecidos. Abordar os sistemas LPV é importante, pela sua utilização na modelagem de sistemas não-lineares ou variantes no tempo englobando, portanto, uma ampla variedade de sistemas (BRIAT, 2015).

Desta forma, este trabalho aborda o projeto de sistemas de controle em rede para sistemas LPV robustos aos efeitos dos atrasos, sendo que a técnica de controle proposta considera que tanto a entrada de controle quanto as variáveis de estados são afetadas por atrasos inerentes ao NCS. A síntese do controlador é realizada através da resolução de um conjunto de condições na forma de LMIs, utilizando o conceito de controle misto que envolve a otimização das normas $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$, garantindo assim a robustez do sistema considerando a otimização de critérios de desempenho, como a minimização da energia de controle.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Vários estudos na literatura especializada apresentam resultados que buscam obter um controlador eficiente tendo em consideração as incertezas e atrasos dos NCS. Yu et al. (2004) apresentaram uma abordagem para sistemas NCS em tempo contínuo e discreto com perdas de pacotes e atrasos de comunicação, utilizando um conjunto de LMIs para garantir a estabilidade dos sistemas. Foi realizada a modelagem dos sistemas considerando os problemas inerentes ao NCS na síntese do controlador, sendo que para o sistema em tempo contínuo foi considerada a Função Lyapunov-Razumikhin e para o sistema em tempo discreto foi considerada a Função de Lyapunov–Krasovskii (LFK) como base para obtenção das condições de síntese.

Uma abordagem diferente foi utilizada por Fridman et al. (2004), que apresentaram uma estratégia para controle robusto de sistemas discretos. O sistema foi modelado em tempo contínuo, considerando que a entrada de controle sofre um atraso limitado. Para garantir a eficiência desta abordagem, o atraso deve ser inferior ao valor da taxa de amostragem, e esta deve ser considerada baixa para que o sistema discreto se comporte de maneira equivalente ao sistema contínuo. Assim, como o trabalho anterior, o conjunto de LMIs também teve como base uma Função de Lyapunov–Krasovskii, para a síntese do controlador de realimentação de estados, as incertezas foram tratadas de forma politópica, resultando em um conjunto de LIMs definidas no vértice do politopo

O método proposto por Naghstabrizi e Hespanha (2005) trata a perda de pacotes como influenciador direto no atraso, ou seja, quando ocorre a perda de pacote o limite superior do atraso aumenta. O controle é analisado de duas formas diferentes, antecipativa e não antecipativa, sendo que na antecipativa há a inclusão de um estado preditivo. A Função de Lyapunov-Krasovskii também é utilizada para análise de estabilidade, porém diferente dos trabalhos citados anteriormente, os autores desenvolveram um método iterativo para a resolução das LMIs.

Wang et al. (2007) estudaram a estabilização de sistemas com parâmetros lineares variantes no tempo e com atraso variável na entrada. Foi desenvolvido um controlador por realimentação de estados, utilizando um conjunto de LMIs parametrizadas obtidas a partir da Função de Lyapunov–Krasovskii dependente de parâmetros. Segundo os autores o método foi eficiente, uma vez que foi possível estabilizar o sistema mesmo quando os limites do atraso foram alterados.

Em Ramezanifar et al. (2013), Suplin et al. (2007), Zope et al. (2012), são apresentadas estratégias de controle baseada na resolução de um conjunto de LMIs para a síntese de controladores $\mathscr{H}_\infty$, utilizando uma Função de Lyapunov–Krasovskii como base para o desenvolvimento do conjunto de LMI. Além disso, o método apresentado por Ramezanifar et al. (2013) aborda a mesma estrégia utilizada por Fridman et al. (2004) ao modelar o sistema em tempo contínuo para representar o sistema em tempo discreto e tratou as condições LMIs de forma discreta.

Em geral, os trabalhos considerados na revisão bibliográfica usam versões diferentes de FLK, alteradas de forma a satisfazer os objetivos de cada trabalho, a quantidade de termos das funções é o que diferencia cada uma delas, sendo mantida apenas a estrutura básica da função.

1.2 OBJETIVOS

Os principais objetivos deste trabalho são apresentados a seguir:

1.2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é propor uma técnica para a síntese de controladores por realimentação de estados, robustos, para sistemas LPV com atrasos na entrada de controle e também nas variáveis de estados, provenientes do controle via rede. A técnica é baseada na resolução de um conjunto de LMIs, obtidas através das condições de existência do custo garantido $\mathscr{H}_2$ e custo grantido $\mathscr{H}_\infty$, tratadas de forma politópica.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos são divididos da seguinte forma:

- Reproduzir o trabalho de Ramezanifar et al. (2013), porém utilizando a forma politópica no tratamento do conjunto de LMIs para o custo garantido $\mathscr{H}_\infty$, ao invés do método de discretização proposto pelos autores.
- Validar a eficiência da abordagem politópica no tratamento do conjunto de LMIs para a custo garantido $\mathscr{H}_\infty$, comparando com os resultados obtidos por Ramezanifar et al. (2013).
- Desenvolver uma condição LMI de síntese de controladores considerando o custo garantido $\mathscr{H}_2$, a partir da Função de Lyapunov-Krasovskii, analisando duas formas diferentes de minimização para a norma $\mathscr{H}_2$.
- Testar e validar a eficiência e o desempenho da condição LMI para o custo garantido $\mathscr{H}_2$ desenvolvida.
- Simular via Matlab/Simulink o controle Misto $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ e comparar os resultados das estratégias consideradas.

1.3 JUSTIFICATIVA

Conforme analisado, são encontrados na literatura diversos trabalhos envolvendo o controle de sistemas com atrasos de comunicação. Porém, é comum, nestes trabalhos, que a síntese do controlador considere apenas as condições do custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ para obter um controlador robusto. O trabalho proposto considera para a síntese do controlador a técnica de controle misto, em que além do custo garantido $\mathscr{H}_\infty$, a norma $\mathscr{H}_2$ também é incluída. Com isso, além de garantir a robustez do sistema com atrasos inerentes aos NCS, será considerado o desempenho do controlador e da resposta do sistema. Portanto, a principal contribuição deste trabalho é o desenvolvimento de uma condição de síntese, garantindo um limitante superior para a norma $\mathscr{H}_2$ para sistemas com entrada de controle sujeita a atrasos, contendo parâmetros variantes no tempo. Além disso, outra contribuição do trabalho refere-se ao tratamento das condições LMI, que neste caso serão tratadas de forma politópica, utilizando a ferramenta computacional ROLMIP para a programação e resolução das LMIs (AGULHARI et al., 2012). Assim, é possível considerar todas as possíveis respostas que atendem a condição estabelecida e desta forma, mesmo se houver algum ruído no parâmetro variante, o controlador ainda garante a estabilidade do sistema.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica com os conceitos básicos que serão utilizados ao longo do trabalho. Serão apresentados conceitos de sistemas LPV, controle via rede, dando enfoque aos sistemas com atrasos, desigualdades matriciais, controle misto, o custo garantido $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$.
- Em seguida, no Capítulo 3, é apresentada a metodologia que será utilizada para o desenvolvimento deste trabalho.
- O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos neste trabalho, onde estão os desenvolvimentos das LMIs, bem como os teoremas para as condições de análise de estabilidade e síntese dos controladores.
- A validação das condições de síntese dos controladores é apresentada no Capítulo 5, através da simulação em um exemplo numérico.
- No Capítulo 6 estão as considerações finais e propostas para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentados os principais tópicos teóricos utilizados para a elaboração deste trabalho. Primeiramente, serão apresentados os conceitos básicos e a estrutura a respeito de sistemas afetados por parâmetros variantes no tempo, assim como os sistemas de controle via rede, dando um enfoque aos sistemas com atrasos. Também serão apresentados os conceitos de desigualdades matriciais lineares e, por último, controle misto (o custo garantidos $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$).

2.1 SISTEMAS LPV

Sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV) são sistemas com dinâmica linear cuja descrição matemática depende de parâmetros, com valores variantes no tempo. Os valores destes parâmetros são geralmente considerados como limitados e pertencentes a um conjunto conhecido, dependendo da modelagem do sistema, podendo ou não ser medidos em tempo real.

A análise e síntese para sistemas LPV têm sido temas de pesquisa de diversos trabalhos nesta área (BORGES et al., 2010; MONTAGNER et al., 2009; PAIJIMANS et al., 2008). Este forte interesse deve-se ao fato de que este tipo de sistema pode ser utilizado para representar uma vasta gama de problemas reais (BRIAT, 2015). Segundo Chen e Wen (2013), esta técnica foi citada pela primeira vez em 1988 como uma alternativa para a identificação de sistemas não-lineares, onde definiram os mesmos como um conjunto parametrizado de sistemas lineares invariantes no tempo (LIT).

Um sistema LPV pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B_1(\rho(t))w(t) + B_2(\rho(t))u(t), \\ z(t) &= C(\rho(t))x(t) + D_1(\rho(t))w(t) + D_2(\rho(t))u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída controlada, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ refere-se às perturbações e $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle. $A(.)$, $B_1(.)$, $B_2(.)$, $C(.)$, $D_1(.)$, e $D_2(.)$

são as matrizes do sistema e $\rho(t)$ é o conjunto de m parâmetros variantes no tempo que devem satisfazer a seguinte condição:

$$\underline{a_i} \leq \rho_i(t) \leq \overline{a_i}, \quad \underline{a_i}, \overline{a_i} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{2}$$

As matrizes do sistema podem ser representadas de forma genérica por $M(\rho(t))$, definidas a seguir.

$$M(\rho(t)) = M_0 + \sum_i \rho_i(t) M_i. \tag{3}$$

De acordo com Briat (2015), é conveniente representar e analisar os sistemas LPV como uma estrutura politópica, onde todas as matrizes do sistema (1) devem ser representadas em função das variáveis no simplex unitário (Λ_N). Tal representação permite o tratamento politópico das condições de síntese, desta forma a estabilidade do sistema será garantida para todo valor de $\rho(t)$ que satisfaça a condição (2).

Definição 1 (Simplex Unitário) *Seja $N \in \mathbb{R}^+$. A combinação linear*

$$co\{A_1, A_2, ..., A_N\} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_N A_N,$$

com $\alpha \in \Lambda_N$ é a combinação convexa das matrizes $A_1, A_2, ..., A_N$, e o conjunto Λ_N é conhecido como simplex unitário de dimensão N, definido como

$$\Lambda_N = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \zeta_i = 1, \quad \zeta_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N \right\}.$$

Além disso o conjunto $\mathcal{P}$ de todas as combinações $A_1, A_2, ..., A_N$ dado por

$$\mathcal{P} = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^N : \varphi = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_N A_N, \forall \alpha \in \Lambda_N \right\}$$

é chamado de politopo (envelope convexo) definido pelas matrizes A_i, também chamadas de vértices. Qualquer ponto dentro deste politopo pode ser descrito como uma combinação convexa dos vértices.

Dado os limites estabelecidos por (2), cada parâmetro $\rho_i(t)$ pode ser convertido em um elemento do simplex unitário de $N = 2$ vértices, por exemplo, usando a transformação

$$\alpha_{i1} = \frac{\rho_i - \overline{a_i}}{\underline{a_i} - \overline{a_i}}, \quad \alpha_{i2} = 1 - \alpha_{i1}, \quad \alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}) \in \Lambda_2, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad (3)$$

então, é possível dizer que

$$\rho_i = \alpha_{i1}\left(\underline{a_i} - \overline{a_i}\right) + \overline{a_i}, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Uma vez que cada parâmetro gera um simplex de dimensão $N = 2$, o conjunto de m parâmetros no sistema (1) pode ser representado através do multi-simplex (AGULHARI et al., 2013), tal como definido a seguir.

Definição 2 (Multi-simplex) *Um multi-simplex Ω_N é um produto cartesiano $\Lambda_{N_1} \times \ldots \times \Lambda_{N_m}$ de um número finito (m) de simplexes. A dimensão de Ω_N é definida como $N = (N_1, \ldots, N_m)$ e, por simplicidade de notação, $\mathbb{R}^N$ denota o espaço $\mathbb{R}^{N_1+\ldots+N_m}$. Um dado elemento α de Ω_N é decomposto como $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, de acordo com a estrutura de Ω_N e, subsequentemente, cada α_i é decomposto na forma de $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{iN_i})$.*

Exemplo 1 *De acordo com Lacerda et al. (2016), seja $\Omega_{(2,2,2)} = \Lambda_2 \times \Lambda_2 \times \Lambda_2 = \Omega_{2\mathbb{I}}$, onde*

$$\mathbb{I}_q \triangleq \underbrace{(1, 1, ..., 1)}_{q\ vezes}, q \in \mathbb{N}^+, \qquad \vartheta\mathbb{I}_q \triangleq \underbrace{(\vartheta, \vartheta, ..., \vartheta)}_{q\ vezes}$$

Então, um elemento genérico de $\Omega_{2\mathbb{I}}$, pode ser escrito como $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ com $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}) \in \Lambda_2$, $\alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}) \in \Lambda_2$ e $\alpha_3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32}) \in \Lambda_2$. Além disso, a matriz $Z(\alpha), \alpha \in \Omega_{2\mathbb{I}}$, pode ser genericamente representado como

$$\begin{aligned} Z(\alpha) &= \alpha_{11}\alpha_{21}\alpha_{31}Z_{111} + \alpha_{11}\alpha_{21}\alpha_{31}Z_{112} + \alpha_{11}\alpha_{21}\alpha_{31}Z_{121} \\ &+ \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{32}Z_{122} + \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{31}Z_{211} + \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{32}Z_{212} \\ &+ \alpha_{12}\alpha_{22}\alpha_{31}Z_{221} + \alpha_{12}\alpha_{22}\alpha_{32}Z_{222}. \end{aligned}$$

onde Z_{ikj}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ e $k = 1, 2$ são os valores dos coeficientes das matrizes.

2.2 SISTEMAS DE CONTROLE VIA REDE (NCS)

De acordo com alguns trabalhos na literatura (NAGHSTABRIZI; HESPANHA, 2005), NCS pode ser definido como um sistema distribuído, em que a comunicação dos dispositivos ocorre através de uma rede digital. Devido à redução de custos com cabeamentos e também de manutenção houve um crescente desenvolvimento na tecnologia, e hoje já são encontradas aplicações em uma ampla gama de áreas, como redes de sensores móveis, cirurgias remota, veículos aéreos não tripulados.

Em um sistema de controle via rede, os dados são enviados em unidades atômicas chamadas de pacotes. Nesta estrutura, qualquer sinal em tempo contínuo deve ser adequadamente amostrados antes do envio da informação pela rede. Assim, pode-se considerar os NCS muito semelhantes aos chamados sistemas amostrado, com a diferença que além do atraso comum aos sistema amostrados, há ainda o atraso referente às falhas de comunicação na rede, como o atraso de comunicação e perdas de pacote (GOODWIN et al., 2008). A estrutura da rede depende do protocolo de comunicação utilizado, de uma forma geral ela pode ser representada conforme a Figura 1.

Figura 1: Configuração básica de um NCS com o fluxo de informação.
Fonte: Adaptado de (ZHANG et al., 2001)

A característica que necessita maior atenção quando projetam-se controladores em NCS é o atraso, pois o controlador deve considerar esta interferência para evitar que o sistema desestabilize. Normalmente, os atrasos são variantes no tempo, e pode-se considerar que são limitados superiormente por um valor pré-estabelecido. Segundo Naghstabrizi e Hespanha (2005), estes limites devem ser positivos e dependentes da taxa de amostragem. Além disso, deve ser considerada a possibilidade de perda de pacotes, que neste caso é tratada como um aumento no limitante superior do atraso, pois quando utilizado um protocolo de transmissão de confiança os dados são retransmitidos até serem entregues adequadamente. A Figura 2 representa esquematicamente o aumento no limite superior do atraso ao se deparar com uma perda de pacote.

Atrasos variantes no tempo são mais prejudiciais para a estabilidade do que os

Figura 2: Evolução do atraso em função do tempo onde (a) Não existe perdas de pacotes e (b) Com perdas de pacotes. Sendo, neste caso, h o atraso de comunicação e b a taxa de amostragem.

Fonte: Adaptado de (NAGHSTABRIZI; HESPANHA, 2005)

invariantes no tempo, deste modo as condições de síntese considerando tais atrasos são geralmente mais complexas (BRIAT, 2015). Neste trabalho, é aplicada uma técnica de síntese NCS, em sistemas LPV, considerando o atraso variante no tempo. Logo, adicionando um atraso variante no tempo para os estados do sistema (1), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + A_h(\rho(t))x(t-h(t)) + B_1(\rho(t))w(t) + B_2(\rho(t))u(t) \\ z(t) &= C(\rho(t))x(t) + C_h(\rho(t))x(t-h(t)) + D_1(\rho(t))w(t) + D_2(\rho(t))u(t), \end{aligned} \tag{5}$$

sendo $A_h(.)$ e $C_h(.)$ as matrizes do sistema relacionadas aos estados atrasados, e $h(t)$ é o atraso variante no tempo com limites conhecidos $0 \leq h(t) \leq h_m$. Este atraso $h(t)$ pode ser dependente do parâmetro ρ, neste caso $h(t) = h(\rho(.))$.

Além do atraso inerente às estruturas NCS, é necessário considerar que as leis de controle digitais são utilizadas nesta classe de sistemas (FRIDMAN et al., 2004). Assim, a discretização dos estados pode afetar o desempenho do sistema controlado. Um controle discretizado pode então ser representado como um sinal atrasado da forma

$$u(t) = u_d(t_k) = u_d(t-(t-t_k)) = u_d(t-\tau_k(t)), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad \tau_k(t) = t - t_k, \tag{6}$$

sendo u_d um sinal de controle discretizado e o atraso variante no tempo é limitado por $\tau_k \leq t_{k+1} - t_k \leq \tau_m$, com o termo derivativo dado por $\dot{\tau}_k(t) = 1$ para $t \neq t_k$.

De acordo com Ramezanifar et al. (2013), para melhorar potencialmente o desempenho do sistema em malha fechada, garantindo sua estabilização, pode-se utilizar um controle de realimentação de estados com ganho escalonado da forma $u_d(t_k) = K(\rho(t_k))x(t_k)$.

Substituindo $u(t) = u_d(t_k)$ em (5), tem-se

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + A_h(\rho(t))x(t-h(t)) + A_\tau(\rho(t))x(t-\tau_k(t)) + B_1(\rho(t))w(t)\\ z(t) &= C(\rho(t))x(t) + C_h(\rho(t))x(t-h(t)) + C_\tau(\rho(t))x(t-\tau_k(t)) + D_1(\rho(t))w(t),\end{aligned} \tag{7}$$

sendo A_τ e C_τ dados por

$$A_\tau = B_2(\rho(t))K(\rho(t_k)), \quad C_\tau = D_2(\rho(t))K(\rho(t_k)). \tag{8}$$

Desta forma, duas classes de atrasos são consideradas neste trabalho, o atraso $h(t)$ inerente à estrutura de controle em rede, e o atraso (τ_k) resultante da discretização dos estados e dos parâmetros variantes no tempo para a transmissão via rede.

2.3 DESISGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Segundo Boyd et al. (1994), as LMIs são ferramentas matemáticas e seu surgimento ocorreu, provavelmente, a partir de trabalhos desenvolvidos por Lyapunov, há mais de 100 anos atrás. A Teoria de Lyapunov garante que se existir uma função $V(x)$ que satisfaça as condições (10) e (11), então o ponto de equilibrio é assintoticamente estável (SASTRY, 2010).

$$V(0) = 0, \tag{9}$$

$$V(x(t)) > 0 \qquad \forall x \neq 0, \tag{10}$$

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \qquad \forall x \neq 0. \tag{11}$$

Para sistemas lineares e invariantes no tempo (pode-se considerar, sem perda de generalidade), que $V(x) = x^T P x$, onde P é uma matriz constante, real, positiva definida e simétrica. A existência de $V(x)$ dessa forma é uma condição necessária e suficiente para estabilidade assintótica.

A utilização das LMIs se consolidou durante os últimos 20 anos, com o desenvolvimento de algoritmos para sua solução numérica (SKOGESTAD; POSTLETHWAIT, 2007). Tem-se verificado que está cada vez mais comum os problemas formulados com esta ferramenta em diversas áreas que envolvem a engenharia e matemática aplicada. Especificamente na teoria de controle, a crescente utilização das LMIs tem levado a resultados importantes na análise da estabilidade de sistemas, síntese de controladores robustos para sistemas contendo incertezas e para controle ótimo (AGULHARI et al., 2012).

De forma genérica, as LMIs podem ser descritas conforme segue (BOYD et al., 1994)

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i F_i > 0, \tag{12}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ as variáveis do problema e $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes conhecidas.

Algumas desigualdades matriciais não lineares podem ser convertidas para a forma de LMIs utilizando alguns mecanismos de manipulação. Uma destas manipulações, utilizada neste trabalho, é o Complemento de Schur apresentado a seguir (BOYD et al., 1994).

Lema 1 (Complemento de Schur) *Considere a matriz simétrica M dada por*

$$M = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}, \tag{13}$$

suponha que $det(Q) \neq 0$. Então,

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ S^T Q^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^T Q^{-1} S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Q^{-1} S \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Logo,

$$M > 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^T Q^{-1} S \end{bmatrix} > 0 \leftrightarrow Q > 0, R - S^T Q^{-1} S > 0. \tag{15}$$

Em muitos problemas podem ser encontradas desigualdades matriciais cuja resolução só é possível ou se torna muito facilitada, através da inclusão de novas variáveis. Este procedimento é muito útil quando se tem uma desigualdade matricial e deseja-se expressá-la na forma de LMI. Neste contexto, é possível utilizar o Lema 2, para incluir estas novas variáveis (BOYD et al., 1994).

Lema 2 (Lema da Projeção) *Considere a desigualdade matricial*

$$\Psi + \Lambda^T \Theta^T \Gamma + \Gamma^T \Theta \Lambda < 0 \tag{16}$$

sendo a matriz Θ *uma variável independente,* Ψ, Λ *e* Γ *não dependem de* Θ. $\Lambda^{\perp}$ *e* $\Gamma^{\perp}$ *denotam os complementos ortogonais de* Λ *e* Γ *respectivamente, sendo que* $\Lambda^{\perp}\Lambda = 0$ *e* $\Gamma^{\perp}\Gamma = 0$. *Então,* (16) *é verdadeira para alguma* Θ, *se e somente se, as desigualdades matriciais*

$$\Lambda^{\perp T}\Psi\Lambda^{\perp} < 0 \quad ou \quad \Lambda^{T}\Lambda > 0, \tag{17}$$

$$\Gamma^{\perp T}\Psi\Gamma^{\perp} < 0 \quad ou \quad \Gamma^{T}\Gamma > 0, \tag{18}$$

forem verdadeiras. Em outras palavras, o conjunto solução da expressão (16) *é o mesmo conjunto solução das expressões* (17) *e* (18), *separadamente (SKELTON et al., 1998).*

Neste trabalho os conjuntos de LMIs tiveram como base a Função de Lyapunov-Krasovskii. De acordo com Briat (2015) a ideia de Krasovskii era estender os resultados de Lyapunov, para isso propôs que o funcional de Lyapunov deveria ponderar os valores do estado entre o instante atual e o instante atrasado que influencia o sistema. Métodos baseados na Função de Lyapunov-Krasovskii são importantes para analisar e controlar sistemas com atraso, sendo que dezenas de diferentes funções têm sido propostas na literatura (BRIAT, 2015).

A teoria de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii serve como uma ferramenta útil para alcançar condições dependentes do atraso para a análise da estabilidade do sistema. Existem dezenas de variantes da Função de Lyapunov-Krasovskii, e a estrutura utilizada neste trabalho é dada por (BRIAT, 2015).

$$V(x,\rho) = V_1(x,\rho) + V_h(x,\rho) + V_\tau(x,\rho), \tag{19}$$

com

$$\begin{aligned}
V_1(x,\rho) &= x^T(t)P(\rho(t))x(t),\\
V_h(x,\rho) &= \int_{t-h(t)}^{t} x^T(\xi)Q_h x(\xi)d\xi + \int_{-h_m}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(\xi)h_m R_h \dot{x}(\xi)d\xi d\theta,\\
V_\tau(x,\rho) &= \int_{-\tau_m}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(\xi)\tau_m R_\tau \dot{x}(\xi)d\xi d\theta,
\end{aligned}$$

onde $x_t(\theta)$ é usado para representar $x(t+\theta)$ para $\theta \in [-h_m, 0]$.

2.4 CONTROLE MISTO $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$

O controle por realimentação de estados tem por objetivo determinar o posicionamento de polos do sistema a fim de estabilizá-lo, ou ainda melhorar algum critério de desempenho. Este método considera que os valores das variáveis de estado, representadas pelo vetor $x(t)$, alimentem diretamente o controlador, com isso ele atuará diretamente nas variáveis do sistema modelado.

Ao projetar um controlador por realimentação de estados obtém-se a matriz de ganho K de realimentação de estados capaz de gerar uma energia de controle ($u = Kx$) suficiente para estabilizar o sistema.

Em sistemas incertos, como considerado neste trabalho, além de garantir a estabilidade do sistema é comum calcular um ganho K que satisfaça critérios de desempenho, tais como os definidos pelas normas $\mathscr{H}_\infty$ e $\mathscr{H}_2$, pois a minimização de tais normas pode garantir tanto a robustez do sistema a incertezas quanto melhorar certos critérios de desempenho (AGULHARI et al., 2013). As normas são matematicamente definidas a seguir.

2.4.1 NORMA $\mathscr{H}_2$

A Norma $\mathscr{H}_2$ está associada a otimização de algum critério de desempenho de um determinado sistema. Considere a Figura 3 a qual apresenta a representação em diagrama de blocos de um sistema de controle contendo perturbações externas. A função $G(s)$ representa a função de tranferência de $w(t)$ para $z(t)$ e é dada por:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B_1 + D_1. \tag{18}$$

Figura 3: Representação em diagrama de blocos de um sistema com perturbações externas.

Fonte: Adaptado de (SKOGESTAD; POSTLETHWAIT, 2007)

De acordo com Paganini (1999) a norma $\mathscr{H}_2$ pode ser definida conforme.

Definição 3 (Norma $\mathscr{H}_2$) *Seja $G(s)$ definida em (18) uma função de transferência do sistema, representado na Figura 3, estritamente própria, ou seja, $D_1 = 0$. A norma $\mathscr{H}_2$ de $G(s)$, denotada $\|G(s)\|_2^2$ é definida por*

$$\|G(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Tr(G(j\omega) * G(j\omega))d\omega. \tag{19}$$

Fazendo a transformada inversa de Laplace e aplicando o resultado na definição do custo garantido $\mathscr{H}_2$ temos

$$\|G(s)\|_2^2 = Tr\left(B_1^T \int_0^{+\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt B_1\right). \tag{20}$$

Se A é estável, então segundo a teoria da estabilidade de Lyapunov, existe uma matriz P dada por

$$P = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \geq 0, \tag{21}$$

que certifica a estabilidade do sistema, e que garante que

$$\|G(s)\|_2^2 = Tr(B_1^T P B_1). \tag{22}$$

A partir desta definição pode-se calcular o limitante da norma $\mathscr{H}_2$ de acordo com o Lema 6, descrito a seguir (BOYD et al., 1994).

Lema 3 (Condição LMI para a Norma $\mathscr{H}_2$) *O sistema representado pela Figura 3 é assintoticamente estável e a norma $\mathscr{H}_2$ é minimizada, se e somente se, existir uma matriz P, simétrica e definida positiva tal que o problema de otimização a seguir seja verdadeiro*

$$\min_{P=P^T>0} Tr(CPC^T) = Tr(C^T CP). \tag{23}$$

$$AP + PA^T + B_1 B_1^T \leq 0. \tag{24}$$

2.4.2 NORMA $\mathscr{H}_\infty$

A norma $\mathscr{H}_\infty$ está associada à maior energia entre as entradas e saídas de um determinado sistema (AGULHARI et al., 2013). Dado sistema próprio e linear, representado pela Figura 4 a seguir, sendo $\Delta(s)$ perturbações não modeladas.

Figura 4: Representação em diagrama de blocos de um sistema com perturbações externas não modeladas.

Fonte: Própria autoria

Segundo Scherer (1995) pode-se definir a norma $\mathscr{H}_\infty$ conforme.

Definição 4 (Norma $\mathscr{H}_\infty$) *Se o sistema com $u(t) = 0$ é estável, então sua norma $\mathscr{H}_\infty$ entre $w(t)$ e $z(t)$, denotada $\|G(s)\|_\infty$, é igual a*

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}, \qquad w \neq 0. \tag{25}$$

A norma $\mathscr{H}_\infty$ tem destaque na teoria de sistema de controle robusto, uma vez que é utilizada como medida da robustez do sistema. Analisando a Equação (25), pode-se afirmar que minimizar a norma $\mathscr{H}_\infty$ equivale a minimizar a energia do ruído que afeta o sistema, assim quanto menor o valor do custo garantido $\mathscr{H}_\infty$, maior a robustez do sistema em relação ao ruído.

A partir desta definição pode-se calcular o limitante do custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ de acordo com o Lema 4, conhecido como *Bounded Real Lemma*, descrito a seguir (BOYD et al., 1994).

Lema 4 (Bounded Real Lemma) *O sistema representado pela Figura 4 é assintoticamente estável e a norma $\mathscr{H}_\infty$ é menor que um escalar γ positivo, se e somente se, existir uma matriz P, simétrica e definida positiva tal que a condição LMI a seguir seja verdadeira*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB_1 + C^T D_1 \\ B_1^T P + D_1^T C & D_1^T D_1 - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{26}$$

A relação entre a norma $\mathscr{H}_\infty$ e o escalar γ é dada através do Teorema do Pequeno Ganho, descrito pelo Teorema 1.

Teorema 1 (Teorema do Pequeno Ganho) *O sistema da Figura 4 será internamente estável para todo valor de* $\Delta(s)$ *que atenda a seguinte condição*

$$\|\Delta(s)\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma} \leftrightarrow \|G(s)\|_\infty < \gamma. \tag{27}$$

Desta forma, a minimização do limitante γ, e consequentemente do custo garantido $\mathscr{H}_\infty$, resulta em um sistema mais robusto às incertezas $\Delta(s)$.

O controle misto $\mathscr{H}_2$ / $\mathscr{H}_\infty$ trata-se de um problema multiobjetivo, no qual o controle por realimentação de estados deve responder de maneira favorável às duas especificações de desempenho, no caso as normas $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$. Tipicamente na síntese do controlador misto $\mathscr{H}_2$ / $\mathscr{H}_\infty$, o conceito da norma $\mathscr{H}_\infty$ é usado para garantir a robustez do sistema, conforme o Teorema 1, enquanto que a norma $\mathscr{H}_2$ garante algum critério de desempenho, por exemplo a otimização da energia de controle.

Para a síntese do controlador misto $\mathscr{H}_2$ / $\mathscr{H}_\infty$, considere o sistema a seguir

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B_1(\rho(t))w(t) + B_2(\rho(t))u(t), \\
z_2(t) &= C_2(\rho(t))x(t) + D_{12}(\rho(t))w(t) + D_{22}(\rho(t))u(t), \\
z_\infty(t) &= C_\infty(\rho(t))x(t) + D_{1\infty}(\rho(t))w(t) + D_{2\infty}(\rho(t))u(t).
\end{aligned} \tag{28}$$

Neste caso há duas funções de transferência, $G_2(s)$ de $w(t)$ para $z_2(t)$ e $G_\infty(s)$ de $w(t)$ para $z_\infty(t)$. A minimização tanto do custo garantido $\mathscr{H}_2$, quanto do custo garantido $\mathscr{H}_\infty$, é um problema com objetivo conflitante, já que para garantir a robustez do sistema é necessário aumentar a energia de controle, enquanto a minimização da norma $\mathscr{H}_2$ resulta na diminuição desta mesma energia de controle. Em resumo, a minimização de uma norma resulta no aumento da outra. Neste trabalho, a forma proposta para lidar com esse problema é fixar o limitante da norma $\mathscr{H}_\infty$, ou seja, manter um valor de γ fixo, chamado de valor subótimo, e considerar como função objetivo a minimização da norma $\mathscr{H}_2$. Assim, deseja-se encontrar um ganho K que estabilize o sistema atendendo as duas condições.

3 METODOLOGIA

Inicialmente foi realizada uma pesquisa bibliográfica a respeito dos temas de interesse para compor a pesquisa, como sistemas de controle via rede, sistemas com entrada atrasada e sistemas contendo parâmetros variantes no tempo, com a finalidade de se organizar a linha de estudos a ser seguida, com possíveis inovações em relação ao que está sendo estudado.

Com base nesta pesquisa bibliográfica, foi possível realizar a simulação de alguns trabalhos para clarear a proposta dos autores e utilizá-las como base para esta pesquisa. Destaca-se a reprodução da estratégia de controle descrita por Ramezanifar et al. (2013), alterando a forma de tratamento do conjunto de LMIs do custo garantido $\mathscr{H}_\infty$, obtido pelos autores, para uma abordagem politópica, com a finalidade de analisar a eficiência do método. Esta abordagem foi testada no mesmo exemplo numérico proposto por Ramezanifar et al. (2013) , utilizando o software computacional Matlab/Simulink.

Com a Função de Lyapunov-Krasovskii (19) e a condição de existência da norma $\mathscr{H}_2$, foi desenvolvido um conjunto de LMIs para a norma $\mathscr{H}_2$, sendo estudadas duas diferentes condições limitantes para minimização do custo garantido $\mathscr{H}_2$. Para a validação foi realizada a simulação das condições desenvolvidas neste trabalho, utilizando o mesmo exemplo numérico de Ramezanifar et al. (2013).

Através dos ganhos obtidos, foi possível simular o controle misto e avaliar os resultados obtidos com as trê (controlador $\mathscr{H}_\infty$, controlador $\mathscr{H}_2$ e controlador Misto $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$).

4 RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo são apresentados os principais resultados obtidos, com enfoque no desenvolvimento das condições LMIs para a norma $\mathscr{H}_2$, bem como sua validação para os sistemas LPV com atrasos na entrada e nos estados e ainda aplicação do controle misto.

4.1 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Primeiramente considere o sistema estritamente próprio com os termos contendo duas formas de atraso, conforme descrito na Seção 2.2.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + A_h(\rho(t))x(t-h(t)) + A_\tau(\rho(t))x(t-\tau_k) + B_1(\rho(t))w(t), \\ z(t) &= C(\rho(t))x(t) + C_h(\rho(t))x(t-h(t)) + C_\tau(\rho(t))x(t-\tau_k). \end{aligned} \tag{27}$$

Para tornar a notação mais simples, será subtraído propositalmente o parâmetro $\rho(t)$ das equações, porém todas as matrizes são consideradas dependentes de parâmetros variantes no tempo em todo o desenvolvimento subsequente.

Para determinar a estabilidade do sistema foi considerada a Função de Lyapunov-Krasovskii descrita em (19), que é normalmente utilizada para definir condições de estabilidade de sistemas contendo atrasos. O teorema a seguir apresenta uma condição suficiente para garantir a estabilidade do sistema, considerando $w = 0$.

Teorema 2 *O sistema LPV* (27) *é assintoticamente estável para todo* $0 < h(t) \leq h_m$ *com* $\tau_k(t) \leq \tau_m$*,* $\dot{\tau}_k = 1$*, se existir uma matriz* $P(\rho(t)) > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, que seja diferenciável e simétrica, além de matrizes não dependentes de parâmetros, simétricas e definidas positivas* Q_h*,* R_h *e* R_τ*, tais que para qualquer valor de* $\rho(t)$*, que atenda* $\underline{a_i} \leq \rho_i(t) \leq \overline{a_i}$*,* $\quad \underline{a_i}, \overline{a_i} \in \mathbb{R}$*,* $\quad i = 1, 2, ..., m.$*, exista uma solução factível para a condição* (28)*.*

$$\begin{bmatrix} \sum_{1,1} & PA_h + R_h & PA_\tau + R_\tau & h_m A^T R_h & \tau_m A^T R_\tau \\ \star & -(1-\dot{h})Q_h - R_h & 0 & h_m A_h^T R_h & \tau_m A_h^T R_\tau \\ \star & \star & -R_\tau & h_m A_\tau^T R_h & \tau_m A_\tau^T R_\tau \\ \star & \star & \star & -R_h & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -R_\tau \end{bmatrix} < 0, \tag{28}$$

com $\sum_{1,1} = A^T P + PA + \dot{P} + Q_h - R_h - R_\tau$ *e o símbolo* $\star$ *refere-se ao bloco simétrico, usado da mesma forma em todas as demais LMIs deste trabalho.*

Demonstração: Considere a função de Lyapunov-Krasovskii (19). Para o sistema (27) ser assintoticamente estável, é suficiente que a derivada de (19) em relação ao tempo, ao longo da trajetória de (27), seja definida negativa. Assim tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,\rho) &\leq \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + x^T \dot{P} x \\ &+ x^T Q_h x - (1-\dot{h}) x^T (t-h) Q_h x(t-h) \\ &+ h_m^2 \dot{x}^T R_h \dot{x} - [x(t) - x(t-h)]^T R_h [x(t) - x(t-h)] \\ &+ \tau_m^2 \dot{x}^T R_\tau \dot{x} - [x(t) - x(t-\tau_k)]^T R_\tau [x(t) - x(t-\tau_k)]. \end{aligned} \tag{29}$$

Pode-se reescrever (29) de forma matricial, conforme descrito a seguir, usando $\dot{x} = A \cdot x$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,\rho) \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \\ x(t-\tau_k) \end{bmatrix}^T & \left(\mathscr{F} + \begin{bmatrix} h_m A^T R_h \\ h_m A_h^T R_h \\ h_m A_\tau^T R_h \end{bmatrix} R_h^{-1} \begin{bmatrix} h_m A^T R_h \\ h_m A_h^T R_h \\ h_m A_\tau^T R_h \end{bmatrix}^T \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \tau_m A^T R_\tau \\ \tau_m A_h^T R_\tau \\ \tau_m A_\tau^T R_\tau \end{bmatrix} R_\tau^{-1} \begin{bmatrix} \tau_m A^T R_\tau \\ \tau_m A_h^T R_\tau \\ \tau_m A_\tau^T R_\tau \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{30}$$

onde

$$\mathscr{F} = \begin{bmatrix} \sum_{1,1} & PA_h + R_h & PA_\tau + R_\tau \\ \star & -(1-\dot{h})Q_h - R_h & 0 \\ \star & \star & -R_\tau \end{bmatrix}.$$

Aplicando o complemento de Schur duas vezes na condição (30) obtém-se a condição expressa no Teorema 2, finalizando a demonstração.

Observação 1 *É possível observar dois termos derivativos, na condição* (28)*. Segundo Ramezanifar et al. (2013) a matriz* $\dot{P}$ *pode ser substituída por* $\dfrac{\partial P}{\partial \rho}\dot{\rho}$*. Devido à dependência desta desigualdade matricial por* $\dot{\rho}$*, a condição precisa ser factível apenas nos vértices de* $\dot{\rho}$*, assim* $\dot{P}$ *pode ser substituído por* $\sum_{i=1}^{s} \pm \left(\nu_i \dfrac{\partial P}{\partial \rho_i}\right)$*. A variável* ν_i *pode ser representada no domínio do simplex aplicando transformações, como realizado por (AGULHARI et al., 2013). O outro termo* $\dot{h}$ *pode ser substituído por seu limitante superior, neste caso representado por* h_m*.*

4.2 SÍNTESE DO CONTROLADOR $\mathscr{H}_\infty$

Esta seção apresenta a condição para análise de desempenho do custo garantido $\mathscr{H}_\infty$, obtida por Ramezanifar et al. (2013), os quais consideraram para a análise, o sistema LPV com entrada atrasada, completo, descrito em (7).

Para a determinação desta condição os autores utilizaram como base a seguinte condição para análise de performance do custo garantido $\mathscr{H}_\infty$

$$\|z\|_{\mathscr{L}_2} \leq \gamma \|w\|_{\mathscr{L}_2}. \tag{31}$$

Desta forma, reproduzindo o trabalho de Ramezanifar et al. (2013), estabelece o Lema 5.

Lema 5 *O sistema* (7) *é assintoticamente estável e a condição* (31) *é satisfeita para todo* $0 < h(t) \leq h_m$ *com* $\tau_k(t) \leq \tau_m$*,* $\dot{\tau}_k = 1$*, se existir uma matriz* $P(\rho(t)) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$*, que seja diferenciável e simétrica, além de matrizes não dependente de parâmetros, simétricas e definidas positivas* Q_h*,* R_h *e* R_τ *e um escalar positivo* γ *tais que para qualquer valor de* $\rho(t)$ *que atenda a condição* (2)*, a condição LMI a seguir seja verdadeira*

$$\begin{bmatrix} \sum_{1,1} & PA_h + R_h & PA_\tau + R_\tau & PB_1 & C^T & h_m A^T R_h & \tau_m A^T R_\tau \\ \star & -(1-\dot{h})Q_h - R_h & 0 & 0 & C_h^T & h_m A_h^T R_h & \tau_m A_h^T R_\tau \\ \star & \star & -R_\tau & 0 & C_\tau^T & h_m A_\tau^T R_h & \tau_m A_\tau^T R_\tau \\ \star & \star & \star & -\gamma I & D_1^T & h_m B_1^T R_h & \tau_m B_1^T R_\tau \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma I & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -R_h & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -R_\tau \end{bmatrix} < 0, \qquad (32)$$

onde $\sum_{1,1} = A^T P + PA + \dot{P} + Q_h - R_h - R_\tau$.

Demonstração: Para esta demostração os autores optaram em apresentar como obter a condição (31) a partir da LMI (32).

Primeiramente foi aplicada na LMI (32) uma transformação de congruência $\mathscr{I}$, dada por

$$\mathscr{I} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

Após este tratamento, foi aplicado o complemento de Schur por três vezes resultando em

$$\begin{bmatrix} \sum_{1,1} & PA_h + R_h & PA_\tau + R_\tau & PB_1 \\ \star & -(1-\dot{h})Q_h - R_h & 0 & 0 \\ \star & \star & -R_\tau & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ C_h^T \\ C_\tau^T \\ D_1^T \end{bmatrix} \gamma^{-1} \begin{bmatrix} C^T \\ C_h^T \\ C_\tau^T \\ D_1^T \end{bmatrix}^T$$

$$+ \begin{bmatrix} A^T \\ A_h^T \\ A_\tau^T \\ B_1^T \end{bmatrix} h_m^2 R_h \begin{bmatrix} A^T \\ A_h^T \\ A_\tau^T \\ B_1^T \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} A^T \\ A_h^T \\ A_\tau^T \\ B_1^T \end{bmatrix} \tau_m^2 R_\tau \begin{bmatrix} A^T \\ A_h^T \\ A_\tau^T \\ B_1^T \end{bmatrix}^T < 0.$$

Multiplicando esta desigualdade do lado esquerdo e direito por $\zeta^T(t)$ e $\zeta(t)$, respectivamente, sendo que $\zeta(t) = [x^T(t)\ x^T(t-h)\ x^T(t-\tau_k)\ w^T(t)]^T$, com algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$\begin{aligned} &\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + x^T \dot{P} x + x^T Q_h x - (1-\dot{h}) x^T(t-h) Q_h x(t-h) \\ &+ h_m^2 \dot{x}^T R_h \dot{x} - [x(t) - x(t-h)]^T R_h [x(t) - x(t-h)] \\ &+ \tau_m^2 \dot{x}^T R_\tau \dot{x} - [x(t) - x(t-\tau_k)]^T R_\tau [x(t) - x(t-\tau_k)] \\ &- \gamma w^T(t) w(t) + \frac{1}{\gamma} z^T(t) z(t) < 0, \end{aligned}$$

e usando (29), obteve-se $\dot{V}(x_t, \rho) - \gamma w^T(t) w(t) + \frac{1}{\gamma} z^T(t) z(t) < 0$. Integrando ambos os lados da desigualdade de 0 para ∞ e usando $V|_{t=0} = V|_{t=\infty} = 0$ (devido a condição de estabilidade e condições iniciais nulas), obtém-se $\|z\|_{\mathscr{L}_2} \leq \gamma \|w\|_{\mathscr{L}_2}$.

Ao substituir A_τ e C_τ, como em (8) na LMI (32) surgem termos bilineares. Assim, aplicando o Lema da Projeção, são adicionado algumas variáveis de folga a fim de eliminar essa bilinearidade, resultando no Lema 6 que trata-se de uma reprodução de Ramezanifar et al. (2013).

Lema 6 *O sistema* (7) *é assintoticamente estável e e o custo garantido é limitado por* γ *para todo* $0 < h(t) \leq h_m$ *com* $\tau_k(t) \leq \tau_m$, $\dot{\tau}_k = 1$, *se existir uma matriz* $P(\rho(t)) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *que seja diferenciável e simétrica, além de matrizes não dependente de parâmetros, simétricas e definidas positivas* Q_h, R_h, R_τ, V_1, V_2, V_3 *e* V_4, *tais que para qualquer valor de* $\rho(t)$ *que atenda a condição* (2), *exista uma solução factível para a seguinte LMI*

$$\begin{bmatrix} -V_1 - V_1^T & \sum_{1,1} & -V_3^T + V_1 A_h & -V_4^T + V_1 A_\tau & V_1 B_1 & 0 & h_m R_h & \tau_m R_\tau \\ \star & \sum_{2,2} & \sum_{3,3} & \sum_{4,4} & V_2 B_1 & C^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \sum_{5,5} & A_h^T V_4^T + V_3 A_\tau & V_3 B_1 & C_h^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \sum_{6,6} & V_4 B_1 & C_\tau^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma I & D_1^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\gamma I & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -R_h & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & -R_\tau \end{bmatrix} < 0, \qquad (33)$$

com

$\sum_{1,1} = P - V_2^T + V_1 A,$

$\sum_{2,2} = \dot{P} + Q_h - R_h - R_\tau + A^T V_2^T + V_2 A,$

$\sum_{3,3} = R_h + A^T V_3^T + V_2 A_h,$

$\sum_{4,4} = R_\tau + A^T V_4^T + V_2 A_\tau,$

$\sum_{5,5} = -(1 - \dot{h}) Q_h - R_h + A_h^T V_3^T + V_3 A_h,$

$\sum_{6,6} = -R_\tau + A_\tau^T V_4^T + V_4 A_\tau.$

Ao inserir as variáveis de folga V_1, V_2, V_3 e V_4, as bilinearidades são eliminadas e, assim, podem ser substituídos os valores de A_τ e C_τ. Desta forma, Ramezanifar et al. (2013), desenvolveram o Teorema 3, o qual apresenta a condição de síntese do controlador $\mathscr{H}_\infty$.

Teorema 3 *Considere o sistema LPV com entrada atrasada* (7). *Existe um controlador NCS da forma* (6) *de tal modo que o sistema é assintoticamente estável, garantindo um limitante para a norma* $\mathscr{H}_\infty$, *para todo* $0 < h(t) \leq h_m$ *com* $\tau_k(t) \leq \tau_m$, $\dot{\tau}_k = 1$, *se existir uma matriz* $\tilde{P}(\rho(t)) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *que seja diferenciável e simétrica, uma matriz* $\tilde{K}(\rho(t)) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, *além de matrizes não dependente de parâmetros, simétricas e definidas positivas* $\tilde{Q}_h$, $\tilde{R}_h$, $\tilde{R}_\tau$ *e* U, *um escalar positivo* γ *e escalares reais* λ_2, λ_3 *e* λ_4 *tais que a seguinte LMI seja verdadeira para qualquer valor de* $\rho(t)$ *que atenda a condição* (2).

$$\begin{bmatrix} -2U & \tilde{\sum}_{1,1} & -\lambda_3 U + A_h U & -\lambda_4 U + B_2\tilde{K} & B_1 & 0 & h_m\tilde{R}_h & \tau_m\tilde{R}_\tau \\ \star & \tilde{\sum}_{2,2} & \tilde{\sum}_{3,3} & \tilde{\sum}_{4,4} & \lambda_2 B_1 & UC^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \tilde{\sum}_{5,5} & \tilde{\sum}_{6,6} & \lambda_3 B_1 & UC_h^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \tilde{\sum}_{7,7} & \lambda_4 B_1 & \tilde{K}^T D_2^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma I & D_1^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\gamma I & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\tilde{R}_h & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\tilde{R}_\tau \end{bmatrix} < 0, \qquad (34)$$

onde,

$\tilde{\sum}_{1,1} = \tilde{P} - \lambda_2 U + AU,$

$\tilde{\sum}_{2,2} = \dot{P} + \tilde{Q}_h - \tilde{R}_h - \tilde{R}_\tau + \lambda_2(UA^T + AU),$

$\tilde{\sum}_{3,3} = \tilde{R}_h + \lambda_3 UA^T + \lambda_2 A_h U,$

$\tilde{\sum}_{4,4} = \tilde{R}_\tau + \lambda_4 UA^T + \lambda_2 B_2\tilde{K},$

$\tilde{\sum}_{5,5} = -(1-\dot{h})\tilde{Q}_h - \tilde{R}_h + \lambda_3(UA_h^T + A_h U),$

$\tilde{\sum}_{6,6} = \lambda_4 UA_h^T + \lambda_3 B_2\tilde{K},$

$\tilde{\sum}_{7,7} = -\tilde{R}_\tau + \lambda_4(\tilde{K}^T B_2^T + B_2\tilde{K}).$

O ganho de realimentação de estados $K(\rho(t))$ pode ser obtido por

$$K(\rho(t)) = \tilde{K}(\rho(t))U^{-1}. \qquad (35)$$

Demonstração: Partindo da condição (33), onde foram inseridas quatro variáveis de folga, foram estabelecidas algumas restrições sobre estas varáveis como $V_1 = V$ e $V_i = \lambda_i V$ $(i = 2, 3, 4)$, sendo λ_i escalares reais. Esta ação foi realizada com a finalidade de garantir a linearidade da condição. Em seguida foi aplicada uma transformação de congruência, $\mathscr{T} = diag(U, U, U, U, I, I, U)$, onde $U = V^{-1}$. Ainda foram utilizadas as relações $U^T PU = \tilde{P}$, $U^T Q_h^T U = \tilde{Q}_h$, $U^T R_h U = \tilde{R}_h$, $U^T R_\tau U = \tilde{R}_\tau$ e $KU = \tilde{K}$. Assim, obteve-se a condição (34).

4.3 SÍNTESE DO CONTROLADOR $\mathscr{H}_2$

A condição de análise do custo garantido $\mathscr{H}_2$ utilizada neste trabalho foi obtida por (MAHMOUD et al., 2009). De acordo com o autor, se a condição

$$\dot{V}(x_t, \rho) < -z^T(t)z(t) \qquad (36)$$

for garantida, então a norma $\mathscr{H}_2$ é menor que $\int_0^\infty z^T(r)z(r)dr$. Note que a expressão $\dot{V}(x_t,\rho)$ é equivalente à Equação (30).

Considerando o sistema (27) e a condição (36) é possível apresentar o Lema 7, proposto neste trabalho.

Lema 7 *O sistema* (27) *é assintoticamente estável e a condição* (36) *é satisfeita para todo* $0 < h(t) \leq h_m$ *com* $\tau_k(t) \leq \tau_m$, $\dot{\tau}_k = 1$, *se existir uma matriz* $P(\rho(t)) > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *que seja diferenciável e simétrica, além de matrizes não dependentes de parâmetros, simétricas e definidas positivas* Q_h, R_h *e* R_τ *tais que para qualquer valor de* $\rho(t)$ *que atenda a condição* (2), *a condição LMI a seguir é válida*

$$\begin{bmatrix} \sum_{1,1} & PA_h + R_h & PA_\tau + R_\tau & C^T & h_m A^T R_h & \tau_m A^T R_\tau \\ \star & -(1-\dot{h})Q_h - R_h & 0 & C_h^T & h_m A_h^T R_h & \tau_m A_h^T R_\tau \\ \star & \star & -R_\tau & C_\tau^T & h_m A_\tau^T R_h & \tau_m A_\tau^T R_\tau \\ \star & \star & \star & -I & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -R_h & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -R_\tau \end{bmatrix} < 0, \tag{37}$$

onde $\sum_{1,1} = A^T P + PA + \dot{P} + Q_h - R_h - R_\tau$.

Demonstração: Considerando que $\dot{V}(x_t,\rho)$ foi definida na demonstração do Teorema 2 a próxima etapa é reescrever $-z^T(t)z(t)$ como

$$-z^T(t)z(t) = -\left(\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \\ x(t-\tau_k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C^T C & C^T C_h & C^T C_\tau \\ C_h^T C & C_h^T C_h & C_h^T C_\tau \\ C_\tau^T C & C_\tau^T C_h & C_\tau^T C_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \\ x(t-\tau_k) \end{bmatrix} \right). \tag{38}$$

Substituindo as Equações (30) e (38) na condição (36), temos

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \\ x(t-\tau_k) \end{bmatrix}^T \left(\mathscr{F} + \begin{bmatrix} h_m A^T R_h \\ h_m A_h^T R_h \\ h_m A_\tau^T R_h \end{bmatrix} R_h^{-1} \begin{bmatrix} h_m A^T R_h \\ h_m A_h^T R_h \\ h_m A_\tau^T R_h \end{bmatrix}^T \right.$$
$$\left. + \begin{bmatrix} \tau_m A^T R_\tau \\ \tau_m A_h^T R_\tau \\ \tau_m A_\tau^T R_\tau \end{bmatrix} R_\tau^{-1} \begin{bmatrix} \tau_m A^T R_\tau \\ \tau_m A_h^T R_\tau \\ \tau_m A_\tau^T R_\tau \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} C \\ C_h \\ C_\tau \end{bmatrix}^T I \begin{bmatrix} C \\ C_h \\ C_\tau \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} < 0. \tag{39}$$

Aplicando o complemento de Schur duas vezes na Equação (39) a condição expressa no Lema 7 é obtida, finalizando esta demonstração.

Ao substituir A_τ e C_τ descritos em (8) na condição (37), pode-se observar a presença de termos bilineares devido ao produto da matriz de ganho K com as matrizes desconhecidas na condição (37). Aplicando o Lema 2, chamado Lema da Projeção, pode-se remover esta bilinearidade, resultando no Lema 8, também contribuição deste trabalho.

Lema 8 *O sistema* (27) *é assintoticamente estável e a condição* (36) *é satisfeita para todo* $0 < h(t) \leq h_m$ *com* $\tau_k(t) \leq \tau_m$, $\dot{\tau}_k = 1$, *se existir uma matriz* $P(\rho(t)) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *que seja diferenciável e simétrica, além de matrizes não dependentes de parâmetros, simétricas e definidas positivas* Q_h, R_h, R_τ, V_1, V_2 *e* V_3, *tais que para qualquer valor de* $\rho(t)$ *que atenda a condição* (2), *exista uma solução factível para a seguinte LMI*

$$\begin{bmatrix} -V_1 - V_1^T & P - V_2^T + V_1 A & -V_3^T + V_1 A_h & V_1 A_\tau & 0 & h_m R_h & \tau_m R_\tau \\ \star & \sum_{2,2} & R_h + A^T V_3^T + V_2 A_h & R_\tau + V_2 A_\tau & C^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \sum_{3,3} & V_3 A_\tau & C_h^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -R_\tau & C_\tau^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -I & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -R_h & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -R_\tau \end{bmatrix} < 0, \tag{40}$$

com

$\sum_{2,2} = \dot{P} + Q_h - R_h - R_\tau + A^T V_2^T + V_2 A$ *e*

$\sum_{3,3} = -(1 - \dot{h}) Q_h - R_h + A_h^T V_3^T + V_3 A_h$.

Demonstração: Utilizando as relações (17) e (18), estabelecidas pelo Lema da Projeção, é possível definir as bases para o espaço nulo de Λ e Γ

$$\mathcal{N}_\Lambda = \begin{bmatrix} A & A_h & A_\tau & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{N}_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

De posses destas informações e da condição (37) pode-se definir o valor de Ψ, como sendo

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 & 0 & h_m R_h & \tau m R_\tau \\ \star & \Delta_{2,2} & R_h & R_\tau & C & 0 & 0 \\ \star & \star & \Delta_{3,3} & 0 & C_h & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -R_\tau & C_\tau & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -I & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -R_h & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -R_\tau \end{bmatrix}, \tag{41}$$

onde
$\Delta_{2,2} = \dot{P} + Q_h - R_h - R_\tau$,
$\Delta_{3,3} = -(1-\dot{h})Q_h - R_h$.

Sabe-se que a condição que define o espaço nulo é $\beta\mathcal{N}_\beta = 0$, assim obtem-se

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -I & A & A_h & A_\tau & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A mariz Θ é chamada de matriz das variáveis de folga, sendo definida por

$$\Theta = \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \\ V_3^T \end{bmatrix}.$$

Definidos todos os termos da relação (16) é possível chegar na condição (35), concluindo a demonstração. Assim, pode-se afirmar que a factibilidade da condição (40) assegura que o Lema 8 seja satisfeito.

Removida a bilinearidade, pode-se substituir adequadamente A_τ e C_τ em (40), resultando na condição de síntese do controlador de realimentação de estados $\mathscr{H}_2$ para o sistema LPV com atrasos nas entradas de controle. O Teorema 4 apresenta esta condição, desenvolvida neste trabalho.

Teorema 4 *Considere o sistema LPV com entrada atrasada* (27)*. Existe um controlador NCS da forma* (6) *de tal modo que o sistema controlado seja assintoticamente estável, garantindo um limitante para a norma $\mathscr{H}_2$ para todo $0 < h(t) \leq h_m$ com $\tau_k(t) \leq \tau_m$, $\dot{\tau}_k = 1$, se existir uma matriz $\tilde{P}(\rho(t)) > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que seja diferenciável e simétrica, uma matriz $\tilde{K}(\rho(t)) \in \mathbb{R}^{n_u\times n}$, além de matrizes não dependentes de parâmetros, simétricas e definidas positivas $\tilde{Q}_h$, $\tilde{R}_h$, $\tilde{R}_\tau$ e U e ainda escalares reais λ_2 e λ_3 tais que a seguinte condição LMI seja verdadeira para qualquer valor de $\rho(t)$ que atenda a condição* (2)*.*

$$\begin{bmatrix} -2U & \tilde{P} - \lambda_2 U + AU & -\lambda_3 U + A_h U & B_2\tilde{K} & 0 & h_m\tilde{R}_h & \tau_m\tilde{R}_\tau \\ \star & \tilde{\sum}_{2,2} & \tilde{\sum}_{3,3} & \tilde{R}_\tau + \lambda_2 B_2\tilde{K} & UC^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \tilde{\sum}_{4,4} & \lambda_3 B_2\tilde{K} & UC_h^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -\tilde{R}_\tau & \tilde{K}^T D_2^T & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -I & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\tilde{R}_h & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\tilde{R}_\tau \end{bmatrix} < 0, \quad (42)$$

onde

$\tilde{\sum}_{2,2} = \dot{P} + \tilde{Q}_h - \tilde{R}_h - \tilde{R}_\tau + \lambda_2(UA^T + AU)$,

$\tilde{\sum}_{3,3} = \tilde{R}_h + \lambda_3 UA^T + \lambda_2 A_h U$,

$\tilde{\sum}_{4,4} = -(1-\dot{h})\tilde{Q}_h - \tilde{R}_h + \lambda_3(UA_h^T + A_h U)$.

O ganho de realimentação de estados $K(\rho(t))$ é então obtido similarmente à Síntese do Controlador $\mathscr{H}_\infty$, através da condição (35)*.*

Demonstração: Partindo da LMI (40), onde foram inseridas algumas variáveis de folga, foram estabelecidas algumas restrições sobre estas varáveis como $V_1 = V$ e $V_i = \lambda_i V$ $(i = 2,3)$, sendo λ_i escalares reais. Esta ação foi realizada com a finalidade de garantir a linearidade da condição. Em seguida foi aplicada uma transformação de congruência, $\mathscr{T} = diag(U,U,U,U,I,U,U)$, onde $U = V^{-1}$. Ainda foram utilizadas as relações $U^T P U = \tilde{P}$, $U^T Q_h^T U = \tilde{Q}_h$, $U^T R_h U = \tilde{R}_h$, $U^T R_\tau U = \tilde{R}_\tau$ e $KU = \tilde{K}$. Assim, obteve-se a condição (42).

Através do Teorema 4 é possível gerar um ganho de realimentação de estados $K(\rho(t))$, conforme (35), que garanta a minimização do limitante da norma $\mathscr{H}_2$. A seguir será detalhado o desenvolvimento para determinação da condição do limitante para a norma $\mathscr{H}_2$ a partir da condição (36) de acordo com (MAHMOUD et al., 2009),

$$\dot{V}(x_t,\rho) \leq -z^T(t)z(t).$$

Integrando ambos os lados dentro do intervalo $[0,t_f]$, obtém-se

$$V(t_f) - V(0) \leq -\int_0^{t_f} z^T(r)z(r)dr.$$

Considerando o sistema assintoticamente estável e $t_f \to \infty$, $V(t_f) \to 0$. Assim, obtém-se a seguinte condição

$$V(0) \geq \int_0^{\infty} z^T(r)z(r)dr.$$

Desta forma, ao minimizar $V(0)$ também será minimizado o limitante da norma $\mathscr{H}_2$. A partir da função de Lyapunov utilizada, mostrada em (19), tem-se que

$$\begin{aligned} V(0) &= x^T(0)P(\rho(0))x(0) + \int_{-h(0)}^{0} x^T(\xi)Q_h x(\xi)d\xi \\ &+ \int_{-h_m}^{0}\int_{\theta}^{0} \dot{x}^T(\xi)h_m R_h \dot{x}(\xi)d\xi d\theta + \int_{-\tau_m}^{0}\int_{\theta}^{0} \dot{x}^T(\xi)\tau_m R_\tau \dot{x}(\xi)d\xi d\theta. \end{aligned}$$

Uma forma simples de minimizar $V(0)$, e consequentemente a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema controlado, consiste em minimizar a soma dos traços das matrizes P, Q_h, R_h e R_τ. No entanto, conforme será apresentado no capítulo seguinte, tal procedimento é conservador, e o valor resultante da soma dos traços é consideravelmente maior do que o valor real do custo garantido $\mathscr{H}_2$ do sistema. Para reduzir esta fonte de conservadorismo no procedimento de síntese, é apresentado, no Teorema 5, uma condição alternativa para a determinação de um limitante mais apropriado para a norma $\mathscr{H}_2$.

Teorema 5 *Dados X_0, X, X_h e X_τ, o sistema* (27) *é assintoticamente estável e a condição* (36) *é satisfeita para todo* $0 < h(t) \leq h_m$ *com* $\tau_k(t) \leq \tau_m$, $\dot{\tau}_k = 1$, *se existir uma matriz* $P(\rho(t)) > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *que seja diferenciável e simétrica, além de matrizes não dependente de parâmetros, simétricas e definidas positivas* Q_h, R_h, R_τ *e* W *tais que para qualquer valor de* $\rho(t)$ *que atenda a condição* (2) *a norma* $\mathscr{H}_2$ *será menor que o traço de* W, *que satisfaz a condição LMI a seguir.*

$$\begin{bmatrix} W & X_0^T P & X^T Q_h & X_h^T h_m R_h & X_\tau^T \tau_m R_\tau \\ \star & P & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & Q_h & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & h_m R_h & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \tau_m R_\tau \end{bmatrix} < 0. \tag{43}$$

Demonstração: Defina a matriz W como sendo um limitante que satisfaz $V(0) < Tr(W)$. Dessa forma, tem-se que

$$\begin{aligned} Tr(x(0)^T P x(0)) \;&+\; Tr\left(\int_{-h(0)}^{0} x^T(\xi) Q_h x(\xi) d\xi\right) + Tr\left(\int_{-h_m}^{0}\int_{\theta}^{0} \dot{x}^T(\xi) h_m R_h \dot{x}(\xi) d\xi d\theta\right) \\ &+\; Tr\left(\int_{-\tau_m}^{0}\int_{\theta}^{0} \dot{x}^T(\xi)\tau_m R_\tau \dot{x}(\xi) d\xi d\theta\right) < Tr(W). \end{aligned}$$

Como a integral do traço é uma matriz igual ao traço de sua integral chegamos na equação (44)

$$\begin{aligned} Tr[x(0)^T P x(0)] \;&+\; \int_{-h(0)}^{0} Tr[x^T(\xi) Q_h x(\xi)] d\xi + \int_{-h_m}^{0}\int_{\theta}^{0} Tr[\dot{x}^T(\xi) h_m R_h \dot{x}(\xi)] d\xi d\theta \\ &+\; \int_{-\tau_m}^{0}\int_{\theta}^{0} Tr[\dot{x}^T(\xi)\tau_m R_\tau \dot{x}(\xi)] d\xi d\theta < Tr[W]. \end{aligned} \tag{44}$$

Considerando o primeiro termo da equação (44) e segundo as propriedades do traço de matrizes, temos:

$$Tr[x(0)^T P x(0)] = Tr[x(0) x(0)^T P].$$

Assim, sendo $x(0)x(0)^T = X_0 X_0^T$, então

$$Tr[x(0)x(0)^T P] = Tr[X_0 X_0^T P].$$

O mesmo procedimento é realizado com os outros termos da equação (44), resultando em:

$$Tr[XX^T Q_h],$$

$$Tr[X_h X_h^T h_m R_h],$$

$$Tr[X_\tau X_\tau^T \tau_m R_\tau],$$

Assim, obtém-se a equação (45)

$$Tr[X_0 X_0^T P] + Tr[XX^T Q_h] + Tr[X_h X_h^T h_m R_h] + Tr[X_\tau X_\tau^T \tau_m R_\tau] < Tr[W]. \qquad (45)$$

Aplicando novamente as propriedades do traço de matrizes nos termos da equação (45), temos

$$Tr[X_0^T P X_0] + Tr[X^T Q_h X] + Tr[X_h^T h_m R_h X_h] + Tr[X_\tau^T \tau_m R_\tau X_\tau] < Tr[W].$$

A condição anterior é válida se

$$W - [X_0^T P X_0 + X^T Q_h X + X_h^T h_m R_h X_h + X_\tau^T \tau_m R_\tau X_\tau] > 0,$$

representando esta equação em formato matricial

$$W - \begin{bmatrix} X_0^T P & X^T Q_h & X_h^T h_m R_h & X_\tau^T \tau_m R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_m R_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_m R_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P X_0 \\ Q_h X \\ h_m R_h X_h \\ \tau_m R_\tau X_\tau \end{bmatrix} > 0. \qquad (46)$$

Aplicando o Complemento de Schur na equação (46), chegamos na condição (43), referente ao Teorema 5, concluindo esta demonstração.

A principal contribuição do Teorema 5 é determinar uma condição para calcular uma matriz W cujo traço seja um limitante superior para o valor do custo garantido $\mathscr{H}_2$ do sistema. Em procedimentos de análise, a minimização do traço de W permite que se tenha uma aproximação do limitante de pior caso da norma $\mathscr{H}_2$, e o Teorema 5 também pode ser usado em procedimentos de síntese, como apresentado no Teorema 6, para determinar controladores que minimizem o limitante da norma $\mathscr{H}_2$ do sistema controlado.

As subseções a seguir apresentam os cálculos das variáveis X_0, X, X_h e X_τ.

4.3.1 CÁLCULO DE X_0

Sendo $x(0) \in \mathbb{R}^n$ um vetor conhecido, uma das formas de obter $X_0 X_0^T = x(0)x(0)^T$ é utilizando a relação

$$X_0 = \begin{bmatrix} x(0) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

4.3.2 CÁLCULO DE X, X_H E X_τ

A fim de obter um limitante de pior caso para a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema dependente dos parâmetros $\rho(t)$, é necessário determinar a matriz A_ρ resultante do problema

$$\rho^* = arg \underset{\rho}{Max} \left\| A(\rho) \right\|,$$

$$A_\rho = A(\rho^*). \tag{47}$$

Tal resultado implica que

$$\exists x^* : \left| A_\rho \cdot x^* \right| \geq \left| A(\rho) \cdot x^* \right|, \forall x(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Sabendo que

$$XX^T = \int_{-h(0)}^{0} x(\xi)x(\xi)^T d\xi \tag{48}$$

A desigualdade anterior pode ser usada para calcular um limitante de pior caso para a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema, onde x^* é obtido pela decomposição de valores singulares.

É possível verificar que

$$Tr[XX^T] = Tr[X^TX] = \int_{-h(0)}^{0} Tr[x(0)^T e^{\int_0^{\xi} A(\rho(\beta))^T d\beta} e^{\int_0^{\xi} A(\rho(\beta))d\beta} x(0)]d\xi =$$

$$= \int_{-h(0)}^{0} Tr\left(\left\| e^{\int_0^{\xi} A(\rho(\beta))d\beta} x(0)\right\|^2\right) d\xi, \quad (50)$$

pois a solução do sistema (27), para $-h(0) \leq t \leq 0$, é dada por

$$x(t) = e^{\int_0^{\xi} A(\rho(\beta))d\beta} x(0).$$

Como é possível verificar, segundo Tropp (2014), que

$$\|M_1\| < \|M_2\| \Rightarrow \left\|e^{M_1}\right\| < \left\|e^{M_2}\right\|,$$

então tem-se que

$$\int_{-h(0)}^{0} Tr[XX^T]d\xi \leq \int_{-h(0)}^{0} Tr\left(\left\|e^{A_\rho \xi} x^*\right\|^2\right) d\xi. \quad (51)$$

Portanto, ao minimizar o limitante superior, obtido usando A_ρ e x^*, a norma $\mathscr{H}_2$ de pior caso é minimizada. Tal procedimento pode ser utilizado, de maneira similar, para calcular as matrizes X_h e X_τ.

4.3.3 CONDIÇÃO DE SÍNTESE DO CONTROLADOR $\mathscr{H}_2$

Um dos focos deste trabalho é sintetizar um ganho de realimentação de estados que minimize a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema controlado. Assim, através dos Teoremas 4 e 5 em conjunto, pode-se definir o Teorema 6.

Teorema 6 *O sistema será assintoticamente estável, garantindo a minimização do limitante para a norma $\mathscr{H}_2$ para todo $0 < h(t) \leq h_m$ com $\tau_k(t) \leq \tau_m$, $\dot{\tau}_k = 1$, se existir uma matriz $\tilde{P}(\rho(t)) > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que seja diferenciável e simétrica, uma matriz $\tilde{K}(\rho(t)) \in \mathbb{R}^{n_u\times n}$, além de matrizes não dependente de parâmetros, simétricas e definidas positivas $\tilde{Q}_h$, $\tilde{R}_h$, $\tilde{R}_\tau$ e U e ainda escalares reais λ_2 e λ_3 tais que as condições (42) e (43) sejam verdadeiras para qualquer valor de $\rho(t)$ que atenda a condição (2).*

5 VALIDAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE SÍNTESE

Neste capítulo, serão apresentados exemplos numéricos para a validação das condições de síntese dos controladores $\mathscr{H}_\infty$ e $\mathscr{H}_2$, apresentadas no capítulo anterior.

5.1 VALIDAÇÃO DA CONDIÇÃO DE SÍNTESE PARA O CONTROLADOR $\mathscr{H}_\infty$

O cálculo computacional para a condição (34), bem como para o ganho da realimentação de estados (35), são realizados em Ramezanifar et al. (2013) através da discretização em relação ao parâmetro tempo t, usando uma taxa de amostragem pré-definida. Este procedimento é problemático por várias razões. Em primeiro lugar, nenhuma análise da taxa de amostragem necessária para garantir a viabilidade da condição LMI foi realizada, e o ganho calculado pode não garantir os resultados desejados. Outro problema é que a trajetória de $\rho(t)$ deve ser totalmente conhecida, o que limita os casos em que a técnica pode ser aplicada. Por fim, a matriz de Lyapunov $P(\rho(t))$ é considerada independente de $\rho(t)$. Tais problemas podem aumentar o conservadorismo da técnica, gerando eventualmente controladores de baixo desempenho.

A condição (34) pode ser resolvida usando a abordagem politópica. Em primeiro lugar, as matrizes dependentes de parâmetros são reescritas como matrizes dependentes de variáveis no domínio multi-simplex, através da aplicação da transformação descrita em (3). A condição LMI pode, então, ser representada com uma dependência polinomial dos parâmetros do multi-simplex. De acordo com Oliveira e Peres (2007), a condição suficiente pode ser obtida pela aplicação da condição de cada monômio, em consequência, pode-se garantir a validade da condição LMI para qualquer $\rho(t)$ possível, dentro dos limites estabelecidos em (2), sem precisar de uma informação inicial sobre a trajetória de $\rho(t)$.

Outra vantagem da representação politópica é poder usar as variáveis matriciais como dependentes de parâmetros, em oposição à necessidade de forçar que elas sejam independentes como foi realizado em Ramezanifar et al. (2013). Por outro lado, a abordagem politópica pode ser considerada conservadora uma vez que as condições garantem a estabilidade do sistema para cada possível valor de $\rho(t)$ dentro dos limites indicados.

A técnica de resolução das condições LMIs proposta neste trabalho considera que as variáveis são dependentes polinomialmente dos parâmetros do multi-simplex, sendo os polinômios homogêneos de um determinado grau g, tal como descrito em (53). Quanto maior o valor do grau g menor será o conservadorismo da resposta ao problema (OLIVEIRA; PERES, 2007). Assim, para a validação do método de tratamento da LMI proposto foi verificado o comportamento da resposta quando se varia o grau do polinômio. Genericamente as matrizes dependentes de α são descritas com

$$P_g(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}(g)} \alpha_1^{k_1} ... \alpha_N^{k_N} P_k, \qquad k = k_1 k_2 ... k_N, \tag{53}$$

sendo $\alpha_1^{k_1}$... $\alpha_N^{k_N}$, $\alpha \in \Lambda_N$, $k_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, ..., N$ os monômios, e $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall k \in \mathcal{K}(g)$ são as matrizes. Por definição, $\mathcal{K}(g)$ é o conjunto de todas as possíveis combinações de k_i, $i = 1, ..., N$ tal que $k_1 + k_2 + ... + k_N = g$.

Ao considerar a estrutura polinomial nos parâmetros do multi-simplex, é necessário executar alguns cálculos adicionais, como a homogeneização das variáveis de simplex (AGULHARI et al., 2013). Estes procedimentos foram realizados neste trabalho com a ajuda da ferramenta ROLMIP (AGULHARI et al., 2012). Trata-se de um pacote computacional destinado a lidar com a resolução das condições LMIs dependentes de parâmetros.

Para comprovar a eficiência do método de análise proposto foi simulado um exemplo númerico, apresentado por Ramezanifar et al. (2013). Este exemplo é a representação do funcionamento de uma fresadora, conforme ilustrado na Figura 5. Vale ressaltar que trata-se da representação de um sistema amostrado e não especificamente um NCS, entretanto, ele pode ser utilizado para este fim, uma vez que os atrasos inerentes ao NCS provém da discretização do sinal para a comunicação através da rede, desta forma, semelhante ao sistema amostrado e com atrasos nos estados, como considerado no exemplo.

O sistema é composto por um eixo de massa $m_2 = 2Kg$ e um cortador de duas lâminas de massa $m_1 = 1Kg$. O sistema também conta com duas molas com constantes de elasticidade $k_1 = 10N$ e $k_2 = 20N$ e um amortecedor com coeficiente de $c = 0,5N/m.s$. Foi considerado $\beta = 70\,^{\circ}$.

A força que atua sobre a ferramenta não trata apenas de uma função só do

Figura 5: Um esquema do funcionamento de uma frezadora

Fonte: (TAN et al., 2003)

deslocamento, mas também da posição angular da lâmina (ϕ), que desempenha a função de um parâmetro variante no tempo. Para este exemplo, o dispositivo de corte tem duas lâminas que são usadas para remover o material da peça de trabalho. Assume-se que a velocidade angular (ω) do giro das lâminas seja constante. Assim, considera-se um único parâmetro variante no tempo, $\rho_1 = \cos(2\phi(t) + \beta(t))$, limitado por

$$\rho_1 \in [-1 \;\; 1], |\dot{\rho}_1| = |-2\omega \sin(2\phi(t) + \beta))| \leq 418,9(rad/sec).$$

Assim como em Ramezanifar et al. (2013), neste trabalho, considera-se que ρ_1 pode ser obtido em tempo real. Além disso, foi considerado o atraso variante no tempo limitado por $0,015 < h(t) < 0,15$, e o vetor de estados sendo $x = [x_1 \;\; x_2 \;\; \dot{x}_1 \;\; \dot{x}_2]^T$, onde x_1 é o cortador e x_2 é o eixo.

As matrizes do sistema são descritas a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10,34 + \rho_1(t) & 10 & 0 & 0 \\ 5 & -15 & 0 & -0,25 \end{bmatrix}, \quad A_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,34 - \rho_1(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$$

Foi considerado que o máximo atraso $h(t)$ é dado por $h_m = 0,15$ (RAMEZANIFAR et al., 2013). De acordo com a Observação 1, $\dot{h}$ pode ser substituído por seu limitante superior, neste caso sendo utilizado o limite superior (h_m). O atraso máximo referente à discretização foi considerado para $\tau_m = 0,1$, e foram utilizados os valores $\lambda_2 = 1,3$, $\lambda_3 = 0,2$ e $\lambda_4 = 1,5$, obtidos empiricamente, para a condição (34). Estas mesmas condições foram definidas por (RAMEZANIFAR et al., 2013).

Para realizar a síntese, foi aplicado o Teorema 3, considerando as variáveis da LMI $\tilde{P}$, $\tilde{K}$, $\tilde{Q}_h$, $\tilde{R}_h$ e $\tilde{R}_\tau$ como polinômios de grau genérico g. Com a finalidade de avaliar a efetividade da variação do grau polinomial, foi testada a resposta variando o grau g no intervalo $\{0,3\}$. Para a construção e interpretação do conjunto de LMI foi utilizado o pacote computacional ROLMIP.

A Tabela 1 apresenta os valores mínimos obtidos para γ conforme a variação do grau polinomial g.

Tabela 1: Valores de $\gamma paradiferentesgraus, usandooTeorema3$

Grau polinomial (g)	Valor mínimo de γ
0	0,8344
1	0,8179
2	0,8179
3	0,8179

Fonte: Autoria própria.

Pode ser observado que houve uma redução no valor de γ com o aumento do grau de 0 para 1, comprovando assim que há uma diminuição no conservadorismo com o aumento do grau polinomial. Nota-se que ambos os valores obtidos para γ são inferiores a $\gamma = 2,4$ obtido por (RAMEZANIFAR et al., 2013).

Para cada um dos casos foi gerada a matriz de ganho de realimentação de estados, descritas a seguir:

- Para o grau polinomial = 0
  $K = [27,4549 \quad -21,7053 \quad 2,4291 \quad -16,3578]$

- Para o grau polinomial = 1
  $K_1 = [27,1667 \quad -21,4915 \quad 2,3071 \quad -16,3189]$
  $K_2 = [27,0968 \quad -21,4220 \quad 2,4501 \quad -16,3514]$

- Para o grau polinomial = 2
  $K_1 = [27,1667 \quad -21,4915 \quad 2,3071 \quad -16,3189]$
  $K_2 = [53,0493 \quad -41,3466 \quad 4,9540 \quad -32,3350]$
  $K_3 = [27,0969 \quad -21,4221 \quad 2,4501 \quad -16,3514]$

- Para o grau polinomial = 3
  $K_1 = [27,1687 \quad -21,4953 \quad 2,3066 \quad -16,3194]$
  $K_2 = [82,5330 \quad -65,8150 \quad 6,9484 \quad -49,2129]$
  $K_3 = [81,7720 \quad -64,8376 \quad 7,2448 \quad -49,0629]$
  $K_4 = [27,0981 \quad -21,4232 \quad 2,4507 \quad -16,3519]$

Assim, de uma forma geral, é possível constatar que o uso das variáveis dependentes de parâmetros e da análise politópica implica em uma redução no conservadorismo, o que explica os valores menores de γ, e consequentemente, maior robustez. Estes resultados devem-se ao fato da abordagem politópica, para a determinação do ganho, considerar todo o espaço de parâmetros, em vez de considerar apenas alguns valores como foi feito por Ramezanifar et al. (2013) ao aplicar um procedimento de discretização sobre a condição LMI.

A seguir, é apresentado o resultado da simulação do sistema tendo em conta as condições acima referidas e afetado por uma perturbação retangular ($w(t)$) com amplitude = 1, frequência = $0,1Hz$ e com a largura de pulso 40% do período, representado na Figura 6.

Figura 6: Representação gráfica da perturbação retangular ($w(t)$)

As Figuras 7 e 8 ilustram a comparação entre o grau 0 e grau 1, para deslocamento da ferramenta de corte (x_1) e do eixo (x_2).

Figura 7: Simulação de deslocamento (x_1) comparando $g = 0$ e $g = 1$ considerando o controlador $\mathscr{H}_\infty$.

Figura 8: Simulação de deslocamento (x_2) comparando $g = 0$ e $g = 1$ considerando o controlador $\mathscr{H}_\infty$.

Fica evidente a pequena diferença entre os graus considerando as saídas do sistema. Além disso, as Figuras mostram eficiência do método utilizado, uma vez que a estabilização do sistema ocorre em torno de $8,5s$.

A energia de controle necessária pode ser observado na Figura 9, a qual faz uma comparação entre os diferentes graus testado. Nota-se que a energia de controle necessária para controlar o sistema em cada um dos graus é muito próxima, tendo apenas um destaque para $g = 3$ que é um pouco menor.

Comparando estes resultados com os obtidos por (RAMEZANIFAR et al., 2013) é possível afirmar que mesmo sendo mais robusto o método proposto, ainda assim os

Figura 9: Energia de Controle necessária para controlar o sistema, considerando o controlador $\mathscr{H}_\infty$.

resultados das simulações foram muito semelhantes. A amplitude dos sinais de saída (x_1 e x_2), a energia de controle e também o tempo necessário para a estabilização podem ser considerados os mesmos.

5.2 VALIDAÇÃO DA CONDIÇÃO DE SÍNTESE PARA O CONTROLADOR $\mathscr{H}_2$

Ao tratar um problema levando em consideração apenas a minimização do custo garantido $\mathscr{H}_\infty$, há a garantia de robustez do sistema, entretanto não há uma preocupação com relação à energia de controle ou ao desempenho do sistema em geral. Na prática esta situação pode ser arriscada, uma vez que para tornar o sistema robusto muitas vezes o controlador resultante não é implementável. Desta forma, desenvolver uma condição que otimize algum parâmetro de desempenho de sistemas LPV com atraso na entrada se faz necessária.

Nesta seção, apresentamos a validação do Teorema 6 que estabelece a condição de síntese do controlador $\mathscr{H}_2$. Assim, foi utilizada para construção e solução do conjunto de LMIs o pacote computacional ROLMIP e o tratamento das condições foi feito de forma politópica, onde as variáveis $\tilde{P}$, $\tilde{K}$, foram consideradas dependentes de parâmetros, com dependência polinomial de grau genérico g.

Baseando-se na definição da condição de desempenho do custo garantido $\mathscr{H}_2$, estabelecida pela equação (42) e na condição limitante para este controlador, desenvolvida neste trabalho, é possível afirmar que a norma $\mathscr{H}_2$ será minimizada se o traço de W, presente na condição estabelecida pelo Teorema 5, for minimizado.

Para a validação da condição de síntese do controlador $\mathscr{H}_2$, foi utilizado o mesmo exemplo numérico já descrito na seção anterior.

Foi necessário, primeiramente, realizar o cálculo das matrizes X_0, X, X_h e X_τ, apresentadas em (43). Assim, conforme descrito na Seção 4.3.2, foi calculado o valor de A_ρ estabelecendo um grid de variação de ρ respeitando os limitantes do parâmetro. De acordo com (47) foi determinado A_ρ como sendo a matriz A com a matriz de maior norma.

Através do programa computacional MATLAB, foram determinadas as matrizes de decomposição em valores singulares pelo comando $svd(\cdot)$. Este comando computa as matrizes U, S e V da decomposição em valores singulares (*Singular Values Decomposition* - SVD) da matriz A_ρ, sendo U e V ortogonais e S uma matriz diagonal. Os valores da diagonal da matriz S correspondem aos valores singulares da matriz, e as colunas de U e V são, respectivamente, os vetores singulares à esquerda e à direita da matriz (GOLUB; LOAN, 1996). O vetor posicionado na primeira coluna da matriz V é considerado o vetor x^* que maximiza a norma induzida de A_ρ, sendo tal vetor utilizado como $x(0)$. Sabendo que $X_0 = [x(0) \;\; 0 \;\; ... \;\; 0]$, X_0 foi definido como

$$X_0 = \begin{bmatrix} -0,5412 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8408 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0086 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As demais matrizes foram numericamente calculadas utilizando o programa MATLAB. Para o cálculo da matriz X, foi computada numericamente a integral definida na Equação (48) e, em seguida, determinada sua decomposição de Cholesky (GOLUB; LOAN, 1996) tal que

$$XX^T = \int_{-h(0)}^{0} e^{A_\rho \beta} x(0) x(0)^T e^{A_\rho^T \beta} d\beta.$$

Nos casos em que a integral não resulta em uma matriz definida positiva, é possível determinar uma solução pelo cálculo da raiz quadrada matricial, utilizando o comando $sqrtm(\cdot)$. Um procedimento semelhante foi realizado para o cálculo das matrizes X_h e X_τ. As matrizes obtidas para o presente exemplo são

$$X = \begin{bmatrix} 0,1898 & -0,3039 & 0,3822 & -0,4124 \\ 0 & 0,0096 & -0,2564 & 0,2778 \\ 0 & 0 & 0,0626 & -0,0656 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0002 \end{bmatrix},$$

$$X_h = \begin{bmatrix} 0,0184 \cdot 10^{-3} & -0,0169 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ -0,0169 \cdot 10^{-3} & 0,0155 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3260 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2419 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$X_\tau = \begin{bmatrix} 0,0262 \cdot 10^{-3} & -0,0243 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ -0,0243 \cdot 10^{-3} & 0,0226 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2661 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,193 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Além disso, foi necessário determinar os valores dos escalares λ_2 e λ_3, presentes na condição (42), que resultam no menor valor para o limitante da norma $\mathscr{H}_2$. Para isso foi feito um teste considerando um intervalo de $\lambda_2 \in \{1, 10\}$, com variação de $0,1$ e um intervalo de $\lambda_3 \in \{1, 5\}$, também com variação de $0,1$, sendo que valores superiores a estes geraram uma resposta infactível. Assim, a Tabela 2 apresenta uma comparação dos valores do custo garantido $\mathscr{H}_2$ com relação à variação do grau polinomial, sendo $g \in \{0, 3\}$, para melhores valores de $\lambda_2 = 5,0$ e $\lambda_3 = 1,5$.

Tabela 2: Tabela de correlação entre o grau (g) e a norma $\mathscr{H}_2$

Grau polinomial (g)	Valor mínimo da norma $\mathscr{H}_2$
0	0,5
1	0,5
2	0,5
3	0,5

Fonte: Autoria própria.

Para cada um dos casos foi gerada a matriz de ganho de realimentação de estados, descritas a seguir:

- Para o grau polinomial $= 0$
  $K = [18,8396 \quad -12,0551 \quad 2,59739 \quad -14,7864]$

- Para o grau polinomial = 1

  $K_1 = [18,4396 \quad -11,9551 \quad 2,55739 \quad -14,0864]$

  $K_2 = [18,1354 \quad -11,4945 \quad 2,47826 \quad -14,1981$

- Para o grau polinomial = 2

  $K_1 = [17,7527 \quad -10,7402 \quad 2,66556 \quad -14,6616]$

  $K_2 = [34,5853 \quad -20,3636 \quad 5,11545 \quad -28,9976]$

  $K_3 = [17,3889 \quad -10,2647 \quad 2,56281 \quad -14,6558]$

- Para o grau polinomial = 3

  $K_1 = [18,5192 \quad -11,8687 \quad 2,58608 \quad -14,5398]$

  $K_2 = [55,0249 \quad -34,9545 \quad 7,60754 \quad -43,5829]$

  $K_3 = [54,3487 \quad -34,0047 \quad 7,45943 \quad -43,4887]$

  $K_4 = [18,3956 \quad -11,6622 \quad 2,51063 \quad -14,7268]$

Como já mencionado anteriormente, uma forma simples de obter o limitante para a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema seria a somatória dos traços das variáveis $\tilde{P}$, $\tilde{Q}_h$, $\tilde{R}_h$ e $\tilde{R}_\tau$. Assim, como um teste inicial, foi considerada esta condição como limitante da norma $\mathscr{H}_2$, a Tabela 3 apresenta estes resultados.

Tabela 3: Tabela de correlação entre o grau (g) e a norma $\mathscr{H}_2$, teste inicial

Grau polinomial (g)	Valor mínimo da Norma $\mathscr{H}_2$
0	84,74
1	150,60
2	296,05
3	586,90

Fonte: Autoria própria.

Ao analisar a Tabela 2, nota-se que com o aumento do valor do grau polinomial, o valor do custo garantido manteve-se o mesmo. Este fato não foi observado quando analisada a Tabela 3, pode-se notar que houve um aumento significativo no valor do custo garantido ao aumentar o grau polinomial. Este comportamento se deve ao forte conservadorismo ao usar apenas o somatório do traço de cada uma das matrizes da LMI como limitante da norma $\mathscr{H}_2$. Comparando as duas tabelas, é possível afirmar que ao aplicar a condição estabelecida pelo Teorema 5 como limitante da norma $\mathscr{H}_2$ foi possível obter um comportamento mais regular das normas, resultando em uma redução no conservadorismo.

Com relação ao valor do custo garantido, nota-se que com a condição estabelecida pelo Teorema 5 foi possível minimizar a norma $\mathscr{H}_2$ de forma mais efetiva. Tomando como exemplo o $g = 1$, o teste inicial apresentou um valor mínimo de $150,60$ para a norma, enquanto com a condição estabelecida pelo Teorema 5 o valor mínimo da norma foi de $0,5$.

A Figura 10 apresenta a relação gráfica entre a energia de controle do sistema em relação à variação do grau polinomial.

Figura 10: Energia de Controle necessária considerando o controlador $\mathscr{H}_2$ em relação à variação do grau g.

Ao analisar a energia de controle de forma gráfica, observa-se que a amplitude se manteve praticamente a mesma, com excessão de $g = 0$ que teve maior amplitude que os demais graus.

Com a finalidade de avaliar a resposta do sistema aplicando os dois métodos de controle ($\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$), foi analisada a saída x_1 referente ao cortador, comparando os dois métodos e a título de demonstração, foi considerado para esta análise $g = 1$. Através da Figura 11 nota-se que o tempo de estabilização com o controlador $\mathscr{H}_\infty$ foi menor,tendo um pequeno almento com o controlador $\mathscr{H}_2$. Tal resultado já era esperado uma vez que o controlador $\mathscr{H}_2$ foi projetado preocupando-se apenas com a otimização da energia de controle e não a velocidade de estabilização.

Desta forma, a fim de verificar se a condição atendeu o seu propósito de otimizar a energia de controle do sistema, foi realizada uma comparação entre a energia de controle considerando apenas o controlador $\mathscr{H}_2$ com a energia de controle obtida quando considerado apenas o controlador $\mathscr{H}_\infty$. Assim, foi gerado um gráfico, ilustrado pela Figura 12 que demonstra esta comparação, considerando $g = 1$.

Através da Figura 12 é possível observar que houve uma redução de aproximadamente 20% na energia de controle quando foi considerado apenas o controlador $\mathscr{H}_2$,

Figura 11: Comparação entre a Saida x_1 do sistema considerando o controlador $\mathscr{H}_2$ e o controlador $\mathscr{H}_\infty$.

Figura 12: Comparação da Energia de Controle entre o controlador $\mathscr{H}_2$ e o controlador $\mathscr{H}_\infty$.

comprovando assim a eficiência da condição LMI desenvolvida.

5.3 APLICAÇÃO DO CONTROLE MISTO $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$

Com a finalidade de unir a eficiência dos dois métodos anteriores, ou seja, aplicar o controlador $\mathscr{H}_\infty$ para a máxima robustez e controlador $\mathscr{H}_2$ para a energia de controle ótima, nesta seção é proposta a aplicação do controle misto, para os gráficos foram utilizados os valores de $g = 1$. Para isso, foi estabelecido um valor fixo $\gamma = 1$, uma vez que através da aplicação do controle pela norma $\mathscr{H}_\infty$ obteve-se o valor de $\gamma = 0,8179$ e como função objetivo a minimização do custo garantido $\mathscr{H}_2$. Para este método foi utilizada a condição de síntese dos dois métodos anteriores (Teorema 3 e Teorema 6).

Para a validação do método, foi aplicado o mesmo exemplo númerico das estratégias anteriores, e da mesma forma que o controlador $\mathscr{H}_2$, também foi necessário otimizar os valores de λ_2 e λ_3 para a condição de síntese do custo garantido $\mathscr{H}_2$, para isso foi feito um teste considerando um intervalo de $\lambda_2 \in \{1, 10\}$, com variação de $0,1$ e um intervalo de $\lambda_3 \in \{1, 5\}$, também com variação de $0,1$, sendo que valores superiores a estes geraram uma resposta infactível. Assim, a Tabela 4 apresenta uma comparação entre as normas obtidas em relação a alguns valores de λ_2 e λ_3 obtidos com este teste.

Tabela 4: valores do custo garantido $\mathscr{H}_2$ com relação aos valores de λ_2 e λ_3 para grau = 1

λ_2	λ_3	Valor mínimo da norma $\mathscr{H}_2$
3,7	0,1	0,5638
3,0	1,5	27,1100
7,0	1,5	47,7238
7,0	4,5	112,111
1,4	2,4	45,3841

Fonte: Autoria própria.

Com base nestas informações, para a simulação do controle misto utilizaram-se os valores de λ_2 e λ_3 que geraram o menor valor do custo garantido dentro do intervalo analisado, ou seja, $\lambda_2 = 3,7$ e $\lambda_3 = 0,1$.

Assim, comparando o valor da $\mathscr{H}_2$, com o grau polinomial utilizado, foram obtidos os resultados mostrados na Tabela 5.

Tabela 5: Tabela de correlação entre o grau (g) e a norma $\mathscr{H}_2$

Grau polinomial (g)	Valor mínimo da norma $\mathscr{H}_2$
0	0,5814
1	0,5638
2	0,5638
3	0,5637

Fonte: Autoria própria.

Assim como nas simulações das estratégias anteriores, observa-se um decréscimo no valor do custo garantido quando aumenta-se o grau polinomial. Para cada um dos casos foi gerada a matriz de ganho de realimentação de estados, descritas a seguir:

- Para o grau polinomial = 0
  $K = [33,4777 \quad -29,4760 \quad 2,1510 \quad -17,6545]$

- Para o grau polinomial = 1
  $K_1 = [33,4171 \quad -29,5182 \quad 2,03872 \quad -17,6313]$
  $K_2 = [32,9245 \quad -28,7507 \quad 2,15383 \quad -17.5575]$

- Para o grau polinomial = 2
  $K_1 = [33,417 \quad -29,518 \quad 2,03873 \quad -17,6313]$
  $K_2 = [66,6333 \quad -59,2077 \quad 3,78722 \quad -35,2074]$
  $K_3 = [32,9271 \quad -28,7546 \quad 2,15346 \quad -17,5581]$

- Para o grau polinomial = 3
  $K_1 = [33,419 \quad -29,5194 \quad 2,03746 \quad -17,6313]$
  $K_2 = [102,0086 \quad -90,99783 \quad 5,499517 \quad -53,1094]$
  $K_3 = [99,977 \quad -87,9303 \quad 6,01584 \quad -52,7126]$
  $K_4 = [32,9302 \quad -28,7595 \quad 2,1553 \quad -17,5610]$

As Figuras 13 e 14 ilustram uma comparação entre os três métodos de controle para o mesmo exemplo considerado anteriormente. A Figura 13 mostra a energia de controle e a Figura 14 o deslocamento do cortador x_1, e a título de demonstração foi considerado para esta análise $g = 1$.

Figura 13: Comparação entre os controladores para Energia de Controle com $g = 1$.

Nota-se, em ambas figuras, que os resultados considerando o controle misto não apresentam valores intermediários para energia de controle e tampouco para o tempo de estabilização, como era o esperado. O fato da resposta não se comportar como o esperado é um forte indicativo de que a condição de minimização do custo garantido $\mathscr{H}_2$ utilizada para estabelecer o Teorema 6 ainda apresenta conservadorismos. Uma das fontes de conservadorismo desta condição é o fato de considerar A_ρ, ou seja, foi calculado o limitante para o pior caso.

Entretanto, ao avaliar o valor do custo garantido $\mathscr{H}_2$ e seu comportamento regular no controlador misto, pode-se afirmar que com esta condição, o conservadorismo

Figura 14: Comparação entre os controladores para Deslocamento do cortador x_1.

foi bastante reduzido, comparado aos testes iniciais, porém os gráficos mostram que a condição ainda é conservadora.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de dissertação teve como objetivo principal o desenvolvimento de um controlador misto $\mathscr{H}_2$ / $\mathscr{H}_\infty$ para um sistema LPV com duas formas de atraso, sendo a primeira referente ao atraso de comunicação proveniente do NCS, representada por $(t-h)$ e a segunda referente à discretização do sinal, representado por $(t-\tau_k)$. Para isso, foi desenvolvida um condição LMI para garantir um limitante para a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema em malha fechada, utilizando como base a Função de Lyapunov-Krasovskii.

Outra contribuição deste trabalho refere-se ao método de tratamento dos conjuntos de LMI, que neste caso foi de forma politópica, considerando as variáveis dependente de parâmetros e utilizando o programa computacional ROLMIP para construção e análise das LMIs ao invés da forma de discretização proposta pplos autores de referência.

Através da simulação de um exemplo numérico foi realizada a validação dos métodos propostos, confirmando sua eficiência. A seguir estão listadas as conclusões após cada um dos testes.

- Comparando o método de tratamento politópico, proposto neste trabalho com o método de discretização, proposto na literatura, foi possível comprovar uma maior robustez no método proposto, uma vez que foi obtido uma redução de aproximadamente 65% no valor do limitante da norma $\mathscr{H}_\infty$, no exemplo utilizado. No entanto, vale ressaltar que esta robustez não ocasionou qualquer diferença na simulação da ação de controle para o exemplo considerado.
- Para a validação da condição de síntese do controlador $\mathscr{H}_2$, foi realizada uma comparação entre os métodos usando como parâmetro de análise a energia de controle necessária para estabilizar o sistema. Nesta comparação, houve uma redução de 20% em relação à obtida no controlador $\mathscr{H}_\infty$. Como foi encontrado um problema de conservadorismo durante testes iniciais, foi necessário desenvolver uma nova condição limitante para a norma $\mathscr{H}_2$, onde foram consideradas as ponderações causada pelos termos h_m e τ_m, com isso foi possível reduzir de forma considerável o conservado-

rismo da condição, resultando em valores bem inferiores para a norma e principalmente garantindo o comportamento uniforme em relação ao grau polinomial.

- Após a validação das duas propostas deste trabalho, foi então aplicado o método de controle misto o qual é responsável por garantir a robustez enquanto otimiza algum critério de desempenho, tanto para robustez, quanto para a minimização da energia de controle. Através dos gráficos de comparação entre as três estratégias nota-se um comportamento inesperado, onde os resultados do controle misto ficaram acima do controle $\mathscr{H}_\infty$ e não intermediário, comprovando ainda assim que mesmo tendo melhorado significativamente o conservadorismo a condição ainda é conservadora.

Assim, com base nos testes realizados, foi possível validar e comprovar a eficiência dos métodos propostos, tanto de análise das LMIs, quanto na síntese do controlador para sistemas LPV com entrada atrasada.

6.1 TRABALHOS PRODUZIDOS

Este trabalho teve uma publicação em congresso internacional, conforme segue:

BASTOS, R. B. P.; AGULHARI, C. M.. **A Polytopic Approach to Design H-inf Controllers for Networked LPV Control Systems**. In: 12th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications - INDUSCON, 2016, Curitiba - PR - Brazil. Proceedings of 12th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications. 2016.

6.2 PROPOSTA DE CONTINUIDADE

Como foi observado durante os resultados da simulação do controle misto, a condição limitante para a norma $\mathscr{H}_2$ ainda é bastante conservadora. Assim, existe um amplo campo a ser estudado, objetivando reduzir ao máximo o conservadorismo desta condição e também aplicando o método em outras formas de utilização, por exemplo para área de filtragem.

REFERÊNCIAS

AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems. In: **XIX Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2012**. Campina Grande, Brazil: SBA - Sociedade Brasileira de Automática, 2012.

AGULHARI, C. M. et al. $\mathscr{H}_\infty$ dynamic output feedback for LPV systems subject to inexactly measured scheduling parameters. In: **Proceedings of the 2013 American Control Conference**. Washington, DC, USA: American Automatic Control Council, 2013. p. 6060–6065.

BORGES, R. A. et al. $\mathscr{H}_\infty$ filtering for discrete-time linear systems with bounded time-varying parameters. **Signal Processing**, v. 90, p. 282–291, 2010.

BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

BRIAT, C. **Advances in Delay and Dynamics.** Gif-sur-Yvette, France: Springer, 2015.

CHEN, N.; WEN, J. T. LPV model identification for motion control systems. In: **Proceedings of the 2013 American Control Conference**. Washington, DC, USA: American Automatic Control Council, 2013. p. 6823–6828.

FARHOOD, M.; BEHESHTI, M. T. Extended linear matrix inequality approach to multiobjective output feedback controller design. In: **IEEE India Conference and Exhibition**. Kanpur, India: IEEE Uttar Pradesh Section, 2008. p. 542–547.

FRIDMAN, E.; SEURET, A.; RICHARD, J. P. Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. **Automatica**, v. 40, p. 1441–1446, mar. 2004.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. **Matriz Computations**. 3rd. ed. Baltimore, USA: Johns Hopkins University Press, 1996.

GOODWIN, G. C.; SILVA, E. I.; QUEVEDO, D. E. A brief introduction to the analysis and design of networked control systems. In: **Chinese Control and Decision Conference**. Yantai, China: Northeastern University, China, 2008. p. 1–13.

JUNGERS, M. et al. A dynamic output feedback controller for a network controlled system based on delay estimates. **Automatica**, v. 49, p. 788–792, mar. 2013.

LACERDA, M. J. et al. A new approach to handle additive and multiplicative uncertainties in the measurement for lpv filtering. **International Journal of Systems Science**, v. 47, p. 1042–1053, 2016.

MAHMOUD, M.; SHI, P.; SAIF, A. Stabilization of linear switched delay systems: $\mathscr{H}_2$ and $\mathscr{H}_\infty$ methods. **Journal of Optimization Theory and Applications - Springer**, v. 142, p. 583–601, 2009.

MONTAGNER, V. F. et al. Stability analysis and gain-scheduled state feedback control for continuous-time systems with bounded parameter variations. **International Journal of Control**, v. 82, p. 1045–1059, 2009.

NAGHSTABRIZI, P.; HESPANHA, J. P. Designing an observer-based controller for a network control system. In: **44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005**. Seville, Spain: IEEE Control Systems Society and International Federation of Automatic Control, 2005. p. 848–853.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 52, p. 1334–1340, jul. 2007.

PAGANINI, F. Frequency domain conditions for robust $\mathscr{H}_2$ performance. **IEEE Transaction on Automatic Control**, v. 44, p. 38–49, 1999.

PAIJIMANS, B. et al. Identification of interpolating affine LPV models for mechatronic systems with one varying parameter. **European Journal of Control**, v. 14, p. 16–29, 2008.

RAMEZANIFAR, A.; MOHAMMADPOUR, J.; GRIGORIADIS, K. M. Sampled-data control of linear parameter varying time-delay systems using state feedback. In: **2013 American Control Conference(ACC)**. Washington, DC, USA: American Automatic Control Council, 2013. p. 6847–6852.

SASTRY, S. **Nonlinear systems:analysis, stability and control.** New York, USA: Springer, 2010.

SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multi-objective output − feedback control via LMI optimization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 4, p. 896–911, 1997.

SCHERER, C. W. Multiobjective $\mathscr{H}_2/\ \mathscr{H}_\infty$ control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 40, p. 1054–1062, 1995.

SKELTON, R.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, K. **A unified algebraic approach to linear control design**. 1st. ed. USA: CRC Press, 1998.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAIT, I. **Multivariable Feedback Control: Analysis and Design.** New York, USA: John Wiley & Sons, 2007.

SUPLIN, V. et al. Sampled-data $\mathscr{H}_\infty$ control and filtering: Nonuniform uncertain sampling. **Automatica**, v. 43, p. 1072–1083, 2007.

TAN, C.; LI, L.; ZHANG, H. Stabilization of networked control systems with both network-induced delay and packet dropout. **Automatica**, v. 59, p. 194–199, jun. 2015.

TAN, K.; GRIGORIADIS, K. M.; WU, F. $\mathscr{H}_2$ and $L_2 - to - L_\infty$ gain control of linear parameter-varying systems with parameter-varying delay. **In Control Theory and Applications, IEE Proceedings**, v. 150, p. 509–517, set. 2003.

TIPSUWAN, Y.; Y., M. Control methodologies in networked control systems. **Control Engineering Practice**, v. 11, p. 1099–1111, out. 2003.

TROPP, J. A. **An Introduction to Matrix Concentration Inequalities.** Boston, USA: Now Publishers, 2014.

WANG, J.; SHI, P.; GAO, H. Gain-scheduled stabilisation of linear parameter-varying systems with time-varying input delay. **IET Control Theory Applications**, v. 1, p. 1276–1285, set. 2007.

YU, M. et al. An LMI approach to networked control systems with data packet dropout and transmission delays. In: **43rd IEEE Conference on Decision and Control**. Atlantis, Paradise Island, Bahamas: IEEE Control Systems Society, 2004. p. 6847–6852.

ZHANG, L.; GAO, H.; KAYNAK, O. Network-induced constraints in networked control systems — a survey. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, v. 9, p. 403–416, fev. 2013.

ZHANG, W.; BRANICKY, M. S.; PHILLIPS, S. M. Stability of networked control systems. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 21, p. 84–99, fev. 2001.

ZOPE, R. et al. Delay-dependent $\mathscr{H}_\infty$ control for LPV systems with fast-varying time delays. In: **Proceedings of the 2012 American Control Conference**. Fairmont Queen Elizabeth, Montreal, Canada: American Automatic Control Council, 2012. p. 775–780.