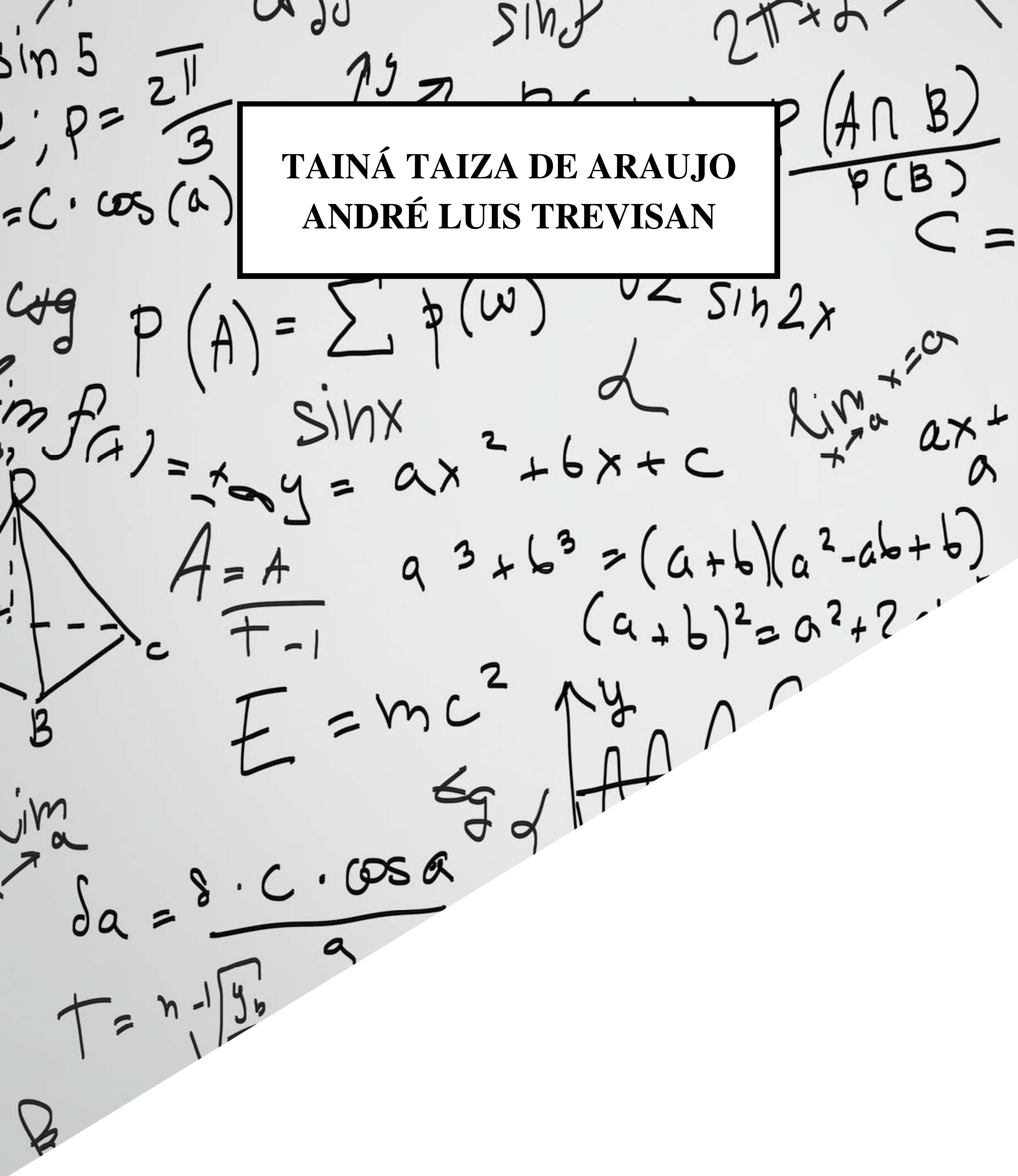


TAINÁ TAIZA DE ARAUJO

ANDRÉ LUIS TREVISAN

ÁREA SOB A CURVA, É SUFICIENTE PARA EXPLORAR O CONCEITO DE INTEGRAL DEFINIDA?

TAINÁ TAIZA DE ARAUJO

ÁREA SOB A CURVA É SUFICIENTE PARA EXPLORAR O CONCEITO DE INTEGRAL DEFINIDA?

IS THE AREA UNDER THE CURVE ENOUGH TO EXPLORE THE DEFINITE INTEGRAL CONCEPT?

Produto Educacional apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

LONDRINA

2023

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

TAINA TAIZA DE ARAUJO

INTEGRAIS DEFINIDAS DE UMA E MAIS VARIÁVEIS: UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO COM TAREFAS EXPLORATÓRIAS

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 16 de Março de 2023

Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Ana Marcia Fernandes Tucci De Carvalho, Doutorado - Universidade Estadual de Londrina (Uel)

Dra. Marcele Tavares, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 16/03/2023.

APRESENTAÇÃO

O presente trabalho é resultado de uma pesquisa de Mestrado do PPGMAT – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, intitulada “Integrais definidas de uma e mais variáveis: uma proposta de intervenção com tarefas exploratórias”, realizada entre os anos de 2021 e 2023, orientada pelo Prof. Dr. André Luis Trevisan. O desenvolvimento dessa pesquisa ocorreu na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 2 (CDI2), em duas turmas regulares de cursos de Engenharia da referida universidade, no câmpus Londrina, no primeiro semestre de 2022, sob responsabilidade da pesquisadora e do orientador da pesquisa.

Organizamos este material com o intuito de compartilhar com você, que é professor de CDI ou ensina Matemática em diferentes níveis de escolaridade, alguns aspectos relacionados às camadas mobilizadas pelos alunos, e os movimentos de generelização realizados no processo de estender o conceito de integral definida de uma variável para duas e três variáveis a partir do trabalho com uma tarefa de natureza exploratória.

Para a edição foi utilizado o editor canva, as figuras e imagens (exceto de autoria) estão contidas no editor.

INTRODUÇÃO

Vários estudos apontam que a dificuldade dos alunos com integrais definidas está relacionada com como será utilizada em contextos aplicados. Segundo Jones, Lim e Chandler

> [...] vários estudos recentes demonstraram claramente que os alunos de Cálculo muitas vezes têm dificuldades em usar o conceito de integração tanto nos cursos de Matemática quanto em cursos de ciências subsequentes [...]. Ao estudar essas dificuldades dos alunos e suas razões, há um reconhecimento que as ideias contidas na estrutura de soma de Riemann são importantes para uma robusta compreensão da integração definida (JONES; LIM; CHANDLER, 2017, p. 1076, tradução nossa).

Assim, muitos alunos que saem do curso de CDI não têm o entendimento das Somas de Riemann e, possivelmente, as vêem apenas como procedimentos iniciais para se encontrar um valor aproximado de uma integral definida. Em geral, nas aulas de CDI as Somas de Riemann são aplicadas apenas com foco em cálculos numéricos sendo, posteriormente, substituídas pela estratégia de resolução de integral definida por antiderivação, em articulação com a apresentação do Teorema Fundamental do Cálculo. Não que as estratégias por antiderivação e o Teorema Fundamental do Cálculo sejam desconsideráveis, mas uma compreensão aprofundada do conceito da Integral de Riemann via Somas de Riemann é necessária para compreender problemas que estão inseridos não apenas na Matemática, mas principalmente em Ciências subsequentes (HADDAD, 2013; GREEFRATH *et al*., 2021).

Segundo Miranda (2004, p. 18), “[...] a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral – não apenas no Brasil – tem registrado a vários anos altos índices de reprovação e desistência nos cursos de Ciências Exatas”. Isso tem ocorrido não somente em cursos de Matemática e Física, mas também em cursos de Engenharia. Um dos motivos para altos índices de desistência está relacionado ao “como” a disciplina de CDI geralmente tem sido abordada nas universidades.

> Tradicionalmente, as disciplinas matemáticas, tanto na Educação Básica quanto (e principalmente) no Ensino Superior, são “cartesianas”, sustentadas pelo tripé *definição exemplo-exercício*, seguido de uma avaliação acumulativa que prioriza a reprodução de procedimentos. Um dos efeitos gerados por essa tradição é tornar essas disciplinas, na visão dos estudantes, maçantes e algorítmicas, sem objetivos e desmotivadoras, principalmente para cursos de engenharia. (COUTO; FONSECA; TREVISAN, 2017, p. 51).

Para esses autores, ambientes de ensino e de aprendizagem que difiram dos métodos tradicionais se fazem necessários no âmbito de disciplinas matemáticas no Ensino Superior, já que oportunizam aos estudantes o protagonismo, potencializando a compreensão de conceitos matemáticos (TREVISAN; MENDES, 2018; TREVISAN; ALVES; NEGRINI, 2021).

Nessa proposta, defendem a utilização de tarefas exploratórias (PONTE, 2005, 2014), com característica mais aberta, que oportunizam aos alunos resolvê-las de forma intuitiva.

Considerando esses elementos, destacamos que o papel do professor nesse caso é de mediador, facilitador da aprendizagem, conduzindo questionamentos que proporcionem a validação das hipóteses corretas levantadas pelos alunos e redirecionados caso sejam inapropriadas. Prioriza-se assim o trabalho colaborativo (GRANBERG; OLSSON, 2015; CARLSEN, 2018), oportunizando a interação entre os pares, de modo que a fala de um aluno pode contribuir para a mudanças das hipóteses do outro, em casos em que o aluno possa estar tomando um caminho improcedente.

Para a edição foi utilizado o editor canva, as figuras e imagens (exceto de autoria) estão contidas no editor.

CAMADAS DA INTEGRAL DEFINIDA

Com a intenção de compreender como os estudantes de CDI desenvolvem a estrutura da soma de Riemann, Sealey (2014) investigou seu envolvimento com problemas de contexto físico e sugeriu uma estrutura de quatro camadas. A ideia de camadas do conhecimento (*layer*, no original em inglês) é baseada na decomposição da Integral de Riemman proposta nos trabalhos de Sealey (2006, 2008) e Sealey e Oehrtmann (2005, 2007), mencionadas por Sealey (2014). A autora propõe um *Framework* (Quadro 1) organizado em quatro camadas correspondentes às operações envolvidas no cálculo de uma Integral de Riemman, a constar: produto, soma, limite e função.

Quadro 1 - Camadas da estrutura de uma integral de Riemann.

Camada	Representação simbólica
Produto	$\left[\frac{1}{c} \cdot f(x_i)\right] \cdot [c \cdot \Delta x]$
Soma	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$
Limite	$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$
Função	$f(b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

Fonte: Adpatdo de Sealey (2014).

A primeira camada da estrutura Integral de Riemann, a Camada do Produto, "é composta pela multiplicação de duas quantidades, $f(x_i)$ e Δx, onde $f(x_i)$ pode ser conceituada como uma taxa e Δx como uma diferença." (SEALEY, 2014, p. 231, tradução nossa). Já a camada da soma inclui adicionar todas as infinitas peças do produto de $f(x_i)$ por Δx.

Para a edição foi utilizado o editor canva, as figuras e imagens (exceto de autoria) estão contidas no editor.

A terceira camada, por sua vez, envolve o limite “...à medida que n se aproxima do infinito das duas camadas anteriores, dando-nos a integral de Riemann.” (SEALEY, 2014, p. 231, tradução nossa).

Finalmente, “a quarta camada permite considerar a integral definida como uma função em que a entrada é o limite superior (ou seja, o ponto final direito) do intervalo sobre o qual a função é integrada, e a saída é o valor numérico da integral definida” (SEALEY, 2014, p.232, tradução nossa).

MOVIMENTOS DE GENERALIZAÇÃO

Harel e Tall (1991) definem o processo de generalização em três tipos diferentes: generalização disjuntiva, generalização reconstrutiva e generalização expansiva. No primeiro caso, a generalização disjuntiva “ocorre quando, ao passar de um contexto familiar para um novo, o sujeito constrói um novo esquema disjunto para lidar com o novo contexto e o adiciona ao conjunto de esquemas disponíveis” (HAREL; TALL, 1991, p.2, tradução nossa). A generalização expansiva ocorre “quando o sujeito expande a faixa de aplicabilidade de um esquema existente sem reconstruí-lo” (HAREL; TALL, 1991, p.2, tradução nossa); já “a generalização reconstrutiva ocorre quando o sujeito reconstrói um esquema existente para ampliar sua faixa de aplicabilidade.” (HAREL; TALL, 1991, p.2, tradução nossa). Por fim,

> [...] a generalização reconstrutiva é uma generalização verdadeira no sentido de que os esquemas anteriores são incluídos diretamente como casos especiais no esquema final. A generalização reconstrutiva difere porque o esquema antigo é modificado e enriquecido antes de ser englobado no esquema mais geral, [...](HAREL; TALL, 1991, p.2, tradução nossa).

TAREFAS EXPLORATÓRIAS

De acordo com Ponte (2005), uma tarefa pode ser caracterizada de várias maneiras e sua estrutura se dará conforme o objetivo do professor. O autor propõe quatro quadrantes para classificá-las, como podemos ver na Figura 1. No segundo quadrante, Ponte (2005) elenca um tipo de tarefa, o exercício, que tem caráter fechado e desafio reduzido. Já no terceiro quadrante, um problema, como exemplo de uma tarefa fechada e com desafio elevado. No quarto quadrante, por sua vez, uma investigação de caráter aberto e desafio elevado. Finalmente, no primeiro quadrante, tarefas abertas e com grau de desafio reduzido, que são nomeadas como tarefas de exploração.

O autor alerta que existe uma linha tênue entre o objetivo da tarefa e o caráter que ela pode assumir, pois o professor pode formular uma tarefa, por exemplo, no quadrante problema, e, no momento que o aluno resolver, essa tarefa na verdade pode se enquadrar como um exercício, pelo fato do aluno conhecer as estratégias prontas para resolução. Por isso, se faz tão importante, inicialmente, investigar o perfil da turma e quais conhecimentos prévios eles possam ter.

Figura 17 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura.

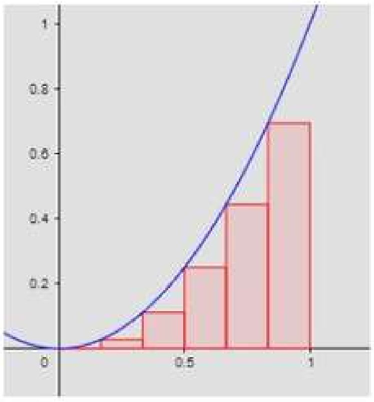
Fonte: Ponte (2005, p.8)

Para a edição foi utilizado o editor canva, as figuras e imagens (exceto de autoria) estão contidas no editor.

TAREFA EXPLORATÓRIA 1

<u>**Tarefa exploratória 1**</u>

Considere a região delimitada pela curva $f(x) = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.



1. Suponha que a região seja preenchida por alguns retângulos, como na figura ao lado, todos com a mesma base.

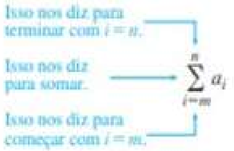
(a). Quanto mede essa base?

(b). Qual a altura de cada um dos retângulos?

(c). Calcule a área aproximada da região usando esses retângulos.

2. Leia a definição abaixo.

Uma maneira conveniente de escrever as somas usa a letra grega Σ (sigma maiúsculo, correspondente à nossa letra S) e é chamada **notação de somatória (ou notação sigma)**.



1 Definição Se $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ forem números reais e m e n inteiros tais que $m \leq n$, então

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

a) Represente, em notação de somatório, o cálculo realizado no item (c) da questão anterior.

b) Represente no Geogebra, pelo link https://www.geogebra.org/m/PnRNynS8 uma figura que ilustre $\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{8} f(x_i)$ e indique o valor desse somatório usando uma soma inferior e depois uma soma superior. Tire print da sua solução e envie por Whatsapp.

3. Determine o valor exato da área da região utilizando conhecimentos do Cálculo.

4. Que relações você estabelece entre os valores obtidos nas questões (1) e (2), e o valor obtido no item (3)?

A definição de somatória retirada de Stwart (2013, p. 30).

Para a edição foi utilizado o editor canva, as figuras e imagens (exceto de autoria) estão contidas no editor.

A tarefa exploratória 1 oportuniza aos estudantes a mobilização da camada do produto, evidente no processo de reconhecimento da medida da base de cada retângulo na determinação da abscissa dos pontos da partição do intervalo e no estabelecimento da medida da altura do retângulo como valor da função no ponto inicial de cada subintervalo. A camada da soma explícita na determinação da área aproximada por um processo de soma e na compreensão da variação dos índices na notação de somatório. E também a camada do limite expressa na ideia intuitiva de que, aumentando o número de retângulos, a soma aproxima-se cada vez mais do valor exato da área.

TAREFA EXPLORATÓRIA 2

Tarefa exploratória 2

O termo trabalho é usado na linguagem cotidiana significando a quantidade de esforço necessário para executar uma tarefa. Na Física esse termo tem um significado técnico que depende do conceito de força. Intuitivamente, você pode pensar em força como descrevendo um empurrar ou puxar um objeto. Em geral, se um objeto se move ao longo de uma reta com função posição $s(t)$, então a força F sobre o objeto (na mesma direção) é definida pela Segunda Lei de Newton do Movimento como o produto de sua massa m pela sua aceleração a: $F = ma$

No caso de aceleração constante, a força F também é constante, e o trabalho é definido como o produto da força F pela distância que o objeto percorre, ou sua variação de posição Δs:

$W = F \cdot \Delta s$

1. Quanto trabalho é exercido ao se levantar um livro de 1,2kg do chão até uma carteira de altura 0,7m? Considere que a aceleração da gravidade é $g = 9{,}8\text{m/s}^2$.

2. A equação anterior define trabalho desde que a força seja constante. Mas o que acontece se a força for variável? Imagine agora um contexto na qual a força $F(x)$ é variável ao longo do eixo x no sentido positivo de $x = a$ até $x = b$. Ainda assim, poderíamos assumir a força aproximadamente constante em subintervalos de $[a, b]$.

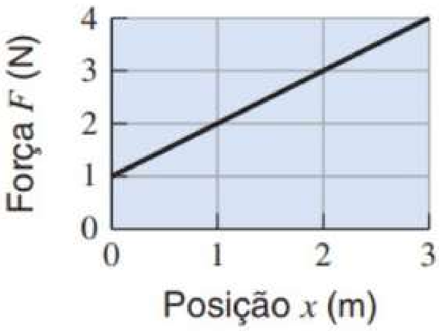
i) Para uma função força que varia conforme o gráfico abaixo, em cada caso calcule o trabalho realizado pela força numa partícula que se move de:

a) $x = 0$ até $x = 1$.

b) $x = 1$ até $x = 2$.

c) $x = 2$ até $x = 3$.

d) $x = 0$ até $x = 3$.



ii) Represente cada um dos cálculos realizados no item anterior em notação de somatório.

iii) Que relações você estabelece entre os cálculos anteriores e a tarefa da aula passada?

3. Suponha que um objeto se mova no sentido positivo, ao longo de um eixo coordenado, sujeito a uma força variável $F(x)$ que é aplicada no sentido do movimento. Proponha um método que permita calcular o trabalho W realizado por essa força, quando o objeto se move de $x = a$ até $x = b$.

A tarefa exploratória 2 proporciona aos estudantes a compreensão da camada do produto, em especial na compreensão da estrutura multiplicativa da expressão para o cálculo do trabalho realizado por uma força em um pequeno intervalo, e a camada da soma presente principalmente no estabelecimento de relação entre a soma dos trabalhos realizados em cada subintervalo e o trabalho calculado por meio de integrais.

TAREFA EXPLORATÓRIA 3

<u>Tarefa exploratória 3</u>

1. DENSIDADE E MASSA DE UMA HASTE UNIDIMENSIONAL

A densidade linear é a medida de uma quantidade de qualquer valor característico por unidade de comprimento. Considere uma haste longa e fina de massa m e comprimento Δx, a densidade deste objeto unidimensional, é expressa por $\rho = \frac{m}{\Delta x}$. Logo a massa desse objeto é dada pela fórmula $m = \rho \cdot \Delta x$.

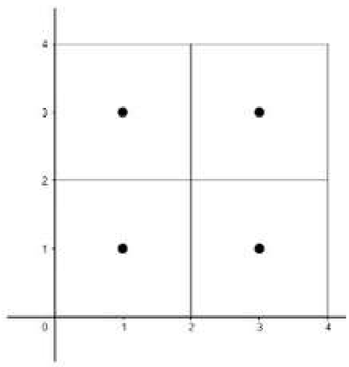
i. Qual é a massa de uma haste homogênea com comprimento 1,5m e densidade igual 2,5kg/m?

ii. A equação anterior define a massa desde que a densidade seja constante. Mas o que acontece se a densidade for variável? Ou seja, $m = \rho \cdot \Delta x$. Suponha que este objeto unidimensional esteja posicionado, ao longo de um eixo coordenado, entre $x = a$ e , com densidade variável ρ(x). Explique como encontrar a massa total do objeto, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

2. DENSIDADE E MASSA DE UMA LÂMINA NÃO HOMOGÊNEA

Consideremos um objeto achatado idealizado suficientemente fino para ser imaginado como sendo uma região plana bidimensional. Dizemos que tal objeto é uma lâmina. Uma lâmina é dita homogênea se sua composição for inteiramente uniforme, caso contrário é dita não-homogênea. A densidade ρ de uma lâmina homogênea de massa m e área A é dada por $\rho = \frac{m}{A}$. Já em uma lâmina não-homogênea, a composição pode variar de ponto para ponto, uma definição apropriada de “densidade” deve refletir essa condição. Para estabelecer tal definição, suponha que a lâmina seja colocada em um plano xy. A densidade no ponto (x, y) pode ser especificada por uma função $\rho(x, y)$, chamada de função densidade.

Considere uma lâmina de vértices (0, 0), (0, 4), (4 , 4) e (4 , 0), com densidade variável, ou seja, uma lâmina não-homogênea, com densidade $\rho(x, y) = x + y$ kg/m.



i. Considere essa lâmina subdividida em 4 retângulos, conforme figura abaixo. Admitindo que em cada retângulo a densidade é constante e igual ao valor no ponto representativo indicado, determine a massa total aproximada da lâmina.

ii. Considere agora a subdivisão dessa lâmina, em 8 retângulos, a sua escolha. Admitindo que em cada retângulo a densidade é constante e igual ao valor em um ponto representativo também da sua escolha, determine a massa total aproximada da lâmina.

Para a edição foi utilizado o editor canva, as figuras e imagens (exceto de autoria) estão contidas no editor.

Suponha agora um caso mais geral, em que a densidade da lâmina no ponto (x, y) pode ser especificada por uma função densidade $\rho(x, y)$. Explique como encontrar a massa total dessa lâmina não-homogênea, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

3. DENSIDADE E MASSA DE UM SÓLIDO

Considere um sólido tridimensional G. Se G for homogêneo de massa m e volume V, então sua densidade é dada por $\rho = \frac{m}{V}$. Se G for não-homogêneo e estiver em um sistema de coordenadas xyz, então sua densidade no ponto genérico (x, y, z) é especificada por uma função $\rho(x, y, z)$.

Explique como encontrar a massa total desse sólido não-homogênea, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

A tarefa 3 oportuniza aos estudantes a utilização da generalização expansiva ao relacionar geralmente questões procedimentais de cálculo de uma integral definida de duas e três variáveis, já que para configurar a integral e definir como se resolve os alunos recorrerem aos procedimentos da integral definida de uma variável e derivadas parciais. E a generalização reconstrutiva ao determinar aspectos conceituais da integral definida.

SISTEMATIZAÇÃO

A sistematização de integral definida multivariacional utilizando o conceito de massa de um objeto pode ser encontrada scaneando o QR code a seguir:

SCAN ME

Para a edição foi utilizado o editor canva, as figuras e imagens (exceto de autoria) estão contidas no editor.

Canva

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como resultados, pudemos inferir que com as tarefas exploratórias 1 e 2, os estudantes puderam explorar substancialmente o conceito de soma de base multiplicativa presente na soma de Riemann, em relação às camadas do produto, da soma e do limite. Em relação aos movimentos de generalização oportunizados pela tarefa 3, a generalização expansiva foi utilizada para expandir questões procedimentais do cálculo de uma integral e a generalização reconstrutiva foi utilizada na compreensão de aspectos estruturais da integral de Riemann de mais variáveis, como a utilização da estrutura geométrica da integral definida para estruturar uma forma de calcular a massa de um objeto.

Já em relação a limitação da nossa proposta, reconhecemos que a camada da função não foi explorada espontaneamente nas discussões realizadas em grupos a partir da proposta das tarefas. Porém, no momento da sistematização realizado pelo professor e pela pesquisadora essa camada foi abordada para explicar a relação de área sob a curva com a antiderivada no cálculo da integral definida, com a utilização da ideia de função de acumulação. Sendo assim, consideramos esse ponto algo importante para a adequação das tarefas de modo a oportunizar aos estudantes a possibilidade de mobilizar e compreender a camada da função que está presente em uma integral definida.

Para a edição foi utilizado o editor canva, as figuras e imagens (exceto de autoria) estão contidas no editor.

REFERÊNCIAS

CARLSEN, Upper secondary students' mathematical reasoning on a sinusoidal function. **Educational Studies in Mathematics**, v. 99, p. 277-291, 2018.

COUTO, A. F.; FONSECA, M. O. DOS S. DA; TREVISAN, A. L. Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à Insubordinação Criativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 8, n. 4, p. 50-61, 2017.

GERHARDT, T. E; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. 1ª Ed. Editora da UFRGS, 2009.

GRANBERG, C. OLSSON, J. ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 37, p. 48-62, 2015.

HADDAD, S. Que retiennent les nouveaux bacheliers de la notion d'intégrale enseignée au lycée? **Petitx**, v. 92, p. 7–32, 2013.

HAREL, G.; TALL, D. The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. **For the learning of Mathematics**, v.11, n.1, p.38-42, 1991.

JONES, S. R; LIM, Y. R; CHANDLER, K. R. Teaching Integration: How Certain Instructional Moves May Undermine the Potential Conceptual Value of the Riemann Sum and the Riemann Integral. **Ministry of Science and Technology.** v. 1, p.1075-1095, 2016.

MIRANDA, G. A. de. **Silvanus Thompson e a desmistificação do Cálculo: resgatando uma história esquecida.** 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

PONTE, J. P. **Gestão curricular em Matemática**. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

Para a edição foi utilizado o editor canva, as figuras e imagens (exceto de autoria) estão contidas no editor.

PONTE, J. P. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática.** Em: J. P. Ponte, (Org.). **Práticas profissionais dos professores de matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p. 13-27, 2014.

QUARESMA, M.; PONTE, J. P. Comunicação, tarefas e processos de raciocínio: Aprendizagens profissionais proporcionadas por um estudo de aula. **Zetetiké**, v. 23, n. 44, p. 297-310, 2015.

SEALEY, V; OEHRTMAN, M. Student understanding of accumulation and Riemann sums. In G. Lloyd, M. Wilson, J. Wilkins & S. Behm (Eds.), Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the **Psychology of Mathematics Education.** p. 84-91, 2005.

SEALEY, V. Definite integrals, riemann sums, and area under a curve: what is necessary and sufficient?. **Psychology of Mathematics Education**, Editora Universidad Pedagógica Nacional. v. 2, p. 46-53, 2006.

SEALEY, V. A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. **The Journal of Mathematical Behavior**, Editora Elsevier. v. 33, p. 230-245, 2014.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume 1, 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STEWART, J. **Cálculo**: Volume 2. 8ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 2 v, 672 p.

TREVISAN, A. L.; ALVES, R. M. A.; NEGRINI, M. V. **Ambiente de ensino e de aprendizagem de Cálculo pautado em episódios de resolução de tarefas: resultados e perspectivas futuras.** In: MENDES, M. T. JUSTULIN, A.M. (Org.). Produtos educacionais e resultados de pesquisas em Educação Matemática. 1ed. São Paulo: Livraria da Física, v. 1, p. 155-174, 2021.

TREVISAN; A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia**, v. 11, n. 1, p. 209-227, 2018.

Para a edição foi utilizado o editor canva, as figuras e imagens (exceto de autoria) estão contidas no editor.