UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

NILVA MÁRCIA DALLAGO JÚLIO

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO 7.º ANO DURANTE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

LONDRINA
2023

NILVA MÁRCIA DALLAGO JÚLIO

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO 7.º ANO DURANTE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MATHEMATICAL REASONING PROCESSES MOBILIZED BY 7TH GRADE STUDENTS DURING PROBLEM SOLVING

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman

LONDRINA

2023

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

NILVA MARCIA DALLAGO JULIO

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO 7º ANO DURANTE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 31 de Março de 2023

Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Andresa Maria Justulin, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Marcia Aguiar, Doutorado - Universidade Federal do Abc

Dedico este trabalho aos meus pais Antônio e Anézia, ao meu esposo Marciano Renato e a minha filha Maria Carolina.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por mais esta conquista.

À minha orientadora Eliane Maria de Oliveira Araman, não apenas pela realização deste trabalho, mas, em especial, por acreditar e apoiar. Por sua dedicação e acolhimento, não importando o dia e a hora (até mesmo em um pleno domingo), afagando e incentivando sempre.

Aos meus pais, Antônio e Anézia, pela vida e pelos ensinamentos que carrego comigo.

Ao meu esposo, Marciano Renato, pelo incentivo e apoio incondicional em todos os momentos. Mesmo distante, sempre disposto a me ajudar.

À minha filha, Maria Carolina, por seu companheirismo e amor, que me fortalecem todos os dias. Por todos os beijos e abraços que sempre me acalmam. Também, pela compreensão em tantos momentos de impaciência e ausência.

À Professora Doutora Márcia Aguiar e à Professora Doutora Andresa Maria Justulin, por aceitarem compor a banca, pela disponibilidade em ler o trabalho e pelas valiosas contribuições na escrita dessa dissertação.

Quero agradecer aos colegas de disciplinas, ao grupo de estudos por ouvir e contribuir nas apresentações de trabalhos, em especial, ao Leandro, pela parceria desde a primeira apresentação e o primeiro artigo apresentado na disciplina de Resolução de Problemas.

Meu agradecimento a todos os professores que, de forma direta ou indireta, colaboraram para que eu pudesse escrever minha história até o momento. Aos professores do PPGMAT, Línlya, Leonardo, Emerson, Rodolfo, Eliane e Andresa, por compartilharem momentos de aprendizados e reflexões.

Um agradecimento especial a minha amiga Bruna, com seu olhar "profissional", sugeriu um layout que fez toda a diferença no produto educacional.

Agradeço à direção e aos colaboradores do colégio Santa Cruz, onde atuo como professora, por me apoiarem e permitirem a coleta de dados. E um agradecimento "mais que especial" aos alunos que fazem parte desse estudo. Por fim, agradeço à UTFPR e ao programa PPGMAT pela oportunidade de cursar o mestrado em uma instituição com excelência em qualidade.

“A educação é um ato de amor. Por isso um ato de coragem” (PAULO FREIRE, 2003)

JÚLIO, Nilva M. D. **Processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do 7.º ano durante a Resolução de Problemas**. 2023. 98p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

RESUMO

Esta pesquisa tem, como objetivo, investigar processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental em uma escola privada da cidade de Maringá, no Estado do Paraná, ao resolverem uma sequência de problemas envolvendo contraexemplos pouco usuais no ensino tradicional da matemática, apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. O foco desta pesquisa está nos processos de raciocínio matemático, sendo assim, a partir do referencial teórico adotado, buscamos definir o que é raciocínio matemático, bem como os aspectos principais que o envolvem. A pesquisa segue uma perspectiva interpretativa e qualitativa de acordo com os pressupostos metodológicos da Investigação Baseada em Design. Os dados foram coletados por meio de gravação de áudios dos diálogos entre os alunos e o professor, bem como os registros escritos feitos pelos alunos ao resolverem os problemas propostos. Foram analisadas as discussões de três grupos, compostos por três alunos cada. Os áudios foram transcritos e analisados à luz da fundamentação teórica. Como resultados, constatamos que oportunizar situações que envolvem problemas pouco usuais no ensino da matemática contribuíram para a mobilização de processos de raciocínio matemático, como conjecturar, justificar, exemplificar e validar, e para a aprendizagem matemática.

Palavras-Chave: Ensino de Matemática; Processos de Raciocínio Matemático; Resolução de Problemas; Ensino Fundamental; Investigação Baseada em *Design.*

Júlio, Nilva. M.D. **Mathematical reasoning processes mobilized by 7th grade students during Problem Solving:** 2023. 98p. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

ABSTRACT

This research aims to investigate mathematical reasoning processes mobilized by students of the 7th grade of Elementary School in the city of Maringá, in the State of Paraná, when solving a sequence of problems involving, unusual counterexamples in the traditional teaching, of mathematics supported by the Methodology Teaching- Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving. The focus of this research is on mathematical reasoning processes, so based on the adopted theoretical framework, we seek to define what mathematical reasoning is, as well as the main aspects that envolve it, through an understanding organized. This research follows an interpretative and qualitative perspective in accordance with the methodological assumptions of Design- Based- Research. Data were collected through audios recording of dialogues between students and teacher, as well as written records made by students when solving the proposed problems. The discussions of three groups, composed of three students each, were analyzed. The transcribe and analyzed audios considering the theoretical foundation. As a result, we found that providing opportunities for situations involving unusual problems in mathematics' contributed to the mobilization of mathematical reasoning processes such as conjecturing, justifying, exemplifying and validating, and for mathematical learning.

Keywords: Teaching Mathematics; processes of Mathematical Reasoning; Problem Solving; Elementary School; Design-Based- Research.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DBR	Design-Based Research
IDB	Investigação Baseada em design
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPGMAT	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho de dissertação é[1] reflexo de uma inquietação de uma longa jornada de trabalho como educadora no Ensino Fundamental e Médio durante duas décadas de trabalho. A Educação fez parte da minha infância, acompanhava minhas tias em cursos e, até mesmo, nas salas de aulas, mas trilhei um caminho diferente. Mesmo relutando, a Educação entrou em minha vida como um passo de mágica.

Minha primeira graduação foi Ciências Econômicas. Após o término do curso na Universidade estadual de Maringá em 2000, tomei a decisão que iria morar em São Paulo com uma tia (professora). Na época, meu orientador do Curso de Ciências Econômicas cogitou a possibilidade de eu ingressar no mestrado. Naquele momento, sem ter uma dimensão do que estava fazendo, não aceitei, pois queria trabalhar em São Paulo. Ao chegar na capital, fui convidada para dar aulas de Matemática em turmas de 6º ano do Ensino fundamental. “Topei o desafio”. Quando coloquei os pés pela primeira vez em uma sala de aula, me apaixonei. Como não tinha Licenciatura em Matemática, ingressei em uma faculdade em São Paulo, a Universidade Camilo Castelo Branco. E, a partir do momento que aceitei o desafio, nunca mais estive fora da sala de aula. Foram 12 anos de trabalho intenso em São Paulo, pois houve um período em minha vida em que eu atuava em três escolas diferentes com uma carga horária de 75 horas-aulas por semana.

Por diversas vezes, busquei formas de aprofundar os estudos, mas, por “destino” ou “escolhas erradas”, as tentativas foram adiadas. Mas os anos foram passando e uma frustração começou a prevalecer nas minhas práticas pedagógicas. Sentindo a necessidade de fazer diferente, e não saber como, pois, as formações de professores nada acrescentavam, por muitas vezes, pensei em desistir. Mas optei por continuar. Retornando ao Paraná, em 2012, procurei fazer cursos de especialização, mas sempre me questionando: "como Ensinar Matemática para alunos do século XXI com uma formação no século XX? Será que estou atuando de forma correta em sala de aula com tantas lágrimas ao final de cada ano? Onde está o problema?”

Em 2020, cheguei ao PPGMAT, tendo a oportunidade de conhecer professores que apresentaram pesquisas e teorias voltadas para o Ensino da Matemática, senti que minhas frustrações começavam a “*acalmar”*, mas outras “*afloraram*”, pois, depois de conhecer as possibilidades de Ensinar Matemática, não bastavam. Era preciso colocá-las em prática, em

[1] Peço licença para utilizar em alguns momentos a primeira pessoa do singular para descrever situações que dizem exclusivamente a mim.

especial, após ter contato com literaturas de pesquisadores como Lannin Ellis e Elliot (2011), Araman e Serrazina (2020) e Jeannotte e Kieran (2017) que se propõem por meio de estudos uma reflexão sobre a habilidade de desenvolver o raciocínio matemático ao ensinar Matemática. Neste mesmo viés por meio da literatura de Resolução de problemas propostas por Allevato e Onuchic (2021) e outros autores como Van de Valle (2009) nasce o interesse em desenvolver o raciocínio matemático por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Neste cenário de inquietação, surgem as referências que contribuíram para a escolha do tema a ser desenvolvido nesta pesquisa, que tem como objetivo, investigar processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental em uma escola privada da cidade de Maringá, no Estado do Paraná, ao resolverem uma sequência de problemas envolvendo contraexemplos, problemas estes pouco usuais no ensino tradicional da matemática.

É comum utilizar o termo "raciocinar" na aprendizagem matemática, embora não seja exclusividade dela. A Base Nacional Comum Curricular- BNCC (BRASIL, 2018, p.267) ressalta a importância de "desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos". A Matemática tem, por objetivo, "desenvolver a capacidade de raciocinar". Conscientes da importância de desenvolver o raciocínio matemático ao ensinar Matemática, como parte desta pesquisa, e para um melhor entendimento do leitor contemplamos, no primeiro capítulo, a caracterização do raciocínio matemático por meios de aportes teóricos apresentados por autores como (JEANNOTTE; KIERAN, 2017; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011), (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020), e um modelo apresentado por Jeannotte e Kieran (2017), que organizam um entendimento de como a estrutura do raciocínio matemático se apresenta, indicando separadamente os dois processos: estrutural e de processos do raciocínio matemático. O primeiro é dividido em três tipos de raciocínios (dedução, abdução e indução) e o aspecto de processos de raciocínio matemático (relacionados à busca por semelhanças/diferenças e validação).

Para Jeannotte e Kieran (2017, p.7), o raciocínio matemático "é um processo de comunicação com os outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos de outros enunciados". Lannin, Ellis e Elliot (2011) enfatizam que o raciocínio matemático ampara o professor na compreensão das relações matemáticas.

Dando continuidade à pesquisa, no segundo capítulo, apresentamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com um breve relato do que se entende por problemas na visão de Van de Valle (2009) e Onuchic (1999), que define problema como sendo *"*tudo aquilo que não se sabe fazer, mas está interessado em resolver [...]", definição adotada na pesquisa. O contexto histórico faz parte da pesquisa para compreensão da escolha por esta Metodologia para a coleta de dados, seguindo as sugestões de Allevato e Onuchic (2021).

Em uma perspectiva de caráter qualitativo e interpretativo, esta pesquisa aborda, no terceiro capítulo, os pressupostos da Investigação Baseada em Design-(IBD), que acontece em ciclos, envolvendo as fases de "preparação, realização e análise retrospectiva" de acordo com os autores Ponte *et.al* (2016), sendo que, nesta dissertação, realizamos um ciclo. São apresentados o contexto da pesquisa, os participantes, o momento em que incluímos a instituição onde foi possível coletar os dados, a cidade em que está situada e o período em que os elementos dessa pesquisa foram obtidos. Ainda neste capítulo, são apresentados os problemas com seus objetivos e o entendimento que oportunizou a escolha dos problemas, o 7.º entendimento de Lannin Ellis e Elliot (2011, p.41): "*Uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa*". Um entendimento determinante para a escolha dos problemas, no qual pretende-se responder o objetivo desta pesquisa. Em seguida, é apresentada a organização dos dados, com o intuito de o leitor entender como se deu a coleta dos elementos que compõem a pesquisa.

Conforme orientação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a dissertação do Mestrado Profissional da Área de Ensino deve, necessariamente, apresentar um Produto Educacional. Desse modo, o Produto Educacional é uma extensão desta pesquisa no formato de *guia* para o professor, com uma leitura mais direcionada para o uso do material elaborado em sala de aula.

O quarto capítulo traz o percurso percorrido pelos alunos ao realizarem os problemas. Nesse mesmo capítulo, é feita a análise dos dados, identificando os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos do 7.º ano. Finaliza-se o quinto capítulo com as considerações finais, momento em que salientamos os resultados obtidos durante a realização da pesquisa.

1 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

O desenvolvimento do raciocínio matemático em sala de aula contribui para uma aprendizagem matemática voltada para o aluno como um sujeito ativo do aprendizado. Há um consenso a respeito da importância de trabalhar com o raciocínio matemático apontado por autores como Jeannotte e Kieran (2017), Lannin, Ellis e Elliot (2011), mas é preciso aprofundamento e estudo para compreendê-lo e saber como desenvolvê-lo em sala de aula.

Mas o que é o raciocínio matemático? Visando uma compreensão melhor do que é raciocínio matemático, primeiramente, vamos entender o conceito de “raciocinar”, que, embora não seja exclusividade da Matemática, é muito usado na aprendizagem da matemática e “pensar” que é uma expressão muito repetida ao desenvolver conceitos matemáticos. Entretanto, há uma certa confusão entre esses conceitos (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020, p. 7). De acordo com Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020, p.7), “raciocinar é realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado”. Diante disso, é fundamental conhecer conceitos apresentados por autores que se dedicam a conceituar o raciocínio matemático de maneira a contribuir para uma vertente de compreensão por parte dos educadores.

Ao discursar sobre o raciocínio matemático é possível encontrar várias visões sobre a questão que permeia a comunidade matemática. Para autores como Jeannotte e Kieran (2017, p.7), o raciocínio matemático “é um processo de comunicação com os outros que permite inferir enunciados matemáticos de outros enunciados matemáticos”. Sob o olhar de Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 7), “o raciocínio matemático é a essência e que sem raciocínio matemático não há matemática”, e complementam dizendo que “o raciocínio matemático é fundamental para uma compreensão mais profunda da matemática”. Já Carneiro, Araman e Serrazina (2020, p. 36) indicam “que o raciocínio-matemático consiste em produzir um enunciado matemático a partir de outros que são assumidos como verdadeiros”.

Para Brodie (2010, p. 7), raciocinar é “convencer os outros ou a nós mesmos de uma determinada afirmação; para resolver um problema”. Quando “raciocinamos”, desenvolvemos linhas de pensamento ou argumentação, que podem servir a vários propósitos. “O raciocinar vai muito além de uma aceitação, é argumentar acerca de questões entendidas como verdadeiras, desencadeando questionamentos e aprendizagens. Requer se apropriar de conceitos para desenvolver as habilidades, o que se dá por meio de tarefas desafiadoras, como, por exemplo, as tarefas exploratórias e a resolução de problemas" (ANJOS *et al.*, 2022) que instiguem o raciocinar matematicamente.

Para Oliveira (2008), o raciocínio matemático "designa um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas (conhecimento prévio)" (OLIVEIRA, 2008, p. 3).

Após a definição de raciocínio matemático, buscaremos compreender como o raciocínio matemático é estruturado. Para uma melhor compreensão, vamos apresentar um modelo organizado por Jeannotte e Kieran (2017).

Jeannotte e Kieran (2017, p. 7) explicam como a estrutura do raciocínio matemático se apresenta. As autoras salientam "que o objetivo não é construir um modelo que forneça práticas específicas para encorajar o raciocínio matemático" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 4), mas, sim, indicar conceitos que podem auxiliar no desenvolvimento do raciocínio matemático nas práticas pedagógicas. Enfatizam a importância de conhecer como os aspectos estruturais e de processo de raciocínio matemático se representam, indicando "duas diferentes formas de olhar para um determinado discurso" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.7). "Ambas se relacionam dialeticamente: as estruturas são parte do aspecto do processo de raciocínio matemático e os processos contribuem para a construção dessas estruturas".

1.1 ASPECTO ESTRUTURAL

As autoras conceituam separadamente os aspectos estruturais e os de processo. O primeiro é composto por três raciocínios lógicos (dedução, abdução e indução*)* e o aspecto de processo associa-se à busca por semelhanças/ diferenças e validação:

Sendo o aspecto estrutural definido como:

> O aspecto estrutural do RM refere-se em geral a um aspecto mais estático que está relacionado à forma de um determinado pedaço de MR. Mais especificamente, o aspecto estrutural refere-se à forma como os elementos discursivos se combinam em um sistema ordenado que descreve tanto os elementos quanto suas relações uns com os outros. As formas mais citadas são dedução, indução e abdução. (JEANNOTTE, KIERAN, 2017, p. 7)

Duval (1995 apud JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.7) "descreve o raciocínio dedutivo como a única forma de raciocínio que pode mudar o raciocínio epistêmico do conhecimento matemático de provável para verdadeiro". Neste contexto, observamos que a etapa dedutiva testa a validade das propriedades matemáticas, buscando a justificação formal ou informal. Por seu lado, Aliseda (2003) coloca que o raciocínio matemático pode ser identificado como inferência clássica e dedutiva e cita que:

> Dois aspectos são características deste tipo de raciocínio, nomeadamente a sua *certeza e* a sua *monotonicidad*e. O primeiro destes é exemplificado pelo fato de que a relação entre premissas e conclusão é de necessidade; uma conclusão tirada de um conjunto de premissas necessariamente decorre deles. O segundo aspecto afirma que as conclusões alcançadas via raciocínio dedutivo são irrevogáveis. Ou seja, uma vez que forem tenham sido provados, não há dúvida de sua validade, independentemente de outras adições de axiomas e teoremas ao sistema. (ALISEDA, 2003, p. 25).

Logo entendemos o papel de destaque que o raciocínio dedutivo tem na aprendizagem e desenvolvimento do raciocínio matemático. Seguindo as etapas que caracterizam o aspecto estrutural, a indutiva é a mais comum, definida de "forma inconsistente, em parte porque se refere a todo raciocínio que não é dedutivo" conforme Reid (2010 apud JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 8).

No modelo conceitual apresentado por Jeannotte e Kieran (2017, p. 8), a etapa indutiva infere uma garantia dos dados e a afirmação sobre os dados. O valor epistêmico (ou seja, o qualificador) que é permitido com relação à conclusão da etapa indutiva é provável (ou muito provável). As autoras complementam que, diferentemente do raciocínio dedutivo, o indutivo não conduz necessariamente a conclusões válidas, mas é importante para criação de um novo conhecimento. Já o abdutivo consiste em formular hipóteses razoáveis sobre determinado fenômeno, e, para Jeannotte e Kieran (2017, p. 8), "a estrutura de raciocínio abdutivo pode ser um elemento de cada processo de raciocínio matemático, gerando dados e garantias na busca por semelhanças, diferenças, conjecturas e nas validações". Aliseda (2003) contribui exemplificando que o raciocínio indutivo serve para verificar previsões e raciocínio abdutivo serve para construir hipóteses para fenômenos intrigantes. Acrescenta ainda que: "quanto ao seu nível de certeza o raciocínio dedutivo é completamente certo, o raciocínio indutivo abdutivo não é." (ALISEDA, 2003, p. 25, tradução nossa). E, complementando, Aliseda (2003) afirma que "a tradição axiomática segue o método dedutivo, herdado dos Elementos de *Euclides,* no qual de certo conjunto de axiomas básicos derivam todas as verdades geométricas" (ALISEDA, 2003, p. 27, tradução nossa).

O aspecto estrutural não garante uma compreensão plena do raciocínio matemático na comunidade escolar, porque "enquanto apresenta de forma estática, os elementos narrativos, relações e valores epistêmicos que constituem o raciocínio matemático, ele negligência a temporalidade que são centrais para atividade de raciocínio" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 7).

1.2 ASPECTO DOS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Jeannotte e Kieran (2017, p. 9), em seu modelo de raciocínio matemático, conceituam o aspecto do processo de raciocínio matemático "como processos cognitivos que são meta-discursivos, ou seja, que derivam narrativas sobre objetos ou relações, explorando as relações entre objetos". É, no aspecto de processos, que está o foco da presente investigação. Assim, foram organizados aqui os processos encontrados na literatura da seguinte forma: os processos que se relacionam à busca por semelhanças e diferenças, nos quais estão associados os processos de generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar e classificar, e os referentes à validação, que são justificar, provar e provar formalmente. Ainda, temos o exemplificar, que dá suporte aos demais processos.

Para Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 12), "raciocinar matematicamente é um processo em evolução de conjecturar, generalizar, investigar o porquê, e desenvolver e avaliar argumentos". Conforme Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), conjeturar, generalizar e justificar destacam-se como processos essenciais do raciocínio matemático e, portanto, devem ser aplicados desde os primeiros anos de escolaridade. Para Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 12), "conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras". Logo, os alunos podem exercitar conjecturas por meio de tarefas propostas em sala de aula, expondo seus argumentos.

A generalização é um processo com características próprias, ou seja, ao fazer conjecturas, os alunos iniciam um processo de identificação, levando à generalização, que permite relacionar um conjunto de dados a um conjunto maior. Stylianides (2008, p. 9) interpreta a generalização como o "transporte de relações matemáticas de conjuntos dados para novos conjuntos para os quais os conjuntos originais são subconjuntos". As generalizações acontecem, muitas vezes, quando os alunos identificam algo em comum com os casos analisados. Assim, o raciocínio ultrapassa o momento para se elevar a uma outra dimensão, ou seja, ao raciocínio mais vasto.

Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 16) acrescentam que a generalização se dá quando uma criança se concentra em um problema e pensa sobre "esse aspecto de forma mais ampla" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 16). Sob o olhar de Jeannotte e Kieran (2017, p. 9), "generalização é uma relação entre objetos do conjunto de um subconjunto deste conjunto". Mata-Pereira (2018, p. 10) faz uma observação em relação à generalização: "Em matemática, uma generalização frequentemente referida como teorema apenas é considerada verdadeira se lhe for associada uma demonstração válida (para os matemáticos)". A generalização se apresenta como o que difere consideravelmente a Matemática como ciência da Matemática escolar.

Nesse momento, a autora traz uma reflexão sob o olhar para a generalização enquanto uso de teoremas válidos. No entanto, percebemos que os alunos fazem generalizações o tempo todo, ainda que não consigam provar, dentro do rigor matemático, os teoremas matemáticos, mas que, por meio de situações envolvendo uma tarefa, os conduzirão a outras situações mais amplas, o que é muito válido para a aprendizagem matemática de forma a conhecer o sentido de estar apropriando determinados conceitos.

Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 12) afirmam "o raciocínio matemático envolve uma investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa".

Conjecturar, sob o olhar de Lannin, Ellis e Elliot (2011), envolve "raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 13).

Para Jeannotte e Kieran (2017, p. 10), "a conjectura leva a uma extensão do discurso pela construção de narrativas prováveis, a partir de busca por semelhanças e diferenças".

Araman e Serrazina (2020) pontuam que:

> Ao formular uma conjectura, o aluno precisa raciocinar sobre as relações matemáticas e desenvolver afirmações sobre elas. Essas afirmações têm o Intuito de serem verdadeiras, mas os alunos ainda não sabem se são. Ao observar as relações e pensar sobre elas, os alunos identificam pontos comuns entre vários casos que os ajudam na compreensão dos significados de conceitos, símbolos e representações. Ao elaborar uma estratégia de resolução, os alunos formulam conjecturas, mesmo que de forma inconsciente, pois, ao definir um procedimento a ser usado, julgam que este caminho os conduzirá a um resultado. Os alunos podem criar conjecturas válidas ou inválidas, alicerçadas em raciocínios válidos ou por vezes, inválidos. Embora os raciocínios inválidos não sejam desejados, eles podem servir como ponto de partida para o entendimento das ideias matemáticas. Uma conjectura pode ser apresentada de várias formas ou até mesmo existir apenas na mente dos alunos (ARAMAN; SERRAZINA, 2020, p. 149).

É possível identificar conjecturas em quase todas as tarefas realizadas pelos alunos em uma sala de aula, pois a conjectura é uma característica do processo de raciocínio matemático que conduz os alunos por meio dos conhecimentos prévios a elaborarem resoluções que podem estar corretas ou não. Caminhando nesse viés, faz-se necessário acrescentar como Polya (1954) considera, de extrema importância, a conjectura. Para ele, "a conjectura é central para a atividade matemática" (POLYA,1954 apud LANNIN, ELLIS e ELLIOT, 2011, p. 13). Cabe destacar que para Stylianides (2008), identificar um padrão (ou seja, uma relação recursiva) pode levar a conjecturas, mas os dois não podem ser igualados. (STYLIANIDES, 2008 apud JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 10).

De acordo com os entendimentos de Jeannotte e Kieran (2017, p. 10), a comparação é "um processo de raciocínio matemático que busca por semelhanças e diferenças e infere uma narrativa sobre as relações matemáticas". Logo, este processo é diferente de conjecturas e generalizações, por ser um padrão aplicável a algo dentro de um conjunto menor, não podendo se estender para um conjunto mais amplo.

Jeannotte e Kieran (2017) entendem que a comparação é:

> Um processo de raciocínio matemático que infere, pela busca de semelhanças e diferenças, uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas. A comparação pode ocorrer junto com uma infinidade de outros processos de raciocínio matemático: generalização, identificando um padrão e validando. Por exemplo, identificar um padrão exige a comparação de casos ou exemplos para destacar o padrão. No entanto, identificar um padrão vai além de comparar porque comparar apenas infere numa narrativa sobre semelhanças e diferenças. (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.10).

Dentro do modelo de Jeannotte e Kieran (2017), a classificação é um importante processo que viabiliza o desenvolvimento no nível no nível dos objetos, colocando-os juntos ou separando-os e, ademais, pode ser associada à comparação, conjectura e generalização (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.11). O quadro 1 exemplifica os conceitos definidos no modelo de Jeannotte e Kieran (2017) quanto aos processos de raciocínio matemático na busca por semelhanças e diferenças.

Quadro 1 – Processos relacionados à busca por semelhanças e diferenças

Processos	Conceitos
Generalizar	Processo, que, ela busca por semelhanças e diferenças infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos do conjunto de um subconjunto deste conjunto.
Conjecturar	Processo de raciocínio matemático que, pela busca de semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico provável ou muito provável e que tem o potencial para a teorização matemática.
Identificar um padrão	Processo que, pela busca por semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas.
Comparar	Processo que infere, pela busca de semelhanças e diferenças, uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas.
Classificar	Processo que infere, pela busca de semelhanças e diferenças entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos com base na matemática propriedades físicas e definições.

Fonte: Elaborado pela autora, baseada nas definições de Jeannotte e Kieran (2017)

No que diz respeito aos processos relacionados à validação, Jeannotte e Kieran (2017, p. 11) afirmam que "validar visa alterar o valor epistêmico (ou seja, a probabilidade ou a verdade) de uma narrativa matemática". Segundo elas, os processos de validação tencionam mudar o valor epistêmico de uma narrativa de uma forma ou de outra, e essa mudança pode ser de provável para verdadeiro, de provável para falso ou, até mesmo, de provável para mais provável. Para justificar, cabe obter garantias e apoio através de dados coletados, "que permite modificar o valor epistêmico de uma narrativa" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 11). É comum, em uma sala de aula, que os alunos aceitem as explicações e resolução dos professores sem questionarem e, até mesmo, sem justificativas. É possível justificar se baseando em conceitos já conhecidos. Conforme Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 35), "uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas e reconhecer se uma justificativa matemática é válida é um componente crítico do processo de raciocínio".

As justificativas são aceitas pelos alunos como ditas verdadeiras, pois, muitas vezes, não foram ofertadas oportunidades de raciocinar sobre a tarefa proposta. Lannin, Ellis e Elliot (2011) citam que:

> Os alunos constroem justificativas para convencer a si mesmos e aos outros de porquê uma determinada declaração é verdadeira. Para fornecer uma justificativa válida, os alunos devem fornecer uma sequência lógica das afirmações, ideias ou entendimentos já "sabiamente verdadeiros", para chegar a uma conclusão. A justificativa deve mostrar que a generalização é verdadeira para todos os casos no domínio, apelando para relacionamentos subjacentes válidos. Embora seja simples de afirmar, as justificativas válidas são muito difíceis de identificar do que essa explicação sugere. Frequentemente, uma tentativa inicial de justificação inclui declarações ou suposições válidas e inválidas que precisam de um exame mais aprofundado. Uma justificativa bem-sucedida faz mais do que apenas mostrar que uma afirmação é verdadeira ela explica por que, fornecendo uma visão sobre os relacionamentos subjacentes que existem em todas as instâncias (LANNIN; ELLIS; ELLIOT,2011, p.35).

Mata-Pereira (2018, p.13) acrescenta que "ainda que se pretenda que os alunos apresentem justificações baseadas em pressupostos matemáticos, nem todas as justificações apresentadas em sala de aula têm natureza puramente matemática" (MATA-PEREIRA, 2018, p. 13). A autora aponta que a "justificação" é um conceito muito abrangente, que passa por níveis complexos e formalização de conceitos vastos e, por conta disso, é de extrema relevância oportunizar aos alunos a justificação em todos os níveis.

Para validar, além de justificar, ainda é preciso considerar os processos de provar e provar formalmente. De acordo com Araman e Serrazina (2020, p. 122), "provar e provar formalmente (cujo rigor e grau de formalismo é maior do que em provar) também são processos sociais usados pelos indivíduos ou pela comunidade para responder as questões da veracidade de uma afirmação". O quadro 2 apresenta as definições sobre justificar, provar e provar formalmente de acordo com Jeannotte e Kieran (2017).

Quadro 2 – Processos relacionados à validação

Processos	Definições
Provar	Um processo de raciocínio matemático que, ao pesquisar dados, garantia e apoio, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável a verdadeira. Este processo é restringido por; i) Narrativas que são aceitas pela comunidade de classe (conjunto de narrativas aceitas) que são verdadeiras (do ponto de vista do matemático especialista) e disponíveis sem justificativa adicional. ii) Uma reestruturação final de natureza dedutiva. iii) As realizações que são adequadas e conhecidas, ou acessível, para a classe.
Prova formal	Um processo de raciocínio matemático que, ao procurar dados, garantia e apoio, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável a verdadeira. Este processo é restringido por: i) Narrativas que são aceitas pela comunidade de classe (conjunto de narrativas aceitas que são verdadeiras (do ponto de vista do matemático especialista) e sistematizadas em uma teoria matemática. ii) Uma reestruturação dedutiva final. iii) Realizações que são formalizadas e aceitas pela classe de matemática e comunidade.
Justificar	Um processo de raciocínio matemático que, ao pesquisar dados, garantia e apoio, permite modificar o valor epistêmico de uma narrativa.

Fonte: Autora baseada nas definições de Jeannotte e Kieran (2017)

A exemplificação foi definida por Jeannotte e Kieran (2017) como um processo de raciocínio matemático que suporta outros processos de raciocínio matemático, inferindo exemplos que auxiliam na busca por semelhanças, diferenças e validação. Ao exemplificar, é possível entender o processo de raciocínio matemático vinculado aos dados de um problema. "Esses dados podem estar reciclados na busca por semelhanças ou diferenças em padrões e relações, mas também nos processos de validação, gerando elementos que servirão para generalizar, conjecturar e até mesmo validar" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 13).

As autoras salientam a importância de trabalhar os processos de raciocínio matemático de forma articulada. Mesmo que tenham sido tratados de forma separada, os processos de raciocínio matemático estão implícitos no desenvolvimento das atividades matemáticas e, juntos, desempenham uma estrutura produtiva no desenvolvimento das tarefas matemáticas.

> Todos os processos de raciocínio matemático estão inter-relacionados. Eles estimulam e influenciam-se mutuamente, permitindo o desenvolvimento cada vez mais do discurso matemático complexo pela geração de novas narrativas sobre já existente. Em particular, conjecturar e provar desempenham um papel essencial na matemática. Na verdade, conjecturar infere narrativas que podem potencialmente enriquecer a matemática, as teorias e comprovações permitem sistematizar o discurso, com ideia de teorizá-lo (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 14).

Segundo Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 10), constantemente, “o processo de raciocínio começa com o desenvolvimento de uma conjectura ou generalização”. As autoras afirmam também que o raciocínio matemático é essencial para os alunos desde o início da escolarização.

Lannin, Ellis e Elliot (2011) dividem os três aspectos de raciocínio matemático (conjecturar e generalizar, investigar por que, justificar e refutar) em nove entendimentos essenciais explicitados no Quadro 3. Os autores reconhecem que os entendimentos se interrelacionam.

Quadro 3 – Aspectos do raciocínio matemático

Aspectos do raciocínio matemático	**Entendimentos essenciais**
Conjeturar e generalizar	1º) Conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras.
	2º) Generalizar envolve identificar semelhanças entre os casos ou estender o raciocínio além do intervalo em que se originou.
	3º) Generalizar envolve identificar a aplicação da generalização, reconhecendo o domínio relevante.
	4º) Conjecturar e generalizar envolvem o uso e o esclarecimento do significado de termos, símbolos e representações.
Investigar por quê.	5º) O raciocínio matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa.
Justificar e refutar	6º) Uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas.
	7º) Uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa.
	8º) Justificar e refutar envolve avaliar a validade dos argumentos.
	9º) Uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral não é um argumento baseado em autoridade, percepção, consenso popular ou exemplos.

Fonte: Elaborado pela autora, baseada nas definições de Lannin, Ellis e Elliot (2011)

Conjecturar e generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar ajudam os alunos a compreender a essência da matemática e os prepara para a sua futura educação matemática, sendo necessário ser desenvolvido desde os primeiros anos de escolarização (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 54). Tais entendimentos são relevantes no sentido de que podem apoiar professores de matemática na seleção de tarefas que os contemple, como é o caso do entendimento 7.º presente nesta pesquisa.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ao trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (ALLEVATTO; ONUCHIC, 2021), consideramos importante conhecer alguns tipos de problemas, assim como apresentar um breve comentário sobre o processo Histórico que culminou para a metodologia apresentada.

2.1 PROBLEMAS

A palavra problema causa muita inquietação no ser humano. Talvez, por remeter a coisas ruins, como definido pelo dicionário Houaiss (2015, p. 765) "problema é algo de difícil solução ou explicação". Mas um problema matemático, para Van de Walle (2009), é definido como "qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método "correto" específico de solução" (VAN DE VALLE, 2009 p. 57). O autor coloca que a escolha de tarefas apropriadas propicia, ao aluno, o interesse em dar sentido a resolução. Esta forma de envolver e dar sentido aos problemas vem ao encontro dos princípios de que a "resolução de problemas não é uma aplicação da aprendizagem e sim uma orientação para a aprendizagem" (BRASIL, 1998, p. 41). De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN (BRASIL, 1998), podemos definir problema como:

> Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível no início, mas é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução (BRASIL, 1998, p. 41)

Nesta pesquisa, vamos adotar a definição de Onuchic (1999). Problema é: "Tudo aquilo que não se sabe fazer, mas está interessado em resolver". (ONUCHIC,1999, p. 215).

2.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO CONTEXTO HISTÓRICO

A arte de resolver problemas liga-se, intrinsicamente, ao desenvolvimento humano desde as mais remotas épocas em que precisava-se dividir terras, ou seja, realizar cálculos para satisfazer as necessidades do cotidiano. Com uma notória contribuição na resolução de problemas, Polya (1995/1944), autor conhecido por seu livro “A arte de resolver problemas”, sugere quatro etapas para compreensão de um problema: (1º) É preciso compreender o problema, buscar a compreensão do problema; (2º) Traçar um plano de resolução, entender a conexão entre os dados; (3º) Executar o plano; (4º) Examinar a solução obtida e realizar uma análise completa da resolução verificando se existem outros caminhos. Respeitando a contribuição de Polya (1944), “Em uma linha considerada pós- Polya entende-se que a Resolução de problemas pode ser utilizada não apenas para a resolução de problemas em sala, mas também para a construção de novos conceitos” (JUSTULIN, 2014, p. 60).

Mas, “nas décadas de 60/70, o ensino de Matemática no Brasil, assim como em outros países, foi influenciado por um movimento de renovação que ficou conhecido como Matemática Moderna” (BRASIL, 1998, p. 19). Nesse período, a Matemática ainda estava muito presa ao exagero, o que culminou em um fracasso na “formalização de conceitos abstratos”, veiculados em livros didáticos e ao despreparo dos educadores que não levaram em conta questões práticas, que, mais tarde, se torna um problema uma vez que “o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries iniciais do ensino fundamental” (BRASIL, 1998, p. 19).

No entanto, em 1980, houve, nos Estados Unidos, um movimento direcionado a novas propostas cujas ideias influenciaram todo o mundo. Assim, o National Council of Teachers of Mathematics – NCTM- traduzido do inglês por Conselho Nacional de Professores de Matemática, uma organização profissional para professores de matemática nos Estados Unidos apresentou recomendações para o ensino da matemática um documento intitulado *An Agenda for action:Recommendations for School Mathematics of the 1980s* - Uma Agenda para Ação: recomendações para a Matemática escolar da década de 1980. Nele, “a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática nos anos 80” (BRASIL, 1998, p. 20). Dentre as discussões que estavam acontecendo, havia um consenso de que as reformas deveriam acontecer, mas não se sabia, ainda, como trabalhar a Resolução de Problemas.

De acordo com Onuchic e Allevato (2011), inicia-se então:

> A fase da Resolução de Problemas, cujas ideias apoiavam-se, especialmente, nos fundamentos do construtivismo e na teoria sociocultural, que tem Vygotsky como principal teórico. O foco, nessa fase, foi colocado sobre processos de pensamento matemático de aprendizagem por descoberta, no contexto da resolução de problemas. Nessa fase, muitos recursos foram desenvolvidos na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividade e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, sempre visando ao trabalho em sala de aula. Muito desse material contribuiu para que os professores fizessem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 78).

A Resolução de Problemas teve destaque em um momento em que os processos matemáticos estavam sendo oportunizados, mas não se tinha um consenso de como trabalhar a Resoluções de Problemas.

Segundo Onuchic (1999, p.206 apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.78-79), essa falta de concordância ocorreu, possivelmente, devido às diferenças de concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de "resoluções de problemas ser o foco da matemática escolar", como recomendava o documento Agenda para Ação (NCTM, 1980).

Schroeder e Lester (1989 apud Allevato e Onuchic 2021, p. 38) apontam que há três formas diferentes de realizar um trabalho em sala de aula de Matemática:

> (1) O ensino sobre Resolução de problemas, (2) o ensino para a resolução de problemas e (3) o ensino através da resolução de problemas. Vários trabalhos (Allevato, 2005; 2011) dedicaram-se a explicar detalhadamente as características fundamentais e as implicações pedagógicas de cada uma dessas concepções. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 38).

Allevato e Onuchic (2021) caracterizam as três etapas. De maneira breve, as duas primeiras e uma atenção maior a terceira etapa conforme consta no quadro 4.

Quadro 4 – Formas de realizar um trabalho em sala de aula

Formas de realizar um trabalho em sala de aula.	**Implicações Pedagógicas**
Ensino sobre resolução de problemas	São abordados temas relacionados à resolução de problemas e percebe-se uma forte ênfase nas heurísticas como forma de orientar os alunos na resolução de problemas, com regras e processos gerais.
Ensino para a resolução de problemas	O eixo de sustentação dessa abordagem não está mais na Resolução de Problemas, mas na Matemática, tendo a resolução de problemas como um apêndice, um acessório. Nessa visão, a matemática é considerada utilitária de modo que, embora a aquisição do conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do ensino é ser capaz de utilizá-lo. Interessa a habilidade dos alunos de transferirem o que aprenderam num contexto (em geral puramente matemático), para problemas em outros contextos, ou seja, se ensina Matemática para a resolução de problemas. Assim, nessa abordagem, apenas após ter desenvolvido a parte "teórica" referente a um determinado tópico matemático, é que o professor propõe problemas aos alunos, de fato, como aplicação dos conteúdos estudados.
Ensino através da resolução de problemas	Ressalta-se, novamente, a inserção da Matemática na expressão, com o intuito de retirar o foco exclusivamente da resolução de problemas (como ocorre com o ensino sobre Resolução de Problemas). Na realidade, consideramos que a expressão "através" - significando "ao longo", enfatiza o fato de que ambas, matemática e resolução de problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente.

Fonte: Autora baseada nas definições de Allevatto e Onuchic (2021, p .39 - 40)

As autoras acrescentam que, no final da década de 1980, a perspectiva de ensino através da resolução de problemas era “bastante incipiente, mas se consolidou a partir de vários trabalhos desenvolvidos pelo NCTM, os quais culminaram com a publicação dos *Standards* 2000 (NCTM,2000)” (ALLEVATTO; ONUCHIC, 2021, p. 40).

O Brasil atualizou suas “orientações curriculares (BRASIL, 1997, 1998, 1999), recomendando que a resolução de problemas seja o ponto de partida para as atividades matemáticas em sala de aula”. (ALLEVATTO; ONUCHIC, 2021, p.40).

2.3 METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas “tem por objetivo expressar uma concepção, em que o ensino, a aprendizagem e avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador” (ALLEVATTO; ONUCHIC, 2021, p. 47).

Allevato e Onuchic (2021, p. 37, grifo do autor) pontuam que a resolução de problemas é “considerada o ‘coração’ da atividade matemática, a resolução de problemas tem sido a força propulsora para construção de novos conhecimentos e, reciprocamente, novos conhecimentos proporcionam a proposição e resolução de intrigantes e importantes problemas.”

Diante disso, Allevato e Onuchic (2021, p.48 -50) oferecem sugestões para utilizar tal Metodologia em sala de aula, “indicando que as atividades sejam organizadas em dez etapas”, expostas a seguir:

Proposição do problema: o professor elabora um problema inicial, chamado de problema gerador[2], com objetivo de construir um novo conteúdo, ou seja, o conteúdo mais adequado para a resolução de problema ainda não foi trabalhado em sala de aula.

Leitura individual: o professor entrega uma cópia do problema para o aluno, que, ao lê-lo individualmente, tem a possibilidade de refletir e desenvolver sua própria compreensão.

Leitura em conjunto: os alunos reúnem-se em pequenos grupos, fazem uma nova leitura e iniciam uma discussão do problema. O professor ajuda os grupos, se necessário, na compreensão do problema e na interpretação de termos desconhecidos.

---

[2] Gerador: Problema elaborado ou selecionado por um professor ao iniciar os trabalhos.

Resolução do problema: os alunos tentam resolver o problema gerador, que lhes conduzirá à construção de conhecimento sobre o conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. A ação dos alunos volta-se à expressão escrita, pois, para resolver o problema, precisarão de linguagem matemática ou de outros recursos, como desenhos e tabelas.

Observar e incentivar: o professor, enquanto isso, observa o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizar seus conhecimentos e a trocar ideias.

Registro das resoluções na lousa: os alunos são convidados a fazer o registro de suas resoluções na lousa (certas, erradas, ou feitas por diferentes processos). Diante desse "painel de soluções", o professor estimula os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias, compararem e discutirem as diferentes soluções. Isto é, avaliarem suas próprias resoluções.

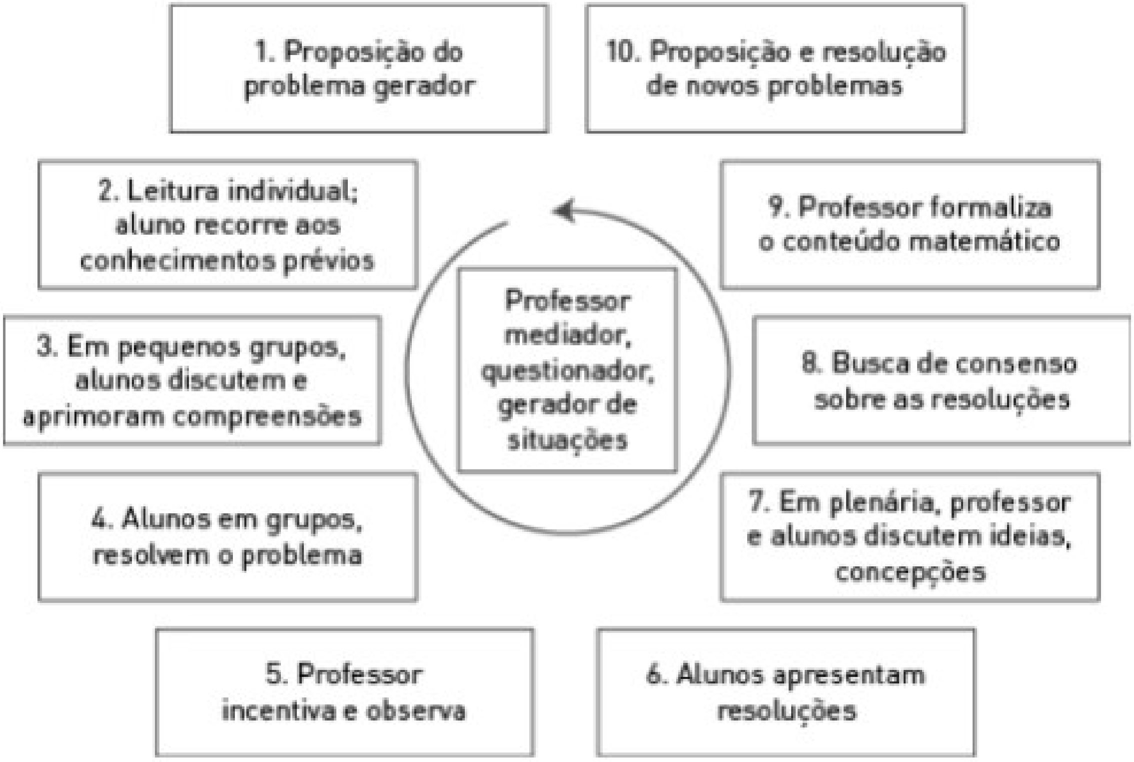
Plenária: o professor e os alunos, em esforço conjunto, tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemática, além de uma relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo.

Busca do consenso: o professor e os alunos, depois da apresentação dos resultados encontrados pelos alunos, procuram chegar a um consenso sobre a resolução correta.

Formalização do conteúdo: o professor registra, na lousa, uma apresentação "formal", organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando diferentes técnicas operatórias e construindo demonstrações se for o caso.

Proposição e resolução de novos *problemas*: o professor, após a formalização do conceito, sugere novos problemas que possibilitem analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula. O esquema a seguir (Figura 1) sintetiza a sugestão das dez etapas para o desenvolvimento da Metodologia.

Figura 1 – Síntese das dez etapas para desenvolver a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas



Fonte: Allevato e Onuchic (2021)

Justulin (2014, p. 65) pontua que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas, ocorre em um "processo espiral, possibilitando que o professor resgate conhecimentos prévios dos alunos, com participação ativa dos mesmos".

Na presente pesquisa, essas etapas foram consideradas ao serem trabalhados os problemas com os alunos participantes. Para esta dissertação, foram selecionados três problemas, pautados no entendimento essencial 7.º - *Uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa* –, explicitado no Quadro 3.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

São apresentados, neste capítulo, a caracterização da pesquisa, contexto da pesquisa e os participantes, os problemas, organização dos dados e o produto educacional

3.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Este trabalho está inserido em um projeto amplo-intitulado "Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática" (aprovado pelo comitê de Ética sob o parecer nº 5.161.835) - desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática-PPGMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Em uma perspectiva interpretativa e qualitativa, este estudo segue o método da Investigação Baseada em *Design* – IBD. Antes, porém, é oportuno entender o objetivo do investigador em uma pesquisa qualitativa, que, de acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 67), é o de "construir conhecimento não o de dar opinião sobre determinado contexto" e "compreender o comportamento e a experiência humana". A compreensão é baseada na construção dos significados. Ainda sob o olhar de Bogdan e Biklen (1994, p. 84), "os investigadores qualitativos partem para um estudo munido dos seus conhecimentos e da experiência, com hipóteses formuladas com o único objetivo de serem modificadas e reformuladas à medida que vão avançando''. O autor coloca que seria enganador negar tal fato, mas, em investigação qualitativa em educação, "o investigador comporta-se mais como viajante que não planeja do que aquele que o faz meticulosamente" (BOGDAN; BIKLEN,1994, p. 83).

Por sua vez, consoante o que indicam Ponte *et al.* (2016), a Investigação Baseada em *Design IBD* é um tipo de investigação muito atrativo para os investigadores, que têm seu principal interesse em encontrar soluções robustas e praticáveis para aos problemas educativos. A pesquisa "apresenta um desenvolvimento de maior sofisticação, no sentido relativamente a outras formas de intervenção de base científica na educação. A IBD é muito atrativa para investigadores como uma forte orientação teórica". (PONTE *et al.* 2016, p. 78).

Para Matta, Silva e Boaventura (2014, p. 24), a contemporaneidade está se desenvolvendo de tal forma que se tornou imprescindível o maior número de pesquisas aplicadas, particularmente, no campo das ciências da cognição. A recente metodologia de pesquisa, mais conhecida como *Design-Based Research (*DBR), é uma inovadora abordagem de investigação que reúne as vantagens das metodologias qualitativas e quantitativas, focalizando no desenvolvimento de aplicações que possam ser realizadas e, de fato, integradas às práticas sociais comunitárias, considerando sempre sua diversidade e propriedades específicas. Ponte *et al.* (2016, p. 94) acrescentam que a “IBD é uma metodologia exigente, em termos de recursos necessários e sobretudo na capacidade de planejamento e de elaboração teórica das equipes de investigação”.

A Investigação Baseada em *design* – IBD acontece em ciclos, abrangendo as fases de “preparação, realização e análise retrospectiva”. Como ela acontece em ciclos, as investigações vão sendo reforçadas a cada ciclo sendo possível identificar a necessidade de reestruturação de cada fase, ou seja, as fases são questionáveis a cada mudança. O quadro 5 ilustra os aspectos, envolvendo as fases da metodologia de IBD.

Quadro 5 – Aspectos envolvendo as fases da metodologia de IBD

Fases	Aspectos
Preparação	Determinar a sua intenção teórica, bem como as ideias de cunho disciplinar e as capacidades que constituem os objetivos de aprendizagem. Especificar os seus pressupostos, “os pontos de partida intelectuais e sociais para as formas de aprendizagem pretendidas”. Elaborar uma conjectura a ser testada e aperfeiçoada no decurso da investigação. O objetivo não é validar e sim elaborar uma conjectura mais forte.
Realização	Encarregar-se em manter uma perspectiva clara dos possíveis percursos de aprendizagem, mantendo os atores do terreno ativos, cultivando uma relação positiva com eles. Não perder de vista os objetivos, sendo necessário momentos de reflexão regulares, em que se analisam e planejam atividades futuras.
Análise retrospectiva	Realizar uma análise retrospectiva no fim de cada ciclo. Colocar e experiência em um contexto mais amplo especificado logo desde o início.

Fonte: A autora baseada em Ponte *et al.* (2016)

A IBD está “orientada para a produção de novas teorias mais do que para o teste de teorias já existente ou para comprovação de bons resultados”. (PONTE *et.al* 2016, p.82). Deste modo, a IDB assume uma “natureza interativa”.

Por outro lado, Matta, Silva e Boaventura (2014) pontuam:

> A DBR, por ser uma metodologia voltada para a construção de soluções práticas, não foi feita para terminar. De fato, cada desenvolvimento é o resultado de uma etapa, de um processo de arquitetura cognitiva, e necessariamente será o início do próximo momento de aperfeiçoamento e de melhorias. Uma abordagem baseada em ciclos de estudo, análise, projeção, aplicação, resultados, que depois serão reciclados, e assim quando for necessário, ou possível. Há o propósito de ser uma abordagem interativa e de refinamento da solução prática encontrada. A iteração talvez seja a característica mais marcante da DBR, dando-lhe o caráter formativo que com ela é identificado. (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014, p. 27).

Cabe destacar que, na IBD, o papel dos participantes, no estudo, também se diferencia claramente nos diversos tipos de investigação. “Enquanto na investigação usual os participantes são “sujeitos “a quem é dado um certo “tratamento”, na IBD, estes são encarados como coparticipantes”. (PONTE *et.al* 2016, p. 82).

Tendo em vista o objetivo deste estudo, - investigar processos de raciocínio matemático, desenvolvidos por alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada da cidade de Maringá, no estado do Paraná, ao resolverem problemas, apoiados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – esclarecemos que as três fases da IBD já se realizaram. Isto é, houve, inicialmente, o momento de *preparação,* quando determinamos o enquadramento teórico e metodológico da pesquisa e, apoiados nessas bases conceituais, elaboramos os problemas a serem trabalhados. Em seguida, executamos a fase da *realização,* quando os problemas foram trabalhados com os alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental, seguindo a etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021). Já na *análise retrospectiva,* a partir da análise dos dados, os resultados foram discutidos e refletidos à luz do referencial teórico utilizado com a finalidade de implementar melhorias que podem subsidiar a implementação de um novo ciclo.

3.2 CONTEXTO DA PESQUISA E PARTICIPANTES

A coleta de dados aconteceu no 2.º semestre de 2022 em duas turmas do 7.º ano do Ensino Fundamental em uma escola privada na cidade de Maringá, localizada na região noroeste do Paraná. É uma instituição que atende alunos desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. Com aproximadamente 1000 alunos matriculados na escola, atende um projeto de filantropia propiciando que alguns alunos frequentem a escola por meio de bolsas concedidas.

A pesquisadora e professora da turma está há 7 anos atuando, como professora, na instituição. Os participantes da pesquisa foram alunos do 7.º ano dentro da faixa etária de escolarização, com 12 anos. Apenas duas alunas estavam com 11 anos de idade. Foram aplicados três problemas para coleta de dados. O problema 1 foi aplicado nas duas turmas do 7.º ano, e os problemas 2 e 3 apenas em uma turma. Devido ao cumprimento do planejamento escolar, (conteúdo, avaliações, atividades internas, feriados,) tornou-se inviável dar continuidade à pesquisa com a outra turma, uma vez que a pesquisa aconteceu durante o horário de aula da professora e pesquisadora. Nesta pesquisa, vamos considerar os participantes de uma turma do 7.º ano em que foi possível aplicar os três problemas propostos.

A turma a ser considerada era composta por 22 alunos, com doze meninas e dez meninos, divididos em seis trios e um grupo formado por quatro alunos. Foram reservadas seis horas aula para aplicação dos problemas, sendo duas horas aula para cada problema. A escolha das transcrições apresentadas nessa pesquisa se deve à qualidade do áudio e à quantidade de interação entre os alunos enquanto desenvolviam estratégias de resoluções dos problemas. Desses 22 alunos, apresentamos as transcrições de três grupos. O trio 1 era composto por dois meninos e uma menina, o trio 2 era composto por três meninas e o trio 3 era composto por duas meninas e um menino. Todos serão denominados alunos A1, A2, A3, A4... para manter o anonimato dos alunos.

O conteúdo matemático envolvido nos problemas consta nos objetos[3] de conhecimento do Ensino Fundamental de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018) e está apoiado no entendimento essencial 7.º (*uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa),* explicitado no Quadro 3.

A aplicação dos problemas aconteceu seguindo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas de acordo com as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021). Em um primeiro momento, foi entregue um material impresso com o problema (Figuras 2, 3 e 4) proposto que os alunos fizessem a leitura individualmente. Após perceber que já haviam feito a leitura e alguns haviam iniciado a resolução, foi sugerido que formassem trios para realizarem uma leitura coletiva e iniciarem a resolução do problema. Nesse momento, tiveram início as gravações de áudios. Como sugerido por Allevato e Onuchic (2021), enquanto os alunos elaboravam as estratégias de resolução, a pesquisadora e professora da turma, nessa ocasião, observou e dirimiu algumas possíveis dúvidas dos alunos. Contudo, "é muito importante deixar os alunos caminharem sozinhos oportunizando a construção de conhecimentos matemáticos". (VAN DE VALLE, 2009, p. 65).

Após a etapa de resolução dos grupos, iniciamos as apresentações dos resultados e o momento da plenária. Os alunos foram convidados a expor suas resoluções na lousa, independentemente de estarem corretas ou não, indicando as resoluções e as justificativas encontradas pelo grupo. Após a plenária, chegamos a um consenso quanto ao problema proposto, ocorrendo, em seguida, a formalização do conceito proposto em cada problema e sanando as dúvidas que foram surgindo no decorrer da plenária.

---

[3] Objetos de conhecimento: Múltiplos e divisores de um número natural. Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.

Depois da aplicação dos problemas e de posse dos áudios, o material foi organizado. O primeiro movimento foi ouvir os áudios e separar os audíveis. Em seguida, realizar as transcrições para deixar imergir, em todas as discussões realizadas pelos alunos, as estratégias de resoluções e os processos de raciocínio matemático. Nunes e Serrazina (2019, p.2) "pontuam que a Resolução de Problemas e o ensino-aprendizagem exploratório, ambos, possibilitam ao aluno aprender matemática fazendo matemática, mostrando-se úteis no desenvolvimento".

3.3 OS PROBLEMAS

A temática dos problemas se deu ao iniciar os estudos relacionados ao desenvolvimento do Raciocínio Matemático e o contato com a Fundamentação Teórica que norteia a pesquisa. Em especial, o entendimento 7.º de Lannin, Ellis e Elliot (2011) ''Uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa". (LANNIN; ELLIS; ELLIOT,2011, p. 41). Por ser uma prática pouco usual, o problema com contraexemplo apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas oportuniza, ao aluno, atuar como sujeito ativo na resolução do problema, pois é preciso estabelecer estratégias, recorrer aos conhecimentos prévios para elaborar conjecturas, argumentar sobre as conjecturas elaboradas por meio das justificativas e validar com exemplos. É um trabalho importante na medida que envolve o aluno na resolução do problema, levando - o a uma compreensão mais profunda dos princípios matemáticos. No mundo fora da matemática, é possível as pessoas considerarem afirmações verdadeiras, mesmo que existam exceções, mas "em matemática, entretanto, é importante reconhecer que um único contraexemplo pode invalidar a conjectura" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 43). Reiteramos a importância dos problemas escolhidos pautados nos entendimentos essenciais de Lannin Ellis e Elliot, que vão colaborar para a identificação dos processos de raciocínio matemático.

O aspecto de raciocínio matemático "Investigando porquê" é pontuado por Lannin, Ellis e Elliot, (2011) como um entendimento essencial do raciocínio matemático que envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa. "Investigar por que envolve dar atenção a características particulares que fornecem *insights* sobre relacionamentos que podem explicar se uma generalização é verdadeira ou falsa" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 30).

Investigar o porquê de maneiras alternativas promove, aos alunos, experiências valiosas, no sentido de que eles precisam recorrer a outros conhecimentos matemáticos como definição de áreas, perímetros e propriedades matemáticas, como a propriedade associativa da multiplicação, elemento neutro entre outros conhecimentos matemáticos para justificar um problema.

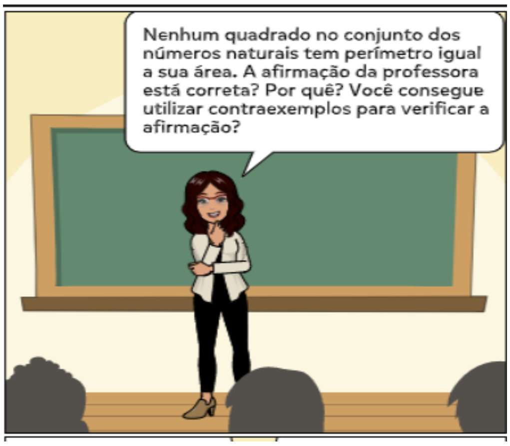
Lannin, Ellis e Elliot (2011) pontuam que:

> Ao explorar vários fatores, os alunos devem reconhecer que as afirmações gerais muitas vezes podem ser explicadas de várias maneiras e que examinar porque uma afirmação geral é verdadeira ou falsa pode fornecer uma visão sobre novas relações matemáticas. Esse processo pode levar a novas generalizações ou ao refinamento de generalizações anteriores. Além disso, considerar várias explicações potenciais pode aprofundar a compreensão dos alunos sobre as ideias matemáticas fundamentais (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.34).

Ainda sob o olhar de Lannin, Ellis e Elliot (2011), um outro aspecto do raciocínio matemático essencial que faz parte dos processos de raciocínio matemático é o "Justificando e Refutando". Um componente importante considerado por Lannin, Ellis e Elliot (2011) "como partes desafiadoras da matemática, porque muitas vezes recebemos regras na escola sem que nos sejam oferecidas oportunidades de raciocinar sobre elas". Um problema matemático que desafia o aluno gera novos conhecimentos, possibilitando desenvolver processos de raciocínio matemático como justificação. Quando um aluno refuta uma afirmação particular, significa que ele identificou argumentos que vão justificar porque algumas declarações são falsas, logo, uma refutação matemática envolve demonstração e justificativas que venham validar uma declaração.

Os problemas das Figuras (1), (2) e (3) contemplam os aspectos de raciocínio matemático e o entendimento 7.º de Lannin Ellis e Elliot (2011). Em todos os problemas, o aluno é convidado a estabelecer as estratégias de resoluções para *aceitar ou refutar* a afirmação proposta, recorrendo ao uso de um contraexemplo. O problema (1) Figura (2) objetiva trabalhar com área e perímetro de figuras planas. O aluno analisa a afirmação, não é um exercício de cálculo de área e perímetro, e sim um problema que envolve estratégias de resoluções. Logo, o problema exige, do aluno, exemplificações. O problema (2) Figura (3) tem, por finalidade, trabalhar com os conjuntos dos números Naturais, Inteiros e Racionais. O aluno precisa recorrer aos conhecimentos prévios de conjuntos, regras de sinais e multiplicação com números decimais para argumentar sobre a afirmação proposta no problema. O problema (3) Figura (4) traz um problema que envolve divisores de um número, com um importante trabalho de reflexão para o aluno, pois ele deverá recorrer aos conceitos implícitos no problema. Por exemplo: Como determinar os divisores de um número? O que são os divisores? Depois de compreender os conceitos é que eles passaram a resolução do problema.

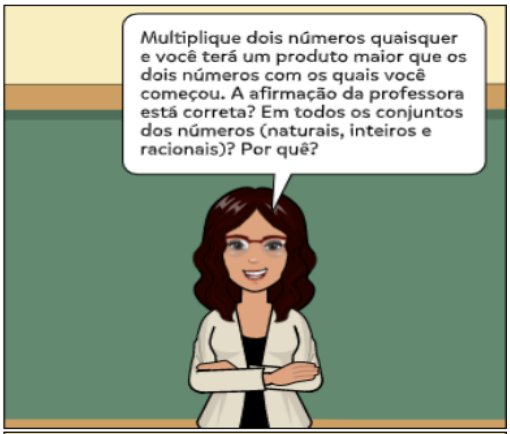
Figura 2 – Problema 1



Fonte: Adaptado de Mathias e Gontijo (2021).

Habilidade da BNCC (EF06MA29): Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

Figura 3 – Problema 2

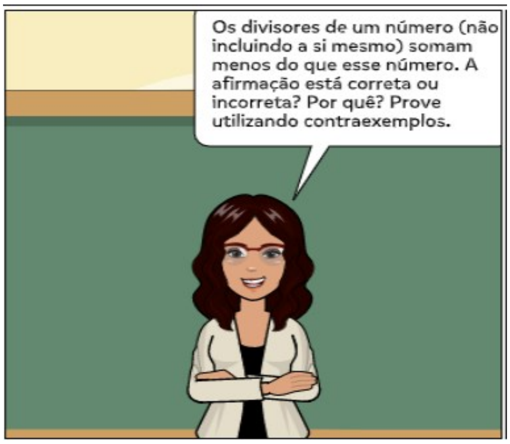


Fonte: Adaptado de Mathias e Gontijo (2021)

Habilidade da BNCC:

(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Figura 4 – Problema 3



Fonte: Adaptado de Mathias e Gontijo (2021).

Habilidades da BNCC (EF07MA01): Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo comum, por meio de estratégias diversas.

3.4 ORGANIZAÇÃO DOS DADOS

Após a definição dos problemas, eles foram resolvidos pela pesquisadora com o objetivo de identificar as possíveis estratégias dos alunos, mas sabemos que é inegável a imprevisibilidade em uma sala de aula. Além do objetivo citado, houve uma preocupação quanto ao grau de dificuldade dos problemas. Ponte (2005) pontua que um problema comporta sempre um grau de dificuldade apreciável. "No entanto, se o problema for demasiado difícil, ele pode levar o aluno a desistir rapidamente (ou nem lhe pegar). Se o problema for demasiado acessível não será então um problema, mas sim um exercício" (PONTE, 2005, p. 3).

Para a coleta de dados, os alunos foram organizados em trios para que iniciassem as discussões. Foram fornecidos gravadores para cada trio e uma folha individual para que ficassem registradas as resoluções. Nesse momento, enquanto pesquisadora e professora da turma em que se aplicou os problemas, é impossível não fazer as primeiras análises durante a coleta de dados, ainda que superficiais.

Depois da aplicação dos problemas e de posse dos áudios, o material foi organizado. O primeiro movimento foi ouvir os áudios e separar os audíveis. Em seguida, realizou-se as transcrições para deixar imergir, em todas as discussões realizadas pelos alunos, as estratégias de resoluções e os processos de raciocínio. A transcrição foi realizada na íntegra, mantendo o anonimato dos alunos, optando por chamá-los de alunos A1, A2, A3.... As falas foram organizadas em trechos e identificadas entre colchetes. Por exemplo: [1,2] que é o [trecho 1, fala número 2].

A escolha dos grupos apresentados nessa pesquisa se deve à qualidade do áudio e a quantidade de interação entre os alunos enquanto desenvolviam estratégias de resoluções dos problemas. Os dados foram analisados de acordo com a categorização proposta por Jeannotte e Kieran (2017), organizados nos Quadros 1 e 2.

3.5 PRODUTO EDUCACIONAL

Conforme Comunicado nº 001/2012[4] da Capes, presume-se que a produção acadêmica dos mestrados profissionais, na área de ensino, deve, necessariamente, apresentar um Produto Educacional que possa ser divulgado, analisado e utilizado por outros professores ou outros profissionais envolvidos com ensino em espaços formais ou informais.

A resolução PPGMAT/UTFPR nº 1[5] estabelece que o aluno deve elaborar/aplicar o Produto/Processo Educacional. O Produto Educacional deve estar de acordo como o Estabelecido pelo Documento de Área de Ensino em vigência, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), sendo aplicável em situações reais. De acordo com o Documento, são exemplos de Produtos Educacionais: mídias educacionais, protótipos educacionais, materiais para atividades experimentais, material textual, materiais interativos e atividades de extensão.

Diante disso, pensando na possibilidade de disseminar o desenvolvimento do raciocínio matemático, optamos por elaborar um Produto Educacional no formato de um guia, com o objetivo de contribuir com professores que queiram experienciar uma nova forma de ensinar matemática, apoiando o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos por meio da Resolução de Problemas.

O Produto Educacional contempla os conceitos de Raciocínio Matemático e seus aspectos a partir do referencial teórico adotado nesta pesquisa. Em seguida, apresentamos os problemas não usuais baseados nos entendimentos de Lannin, Ellis e Elliot (2011) ‘‘Uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 41) como forte potencial para desenvolver o raciocínio matemático.

[4] http://arquivos.info.ufrn.br/arquivos/2017122049df6139378536b7e6d35c881/Comunicado_CAPES_2012.pdf
[5]http://portal.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/strictosensu/ppgmat/documentos/regulamentosenormas/2021 resolucao_012021_produto_educacional.pdf/@@download/file/2021%20 %20Resolucao_01.2021_produto_educacional.pdf

Para aplicação dos problemas, sugerimos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, na qual esta pesquisa se apoiou durante a coleta de dados, seguindo as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021). O Produto Educacional considera o tempo estimado para aplicação dos problemas, material necessário, conteúdo desenvolvido e, por fim, apresenta alguns processos de raciocínio matemático evidenciados nesta dissertação.

Como esta pesquisa segue os pressupostos da Investigação Baseada em Design - (IBD), foi realizado o primeiro ciclo. A partir da análise dos resultados obtidos, alguns ajustes foram feitos nos enunciados dos problemas 1 e 3, com a finalidade de deixá-los mais claros. Os problemas, bem como suas formas de desenvolvimento junto aos alunos estão disponíveis no Produto Educacional que acompanha essa dissertação.

4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Como já dissemos, os dados foram coletados por meio da gravação de áudio dos grupos durante a resolução dos problemas, do material impresso entregue aos alunos e da interação entre os alunos, por conta da qualidade dos áudios. O grupo 1 formado por dois meninos e uma menina, o grupo 2 foi formado por três meninas e o grupo 3 foi formado por duas meninas e um menino. Todos serão denominados alunos A1, A2, A3 e A... para manter o anonimato dos alunos. Com a finalidade de contribuir para a compreensão do leitor, as transcrições foram organizadas em trechos.

4.1 PROBLEMA 1 – GRUPO 1

Para análise do problema 1, foi considerada a transcrição das falas dos grupos 1 e 2, que foram separadas em trechos que trazem a descrição das falas durante a realização do problema proposto. Os alunos serão denominados do grupo (1) como aluno A1, A2 e A3 e o grupo (2) por alunos A4, A5 e A6.

Neste primeiro momento, observa-se que os alunos iniciam a leitura do problema para buscar um entendimento da afirmação proposta no problema da Figura (2), e que uma única leitura não foi suficiente para interpretação e entendimento do problema proposto. Não há indícios de processos de raciocínio matemático, apenas uma organização.

4.1.1 Trecho 1

O aluno A1 inicia a resolução, chamando atenção dos colegas ao dizer:

[1.1] Aluno A1: *Vamos começar, estou fazendo desenhos, (mostrando os desenhos, Figura (5).*

[1.2] Aluno A1: *Mas vamos analisar o que você colocou aqui. Como você colocou aqui a gente pode supor o x+x+x+x, tem quatro x aqui, e que cada x equivale a 1.* (*Aluno A 1 referindo-se à resolução do aluno A2 Figura 6).*

[1.3] Aluno A1: *Mas a gente tem que descobrir o perímetro, o perímetro nada mais nada menos, entretanto é a soma de todos os lados do quadrado.*

[1.4] Aluno A1: *Então pensa o x equivale a 1, tem quatro lados, então x+x+x+x vai dar 1. Mas 1+1+1+1=4*

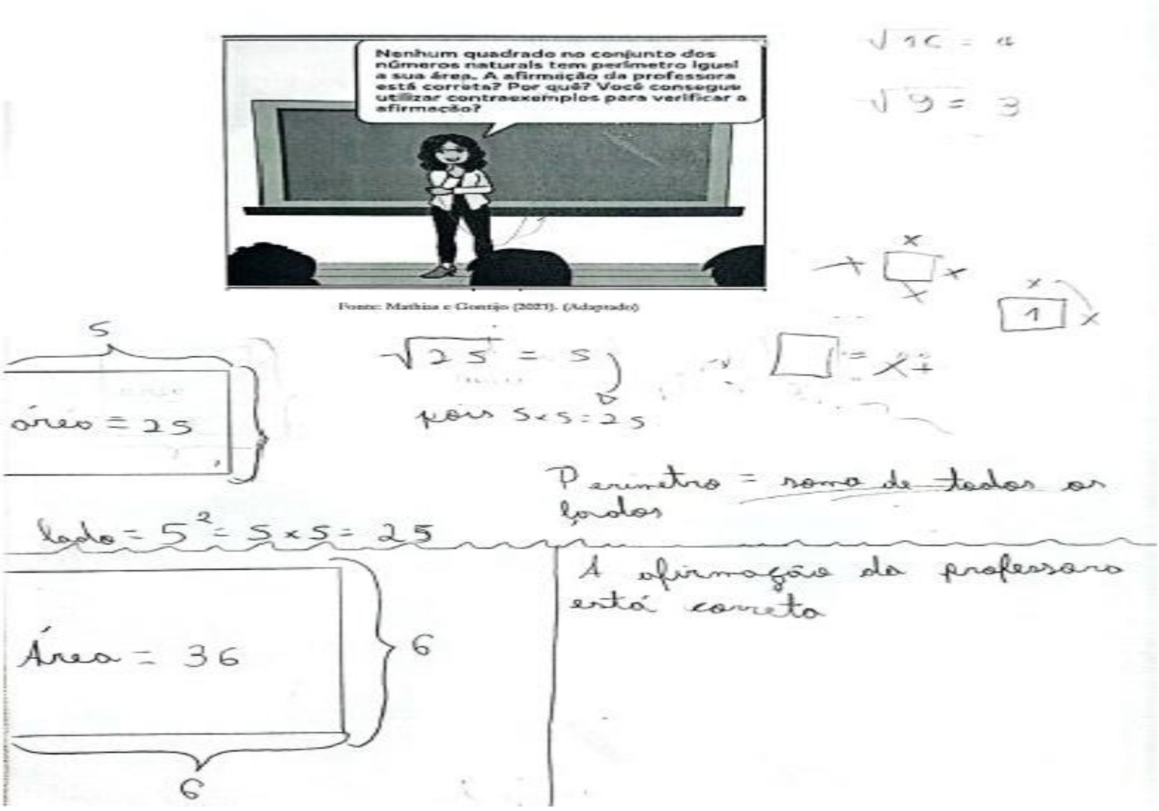
[1.5] Aluno A2: *Bugou um pouquinho (risos).*

[1.6] Aluno A1: *Só que aqui está dizendo que nenhum quadrado tem perímetro igual a sua área, é possível?*

Neste primeiro momento, os alunos A1 e A2 começam a interagir a fim de descobrir o que fazer para verificar a afirmação proposta no problema (1) enquanto o aluno A3 observa e faz anotações na folha individual. O aluno A1 inicia fazendo desenhos de retângulos, mas fica evidente que é um esboço para exemplificar sua estratégia de resolução, pois o aluno A1 indica os lados dos quadrados como sendo iguais na Figura (5). São desenhados dois quadrados: um de lado 5 cm e um outro de lado 6 cm. Elaboram, assim, a primeira conjectura da discussão, baseada na propriedade, de figuras planas, de que um quadrado possui todos os lados iguais. Mais estratégias são apresentadas. O aluno A1 continua sua estratégia de resolução, apresentando conhecimentos prévios de algumas operações matemáticas como: potenciação, multiplicação e radiciação. Ele as utiliza para exemplificar sua estratégia de resolução, como mostra a figura (1), enquanto os alunos A2 e A3 observam a estratégia de resolução do aluno A1.

Ao calcular a área do quadrado, o aluno A1 recorre à potenciação, mostrando conhecimentos sobre a operação, pois o aluno A1, ao exemplificar, chama a base de "cinco", que é equivalente ao lado, e o expoente de "dois" para justificar que são lados iguais. Mostra saber que utilizar a operação da potenciação em um quadrado é equivalente a realizar a multiplicação dos lados por serem iguais. O aluno A1 continua sua estratégia de resolução, justificando seu raciocínio sobre área ao utilizar a operação da radiciação, ou seja, a raiz quadrada para justificar o cálculo de potenciação realizada. Indica que $lado\ x\ lado = (lado)^2$, como na Figura (5), e que a raiz quadrada é a operação inversa da radiciação, evidente quando o aluno A1 extrai a raiz quadrada de 25 em um dos exemplos apresentados para justificar a resolução. É importante salientar que o aluno A1 indicou a área dentro do quadrado, denotando saber diferenciar área de perímetro conforme a Figura (5).

Figura 5 – Resolução apresentada pelo aluno A1 ao resolver o problema 1



Fonte: Acervo da pesquisadora

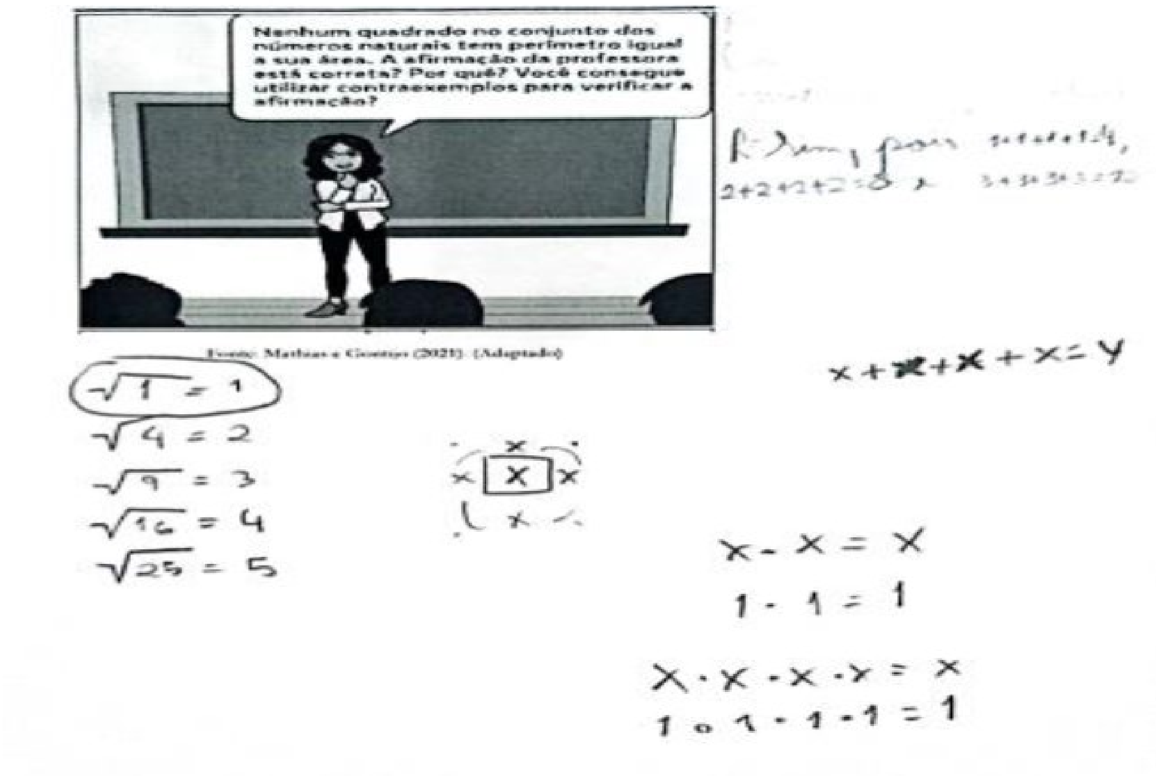
O aluno A1, utilizando de conhecimentos prévios de matemática, apresentou processos de raciocínio matemático válidos, como a conjectura, a exemplificação e a justificação, comparando as áreas encontradas para aceitar a afirmação da professora no problema (1). Embora a justificação seja válida para os exemplos apresentados pelo aluno A1, não podem ser considerados um processo de generalização válido, considerando os poucos elementos apresentados, mas que poderia ser um processo válido se o aluno A1 continuasse suas exemplificações. No entanto, o aluno A1 abandona sua estratégia de resolução e passa a analisar as resoluções do aluno A2.

Ao abandonar o processo de exemplificação, o aluno A1, em [1.2], opta pela resolução do aluno A2, como mostram as falas transcritas.

O aluno A1 analisa a estratégia de resolução do aluno A2 em [1.2], [1.3] e [1.4], em que aluno A2 atribuiu os lados de um quadrado a uma variável x, indicando que o x representa um número qualquer, mesmo não tendo conhecimento de álgebra, pois, quando foram aplicadas as tarefas em sala de aula, o conceito de álgebra não havia sido apresentado formalmente aos alunos. O aluno A2 elabora uma conjectura ao propor x+x+x+x, baseado na adição dos lados, ou seja, no perímetro do quadrado. Isso indica que o aluno conjectura por meio da comparação entre os termos, mesmo não conhecendo os conceitos de álgebra formalmente. Mas, quando o aluno A1 recorre ao processo de justificação, faz uma confusão ao dizer que se x=1, logo x+ x+x+x=1, uma conjectura errada. Para Lannin, Ellis e Elliot (2011), "conjecturas incorretas geralmente contêm pepitas de raciocínio válido que podem levar ao desenvolvimento de afirmações válidas". A confusão é percebida logo em seguida ao substituir a variável x por 1 e adicionar 1+1+1+1=4, surgindo uma dúvida quanto à justificativa apresentada pelo aluno A2, que parece não saber justificar o exemplo colocado no problema (1). Um desafio é lançado na fala do aluno A1 em [1.6], sugerindo que o aluno A1 conheça a definição de área e perímetro. Área e perímetros são conceitos diferentes.

O aluno A2, diferentemente do aluno A1, inicia a resolução por meio da radiciação, indicando saber que a raiz quadrada de um número é ele mesmo ao quadrado, expressando seu raciocínio matemático com exemplos numéricos e recorrendo aos conhecimentos prévios de radiciação. O aluno A2 calcula a raiz quadrada de alguns números de raiz exata e, em seguida, desenha um quadrado e chama os lados de x. Indica uma noção de conhecimentos algébricos ao chamar o lado do quadrado de x, relacionando o perímetro do quadrado enquanto a adição dos quatro lados. Utiliza a mesma notação para calcular a área do quadrado, assim, indica saber a diferenciação entre área e perímetro e que, ao substituir o x por 1, a relação de igualdade se manteve, mas o mesmo não aconteceu com o perímetro que causou estranheza ao aluno A1 e fez o aluno A2 pensar, de acordo com a fala [1.5], um polígono como mostra a (Figura 6).

Figura 6 – Resolução apresentada pelo aluno A2 ao resolver o problema 1



Fonte: Acervo da pesquisadora

4.1.2 Trecho 2

Como o aluno A1, em [1.6], desafiou os colegas, o aluno A3, que, até então, estava observando as explicações dos colegas, recorreu à exemplificação numérica para definir os conceitos de perímetro e área.

[2.1] Aluno A3: *Perímetro é igual à soma de todos os lados.*

[2.2] Aluno A1: *Foi o que eu disse. (risos*).

[2.3] Aluno A3: *Se é igual à soma de todos os lados, por exemplo: perímetro de um quadrado é igual à 3.*

[2.4] Aluno A2: *Como assim? Não! A área do quadrado é 9 o lado é 3, então 3+3+3+3.*

[2.5] Aluno A3: *Sim o lado de um quadrado é 3. Como descobrir o perímetro? Você soma os 4 lados, 3+3+3+3=12. O perímetro vai ser 12 a área é 9, o perímetro não vai ser igual a área, o perímetro é maior que a área, a área está dentro do perímetro, o perímetro é maior.*

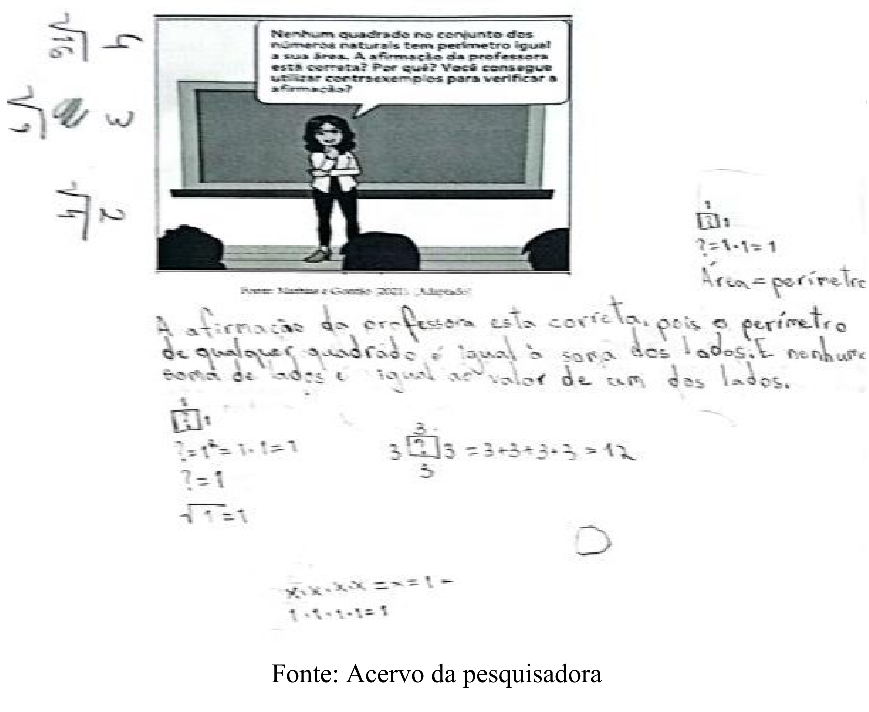
[2.6] Aluno A2: *Exemplo, 2+2+2+2=8 e se for 1+1+1+1=4.*

[2.7] Aluno A3: *Exato, então a afirmação da professora no problema (1) é verdadeira.*

[2.8] Aluno A1: *Mas enfim, então a gente descobriu que a afirmação está correta, que nenhum quadrado no conjunto dos números naturais tem perímetro igual a sua área, porque perímetro* *é a soma de todos os lados, mas pensa poderia ser zero. Não! o zero é vácuo, não tem nada, então afirmação é verdadeira.*

Neste trecho, observamos que o aluno A3, que, até então, estava observando as resoluções e explicações dos alunos A1 e A2, apresenta sua estratégia de resolução através da exemplificação numérica. O aluno A3, em [2.5], elabora uma conjectura, concluindo que o "perímetro não vai ser igual a área, pois o perímetro é maior que a área, a área tá dentro do quadrado o perímetro é maior", baseada em conhecimentos matemáticos prévios, relacionando as operações matemáticas, como a adição em [2.5], ao adicionar 3+3+3+3=12, conforme a Figura (7), e a multiplicação ao determinar a área do quadrado de um lado três. O aluno A2 colabora com a exemplificação do aluno A3, citando outros números para determinar o perímetro, mas não apresenta exemplos para área. Em seguida, o aluno A3 confirma o exemplo do aluno A2, avançando para a comparação entre medidas para justificar a afirmação da professora no problema (1) ("Nenhum quadrado no conjunto dos números naturais tem perímetro igual a sua área"). O aluno A3, em [2.7,] aceita a afirmação mediante os exemplos apresentados, induzindo o aluno A1, em [2.8], a aceitá-la também, mesmo questionando o zero. O aluno A1 levanta a conjectura do lado ser zero, mas, em seguida, invalida-a por considerar que o "zero é vácuo, que não tem nada", e que o lado, por ser zero, não mudaria a resposta.

Figura 7 – Resolução apresentada pelo aluno A3 ao resolver o problema 1



Fonte: Acervo da pesquisadora

4.1.3 Trecho 3

[3.1] Aluno A2: *E se a gente pensar na raiz quadrada?*

[3.2] Aluno A3: *E se a gente parar para pensar em tudo que a gente falou? Pensa na raiz quadrada de 16, a de 15 não é exata, a de 14, não é exata, a de 10 não exata.*

[3.3] Aluno A2: *Não é melhor fazer igual à que a professora fez, como por exemplo, conta ao quadrado, tipo 2 elevado ao quadrado, tipo isso aqui deixar eu fazer aqui (aluno faz um exemplo) se a raiz quadrada de 16 é 4, a de 4 é 2 é melhor do que fazer a raiz quadrada de 15, 14 eu acho... e demora mais também, se a gente já encontrou a raiz de 16,9, 4 falta ver quanto é 1 elevado ao cubo.*

[3.4] Aluno A3: *Você quer dizer um elevado ao quadrado (risos).*

Neste trecho, os alunos passam a questionar as justificativas apresentadas por eles durante a resolução do problema, e já começam a surgir novas conjecturas. Em [3.3], o aluno A2 conjectura ao sugerir que é melhor calcular "2 elevado ao quadrado", referindo-se à operação de potenciação e exemplifica ao calcular a raiz quadrada de 16 e de quatro. Ainda em [3.3], o aluno sugere realizar os cálculos das raízes exatas, exemplificando que a raiz de 16 é 4, a de 4 é 2. Por isso, seria melhor utilizar a potenciação de números exatos ao se referir à operações ao quadrado, pois o aluno considerou as raízes já conhecidas, citando a resolução que a professora propôs, como sugerido em [3.3] pelo aluno A2 para a elaboração de possíveis respostas. Ele sugere resoluções através de potenciação e raiz quadrada, por ser uma operação que eles conhecem a solução, para resolver a questão, uma vez que resolver a raiz quadrada de 14 e 15 iria demorar muito e não são exatas, além disso, a solução precisa estar no conjunto dos números naturais. Embora os alunos tentem justificar que a raiz quadrada pode resolver a tarefa, não conseguem validar a conjectura formulada levantada.

4.1.4 Trecho 4

[4.1] Professora: *E aí pessoal compreenderam o problema?*

[4.2] Aluno A3: *Sim, estamos explicando para o aluno A1.*

[4.3] Aluno A3: *Quanto é 1 ao quadrado? Quanto é 1x1? (se referindo ao aluno A1)*

[4.4] Aluno A1: *Um.*

[4.5] Aluno A2: *O que o exercício está pedindo?*

[4.6] Aluno A3: *O perímetro é igual a área, existe algum número?*

[4.7] Aluno A2: *Se x=1 então 1.1=1.*

[4.8] Aluno A1**:** *Quer dizer que o perímetro do quadrado vezes o perímetro tem que dar a área? Só tem um número que vezes os quatro perímetros vão dar ele mesmo no caso o 1 a afirmação está errada.*

[4.9] Aluno A3: *A afirmação está errada porque existe um número, pois 1 ao quadrado da 1 que é a área, se o perímetro for 1. Eu achava que a minha anotação estava errada agora eu acho que está certa.*

[4.10] Aluno A2: *Quatro cantos ou quatro lados?*

[4.11] Professora: *Vou fazer uma pergunta para vocês. O que é o perímetro?*

[4.12] Aluno A2: *São os lados, eu não sabia tive dúvidas, perguntei no começo para a professora.*

[4.13] Professora*: Sim, são os lados? Ou é a soma dos quatro lados?*

[4.14] Alunos A1, A2 e A3: *Os quatro lados. Vamos arrumar a resposta*.

[4.15] Professora: *Ok.*

Neste trecho, a professora acompanha o diálogo entre os alunos e observa que, mesmo eles afirmando que estava tudo bem e que não havia dúvidas, as falas entre eles diziam o contrário. Nesse contexto, a professora sentiu necessidade de fazer intervenções, aproveitando o momento em que o aluno A2, em [4.10], questionava-se em voz alta: "quatro cantos ou quatro lados?"

A professora fez uma intervenção, questionando o grupo ao perguntar, em [4.11], o que é perímetro, encorajando-os a refletir sobre o que é lado e o que é perímetro. Em seguida, faz, novamente, uma intervenção quando o aluno A2, em [4.12], afirma que o perímetro corresponde aos lados. A professora questiona se "*são os lados ou a soma dos quatro lados".* Por meio da intervenção, foi possível auxiliar os alunos e, em seguida, validar a resposta correta em [4.15].

4.1.5 Trecho 5

[5.1] Professora: *Quantos lados tem um quadrado?*

[5.2] Todos os alunos respondem: *Quatro!*

[5.3] Aluno A2: *1x1=1 é a área do quadrado.*

[5.4] Professora: *Qual é o perímetro desse quadrado?*

[5.5] Aluno A2: *Então está correta a afirmação porque se for 1x1=1 e 1+1+1+1=4 não é igual.*

[5.6] Aluno A1: *Porque o perímetro é a soma dos lados e não o lado. (confirmando a reposta do colega).*

[5.7] Professora: *Vocês conseguiram encontrar mais resultados?*

[5.8] Alunos A1, A2 e A3: *Não*.

Neste trecho, a professora continua fazendo a intervenção de questionar os alunos em [5.1], pressionando o grupo para a justificação que recorre a um exemplo numérico, como mostra a transcrição da fala do aluno A2 em [5.2], elaborando uma conjectura ao relacionar a multiplicação de dois números iguais como a área de um quadrado. Em [5.4], a professora questiona os alunos e pergunta: "Qual é o perímetro desse quadrado?" A professora se refere ao quadrado que o aluno A2 estava propondo de lado 1. O aluno A2, se manifesta antes dos outros alunos e responde em [5.5], aceitando a afirmação da professora no problema (1). Ele justifica através do exemplo numérico de que a área é diferente do perímetro, pois a área é um e o perímetro é quatro, como indica a transcrição da fala em [5.5]. O aluno A1 confirma a justificativa do aluno A2 na fala [5.6], afirmando que o perímetro é a soma de todos os lados e não o lado.

4.2 PROBLEMA 1 - GRUPO 2

4.2.1 Trecho 1

O aluno A4 inicia a resolução, chamando atenção dos colegas ao dizer:

[1.1] Aluno A4: *Eu só pensei, uma noção não tenho certeza ainda, mas associe o perímetro com os lados de um quadrado. Aí pensei assim, aqui tá falando nenhum, então nenhum é nada, nenhum vai poder fazer o valor da área. Daí desenhei um quadrado, Figura (9). Daí desenhei um quadrado, escrevi a área e esses riscos que só eu entendo são como se fosse o perímetro que são os quatro lados do quadrado. Depois pensei assim; ali tá falando nenhum, então é nada não dá para formar nada no conjunto dos números naturais. Vocês lembram o que são os conjuntos dos números naturais?*

[1.2] Aluno A5: *Mais ou menos (risos).*

[1.3] Aluno A4: *Então fala o que vocês lembram (risos)*

[1.4] Aluno A5: *Ah, nada (risos).*

[1.5] Aluna A4: *Eu associei os números naturais ao zero, um, dois, três...*

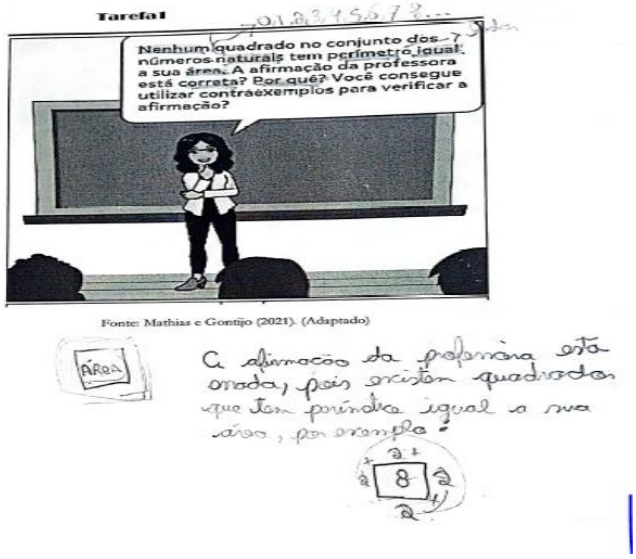
[1.6] Aluna A5: *Agora lembrei!*

Neste trecho, os alunos conversaram sobre a resolução do problema, o aluno A4 elaborou uma conjectura em [1.1], associando o perímetro com os lados do quadrado e utilizando o desenho de uma figura plana, no caso o quadrado para expressar o seu raciocínio sobre a afirmação proposta no problema (1), conforme Figura (8). O próprio aluno se questionou se é possível não ser "*possível formar nada*", mas abandonou e iniciou uma discussão com as outros alunos. O aluno A4 pergunta para os outros alunos, A5 e A6, "*vocês lembram o que são o conjunto dos números naturais"?* O aluno A5 diz que "mais ou menos", mas não consegue explicar. O aluno A4, em [1.5], explica que associou os números naturais ao zero, um, dois....

4.2.2 Trecho 2

[2.1] Aluna A4: *Aí eu pensei assim, são quatro lados, não sei por que eu pensei no 2, depois do 1 foi o que pensei. Daí coloquei, 2,2,2 e 2 mostrando a Figura (8). Daí eu fiz assim 2+2+2+2=8 ou seja a área vai ser oito, cheguei à conclusão de que esta afirmação está errada porque esse quadrado aqui é um exemplo, (figura 8).*

Figura 8 – Resolução apresentada pelo aluno A4 no problema 1



Fonte: Acervo da pesquisadora

O Aluno A4 explicou que associou os números naturais ao zero, um, dois... elaborando uma outra conjectura ao associar os números naturais com o zero e os números positivos. Em seguida, recorreu a um exemplo com um número, em que a escolha foi aleatória. De acordo com a fala em [2.1], o aluno A4 apresentou um exemplo em que faz a adição dos números

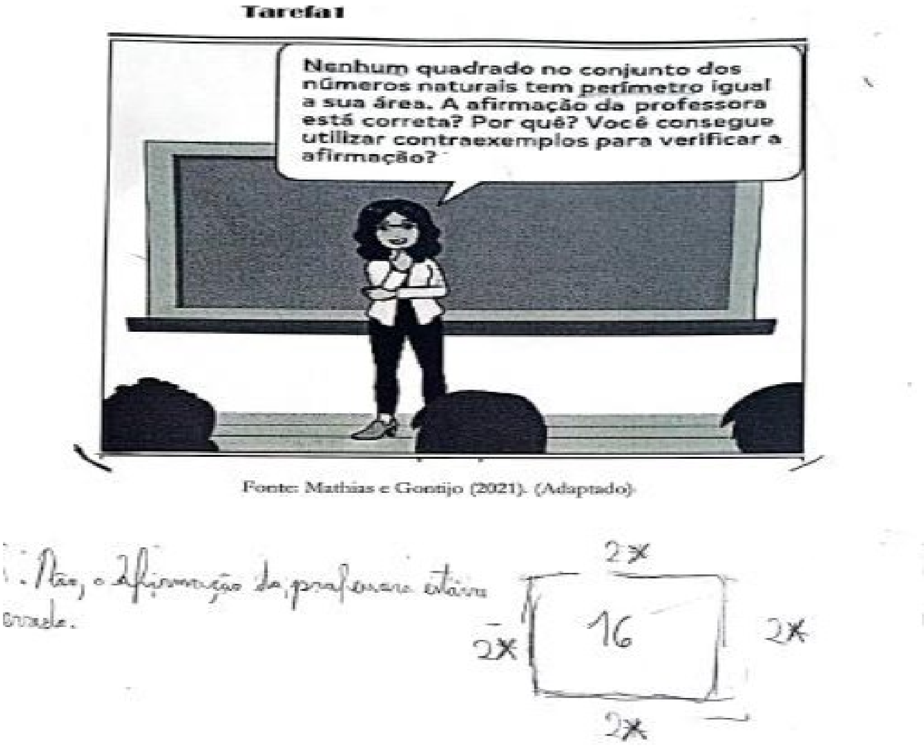
2+2+2+2=8, mas se engana ao dizer que o cálculo apresentado é referente à área, quando, na verdade, está determinando o perímetro com a adição dos lados. As discussões continuam, como seguem as transcrições:

[2.2] Aluno A4: *Dá para fazer assim "duas vezes dois é igual a quatro", e quatro vezes quatro é igual a dezesseis que dá para ser a área também de 16.*
[2.3] Aluno A5: *Então pensei que estava errado e apaguei, mas eu tinha feito por multiplicação.*
[2.4] Aluno A4: *o perímetro vai ser o que do quadrado? (perguntando para a aluna A5).*
[2.5] Aluno A4: *Eu associe o perímetro com o lado do quadrado. Então eu fiz 2+2+2+2=8 todos os lados e deu a área. (Figura 8)*
[2.6] Aluno A5: *Então eu pensei logo no 2 por ser mais fácil, só que ao invés de somar eu multipliquei 2x2x2x2=16 (Figura 9).*
[2.7] Aluno A6: *Eu pensei no 4, somei e deu 16. (Figura10)*
[2.8] Aluno A4: *A afirmação está errada pois encontramos três exemplos diferentes.*

Neste trecho, os alunos conversam sobre a resolução do problema. Na fala do aluno A5, ele também elaborou uma conjectura ao usar a multiplicação por ser mais fácil, mas se engana ao calcular a área utilizando os quatro lados, como apresentado na transcrição em [2.3]. Ainda, neste trecho, o aluno A6 diz que só somou e deu 16 em [2.7], não explicando o que estava calculando. O diálogo termina (encerram a gravação).

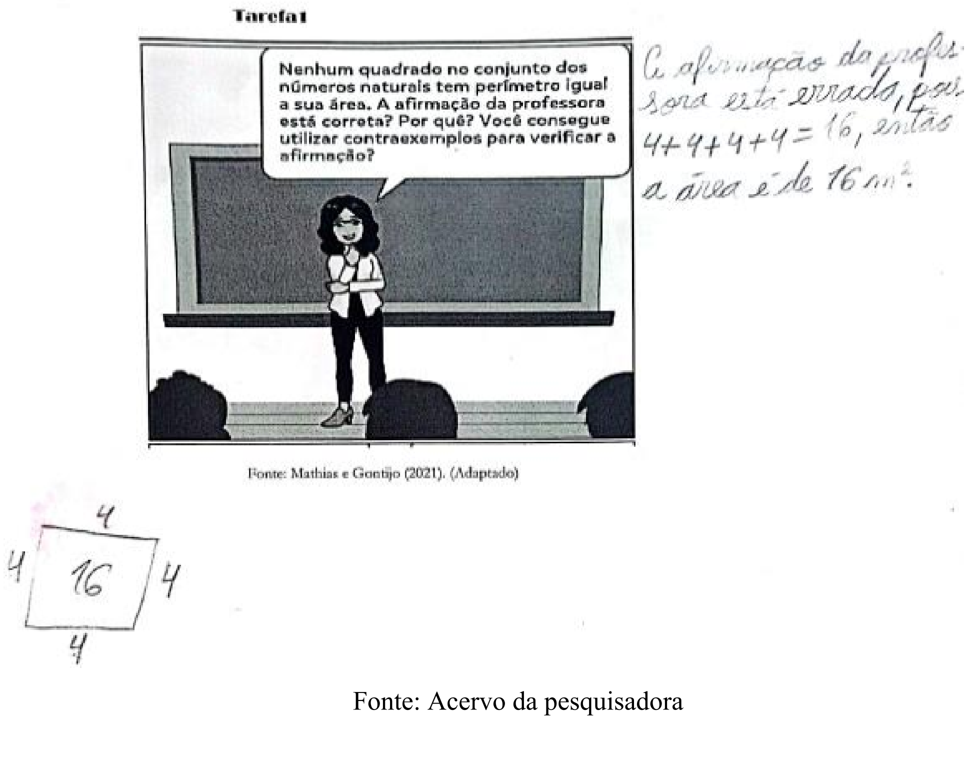
Por fim, eles associaram, aos exemplos apresentados, resultados diferentes, e, por isso, a professora está errada em sua afirmação. Os alunos não conseguiram validar os exemplos apresentados, mas conseguiram apresentar processos de raciocínio matemático como: conjectura, exemplificação e comparação. O quadro 6 ilustra uma síntese dos processos de raciocínio matemático envolvidos durante a resolução dos problemas.

Figura 9 – Resolução apresentada pelo aluno A5 no problema 1



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 10 – Resolução apresentada pelo aluno A6 no problema 1



Fonte: Acervo da pesquisadora

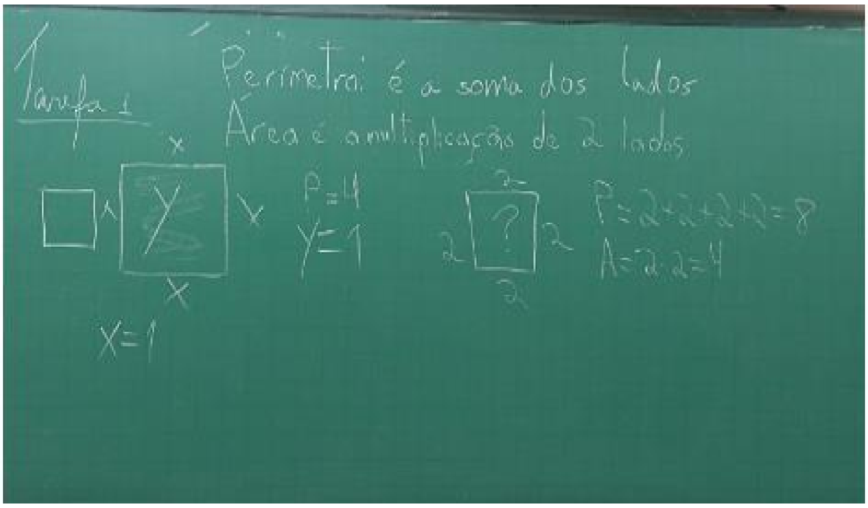
Quadro 6 – Processos de raciocínio envolvidos na discussão do grupo 1 e 2

Processos	**Problema 1**
Formular conjecturas	Propriedade das figuras planas: um quadrado possui todos os lados iguais. O perímetro nada mais nada menos é a soma de todos os lados. Área de um quadrado é $lado\ x\ lado = (lado)^2$. Utilizou a álgebra para representar o perímetro, chamando os lados de $x + x + x + x$ Raiz quadrada de um número é ele mesmo ao quadrado. O perímetro não vai ser igual a área. Raiz quadrada é a operação inversa da potenciação. Perímetro é o contorno do quadrado. O conjunto dos números naturais acima do zero infinitamente (0, 1, 2, 3...) O zero é o elemento neutro da adição.
Justificar	Se um quadrado tem lado cinco, a sua área é vinte cinco. Logo a área de um quadrado é l^2. A potenciação é a operação inversa da radiciação $\sqrt{l^2} = l$. pois $\sqrt{25} = 5$, $pois\ 5x5 = 25$ $\sqrt{36} = 6$ pois $6x6 = 36$ Para um quadrado de lado 3, temos área de 9, pois $3^2 = 9$
Comparar	Um quadrado de lado três, possui perímetro 12 e área 9, logo a área é menor que o perímetro. Podemos chamar o lado de x para representar o lado de um quadrado, assim $x + x + x + x = perímetro.$ Se o lado de um quadrado for um, a área será $1x1 = 1$ e o perímetro $1 + 1 + 1 + 1 = 4$. $S < P$ O perímetro é maior que a área Se o lado do quadrado for 4 A área e o perímetro são iguais. A= 4x4= 16 P= 4+4+4+4=16, temos: $área = perímetro$ S=P
Generalizar	O perímetro de um quadrado poderá ser: maior, igual ou menor que a área de um quadrado. $S \leq P < S$.

Fonte: Dados da pesquisadora

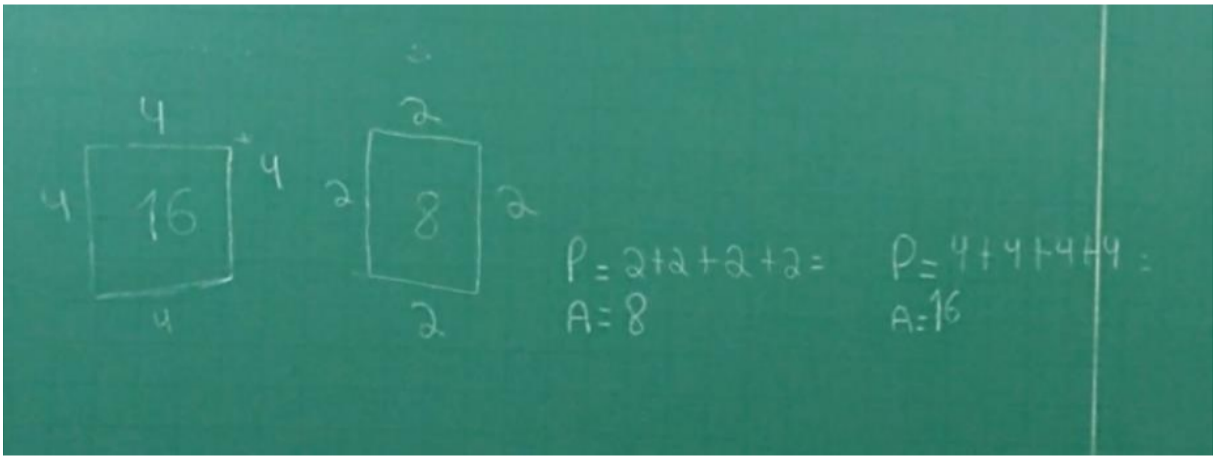
4.2.3 Plenária

Figura 11: Resolução apresentada pelo grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 12 – Resolução apresentada pelo grupo 2.



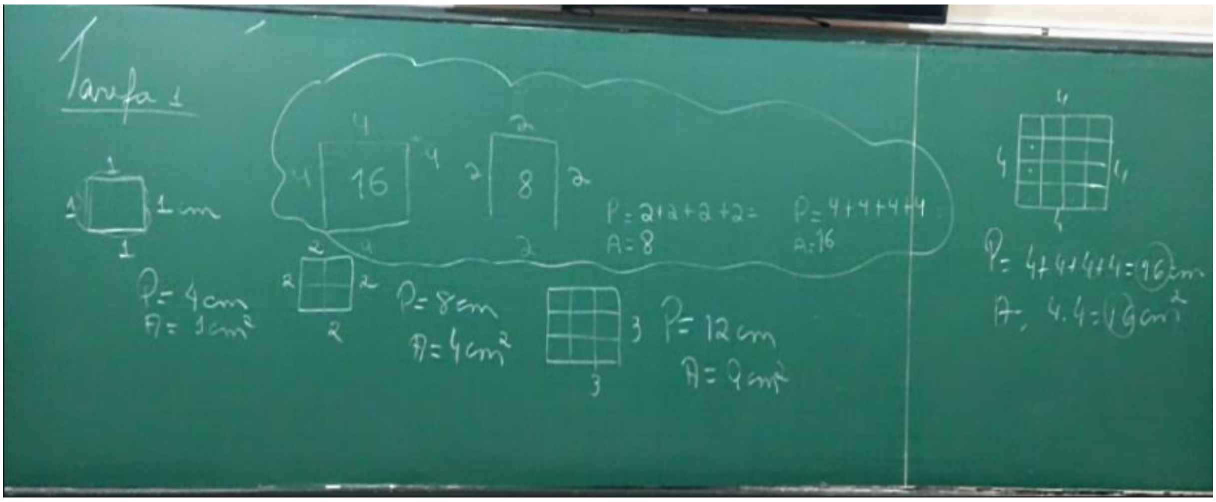
Fonte: Acervo da pesquisadora

No momento da plenária, quando os grupos foram apresentar suas resoluções, o grupo 1 escreveu os conceitos de área e perímetro na lousa, conforme Figura (11), para explicar aos outros colegas da sala. Os alunos do grupo 2 utilizaram exemplos numéricos, como mostra Figura (12), para justificar a resposta dada ao problema proposto. Utilizaram, como exemplo, o número 1 e o número 2, calculando o perímetro e a área de dois quadrados. No primeiro quadrado, chamaram o lado de x e atribuíram o número 1 como o valor de x e, em seguida, chamaram a área de y, pois colocaram o y dentro do quadrado. Ao lado, determinaram o perímetro igual a 4 e a área igual a 1. No segundo quadrado, atribuíram, aos lados, o número 2 e, dentro do quadrado, um ponto de interrogação, sugerindo um desafio aos colegas da sala, ou seja, qual é área do quadrado? Em seguida, apresentaram o cálculo do perímetro por meio de uma adição e a área, recorrendo à multiplicação. Assim, concluem que a afirmação da professora, no problema (1), está correta, de acordo com os exemplos apresentados na Figura (11).

O grupo 2 justificou sua resposta recorrendo à exemplificação, conforme Figura (12), apresentaram o cálculo de área errado de um quadrado, no caso o de lado 2. Por uma coincidência, a área do quadrado de lado 4 estava correta, mas eles somaram ao invés de multiplicar os dois lados. Mesmo assim, justificaram que a afirmação estava incorreta.

Após o término da explicação do grupo 2, os grupos começaram a interagir, o que resultou em uma conjectura que, mais tarde, foi validada pela professora. Um aluno do grupo 1 elaborou a seguinte conjectura: “se o perímetro é a soma de todos os lados, e a área é a multiplicação de dois lados do quadrado, o grupo 2 encontrou um número que a área e o perímetro são iguais, ou seja, o número 4, pois 4x4=16 e 4+4+4+4=16”. Os alunos justificaram de forma conjunta que a afirmação no problema (1) estava incorreta, ou seja, refutaram a afirmação da professora no problema (1). Em seguida, a professora validou a justificativa por exemplificações numéricas, como mostra a Figura (13).

Figura 13 – Resolução do problema 1 realizada pela professora em conjunto com os alunos



Fonte: Acervo da pesquisadora

É importante salientar que das dez etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021, p.52 e 53) durante a coleta de dados apenas as etapas 9 (formalização do conteúdo) e 10 (proposição de novos problemas) não foram abordadas devido às características e objetivo do problema, na qual propõe desenvolver processos de raciocínio matemático por meio de contraexemplos baseados no entendimento 7.º

4.3 PROBLEMA 2 - GRUPO 1

Para análise da discussão ocorrida no problema 2, foram transcritas as falas separadas em trechos do grupo 1, que, em suas falas (transcrição), separaram a análise, iniciando pelos números naturais, inteiros e racionais. E, para manter a íntegra da transcrição, os trechos serão denominados: "analisando os números naturais", "analisando os números inteiros" e "analisando os números racionais". O grupo (1) será denominado aluno a7, a8 e a9. Em seguida, será apresentada a transcrição do grupo (2) denominado aluno a10, a11 e a12 para manter o anonimato dos alunos

4.3.1 Trecho 1- Analisando os números naturais

[1.1]:Aluno A7:*Fez a leitura do problema para os alunos A2 e A3. Multiplique dois números quaisquer e você terá um produto maior que os dois números com os quais você começou. A afirmação da professora está correta? Em todos os conjuntos dos números (naturais, inteiros e racionais)? Por quê?*
[1.2]: Aluno A8: *A gente tá falando que pode ser em qualquer número, mas tem que ser do conjunto dos números naturais primeiro então a gente tem que fazer.*
[1.3] Aluno A7: *Os números naturais, assim 1,2,3,4, acima do zero infinitamente.*
[1.4] Aluno A8: *Além do zero também.*
[1.3] Aluno A7: *É, mas o zero não é nada.*
[1.4] Aluno A8: *Quanto é 1x1?*
[1.5] Aluno A7: *É 1.*
[1.6] Aluno A8: *E 1 é maior ou menor que os um?*
[1.7] Aluno A7: *Ué é igual.*
[1.8] Aluno A8: *Então dá pra ver que a sentença está errada pelos números naturais.*
[1.9] Aluno A7: *Sim. Nos números naturais. E os inteiros?*

Ao iniciar as discussões sobre o problema 2, os alunos A7 e A8 começaram por conjecturar, elaborando as estratégias de resolução do problema. Conforme Araman e Serrazina (2020), elaborar uma estratégia de resolução pode ser um processo de conjecturar. Eles poderiam iniciar por qualquer conjunto, mas o fizeram pelo conjunto dos números naturais, como se vê na transcrição das falas dos alunos A7 e A8 em [1,2] e [1.3], em que o aluno A7 sugeriu os números 1,2,3, 4... infinitamente, e o aluno A2 acrescentou o zero também. Neste momento, os alunos recorreram à exemplificação, que, segundo Jeannotte e Kieran (2017) é um processo de raciocínio matemático que dá suporte aos demais processos. Utilizando a operação matemática da multiplicação, o aluno A8 perguntou ao aluno A71," *quanto é 1x1?"* O aluno A7, em [1.5], respondeu "*é 1*". O aluno A8, em [1.6], continuou questionando o aluno A7 e, em [1.6], perguntou "*é maior ou igual a 1?"*

As perguntas indicam que o aluno A8 quis justificar o problema por meio da multiplicação de dois fatores iguais, recorrendo à exemplificação em [1.4]. O aluno A7 elaborou uma conjectura ao responder, em [1.7], que o resultado da multiplicação seria igual a 1. E, em [1.8], o aluno A8 validou a conjectura elaborada com a resposta do aluno A7 e argumenta que se pode ver que a sentença está errada no conjunto dos números naturais por meio da comparação entre dois fatores iguais em [1.4], justificando que a afirmação da professora está errada no conjunto dos números naturais. A7 validou a justificativa do aluno A8, mas, em seguida, desafiou-o em relação ao conjunto dos números inteiros. Segundo Lannin, Ellis e Elliot

(2011), a justificativa, em matemática, é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas. A transcrição é apresentada na sequência.

4.3.2 Trecho 2- Analisando os números inteiros

Neste trecho, os alunos A7 e A8 dão continuidade aos questionamentos sobre o problema que envolve o conjunto dos números inteiros enquanto o aluno A9 continua observando a discussão e faz anotações no papel de resolução.

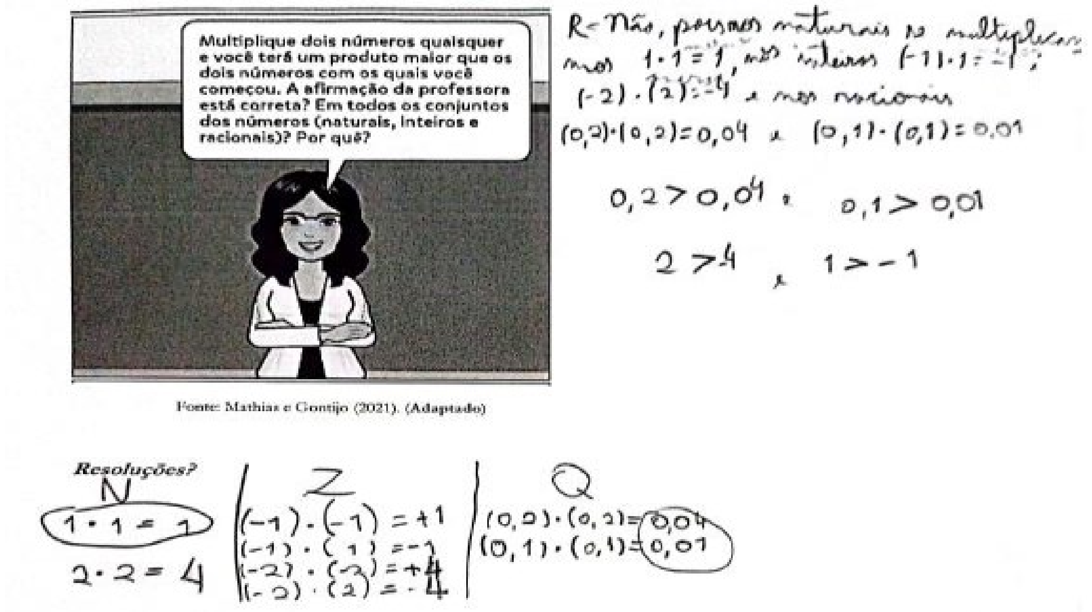
[2.1] Aluno A8*: E agora os inteiros? Quanto que é um negativo vezes um?*
[2.2] Aluno A7: *Vezes um positivo? Deixa, eu fazer aqui. (indicando que vai fazer na folha, Figura 15).*
[2.3] Aluno A7: *A regra diz que um positivo e um negativo dão negativo, então dá menos 1, porque 1x (-1) dá ele mesmo.*
[2.4] Aluno A8: *E então -1 é maior ou menor que +1?*
[2.5] Aluno A7: *Depende!*
[2.6] Aluno A8: *Não! -1 e maior ou menor que +1? A gente estudou que todo número. positivo é maior que o número negativo, então?*
[2.7] Aluno A8: *Então esse aqui está errado.*
[2.8] Aluno A8: *Então esse aqui está errado, mas? Se a gente fizer (-1) x (-1) =+1*
[2.9] Aluno A7: *Da positivo, você falou! Você travou também?*
[2.10] Aluno A8: *Não entendi muito bem, é muito ruim fazer cálculo tipo mentalmente e estranho explicar o cálculo mentalmente para outra pessoa.*
[2.11] Aluno A7: *Você quer que eu leia o teu pensamento? (risos)*
[2.12] Aluno A8: *Então dá prá ver que a sentença está errada pelos números inteiros.*
[2.13] Aluno A7: *Sim.*
[2.14] Aluno A8:*Mas (+1) é maior ou menor que (-1) então esse inteiro é verdadeiro e falso ao mesmo tempo, ou seja, é falso.*
[2.15] Aluno A7: *Calma! É falso ou verdadeiro?*
[2.16] Aluno A8: *É falso.*

Neste trecho, os alunos A7 e A8 iniciaram a resolução do problema, valendo-se de exemplos numéricos e, logo no início do diálogo, o aluno A8 desafiou o aluno A7 e perguntou, em [2.1], "*quanto é um vezes menos um*?" E, em [2.3], o aluno A7 respondeu que *"é menos* um", de acordo com a regra (um número positivo multiplicado por um número negativo dá negativo). Evidenciamos que o aluno A7 estava referindo-se à regra da multiplicação entre dois números inteiros com sinais diferentes em que o produto é um número negativo. O aluno A7 elaborou uma justificativa por meio de conhecimentos prévios sobre multiplicação entre dois números inteiros com sinais diferentes.

Para validar o raciocínio do aluno A7 no trecho [2.3], o aluno A8 perguntou ao aluno A7, no trecho [2.4], "*qual é o maior número, um ou menos 1?*" O aluno A7 diz que "depende". Mas o aluno A8 não aceitou a resposta e utilizou os conhecimentos prévios sobre comparação entre dois números inteiros para justificar que o número positivo é maior que um número negativo [2.6].

Para validar a sua conjectura sobre o problema (2), no trecho [2.8], o aluno A8 recorre a mais um exemplo de multiplicação entre dois fatores, sendo um número positivo e outro negativo, indicando que pretendia validar sua resposta comparando o produto do exemplo no trecho [2.1] com o trecho [2.8], mas é possível observar que o aluno A8 organizou vários exemplos, que não são citados no momento do diálogo, mas que poderiam ser comprovados na Figura (14) e no trecho [2.14]. Isso indica que o aluno se apoiou nas exemplificações para justificar que a professora estava errada em sua afirmação.

Figura 14 – Resolução do problema apresentada pelo aluno A8



Fonte: Acervo da pesquisadora

4.3.3 Trecho 3 - Analisando os números racionais

[3.1] Aluno A8: *Agora vamos fazer os racionais. Quanto é (0,1) x (0,1)? Dá quanto?*

[3.2] Aluno A7: *Se você pensar 1x1 dá 1 só que porém., calma tá errado.*

[3.3] Aluno A8: *Faz essa conta aí (mostrando o papel, ver figura 15).*

[3.4] Aluno A7: *Calma, um décimo tipo mais um décimo.*

[3.5] Aluno A8: *Vezes e não mais.*

[3.6] Aluno A7: *Isso vezes (0,1) x (0,1) = aqui vai da 100 não me pergunte. como (mostrando a folha de resolução na figura 15*).

[3.7] Aluno A8: *Então um centésimo?*

[3.8] Aluno A7: *É maior.*

[3.9] Aluno A8: *É maior? Um centésimo é maior que um décimo?*

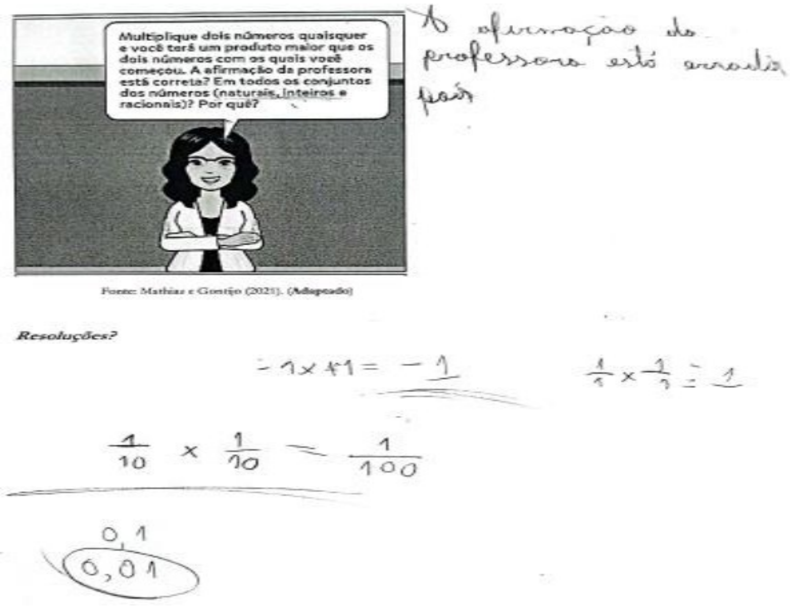
[3.10] Aluno A7: *Não, Olha a pressão (risos).*

[3.11] Aluno A8: *Oxi (risos) 1/100 é menor.*

As transcrições anteriores indicam que o aluno A8 atuou ativamente, conduzindo os diálogos e, neste trecho, ele iniciou novamente, elaborando uma conjectura ao pensar na multiplicação entre dois números decimais, como mostra o trecho [3.1], e conduziu o diálogo, perguntando ao aluno A7, no trecho [3.1], "*quanto dá?"* Ou seja, ele desafiou o aluno A7 a resolver o exemplo proposto por ele no trecho [3.1]. Ele poderia utilizar os exemplos anteriores, mas recorreu a um exemplo com números decimais, indicando dominar o conceito do conjunto dos números racionais, ou seja, números que podem ser representados na forma a/b com b diferente de zero. Nesse momento, percebemos que A8 procurou avançar em seu entendimento matemático "baseado em uma mudança de representação", conforme apontam Ponte *et al.* (2020, p.8).

Após realizar a pergunta ao aluno A7, o aluno A8 observou as respostas do aluno A7 e fez algumas intervenções, como no trecho [3.5], dizendo que deveria ser "vezes", sugerindo que deveria ser feita a operação matemática da multiplicação e não de adição. O aluno A7 fez a multiplicação entre (0,1). (0,1) no trecho [3.6] e confundiu-se ao dar a resposta. Mas, na Figura (15), é possível entender que o aluno A7 estava se referindo ao denominador do número da fração, ou seja, ao centésimo, resultado da multiplicação entre (0,1) x (0,1) = 1/100, que ficou evidenciado quando o aluno A8 perguntou, no trecho [3.9], ao aluno A7 "um centésimo é maior ou menor que um décimo?" O aluno A7 não responde imediatamente e o aluno A8, no trecho em [3.11], respondeu que um centésimo seria menor que um décimo, validando a conjectura iniciada por ele, quando sugeriu a multiplicação de (0,1) x (0,1) no trecho [3,1], o que pode ser observado na Figura (15), em que o aluno A7 apresentou exemplos para justificar que a afirmação da professora no problema estava errada. Vemos o processo de validação da conjectura por meio da justificação, como sugerem Jeannotte e Kieran (2017).

Figura 15 – Resolução do problema apresentada pelo aluno A7



Fonte: Acervo da pesquisadora

4.3.4 Trecho 4

[4.1] Aluno A9: *Coloquei que é verdadeiro, mas ao mesmo tempo não é verdadeiro, pois funciona com alguns números.*

[4.2] Aluno A8: *É falso!*

[4.3] Aluno A9: *Não necessariamente.*

[4.4] Aluno A8: *É falso, é falso porque aqui está falando todos os números, exatamente todos, todos, ou seja, é verdadeiro ou falso.*

[4.5] Aluno A7: *Em todos os conjuntos Naturais, Inteiros e Racionais, todos! Ou seja, é verdadeiro ou falso, não pode ser os dois.*

[4.6] Aluno A9: *É (risos)*

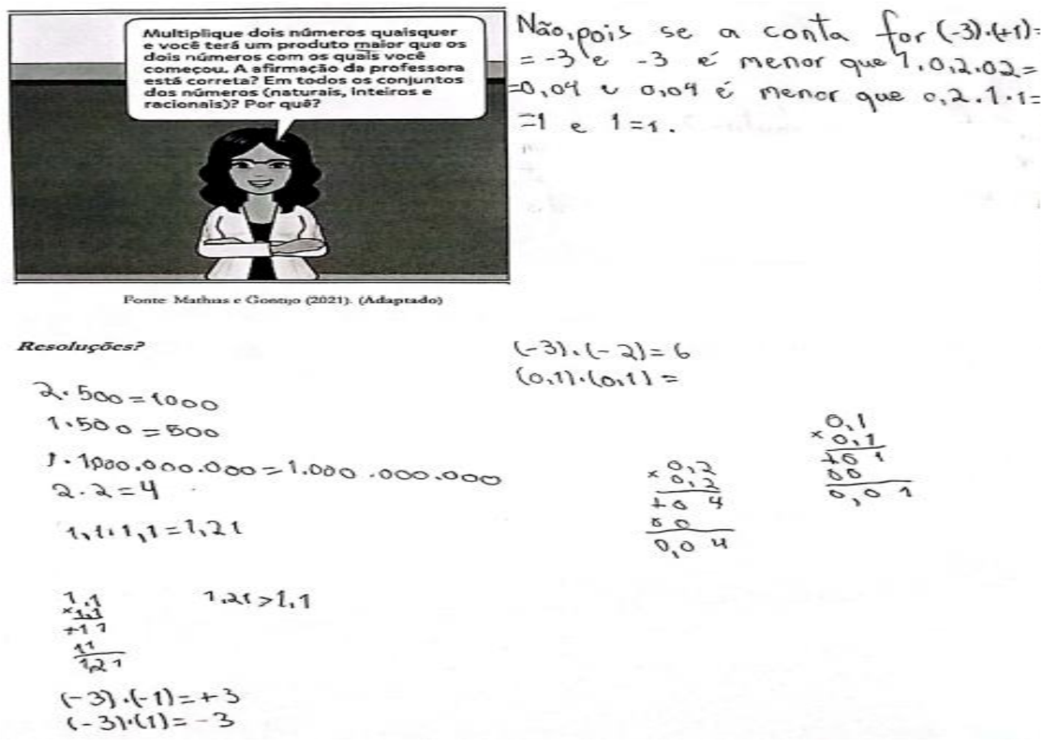
[4.7] Aluna A7: *É falso, não existe meio termo. É sim ou não.*

[4.8] Aluno A8: *Aí 1/100 é menor que 1/10 então é muito falsa.*

[4.9] Aluno A7*: Oh ,1/100 vai dar isso aqui (mostrando na folha de resolução, figura15).*

Neste trecho, o aluno A9, que não participou dos diálogos anteriores, elaborou uma conjectura em [4.1] ao afirmar ser verdadeiro e, ao mesmo tempo, não ser verdadeiro pois funcionou com alguns números, mas não conseguiu validar sua conjectura diante dos argumentos apresentados pelos alunos A8 e A7 nos trechos [4.4] e [4.5]. Os alunos A7 e A8 refutaram a análise do aluno A9, argumentando não ser possível validar a sua resposta, pois o problema proposto referia-se a todos os conjuntos, logo, a afirmação seria falsa. O aluno A9 tentou justificar por meio da exemplificação, conforme Figura (16), que pode acontecer com alguns números, mas os alunos A7 e A8 não aceitaram, conforme os trechos [4.7] e [4.8], invalidando a conjectura do aluno A9 com exemplos numéricos apresentados por eles. O aluno A9 não compreendeu que “em matemática, entretanto, é importante reconhecer que um único contraexemplo pode invalidar a conjectura”. (LANNIN; ELLIS; ELLIOT,2011, p. 43).

Figura 16 – Resolução apresentada pelo aluno A9 no problema 2.



Fonte: Acervo da pesquisadora

4.3.5 Trecho 5

[5.1] Aluno A7: *Deixa-me responder no meu.*

[5.2] Aluno A8: *Tem que elaborar uma coisa certa.*

[5.3] Aluno A9: *Sim elaborei.*

[5.4] Aluno A7: *Qual foi a resolução de vocês?*

[5.5] Aluno A8: *A gente fez esses cálculos doidão. (mostrando a folha de resolução, Figura 14).*

[5.6] Aluno A9: *Sim nós fizemos cálculos tanto de números inteiros, naturais e racionais para ver se dava certo (Figura16).*

[5.7] Aluno A8: *Cite seus exemplos (risos).*

[5.8] Aluno A9: *Nossa justifique sua resposta (risos).*

[5.9] Aluno A7: *Justifique sua resposta (risos).*

[5.10] Aluno A9: *Eu fiz (1/10) vezes (1/10) =1/100, (2/10) x (2/10) =4/100 e (-3). (1) = -3 e esses foram meus exemplos (Figura 16).*

[5.11] Aluno A8: *Como que isso justifica sua resposta?*

[5.12] Aluno A9: *Professora está falando que quaisquer números que você multiplique vai ter um número obrigatoriamente maior que os números que você usou e que essa afirmação se aplica aos números racionais, naturais e inteiros e isso não é verdade*

[5.13] Aluno A7: *E se for 1/1?*

[5.14] Aluno A8: *Estamos falando de multiplicação e não divisão*.

[5.15] Aluno A8: Isso é racional na verdade.

[5.16] Aluno A7: *Estou falando assim 1/1x 1/1 tipo assim (mostrando na folha de resolução, Figura 15)*

[5.17] Aluno A8: *Na verdade é um número racional, 1x1 que vai dar um inteiro. Estão todos de acordo com a resposta?*

[5.18] Alunos A7 e A9: *Sim.*

Neste trecho, os alunos organizam as resoluções apresentadas individualmente em que repetem como chegaram à conclusão de que a afirmação da professora, no problema (2), está incorreta. O aluno A9, em [5.6], justifica a afirmação, recorrendo à exemplificação numérica em [5.10], utilizando a classificação dos conjuntos (naturais, inteiros e racionais) e comparando as possibilidades para justificar porque a afirmação da professora está incorreta (Figura 16). Em [5.11], o aluno A9 é desafiado pelo aluno A8: "como que isso justifica a sua resposta". Em [5.12], ele afirma que não é verdade, pois "a professora afirma que quaisquer números que multiplique vai ter obrigatoriamente um número maior que você usou, isso não é verdade". Ele consegue validar a sua conjectura por meio da comparação entre os exemplos, percebendo que não pode generalizar para todos os conjuntos. No final da discussão, o Aluno A7, em [5.13], faz um questionamento: "e se for 1/1?". Mas o aluno A8 em [5.12] "respondeu estamos falando de multiplicação e não divisão", mas, em seguida, diz que "*é racional na verdade*". Mas aluno A7 insiste e em [5.17], como mostra a Figura (15). O aluno A7 elabora uma conjectura ao mostrar a multiplicação de fatores iguais 1/1 x 1/1, como Figura (15), em que o aluno caracteriza como um número racional e o aluno A7 abandona a sua conjectura, encerrando a discussão, mas os alunos validam as conjecturas elaboradas durante a resolução do problema com exemplos apresentados durante os diálogos e resoluções.

4.4 PROBLEMA 2 - GRUPO 2

4.4.1 Trecho 1

A aluna A10 inicia fazendo a leitura dos problemas para as outras alunas:

[1.1] Aluna A11: *Eu comecei fazendo a tabuada 2x2=4; 4x4=16; 6x6=36, na minha opinião a professora tá certa.*

[1.2] Aluna A12: *Eu pensei nos números naturais, inteiros e racionais, coloquei no papel, escolhi um número natural, inteiro e outro racional para fazer as contas, e deu tudo um número maior do que os que começaram, então essa afirmação tá correta.*

[1.3] Aluna A10: *Eu também pensei como vocês, e fiz 2x2=4; depois 4x2=8; mas daí pensei assim. Perguntou se era para todos os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais. Daí pensei em 0,4x0,4=0,16 e 1/2x1/2=1/4 também é maior, mas se tiver um número positivo e um negativo o resultado vai ser sempre menor. Chegamos à conclusão de que a professora está correta.*

Este grupo elabora conjecturas quando utilizam a tabuada para exemplificar, como em [1.1], mas a aluna A11 não explorou todos os conjuntos (números naturais, inteiros e racionais), abandonando a justificativa e afirma que a professora está certa.

As explicações continuam. A aluna A10 elaborou uma conjectura ao fazer uma multiplicação com dois números naturais, sendo que, no primeiro exemplo, em [1.3], ela utiliza dois números iguais cujo produto é maior que os fatores e, depois, exemplifica com dois fatores diferentes obtendo um produto maior, justificando, através desses exemplos, que a professora está certa. A aluna A10 conjectura novamente ao estabelecer que 0,4 x 0,4= 0,16. Ainda que tenha interpretado de forma errada quando diz que 0,16 é maior que 0,4, a aluna utilizou a comparação entre números decimais, conseguindo estabelecer uma estratégia para justificar a sua conjectura.

Em seguida, a aluna A10 elaborou outra conjectura em [1.3] “se tiver um número positivo e um outro negativo” o resultado vai ser sempre menor, sugerindo conhecer as regras de sinais para multiplicação entre dois números inteiros. Mas o trio não avança nas discussões.

4.4.2 Trecho 2

[2.1] Professora: *Olá, tudo bem? Como estão as resoluções?*

[2.2] Aluna A10: *Nós já concluímos*

[2.3] Professora: *Não tiveram dúvidas? Não querem perguntar nada? Sobre os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais?*

[2.4] Professora: *Me falem como raciocinaram, como iniciaram a resolução.*

[2.5] Aluna A12: *Eu comecei pensando na tabuada*

[2.6] Aluna A10: *Eu pensei em alguns exemplos.*

[2.7] Professora: *Não querem me falar dos exemplos.*

[2.8] Alunas A10, A11 e A2: *Estão aqui, mostrando os exemplos (figuras 13,14 e 15).*

[2.9] Professora: *Sim, estou vendo, mas gostaria que vocês me explicassem.*

[2.10] Aluna A10: *Eu pensei nos números e fui comparando.*

[2.11] Professora: *Como assim? Quais números?*

[2.12] Aluna A10: *Em números com vírgula, inteiros.*

[2.13] Professora: *Pensaram em muitos? Qual a conclusão?*

[2.14] Aluna A11: *Que a professora está certa.*

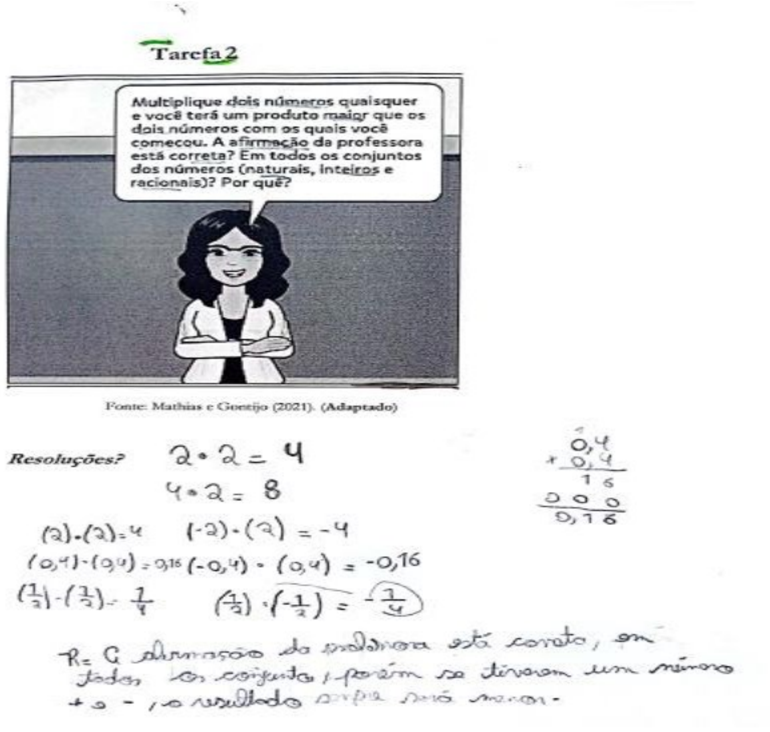
[2.15] Professora: *Vou fazer uma pergunta: Um quarto é maior ou menor que um meio? O produto é sempre maior?*

[2.16] Aluna A10: *Pode ser menor se for negativo.*

[2.17] Professora: *Vou deixar vocês conversarem um pouco mais, pensem no que eu perguntei.*

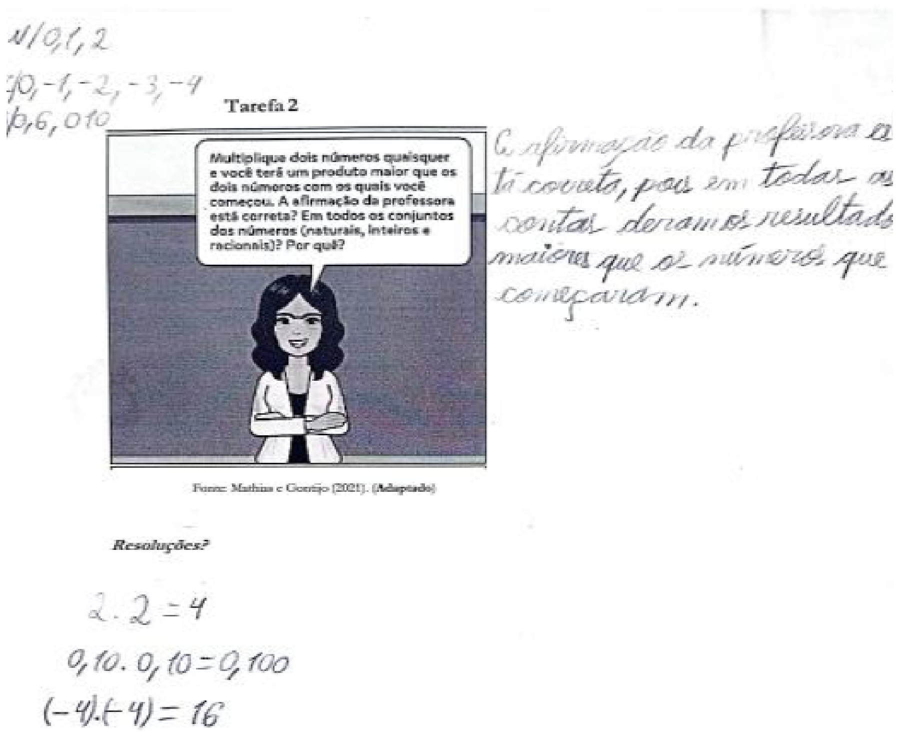
No momento da conversa com a professora, o trio se manteve bem reservado, repetindo o que estava na folha de resolução, mesmo a professora desafiando-os ao perguntar “quais números? Como assim?” Na fala [2.15], quando questionados se um quarto é maior ou menor que meio e se o produto é sempre maior, apenas associaram ao número positivo e negativo, e, depois, mantiveram-se em silêncio. Quando feita a transcrição, analisamos que não acrescentaram nada a mais do que já haviam conversado nos diálogos anteriores. O quadro 7 ilustra uma síntese dos processos de raciocínio matemático envolvidos durante a resolução dos problemas.

Figura 17 – Resolução apresentado pelo aluno A10 no problema 2.



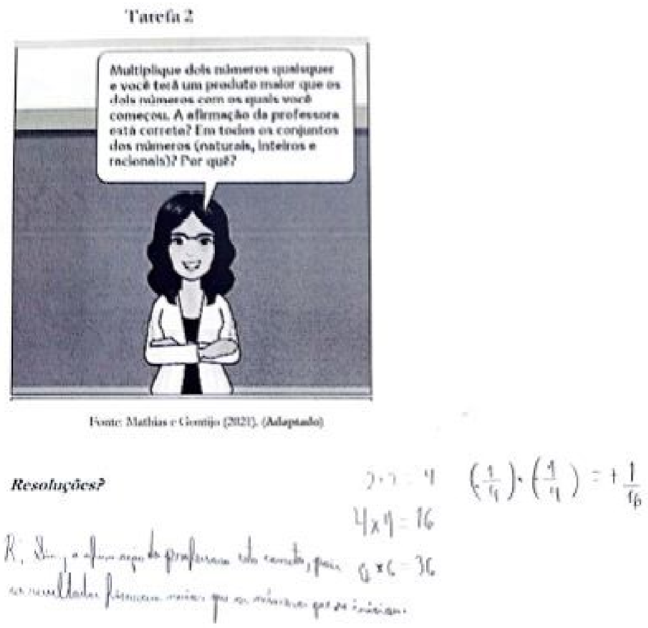
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 18 – Resolução apresentado pelo aluno A12 no problema 2.



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 19: Resolução apresentado pelo aluno A11 no problema 2.



R: Sim, a afirmação da professora está correta, pois 6x6=36 os resultados ficaram maior que o número que se

Fonte: Acervo da pesquisadora

Quadro 7 – Processos de raciocínio envolvidos na discussão do grupo 1 e 2

Processos	Problema 2
Formular conjecturas	• Números Naturais acima de zero infinitamente. • O número um é o elemento neutro da multiplicação. • Regras de sinais da multiplicação e divisão. • Ao multiplicar um número negativo por um número positivo resulta em um número negativo. • Em uma multiplicação de fatores com sinais iguais resulta em um número positivo. • Classificação dos conjuntos dos números Naturais. Inteiros e Racionais. • Multiplicação de dois números com numeradores e denominadores iguais é equivalente a um inteiro.
Justificar	• Quanto é $1x1$? É um. • Quanto é um negativo vezes um positivo? É um negativo. • Quanto é um décimo vezes um décimo? É um centésimo.
Comparar	• Comparação entre os conjuntos numéricos. • Um é maior ou igual a 1? É igual. Logo 1=1 • Um negativo é menor ou maior que um? É menor assim (-1) < (1). • Qual é o maior número? Um ou menos um? É o um, assim (1) > (-1). • Um décimo é maior ou menor que um centésimo? Um centésimo é menor: assim (0,1) > (0,01)
Generalizar	• Nem sempre é maior pode ser igual ou menor.

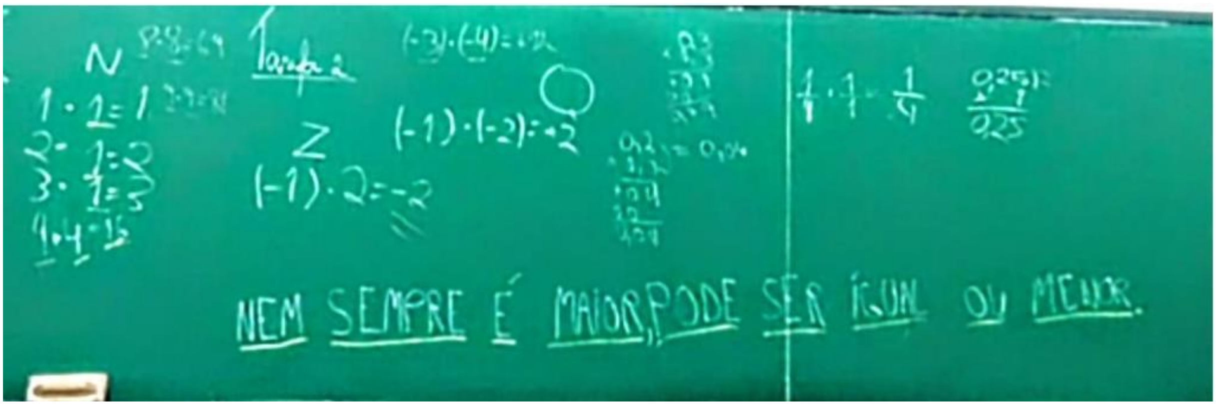
Fonte: Dados da pesquisa

4.4.3 Trecho 6 - Plenária

A plenária é um momento de muita expectativa. Tanto para os alunos quanto para o professor, há imprevistos. O grupo 1, em todo o momento da pesquisa, demonstrou muito entusiasmo em resolver os problemas, são alunos ativos no cotidiano. O grupo 2 são alunos tímidos, mas que conseguiram interagir durante a resolução dos problemas, porém optaram por não colocar as resoluções no quadro alegando que eram parecidas com as do grupo 1 e que apenas os números eram diferentes. Mesmo com incentivos da professora, não foram ao quadro, por este motivo, não há registro da lousa do grupo 2.

Os alunos foram ao quadro e apresentaram suas respostas à sala, justificando-as por meio de exemplos. Foram cuidadosos ao apresentarem as resoluções indicando os conjuntos naturais por N, inteiros por Z e racionais por Q. Não se limitaram em um único exemplo para que os colegas da sala pudessem fazer comparações. Após as justificações, por meio de exemplos, afirmam ser falsa a afirmação em todos os campos dos números naturais, inteiros e racionais, pois, no problema, a professora afirmava que o produto seria sempre maior, mas poderia ser menor ou igual, logo a afirmação estaria incorreta. Os alunos mostraram alguns exemplos na lousa para seus pares e concluíram que "nem *sempre é maior, pode ser igual ou menor*" e que "*logo a afirmação é falsa*". Em seguida, escreveram, no quadro, em caixa alta, a conclusão de que "nem sempre é maior, pode ser igual ou menor", conforme figura 20.

Figura 20 – Resolução do problema 2 apresentada pelo grupo 1



Fonte: Acervo da pesquisadora

No problema (2) as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021, p.52 e 53) durante a coleta de dados apenas as etapas 9 (formalização do conteúdo) e 10 (proposição de novos problemas) não foram abordadas devido às características e objetivo do problema, na qual propõe desenvolver processos de raciocínio matemático por meio de contraexemplos baseados no entendimento 7.º de Lannin; Ellis; Elliot (2011).

4.5 PROBLEMA 3 - GRUPO 1

Para análise da discussão ocorrida no problema (3), o grupo (1) será denominado aluno A13, A14 e A15. Em seguida, será apresentada a transcrição do grupo (3) denominado aluno A16, A17 e A18 para manter o anonimato dos alunos. Ao iniciar a resolução do problema (3), o trio não parecia saber como iniciar as resoluções. Ao observar que os alunos estavam falando de assuntos alheios à resolução (filmes, novelas), a professora se aproximou do trio e começou a interagir: "Olá, pessoal, tudo bem? Fizeram a leitura do problema? Compreenderam o problema?" Seguem as transcrições.

4.5.1 Trecho 1

[1.1] Aluno A14: *Eu não entendi o que significa "somam menos do que esse número".*

[1.2] Professora: *A soma lembra qual operação em matemática?*

[1.3] Aluno A14: *Adição.*

[1.4] Aluno A13: *Agora entendi.*

[1.5] Professora: *Ok! O que são divisores de um número?*

[1.6] Aluno A14: *São números que ao dividir por outros resulta em divisão exata.*

[1.7] Professora: *Sim. O que vocês entendem por "divisores de um número não incluindo a si mesmo"?*

[1.8] Aluno A15: *Tirando número.*

[1.9] Aluno A14: *Agora entendi.*

[1.10] Aluno A15: *Então agora ficou fácil, a soma deles vai ser menor que esse número.*

[1.11] Aluno A13: *Não.*

Em [1.1], quando o aluno A14 expressou a dúvida "*somam menos que esse número*?", professora lhe dá atenção, mas leva-o a refletir sobre os termos matemáticos evidenciados na fala [1.2] quando a professora pergunta "a soma lembra qual operação matemática*"?* O aluno A14 responde que é a "*adição"*, colaborando para o entendimento da aluna A13 na fala [1.4] "agora entendi". Foi necessária uma outra pergunta para fazer com que o aluno recorresse aos conhecimentos prévios.

Diante da pergunta do aluno, a professora, naquele momento, julgou necessário fazer outra pergunta para que os alunos iniciassem a resolução do problema, conforme a fala [1.5] "o que são divisores de um número?" O aluno A14 responde "*são números que ao dividir por outros, resulta em uma divisão exata*". A professora, em [1.7], valida a resposta do aluno, mas, em seguida, realiza outra pergunta em [1.7]: "o que são divisores de um número não incluindo a si mesmo?" em [1.8], o aluno A15 responde: "*tirando o número*". O aluno A14, em [1.9], responde que "*agora entendi*", expressando que estava com dúvidas e a resposta do colega o ajudou a esclarecê-las. Em seguida, o aluno A15 sugere, em sua fala em [1.10], que, após a professora tirar suas dúvidas, a resolução estava fácil, mas, em seguida, o aluno A13 refuta a afirmação do colega em [1.11]. No entanto, abandona a justificativa. Evidenciamos, nesse primeiro momento, uma retomada de conceitos para que os alunos elaborassem as estratégias de resolução. Não há evidências de processos de raciocínio matemático.

4.5.2 Trecho 2

[2.1] Aluno A13: *Então vamos responder: "O que vocês entenderam desse problema"? Vou ler o problema.*

[2.2] Aluno A13: *A afirmação está correta ou incorreta? Depende...(risos)*

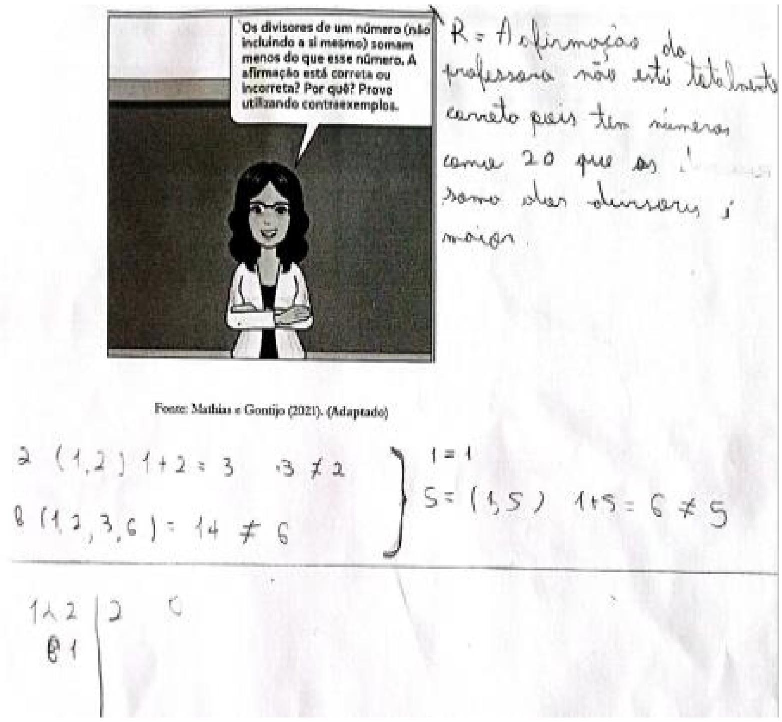
[2.3] Aluno A15: *Eu entendi assim, você pensa em um número e encontra os divisores desse número. Para alguns números esta afirmação é correta para outros não.*

[2.4] Aluno A13: *Como por exemplo os divisores de 6, são 1, 2 e 3 sem contar ele mesmo*

[2.5] Aluno A14: *Eu estava fazendo os múltiplos, não entendi direito.*

O aluno A15 elabora as primeiras conjecturas ao sugerir uma estratégia de resolução como denota a fala em [2.3]. A estratégia de resolução consiste em pensar em um número e determinar os divisores desse número. Em seguida, o aluno A13 valida a estratégia de resolução do aluno A15, por meio da exemplificação numérica, conforme Figura (21). De acordo com a fala [2.4], ele apresenta os divisores do número 6 (seis) acrescentando que "sem contar ele mesmo". Ou seja, o aluno A13 elabora uma conjectura ao estabelecer que, para validar a estratégia de resolução por meio da exemplificação, é necessário excluir o número que é divisor de si mesmo, demonstrando conhecimentos prévios sobre os divisores de um número. Mas, enquanto as estratégias estavam sendo compartilhadas entre o trio, o aluno A14 relata que está com dúvidas, de acordo com a fala [2.5]. Em seguida, o aluno A15 inicia uma explicação para ajudar o aluno A14, como mostra as transcrições.

Figura 21 – Resolução do problema 3 apresentada pelo aluno A13



Fonte: Acervo da pesquisadora

.

[2.6] Aluno A15: Vamos a pergunta referindo-se ao aluno A14. *“Quais são os divisores de 20”?* Anota aqui (mostrando a folha de resolução Figura 22)

[2.7] Aluno A14: *São 1, 2, 4, 5, 10 e 20.*

[2.8] Aluno A15: *Vinte não conta, ok. Agora faça a soma dos divisores.*

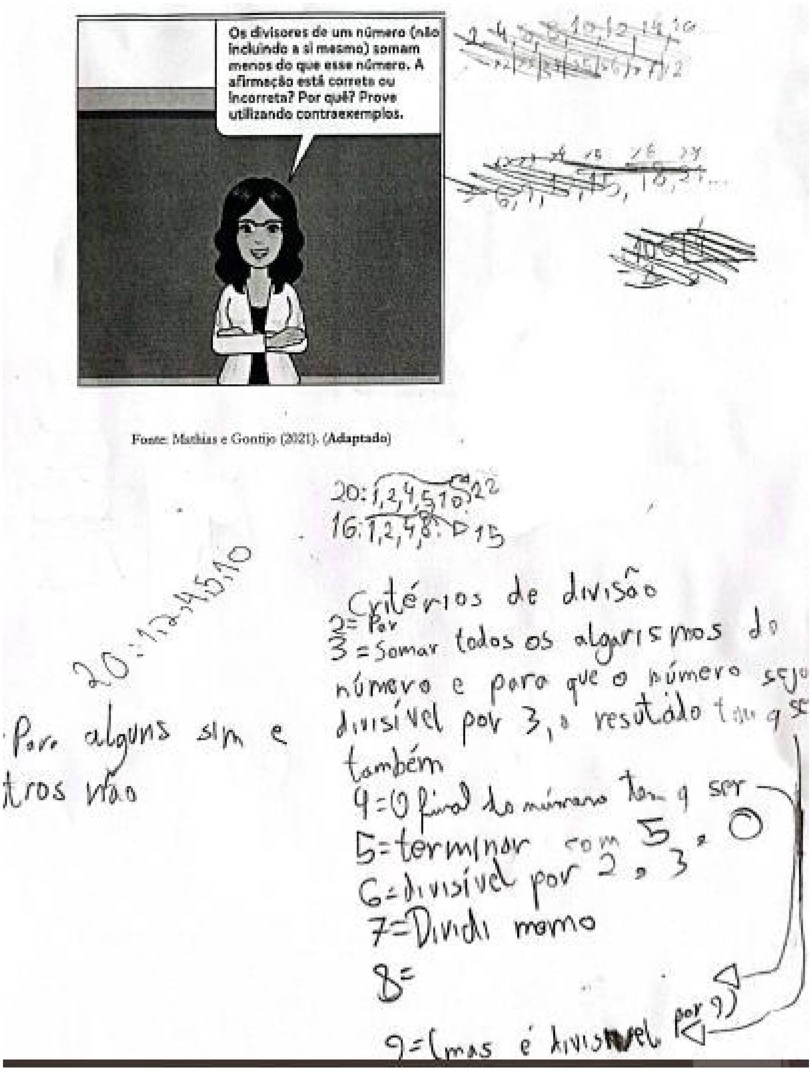
[2.9] Aluno A14: *A soma é 22.*

[2.10] Aluno A15: *Vinte e dois é maior ou menor que 20?*

[2.11] Aluno A14: *Maior.*

[2.12] Aluno A15: *Certo.*

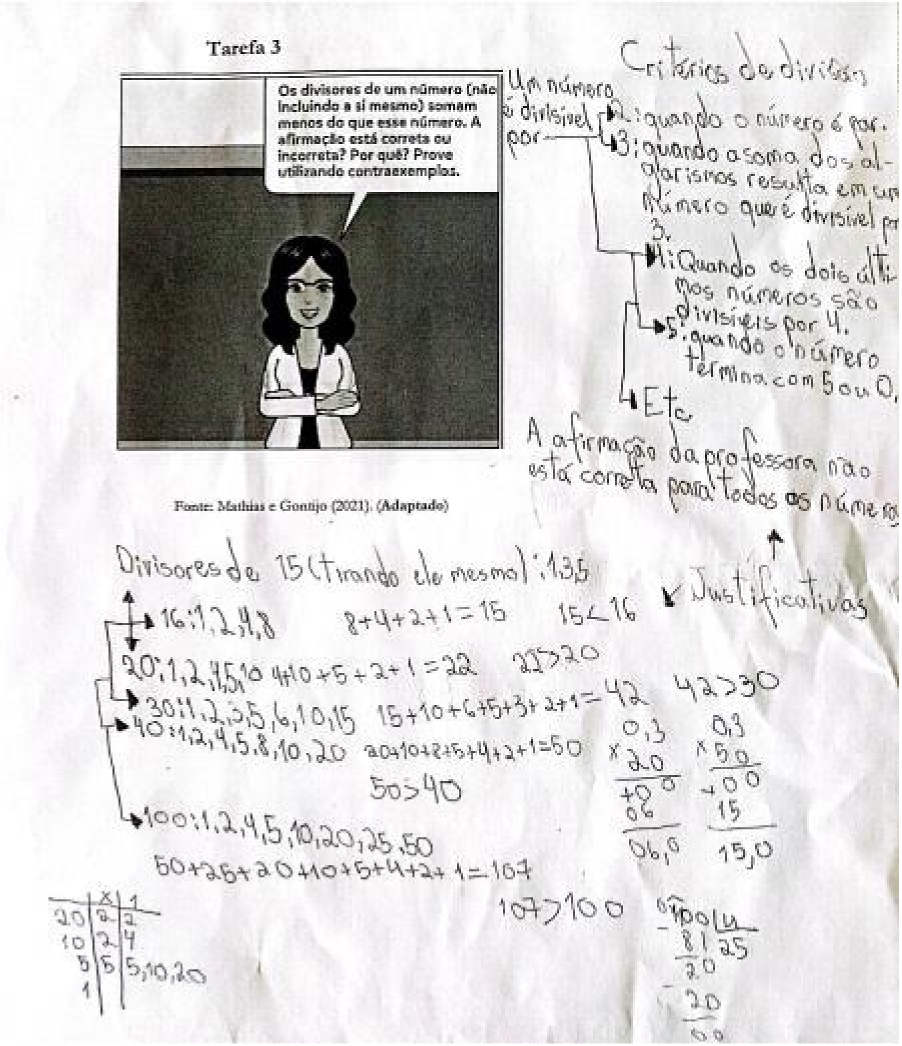
Figura 22 – Resolução do problema 3 apresentada pelo aluno A14



Fonte: Acervo da pesquisadora

[2.13] Aluno A15: *Mas se você fizer os divisores de 16 como eu fiz a soma vai ser menor, pelas contas que eu fiz, se estiver correta a soma vai ser 1+2+4+8 é igual a 15. E quinze é menor que 16. Logo essa regra dita pela professora não se aplica a todas as contas. A professora não está correta, não serve para todos os números.* Figura (23).

Figura 23 – Resolução do problema 3 apresentada pelo aluno A15



Fonte: Acervo da pesquisadora

O aluno A14, ao relatar suas dúvidas, oportunizou, aos colegas, estabelecerem uma nova estratégia de resolução. O aluno A15 sugeriu um outro exemplo numérico em [2.6]: “quais os divisores de 20”? Assim, fez com que o aluno A14 raciocinasse sobre os divisores de 20. Em seguida, solicita que o aluno A14, em [2.8], faça a soma dos divisores. O aluno A15 elencou etapas para a melhor compreensão do aluno A14, sugerindo a comparação entre a soma dos divisores e o número escolhido, no caso, o 20. Evidenciamos que o aluno A15, após a comparação dos resultados em [2.10], valida a resposta do aluno A14 em [2.12].

Em seguida, o aluno A15 elabora uma nova conjectura em [2.13], utilizando um outro exemplo numérico para justificar a conjectura elaborada por ele. Em um primeiro momento, ele sugere o número 16, indica os divisores e, em seguida, faz a soma dos divisores de 16. Ele apresenta o resultado ainda em [2.13]: “se estiver correta a soma 1+2+4+8 é igual a 15”. O aluno A15 justifica sua conjectura por meio da exemplificação, conforme Figura (23), de um número qualquer e, para torná-la válida, utiliza a comparação entre a soma dos divisores e o número escolhido (aleatório). É importante destacar que o aluno A15 também recorre aos conhecimentos prévios sobre “critérios de divisibilidade” para validar sua conjectura e conclui, por meio da exemplificação, que a “regra da professora não se aplica a todas as contas”. Em seguida, refuta a afirmação da professora quando afirma, [2.13], que “*A professora não está correta, não serve para todos os números.”*

4.5.3 Trecho 3

[3.1] Professora: *No início quando passei por aqui vocês estavam com dúvidas e agora?*

[3.2] Aluno A14: *Eu estava fazendo “múltiplos ao invés de divisores”.*

[3.3] Professora: *Qual a diferença entre múltiplos e divisores?*

[3.4] Aluno A14: *Múltiplos é uma sequência infinita e divisores é uma sequência finita. Além de que geralmente os divisores são menores e só tem um que é igual. E os múltiplos são maiores.*

[3.5] Professora: *Então os divisores são sequências finitas?*

[3.6] Aluno A13: *Sim, múltiplos são sequências infinitas.*

[3.7] Professora: *Por que os múltiplos são sequências infinitas?*

[3.8] Aluno A15: *Porque os números são infinitos e você vai multiplicando, não tem como sabe como vai acabar.*

[3.9] Professora: *Muito bem! Conseguiram resolver o problema?*

[3.10] Aluno A15: *Sim.*

No trecho 3, houve um diálogo com a professora que, preocupada com os questionamentos do início da resolução do problema, retorna até o grupo e pergunta se está tudo bem. Os alunos conseguem expor suas observações, inclusive, o Aluno A14, que reconhece que estava confundindo os termos “múltiplos e divisores” em sua fala em [3.2]. Nesse momento, a professora [3.3] utiliza a colocação do aluno A14 para questionar os alunos sobre os termos matemáticos citados na fala [3.2]. Houve uma interação entre a professora e os alunos, permitindo-os elaborarem conjecturas ao diferenciar o que são “múltiplos” e “divisores”. Foi oportunizado um momento de reflexão, os alunos recorreram a outros conhecimentos matemáticos e outros conceitos como sequências “finitas” e “infinitas” como mostra a transcrição da fala em [3.4]. Em todos os momentos questionados pela professora, os alunos argumentavam e justificavam suas respostas, como fez, por exemplo, o aluno A14 em [3.4], que justificou as respostas através de entendimentos teóricos da matemática. Logo em seguida, o Aluno A13, em [3.6], valida a conjectura elaborada pelo aluno A14 em [3.4]. O aluno A15 elabora uma nova conjectura em [3.8] ao associar os múltiplos com a multiplicação dos números, pois, em [3.8], justifica que os "números são infinitos e não tem como acabar", sugerindo que, ao multiplicar um número por outro, novos números surgiram.

4.5.4 Trecho 4

[4.1] Professora: *Como vocês obtiveram os divisores dos números escolhidos? Como vocês chegaram aos divisores de 20?*

[4.2] Aluno A14: *Eu assisti um desenho, então eu sabia.*

[4.3] Professora: *Um desenho, muito bom! Mas se eu não assistir esse desenho? Tem alguma forma para descobrir os divisores de um número?*

[4.4] Aluno A14: *Sim a gente já estudou alguma coisa não me lembro.*

[4.5] Aluno A15: *A gente estudou técnicas da divisão.*

[4.6] Professora: *Vocês se lembram de alguma "técnica"?*

[4.7] Aluno A15: *Eu lembro, por exemplo: por 2 se for par. Divisível por 3 se a soma dos algarismos for divisível por 3.*

[4.8] Aluno A13: *É divisível se tiver na tabuada do três.*

[4.9] Professora: *Muito bem! Mas me falem algo. "Quanto maior o número escolhido maior a quantidades de divisores"? Posso transformar isso em uma regra?*

[4.10] Aluno A15: *Sim, por exemplo os divisores de 2 são (1 e2) já de 6 são (1,2,3 e 6)*

[4.11] Aluno A14: *Não, às vezes*

[4.12] Professora: *Não? Por quê?*

[4.13] Aluno A14: *Tem os números primos.*

[4.14] Aluno A15: *Mas isso não está perguntando no problema.*

[4.15] Professora: *Sim, você está correto (se direcionando ao aluno A15) não faz parte do problema. Mas é um questionamento para vocês refletirem quando forem determinar a quantidade de divisores de um número. Certo?*

[4.16] Professora: *Mas vamos voltar ao problema proposto.*

[4.17] Aluno A15: *A professora não está correta, não serve para todos os números.*

[4.18] Professora: *É a conclusão de todos?*

[4.19] Aluno A13: *Sim serve para alguns números, não serve para todos.*

[4.20] Aluno A14: *Sim, concordo.*

Neste trecho, evidenciamos, por meio da transcrição, como os alunos estavam seguros ao serem questionados. O aluno A15 elabora as primeiras conjecturas ao falar que existem “técnicas da divisão” em [4.5], associando “técnicas” aos “critérios de divisibilidade”. Em seguida, apresenta exemplos em sua fala em [4.7], explicando o critério de divisibilidade por 2 e por 3, ou seja, recorre à exemplificação para validar a conjectura elaborada. O aluno A13 elabora uma nova conjectura em [4.8], associando a tabuada com os divisores de três, o que contribui para validar a conjectura do aluno A14 em [4.7].

No meio do diálogo, a professora questiona a quantidade de divisores dos números na fala [4.9]. O aluno A15, em [4.10], afirma que “sim”, justificando por meio da exemplificação de dois divisores, sendo os exemplos os divisores de 2 e 6. Mas o aluno A14 não concorda com a afirmação do aluno A15, não validando a justificativa apresentada, mesmo com a exemplificação. O aluno A14, ao ser questionado em [4.12] pela professora, justifica dizendo “as vezes”, pois tem os” números primos”. O aluno elabora uma conjectura ao recorrer aos conhecimentos prévios sobre “números primos” para não validar a afirmação do aluno A15 em [4.10].

Em seguida, o aluno A15 argumenta, em [4.14], que os “números primos” não fazem parte do problema. A professora, em [4.15], concorda com o aluno A15 e esclarece que, mesmo não fazendo parte do problema, é importante conhecer outros conceitos matemáticos que podem auxiliar nas mais diversas situações. Em seguida, o diálogo retorna ao problema proposto, em que os alunos refutam a afirmação da professora, pois, as exemplificações apresentadas, conforme Figura (21), Figura (22) e Figura (23), não podem garantir para todos os números, somente para alguns como a transcrição da fala [4.17] e a validação dos alunos nas falas [4.18] e [4.19].

4.6 PROBLEMA 3 – GRUPO 3

4.6.1 Trecho 1

[1.1] Aluno A16: *Eu pensei assim: os divisores são os números que um número pode ser dividido. Então eu pensei em alguns números como o 11, os divisores são 1 e 11, mas como disse “não incluindo a si mesmo não pode contar o 11”. Pensei em um monte de outros exemplos Figura (23) como o quatro que os divisores são: 1e 2 e a soma é igual a 3. E 3 é menor que 4.Outro exemplo foi o 2 e os divisores são 1 e 2 mas tirando o 2 fica um que é menor que 2. Outro exemplo foi o 50.*

[1.2] Aluno A17: *Por quê 50?*

[1.3] Aluno A16: *Para ver se não era só os números pequenos.*

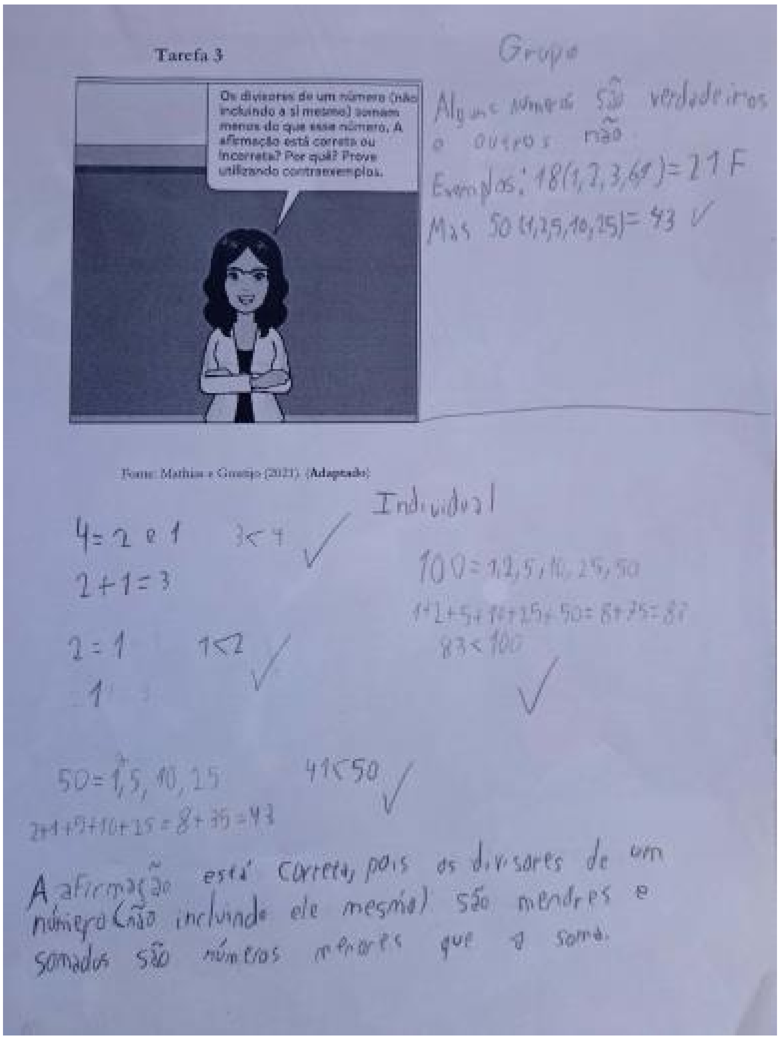
[1.3] Aluno A17: *Ah ! tá bom.*

[1.4] Aluno A16: *Os divisores de 50 são (1,2,5,10,25), somando todos dá 43 que é" menor que 50", depois eu peguei o 100 os divisores são (1,2,5,10,25,50) que dá "89" então eu cheguei a conclusão que a afirmação está correta, porque a soma dos divisores de um número que não inclui ele mesmo são menores que o divisor.*

[1.5] Aluno A17: *Como que a gente faz se pensar tudo igual ?(penar nos mesmos números)*

[1.6] Aluno A18: *E não sei se pensei tudo igual.*

Figura 24: Resolução do problema 3 apresentada pelo aluno A16



Fonte: Acervo da pesquisadora

De acordo com a transcrição, o aluno A16 inicia as discussões do trio, elaborando as primeiras conjecturas, de acordo com a fala [1.1], e a resolução, por meio da definição de divisores. Em seguida, escolhe números aleatórios. Na transcrição, o aluno A16 não explica o motivo da escolha dos números. Ele comenta que "*pensei em um monte de outros exemplos*" na fala [1.1]. Em seguida, apresenta as exemplificações, como na Figura (24). Os números escolhidos são os divisores de 11; 2; 4; 50 e 100. Ao utilizar a exemplificação com números menores e, em seguida, apresentar um exemplo com os divisores de 50, o aluno A17 questiona "por quê", de acordo com a fala [1.2]. O aluno A16 justifica a escolha em [1.3]: "para ver se não era só os números pequenos". O aluno A16 justifica a conjectura elaborada por meio de comparação entre os números escolhidos, e o aluno A17 não refuta a justificativa: "*ah tá bom".* O aluno A16, por meio da exemplificação dos divisores de 50 (1; 2; 5;10; 25; 50), excluindo o 50, compara a soma dos divisores e conclui que a soma é 43, menor que cinquenta. Em seguida, faz a mesma comparação com os divisores de 100 na fala [1.4], verificando que a soma dos divisores de 100 também são menores que o número escolhido. Com os exemplos apresentados, o aluno A16 valida a afirmação da professora. Os alunos A17 e A18 questionam as justificativas, de acordo com as falas [1,5] e [1.6].

4.6.2 Trecho 2

[2.1] Aluno A18: *Eu pensei assim. Peguei alguns números e somei alguns denominadores.*

[2.2] Aluno A16: *denominadores? São divisores!*

[2.3] Aluno A18: *Eu peguei o 18, não sei se estão corretos os divisores mas coloquei (1,2,3,6 e 9). Está certo?*

[2.4] Aluno A16: *Sim, está certo.*

[2.5] Aluno A18: *Na minha cabeça encontrei que a firmação está correta.*

[2.6] Aluno A16: *Qual o argumento?*

[2.7] Aluno A18: *Eu somei assim 1+9=10 ; 1+2=3; 6+3=9 2+6=8 eu não fui somando todos 1+2+3+6+9... e todos vão dar menores que 18.*

[2.8] Aluno A16: *Mas vão dar maior.*

[2.9] Aluno A18: *Mas tinha que somar 1+2+3+6+9?*

[2.10] Aluno A16: *Sim, você achou uma falha na afirmação, o 18.*

[2.11] Aluno A16: *Então a afirmação não está totalmente correta.*

[2.12] Aluno A17: *Mas em momento nenhum ela disse que sempre somam todos os divisores?Mas eu acho que tem que somar todos.*

[2.13] Aluno A18: *Então na minha lógica eu pensei que não tinha que somar todos os divisores, tinha que pegar dois deles e somar e vendo os resultados.*

[2.14] Aluno A16: *Então a conclusão do grupo é que para alguns dos números são menores e para outros como o 18 é maior, pois 1+2+ 3+6+9=24.*

[2.15] Aluno A18: *É 24? Olha 6+6=12 e 12 +9 =21 .*

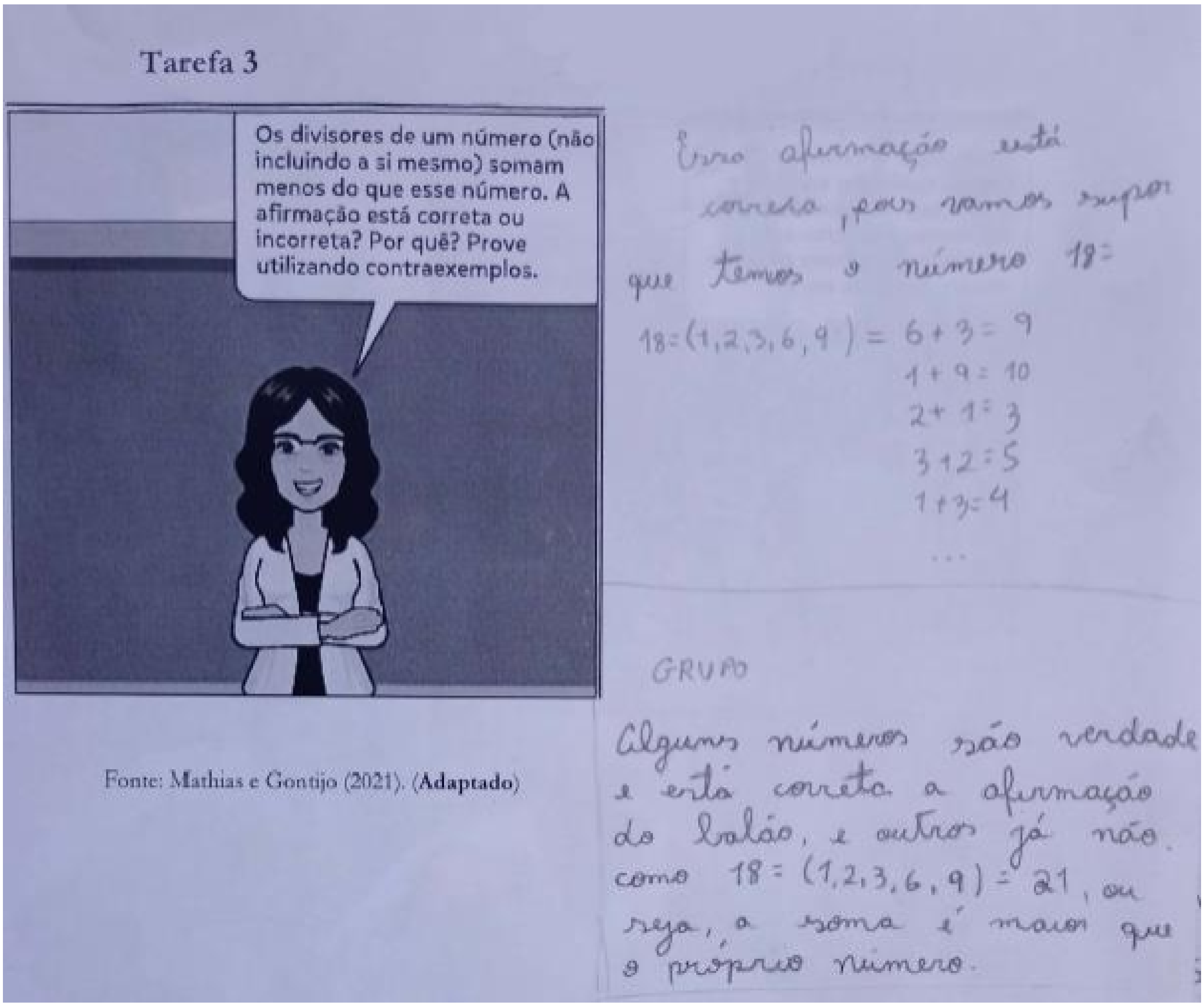
[2.17] Aluno A16: *Não é 24 é 21 (risos).*

No trecho 2, houve uma interação maior entre os alunos. O aluno A18 elabora uma conjectura em [2.1]: "*eu pensei assim , peguei alguns números e somei alguns denominadores*". Ele fez uma confusão com os termos denominadores e divisores, o que é pontuado, em seguida, pelo aluno A16 em [2.2], que questiona o termo utilizado e apresenta o termo correto. O aluno A18 justifica a conjectura elaborada por meio da exemplificação do número 18 e, em seguida, determina os divisores do número 18, conforme a fala [2.3], o que é validado pelo aluno A16 em [2.4]: " *sim está certo*".

O aluno A18 continua expondo sua estratégia de resolução quando o aluno A16 questiona em [2.6] "*qual argumento*?". Para justificar o seu raciocínio, o aluno A18 apresenta a solução, conforme a Figura (25), recorrendo aos conhecimentos prévios da adição. Assim conclui que a soma de dois divisores é menor que o número escolhido. Mas o aluno A16 observa a resolução do aluno A3, conforme a Figura (25), e invalida a conjectura em [2.8]: "*mas vão dar maior*". Em [2.9], o aluno A18 questiona se "*tinha que somar todos*?", e, em [2.10], o aluno A16 afirma "sim". Em seguida, argumenta, dirigindo-se ao aluno A18, que "*você achou uma falha na afirmação, o 18",* de acordo com a fala [2.10] . O aluno A16 valida a conjectura em [2.11], " *então a firmação não está totalmente correta*". O aluno A17 questiona, em [2.12], a afirmação da professora: "mas em momento nenhum ela disse que sempre somam todos os divisores". Sugere, então, uma nova conjectura, que é abandonada em [2.12] com a fala "mas eu acho que tem que somar todos".

O aluno A18, argumenta que também não entendeu a necessidade de somar todos os divisores, mas os alunos A17 e A18 abandonam uma possível conjectura e validam a conjectura elaborada pelo aluno A16. Em [2.14], o aluno A16 conclui que "para alguns números são menores e para outros não, como é o caso do 18". Ele justifica a afirmação adicionando os divisores de 18 e obtendo, como soma, o número 24, de acordo com a fala em [2.14], mas o aluno A18 questiona o resultado e faz a correção imediatamente como mostra a transcrição em [2.15]. Mesmo justificando errado o valor da soma dos divisores de 18, o aluno A16 validou a conjectura elaborada por meio das exemplificações numéricas.

Figura 25 – Resolução do problema 3 apresentada pelo aluno A18



Fonte: Acervo da pesquisadora

4.6.3 Trecho 3

[3.1] Professora: *Pessoal vocês compreenderam o problema?*

[3.2] Aluno A16: *Sim, é para pegar um número ver os divisores dele, somar esses divisores, se o resultado da soma for menor que o número inicial é verdadeira, mas se for maior é falso. Aí a gente pegou alguns exemplos como o 4, 2, 50 e o 100 e deram que a firmação é verdadeira.*

[3.3] Professora: *Me falem algo, "vocês sabem o que são divisores"?*

[3.4] Aluna A17: *Sim.*

[3.5] Professora: *Como vocês obtiveram os divisores dos números?*

[3.6] Aluna A17: *Bem a gente vê se dá para dividir por 1,2,3, 4...*

[3.7] Professora: *Vocês conhecem alguma técnica? Algum critério?*

[3.8] Aluna A17: *Sim, aquele "negócio da barrinha", "divisão sucessiva".*

[3.9] Aluno A16: *Hum! "divisão com números primos"? Fazendo a decomposição? Será que se fizer o MMC vai dar certo?*

[3.10] Aluna A17: *Mas o MMC é múltiplo e não divisores.*

[3.11] Aluno A16: *Meu Deus tem que ter um jeito mais fácil de determinar os divisores, mas eu não lembro como. Mas se a professora perguntou é porque deve ter um jeito mais fácil de fazer, na matemática sempre tem um jeito mais fácil, qual será? Eu não sei como calcular os divisores (risos) eu devo saber, mas eu esqueci nesse momento.*

[3.12] Professora: *E aí pessoal existe alguma maneira para determinar os divisores de um número, uma maneira mais prática?*

[3.13] Aluna A17: *"Critérios da divisibilidade".*

[3.14] Aluno A16: *Verdade.*

[3.15] Professora: *É "verdade que quanto maior o número maior a quantidade de divisores"?*

[3.15] Aluno A16: *Sim*

[3.16] Aluno A17: *Depende do número, se for um número primo não.*

[3.17] Professora: *Sim é preciso pensar nos números primos. Vocês lembram de algum critério?*

[3.18] Aluno A1: *Sim, divisível por 2 quando for par, por três quando a soma dos algarismos for possível dividir por 3 por exemplo; 180= 1+8+0=9, por cinco quando termina em zero ou cinco, por 10 quando termina em zero e por 9 quando a soma dos algarismos for divisível por 9.*

[3.19] Aluna A18: *E se o número for divisível por 2 e 3 vai ser divisível por 6.*

[3.20] Aluna A17: *A gente lembra de alguns critérios.*

[3.21] Professora: *E a afirmação da professora no problema serve para todos os números?*

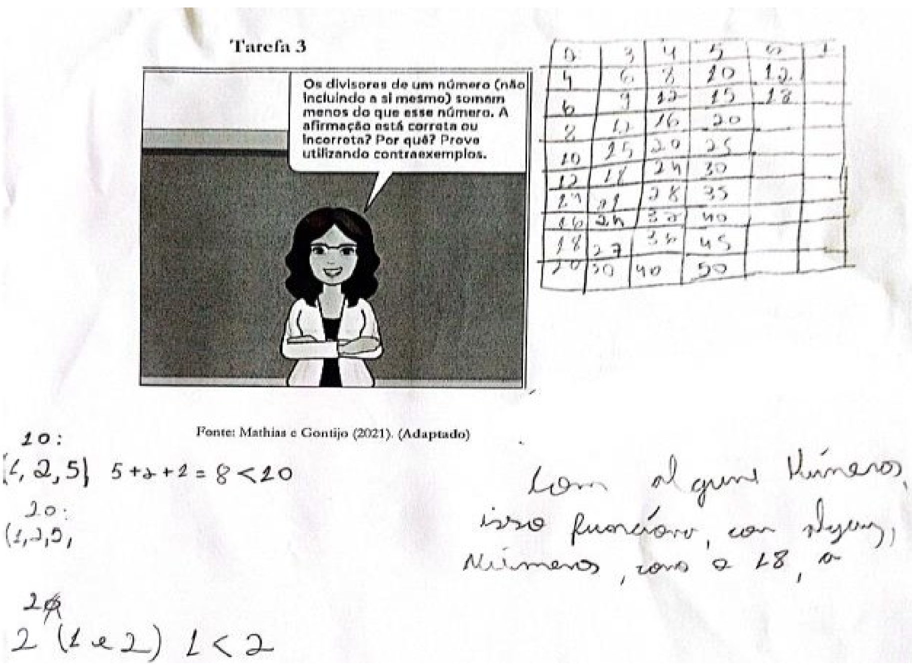
[3.22] Aluna A17: *Em partes, para todos não! Pois para o 18 não dá certo. Para alguns números a afirmação está correta, mas para o 18 deu errado então a afirmação não serve para todos os números.*

[3.23] Aluno A16: *Serve para alguns, mas não podemos generalizar para todos os números.*

A transcrição do trecho 3 traz um momento de interação entre o trio e a professora, que aproveita a oportunidade para dialogar com os alunos, fazer alguns questionamentos e compreender as estratégias utilizadas na resolução do problema. Quando a professora inicia o diálogo, o aluno A16 explica qual a estratégia utilizada, de acordo com a fala [3.2]. Ao ouvir a explicação do aluno A16, a professora questiona se todos sabem o que "são divisores" em [3.3]. O aluno A17 responde que "sim". Após ouvir a resposta, a professora realiza alguns questionamentos, de acordo com as falas [3.5] e [3.7], que oportunizaram, aos alunos, compartilharem seus conhecimentos prévios. Quando questionados, os alunos buscaram alternativas para responder as perguntas, mas não se lembravam dos termos matemáticos, como o aluno A17, em [3.8], que cita "*aquele negócio de barrinha*" e "*divisão sucessiva",* referindo-se à decomposição em fatores primos. E o aluno A16 se sentiu desafiado e começou a se perguntar, em [3.11], se "*sempre tem um jeito mais fácil*", afirma, também, que "*eu devo saber não me lembro agora*". A professora se aproximou em [3.12] e os questionou. O aluno A17 responde, em [3.13], "*critérios de divisibilidade*", e o aluno A16 valida a resposta do aluno A17.

Em [3.15], a professora realiza uma pergunta que não fazia parte da resolução do problema, mas oportunizou uma reflexão aos alunos. De forma imediata, o aluno A16 responde, em [3.16], "sim", mas o aluno A17, em [3.16], não concorda: "depende se for os números primos não". Em [3.17], a professora valida a resposta do aluno A17. A professora questiona os alunos, em [3.17], se eles lembram de "algum critério de divisibilidade". Os alunos respondem que sim: "alguns". Em [3.18], justificam por meio de exemplificações. Em [3.21], a professora questiona "e a afirmação da professora serve para todos os números? O aluno A17 responde que " *Em partes, para todos não! Pois para o 18 não dá certo"* e que "*Para alguns números a afirmação está correta, mas para o 18 deu errado então a afirmação não serve para todos os números".* A resolução pode ser observada na Figura (26). Em seguida, o Aluno A16 valida a justificativa em [3.23]: "*Serve para alguns, mas não podemos generalizar para todos os números.* O quadro 8 apresenta a síntese dos processos de raciocínio matemático desenvolvidos durante a discussão.

Figura 26: Resolução do problema 3 apresentada pelo aluno A17



Fonte: Acervo da pesquisadora

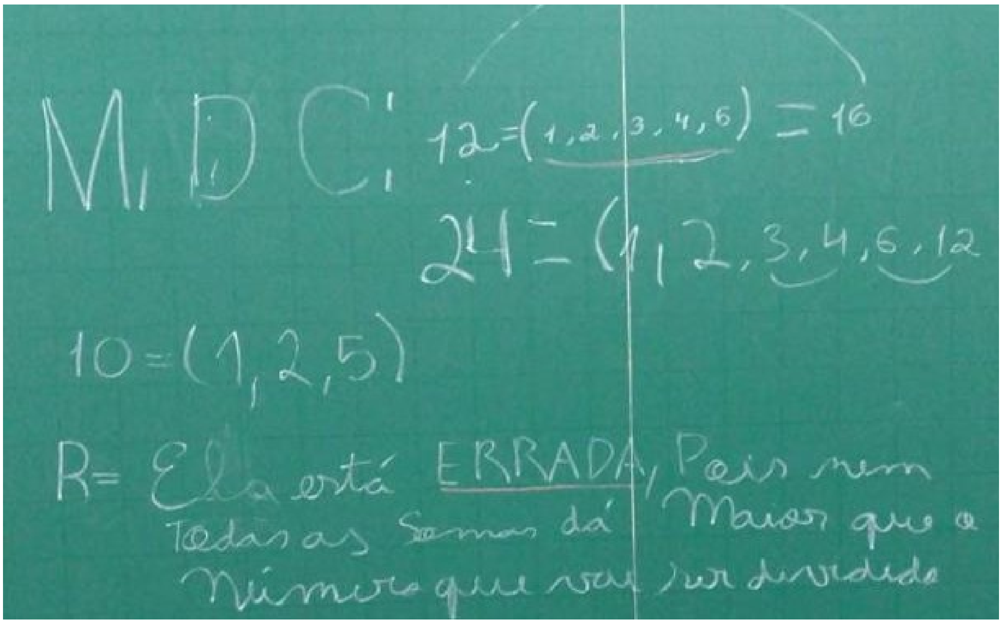
Quadro 8 – Processos de raciocínio envolvidos na discussão do grupo 1 e 3

Processos	**Problema 3**
Formular conjecturas	• Conceito de múltiplos e divisores. • Múltiplos são sequências infinitas e divisores são sequências finitas. • Critérios de divisibilidade: Um número é divisível por dois quando for par. • Divisores são números que ao dividir por outro número resulta em uma divisão exata. • Critério de divisibilidade por três, se a soma dos algarismos for divisível por três. • Critério de divisibilidade por seis: se for divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo. • Decomposição em fatores primos. • Excluir um número: não pode considerar o número como próprio divisor.
Justificar	• Escolher números aleatórios e determinar os divisores. • Divisores de 6 D (6) = {1,2,3,6}, • Divisores de 20 D (20) = {1,2,4,5,10,20}. • Divisores de 16 D (16) = {1,2,4,8,16}. • D (50) = {1,2,5,10,25,50} • D (18) = {1,2,3,6,9,18}
Comparar	• Múltiplos são sequências infinitas M (6) = {0,6,12,18...) E divisores são sequências finitas D (6) = {1,2,3,6}. • A soma (1+2+3) = 6 • Quanto maior o número escolhido maior a quantidade de divisores? Não, tem os números primos. • A quantidade de divisores de D (6) >D (13). • Divisores de D (18) = {1,2,3,6,9,18}. • A soma dos divisores de 18, sem contar o dezoito somam mais que esse número. • (1+2+3+6+9) >18 21 >18. • D (10) = {1,2,5,10} • Soma sem contar o 10; 8 <10 • D (16) = {1,2,4,8} • Adição dos divisores de 16 sem contar o 16. • Soma sem contar o 16: 15<16
Generalizar	• A professora não está correta, não serve para todos os números. • Serve para alguns números, mas não podemos generalizar para todos os números, como por exemplo o dezoito.

Fonte: Dados da pesquisa

4.6.4 Plenária

Figura 27 – Resolução apresentada no momento da plenária pelo grupo 4



Fonte: Acervo da pesquisadora

Os alunos empenharam-se ativamente na resolução do problema 3, exerceram o espírito colaborativo, buscaram estratégias de resoluções, validaram conjecturas e invalidaram justificativas, mas conseguiram, por meio da exemplificação, “refutar a afirmação da professora”. O momento da plenária oportunizou uma troca de ideias entre os demais grupos. Os alunos compartilharam suas resoluções com outros grupos, mas infelizmente não apresentaram todas as resoluções no quadro. Mas, outro grupo[6] em que não foi possível a compreensão das falas devido a qualidade do áudio pediu para compartilharem as resoluções. O grupo foi ao quadro para apresentar os exemplos Figura (27), escolheram três números, o número 24,10 e o 12 indicaram os divisores de cada um, e por meio da comparação da soma dos divisores de 12, resultando em 16 concluíram: “ela está errada, pois nem todas as somas dá maior que o número que vai ser dividido”, sugerindo que as somas poderiam ser maiores ou menores.

No problema (3) foi possível aplicar as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021, p.52 e 53) durante a coleta de dados, apenas as etapas 9 (formalização do conteúdo) e 10 (proposição de novos problemas) não foram abordadas devido às características e objetivo do problema, na qual propõe desenvolver processos de raciocínio matemático por meio de contraexemplos baseados no entendimento 7.º

---

[6] Grupo 4: Não aparece nas transcrições devido aos áudios não audíveis.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O raciocínio matemático não havia sido apresentado para esta pesquisadora até o momento de contato com a Fundamentação Teórica desta pesquisa. Talvez, por ser um tema pouco estudado e divulgado no Brasil. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) menciona a necessidade de "desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação" no Ensino Fundamental e no Ensino Médio e apresenta uma competência prevendo que os alunos sejam aptos a " investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas [..] ao formular conjecturas com bases em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las[...] ou validá-las"(BRASIL, 2018, p.540).

Diante do objetivo proposto para este estudo de investigar processos de raciocínio matemático desenvolvidos por alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada da cidade de Maringá, no estado do Paraná, ao resolveram problemas apoiados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, destacamos alguns resultados relevantes para as pesquisas em Educação Matemática, direcionadas ao ensino de Matemática no Ensino Fundamental.

Ao trabalhar com contraexemplos, de acordo com o entendimento essencial 7.º, proposto por Lannin, Ellis e Elliot (2011), foi possível identificar indícios de processos de raciocínio matemático como sugere o modelo de Jeannotte e Kieran (2017). Os alunos elaboraram conjecturas ao estabelecerem estratégias de resolução, como aparece no trecho [1.2] e [1.3], problema (2) em que o aluno A7 sugeriu os números 1, 2, 3.... e o aluno A8 acrescentou o zero. Nesse momento, recorreram à exemplificação, utilizando a operação matemática da multiplicação entre dois fatores iguais.

O aluno A7 elaborou uma conjectura ao responder, em [1.7], que o resultado da multiplicação seria igual a 1. Em [1.8], o aluno A8 validou a conjectura elaborada por meio da resposta do aluno A7 e argumentou que era possível observar que a sentença estaria errada no conjunto dos números naturais por meio da comparação entre dois fatores iguais. Estes trechos denotam que os alunos, mesmo de forma inconsciente, elaboraram conjecturas e buscaram alternativas para justificá-las. Lembramos que, de acordo com Araman e Serrazina (2020), ao criar estratégias de resolução para tarefas que ainda não sabem como resolver, os alunos fazem conjecturas ao concluir que tal estratégia pode conduzir a uma resposta válida.

Em alguns trechos, os alunos valeram-se de conhecimentos prévios como recorda Van de Valle (2009), utilizando a exemplificação, como em [4.4]. O aluno A8 afirma que "*é falso, é falso porque aqui está falando todos os números, exatamente todos, todos, ou seja, é verdadeiro ou falso*", e, em [4.5], o aluno A7 afirma que "*em todos os conjuntos Naturais, Inteiros e Racionais, todos! Ou seja, é verdadeiro ou falso, não pode ser os dois*". Argumentando em [4.7], o aluno A7 diz que "*É falso, não existe meio termo, é sim ou não*", para rejeitar uma conjectura elaborada, como aconteceu em [4.1], quando o aluno A9 tentou validar sua conjectura. Ao afirmar *"que é verdadeiro, mas ao mesmo tempo não é verdadeiro pois funciona com alguns números*", os alunos A8 e A7 refutaram a conjectura elaborada, baseados em um processo de exemplificação.

Como pontuam Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 43), "em matemática, entretanto, é importante reconhecer que um único contraexemplo pode invalidar a conjectura". Em outros momentos, ficaram evidentes os processos de comparação, como denotam as falas para validar o raciocínio do aluno A7 no trecho [2.3]. O aluno A8 perguntou ao aluno A7 no trecho [2.4] "*qual é o maior número, um ou menos 1?"* E o aluno A7 disse que dependia. Mas o aluno A8 "*não aceita a resposta e utiliza os conhecimentos prévios sobre comparação entre dois números inteiros para justificar que o número positivo é maior que um número negativo [2.6]."*

Observamos que o desenvolvimento do trabalho em grupo viabilizou a autonomia dos alunos ao atuarem como sujeitos ativos no uso de estratégias para desenvolver o espírito colaborativo como no trecho [2.6] do problema (2) em que o Aluno A15 procura explicar para o aluno A14 uma estratégia de resolução: *Vamos a pergunta referindo-se ao aluno A14. "Quais são os divisores de 20"?* Anota aqui (mostrando a folha de resolução) e no trecho [2.7] Aluno A14 responde: "*São 1, 2, 4, 5, 10 e 20" e em* [2.8] Aluno A15 acrescenta "Vinte *não conta, ok. Agora faça a soma dos divisores".* E o aluno A14 no trecho [2.9] responde *"é 22"* e o aluno continua questionando o aluno A14 levando-a reflexão em [2.10] "*maior ou menor que 20"* E no trecho [2.11] o aluno A14 afirma ser *"maior".* Em seguida o aluno A15 válida a resposta "*certo"* [2.12].

E no trecho [3.4] Aluno A14 recorre aos conhecimentos prévios para justificar e validar suas conjecturas. "*Múltiplos é uma sequência infinita e divisores é uma sequência finita. Além de que geralmente os divisores são menores e só tem um que é igual e os múltiplos são maiores".* Elaboraram, mesmo de forma inconsciente, um entendimento essencial que faz parte dos processos de raciocínio matemático apontados por Lannin, Ellis e Elliot (2011), que é o "Justificando e Refutando", um componente importante, considerado por Lannin, Ellis e Elliot

(2011, p.35) “como partes desafiadoras da matemática, porque muitas vezes recebemos regras na escola sem que nos sejam oferecidas oportunidades de raciocinar sobre elas”.

Um problema matemático que desafia o aluno gera novos conhecimentos, possibilitando desenvolver processos de raciocínio matemático como a justificação. Quando um aluno refuta uma afirmação particular, significa que ele identificou argumentos que vão justificar por que motivo algumas declarações são falsas. Logo, uma refutação matemática envolve demonstração e justificativas que venham a validar uma declaração. Por isso, ‘‘uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.41).

A escolha de problemas não estereotipados que não tenham “um método já estabelecido” propicia, ao aluno, o interesse em dar sentido à resolução. Esta forma de envolver e dar sentido aos problemas vem ao encontro da ideia de que a *“*resolução de problemas não é uma aplicação da aprendizagem e sim uma orientação para a aprendizagem” (BRASIL, 1998, p.41).

Ressaltamos o potencial da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, que foi o encaminhamento metodológico para se trabalhar com o problema proposto ao apoiar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, pois o professor, ao recorrer às etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021), concedeu, aos alunos, autonomia para encontrarem estratégias para solucionar uma situação não usual, tal qual o problema sugerido. Além disso, nos momentos de resolução, os alunos trocaram ideias, discutiram aspectos relevantes da matemática, tiveram oportunidade de argumentar matematicamente, formular e validar (ou refutar) conjecturas, processos normalmente pouco usuais nas abordagens tradicionais de ensino. Enfim, mobilizaram conhecimentos matemáticos, conforme bem pontuam Araman e Serrazina (2020).

Ainda, mesmo não sendo o foco da presente investigação, salientamos a importância das interações entre alunos e alunos e entre alunos e professor. Em diversos momentos, os questionamentos feitos pela professora contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Os momentos de resolução, interação, plenária e formalização, desencadearam a compreensão da necessidade de justificar o conhecimento matemático, a partir da tentativa de validação da afirmação da professora no problema proposto. De forma particular, os alunos perceberam a importância de um contraexemplo no processo de validação apoiado por vários processos de raciocínio matemático. Assim, além dos conteúdos matemáticos que puderam revisitar ao resolver o problema proposto, a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proporcionou a capacidade dos alunos refletirem acerca do próprio conhecimento matemático, como definido por Allevato e Onuchic (2021).

REFERÊNCIAS

ALISEDA, Atocha Mathematical reasoning Vs. Abductive reasoning: a structural approach. **Synthese**, v.134, n.1-2, 2003.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes.; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? *In: ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.*). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial,2021. p.37-542.

ANJOS, L. Q.; JULIO, N. M. D.; JUSTULIN, A. M.; ARAMAN, E. M.O. Resolução de problemas: uma abordagem sobre o ensino da potenciação e expressões algébricas nos anos finais do ensino fundamental. **ACTIO: Docência em Ciências**, v. 7, n.1, p. 1-21, 2022.
ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, João. "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educ. Matem. Pesq**., v.21, n.2, 2019.

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes. "Como cozer pãezinhos": processos de raciocínio matemático e ações do professor na discussão coletiva de uma tarefa exploratória no 3º ano **VIDYA**, v.40, n.2, p.147-165,2020 a.

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade. **Revista Paranaense de Educação Matemática,** v. 9, n.18, p.118-136, 2020 b**.**

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora,1994.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. MEC,2018.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais (5º a 8ª séries): Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRODIE, Karin. **Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms**. Nova Iorque: Springer 2010.

CAÑADAS, Maria. et al. The Conjecturing Process: Perspectives in Theory and Implications in Practice. **Journal of Teaching and Learning**, v5, n.1.

CARNEIRO, Luís F.; ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes. Processos do Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes de 6º Ano do Ensino Fundamental ao Resolverem uma Tarefa de Geometria. **JIEEM**, v.13, n.1, p.35-45,2020.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. São Paulo, Ed. Moderna, 2015.

JEANNOTTE, Doris; KIERAN, Carolyn. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educ Stud Math**, v.96, n.2,2017.

JUSTULIN, Andresa Maria. **A formação de professores de matemática no contexto da resolução de problemas.** 2014. 254 p. Tese- (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, **Instituto de Geociências e Ciências Exatas**, 2014. Disponível em <http://hdl.handle.net/11449/127631>.

LANNIN, John; ELLIS, Amy; ELLIOTT; Rebekah. **Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten-Grade 8.** Reston: NCTM,2011.

MATTA, Alfredo; SILVA, Francisco; BOAVENTURA, Edi Valdo. Design-based research ou Pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **FAEEBA- Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v.23, n.42, p.23-36, jul/dez.2014.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, v.32, n.62,2018.

MATA-PEREIRA, Joana. **As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula**.2018. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa.

MATHIAS, Carlos.; GONTIJO, Cleyton. **Educação Matemática e Criatividade**. (Matemática Humanista) Acesso em 13 de maio de 2021, disponível em https://youtu.be/94qLQQik5MA,13 de maio de 2021.

NUNES, Célia Barros; SERRAZINA Lurdes. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE EXPLORATÓRIA: enlaces y singularidades em uma experiência de enseñanza. **Revista Paradigma**, v.40, n.2, p.1-30,2019.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics.** Reston: NCTM, 2000.

OLIVEIRA, Paulo. O Raciocínio Matemático à Luz de uma Epistemologia Soft. **Educação Matemática,** Portugal**,** n.100, p.3-9, nov./dez2008.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa.; ALLEVATO, Norma Suely. Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v.25, n.41, p.73-98, dez.2011.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções &Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. P 199-2018.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: Um novo aspecto do método matemático/G.Polya: tradução e adaptação Heitor Lisboa d Araújo. - Reimpr. Rio de janeiro: Interciência 1995.p.196.

PONTE, João. Gestão curricular em matemática. In: GTI (Org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p.11-34.

PONTE, João; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana. Como desenvolver o raciocínio matemático em sala de aula? **Educação e Matemática**, v.2, n.156, 2020.

PONTE, João Pedro et al. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante,** v.25, n.2, p.77-98,2016.

PONTE, João; MATA-PEREIRA, Joana; HENRIQUES, Ana. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**, v. 7, n. 2, 2012.

STYLIANIDES, Gabriel. Na analytic framework of reasoning-and-proof. **For the Learning of Mathematics**, v.28, n.1, 2008.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonhese.6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. p.584

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃ EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Coordenação do PPGMAT
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio e Londrina

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Título da pesquisa: Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática
Pesquisador(es/as) ou outro (a) profissional responsável pela pesquisa, com Endereços e Telefones:
Eliane Maria de Oliveira Araman, Avenida Alberto Carazzai, 1640 CEP 86300-000 – Cornélio Procópio – Pr (43) 991453870
André Luis Trevisan, Avenida dos Pioneiros, 3131 CEP 86036-370 - Londrina – PR, (43) 996931595

Local de realização da pesquisa: Colégio Santa Cruz
Endereço: Praça Sete de Setembro,126 – Zona 05, Maringá- PR, 87015290.Telefone: (44) 3344-1671.

A) INFORMAÇÕES AO PARTICIPANTE

Gostaríamos de convidá-lo(a) a participar da pesquisa **"Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática"**, a ser realizada em aulas de matemática, da escola participante. As informações sobre a pesquisa seguem abaixo:

1. Apresentação da pesquisa.

Esta pesquisa visa o estudo de ambientes educacionais e tarefas exploratórias para o ensino e a aprendizagem matemática, desde a educação Básica até o Ensino Superior, pensado a partir de um conjunto de fatores, com potencial para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos e, em consequência disso, a aprendizagem matemática. Nosso propósito é caracterizar o raciocínio matemático e seus processos, pensar tarefas que o integre nas aulas de matemática, promover formação de professores que implementem tais ações em salas de aula e investigar dados oriundos das aulas resultantes desses processos.

2. Objetivos da pesquisa.

O objetivo dessa pesquisa é compreender de que modo a realização de tarefas exploratórias pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes, bem como de que forma as ações dos professores apoiam esse processo. Por isso, o ambiente educacional da sala de aula é o local adequado para a coleta dos dados.

Rubrica do pesquisador | Rubrica do participante da pesquisa

3. Participação na pesquisa.

Sua participação é muito importante e ela se dará a partir da sua participação nas aulas regulares, conforme cronograma da disciplina, pela realização das atividades propostas. Em algumas situações poderão ser realizadas gravação de vídeos, áudios, fotografias de ambiente da sala de aula e solicitação de registro escritos e digitais dos participantes. Esclarecemos que sua participação é totalmente voluntária, podendo você recusar-se a participar ou mesmo desistir da participação a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo na sua avaliação durante a disciplina. Caso opte por não participar da pesquisa: (i) não será feita gravação em áudio nas equipes em que você estiver inserido; (ii) você será excluído do campo de alcance da câmera em momentos de filmagem (eventualmente, se alguma imagem for registrada, o pesquisador compromete-se em utilizar recursos como tarja preta para omitir a sua identificação); (iii) sua produção escrita será coletada normalmente (visto que se trata de atividades usuais de sala de aula, parte do planejamento pedagógico da disciplina), porém não serão utilizadas pelo pesquisador para fins de pesquisa. A utilização dos dados coletados se dará exclusivamente para fins da pesquisa, sendo que os resultados poderão compor publicações científicas de nossa área de estudo, a Educação Matemática.

4. Confidencialidade.

Seu nome não será divulgado de forma alguma. Suas informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar sua identidade.

5. Riscos e Benefícios.

*5a) **Riscos:** Considera-se um risco mínimo de constrangimento durante a coleta de dados, podendo o participante optar por sua não participação na pesquisa, sem prejuízo pedagógico.*

*5b) **Benefícios:** Os benefícios esperados são de contribuir de forma significativa para a aprendizagem dos alunos e para a formação de professores, visto que envolve a implementação de tarefas exploratórias diferenciadas, que estimulam a participação ativa do aluno e desenvolvimento de habilidades como a formulação de hipóteses, a busca de soluções viáveis, o uso dos recursos com eficácia, a organização e o trabalho em grupos, enfim, vários componentes que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático.*

6. Critérios de inclusão e exclusão.

6a) Inclusão: *Professores que, por iniciativa própria, inscreverem-se nos projetos de formação continuada acima mencionados; alunos desses professores, que, juntamente com seus responsáveis, autorizarem a coleta de dados durante as aulas.*
6b) Exclusão: *Não se aplica.*

7. Direito de sair da pesquisa e a esclarecimentos durante o processo.

Esclarecemos que você pode deixar o estudo a qualquer momento assim como, pode solicitar esclarecimentos em qualquer etapa da pesquisa. Você tem a liberdade de recusar ou retirar o seu consentimento a qualquer momento sem penalização para seu aprendizado nem sua avaliação. Caso não deseje participar, ou interromper sua participação, você continuará participando das aulas normalmente, e não lhe serão tomadas fotos, gravações, áudios e nem seus apontamentos serão usados pelos pesquisadores. Os resultados da pesquisa poderão ser de seu conhecimento, bastando fazer a manifestação de interesse:

( ) quero receber os resultados da pesquisa (email para envio :___________________)
( ) não quero receber os resultados da pesquisa

8. Ressarcimento e indenização.

A pesquisas não tem custo para os participantes e, portanto, não inclui ressarcimento, mas esclarecemos que o direito à indenização é obrigatório, se eventualmente a pesquisa ocasionar algum tipo de dano ao participante, comprovado por meio de provas e meios legais.

ESCLARECIMENTOS SOBRE O COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA:

O Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos (CEP) é constituído por uma equipe de profissionais com formação multidisciplinar que está trabalhando para assegurar o respeito aos seus direitos como participante de pesquisa. Ele tem por objetivo avaliar se a pesquisa foi planejada e se será executada de forma ética. Se você considerar que a pesquisa não está sendo realizada da forma como você foi informado ou que você está sendo prejudicado de alguma forma, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR). **Endereço:**Av. Sete de Setembro, 3165, Bloco N, Térreo, Bairro Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, **Telefone:** (41) 3310-4494, **e-mail:** coep@utfpr.edu.br.

B) CONSENTIMENTO

Eu declaro ter conhecimento das informações contidas neste documento e ter recebido respostas claras às minhas questões a propósito da minha participação direta (ou indireta) na pesquisa e, adicionalmente, declaro ter compreendido o objetivo, a natureza, os riscos, benefícios, ressarcimento e indenização relacionados a este estudo.

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Coordenação do PPGMAT
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio e Londrina

Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo. Estou consciente que posso deixar o projeto a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

Nome Completo: ____
RG:____________Data de Nascimento:___/___/____Telefone:______________
Endereço: ____
CEP: ______________ Cidade:_________________ Estado: _____________
Assinatura: __________________________ Data: ___/___/_____

Eu declaro ter apresentado o estudo, explicado seus objetivos, natureza, riscos e benefícios e ter respondido da melhor forma possível às questões formuladas.

Nome completo: ____
Assinatura pesquisador (a): ________________ Data:___/___/__
(ou seu representante)

Para todas as questões relativas ao estudo ou para se retirar do mesmo, poderão se comunicar com Eliane Maria de Oliveira Araman, via e-mail: elianearaman@utfpr.edu.br ou telefone: (43) 991453870.

Contato do Comitê de Ética em Pesquisa que envolve seres humanos para denúncia, recurso ou reclamações do participante pesquisado:
Comitê de Ética em Pesquisa que envolve seres humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR)
Endereço: Av. Sete de Setembro, 3165, Bloco N, Térreo, Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, **Telefone:** 3310-4494,**E-mail:**coep@utfpr.edu.br

Rubrica do pesquisador Rubrica do participante da pesquisa

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Processos de Raciocínio Matemático mobilizados por alunos do 7.º ano durante a Resolução de Problemas
Título do Produto/Processo Educacional	Resolução de Problemas e Raciocínio Matemático
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Nilva Márcia Dallago Júlio
	Orientador/Orientadora: Eliane Maria de Oliveira Araman
	Outros (se houver):
Data da Defesa	31/03/2023

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *Apenas um item pode ser marcado. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	( ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.	( ) Local ( ) Regional (X) Nacional ( ) Internacional Justificativa (*obrigatória*): Contempla as habilidades da BNCC, que é um documento de abrangência nacional. ____ ____
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho).	( ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto).

*Apenas um item pode ser marcado.	(X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada *Apenas um item pode ser marcado.	( ) Econômica; ( ) Saúde; ( ) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; (X) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.	(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (X) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. (X) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	**Instituição**
Eliane Maria de Oliveira Araman	UTFPR
Marcia Aguiar	UFABC
Andresa Maria Justulin	UTFPR