

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

AUGUSTO CESAR BECKER

**MODELAGEM ESTOCÁSTICA DOS ALGORITMOS ADAPTATIVOS
LMS-SAS E NP-VSS-NLMS NO CONTEXTO DE
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMA**

TOLEDO

2022

AUGUSTO CESAR BECKER

**MODELAGEM ESTOCÁSTICA DOS ALGORITMOS ADAPTATIVOS
LMS-SAS E NP-VSS-NLMS NO CONTEXTO DE
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMA**

**Stochastic modeling of the LMS-SAS and NP-VSS-NLMS adaptive
algorithms in the context of system identification**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Eletrônica
do Curso de Engenharia Eletrônica da
Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Eduardo Vinícius Kuhn

Coorientador: Marcos Vinícius Matsuo

TOLEDO

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

TERMO DE APROVAÇÃO

MODELAGEM ESTOCÁSTICA DOS ALGORITMOS ADAPTATIVOS LMS-SAS E NP-VSS-NLMS NO CONTEXTO DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMA

Augusto Cesar Becker

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado como requisito parcial para a obtenção do título Bacharel em Engenharia Eletrônica. Após deliberação da Banca Examinadora, composta pelos professores abaixo assinados, o trabalho foi considerado APROVADO.

Toledo, 12 de dezembro de 2022.

Prof. Felipe Walter Dafico Pfrimer
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Fábio Luis Perez, Dr.
Universidade de Blumenau (FURB)

José Dolores Vergara Dietrich, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Eduardo Vinícius Kuhn, Dr. (orientador)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Marcos Vinícius Matsuo, Dr. (coorientador)
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Dedico este trabalho aos meus pais, Davi e
Marli, e ao meu irmão Alexandre.

AGRADECIMENTOS

Deixo registrado aqui meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram, de maneira direta ou indireta, para a realização deste trabalho, em especial:

À minha família por todo o incentivo, apoio e compreensão ao longo de toda a minha vida até agora.

Aos professores Eduardo Kuhn e Marcos Matsuo, pelos ensinamentos, amizade, orientação, compreensão, apoio e dedicação, fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Fábio Coutinho pelas contribuições para minha formação acadêmica através dos ensinamentos e valiosas conversas sobre diversos assuntos.

Aos membros da banca examinadora pelas importantes considerações e sugestões, as quais contribuíram para melhorar a qualidade do trabalho.

Aos meus amigos Dyorgyo Valezan, Sarah Meurer, Lucas Freitas dos Santos, Gabriel Pichek e Álef Fraga, pelas valiosas conversas, pelos favores realizados e pela colaboração ao longo dos últimos anos.

Estendo ainda os agradecimentos a todos que contribuíram de alguma forma para a minha formação acadêmica e profissional.

RESUMO

Este trabalho versa sobre a modelagem estocástica dos algoritmos LMS-SAS (*least-mean-square with symmetric/antisymmetric properties*) e NP-VSS-NLMS (*nonparametric variable step size normalized least-mean-square*), operando em um problema de identificação de sistema com sinais de entrada gaussianos (correlacionados e descorrelacionados). Especificamente, expressões de modelo são derivadas descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes do filtro adaptativo, as curvas de aprendizagem, bem como a evolução de algumas matrizes de correlação associadas com o vetor de erro nos coeficientes. Ainda, expressões de modelo descrevendo o comportamento do algoritmo NP-VSS-NLMS em regime permanente são obtidas. Baseado em tais expressões, algumas características interessantes dos algoritmos considerados são discutidas, visando fornecer diretrizes de projeto úteis. Resultados de simulações são mostrados e discutidos confirmando a precisão dos modelos propostos, tanto na fase transitória quanto em regime permanente, para diferentes condições de operação.

Palavras-chave: filtros adaptativos; modelagem estocástica; algoritmo *least-mean-square*; decomposição em produto de Kronecker; algoritmos de passo variável.

ABSTRACT

This work deals with the stochastic modeling of the least-mean-square algorithm with symmetric/antisymmetric properties (LMS-SAS) and the nonparametric variable step size normalized least-mean-square (NP-VSS-NLMS) algorithms, operating in a system identification setup with Gaussian (correlated and uncorrelated) input data. Specifically, model expressions are derived describing the mean weight behavior of the adaptive weight vector, learning curves, and evolution of some correlation-like matrices associated with the weight-error vector. Still, model expressions describing the steady-state behavior of NP-VSS-NLMS algorithm are obtained. Based on such expressions, some interesting characteristics of the considered algorithms are discussed, aiming to provide useful design guidelines. Simulation results are shown and discussed confirming the accuracy of the proposed models, for both transient and steady-state phases, under different operating conditions.

Keywords: adaptive filters; stochastic modeling; least-mean-square algorithm; Kronecker product decomposition; variable step-size algorithm.

LISTA DE SIGLAS

LMS	<i>Least-mean-squares</i>
NLMS	<i>Normalized LMS</i>
NP-VSS-NLMS	<i>Nonparametric variable step-size NLMS</i>
LMS-SAS	<i>LMS with symmetric/antisymmetric properties</i>
MC	Monte Carlo
VSS-NLMS	Variable step-size NLMS
SISO	<i>Single-input/single-output</i>
EQM	Erro quadrático médio
EQME	EQM em excesso
SNR	<i>Signal-to-noise ratio</i>
ITU-T	<i>International Telecommunication Union - Telecommunication Standardization Sector</i>
DQM	Desvio quadrático médio

LISTA DE SÍMBOLOS E NOTAÇÃO MATEMÁTICA

Notação matemática

\mathbf{A}	Matriz
\mathbf{u}	Vetor coluna
a, α	Escalar
\mathbf{A}^T	Transposição da matriz \mathbf{A}
\mathbf{A}^B	Transposição de blocos da matriz \mathbf{A}
\otimes	Produto de Kronecker
$\text{vec}(\cdot)$	Operador de vetorização
$\text{Tr}(\cdot)$	Traço de uma matriz
$E(\cdot)$	Valor esperado
$P(\cdot)$	Probabilidade de ocorrência de um dado evento
$E(\cdot A)$	Valor esperado condicionado a A
$[\mathbf{A}]_{(i,j)}$	Elemento na (i,j) -ésima posição da matriz \mathbf{A}
$\mathbf{A}_{i,j}$	Bloco/submatriz na posição i,j da matriz \mathbf{A}

Símbolos

n	Instante de tempo discreto
$d(n)$	Sinal desejado
$e(n)$	Sinal de erro
$\hat{d}(n)$	Estimativa do sinal desejado
$\hat{\mathbf{h}}(n)$	Vetor de coeficientes do filtro adaptativo (global)
L	Comprimento/ordem da resposta ao impulso (global)
$x(n)$	Sinal de entrada
$\mathbf{x}(n)$	Vetor contendo as amostras mais recentes do sinal de entrada
μ	Passo de adaptação
σ_x^2	Variância do sinal de entrada
$\mu(n)$	Passo de adaptação variável
$\alpha, \bar{\alpha}$	Sub-índices das respostas ao impulso virtuais
\mathbf{h}_α	Resposta ao impulso virtual

$\mathbf{h}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$	Resposta ao impulso global
L_0	Comprimento/ordem das respostas ao impulso virtuais
$v(n)$	Ruído aditivo de medição
$\hat{\mathbf{h}}_\alpha(n)$	Vetor de coeficientes do filtro adaptativo virtual α
$\mathbf{x}_\alpha(n)$	Vetor do sinal de entrada do filtro adaptativo virtual α
μ_α	Passo de adaptação do filtro adaptativo virtual α
\mathbf{I}_{L_0}	Matriz identidade de dimensão $L_0 \times L_0$
\mathbf{R}	Matriz de autocorrelação do sinal de entrada
σ_v^2	Variância do ruído de medição
$\mathbf{v}(n)$	Vetor de erro nos coeficientes do filtro adaptativo (global)
$J(n)$	Erro quadrático médio
J_{\min}	Erro quadrático médio mínimo
$J_{\text{ex}}(n)$	Erro quadrático médio em excesso
$\mathbf{K}(n)$	Matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes
a_1, a_2	Coefficientes do processo autorregressivo
$w(n)$	Ruído branco gaussiano
σ_w^2	Variância do ruído usado como entrada do processo autorregressivo
σ_y^2	Variância do sinal de saída do sistema a ser identificado
χ	Dispersão de autovalores
δ, ζ	Parâmetros de regularização
$\hat{\sigma}_e^2(n)$	Estimativa da variância do sinal de erro
$\hat{\sigma}_v^2$	Estimativa da variância do ruído de medição
κ	Parâmetro de suavização
$\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$	Matrizes do tipo autocorrelação normalizada
λ	Vetor contendo os autovalores de \mathbf{R}
\mathbf{Q}	Matriz de autovetores de \mathbf{R}
$\mathbf{K}'(n)$	Matriz $\mathbf{K}(n)$ pré- e pós-multiplicada por \mathbf{Q}^T e \mathbf{Q}
$\mathbf{k}'(n)$	Vetor contendo os elementos da diagonal de $\mathbf{K}'(n)$
$m(n)$	Desvio quadrático médio
$\mathbf{H}, \mathbf{T}, \mathbf{P}, \mathbf{s}$	Matrizes e vetor relacionados ao cálculo de $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ e \mathbf{R}_3
$\delta_e(n)$	Desvio instantâneo da estimativa $\hat{\sigma}_e^2(n)$ de seu valor esperado
$\tilde{\mu}(n)$	Caso não nulo do passo de adaptação variável do algoritmo NP-VSS-NLMS

ρ, τ	Variáveis utilizadas na análise do algoritmo NP-VSS-LMS em regime permanente
ϵ	Variável utilizada para definir uma perturbação
α	Razão entre a estimativa do ruído de medição e seu valor verdadeiro
$\beta(\epsilon)$	Função com termos advindos do polinômio de Taylor de $\mu(n)$ em regime permanente
$\gamma(\epsilon)$	Função com termos advindos do polinômio de Taylor de $\mu^2(n)$ em regime permanente
$J_\infty(\epsilon)$	Função auxiliar utilizada para aproximar $J(\infty)$
\mathbf{h}_s	Vetor contendo L amostras da função $\text{sinc}(\cdot)$

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama de blocos ilustrando um problema de filtragem adaptativa.	19
Figura 2 – Diagrama de blocos de um problema de identificação de sistema utilizando filtro adaptativo.	26
Figura 3 – Exemplo 1. Resultados obtidos de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e preditos pelo modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Evolução de cinco coeficientes do filtro adaptativo (virtual) 1. (b) Evolução de cinco coeficientes do filtro adaptativo (virtual) 2. (c) Evolução de cinco coeficientes do filtro adaptativo (global). (d) Evolução da curva de aprendizagem (EQME).	33
Figura 4 – Exemplo 2. Resultados obtidos de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e preditos pelo modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Evolução de cinco coeficientes do filtro adaptativo (virtual) 1. (b) Evolução de cinco coeficientes do filtro adaptativo (virtual) 2. (c) Evolução de cinco coeficientes do filtro adaptativo (global). (d) Evolução da curva de aprendizagem (EQME).	34
Figura 5 – Exemplo 3. Resultados obtidos de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e preditos pelo modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Evolução de dois coeficientes do filtro adaptativo (global) para a planta simétrica. (b) Evolução de dois coeficientes do filtro adaptativo (global) para a planta antissimétrica. (c) Evolução da curva de aprendizagem (EQME) para a planta simétrica. (d) Evolução da curva de aprendizagem (EQME) para a planta antissimétrica	35
Figura 6 – Exemplo 1. Resultados obtidos a partir de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e preditos pelo modelo proposto (linhas escuras tracejadas), considerando dados de entrada gaussianos descorrelacionados $\chi = 1$ (esquerda) e correlacionados $\chi = 547,14$ (direita). (a) e (b) Evolução de (quatro) coeficientes do filtro adaptativo. (c) and (d) Evolução do passo de adaptação variável. (e) and (f) Evolução da curva de aprendizagem (EQM).	46

Figura 7 – Exemplo 2. Resultados obtidos a partir de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e preditos pelo modelo proposto (linhas escuras tracejadas), considerando um sistema com resposta ao impulso de $L = 32$ (esquerda) e $L = 128$ (direita) coeficientes. (a) e (b) Parâmetro de suavização $\kappa = 0,9$. (c) e (d) Parâmetro de suavização $\kappa = 0,999$ 47

Figura 8 – Exemplo 3. Resultados obtidos a partir de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e preditos pelo modelo proposto (linhas escuras tracejadas), considerando valores diferentes de κ com $\alpha = 1$ (esquerda) e diferentes valores de α com $\kappa = 0,99$ (direita). (a) e (b) Passo de adaptação variável em regime permanente. (c) e (d) EQME em regime permanente (dB). A condição (104) é ilustrada (como uma área cinza) em (b) e (d). 48

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Objetivos	18
1.2	Organização do documento	18
2	FUNDAMENTOS DE FILTRAGEM ADAPTATIVA	19
2.1	Estruturas de filtragem	19
2.2	Algoritmos adaptativos	20
2.2.1	Algoritmo LMS	21
2.2.2	Algoritmo NLMS	22
2.2.3	Algoritmos adaptativos de passo variável	22
2.3	Modelagem estocástica de algoritmos adaptativos	23
3	MODELAGEM DO ALGORITMO LMS-SAS	25
3.1	Formulação do problema	25
3.2	Modelo proposto	27
3.2.1	Comportamento médio do vetor de coeficientes	27
3.2.2	Curvas de aprendizagem	29
3.2.3	Matrizes de autocorrelação e pseudo-correlação	30
3.3	Resultados de simulação	32
3.3.1	Exemplo 1	32
3.3.2	Exemplo 2	33
3.3.3	Exemplo 3	33
3.3.4	Discussão	34
4	MODELAGEM DO ALGORITMO NP-VSS-NLMS	36
4.1	Formulação do problema	36
4.2	Modelo proposto	37
4.2.1	Comportamento médio do vetor de coeficientes	38
4.2.2	Curvas de aprendizagem	38
4.2.3	Matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes	39
4.2.4	Comportamento do passo de adaptação variável	40
4.2.5	Passo de adaptação variável em regime permanente	42
4.2.6	EQM em regime permanente	43

4.3	Resultados de simulação	44
4.3.1	Exemplo 1	45
4.3.2	Exemplo 2	45
4.3.3	Exemplo 3	47
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
5.1	Conclusões	49
5.2	Trabalhos publicados e/ou em vias de publicação	50
5.3	Sugestões de trabalhos de pesquisa futuros	50
	REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

Ao longo das últimas décadas, a filtragem adaptativa vem sendo utilizada (com sucesso) para a resolução de problemas encontrados em diversas aplicações práticas envolvendo processamento digital de sinais (SAYED, 2008; FARHANG-BOROUJENY, 2013; DINIZ, 2013; HAYKIN, 2014); sobretudo, em aplicações onde não se têm conhecimento *a priori* das características estatísticas dos sinais envolvidos e/ou quando essas características variam no tempo. Dentre tais aplicações, destacam-se identificação de sistema em controle adaptativo (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2008), cancelamento de eco em sistemas de telefonia (SONDHI; BERKLEY, 1980; MESSERSCHMITT, 1984; SONDHI, 2006), cancelamento adaptativo de ruído em aparelhos auditivos (BERGHE; WOUTERS, 1998; SUGIYAMA; MIYAHARA; OOSUGI, 2019), equalização de canal em sistemas de comunicação (QURESHI, 1982; MARTIN; JOHNSON, 2005; WANG; LIN; LIU, 2022) e conformação de feixe em arranjo de microfones/antenas para equipamentos de videoconferência/comunicação sem fio (GODARA, 2004; BALANIS; IOANNIDES, 2007; BENESTY; COHEN; CHEN, 2019). Dependendo da natureza do problema a ser solucionado, essas diferentes aplicações envolvendo filtragem adaptativa podem ser classificadas em quatro categorias, a saber: i) identificação de sistema, ii) modelagem de sistema inverso, iii) predição de sinais e iv) cancelamento de interferência [para detalhes, veja (HAYKIN, 2014, pp. 35)].

Especificamente em problemas de identificação de sistema, busca-se através de um filtro adaptativo obter (em tempo real) uma representação aproximada para a relação de entrada e saída de um sistema desconhecido, a partir do processamento de amostras dos sinais de entrada e saída. Para tal, um filtro adaptativo faz (internamente) uso de um algoritmo capaz de ajustar iterativamente os coeficientes de uma estrutura de filtragem [usualmente, com resposta ao impulso finita devido à versatilidade, inerente estabilidade e facilidade de implementação (FARHANG-BOROUJENY, 2013; HAYKIN, 2014)], visando otimizar algum critério de desempenho pré-estabelecido (SAYED, 2008; DINIZ, 2013); então, à medida que o algoritmo converge, a resposta do filtro adaptativo tende iterativamente para a resposta do sistema desconhecido. Dentre os diversos algoritmos adaptativos existentes, podem ser considerados como precursores os algoritmos LMS (*least-mean-square*), concebido por Widrow e Hoff (WIDROW; HOFF, 1960; WIDROW; MCCOOL; BALL, 1975), e NLMS (*normalized LMS*), concebido de forma independente por Kaczmarz (KACZMARZ, 1937), Nagumo e Noda (NAGUMO; NODA, 1967), e Albert e Gardner (ALBERT; GARDNER JR, 1967). Contudo, apesar da boa robustez numérica e baixa complexidade computacional, algoritmos melhorados vêm sendo continuamente propostos na literatura, visando alcançar (simultaneamente) rápida convergência aliada a bom desempenho em regime permanente (geralmente, ao custo de aumento na complexidade computacional).

Uma abordagem interessante do ponto de vista prático para lidar com a relação de compromisso entre convergência e desempenho em regime permanente se dá através de algoritmos

de passo variável, tal como o algoritmo *non-parametric variable-step-size NLMS* (NP-VSS-NLMS) desenvolvido em (BENESTY *et al.*, 2006). Vale destacar que outros algoritmos desse tipo são apresentados em (KWONG; JOHNSTON, 1992; ABOULNASR; MAYYAS, 1997; MADER; PUDER; SCHMIDT, 2000; SHIN; SAYED; SONG, 2004; ZIPF; TOBIAS; SEARA, 2010; MAYYAS; MOMANI, 2011). Tais algoritmos incorporam estratégias para controlar a velocidade de convergência, mediante o ajuste do valor do passo de adaptação, objetivando proporcionar uma rápida convergência inicial (com um passo de adaptação maior); então, à medida que o algoritmo se aproxima da solução, a velocidade de convergência é gradualmente reduzida a fim de melhorar o desempenho em regime permanente. Outras abordagens interessantes utilizam algoritmos adaptativos capazes de explorar características conhecidas do sistema a ser identificado para melhorar a convergência, o desempenho em regime permanente e/ou reduzir a complexidade computacional. Por exemplo, algoritmos do tipo proporcional (DUTTWEILER, 2000; BENESTY; GAY, 2002; DE SOUZA *et al.*, 2010; WAGNER; DOROSLOVACKI, 2013; PEREZ; DE SOUZA; SEARA, 2014; PEREZ *et al.*, 2017) exploram a esparsidade da resposta ao impulso do sistema. Por sua vez, algoritmos operando com formas bilineares (BENESTY; PALEOLOGU; CIOCHINĂ, May 2017; PALEOLOGU; BENESTY; CIOCHINĂ, Apr. 2018; ELISEI-ILIESCU *et al.*, 2018; DOGARIU *et al.*, 2019) consideram uma representação mais eficiente para caracterizar sistemas espaço-temporais de múltiplas entradas e uma saída. Enquanto o algoritmo *least-mean-square with symmetric/antisymmetric properties* (LMS-SAS) e sua versão normalizada (BENESTY *et al.*, 2022) exploram características intrínsecas de simetria e antissimetria de alguns sistemas para decompor as respostas ao impulso em dois vetores menores usando o produto de Kronecker.

Dada a diversidade de algoritmos discutidos na literatura até então, torna-se importante compreender de forma apropriada o funcionamento dos diferentes algoritmos, as suas vantagens e limitações, assim como o impacto dos parâmetros sobre o seu desempenho. Nesse sentido, um caminho interessante se dá por meio do desenvolvimento de modelos estocásticos de algoritmos adaptativos. Esses modelos consistem de um conjunto de expressões analíticas que possibilitam prever o comportamento do algoritmo em questão sem a necessidade de recorrer a extensivas simulações de Monte Carlo (MC), fornecendo assim uma base teórica para suportar o estudo do algoritmo considerado. Tais modelos também são úteis para estabelecer (através de expressões matemáticas) relações de causa e efeito entre métricas de desempenho e parâmetros do algoritmo, o que pode ajudar o projetista no ajuste desses parâmetros (KUHN; ZIPF; SEARA, 2018; MATSUO; KUHN; SEARA, 2019; MATSUO; KUHN; SEARA, 2021; BAKRI *et al.*, 2022b; BAKRI *et al.*, 2022a). Ainda, modelos estocásticos podem evidenciar comportamentos indesejados de um dado algoritmo, levando ao desenvolvimento de algoritmos melhorados (KOLODZIEJ *et al.*, 2009). Todavia, apesar dos esforços até então despendidos, não existe uma teoria unificada que pode ser aplicada a todos os algoritmos disponíveis na literatura, uma vez que o modelo deve levar em conta as particularidades do algoritmo em questão.

1.1 Objetivos

Neste contexto, o presente trabalho visa contribuir com o desenvolvimento de modelos estocásticos para dois importantes algoritmos adaptativos da literatura, a saber: o algoritmo LMS-SAS (BENESTY *et al.*, 2022) e o algoritmo NP-VSS-NLMS (BENESTY *et al.*, 2006). Especificamente, busca-se aqui

- i) desenvolver modelos estocásticos descrevendo o comportamento dos referidos algoritmos, considerando um problema de identificação de sistema e sinais de entrada gaussianos;
- ii) derivar expressões de modelo caracterizando o comportamento médio do vetor de coeficientes, curvas de aprendizagem e a evolução das matrizes de autocorrelação associadas ao vetor de coeficientes;
- iii) obter, quando possível, expressões de modelo analíticas para prever o comportamento do algoritmo em regime permanente;
- iv) estabelecer, sempre que possível, relações de causa-e-efeito entre os parâmetros dos algoritmos e métricas de desempenho consideradas; e
- v) verificar e discutir a precisão dos modelos propostos para diferentes cenários de operação.

Vale salientar que, apesar da sua importância, a modelagem estocástica dos algoritmos LMS-SAS (BENESTY *et al.*, 2022) e NP-VSS-NLMS (BENESTY *et al.*, 2006) não foi ainda discutida na literatura ao melhor do nosso conhecimento.

1.2 Organização do documento

O presente documento está organizado como segue. A Seção 2 revisita alguns conceitos teóricos fundamentais sobre filtragem adaptativa, abordando brevemente as estruturas de filtragem, os algoritmos adaptativos, e a relevância da modelagem estocástica. A Seção 3 trata da modelagem estocástica do algoritmo LMS-SAS, cobrindo a descrição do algoritmo, a derivação das expressões de modelo, bem como simulações numéricas. A Seção 4 apresenta a modelagem estocástica do algoritmo NP-VSS-NLMS, incluindo a descrição do algoritmo, a derivação das expressões de modelo, assim como simulações numéricas. Por fim, a Seção 5 traz as considerações finais deste trabalho, contemplando as principais conclusões atingidas, a lista de publicações decorrentes, assim como sugestões para futuros trabalhos de pesquisa na área.

2 FUNDAMENTOS DE FILTRAGEM ADAPTATIVA

Filtros adaptativos são sistemas capazes de se autoprojetar ou se adaptar automaticamente ao ambiente no qual estão inseridos, utilizando para isso um algoritmo recursivo que modifica sua resposta durante a operação (FARHANG-BOROJENY, 2013; HAYKIN, 2014). Devido a essa habilidade de operar em ambientes desconhecidos (sem a necessidade de intervenção externa), filtros adaptativos têm se tornado elemento central nas mais variadas aplicações, tais como em cancelamento de eco (acústico ou de rede), equalização de canal em sistemas de comunicação, cancelamento adaptativo de ruído, controle ativo de ruído, conformação de feixe em arranjo de antenas, como também codificação preditiva de sinais (SAYED, 2008; DINIZ, 2013). Todavia, independente da aplicação considerada, um problema de filtragem envolvendo um filtro adaptativo pode ser representado como na Figura 1, sendo esse filtro caracterizado por uma estrutura de filtragem e um algoritmo adaptativo. Em tal problema de filtragem, deseja-se [a partir do sinal de entrada $x(n)$] obter uma estimativa do sinal desejado $d(n)$ na saída do filtro adaptativo, a qual é denotada por $\hat{d}(n)$. A diferença entre o sinal desejado $d(n)$ e sua estimativa $\hat{d}(n)$ caracteriza, então, o sinal de erro $e(n)$, isto é,

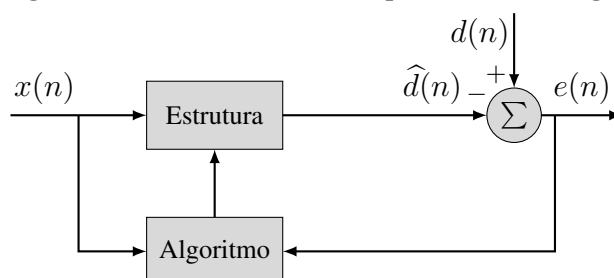
$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n). \quad (1)$$

Dessa forma, baseado no sinal de entrada $x(n)$ e no sinal de erro $e(n)$, o algoritmo adaptativo ajusta recursivamente os coeficientes da estrutura de filtragem, visando satisfazer um dado critério de desempenho pré-estabelecido (como discutido a seguir).

2.1 Estruturas de filtragem

Visto que os coeficientes da estrutura de filtragem são ajustados recursivamente através de um algoritmo adaptativo, pode-se inferir que um filtro adaptativo não seja, a rigor, um sistema linear, uma vez que não satisfaz o princípio da superposição (DINIZ, 2013; HAYKIN, 2014). Apesar disso, os filtros adaptativos são comumente classificados como lineares ou não lineares em função da estrutura de filtragem utilizada, isto é, desconsiderando a sua característica

Figura 1 – Diagrama de blocos ilustrando um problema de filtragem adaptativa.



Fonte: Adaptado de (HAYKIN, 2014).

adaptativa (HAYKIN, 2014). Com respeito aos filtros adaptativos lineares, as diversas estruturas de filtragem utilizadas podem ser classificadas em dois grandes grupos, a saber: estruturas com resposta ao impulso infinita (IIR) e estruturas com resposta ao impulso finita (FIR) (SAYED, 2008; FARHANG-BOROUJENY, 2013; DINIZ, 2013; HAYKIN, 2014). Em contraste com as estruturas do tipo IIR, as estruturas do tipo FIR têm emergido como soluções atrativas do ponto de vista prático devido à sua inerente estabilidade (HAYKIN, 2014). Dentre as estruturas do tipo FIR, o filtro transversal (comumente denominado simplesmente por filtro FIR) vem sendo amplamente utilizado em aplicações práticas de filtros adaptativos em função da simplicidade de implementação (FARHANG-BOROUJENY, 2013).

Em uma estrutura transversal de filtragem, o sinal de saída do filtro adaptativo $\hat{d}(n)$ é gerado como uma combinação linear de amostras atrasadas do sinal de entrada $x(n)$ com os coeficientes $h_i(n)$ do filtro adaptativo. Dessa forma, tem-se que a relação de entrada e saída para uma estrutura transversal pode ser escrita como (SAYED, 2008; FARHANG-BOROUJENY, 2013; DINIZ, 2013; HAYKIN, 2014)

$$\hat{d}(n) = \hat{\mathbf{h}}^T(n)\mathbf{x}(n) \quad (2)$$

onde $\hat{\mathbf{h}}(n) = [\hat{h}_1(n) \ \hat{h}_2(n) \ \cdots \ \hat{h}_L(n)]^T$ denota o vetor de coeficientes do filtro adaptativo, $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \cdots \ x(n-L+1)]^T$ representa o vetor contendo as amostras mais recentes do sinal de entrada e L define a ordem do filtro adaptativo. Conseqüentemente, a partir de (2), o sinal de erro [dado em (1)] pode ser reescrito como

$$e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{h}}^T(n)\mathbf{x}(n). \quad (3)$$

Baseado então em $x(n)$ e $e(n)$, torna-se agora possível caracterizar como se dá o ajuste do vetor de coeficientes $\hat{\mathbf{h}}(n)$ do filtro adaptativo.

2.2 Algoritmos adaptativos

O algoritmo adaptativo é responsável por ajustar recursivamente os coeficientes da estrutura de filtragem de acordo com alguma regra específica. Esses algoritmos são, geralmente, determinados através da minimização de alguma função custo envolvendo (3); para detalhes, veja (SAYED, 2008). Dessa forma, para uma dada condição inicial arbitrária, os algoritmos adaptativos buscam fazer com que os coeficientes do filtro adaptativo convirjam iterativamente para a solução que minimiza a função custo considerada, satisfazendo assim um dado critério de desempenho pré-estabelecido (SAYED, 2008; FARHANG-BOROUJENY, 2013; DINIZ, 2013; HAYKIN, 2014).

2.2.1 Algoritmo LMS

Originalmente, o algoritmo LMS foi concebido a partir da minimização do erro quadrático instantâneo [isto é, $e^2(n)$], motivado pela escassez de informações *a priori* das características estatísticas dos sinais envolvidos. A minimização de tal função custo deu então origem à bem conhecida equação de adaptação do algoritmo LMS (WIDROW; HOFF, 1960)

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1) = \hat{\mathbf{h}}(n) + \mu e(n)\mathbf{x}(n) \quad (4)$$

na qual μ denota o passo de adaptação responsável por controlar a velocidade de convergência do algoritmo. Logo, para uma dada condição inicial $\hat{\mathbf{h}}(0)$, conhecidos os valores instantâneos dos sinais de entrada $x(n)$ e de erro $e(n)$, a expressão (4) permite ajustar iterativamente os coeficientes da estrutura de filtragem de forma a minimizar o erro quadrático. Vale destacar que, além de controlar a velocidade de convergência, o passo de adaptação μ afeta a estabilidade do algoritmo, devendo assim ser escolhido cuidadosamente de forma a satisfazer à seguinte condição (FARHANG-BOROUJENY, 2013):

$$0 < \mu < \frac{2}{L\sigma_x^2} \quad (5)$$

onde σ_x^2 caracteriza a variância do sinal de entrada $x(n)$.

Contudo, apesar da robustez numérica e baixa complexidade computacional (características atrativas) (DINIZ, 2013), o algoritmo LMS também possui algumas desvantagens a serem consideradas na prática. Por exemplo, a velocidade de convergência desse algoritmo é significativamente comprometida frente a sinais de entrada correlacionados (SAYED, 2008; FARHANG-BOROUJENY, 2013; DINIZ, 2013; HAYKIN, 2014). Outra desvantagem é que variações de potência do sinal de entrada impactam a velocidade de convergência e/ou podem tornar o algoritmo instável [sobretudo para μ próximo ao limite superior de (5)], visto que a atualização de $\hat{\mathbf{h}}(n)$ se dá por meio do produto entre $\mathbf{x}(n)$ e $e(n)$ (FARHANG-BOROUJENY, 2013; HAYKIN, 2014). Ainda, destaca-se que o ajuste do passo de adaptação afeta o comportamento do algoritmo em regime permanente (FARHANG-BOROUJENY, 2013; HAYKIN, 2014), isto é, valores maiores de μ implicam convergência mais rápida ao custo de um erro quadrático médio em excesso (EQME) em regime permanente maior (usualmente indesejável em aplicações práticas). Diante disso, outros algoritmos adaptativos vêm sendo apresentados na literatura.

2.2.2 Algoritmo NLMS

A terminologia atual de algoritmo LMS normalizado (NLMS) foi cunhada por Bitmead e Anderson em 1980 (BITMEAD; ANDERSON, 1980), em função da única distinção entre o algoritmo LMS e NLMS residir na normalização do passo de adaptação pela potência do sinal de entrada. Tal procedimento reduz a sensibilidade do algoritmo a variações na potência do sinal de entrada (SAYED, 2008; DINIZ, 2013) assim como frente a sinais de entrada altamente correlacionados (RUPP; SCHWARZ, Apr. 2015; KUHN; KOLODZIEJ; SEARA, 2014), tornando-o atrativo para aplicações de cancelamento adaptativo de ruído e cancelamento de eco (SAYED, 2008; HAYKIN, 2014). Em particular, a equação de adaptação do algoritmo NLMS é dada por (SAYED, 2008; FARHANG-BOROUJENY, 2013)

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1) = \hat{\mathbf{h}}(n) + \mu \frac{\mathbf{x}(n)e(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \quad (6)$$

sendo o sinal de erro calculado a partir de (3) e o passo de adaptação escolhido dentro do intervalo de estabilidade $0 < \mu < 2$. Vale mencionar que, em implementações práticas, é usual a adição de uma pequena constante positiva (denominada parâmetro de regularização) ao denominador de (6), visando evitar divisão por zero como ocorre quando a potência do sinal de entrada é muito pequena (por exemplo, em períodos de silêncio em um sinal de fala) (SAYED, 2008; FARHANG-BOROUJENY, 2013; DINIZ, 2013; HAYKIN, 2014). Portanto, para uma dada condição inicial $\hat{\mathbf{h}}(0)$, torna-se possível a partir de (6) adaptar iterativamente os coeficientes da estrutura de filtragem de acordo com o algoritmo NLMS.

2.2.3 Algoritmos adaptativos de passo variável

Apesar do algoritmo NLMS superar algumas das limitações observadas no LMS, o uso de um passo de adaptação fixo impede a obtenção simultânea de uma rápida convergência aliada a um EQME em regime permanente reduzido (como desejável). Assim, visando tratar especificamente essa relação de compromisso, os algoritmos adaptativos de passo variável têm surgido como uma importante solução do ponto de vista prático. Nesses algoritmos, o passo de adaptação é ajustado dinamicamente durante toda a sua operação. Basicamente, considera-se um valor de passo elevado (próximo ao limite superior de estabilidade) no início do processo de adaptação, propiciando assim uma convergência inicial rápida. Então, à medida que o algoritmo se aproxima do regime permanente, o valor do passo é gradualmente decrescido (de acordo com alguma regra pré-estabelecida), resultando em um EQME em regime permanente menor (FARHANG-BOROUJENY, 2013). Levando em consideração essa característica variante no tempo do passo de adaptação, a equação de adaptação do algoritmo LMS [dada em (4)] pode

ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1) = \hat{\mathbf{h}}(n) + \mu(n)e(n)\mathbf{x}(n) \quad (7)$$

e, do algoritmo NLMS [dada em (6)], como

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1) = \hat{\mathbf{h}}(n) + \mu(n) \frac{\mathbf{x}(n)e(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \quad (8)$$

onde $\mu(n)$ denota agora o valor do passo de adaptação em um dado instante n . Vale salientar que diferentes estratégias vêm sendo utilizadas na literatura para determinar regras de ajuste do passo de adaptação $\mu(n)$, dando assim origem a um grande número de algoritmos LMS de passo variável (VSS-LMS), tal como os algoritmos VSS-NLMS de Shin (SHIN; SAYED; SONG, 2004), NP-VSS-NLMS de Benesty (BENESTY *et al.*, 2006) e VSS-NLMS de Zipf (ZIPF; TOBIAS; SEARA, 2010).

2.3 Modelagem estocástica de algoritmos adaptativos

Dada a variedade de algoritmos disponíveis na literatura, torna-se imperativo compreender de maneira abrangente o funcionamento, as características (vantagens e limitações) e o impacto dos parâmetros sobre o seu desempenho. Nesse sentido, um caminho para se entender melhor o funcionamento de um algoritmo em particular se dá por meio de seu modelo estocástico¹, o que vem motivando diversos esforços de pesquisas ao longo das últimas décadas. Na modelagem estocástica de algoritmos adaptativos, busca-se determinar expressões analíticas, isto é, um modelo matemático que permita prever (com certa precisão) o comportamento de um dado algoritmo frente a diferentes condições de operação, fornecendo assim uma base teórica para o estudo do algoritmo considerado. Tais modelos visam ainda auxiliar o projetista no ajuste de parâmetros do algoritmo bem como em análises de desempenho, evitando assim a necessidade de extensivas simulações numéricas. Também, através de um modelo analítico, relações de causa e efeito entre os parâmetros do algoritmo e métricas de desempenho podem ser estabelecidas, resultando assim em diretrizes de projeto consistentes (KUHN; ZIPF; SEARA, 2018; MATSUO; KUHN; SEARA, 2019; MATSUO; KUHN; SEARA, 2021; BAKRI *et al.*, 2022b; BAKRI *et al.*, 2022a). Ainda, modelos analíticos podem revelar comportamentos indesejados (anômalos) do algoritmo, permitindo modificá-lo seja para corrigir tal comportamento ou customizá-lo para condições de operação específicas (KOLODZIEJ *et al.*, 2009). Todavia, apesar dos esforços até então despendidos, a modelagem estocástica de algoritmos adaptativos apresenta diversos desafios, os quais são, na maioria das vezes, contornados durante o desenvolvimento do modelo utilizando certo número de hipóteses simplificativas (por exemplo, baseadas

¹ Um processo estocástico é um fenômeno cuja evolução temporal pode ser descrita apenas de forma estatística, ou seja, são processos aleatórios cuja evolução no tempo não pode ser descrita de forma determinística. Por sua vez, um modelo estocástico busca descrever as leis que governam um determinado processo (HAYKIN, 2014).

no passo de adaptação, comprimento do filtro ou mesmo nas características estatísticas do sinal de entrada). Contudo, o uso de muitas hipóteses simplificativas dá origem a modelos restritos a condições de operação específicas. Por outro lado, a obtenção de modelos precisos para uma ampla faixa de condições de operação (mediante o uso de um número reduzido de hipóteses simplificativas) implica maiores desafios matemáticos. Portanto, existe uma importante relação de compromisso que deve ser considerada entre a complexidade matemática enfrentada no desenvolvimento, a validade das hipóteses simplificativas e a precisão do modelo obtido.

3 MODELAGEM DO ALGORITMO LMS-SAS

Nesta seção, o algoritmo LMS-SAS é revisitado e o modelo estocástico proposto descrevendo o comportamento do algoritmo é derivado. Particularmente, na Seção 3.1, expressões matemáticas são descritas caracterizando o algoritmo LMS-SAS. Na Seção 3.2, são obtidas expressões que permitem prever o comportamento médio dos coeficientes dos filtros adaptativos (global e virtuais), curvas de aprendizagem, e a evolução das matrizes de autocorrelação e pseudo-correlação relacionadas aos vetores de coeficientes. Por fim, a Seção 3.3 apresenta resultados de simulação verificando a precisão do modelo proposto.

3.1 Formulação do problema

Para um problema de identificação de sistema (conforme ilustrado na Figura 2), considere um sistema linear *single-input/single-output* (SISO) cujo sinal de saída (definido também como sinal desejado) no instante de tempo n pode ser expresso como

$$d(n) = \mathbf{h}^T(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\mathbf{x}(n) + v(n) \quad (9)$$

onde $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-L_0^2+1)]^T$ contém as L_0^2 amostras mais recentes do sinal de entrada $x(n)$, $v(n)$ é o ruído de medição e

$$\mathbf{h}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_2 \pm \mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}_1 \quad (10)$$

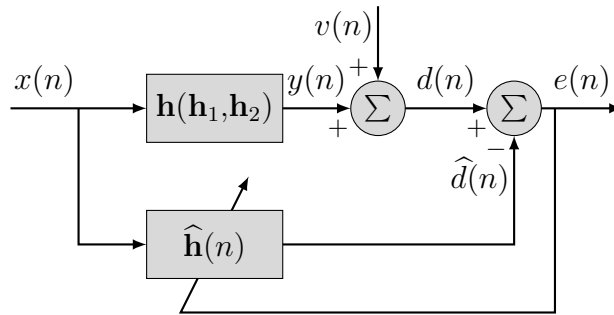
denota a resposta ao impulso simétrica (+) ou antissimétrica (−) de um sistema (desconhecido) de dimensão L_0^2 , a qual depende de duas respostas ao impulso (virtuais) \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 de comprimento L_0 . Note que a característica simétrica ou antissimétrica considerada aqui não está relacionada com as amostras da resposta ao impulso, como ocorre em filtros FIR de fase linear; para detalhes, veja (BENESTY *et al.*, 2022). Ainda, o sinal de erro pode ser escrito como

$$e(n) = d(n) - \widehat{d}(n) \quad (11)$$

com $\widehat{d}(n)$ denotando o sinal de saída do filtro adaptativo $\widehat{\mathbf{h}}(n)$, cujos coeficientes são ajustados com base em $x(n)$ e $e(n)$.

Ao invés de estimar $\mathbf{h}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$ diretamente, é possível utilizar o algoritmo LMS-SAS (BENESTY *et al.*, 2022) para identificar \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 [em (10)] através de dois filtros adaptativos (virtuais) com vetores de coeficientes $\widehat{\mathbf{h}}_1(n)$ e $\widehat{\mathbf{h}}_2(n)$, ambos de comprimento L_0 , de tal maneira

Figura 2 – Diagrama de blocos de um problema de identificação de sistema utilizando filtro adaptativo.



Fonte: Adaptado de (HAYKIN, 2014).

que o filtro adaptativo (global) pode ser computado como

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}_1(n) \otimes \hat{\mathbf{h}}_2(n) \pm \hat{\mathbf{h}}_2(n) \otimes \hat{\mathbf{h}}_1(n). \quad (12)$$

O ajuste de $\hat{\mathbf{h}}_1(n)$ e $\hat{\mathbf{h}}_2(n)$ em (12) é conduzido utilizando as seguintes equações de atualização:

$$\hat{\mathbf{h}}_1(n) = \hat{\mathbf{h}}_1(n-1) + \mu_1 \mathbf{x}_2(n) e(n) \quad (13)$$

e

$$\hat{\mathbf{h}}_2(n) = \hat{\mathbf{h}}_2(n-1) + \mu_2 \mathbf{x}_1(n) e(n) \quad (14)$$

onde μ_1 e μ_2 representam os passos de adaptação,

$$\mathbf{x}_1(n) = \hat{\mathbf{H}}_1^T(n-1) \mathbf{x}(n) \quad (15)$$

e

$$\mathbf{x}_2(n) = \hat{\mathbf{H}}_2^T(n-1) \mathbf{x}(n) \quad (16)$$

com

$$\hat{\mathbf{H}}_1(n) = \hat{\mathbf{h}}_1(n) \otimes \mathbf{I}_{L_0} \pm \mathbf{I}_{L_0} \otimes \hat{\mathbf{h}}_1(n) \quad (17)$$

e

$$\hat{\mathbf{H}}_2(n) = \mathbf{I}_{L_0} \otimes \hat{\mathbf{h}}_2(n) \pm \hat{\mathbf{h}}_2(n) \otimes \mathbf{I}_{L_0} \quad (18)$$

caracterizando matrizes de tamanho $L_0^2 \times L_0$ em que \mathbf{I}_{L_0} denota a matriz identidade de dimensão $L_0 \times L_0$. Note que o sinal de erro (11) pode assim ser convenientemente expresso como

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - \hat{\mathbf{h}}_1^T(n-1) \mathbf{x}_2(n) \\ &= d(n) - \hat{\mathbf{h}}_2^T(n-1) \mathbf{x}_1(n). \end{aligned} \quad (19)$$

3.2 Modelo proposto

Visando derivar um modelo estocástico para o algoritmo LMS-SAS (BENESTY *et al.*, 2022), as seguintes hipóteses e aproximações são utilizadas (SAYED, 2008; HAYKIN, 2014; PALEOLOGU; BENESTY; CIOCHINĂ, Apr. 2018; BAKRI *et al.*, 2022b):

- H1) O sinal de entrada $x(n)$ é obtido de um processo gaussiano de média zero (correlacionado ou descorrelacionado) com variância σ_x^2 e matriz de autocorrelação $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]$.
- H2) O ruído de medição $v(n)$ é obtido de um processo gaussiano branco com variância σ_v^2 , o qual é descorrelacionado de qualquer outro sinal no sistema.
- H3) Os vetores de coeficientes $\hat{\mathbf{h}}_1(n)$, $\hat{\mathbf{h}}_2(n)$ e $\hat{\mathbf{h}}(n)$ são assumidos estatisticamente independentes entre si e de qualquer outra variável no sistema.

Note que essas hipóteses são comumente utilizadas na modelagem estocástica de algoritmos adaptativos para tornar o desenvolvimento matematicamente tratável [conforme discutido em (SAYED, 2008) e (HAYKIN, 2014)] e levam a resultados satisfatórios (como mostrado adiante na Seção 3.3).

3.2.1 Comportamento médio do vetor de coeficientes

Levando em conta a similaridade entre (13) e (14), é conveniente substituir os sub-índices 1 e 2 por α e $\bar{\alpha}$ ou vice-versa, de tal forma que ambas as equações de atualização dos vetores de coeficientes dos filtros adaptativos (virtuais) podem ser expressas através de

$$\hat{\mathbf{h}}_\alpha(n) = \hat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1) + \mu_\alpha \mathbf{x}_{\bar{\alpha}}(n) e(n). \quad (20)$$

Então, substituindo (19) em (20), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as Hipóteses H2) e H3), o comportamento médio do vetor de coeficientes dos filtros adaptativos virtuais pode ser determinado como

$$E[\hat{\mathbf{h}}_\alpha(n)] = [\mathbf{I}_{L_0} - \mu_\alpha \mathbf{S}_{\bar{\alpha}}(n)] E[\hat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1)] + \mu_\alpha \mathbf{S}'_{\bar{\alpha}}(n) \mathbf{h} \quad (21)$$

onde

$$\mathbf{S}_\alpha(n) = E[\mathbf{x}_\alpha(n)\mathbf{x}_\alpha^T(n)] \quad (22)$$

e

$$\mathbf{S}'_\alpha(n) = E[\mathbf{x}_\alpha(n)\mathbf{x}^T(n)]. \quad (23)$$

Em seguida, substituindo seja (15) ou (16) em (22), utilizando as propriedades do produto de Kronecker (BERNSTEIN, 2009), e considerando a Hipótese H1), obtém-se

$$\mathbf{S}_\alpha(n) = \mathbf{S}_\alpha^{(1)}(n) \pm \mathbf{S}_\alpha^{(2)}(n) \pm \mathbf{S}_\alpha^{(2)\top}(n) + \mathbf{S}_\alpha^{(3)}(n) \quad (24)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\alpha^{(1)}(n) &= \mathbb{E}\{[\mathbf{I}_{L_0} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1)]^\top \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^\top(n) [\mathbf{I}_{L_0} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1)]\} \\ &= \mathbb{E}\{[\mathbf{I}_{L_0} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1)]^\top \mathbf{R} [\mathbf{I}_{L_0} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1)]\} \\ &= \begin{bmatrix} \text{Tr}[\mathbf{R}_{1,1} \mathbf{G}_\alpha(n-1)] & \cdots & \text{Tr}[\mathbf{R}_{1,L_0} \mathbf{G}_\alpha(n-1)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Tr}[\mathbf{R}_{L_0,1} \mathbf{G}_\alpha(n-1)] & \cdots & \text{Tr}[\mathbf{R}_{L_0,L_0} \mathbf{G}_\alpha(n-1)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\alpha^{(2)}(n) &= \mathbb{E}\{[\mathbf{I}_{L_0} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1)]^\top \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^\top(n) [\widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1) \otimes \mathbf{I}_{L_0}]\} \\ &= \mathbb{E}\{[\mathbf{I}_{L_0} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1)]^\top \mathbf{R} [\widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1) \otimes \mathbf{I}_{L_0}]\} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{L_0} \mathbf{g}_{\alpha,i}^\top(n-1) \mathbf{R}_{1,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{L_0} \mathbf{g}_{\alpha,i}^\top(n-1) \mathbf{R}_{L_0,i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\alpha^{(3)}(n) &= \mathbb{E}\{[\widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1) \otimes \mathbf{I}_{L_0}]^\top \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^\top(n) [\widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1) \otimes \mathbf{I}_{L_0}]\} \\ &= \mathbb{E}\{[\widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1) \otimes \mathbf{I}_{L_0}]^\top \mathbf{R} [\widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1) \otimes \mathbf{I}_{L_0}]\} \\ &= \sum_{i=1}^{L_0} \sum_{j=1}^{L_0} [\mathbf{G}_\alpha(n-1)]_{(i,j)} \mathbf{R}_{i,j} \end{aligned} \quad (27)$$

em que

$$\mathbf{G}_\alpha(n) = \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n) \widehat{\mathbf{h}}_\alpha^\top(n)] \quad (28)$$

é a matriz de autocorrelação de $\widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n)$, $\mathbf{g}_{\alpha,i}(n)$ representa a i -ésima coluna de $\mathbf{G}_\alpha(n)$, $[\mathbf{G}_\alpha(n)]_{(i,j)}$ caracteriza o (i,j) -ésimo elemento de $\mathbf{G}_\alpha(n)$, enquanto $\mathbf{R}_{i,j}$ denota o i,j -ésimo bloco (ou submatriz) de dimensão $L_0 \times L_0$ de \mathbf{R} , i.e.,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,1} & \cdots & \mathbf{R}_{1,L_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{L_0,1} & \cdots & \mathbf{R}_{L_0,L_0} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Similarmente, a partir de (15) e (16), (23) pode ser simplificada como

$$\mathbf{S}'_{\alpha}(n) = E[\widehat{\mathbf{H}}_{\alpha}^T(n-1)]\mathbf{R} \quad (30)$$

sendo $E[\widehat{\mathbf{H}}_{\alpha}^T(n-1)]$ determinado tomando o valor esperado de ambos os lados seja de (17) ou (18).

Finalmente, o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo global pode ser determinado tomando o valor esperado em ambos os lados de (12) e considerando a Hipótese H3); dessa forma,

$$E[\widehat{\mathbf{h}}(n)] = E[\widehat{\mathbf{h}}_1(n)] \otimes E[\widehat{\mathbf{h}}_2(n)] \pm E[\widehat{\mathbf{h}}_2(n)] \otimes E[\widehat{\mathbf{h}}_1(n)]. \quad (31)$$

Portanto, o comportamento médio dos vetores de coeficientes $\widehat{\mathbf{h}}_1(n)$, $\widehat{\mathbf{h}}_2(n)$ e $\widehat{\mathbf{h}}(n)$ pode ser predito [a partir de (21) e (31)] se a evolução de (28) for conhecida.

3.2.2 Curvas de aprendizagem

A fim de determinar expressões caracterizando as curvas de aprendizagem, (19) é primeiro reescrita utilizando o vetor de erro nos coeficientes

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{h} - \widehat{\mathbf{h}}(n) \quad (32)$$

como

$$e(n) = \mathbf{v}^T(n-1)\mathbf{x}(n) + v(n). \quad (33)$$

Então, calculando $e^2(n)$ a partir de (33), tomando o valor esperado da expressão resultante e utilizando a Hipótese H2), obtém-se a seguinte expressão descrevendo a evolução do erro quadrático médio (EQM):

$$J(n) = J_{\min} + J_{\text{ex}}(n) \quad (34)$$

onde

$$J_{\min} = \sigma_v^2 \quad (35)$$

representa o EQM mínimo atingível em regime permanente, enquanto

$$J_{\text{ex}}(n) = E[\mathbf{v}^T(n-1)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{v}(n-1)] \quad (36)$$

representa o EQM em excesso (EQME) introduzido pelo algoritmo. Em seguida, considerando as propriedades do operador traço (BERNSTEIN, 2009) e utilizando a Hipótese H3), (36) pode

ser reescrita como

$$J_{\text{ex}}(n) = \text{Tr}[\mathbf{R}\mathbf{K}(n-1)] \quad (37)$$

sendo

$$\mathbf{K}(n) = \text{E}[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)] \quad (38)$$

a matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes. Portanto, se a evolução de (38) for conhecida, o comportamento das curvas de aprendizagem do algoritmo pode ser predito por (34), (35) e (37).

3.2.3 Matrizes de autocorrelação e pseudo-correlação

Busca-se agora derivar expressões recursivas descrevendo a evolução das matrizes $\mathbf{G}_\alpha(n)$ [dada por (28)] e $\mathbf{K}(n)$ [dada por (38)]. Para isso, substituindo (20) em (28) e utilizando as Hipóteses H2) e H3), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\alpha(n) &= \mathbf{G}_\alpha(n-1) - \mu_\alpha \mathbf{S}_{\bar{\alpha}}(n) \mathbf{G}_\alpha(n-1) \\ &\quad - \mu_\alpha \mathbf{G}_\alpha(n-1) \mathbf{S}_{\bar{\alpha}}(n) + \mu_\alpha \mathbf{G}'_\alpha(n-1) \mathbf{S}'_{\bar{\alpha}}{}^T(n) \\ &\quad + \mu_\alpha \mathbf{S}'_{\bar{\alpha}}(n) \mathbf{G}'_\alpha{}^T(n-1) + \mu_\alpha^2 \mathbf{F}_{\bar{\alpha}}(n) + \mu_\alpha^2 \sigma_v^2 \mathbf{S}_{\bar{\alpha}}(n) \end{aligned} \quad (39)$$

onde

$$\mathbf{G}'_\alpha(n) = \text{E}[\hat{\mathbf{h}}_\alpha(n)] \mathbf{h}^T \quad (40)$$

sendo $\text{E}[\hat{\mathbf{h}}_\alpha(n)]$ computado a partir de (21),

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha(n) &= \text{E}[\hat{\mathbf{H}}_\alpha^T(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{v}(n-1) \mathbf{v}^T(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \hat{\mathbf{H}}_\alpha(n-1)] \\ &\cong \text{E}\{\hat{\mathbf{H}}_\alpha^T(n-1) \text{E}[\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{K}(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)] \hat{\mathbf{H}}_\alpha(n-1)\} \\ &\cong \text{E}[\hat{\mathbf{H}}_\alpha^T(n-1) \mathbf{E}(n) \hat{\mathbf{H}}_\alpha(n-1)] \end{aligned} \quad (41)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(n) &= \text{E}[\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{K}(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)] \\ &= 2\mathbf{R}\mathbf{K}(n-1)\mathbf{R} + \mathbf{R}\text{Tr}[\mathbf{R}\mathbf{K}(n-1)] \end{aligned} \quad (42)$$

devido ao teorema de fatoração de momentos de quarta ordem de variáveis aleatórias gaussianas (SAYED, 2008; DINIZ, 2013; HAYKIN, 2014).

Similarmente à (24), (41) pode ser expressa [utilizando (42)] como

$$\mathbf{F}_\alpha(n) = \mathbf{F}_\alpha^{(1)}(n) \pm \mathbf{F}_\alpha^{(2)}(n) \pm \mathbf{F}_\alpha^{(2)T}(n) + \mathbf{F}_\alpha^{(3)}(n) \quad (43)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha^{(1)}(n) &= \mathbb{E}\{[\mathbf{I}_{L_0} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1)]^T \mathbf{E}(n) [\mathbf{I}_{L_0} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1)]\} \\ &= \begin{bmatrix} \text{Tr}[\mathbf{E}_{1,1}(n) \mathbf{G}_\alpha(n-1)] & \cdots & \text{Tr}[\mathbf{E}_{1,L_0}(n) \mathbf{G}_\alpha(n-1)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Tr}[\mathbf{E}_{L_0,1}(n) \mathbf{G}_\alpha(n-1)] & \cdots & \text{Tr}[\mathbf{E}_{L_0,L_0}(n) \mathbf{G}_\alpha(n-1)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha^{(2)}(n) &= \mathbb{E}\{[\mathbf{I}_{L_0} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1)]^T \mathbf{E}(n) [\widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1) \otimes \mathbf{I}_{L_0}]\} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{L_0} \mathbf{g}_{\alpha,i}^T(n-1) \mathbf{E}_{1,i}(n) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{L_0} \mathbf{g}_{\alpha,i}^T(n-1) \mathbf{E}_{L_0,i}(n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha^{(3)}(n) &= \mathbb{E}\{[\widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1) \otimes \mathbf{I}_{L_0}]^T \mathbf{E}(n) [\widehat{\mathbf{h}}_\alpha(n-1) \otimes \mathbf{I}_{L_0}]\} \\ &= \sum_{i=1}^{L_0} \sum_{j=1}^{L_0} [\mathbf{G}_\alpha(n-1)]_{(i,j)} \mathbf{E}_{i,j}(n) \end{aligned} \quad (46)$$

em que $\mathbf{g}_{\alpha,i}(n)$ representa a i -ésima coluna de $\mathbf{G}_\alpha(n)$, $[\mathbf{G}_\alpha(n)]_{(i,j)}$ caracteriza o (i,j) -ésimo elemento de $\mathbf{G}_\alpha(n)$, enquanto $\mathbf{E}_{i,j}(n)$ denota o i,j -ésimo bloco (ou submatriz) de dimensão $L_0 \times L_0$ de (42).

Por sua vez, calculando $\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)$ a partir de (32) e tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, é possível reescrever (38) como

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{h}\mathbf{h}^T - \mathbf{h}\mathbb{E}[\widehat{\mathbf{h}}^T(n)] - \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{h}}(n)]\mathbf{h}^T + \mathbf{G}(n) \quad (47)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(n) &= \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{h}}(n)\widehat{\mathbf{h}}^T(n)] \\ &= \mathbf{G}_1(n) \otimes \mathbf{G}_2(n) \pm \{\text{vec}[\mathbf{G}_2(n)]\text{vec}[\mathbf{G}_1(n)]^T\}^{\mathcal{B}} \\ &\quad \pm \{\text{vec}[\mathbf{G}_1(n)]\text{vec}[\mathbf{G}_2(n)]^T\}^{\mathcal{B}} + \mathbf{G}_2(n) \otimes \mathbf{G}_1(n) \end{aligned} \quad (48)$$

denota a matriz de autocorrelação de $\widehat{\mathbf{h}}(n)$ e $(\cdot)^{\mathcal{B}}$ representa o operador de transposição de blocos (ou submatrizes) (MACKAY, 2006) de dimensão $L_0 \times L_0$.

Portanto, como a evolução das matrizes $\mathbf{G}_\alpha(n)$, $\mathbf{K}(n)$ e $\mathbf{G}(n)$ foi apropriadamente caracterizada, o comportamento do algoritmo LMS-SAS pode agora ser predito.

3.3 Resultados de simulação

Para verificar a precisão do modelo proposto, resultados obtidos de simulações de MC são comparados com predições de modelo. Para tal, três exemplos são apresentados contemplando sinais de entrada gaussianos correlacionados e descorrelacionados, diversos valores de *signal-to-noise ratio* (SNR), diferentes inicializações dos vetores de coeficientes, assim como respostas ao impulso distintas. Especificamente, o sinal de entrada $x(n)$ é obtido através de um processo autorregressivo (HAYKIN, 2014), dado por

$$x(n) = -a_1x(n-1) - a_2x(n-2) + w(n) \quad (49)$$

em que a_1 e a_2 denotam os coeficientes do processo autorregressivo, enquanto $w(n)$ é um ruído branco gaussiano cuja variância é determinada através de

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 \left(\frac{1-a_2}{1+a_2} \right) [(1+a_2)^2 - a_1^2] \quad (50)$$

de tal forma que $\sigma_x^2 = 1$. A SNR é definida (em dB) como (BAKRI *et al.*, 2022b; BENESTY *et al.*, 2022)

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_v^2} \right) \quad (51)$$

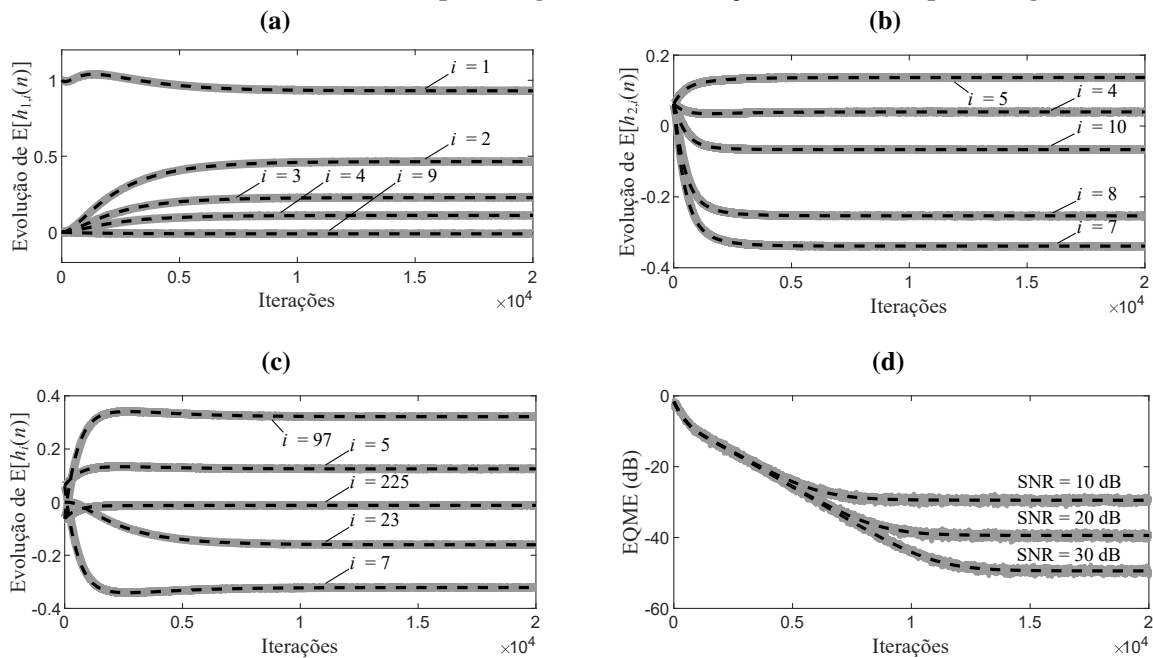
com $\sigma_y^2 = \mathbf{h}^T(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) \mathbf{R} \mathbf{h}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$ caracterizando a variância do sinal de saída do sistema; em particular, três valores de SNR são considerados, i.e., 10, 20, e 30 dB. A menos que estabelecido o contrário, o vetor de coeficientes dos filtros adaptativos (virtuais) 1 e 2 são inicializados, respectivamente, como $\hat{\mathbf{h}}_1(0) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ e $\hat{\mathbf{h}}_2(0) = L_0^{-1} [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ para prevenir estagnação no início do processo de adaptação (BENESTY *et al.*, 2022). Os passos de adaptação são ajustados para $\mu_1 = \mu_2 = 10^{-3}$.

3.3.1 Exemplo 1

O modelo proposto é verificado aqui para sinal de entrada gaussiano descorrelacionado, diferentes valores de SNR e um sistema com resposta ao impulso com característica antissimétrica. Especificamente, o sinal de entrada é obtido através de (49) utilizando $a_1 = a_2 = 0$, o que resulta em uma dispersão de autovalores¹ da matriz de autocorrelação do sinal de entrada de $\chi = 1$. A resposta ao impulso antissimétrica $\mathbf{h}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$ é obtida a partir de (10), com \mathbf{h}_1 contendo os primeiros $L_0 = 32$ coeficientes do Modelo 1 de canal de eco da Recomendação G.168 da *International Telecommunication Union - Telecommunication Standardization Sector* (ITU-T) (ITU-T, 2015) enquanto $[\mathbf{h}_2]_l = (-0.9)^{l-1}$ para $l = 1, 2, \dots, L_0$; consequentemente,

¹ A dispersão de autovalores é uma medida do nível de correlação do sinal de entrada; na prática, quanto maior a dispersão dos autovalores, maior o nível de correlação (HAYKIN, 2014, pp. 227).

Figura 3 – Exemplo 1. Resultados obtidos de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e preditos pelo modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Evolução de cinco coeficientes do filtro adaptativo (virtual) 1. (b) Evolução de cinco coeficientes do filtro adaptativo (virtual) 2. (c) Evolução de cinco coeficientes do filtro adaptativo (global). (d) Evolução da curva de aprendizagem (EQME).



Fonte: Autoria própria.

o comprimento de $\mathbf{h}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$ é $L_0^2 = 1024$. Os resultados obtidos para esse cenário de operação são apresentados na Figura 3.

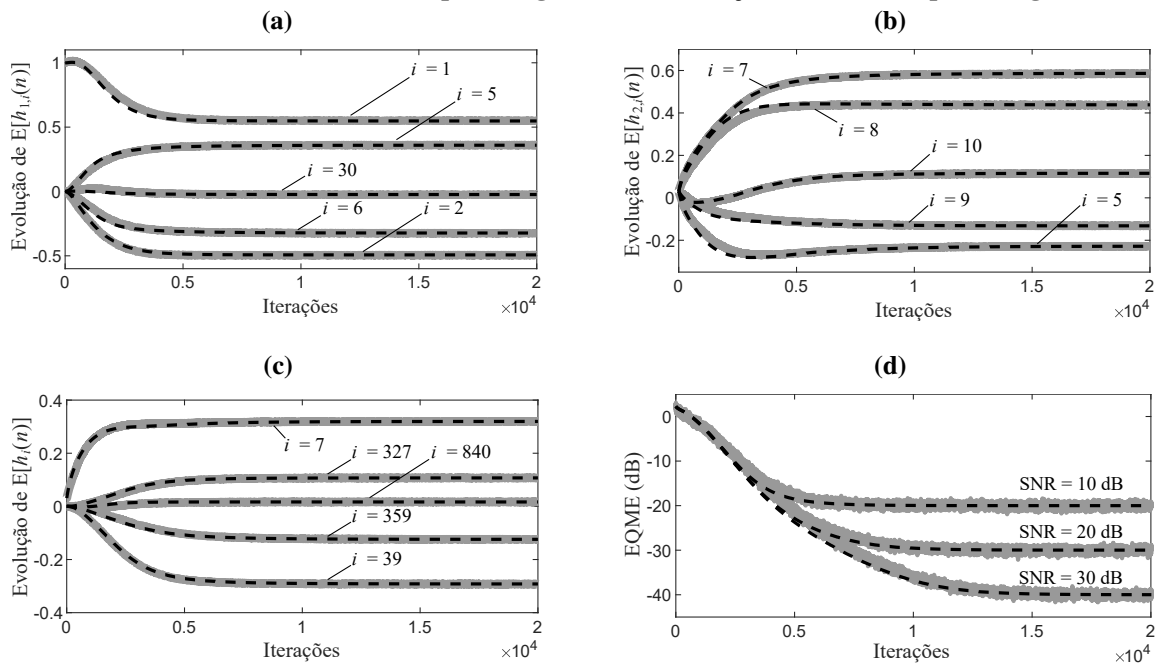
3.3.2 Exemplo 2

Este exemplo visa verificar o modelo proposto para sinal de entrada gaussiano correlacionado, diferentes valores de SNR e um sistema com resposta ao impulso com característica simétrica. Particularmente, o sinal de entrada é obtido através de (49) fazendo $a_1 = -0,6$ e $a_2 = 0,8$, o que resulta em uma dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada de $\chi = 162,13$. A resposta ao impulso simétrica $\mathbf{h}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$ é obtida a partir de (10), com \mathbf{h}_1 contendo os primeiros $L_0 = 16$ coeficientes do Modelo 1 de canal de eco da Recomendação G.168 da ITU-T (ITU-T, 2015) enquanto $[\mathbf{h}_2]_l = 0,5^{l-1}$ para $l = 1, 2, \dots, L_0$; consequentemente, o comprimento de $\mathbf{h}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$ é $L_0^2 = 256$. Os resultados obtidos para esse cenário de operação são apresentados na Figura 4.

3.3.3 Exemplo 3

Neste exemplo, é avaliada a precisão do modelo para planta simétrica e antissimétrica, considerando diferentes inicializações dos vetores de coeficientes para os filtros adaptativos. Especificamente, o sinal de entrada é obtido através de (49) fazendo $a_1 = -0,6$ e $a_2 = 0,8$, o

Figura 4 – Exemplo 2. Resultados obtidos de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e preditos pelo modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Evolução de cinco coeficientes do filtro adaptativo (virtual) 1. (b) Evolução de cinco coeficientes do filtro adaptativo (virtual) 2. (c) Evolução de cinco coeficientes do filtro adaptativo (global). (d) Evolução da curva de aprendizagem (EQME).



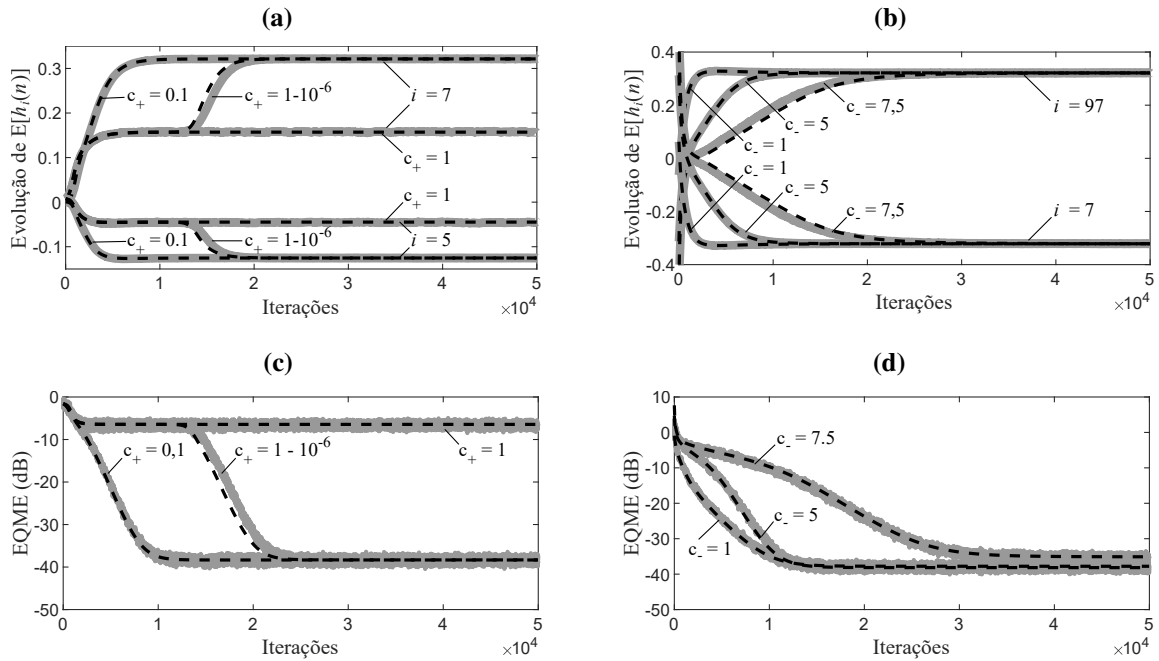
Fonte: Autoria própria.

que resulta em uma dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada de $\chi = 160,55$. Ambas as respostas ao impulso (simétrica e antissimétrica) são determinadas a partir de (10), com \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 obtidos tal como no Exemplo 2; conseqüentemente, o comprimento de $\mathbf{h}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$ é $L_0^2 = 256$. Os vetores de coeficientes dos filtros adaptativos (virtuais) são inicializados como $\hat{\mathbf{h}}_1(0) = L_0^{-1}[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ e $\hat{\mathbf{h}}_2(0) = c_+ L_0^{-1}[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ com $c_+ = \{10^{-1}, 1 - 10^{-6}, 1\}$ para o caso de planta simétrica, enquanto $\hat{\mathbf{h}}_1(0) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ e $\hat{\mathbf{h}}_2(0) = c_- L_0^{-1}[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ onde $c_- = \{1, 5, 7,5\}$ para o caso de planta antissimétrica. Os resultados obtidos são ilustrados na Figura 5, considerando apenas o caso de SNR de 20 dB por simplicidade.

3.3.4 Discussão

As Figuras 3, 4 e 5 apresentam os resultados obtidos de simulações de MC e previsões de modelo para os cenários de operação descritos nos Exemplos 1, 2 e 3, respectivamente. Especificamente, as Figuras 3(a)-(c) e 4(a)-(c) ilustram a evolução de (cinco) coeficientes de $\hat{\mathbf{h}}_1(n)$, $\hat{\mathbf{h}}_2(n)$ e $\hat{\mathbf{h}}(n)$, enquanto as Figuras 3(d) e 4(d) mostram as curvas de aprendizagem (EQME). [Os resultados obtidos para os valores de SNR de 10 e 30 dB foram omitidos nas Figuras 3(a)-(c) e 4(a)-(c) por serem muito similares aos apresentados.] Por sua vez, as Figuras 5(a) e (b) mostram o impacto da inicialização dos vetores de coeficientes sobre a evolução de (dois) coeficientes do filtro adaptativo (global), ao passo que as Figuras 5(c) e (d) ilustram esse impacto sobre curva de aprendizagem (EQME); de tais figuras, verifica-se que a convergência do algo-

Figura 5 – Exemplo 3. Resultados obtidos de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e preditos pelo modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Evolução de dois coeficientes do filtro adaptativo (global) para a planta simétrica. (b) Evolução de dois coeficientes do filtro adaptativo (global) para a planta antissimétrica. (c) Evolução da curva de aprendizagem (EQME) para a planta simétrica. (d) Evolução da curva de aprendizagem (EQME) para a planta antissimétrica



Fonte: Autoria própria.

ritmo é significativamente afetada pela escolha dos vetores de inicialização dos filtros adaptativos (sendo tal comportamento adequadamente descrito pelo modelo proposto). Observa-se que o comportamento predito pelo modelo proposto exibe um casamento muito bom com aquele obtido através de simulações de MC, tanto na fase transitória quanto em regime permanente. Portanto, é possível afirmar que a precisão do modelo foi confirmada para sinais de entrada gaussianos correlacionados e decorrelacionados, diferentes valores de SNR e inicializações, assim como respostas ao impulso de sistemas com características simétrica e antissimétrica.

4 MODELAGEM DO ALGORITMO NP-VSS-NLMS

Nesta seção, um modelo estocástico é derivado descrevendo o comportamento do algoritmo NP-VSS-NLMS (BENESTY *et al.*, 2006) durante a fase transitória e em regime permanente. Especificamente, na Seção 4.1, as expressões matemáticas que definem o algoritmo NP-VSS-NLMS são revisitadas. Já na Seção 4.2, expressões de modelo são obtidas caracterizando o comportamento médio do vetor de coeficientes do filtro adaptativo, a evolução do passo adaptação variável, curvas de aprendizagem, bem como a matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes do filtro adaptativo. Ainda, na Seção 4.2, expressões de modelo são derivadas caracterizando o passo de adaptação e o EQME em regime permanente. Por fim, a Seção 4.3 mostra resultados de simulação verificando a precisão do modelo proposto.

4.1 Formulação do problema

Para um problema de identificação de sistema (tal como ilustrada na Figura 2), considere que o sinal de saída $y(n)$ do sistema a ser identificado, o qual é corrompido pelo ruído aditivo de medição $v(n)$, pode ser expresso como

$$\begin{aligned} d(n) &= y(n) + v(n) \\ &= \mathbf{h}^T \mathbf{x}(n) + v(n) \end{aligned} \quad (52)$$

onde \mathbf{h} denota uma resposta ao impulso (desconhecida) de dimensão L e

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-L+1)]^T \quad (53)$$

representa um vetor contendo as L amostras mais recentes do sinal de entrada $x(n)$. Então, o algoritmo NP-VSS-NLMS (BENESTY *et al.*, 2006) é usado para atualizar o vetor de coeficientes do filtro adaptativo $\hat{\mathbf{h}}(n)$ (de comprimento L), através de

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \mu(n) \frac{\mathbf{x}(n)e(n)}{\delta + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \quad (54)$$

sendo o sinal de erro dado por

$$e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{h}}^T(n-1)\mathbf{x}(n) \quad (55)$$

e a regra de ajuste do passo de adaptação, por

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 - \frac{\hat{\sigma}_v}{\zeta + \hat{\sigma}_e(n)}, & \hat{\sigma}_e(n) \geq \hat{\sigma}_v \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (56)$$

onde $\hat{\sigma}_v^2$ denota uma estimativa da variância do ruído de medição, enquanto

$$\hat{\sigma}_e^2(n) = \kappa \hat{\sigma}_e^2(n-1) + (1 - \kappa) e^2(n) \quad (57)$$

é uma estimativa da variância do sinal de erro com o parâmetro $0 \ll \kappa < 1$ representando um fator de esquecimento. [Note, em (54) e (56), que δ e ζ caracterizam parâmetros de regularização usados para prevenir divisão por zero.] Portanto, levando em consideração o cenário apresentado, um modelo estocástico pode então ser desenvolvido.

4.2 Modelo proposto

Na derivação do modelo estocástico proposto, as seguintes hipóteses e aproximações são utilizadas (LOBATO; TOBIAS; SEARA, 2008; SAYED, 2008; FARHANG-BOROUJENY, 2013; HAYKIN, 2014; KUHN; KOLODZIEJ; SEARA, 2014; MATSUO; SEARA, 2016; KUHN; ZIPF; SEARA, 2018):

- H1) O sinal de entrada $x(n)$ é obtido através de um processo gaussiano (correlacionado ou descorrelacionado) de média zero, com variância σ_x^2 e matriz de autocorrelação $\mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]$.
- H2) O ruído de medição $v(n)$ é obtido através de um processo gaussiano de média zero e variância σ_v^2 , o qual é descorrelacionado de qualquer outro sinal no sistema.
- H3) O vetor de coeficientes do filtro adaptativo $\hat{\mathbf{h}}(n)$ é assumido independente de qualquer outra variável do sistema.
- H4) O passo de adaptação variável $\mu(n)$ é assumido independente de qualquer outra variável do sistema.
- H5) Os parâmetros de regularização δ e ζ são considerados pequenos de tal forma que seus efeitos podem ser desprezados.

Note que essas hipóteses têm sido frequentemente utilizadas na modelagem estocástica de algoritmos adaptativos [veja (SAYED, 2008; FARHANG-BOROUJENY, 2013; HAYKIN, 2014) para detalhes] para tornar o desenvolvimento matemático tratável e levam a resultados satisfatórios (como mostrado adiante na Seção 4.3).

4.2.1 Comportamento médio do vetor de coeficientes

Substituindo (52) e (55) em (54), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e usando as Hipóteses H2)-H5), obtém-se

$$E[\widehat{\mathbf{h}}(n)] = \{\mathbf{I}_L - E[\mu(n)]\mathbf{R}_1\}E[\widehat{\mathbf{h}}(n-1)] + E[\mu(n)]\mathbf{R}_1\mathbf{h} \quad (58)$$

onde \mathbf{I}_L é a matriz identidade com dimensão $L \times L$, $E[\mu(n)]$ caracteriza o comportamento médio do passo de adaptação variável e

$$\mathbf{R}_1 = E \left[\frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \right] \quad (59)$$

representa uma matriz do tipo autocorrelação normalizada relacionada ao sinal de entrada. Dessa forma, usando os resultados apresentados no Apêndice A de (KUHN; ZIPF; SEARA, 2018) para computar a matriz \mathbf{R}_1 frente a sinais de entrada gaussianos (correlacionados e descorrelacionados), o comportamento médio do vetor de coeficientes do filtro adaptativo pode ser predito através de (58) se o comportamento médio do passo de adaptação variável for conhecido.

4.2.2 Curvas de aprendizagem

Reescrevendo (55) em termos do vetor de erro nos coeficientes

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{h} - \widehat{\mathbf{h}}(n) \quad (60)$$

como

$$e(n) = \mathbf{v}^T(n-1)\mathbf{x}(n) + v(n) \quad (61)$$

determinando $e^2(n)$, tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão e utilizando a Hipótese H3), obtém-se a seguinte expressão caracterizando o EQM:

$$J(n) = J_{\min} + J_{\text{ex}}(n) \quad (62)$$

com o EQM mínimo dado por

$$J_{\min} = \sigma_v^2 \quad (63)$$

e o EQME por

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(n) &= \text{Tr}[\mathbf{R}\mathbf{K}(n-1)] \\ &= \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{k}'(n-1) \end{aligned} \quad (64)$$

onde λ denota um vetor contendo os autovalores provenientes da autodecomposição de $\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$ (SAYED, 2008; FARHANG-BOROUJENY, 2013; HAYKIN, 2014),

$$\mathbf{K}(n) = \mathbb{E}[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)] \quad (65)$$

é a matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes, enquanto $\mathbf{k}'(n)$ representa um vetor contendo os elementos da diagonal de $\mathbf{K}'(n) = \mathbf{Q}^T\mathbf{K}(n)\mathbf{Q}$. Note que o desvio quadrático médio (DQM) (SAYED, 2008; FARHANG-BOROUJENY, 2013; HAYKIN, 2014) pode ser determinado [a partir de (60)] como

$$m(n) = \text{Tr}[\mathbf{K}(n)]. \quad (66)$$

Portanto, baseado em (62)-(64) e (66), as curvas de aprendizagem (EQM, EQME e DQM) do algoritmo podem ser preditas se o comportamento de $\mathbf{k}'(n)$ for conhecido.

4.2.3 Matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes

Subtraindo \mathbf{h} de ambos os lados de (54), considerando (60), substituindo (61) na expressão resultante, determinando $\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)$, tomando o valor esperado e utilizando as Hipóteses H2)-H5), bem como (65), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n) &= \mathbf{K}(n-1) - \mathbb{E}[\mu(n)][\mathbf{K}(n-1)\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{K}(n-1)] \\ &\quad + \mathbb{E}[\mu^2(n)]\mathbf{R}_2(n) + \mathbb{E}[\mu^2(n)]\mathbf{R}_3\sigma_v^2 \end{aligned} \quad (67)$$

com

$$\mathbf{R}_2 = \mathbb{E} \left\{ \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{K}(n-1)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}{[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2} \right\} \quad (68)$$

e

$$\mathbf{R}_3 = \mathbb{E} \left\{ \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}{[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2} \right\} \quad (69)$$

denotando matrizes do tipo autocorrelação normalizada. Em seguida, pré- e pós-multiplicando (67) por \mathbf{Q}^T e \mathbf{Q} , respectivamente, tomando os elementos da diagonal de ambos os lados da expressão matricial resultante e considerando os resultados apresentados por (KUHN; KOLODZIEJ; SEARA, 2014) para computar \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 , obtém-se a seguinte expressão recursiva:

$$\mathbf{k}'(n) = \{\mathbf{I}_L - 2\mathbb{E}[\mu(n)]\mathbf{H} + \mathbb{E}[\mu^2(n)](2\mathbf{T} + \mathbf{P})\}\mathbf{k}'(n-1) + \mathbb{E}[\mu^2(n)]\mathbf{s}\sigma_v^2 \quad (70)$$

sendo as matrizes diagonais \mathbf{H} e \mathbf{T} , a matriz cheia \mathbf{P} , além do vetor \mathbf{s} determinados como no Apêndice A de (KUHN; ZIPF; SEARA, 2018) para sinais de entrada gaussianos (correlaciona-

dos e descorrelacionados). Portanto, a evolução de $\mathbf{k}'(n)$ pode ser predita se $E[\mu(n)]$ e $E[\mu^2(n)]$ forem conhecidos, tornando então possível prever (de maneira recursiva) o comportamento do algoritmo.

4.2.4 Comportamento do passo de adaptação variável

Usando a Hipótese H5) e introduzindo a quantidade

$$\delta_e(n) = \hat{\sigma}_e^2(n) - E[\hat{\sigma}_e^2(n)] \quad (71)$$

para reescrever a parte não nula de (56) como

$$\tilde{\mu}(n) \cong 1 - \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{E[\hat{\sigma}_e^2(n)] + \delta_e(n)}} \quad (72)$$

é possível expressar o valor esperado do passo de adaptação variável e sua versão ao quadrado como (TERRIEN, 1992; PAPOULIS; PILLAI, 2002)

$$\begin{aligned} E[\mu^i(n)|\mu(n) > 0] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu^i(n) f[\delta_e(n)] d\delta_e(n) \\ &= \int_{\hat{\sigma}_v^2 - E[\hat{\sigma}_e^2(n)]}^{\infty} \tilde{\mu}^i(n) f[\delta_e(n)] d\delta_e(n) \end{aligned} \quad (73)$$

para $i = 1, 2$ onde se assume que a função densidade de probabilidade de $\delta_e(n)$ segue uma distribuição gaussiana, isto é,

$$f[\delta_e(n)] \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi E[\delta_e^2(n)]}} \exp\left\{\frac{-\delta_e^2(n)}{2E[\delta_e^2(n)]}\right\} \quad (74)$$

devido ao teorema do limite central (TERRIEN, 1992; PAPOULIS; PILLAI, 2002).

Em seguida, recorre-se a polinômios de Taylor de segunda ordem (HOEF, 2012) para aproximar $\tilde{\mu}^i(n)$ [dado por (72)], para $i = 1, 2$, como

$$\tilde{\mu}(n) \cong 1 - \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta_e(n)}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]} + \frac{3}{8} \frac{\delta_e^2(n)}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]^2} \right\} \quad (75)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^2(n) &\cong 1 - \frac{2\hat{\sigma}_v}{\sqrt{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta_e(n)}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]} + \frac{3}{8} \frac{\delta_e^2(n)}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]^2} \right\} \\ &+ \frac{\hat{\sigma}_v^2}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]} \left\{ 1 - \frac{\delta_e(n)}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]} + \frac{\delta_e^2(n)}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (76)$$

Então, substituindo (74) e (75) em (73) e resolvendo a expressão resultante, obtém-se

$$\begin{aligned} & E[\mu(n)|\mu(n) > 0] = \\ & P[\mu(n) > 0] - \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]}} \left\{ P[\mu(n) > 0] - \frac{1}{2} \frac{E[\delta_e(n)|\mu(n) > 0]}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]} + \frac{3}{8} \frac{E[\delta_e^2(n)|\mu(n) > 0]}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]^2} \right\} \end{aligned} \quad (77)$$

enquanto, a partir de (76),

$$\begin{aligned} & E[\mu^2(n)|\mu(n) > 0] = \\ & P[\mu(n) > 0] - \frac{2\hat{\sigma}_v}{\sqrt{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]}} \left\{ P[\mu(n) > 0] - \frac{1}{2} \frac{E[\delta_e(n)|\mu(n) > 0]}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]} + \frac{3}{8} \frac{E[\delta_e^2(n)|\mu(n) > 0]}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]^2} \right\} \\ & + \frac{\hat{\sigma}_v^2}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]} \left\{ P[\mu(n) > 0] - \frac{E[\delta_e(n)|\mu(n) > 0]}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]} + \frac{E[\delta_e^2(n)|\mu(n) > 0]}{E[\hat{\sigma}_e^2(n)]^2} \right\} \end{aligned} \quad (78)$$

com

$$P[\mu(n) > 0] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\hat{\sigma}_v^2 - E[\hat{\sigma}_e^2(n)]}{\sqrt{2E[\delta_e^2(n)]}} \right\} \quad (79)$$

$$E[\delta_e(n)|\mu(n) > 0] = \sqrt{\frac{E[\delta_e^2(n)]}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\{\hat{\sigma}_v^2 - E[\hat{\sigma}_e^2(n)]\}^2}{2E[\delta_e^2(n)]} \right) \quad (80)$$

e

$$E[\delta_e^2(n)|\mu(n) > 0] = \{\hat{\sigma}_v^2 - E[\hat{\sigma}_e^2(n)]\} E[\delta_e(n)|\mu(n) > 0] + E[\delta_e^2(n)] P[\mu(n) > 0]. \quad (81)$$

Finalmente, note que (77)–(81) requerem conhecimento de $E[\hat{\sigma}_e^2(n)]$ e $E[\delta_e^2(n)]$. Então, tomando o valor esperado de ambos os lados de (57), tem-se que

$$E[\hat{\sigma}_e^2(n)] = \kappa E[\hat{\sigma}_e^2(n-1)] + (1 - \kappa) J(n). \quad (82)$$

Por sua vez, substituindo (57) e (82) em (71), elevando ambos os lados da expressão resultante ao quadrado, tomando o valor esperado e aproximando

$$\begin{aligned} E[\delta_e(n-1)e^2(n)] & \cong E[\delta_e(n-1)]E[e^2(n)] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (83)$$

é possível mostrar que

$$E[\delta_e^2(n)] = \kappa^2 E[\delta_e^2(n-1)] + (1 - \kappa)^2 \{E[e^4(n)] - J^2(n)\} \quad (84)$$

onde [a partir de (61)]

$$E[e^4(n)] \cong 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}'^2(n-1)\boldsymbol{\lambda} + [\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{k}'(n-1)]^2 + 6\sigma_v^2 \boldsymbol{\lambda} \mathbf{k}'(n-1) + 3\sigma_v^4 \quad (85)$$

devido ao teorema da fatoração de momentos de quarta ordem de variáveis gaussianas (THERRIEN, 1992; PAPOULIS; PILLAI, 2002). Ainda, substituindo (85) em (84) e aproximando $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}'^2(n-1)\boldsymbol{\lambda} \cong J_{\text{ex}}^2(n)$, (84) pode ser simplificada como

$$E[\delta_e^2(n)] \cong \kappa^2 E[\delta_e^2(n-1)] + 2(1-\kappa)^2 J^2(n). \quad (86)$$

Portanto, como $E[\mu(n)]$ e $E[\mu^2(n)]$ podem ser computados através de (77)–(82) e (86), o comportamento do algoritmo está agora caracterizado (de forma recursiva).

4.2.5 Passo de adaptaao variável em regime permanente

Assumindo que o algoritmo converge¹, tendendo $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados de (77), considerando a partir de (82) e (86) que

$$E[\hat{\sigma}_e^2(\infty)] = J(\infty) \quad (87)$$

e

$$E[\delta_e^2(\infty)] = 2\rho J^2(\infty) \quad (88)$$

para $0 < \kappa < 1$ e substituindo (79), (80) e (81), produz-se

$$E[\mu(\infty)|\mu(\infty) > 0] = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{\tau}{2\sqrt{\rho}} \right) \left(1 - \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{J(\infty)}} - \frac{3\rho\hat{\sigma}_v}{4\sqrt{J(\infty)}} \right) - \frac{\hat{\sigma}_v}{2\sqrt{J(\infty)}} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\tau^2}{4\rho} \right) \left(\frac{3}{4}\tau - 1 \right) \quad (89)$$

enquanto, a partir de (78),

$$E[\mu^2(\infty)|\mu(\infty) > 0] = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{\tau}{2\sqrt{\rho}} \right) \left[1 - \frac{2\hat{\sigma}_v}{\sqrt{J(\infty)}} \left(1 + \frac{3\rho}{4} \right) + \frac{\hat{\sigma}_v^2}{J(\infty)} (1 + 2\rho) \right] + \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\tau^2}{4\rho} \right) \left[\frac{\hat{\sigma}_v^2}{J(\infty)} (\tau - 1) - \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{J(\infty)}} \left(\frac{3}{4}\tau - 1 \right) \right] \quad (90)$$

¹ Para qualquer variável $\phi(n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\phi(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\phi(n-1)] = E[\phi(\infty)]$.

em que

$$\rho = \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \quad (91)$$

e

$$\tau = \frac{\widehat{\sigma}_v^2 - J(\infty)}{J(\infty)}. \quad (92)$$

Dessa forma, o valor do passo de adaptação variável em regime permanente $E[\mu(\infty)]$ e sua versão ao quadrado $E[\mu^2(\infty)]$ podem ser preditos a partir de (89)–(92) se o valor do EQM alcançado pelo algoritmo em regime for conhecido.

4.2.6 EQM em regime permanente

Utilizando (60) e (61) para expressar (54) em função $\mathbf{v}(n)$, determinando $\mathbf{v}^T(n)\mathbf{v}(n)$, tomando o valor esperado, fazendo $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados da expressão resultante, considerando as Hipóteses H2)–H5) e aproximando (COSTA; BERMUDEZ, May, 2002)

$$\mathbf{R}_1 \cong E \left[\frac{1}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \right] \mathbf{R} \quad (93)$$

obém-se

$$-2E[\mu(\infty)][J(\infty) - \sigma_v^2] + E[\mu^2(\infty)]J(\infty) = 0 \quad (94)$$

com $E[\mu(\infty)]$ e $E[\mu^2(\infty)]$ dependendo intrinsecamente de $J(\infty)$. Agora, substituindo (89) e (90) em (94), é possível escrever

$$J^{3/2}(\infty) - \sigma_v^2[2 + \alpha\gamma(\epsilon)]J^{1/2}(\infty) + 2\sqrt{\alpha}\beta(\epsilon)\sigma_v^3 = 0 \quad (95)$$

em que ϵ denota uma variável auxiliar incluída para permitir a obtenção de uma solução aproximada através de um método de perturbação (HOLMES, 2013),

$$\alpha = \frac{\widehat{\sigma}_v^2}{\sigma_v^2} \quad (96)$$

define a razão entre a estimativa da variância do ruído de medição e seu valor verdadeiro, enquanto

$$\beta(\epsilon) = 1 + \frac{3}{4}\rho + \epsilon\sqrt{\frac{\rho}{\pi}} \left(\frac{3}{4}\tau - 1 \right) g \left(\frac{\tau}{2\sqrt{\rho}} \right) \quad (97)$$

$$\gamma(\epsilon) = 1 + 2\rho + 2\epsilon\sqrt{\frac{\rho}{\pi}} (\tau - 1) g \left(\frac{\tau}{2\sqrt{\rho}} \right) \quad (98)$$

e

$$g(z) = \frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erfc}(z)}. \quad (99)$$

Note que (95) leva ao problema original para $\epsilon = 1$ e a uma equação cúbica com uma solução real para $\epsilon = 0$, a qual é dada por (JEFFREY; DAI, 2008)

$$\begin{aligned} \sqrt{J_\infty(0)} &= \sigma_v \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt[3]{\sqrt{\alpha}\beta(0) - \sqrt{\alpha\beta^2(0) - \frac{[2 + \alpha\gamma(0)]^3}{27}}} \\ &+ \sigma_v \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt[3]{\sqrt{\alpha}\beta(0) + \sqrt{\alpha\beta^2(0) - \frac{[2 + \alpha\gamma(0)]^3}{27}}} \end{aligned} \quad (100)$$

com $J_\infty(\epsilon)$ sendo uma função diferenciável. Então, calculando a derivada implícita com respeito a ϵ em (95), avaliando para $\epsilon = 0$ e resolvendo a expressão resultante, tem-se

$$\left. \frac{dJ_\infty(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \frac{2\sigma_v^2 J_\infty^{3/2}(0)}{J_\infty^{3/2}(0) - \sqrt{\alpha}\sigma_v^3} \sqrt{\frac{\rho}{\pi}} g\left(\frac{\tau_0}{2\sqrt{\rho}}\right) \left\{ \tau_0 \left[\alpha - \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\alpha}\sigma_v}{J_\infty^{1/2}(0)} \right] - \left[\alpha - \frac{\sqrt{\alpha}\sigma_v}{J_\infty^{1/2}(0)} \right] \right\} \quad (101)$$

com

$$\tau_0 = \frac{\hat{\sigma}_v^2 - J_\infty(0)}{J_\infty(0)}. \quad (102)$$

Baseado em (100) e (101), o EQM em regime permanente pode ser aproximado como

$$\begin{aligned} J(\infty) &= J_\infty(1) \\ &\cong J_\infty(0) + \left. \frac{dJ_\infty(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \end{aligned} \quad (103)$$

cuja precisão se sustenta especialmente quando

$$\alpha \leq \frac{4 - 3\sqrt{\rho\pi}}{4(1 - \sqrt{\rho\pi})}. \quad (104)$$

Portanto, a partir de (89)–(92) e (96)–(103), o comportamento do algoritmo em regime permanente está agora caracterizado a partir de expressões fechadas.

4.3 Resultados de simulação

Nesta seção, a precisão do modelo proposto é verificada comparando resultados obtidos a partir de simulações de MC (média de 200 realizações independentes) com previsões de modelo. Para esse fim, três exemplos são apresentados, considerando sistemas com comprimentos diferentes, dispersões de autovalores distintas para a matriz de autocorrelação do sinal de entrada, diversos valores de SNR, bem como diferentes valores para os parâmetros $\hat{\sigma}_v$ e κ

[necessários em (56) e (57)]. Especificamente, a resposta ao impulso do sistema é obtida como

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{h}_s}{\sqrt{\mathbf{h}_s^T \mathbf{h}_s}} \quad (105)$$

com $\mathbf{h}_s = [\text{sinc}(0) \text{ sinc}(1/L) \cdots \text{sinc}(L - 1/L)]^T$ denotando um vetor contendo amostras tomadas da função *sinc*. Por sua vez, o sinal de entrada é gerado a partir de um processo AR (HAYKIN, 2014), tal como descrito na Seção 3.3, de forma que $\sigma_x^2 = 1$. A SNR (em dB) é definida como em (51) com $\sigma_y^2 = \mathbf{h}^T \mathbf{R} \mathbf{h}$ caracterizando a variância do sinal de saída do sistema. Ainda, as condições iniciais escolhidas para o algoritmo são $\hat{\mathbf{h}}(0) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ e $\hat{\sigma}_e^2(0) = 0$, enquanto os parâmetros de regularização são definidos como $\zeta = \hat{\sigma}_v/1000$ e $\delta = 10^{-3}$.

4.3.1 Exemplo 1

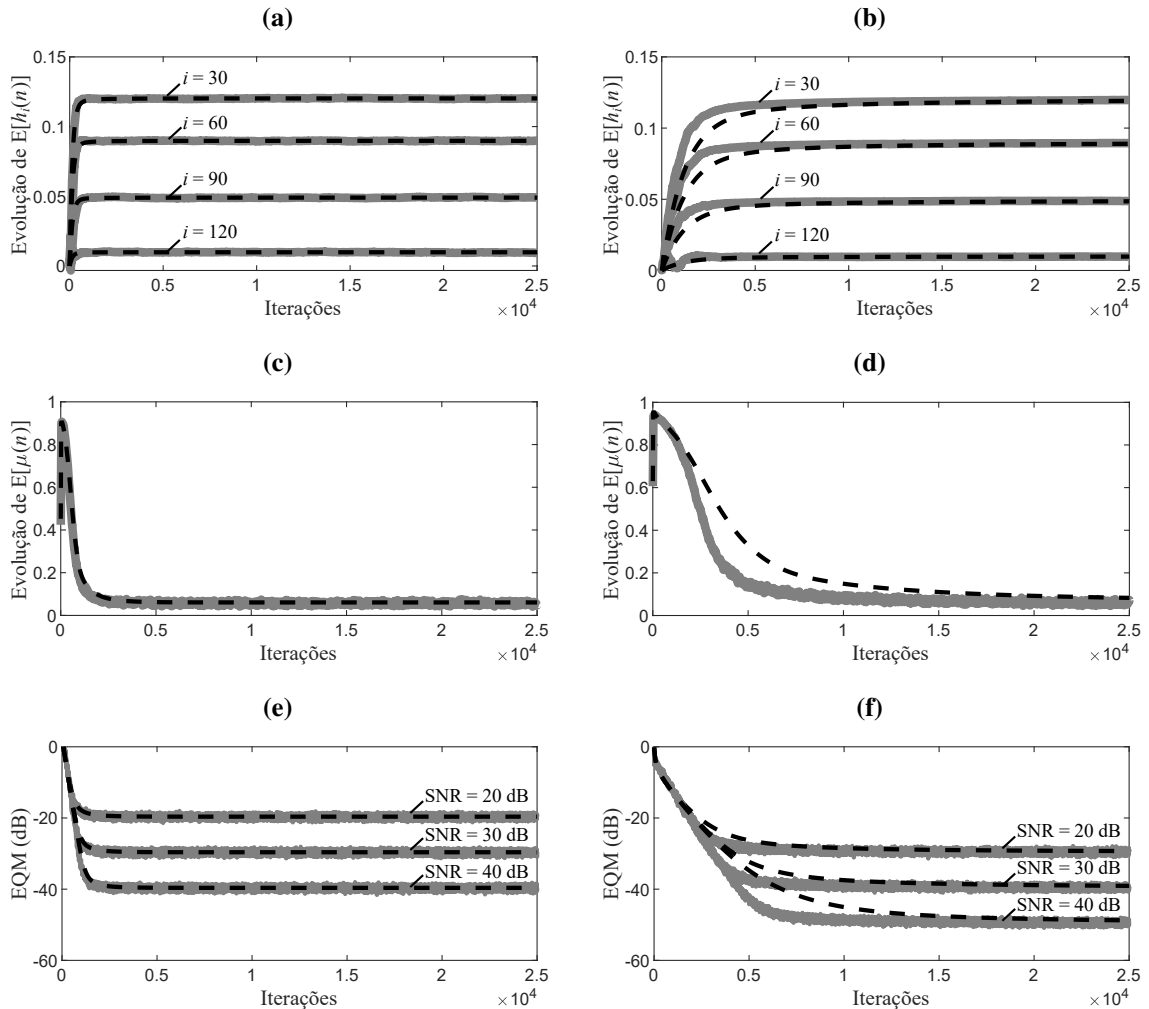
Aqui, a precisão do modelo proposto é verificada para sinais de entrada gaussianos correlacionados e descorrelacionados, bem como para diferentes valores de SNR. Em particular, dois valores de dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada são considerados, i.e., $\chi = 1$ [obtida a partir de (49) para $a_1 = a_2 = 0$] e $\chi = 547,14$ [obtida a partir de (49) para $a_1 = -0,5$ e $a_2 = 0,9$]. Três valores de SNR são utilizados, i.e., 20, 30, e 40 dB. Ainda, a resposta ao impulso do sistema \mathbf{h} [obtida a partir de (105)] tem $L = 128$ coeficientes, sendo os demais parâmetros do algoritmo iguais a $\kappa = 0,95$ e $\hat{\sigma}_v^2 = \sigma_v^2$ (estimativa perfeita da variância do ruído de medição).

A Figura 6 mostra os resultados obtidos para esse cenário de operação. Especificamente, as Figuras 6(a) e 6(b) apresentam (por simplicidade) o comportamento de quatro coeficientes do filtro adaptativo, as Figuras 6(c) e 6(d) retratam a evolução do passo de adaptação variável, enquanto as Figuras 6(e) e 6(f) ilustram a curva de aprendizagem (EQM). Verifique através dessas figuras o bom casamento alcançado entre as simulações de MC e as predições do modelo, tanto durante a fase transitória quanto em regime permanente, independentemente do nível de correlação do sinal de entrada e do valor de SNR considerado. Portanto, levando em conta a boa precisão observada, o modelo proposto pode ser utilizado adequadamente para estudar o comportamento do algoritmo sem a necessidade de recorrer exclusivamente a extensivas simulações de MC.

4.3.2 Exemplo 2

Agora, a precisão do modelo proposto é verificada através da curva de aprendizagem (EQME) para sistemas com resposta ao impulso de diferentes comprimentos L assim como valores distintos para o parâmetro de suavização κ . Para tal, duas respostas ao impulso \mathbf{h} [obtidas de (105)] com $L = \{32; 128\}$ coeficientes e dois valores para o parâmetro de suavização

Figura 6 – Exemplo 1. Resultados obtidos a partir de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e preditos pelo modelo proposto (linhas escuras tracejadas), considerando dados de entrada gaussianos decorrelacionados $\chi = 1$ (esquerda) e correlacionados $\chi = 547,14$ (direita). (a) e (b) Evolução de (quatro) coeficientes do filtro adaptativo. (c) and (d) Evolução do passo de adaptação variável. (e) and (f) Evolução da curva de aprendizagem (EQM).

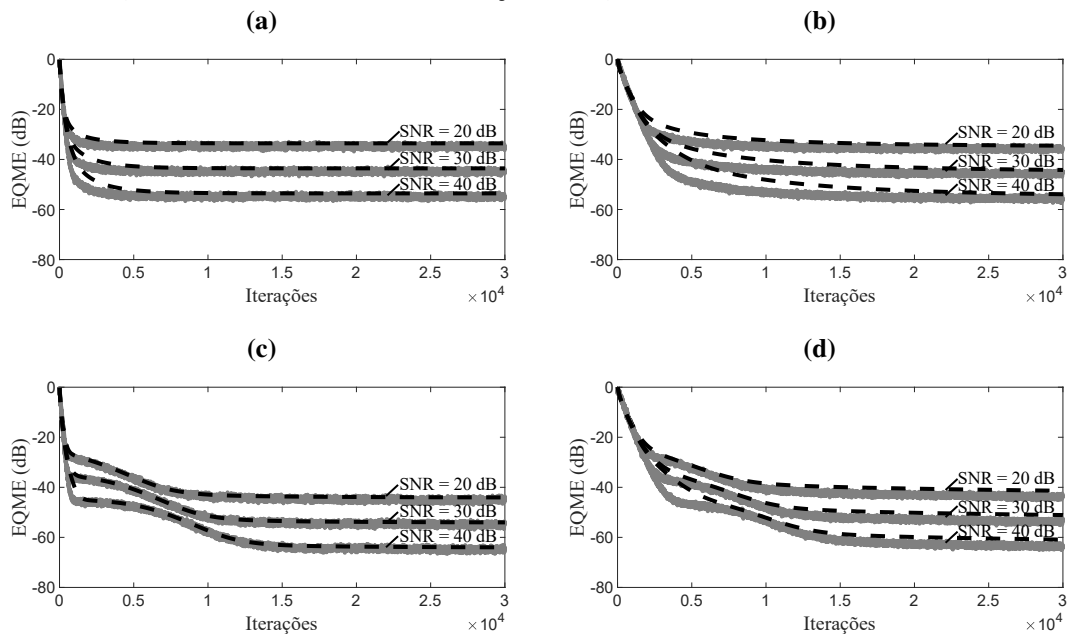


Fonte: Autoria própria.

$\kappa = \{0,9; 0,999\}$ são utilizados. Também, considera-se sinal de entrada gaussiano correlacionado [obtido a partir de (49) com $a_1 = -0,6$ e $a_2 = 0,8$], produzindo assim uma dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação de $\chi = 121,83$ (para $L = 32$) e $\chi = 156,40$ (para $L = 128$). Ainda, assume-se uma estimativa perfeita da variância do ruído de medição ($\hat{\sigma}_v^2 = \sigma_v^2$) e valores de SNR de 20, 30 e 40 dB.

A Figura 7 ilustra os resultados obtidos para esse cenário de operação. Em particular, curvas de aprendizagem (EQME) obtidas para diferentes valores de SNR são apresentadas na Figura 7(a) assumindo $L = 32$ e $\kappa = 0,9$, na Figura 7(b) com $L = 128$ e $\kappa = 0,9$, na Figura 7(c) para $L = 32$ e $\kappa = 0,999$, enquanto na Figura 7(d) considerando $L = 128$ e $\kappa = 0,999$. Observe a partir dessas figuras a boa precisão do modelo proposto (especialmente, para $L = 32$) tanto durante a fase transitória quanto em regime permanente, independentemente do valor do parâmetro de suavização κ e da SNR considerada. Ainda, verifica-se que valores menores de

Figura 7 – Exemplo 2. Resultados obtidos a partir de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e preditos pelo modelo proposto (linhas escuras tracejadas), considerando um sistema com resposta ao impulso de $L = 32$ (esquerda) e $L = 128$ (direita) coeficientes. (a) e (b) Parâmetro de suavização $\kappa = 0,9$. (c) e (d) Parâmetro de suavização $\kappa = 0,999$.



Fonte: Autoria própria.

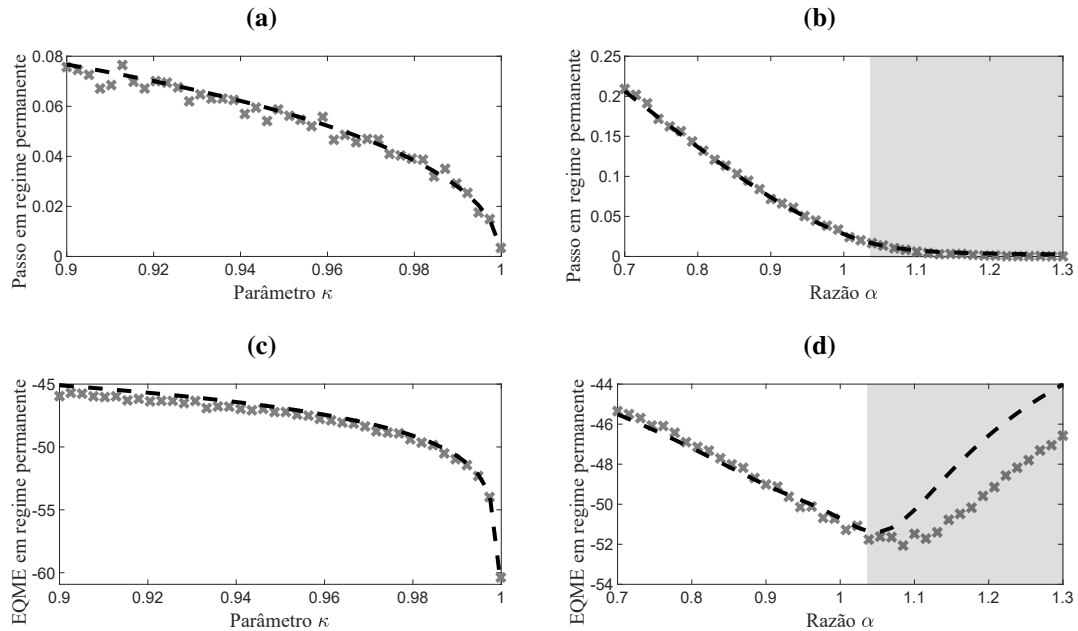
EQME em regime permanente são atingidos pelo algoritmo conforme κ aumenta [compare as Figuras 7(a) e (c) ou Figuras 7(b) e (d)], o que é confirmado através de previsões de modelo. Diante disso, é evidente que o modelo proposto pode ser utilizado com sucesso para investigar o impacto do parâmetro de suavização sobre o desempenho do algoritmo sem a necessidade de recorrer apenas a procedimentos de tentativa e erro.

4.3.3 Exemplo 3

Neste exemplo, a precisão das expressões de modelo descrevendo o comportamento do algoritmo (passo de adaptação e EQME) em regime permanente são verificadas como função do parâmetro κ e da razão α entre a estimativa da variância do ruído de medição e seu valor verdadeiro [veja (96)]. Para tal, considera-se valores diferentes i) para o parâmetro de suavização κ (variando de 0,9 a 0,9999) enquanto a razão $\alpha = 1$ é mantida fixa; ou ii) para a razão α (variando de 0,7 a 1,3) enquanto $\kappa = 0,99$ é mantido fixo. Note que, visando fornecer uma melhor visualização dos resultados experimentais obtidos a partir das simulações de MC, é calculada a média aritmética dos últimos 100 valores em regime permanente da variável de interesse (SAYED, 2008, pp. 250). Ainda, os parâmetros restantes são os mesmos do Exemplo 2 com $L = 128$, exceto pela SNR que é considerada aqui igual a 30 dB por simplicidade.

A Figura 8 exibe os resultados obtidos para esse cenário de operação. Particularmente, as Figuras 8(a) e 8(c) apresentam curvas caracterizando o valor do passo de adaptação variável

Figura 8 – Exemplo 3. Resultados obtidos a partir de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e preditos pelo modelo proposto (linhas escuras tracejadas), considerando valores diferentes de κ com $\alpha = 1$ (esquerda) e diferentes valores de α com $\kappa = 0,99$ (direita). (a) e (b) Passo de adaptação variável em regime permanente. (c) e (d) EQME em regime permanente (dB). A condição (104) é ilustrada (como uma área cinza) em (b) e (d).



Fonte: Autoria própria.

e EQME em regime permanente como função de κ com $\alpha = 1$ (fixo), enquanto as Figuras 8(b) e 8(d) ilustram curvas assumindo $\kappa = 0,99$ (fixo) e α variável. Observe, a partir das Figuras 8(a) e 8(c), que as previsões do modelo casam muito bem com os resultados experimentais em uma ampla faixa de valores de κ , sobretudo quando uma estimativa perfeita da variância do ruído de medição é utilizada (isto é, quando $\hat{\sigma}_v^2 = \sigma_v^2$ o que implica $\alpha = 1$). Por sua vez, embora a Figura 8(b) confirme que o valor de passo adaptação variável pode ser satisfatoriamente previsto, observe da Figura 8(d) que as expressões de modelo descrevendo o EQME em regime permanente falham conforme α aumenta acima da condição dada em (104) (isto é, quando $\hat{\sigma}_v^2$ superestima σ_v^2). Apesar desses aspectos, é possível verificar da Figura 8(c) que o valor do EQME alcançado em regime permanente diminui conforme $\kappa \rightarrow 1$. Adicionalmente, da Figura 8(d), destaca-se o impacto de uma estimativa imperfeita da variância do ruído de medição sobre o EQME em regime permanente alcançado; em outras palavras, o EQME em regime permanente aumenta conforme $\hat{\sigma}_v^2$ se afasta de σ_v^2 , afetando assim o desempenho do algoritmo. Dessa forma, infere-se que ambos os parâmetros κ e $\hat{\sigma}_v^2$ precisam ser determinados cuidadosamente.

Portanto, frente aos resultados apresentados, é possível afirmar que a precisão do modelo foi confirmada para sinais de entrada gaussianos correlacionados e descorrelacionados, diferentes valores para os parâmetros do algoritmo, respostas ao impulso com diversos comprimentos, assim como para valores de SNR distintos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta seção, as considerações finais deste trabalho de conclusão de curso são apresentadas. Primeiro, os resultados mais importantes alcançados são destacados e discutidos. Em seguida, uma lista de trabalhos publicados e/ou em vias de publicação é fornecida. Por fim, algumas sugestões para trabalhos futuros na área são elencadas.

5.1 Conclusões

Na Seção 2, alguns conceitos teóricos fundamentais relacionados à filtragem adaptativa foram discutidos, visando fornecer uma base teórica adequada para o entendimento e desenvolvimento do presente trabalho. Especificamente, o problema de filtragem no contexto adaptativo foi brevemente revisitado, tornando assim possível caracterizar os principais elementos e sinais envolvidos. Em seguida, as estruturas de filtragem e os algoritmos foram abordadas, já que representam os dois elementos fundamentais que constituem um filtro adaptativo. Ainda, foram estabelecidos alguns aspectos relevantes com respeito à modelagem estocástica de algoritmos adaptativos, destacando a sua importância para a compreensão do funcionamento (vantagens e limitações) dos algoritmos existentes assim como para o desenvolvimento de algoritmos melhorados.

Já na Seção 3, um modelo estocástico para o algoritmo LMS-SAS (BENESTY *et al.*, 2022) foi derivado. O modelo proposto permite prever o comportamento médio dos coeficientes dos filtros adaptativos (virtuais e global), curvas de aprendizagem e a evolução de algumas matrizes de autocorrelação envolvidas. A partir do modelo, foi verificado que a atualização de um filtro adaptativo (virtual) depende diretamente do outro filtro adaptativo (virtual), tornando assim evidente que a convergência de um filtro adaptativo é afetada pelo outro (e vice-versa). Observou-se também que a inicialização dos filtros adaptativos tem impacto significativo tanto no comportamento do algoritmo durante a fase transitória quanto em regime permanente, devendo assim ser escolhida com cautela. Resultados de simulação confirmaram a precisão do modelo independentemente do nível de correlação do sinal de entrada, do valor de SNR, da inicialização dos vetores de coeficientes e da resposta ao impulso utilizada.

Por sua vez, na Seção 4, um modelo estocástico para o algoritmo NP-VSS-NLMS (BENESTY *et al.*, 2006) foi apresentado. Especificamente, considerando dados de entrada gaussianos (correlacionados e descorrelacionados) e uma aplicação de identificação de sistema, expressões de modelo foram derivadas caracterizando o comportamento do algoritmo tanto na fase transitória quanto em regime permanente. Com base nessas expressões, algumas características do algoritmo foram discutidas, visando fornecer diretrizes de projeto úteis. Por exemplo, foi observado que valores pequenos de EQME em regime permanente são alcançados ao tornar o parâmetro de suavização próximo de 1. Além disso, foi verificado que uma estimativa imperfeita da variância do ruído de medição afeta significativamente o EQME em regime permanente

atingido pelo algoritmo. Resultados de simulação confirmaram a precisão do modelo proposto sobre uma ampla variedade de condições de operação e atestaram algumas características interessantes do algoritmo considerado.

Portanto, levando em conta os resultados obtidos a partir do desenvolvimento do presente trabalho de conclusão de curso, acredita-se que os objetivos inicialmente estabelecidos foram alcançados com êxito. Vale destacar que tais resultados originaram contribuições importantes, como se verifica através das publicações em relevantes periódicos e/ou conferências da área, assim como abriram portas para o desenvolvimento de outros trabalhos de pesquisa na área (conforme discutido a seguir).

5.2 Trabalhos publicados e/ou em vias de publicação

Ao longo do desenvolvimento do presente trabalho, os resultados obtidos deram origem aos seguintes artigos científicos já publicados e/ou em vias de publicação:

- BECKER, A.C.; KUHN, E.V.; MATSUO, M.V.; BENESTY, J.; PALEOLOGU, C.; DOGARIU, L.-M.; CIOCHINĂ, S. Stochastic Model for the LMS Algorithm with Symmetric/Antisymmetric Properties. **Symmetry**, v. 14, p. 1–12, Identifier: 1908, Sept. 2022 DOI:10.3390/sym14091908.
- DOGARIU, L.-M.; PALEOLOGU, C.; BENESTY, J.; CIOCHINĂ, S.; KUHN, E.V.; BECKER, A.C.; MATSUO, M.V. An Affine Projection Algorithm for the Identification of Impulse Responses with Symmetric/Antisymmetric Characteristics. In: **International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)**, Jul. 2022, p. 254–259 DOI: 10.1109/TSP55681.2022.9851308.
- BECKER, A.C.; KUHN, E.V.; MATSUO, M.V.; BENESTY, J. On the NP-VSS-NLMS algorithm: model, design guidelines, and numerical results. **Signal Processing**, 2023 (em fase final de redação).

5.3 Sugestões de trabalhos de pesquisa futuros

Como ideias para trabalhos de pesquisa futuros na área, sugere-se:

- Determinar limites de estabilidade para o passo de adaptação do algoritmo LMS-SAS bem como obter expressões analíticas caracterizando o seu comportamento em regime permanente.
- Desenvolver um modelo estocástico preciso para a versão normalizada do algoritmo LMS-SAS.

- Modificar a regra de ajuste do passo de adaptação do algoritmo NP-VSS-NLMS, visando remover a dependência da estimativa da variância do ruído de medição.
- Derivar modelos de outros algoritmos do tipo VSS-NLMS da literatura, levando em conta as particularidades da correspondente regra de ajuste do passo de adaptação.
- Conduzir outros experimentos visando mostrar como os modelos aqui propostos podem ser utilizados para o ajuste adequado dos parâmetros dos algoritmos LMS-SAS e NP-VSS-NLMS.

REFERÊNCIAS

- ABOULNASR, T.; MAYYAS, K. A robust variable step-size LMS-type algorithm: Analysis and simulations. **IEEE Trans. Signal Process.**, v. 45, n. 3, p. 631–639, Mar. 1997.
- ALBERT, A. E.; GARDNER JR, L. S. **Stochastic Approximation and Nonlinear Regression**. 1st. ed. Cambridge, MA: MIT Press, 1967.
- BAKRI, K. J. *et al.* On the behavior of a combination of adaptive filters operating with the NLMS algorithm in a nonstationary environment. **Signal Process.**, v. 196, Identifier: 108465, Jul. 2022.
- BAKRI, K. J. *et al.* On the stochastic modeling of the LMS algorithm operating with bilinear forms. **Digit. Signal Process.**, v. 122, Identifier: 103359, Apr. 2022.
- BALANIS, C.; IOANNIDES, P. **Introduction to smart antennas**. [S.l.]: Morgan & Claypool, 2007. (Synth. Lect. Antennas 5).
- BENESTY, J.; COHEN, I.; CHEN, J. **Array Processing: Kronecker Product Beamforming**. Cham, Zug, Switzerland: Springer, 2019.
- BENESTY, J.; GAY, S. L. An improved PNLMS algorithm. In: **Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)**. Orlando, FL: [s.n.], 2002. p. 1881–1884.
- BENESTY, J.; PALEOLOGU, C.; CIOCHINĂ, S. On the identification of bilinear forms with the Wiener filter. **IEEE Signal Process. Lett.**, v. 24, n. 5, p. 653–657, May 2017.
- BENESTY, J. *et al.* LMS and NLMS algorithms for the identification of impulse responses with intrinsic symmetric or antisymmetric properties. In: **Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)**. Singapore and Shenzhen, China: [s.n.], 2022. p. 5662–5666.
- BENESTY, J. *et al.* A nonparametric VSS NLMS algorithm. **IEEE Signal Process. Lett.**, v. 13, n. 10, p. 581–584, Oct. 2006.
- BERGHE, J. V.; WOUTERS, J. An adaptive noise canceller for hearing aids using two nearby microphones. **J. Acoustical Soc. Amer.**, v. 103, n. 3, p. 3621–3626, May. 1998.
- BERNSTEIN, D. S. **Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009.
- BITMEAD, R.; ANDERSON, B. Performance of adaptive estimation algorithms in dependent random environments. **IEEE Trans. Autom. Control**, v. 25, n. 4, p. 788–794, 1980.
- COSTA, M. H.; BERMUDEZ, J. C. M. An improved model for the normalized lms algorithm with gaussian inputs and large number of coefficients. In: **Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)**. Orlando, FL: [s.n.], May, 2002. v. 2, n. II, p. 1385–1388.
- DE SOUZA, F. C. *et al.* A PNLMS algorithm with individual activation factors. **IEEE Trans. Signal Process.**, v. 58, n. 4, p. 2036–2047, Apr. 2010.
- DINIZ, P. S. R. **Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation**. 4th. ed. New York, NY: Springer-Verlag, 2013.
- DOGARIU, L. *et al.* A proportionate affine projection algorithm for the identification of sparse bilinear forms. In: **Proc. Int. Symp. Signals, Circuits Syst. (ISSCS)**. Iasi, Romania: [s.n.], 2019. p. 1–4.

- DUTTWEILER, D. L. Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancelers. **IEEE Trans. Speech Audio Process.**, v. 8, n. 5, p. 508–518, Sept. 2000.
- ELISEI-ILIESCU, C. *et al.* Efficient recursive least-squares algorithms for the identification of bilinear forms. **Digit. Signal Process.**, v. 83, p. 280–296, Dec. 2018.
- FARHANG-BOROUJENY, B. **Adaptive Filters: Theory and Application**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2013.
- GODARA, L. **Smart Antennas**. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2004.
- HAYKIN, S. **Adaptive Filter Theory**. 5th. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2014.
- HOEF, J. M. V. Who invented the delta method? **The Amer. Statistician**, v. 66, n. 2, p. 124–127, 2012.
- HOLMES, M. H. **Introduction to Perturbation Methods**. 2nd. ed. New York, NY: Springer, 2013.
- ITU-T. **ITU-T Recommendation G.168 – Digital Network Echo Cancellers**. Geneva, 2015.
- JEFFREY, A.; DAI, H. H. **Handbook of mathematical formulas and integrals**. 4th. ed. [S.l.]: Elsevier, 2008.
- KACZMARZ, S. Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen. **Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lettres A**, v. 35, n. III, p. 355–357, 1937.
- KOŁODZIEJ, J. E. *et al.* On the constrained stochastic gradient algorithm: Model, performance, and improved version. **IEEE Trans. Signal Process.**, v. 57, n. 4, p. 1304–1315, Apr. 2009.
- KUHN, E. V.; KOŁODZIEJ, J. E.; SEARA, R. Stochastic modeling of the NLMS algorithm for complex Gaussian input data and nonstationary environment. **Digit. Signal Process.**, v. 30, p. 55–66, Jul. 2014.
- KUHN, E. V.; ZIPF, J. G. F.; SEARA, R. On the stochastic modeling of a VSS-NLMS algorithm with high immunity against measurement noise. **Signal Process.**, v. 147, p. 120–132, Jun. 2018.
- KWONG, R.; JOHNSTON, E. A variable step size LMS algorithm. **IEEE Trans. Signal Process.**, v. 40, n. 7, p. 1633–1642, 1992.
- LOBATO, E. M.; TOBIAS, O. J.; SEARA, R. Stochastic modeling of the transform-domain ε LMS algorithm. **IEEE Trans. Signal Process.**, v. 56, p. 1840–1852, May 2008.
- MACKEY, D. S. **Structured Linearizations for Matrix Polynomials**. 2006. Tese (Doutorado) — University of Manchester, 2006.
- MADER, A.; PUDER, H.; SCHMIDT, G. Step-size control for acoustic echo cancellation filters: An overview. **Signal Process.**, v. 80, n. 9, p. 1697–1719, Sep. 2000.
- MARTIN, R. K.; JOHNSON, C. R. Adaptive equalization: Transitioning from single-carrier to multicarrier systems. **IEEE Signal Process. Mag.**, v. 22, n. 6, p. 108–122, 2005.
- MATSUO, M. V.; KUHN, E. V.; SEARA, R. Stochastic analysis of the NLMS algorithm for nonstationary environment and deficient length adaptive filter. **Signal Process.**, v. 160, p. 190–201, Jul. 2019.

- MATSUO, M. V.; KUHN, E. V.; SEARA, R. On the diffusion NLMS algorithm applied to adaptive networks: Stochastic modeling and performance comparisons. **Digit. Signal Process.**, v. 113, Identifier: 103018, Jun. 2021.
- MATSUO, M. V.; SEARA, R. On the stochastic analysis of the NLMS algorithm for white and correlated Gaussian inputs in time-varying environments. **Signal Process.**, v. 128, p. 291–302, Nov. 2016.
- MAYYAS, K.; MOMANI, F. An LMS adaptive algorithm with a new step-size control equation. **J. Franklin Inst.**, v. 348, n. 4, p. 589–605, 2011.
- MESSERSCHMITT, D. Echo cancellation in speech and data transmission. **IEEE J. Sel. Areas Commun.**, v. 2, n. 2, p. 283–297, Mar. 1984.
- NAGUMO, J. I.; NODA, A. A learning method for system identification. **IEEE Trans. Autom. Control**, v. 12, n. 3, p. 282–287, Jun. 1967.
- PALEOLOGU, C.; BENESTY, J.; CIOCHINĂ, S. Adaptive filtering for the identification of bilinear forms. **Digit. Signal Process.**, v. 75, p. 153–167, Apr. 2018.
- PAPOULIS, A.; PILLAI, S. **Probability, random variables, and stochastic processes**. 4th ed. New York, NY: McGraw-Hill, 2002.
- PEREZ, F. L.; DE SOUZA, F. C.; SEARA, R. An improved mean-square weight deviation-proportionate gain algorithm based on error autocorrelation. **Signal Process.**, v. 94, p. 503–513, Apr. 2014.
- PEREZ, F. L. *et al.* A novel gain distribution policy based on individual-coefficient convergence for PNLMS-type algorithms. **Signal Process.**, v. 138, p. 294–306, Sep. 2017.
- QURESHI, S. Adaptive equalization. **IEEE Commun. Mag.**, v. 20, n. 2, p. 9–16, 1982.
- RUPP, M.; SCHWARZ, S. A tensor LMS algorithm. In: **Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)**. South Brisbane, QLD, Australia: [s.n.], Apr. 2015. p. 3347–3351.
- SAYED, A. H. **Adaptive Filters**. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2008.
- SHIN, H.-C.; SAYED, A.; SONG, W.-J. Variable step-size NLMS and affine projection algorithms. **IEEE Signal Process. Lett.**, v. 11, n. 2, p. 132–135, 2004.
- SONDHI, M. M. The history of echo cancellation. **IEEE Signal Process. Mag.**, v. 23, n. 5, p. 95–102, Sep. 2006.
- SONDHI, M. M.; BERKLEY, D. A. Silencing echoes on the telephone network. **Proc. IEEE**, v. 68, n. 8, p. 948–963, Aug. 1980.
- SUGIYAMA, A. K.; MIYAHARA, R.; OOSUGI, K. A noise robust hearable device with an adaptive noise canceller and its dsp implementation. In: **IEEE Int. Conf. Consum. Electron. (ICCE)**. [S.l.: s.n.], 2019. p. 1–2.
- THERRIEN, C. W. **Discrete random signals and statistical signal processing**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.
- WAGNER, K. T.; DOROSLOVACKI, M. I. **Proportionate-type normalized least mean square algorithms**. London, UK: ISTE Ltd, 2013.

WANG, G.; LIN, M.; LIU, Q. Quadratic auto-step least mean square equalization for high-data-rate IR-UWB wireless communication systems. **IEEE Access**, v. 10, p. 53909–53917, 2022.

WIDROW, B.; HOFF, M. E. Adaptive switching circuits. **Proc. IRE WESCON Conv. Rec.**, v. 4, p. 96–104, Aug. 1960.

WIDROW, B.; MCCOOL, J.; BALL, M. The complex LMS algorithm. **Proc. IEEE**, v. 63, n. 4, p. 719–720, Apr. 1975.

ZIPF, J.; TOBIAS, O.; SEARA, R. Non-parametric VSS-NLMS algorithm with control parameter based on the error correlation. In: **Proc. IEEE Int. Telecommun. Symp. (ITS)**. Manaus, AM, Brazil: [s.n.], 2010. p. 1–5.

ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Adaptive Control**. 2nd. ed. Mineola, NY: Dover Publications, 2008.