

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

DELCIR ALVES FERREIRA

**PROJETO DE UM CONTROLADOR PREDITIVO BASEADO EM MODELO
APLICADO AO PÊNDBULO INVERTIDO**

TOLEDO

2022

DELCIR ALVES FERREIRA

**PROJETO DE UM CONTROLADOR PREDITIVO BASEADO EM MODELO
APLICADO AO PÊNULO INVERTIDO**

**DESIGN OF A MODEL PREDICTIVE CONTROLLER
APPLIED TO THE INVERTED PENDULUM**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Eletrônica pela coordenação do Departamento de Engenharia Eletrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. José Dolores Vergara Dietrich.

TOLEDO

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

DELCIR ALVES FERREIRA

**PROJETO DE UM CONTROLADOR PREDITIVO BASEADO EM MODELO
APLICADO AO PÊNULO INVERTIDO**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Eletrônica pela coordenação do Departamento de Engenharia Eletrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 24 de junho de 2022

José Dolores Vergara Dietrich
Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Evandro Marcos Kolling
Doutor em Agronomia
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Felipe Walter Dafico Pfrimer
Doutor em Engenharia Elétrica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

TOLEDO

2022

DEDICATÓRIA

A meus familiares, pelos momentos de ausência.

A meus pais, Antonio e Julia.

A meus amados, esposa Luciane e filho Derek.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. José Dolores Vergara Dietrich, pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória, não medindo esforços para transmitir os conhecimentos necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Eduardo Vinícius Kuhn, que sempre demonstrou um inestimável interesse em adaptar suas didáticas de ensino dinamicamente, buscando otimizar-se ao máximo para que conhecimentos necessários fossem repassados e, sempre mantendo como mais importante a preocupação de que, pudessem ser absorvidos por seus alunos.

Aos docentes do curso de Engenharia Eletrônica envolvidos na minha formação.

Aos colegas de curso que me proporcionaram frutíferas discussões.

A meus familiares, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio; com reconhecimento em especial ao meu pequeno Derek e minha esposa Luciane, por toda paciência compreensão, cuidados e carinho.

A todos aqueles que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Ao meu “Poder Superior”, por conceder-me a serenidade necessária para aceitar o que não posso modificar, coragem para modificar o que posso, e a sabedoria para perceber a diferença.

“Eu não creio que exista algo mais emocionante para o coração humano do que a emoção sentida pelo inventor quando ele vê alguma criação da mente se tornando algo de sucesso. Essas emoções fazem o homem esquecer comida, sono, amigos, amor, tudo.”

Nikola Tesla.

RESUMO

Na área de controle de processos, o controlador mais difundido na indústria é o chamado controlador PID. Sua simplicidade e bons resultados fizeram dele o controlador mais implementado desde a sua concepção. Porém, estratégias de controle avançado se fazem necessárias em casos mais complexos ou que devam levar outros critérios em consideração, além de seguir referência e rejeitar perturbações. Uma família de controladores que utiliza critérios de otimização é a família de controladores MPC (Controladores Preditivos Baseados em Modelo) cujas características e vantagens vem se sobressaindo dentro da área de controle de processos. Este trabalho explora as diferenças de desempenho entre um controlador PID clássico e um controlador MPC, este último considerado como estratégia de controle avançado, aplicados ao sistema chamado de pêndulo invertido, sistema utilizado comumente para testar desempenho de controladores devido à sua característica instável. Os resultados foram obtidos em ambiente simulado e mostram que ambos os controladores têm desempenho semelhante. No entanto, quando o sistema está sujeito a perturbações e limitações na ação de controle notou-se que o controlador MPC faz frente a essas situações com desempenho melhor, inclusive pelo fato do controlador PID necessitar de dois controladores separados para controlar o ângulo do pêndulo e a posição x do carro, enquanto que o MPC é um controlador que pode lidar facilmente com multiobjetivos, incluindo-os diretamente na função custo a ser minimizada pelo otimizador.

Palavras-chave: PID; controle avançado; controle ótimo; SS-MPC; otimização; solvers em linha; horizonte deslizante.

ABSTRACT

In the area of process control, the most widespread controller in the industry is the so-called PID controller. Its simplicity and good results made it the most implemented controller since its conception. However, advanced control strategies are necessary in more complex cases or cases that must take other criteria into account, in addition to seeking reference and rejecting disturbances. A family of controllers that use optimization criteria is the MPC controller family (Model-Based Predictive Controllers) whose characteristics and advantages have been standing out within the process control area. This work explores the performance differences between a classic PID controller and an MPC controller, the latter considered to be an advanced control strategy, applied to the system called inverted pendulum, a system commonly used to test controller performance due to its unstable characteristic. The results were obtained in a simulated environment and show that both controllers have similar performance. However, when the system is subject to disturbances and limitations in the control action, it was noticed that the MPC controller copes with these situations with better results, including the fact that the PID controller needs two separate controllers to control the pendulum angle and the position x of the car, while the MPC is a controller that can easily handle multi-objectives, including them directly in the cost function to be minimized by the optimizer.

Keywords: PID; advanced control; optimal control; SS-MPC; optimization; online solvers; sliding horizon.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Diagrama de blocos básico de um MPC	21
Figura 2 - Representação da estratégia do MPC	24
Figura 3 - Representação de uma trajetória de referência no MPC	26
Figura 4 - Diagrama de blocos do controlador PID em arranjo paralelo.....	31
Figura 5 - Representação de pêndulo simples	35
Figura 6 - Forma de onda para o movimento do pêndulo simples	37
Figura 7 - Sistema pêndulo simples em carro	39
Figura 8 - Esquema de um guindaste rolante de suspensão	41
Figura 9 - Sistema pêndulo simples em carro	41
Figura 10 - Sistema de pêndulo invertido	43
Figura 11 - Ensaio do sistema de pêndulo invertido.....	47
Figura 12 - Gráficos de desempenho do controlador PID	54
Figura 13 - Gráficos de desempenho do controlador SS-MPC	55
Figura 14 - Desempenho PID x SS-MPC	57
Figura 15 - Desempenho PID x SS-MPC – ocorrência de perturbação	59
Figura 16 - Desempenho PID x SS-MPC – ação de controle limitada	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Definições de ensaio para o sistema de pêndulo simples	37
Tabela 2 - Definições para o sistema de pêndulo invertido	46
Tabela 3 – Principais definições para simulação do controlador MPC	50
Tabela 4 – Principais definições para a simulação do sistema	52
Tabela 5 – Principais definições para simulação do controlador PID	53
Tabela 6 – Alterações no simulador para ocorrência de perturbação	58
Tabela 7 - Alterações no simulador para limitação das ações de controle.....	61

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equação Diferencial Ordinária
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i> – Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas
MPC	<i>Model Predictive Control</i> – Controle Preditivo baseado em Modelo
P	Proporcional
PD	Proporcional Derivativo
PI	Proporcional Integral
PID	Proporcional Integral Derivativo
SIMO	<i>Single Input Single Output</i> – Uma Entrada e Múltiplas Saídas
SISO	<i>Single Input Single Output</i> – Uma Entrada e Uma Saída
SS-MPC	<i>State-Space Model Predictive Control method</i> – formulação no Espaço de Estados para Controle Preditivo baseado em Modelo
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

LISTA DE SÍMBOLOS

N	Horizonte de predição
N_1	Horizonte de predição mínimo
N_2	Horizonte de predição máximo
N_u	Horizonte de controle para ação de controle
k_d	Termo de ganho derivativo
k_i	Termo de ganho integral
k_p	Termo de ganho proporcional
T_d	Tempo de derivação
T_i	Tempo de integração
T	Período de amostragem
t_s	Tempo de amostragem
(k)	Instante de amostragem discreto
(t)	Instante de tempo contínuo
$(t + i)$	Instante de tempo contínuo futuro
$\hat{u}(t t)$	Ação de controle no instante futuro ' t ' calculada no instante atual ' t '
$\Delta u(t)$	Ação de controle incremental no instante atual ' t '
u	Ação de controle unitário
$u(t)$	Ação de controle no instante atual ' t '
$u_{m\acute{a}x}$	Ação de controle máxima
$u_{m\acute{i}n}$	Ação de controle mínima
$du_{m\acute{a}x}$	Incremento máximo da ação de controle
$du_{m\acute{i}n}$	Incremento mínimo da ação de controle
$e(t)$	Erro do sistema calculado do instante atual ' t '
$e(t - i)$	Erro do sistema calculado do instante passado ' $t - i$ '
$r(t)$	Referência no instante atual ' t ' para a saída
$w(t)$	Trajetória de referência no instante atual ' t '
$x(t)$	Variável de estados no instante atual ' t '
$y(t)$	Saída no instante atual ' t '
$\hat{y}(t + i t)$	Saída predita para o instante futuro ' $t + i$ ' calculada no instante atual ' t '
$y_{m\acute{a}x}$	Valor máximo da saída
$y_{m\acute{i}n}$	Valor mínimo da saída

$\delta(j)$ ou $\lambda(j)$	Ponderações da função custo
g	Força gravitacional
m	Massa do pêndulo
M	Massa do carro deslizando
\mathcal{L}	Lagrangiano
∂	Diferencial parcial
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Transformada de Laplace da função ' $f(t)$ '
(s)	Variável de Laplace para domínio em frequência
$G_C(s)$	Função de transferência do controlador no domínio da frequência
$G_P(s)$	Função de transferência do processo/planta no domínio da frequência
$E(s)$	Erro do sistema no domínio da frequência
$R(s)$	Referência para o sistema no domínio da frequência
$U(s)$	Sinal de controle no domínio da frequência
$Y(s)$	Saída do sistema no domínio da frequência

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	MOTIVAÇÃO	16
1.2	OBJETIVOS.....	17
2	REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1	APRESENTAÇÃO DO MPC	18
2.1.1	Algumas Metodologias Populares de Controladores MPC	19
2.1.2	Estrutura Geral de um MPC.....	20
2.1.3	Estratégia de Controle do MPC	23
2.1.4	MPC no Espaço de Estados	26
2.1.4.1	<i>Modelo de Predição</i>	27
2.1.4.2	<i>Função Custo e Lei de Controle</i>	28
2.1.4.3	<i>Vantagens Adicionais do SS-MPC</i>	29
2.2	CONTROLADOR PID	29
2.2.1	Controlador PID Analógico	31
2.2.2	Controlador PID Digital	32
2.3	SISTEMAS PÊNDULARES	34
2.3.1	Sistema de Pêndulo Simples	35
2.3.1.1	<i>Movimento Rotacional no Pêndulo Simples</i>	35
2.3.2	Sistema de Pêndulo Simples em Carro Deslizante	38
2.3.2.1	<i>Dinâmica do Movimento Rotacional no Pêndulo Simples</i>	38
2.3.3	Sistema de Pêndulo Invertido	43
3	METODOLOGIA	45
3.1	PARAMETRIZAÇÃO DO MODELO DE PÊNDULO INVERTIDO	45
3.2	MODELAGEM DO CONTROLADOR PID	47
3.3	MODELAGEM DO CONTROLADOR SS-MPC	48
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	51
4.1	SIMULAÇÃO DOS CONTROLADORES PID E SS-MPC	52
4.1.1	Resultados com o Controlador PID	52
4.1.2	Resultados com o controlador SS-MPC	54
4.1.3	Comparativo entre SS-MPC e PID.....	56
4.2	OUTRAS SIMULAÇÕES PARA O PID E O SS-MPC	58
4.2.1	Existência de Perturbações	58

4.2.2	Redução nos Limites da Ação de Controle.....	61
5	CONCLUSÃO.....	63
5.1	TRABALHOS FUTUROS.....	63
	REFERÊNCIAS	65

1 INTRODUÇÃO

Sistemas de controle estão presentes nas mais diversas áreas. Como exemplo, a área industrial tem como grande aliado a automação de sistemas na busca constante de melhorar os índices de produtividade e rentabilidade. Devido às constantes necessidades de aperfeiçoar os processos já existentes, ou até mesmo para implantação de novos sistemas, é comum que o engenheiro utilize ferramentas ou técnicas que possibilitem a adaptação de métodos já conhecidos para resolver novos desafios. Nesse sentido, a área da engenharia de automação e controle desempenha um papel importante no desenvolvimento e modernização do setor industrial, aprimorando e inovando controladores para sistemas ou processos com o objetivo de otimizar a produção e reduzir custos, inclusive com a possibilidade de substituir a mão de obra humana em trabalhos de risco (OGATA, 2010).

Dentre os controladores mais implementados e populares na indústria tem-se o chamado controlador PID – *Proporcional Integral Derivativo*, que desde seu surgimento em meados de 1930, tem sido tema de pesquisas tanto em meio industrial quanto em ambiente acadêmico, contando com um desenvolvimento acelerado a partir do ano de 1980 quando passou a ser implementado digitalmente em microprocessadores (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2005).

Um dos motivos da popularidade dos controladores PID é que, dentro de suas diversas configurações e possíveis modificações, estes são capazes de gerar resultados satisfatórios na maioria dos casos. Contudo, em alguns tipos de indústrias como a petrolífera e/ou petroquímica, o desafio é maior e mais complexo, pois além de envolver o típico desafio de seguimento de referência e rejeição de perturbações pode haver mudanças nos critérios econômicos que alteram drasticamente a solução (CAMACHO; BORDONS, 2007).

O avanço dos microprocessadores e a redução dos custos de aquisição beneficiaram de diversas formas o aprimoramento dos controladores de processo. Tal avanço possibilitou o crescimento da utilização dos controladores ótimos, já que estes exigem a resolução de cálculos extremamente complexos com rapidez no tratamento de informações advindas de sensores do sistema (CAMACHO; BORDONS, 2007).

Alguns controladores de tipo ótimo utilizam a chamada otimização em tempo real (*online solver*), ou seja, incluem na sua estratégia de controle cálculos

computacionais a cada instante de amostragem para encontrar a melhor solução através do uso de um otimizador (*solver*). Este é o caso do Controlador Preditivo Baseado em Modelo – MPC (*Model Predictive Control*), que busca encontrar uma solução ótima utilizando um modelo dinâmico do próprio sistema considerando um intervalo de tempo futuro denominado *horizonte de predição* (MARRUEDO, 2002).

Uma outra vantagem dos controladores que utilizam otimizadores para encontrar a solução a ser implementada é que podem ser definidas restrições de operação para as variáveis envolvidas, além de poder considerar eventuais perturbações incidentes no sistema para rejeitá-las de forma satisfatória. (CAMACHO; BORDONS, 2007).

O MPC é uma família de técnicas de controle que utilizam diversas formas de modelar o processo de maneira preditiva, gerando assim diferentes métodos do MPC com resultados satisfatórios para problemas difíceis de se lidar, como o da estabilidade em controladores de *horizonte finito deslizante*. Dentre as diferentes estratégias, o MPC no Espaço de Estados – SS-MPC (*State-Space Model Predictive Control method*) tem sido muito comum nesta abordagem que busca garantir a factibilidade do otimizador, contando com grande interesse pela comunidade de pesquisas acadêmicas (CAMACHO; BORDONS, 2007).

Neste trabalho, busca-se alcançar um primeiro contato com o MPC, que é uma técnica avançada de controle, para comparar o desempenho desse tipo de controlador, aplicado ao pêndulo invertido, com um algoritmo clássico de PID, destacando as vantagens de cada método.

1.1 MOTIVAÇÃO

O controle de processos é uma área de interesse para a indústria, já que oferece a possibilidade de automatizar processos resultando na redução de falhas humanas e na diminuição dos custos. Dentro desse contexto, o conhecimento e aplicação de técnicas de controle avançado tem relevância pois estudos mostram que com a utilização dessas técnicas alcançam-se melhores índices de produtividade, como: aumento na capacidade de produção; redução de perdas e/ou resíduos; redução de recursos energéticos; redução do custo operacional; melhor qualidade dos produtos (OLIVEIRA, 2008).

Dentre as técnicas de controle avançado existem os chamados controladores preditivos que oferecem diversas vantagens em comparação com o chamado controle clássico, que aborda técnicas como PID, *Feedback*, *Feedforward*, etc. Algumas das vantagens são: capacidade de lidar naturalmente com problemas de controle tanto SISO (*Single Input Single Output*) quanto MIMO (*Multiple Input Multiple Output*); pode considerar restrições de atuadores e compensação dos tempos mortos do processo intrinsecamente em sua formulação; permite incluir diretamente na sua formulação ações do tipo *Feedback* e *Feedforward* (MENDES, 2016).

Nesse contexto, surge a motivação de projetar um controlador preditivo, ainda que não faça parte das ementas oferecidas no curso de graduação de engenharia eletrônica, com o intuito de ampliar os conhecimentos na área de controle e demonstrar as vantagens dele frente a teorias clássicas.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é projetar um controlador preditivo baseado em modelo aplicado ao sistema de pêndulo invertido. Como objetivos específicos tem-se:

- a. Modelar matematicamente os sistemas do pêndulo invertido.
- b. Projetar o controlador preditivo utilizando a abordagem no espaço de estados, detalhando os elementos pertinentes tanto em sua estrutura quanto de sua estratégia de controle.
- c. Comparar o desempenho do controlador preditivo frente ao controlador clássico PID.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo apresenta-se uma introdução sobre Controladores Preditivos Baseados em Modelo descrevendo uma breve contextualização histórica, o seu princípio de funcionamento, algumas de suas variações mais utilizadas, bem como suas qualidades e versatilidade de aplicação.

É importante, dado que esta família de controladores é amplamente utilizada, principalmente nas indústrias petroquímicas. Nesse sentido, a técnica SS-MPC será detalhada, de modo que se possa chegar à aplicação para um controlador.

Será trazido ao controlador PID uma breve evolução histórica, desde os motivos de seu surgimento e sua evolução até a atualidade, lembrando algumas de suas características mais importantes, bem como alguns conceitos e métodos de arranjo para controladores de processos.

2.1 APRESENTAÇÃO DO MPC

O *Controle Preditivo Baseado em Modelo*, é um método avançado de controle de processos, sendo um conjunto de técnicas de controle que, como o próprio nome sugere, utiliza um modelo matemático do processo para prever seu comportamento futuro e, com base nessas previsões, minimizar uma determinada função custo, cujo objetivo é encontrar a melhor ação de controle a ser aplicada ao processo. Outra característica deste controlador é que permite estabelecer restrições para o modelo do processo nas variáveis envolvidas de forma a considerar perturbações sobre os sinais do sistema, sendo capaz de minimizar o efeito de tais perturbações sobre o sistema (CAMACHO; BORDONS, 2007).

Tendo sua origem nos controladores ótimos, os controladores preditivos surgiram para atender demandas específicas dentro do setor industrial, geralmente englobando critérios econômicos. Tais demandas incluem: solucionar problemas com a necessidade de considerar restrições, incertezas e não linearidades no processo, elementos não considerados nas estratégias de controle utilizadas até então por motivos de restrições intrínsecas dos controladores (MARRUEDO, 2002). O MPC tornou-se rapidamente popular na década de 1970 devido à sua utilização

no controle de alguns processos industriais que, a partir de modelos de resposta ao impulso ou ao degrau, permitiram de forma mais intuitiva, fazer a identificação dos processos (VERGARA-DIETRICH, 2020).

Desde então, os controladores preditivos vêm sendo objeto de estudos e têm-se desenvolvido rapidamente no âmbito industrial devido à permanente busca por menores custos com mais produtividade, isto é, a otimização da produção (MARRUEDO, 2002).

No âmbito acadêmico, diversos estudos e pesquisas têm sido feitos desde o surgimento dos controladores preditivos. Porém, nos últimos anos houve uma concentração de esforços na pesquisa utilizando a formulação no espaço de estados para o MPC devido às possibilidades que esta abordagem oferece. Dentre tais possibilidades podem estar a utilização de teorias matemáticas bem conhecidas e solidificadas que permitem análises de garantias de otimalidade e factibilidade, além da própria teoria de controles clássicos no espaço de estados que facilita a análise de sistemas ou processos (CAMACHO; BORDONS, 2007).

2.1.1 Algumas Metodologias Populares de Controladores MPC

Por possuir uma formulação aberta, o MPC pode permitir a incorporação de diversos tipos de modelos para controle com predição, sejam lineares ou não lineares, mono variáveis (SISO) ou de múltiplas variáveis (MIMO). Este atrativo peculiar do MPC faz com que ele seja muito utilizado como estratégia em diversas áreas de controle, tanto no mundo acadêmico, quanto nos mais diversos setores industriais (MARRUEDO, 2002).

Limón (2002) lista algumas das formulações existente e suas características:

IDCOM ou MPHC (*Identification-Command ou Model Predictive Heuristic Control*): utiliza como modelo de predição a resposta impulsiva (FIR), função de custo quadrática, e restrições nas entradas e saídas. O algoritmo de otimização é heurístico.

DMC (*Dynamic Matrix Control*): utiliza como modelo de predição a resposta ao degrau, o qual limita sua aplicação a plantas estáveis, considera um custo quadrático personalizando o esforço de controle e não considera restrições na

otimização. É uma das estratégias mais utilizadas na prática, dada a sua facilidade de implementação e de levantamento de modelos.

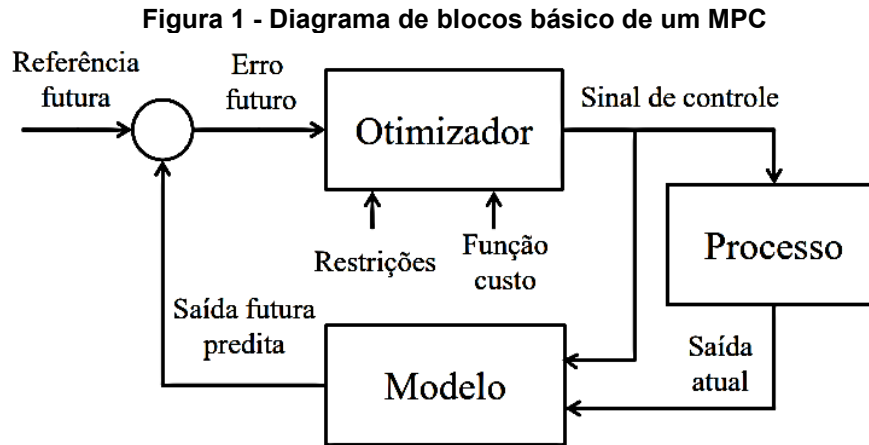
QDMC (*Quadratic Dynamic Matrix Control*): surge da extensão do DMC ao caso com restrições. Este controlador forma parte da denominada segunda geração de controladores preditivos, para os quais o problema de otimização associado se resolve utilizando a programação matemática. Estabelece dois tipos de restrições: duras e suaves, permitindo a violação destas últimas durante algum período de tempo.

SMOC (*Shell Multivariable Optimizing Control*): forma parte da terceira geração de controladores preditivos. Permite a utilização de modelos em espaços de estados e incorpora observadores e modelos de perturbações. Introduce também restrições duras, suaves e com níveis de prioridade.

GPC (*Generalized Predictive Control*): utiliza como modelo de predição a formulação do Modelo Auto-Regressivo Integrado de Média Móvel com Variável de Controle – CARIMA (*Controlled Auto-Regressive and Integrated Moving Average*), que incorpora uma perturbação modelada como ruído branco. Incorpora restrições e existem resultados associados com a estabilidade.

2.1.2 Estrutura Geral de um MPC

A Figura 1 ilustra um diagrama de blocos para uma estrutura geral do MPC que possui: um bloco do modelo que permite calcular as predições e o bloco do otimizador que, a cada passo, é o encarregado de calcular as ações de controle a serem aplicadas ao processo tais ações são calculadas levando em conta o critério descrito pela função custo, pois o otimizador o levará em conta para encontrar a melhor ação de controle. Por outro lado, as restrições são as limitações que o otimizador deve levar em conta para as variáveis envolvidas. Cada um desses elementos comuns pode ser reformulado de acordo com as necessidades do projeto, dando origem a diferentes controladores (CAMACHO; BORDONS, 2007).



Fonte: Adaptado de Mendes (2016) apud Vergara-Dietrich (2020, p. 20)

A seguir, serão descritos com mais detalhes os elementos principais de um MPC.

Modelo de predição: descreve através de um modelo matemático o comportamento esperado de um sistema, podendo este modelo ser linear ou não, em tempo contínuo ou discreto, em variáveis de estado ou em entrada e saída (MARRUEDO, 2002).

Um outro ponto importante no que diz respeito ao modelo de predição é que a estratégia de controle MPC permite considerar eventuais distúrbios neste mesmo elemento. Dessa forma, caso as perturbações sejam mensuráveis, é possível implementar uma compensação de *ação feedforward*¹, bem como um *modelo de distúrbios* para casos em que as perturbações não sejam mensuráveis, como ruídos ou discrepâncias de modelagem do processo real (CAMACHO; BORDONS, 2007).

Em alguns casos, as diferenças entre a saída medida e a saída calculada podem estar de alguma forma embutidas na apresentação da equação final do modelo de processo, não sendo percebidas inicialmente em algumas formulações. No entanto, essas diferenças são tratadas dentro do *bloco do modelo de predição*, podendo serem representadas como *modelo de distúrbios*, e nesse sentido, o modelo CARIMA é amplamente utilizado e adequado² para alguns métodos e reformulado com pequenas variações para outros (CAMACHO; BORDONS, 2007);

¹ Capaz de medir as variáveis de perturbação e tomar ações corretivas, para que estas não afetem o processo.

² Na presença de dois tipos de distúrbios: ocorrência estocástica tanto nas mudanças quanto nos instantes da mesma (variações na qualidade do material) e “movimento browniano” (movimento aleatório de partículas num fluido).

Função custo: também denominada de *Função Objetivo*, ela indica o critério a otimizar e é definida como uma função positiva que expõe o custo relacionado à evolução do sistema durante sua trajetória no horizonte de predição de tamanho “ N ”, sendo que, na maioria dos casos, o esforço de controle está incluído nesta função (MARRUEDO, 2002).

No caso do MPC, uma função custo clássica é composta por um elemento que penaliza a distância entre a saída $y(t)$ e a referência $w(t + j)$, bem como um elemento para penalizar uma variável $\mu(t)$ de ação de controle, de forma a levar o sistema até o ponto desejado com o menor custo de controle possível, isso tudo dentro do horizonte de predição de N passos à frente (VERGARA-DIETRICH, 2020). Nesse sentido, a função custo comumente utilizada nas formulações do MPC é

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t + j | t) - w(t + j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\mu(t + j - 1)]^2 \quad (1)$$

sendo $\hat{y}(t + j | t)$ a predição da saída $y(t)$ para todo o horizonte de predição calculado no instante t ; N_1 e N_2 delimitadores mínimo e máximo do horizonte de predição; N_u sendo o horizonte de controle que pode ser ajustado num intervalo $N_1 < N_u \leq N_2$ e passar a não considerar variações nos sinais de controle para $j > N_u$. A variável $\mu(t)$ pode ser, dependendo da estratégia desejada, a própria ação de controle $u(t)$ ou o incremento da ação de controle $\Delta u(t)$. Os elementos de penalidades $\delta(j)$ e $\lambda(j)$ são ponderações de prioridades e/ou considerações ao comportamento futuro relacionados a trajetória de referência e ao esforço de controle, que podem ser usadas como parâmetros de ajuste em diversas estratégias de controle, possibilitando um controle mais suave (com menos esforço) ou não (CAMACHO; BORDONS, 2007);

Restrições: São as limitações físicas (ou não) do processo que devem ser incorporadas nas sínteses dos controladores MPC, geralmente por motivos econômicos ou pela necessidade de se trabalhar em pontos de operação próximos aos limites físicos admissíveis dos sistemas. As restrições também são úteis para limitar os sinais envolvidos no sistema, como a própria ação de controle, de forma a respeitar eventuais limites máximos ou mínimos exigidos pelo processo, seja por limites físicos ou por segurança (MARRUEDO, 2002).

Normalmente, limites na amplitude e na taxa de variação do sinal de controle e os limites na saída serão considerados como

$$\begin{aligned}
 u_{\min} &\leq u(t) \leq u_{\max} && \forall t \\
 du_{\min} &\leq u(t) - u(t-1) \leq du_{\max} && \forall t \\
 y_{\min} &\leq y(t) \leq y_{\max} && \forall t
 \end{aligned} \tag{2}$$

todavia, ao adicionar essas restrições à função custo, a minimização torna-se mais complexa, de modo que a solução não pode ser obtida explicitamente como no caso irrestrito (CAMACHO; BORDONS, 2007);

Otimizador: é um software de programação matemática que busca, ao minimizar uma determinada função custo, fornecer as ações de controle ótimas para aquela situação. Contudo, as maneiras de se encontrar tal mínimo dependerá do tipo de critério da função objetivo, que pode variar de acordo com a quantidade de variáveis nos problemas de otimização, bem como pela dimensão dos horizontes de predição usados (CAMACHO; BORDONS, 2007).

A forma como o MPC utiliza tais elementos gerais é descrita na próxima seção.

2.1.3 Estratégia de Controle do MPC

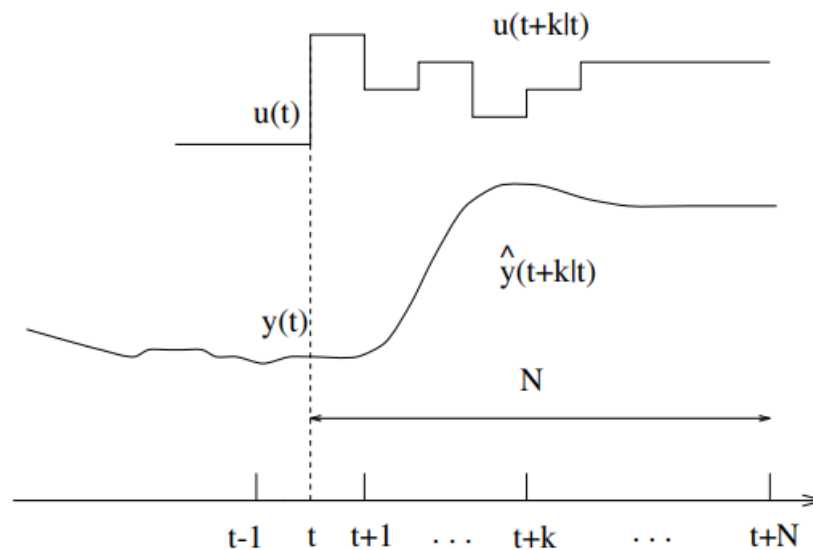
Para exemplificar o funcionamento de um MPC, utilizou-se o exemplo abordado por Camacho e Bordons (2007) em que compara as decisões tomadas por um motorista ao dirigir um veículo com a estratégia de um MPC.

Todos os controladores pertencentes à família MPC partem de uma mesma metodologia, tendo uma estratégia bastante similar à de um motorista que, ao dirigir um veículo, conhece as características físicas deste bem como uma trajetória de referência desejada. Tomando em consideração que nesta trajetória ou via possam existir inclinações, curvas, ondulações, dentre muitos outros distúrbios, o condutor, ao poder enxergar ao longe, decide e toma ações de controle para poder seguir pela via de rolagem. Contudo, tais ações de controle são revistas a todo momento, isto é, sempre que algum fato novo aparecer no seu campo de visão o motorista revê as suas ações no instante atual e atualiza as possíveis decisões futuras que pretende executar. De qualquer forma, o motorista nunca executa uma ação de controle calculada instantes atrás. Ou seja, o motorista sempre está atento às condições

atuais³ da pista e toma as suas decisões com base nisso. Num próximo momento, ele examinará novamente as condições atuais e tomará novas decisões. A este comportamento chamamos de controle por horizonte deslizante, em que o controlador, apesar de poder contar com ações de controle calculadas previamente executa apenas a ação de controle necessária para o instante atual, recalculando-a a cada novo instante (CAMACHO; BORDONS, 2007).

Nesse sentido, tal estratégia pode ser caracterizada pela representação da Figura 2 em que:

Figura 2 - Representação da estratégia do MPC



Fonte: Camacho e Bordons (2007, p. 3)

- Para um determinado horizonte de predição N , as saídas futuras $\hat{y}(t+k | t)$ de $k = 1 \dots N$, são obtidas para cada instante $t+k$ a partir do modelo do processo. Tais saídas são calculadas pelo preditor considerando os valores de entradas e saídas já conhecidos até o momento t (saídas de entradas passadas), quanto de sinais de controle futuros $\hat{u}(t+k | t)$ de $k = 0 \dots N-1$ sugeridos pelo otimizador.
- O otimizador, por sua vez, busca minimizar um critério, normalmente dado por uma função quadrática⁴, composta por elementos que levam em conta o erro entre a saída futura $\hat{y}(t+k | t)$ e a trajetória de referência futura

³ Entende-se condições atuais para as condições naquele mesmo instante em que o motorista pode observar e não em expectativas ou eventuais previsões.

⁴ De forma geral, deseja-se que as funções custo sejam quadráticas para que estas tenham apenas um ponto de mínimo e os algoritmos computacionais (*softwares*) de programação matemática (*solvers*) possam encontrar solução em tempo factível a sua minimização.

$\hat{w}(t + k | t)$ com o objetivo de manter o processo o mais próximo possível dessa trajetória. O resultado disso é o cálculo das ações de controle futuras ótimas $u(t + k | t)$.

- Dos sinais de controle calculados, apenas a primeira ação de controle $u(t | t)$ é utilizada para ser aplicada ao processo. Isto se dá devido à característica do controlador preditivo que de utilizar o chamado controle por horizonte deslizante, ou seja, a cada instante t todas as ações de controle são novamente calculadas e novamente é aplicada apenas a primeira delas. Esta característica permite que, caso haja alguma perturbação no sistema no instante seguinte, o controlador possa recalcular a ação de controle mais adequada levando em consideração tal perturbação, de forma que uma ação de controle $u(t + 1 | t + 1)$ calculada em um instante passado possivelmente será diferente de $u(t + 1 | t)$ calculada no instante t atual devido às novas informações disponíveis para o controlador (perturbações).

Segundo Camacho e Bordons (2007), podem ser consideradas as seguintes definições:

Horizonte de predição: é o intervalo utilizado pelo otimizador no instante da amostragem para tentar prever a dinâmica de um processo ao longo de um horizonte de N predições. A cada novo instante de amostragem é feita a previsão do comportamento do sistema N instantes à frente. Também conhecida como técnica de *horizonte deslizante*, possibilita tratar possíveis discrepâncias entre o modelo e a realidade, já que a cada instante de amostragem podem ser consideradas eventuais perturbações que estejam ocorrendo e serem consideradas para a predição do comportamento do sistema;

Saídas futuras: é o resultado esperado $\hat{y}(t + k | t)$ para determinada ação de controle futura $\hat{u}(t + k | t)$ no processo tomando em conta o valor da saída atual $y(t)$. O cálculo das saídas futuras varia dependendo da estratégia de MPC a ser adotada;

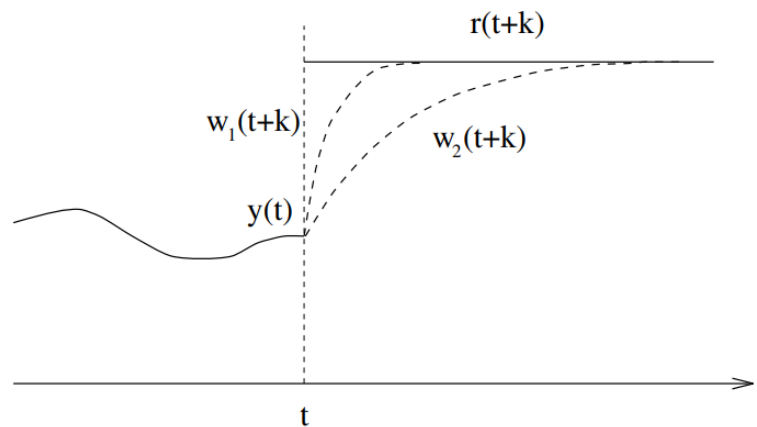
Trajetória de referência: é comparável a um caminho que pode ser ajustado para uma aproximação “suave”, ou filtrada, do valor da saída atual $y(t)$ a uma dada referência, que não precisa necessariamente coincidir com a referência

real $r(t)$, sendo ilustrada na Figura 3. Em algumas aplicações a trajetória de referência $w(t+k)$ pode proporcionar uma melhoria notável no desempenho por conhecer a referência futura $r(t+k)$ e adiantar-se a essa mudança. A expressão

$$w(t+k) = r(t+k) - \alpha^k (y(t) - r(t)) \quad (3)$$

é um exemplo de formulação para uma trajetória de referência, em que uma exponencial α^k pondera o erro entre a saída $y(t)$ e a referência real $r(t)$ de um dado processo;

Figura 3 - Representação de uma trajetória de referência no MPC



Fonte: Camacho e Bordons (2007, p. 20)

Ações de controle futuras: é o resultado que o otimizador oferece como solução para o problema de otimização. Em outras palavras, é a ação de controle sugerida pelo otimizador para levar as saídas futuras aos valores de referência $r(t+k)$.

2.1.4 MPC no Espaço de Estados

De acordo com Camacho e Bordons (2007), a formulação do espaço de estados no MPC já foi utilizada como base para diversas formulações mais complexas do MPC, sendo bastante comum sua utilização para analisar problemas envolvendo critérios como o de estabilidade e robustez.

Como descrições no espaço de estado permitem maior facilidade em expressar critérios de estabilidade e robustez, o método SS-MPC facilita na maioria dos casos uma expressão para a análise de possíveis soluções a esses critérios em diversas variações do MPC. Nesse sentido, facilitou a generalização do MPC para situações de sistemas complexos que pudessem envolver perturbações estocásticas

e ruído nas variáveis medidas, bem como multivariáveis e não-linearidades nos processos (CAMACHO; BORDONS, 2007). Complementarmente, a descrição no espaço de estados pode ser utilizada para sistemas impossíveis de serem descritos por equações diferenciais lineares, além de possibilitar a modelagem de sistemas para simulação em computadores digitais (NISE, 2013).

A seguir são elencados os principais elementos de um controlador MPC para modelos no espaço de estados.

2.1.4.1 Modelo de Predição

Esta abordagem busca capturar e representar a dinâmica do processo, sendo utilizado nesta etapa o conjunto de equações

$$\begin{aligned}x(t + 1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4}$$

para casos lineares, em que $x(t)$ é um *vetor de estados*, $u(t)$ é o *vetor de entrada*, $y(t)$ é o *vetor de saída*, A é a matriz de dinâmica, B é a matriz de entrada e C é a matriz de saída (CAMACHO; BORDONS, 2007).

Nos casos em que seja necessário inserir o componente de integração (para a eliminação do erro em regime permanente), pode-se optar pela formulação estendida, ou seja, pelo modelo incremental do espaço de estados. Para tal, é necessário que o incremento do sinal de controle $\Delta u(t)$ também seja instanciado, ou seja,

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)\tag{5}$$

Ao se considerar tal expressão e combinar a mesma com a Equação 4, é possível obter um modelo incremental na forma geral estendida de espaço de estados, dada por

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x(t+1) \\ u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix} \Delta u(t) \\ y(t) &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t-1) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6}$$

Dessa forma, a ação de controle não será $u(t)$, mas sim $\Delta u(t)$, fazendo com que o sistema tenha a capacidade de sempre calcular um incremento necessário para eliminar o eventual erro em regime permanente (CAMACHO; BORDONS, 2007).

2.1.4.2 Função Custo e Lei de Controle

A *lei de controle* consiste na obtenção dos valores de $\hat{u}(t + j | t)$, que se dá por meio da minimização da *função custo*. Sendo necessário para isso, a inserção nesta função dos valores de saídas preditas $\hat{y}(t + j | t)$, que são calculados tanto em função dos valores atualizados da variável de estado $x(t | t)$ (entradas e saídas passadas) quanto em função das ações de controle futuras $\hat{u}(t + j | t)$, bem como a consideração da dinâmica e restrições do sistema.

A função custo utilizada na formulação do espaço de estados a ser minimizada pelo *otimizador* pode ser semelhante à Equação 1, resultando em

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t + j | t) - w(t + j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t + j - 1)]^2 \quad (7)$$

sendo neste caso utilizado o incremento do sinal de controle $\Delta u(t)$ para a variável $\mu(t)$ mostrada na Equação 1. Com o intuito de calcular a ação de controle ótima, o otimizador minimizará a função Equação 7 ao longo do horizonte de predição $N=N_2 - N_1$. O sistema da Equação 6 pode ser reescrito considerando um novo vetor de estados, dado por

$$\bar{x}(t) = [x(t) \quad u(t - 1)]^T \quad (8)$$

permitindo representar o sistema por

$$\begin{aligned} \bar{x}(t + 1) &= M\bar{x}(t) + N\Delta u(t) \\ y(t) &= Q\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

sendo M a nova matriz de dinâmica, N a nova matriz de entrada e Q a nova matriz de saída.

O Cálculo analítico das predições de saída \hat{y} ao longo do horizonte de predição pode ser feito de forma recursiva através de

$$\hat{y}(t + j) = QM^j \hat{x}(t) + \sum_{i=0}^{j-1} QM^{j-i-1} N \Delta u(t + i) \quad (10)$$

sendo que se faz necessário dispor do vetor de estados completo. Para situações em que o *vetor de estados* $x(t)$ não esteja disponível, é possível utilizar um *observador* a partir de

$$\hat{x}(t | t) = \hat{x}(t | t - 1) + K(y_m(t) - y(t | t - 1)) \quad (11)$$

onde $y_m(t)$ é o valor de saída medida e K é o ganho do estimador (CAMACHO; BORDONS, 2007).

Como consequência, as predições ao longo do horizonte da Equação 10 podem ser abordadas tomando a forma matricial de

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1|t) \\ \hat{y}(t+2|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+N_2|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QM\hat{x}(t) + QN\Delta u(t) \\ QM^2\hat{x}(t) + \sum_{i=0}^1 QM^{1-i}N\Delta u(t+i) \\ \vdots \\ QM^{N_2}\hat{x}(t) + \sum_{i=0}^{N_2-1} QM^{N_2-1-i}N\Delta u(t+i) \end{bmatrix} \quad (12)$$

(CAMACHO; BORDONS, 2007).

2.1.4.3 Vantagens Adicionais do SS-MPC

Como já dito, a formulação do MPC no espaço de estados permite que seja feita uma análise de estabilidade e de factibilidade recursiva. Este fato é importante, já que o controlador depende do resultado do otimizador que, em determinadas circunstâncias, poderia oferecer como resposta uma ação de controle ineficaz, situação completamente indesejada para um sistema de controle contínuo. Neste caso, a priori, alguma estratégia deve ser adotada para desconsiderar tal resultado e tentar novamente, no próximo período de amostragem, encontrar uma solução factível do problema de otimização. Nesse sentido, vários são os trabalhos que têm se dedicado a analisar as garantias de estabilidade, factibilidade recursiva e convergência. O trabalho de Rawlings, Angeli e Bates (2012) apresenta os fundamentos para o chamado MPC Econômico que é o MPC que apresenta as garantias citadas anteriormente. Mayne (2014) apresenta alguns dos desenvolvimentos recentes na área de controladores preditivos e algumas perspectivas para o futuro.

2.2 CONTROLADOR PID

Com origem em meados da década de 1930, o controlador de três termos surgiu de forma empírica por meio de linearizações aproximadas para a dinâmica

dos sistemas. Tendo como base um controle proporcional realimentado, buscava-se minimizar significativamente o erro em regime permanente, obter uma melhoria na estabilidade e uma boa resposta do transitório. Este método de tentativa e erro, tradicional para os projetistas da época, levou a procedimentos experimentais que deram origem ao sintonizador deste controlador, ou seja, meios para selecionar suas componentes: proporcional P , integral I e derivativo D . Isto possibilitou que este controlador se tornasse quase universal em processos industriais que, ademais de complexos, poderiam ser não lineares e com atrasos significativos. Nesse contexto, passou a ser mais conhecido pela abreviação de suas componentes *Proporcional Integral Derivativo* – PID, tornando-se um dos controladores mais implementados e populares da atualidade (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013).

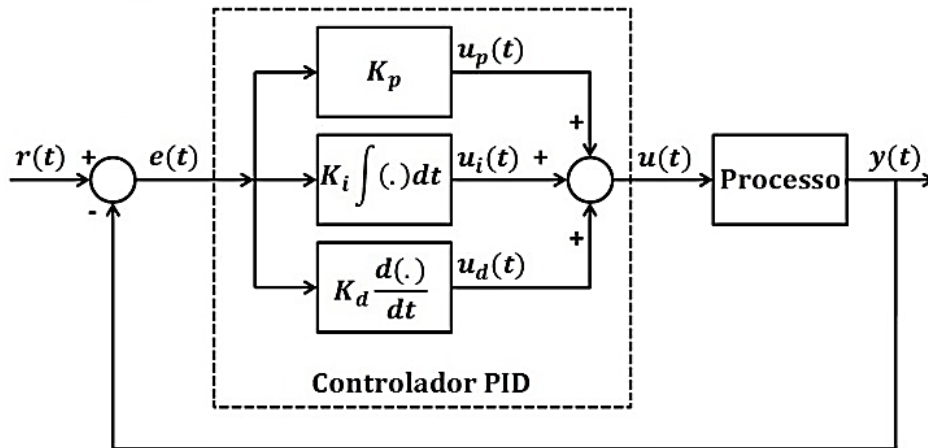
A estrutura geral de um controlador PID tem como base: um controle realimentado linearmente proporcional P ao erro do sistema; uma ação de controle integral I , que atua na eliminação do erro em regime permanente; e um termo de ação derivativo D , que atua na antecipação ao erro para regimes transitórios e sinais instantâneos. Cada uma de suas designações podem operar de forma independente no controle de sistemas e que, por meio de manipulações como de realimentações, são capazes de gerar resultados satisfatórios na maioria dos casos (DORF; BISHOP, 2011).

Tipicamente, as configurações deste controlador são quatro: *Controlador Proporcional* – P ; *Controlador Proporcional Integral* – PI ; *Controlador Proporcional Derivativo* – PD e; *Controlador Proporcional Integral Derivativo* – PID . A Figura 4 ilustra um diagrama de blocos clássico do controlador PID em configuração paralela, tendo o sinal de controle $u(t)$ dado pela expressão

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (13)$$

sendo $e(t)$ o sinal de erro do sistema, k_p o termo proporcional, k_i o termo integral e k_d o termo derivativo (BESSA, 2016).

Figura 4 - Diagrama de blocos do controlador PID em arranjo paralelo



Fonte: Adaptado de Bessa (2016, p.8).

2.2.1 Controlador PID Analógico

A formulação do PID clássica pode ser obtida através da transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ da expressão dada pela Equação 13 que resulta em

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = k_p E(s) + \frac{k_i}{s} E(s) + k_d s E(s) \quad (14)$$

que com a função de transferência do controlador dada por

$$\frac{U(s)}{E(s)} = G_C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (15)$$

ou a apresentada por Åström e Hägglund (2005)

$$G_C(s) = k_p \left(\frac{T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{T_i s} \right) \quad (16)$$

sendo T_d o tempo derivativo e T_i o tempo integral, dados pela relação

$$T_d = \frac{k_d}{k_p} ; \quad T_i = \frac{k_p}{k_i} \quad (17)$$

Tendo essa última relação, o próximo passo é o de estabelecer um sintonizador para o controlador PID a partir dos diversos métodos encontrados na literatura (NISE, 2013).

Para a sintonia do controlador PID, Bessa (2016) expõe que é necessário o conhecimento do processo e a aplicação de requisitos de controle para que a dinâmica de controle PID seja capaz de eliminar os erros do sistema. Ou seja, realizar a identificação de como a dinâmica de um processo reage aos esforços de

controle e com base em um determinado critério de desempenho, determinar os parâmetros necessários para o controlador PID.

Ainda que diversos métodos de sintonia para o controlador PID tenham sido desenvolvidos no decorrer dos anos, Bessa (2016) considera os métodos de Ziegler-Nichols, resposta em frequência e resposta ao degrau, como os mais simples na parametrização de sintonia do controlador PID. Outros métodos de sintonia podem ser apreciados no trabalho de Bessa (2016) na seção “Sintonia do PID”.

2.2.2 Controlador PID Digital

Os parâmetros de um controlador PID digital podem ser calculados por meio dos mesmos recursos já conhecidos para os cálculos em tempo contínuo, sendo possível aplicar as regras e métodos de sintonias de sistemas analógicos diretamente no PID digital (GIORGINI, 2001).

Diferentemente dos controladores de sistemas analógicos, os controladores digitais trabalham com amostras periódicas, que são realizadas em intervalos com período de amostragem T segundos dos sinais de erro $e(t)$ do sistema, tendo a necessidade de um amostrador para a captura desses valores, respeitando algum critério satisfatório para o período de amostragem T (FRANKLIN; POWELL; EMAMINAIEINI, 2013).

Para a lei de controle do PID digital é necessária a aproximação discreta das parcelas de integral e derivativa do controlador PID analógico, de maneira que possam ser reescritas como equações a diferenças. Tais equações, também conhecidas como equações de recorrência, descrevem as operações matemáticas que deverão ser programadas no dispositivo de processamento digital, que pode ser um microcontrolador, um microprocessador ou um computador (COELHO; JERONYMO; ARAÚJO, 2019).

Todavia, por se tratar de aproximações numéricas, foram desenvolvidos diversos métodos para a obtenção da lei de controle para o controlador PID digital. A obra de Coelho, Jeronymo e Araújo (2019) apresenta as leis de controle para o PID, tendo a regra de *diferença retangular para trás* (*Backward Rectangular Rule*) tanto para o termo derivativo quanto para o termo integral; a regra de *diferença retangular para frente* (*Forward Rectangular Rule*) e a regra de *diferença trapezoidal*

(*Trapezoidal Rule*) para o termo integral. Na literatura de Åström e Häggglund (2005), no subcapítulo 13.3 – *Implementações Computacionais*, trazem adicionalmente os métodos de aproximação de *Tustin* (regra de integração numérica de diferença trapezoidal) e o de *equivalência em rampa*, tanto para o termo integral quanto para o derivativo. Já, Franklin, Powell e Emami-Naeini (2013) exploram, no subcapítulo 8.3 – *Projeto usando equivalentes discretos, o método de correspondência polo-zero* e o *método modificado de correspondência polo-zero* após uma apresentação do *método de Tustin*.

No trabalho de Conceição, Beccaro e Justo (2019) os autores apresentam comparativos entre diversos métodos de discretização do controlador PID paralelo, inclusive de desempenho computacional, entre os métodos para o termo derivativo de *aproximação retangular para frente* (método de Euler) e de *aproximação retangular para trás*, e o de integração numérica *trapezoidal (método de Tustin)*. Nesse trabalho é levado em consideração que, na utilização da aproximação retangular para frente, alguns sistemas estáveis no semiplano esquerdo de s podem se tornar instáveis ao serem mapeados no plano z ; já, o mapeamento pelo método Tustin, abrange tanto o semiplano esquerdo de s por completo quanto todo o interior do círculo unitário do plano z , com necessidade de compensação para a ocorrência de distorção em frequência dada pela congruência das regiões de estabilidade. Ou seja, demonstra-se que cada método traz consigo suas vantagens e desvantagens para a discretização. Adicionalmente, Conceição, Beccaro e Justo (2019) acrescentam que o comportamento de sistemas discretizados podem não ser o mesmo que o representado em tempo contínuo.

Sendo assim, para a discretização do controlador PID neste trabalho utilizou-se o método de Tustin, onde o termo integral discretizado é dado por

$$Z \left\{ \frac{k_i}{s} \right\} = \frac{k_i t_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \quad (18)$$

o termo derivativo por

$$Z \left\{ \frac{k_d s}{\left(\frac{T_d}{N}\right) s + 1} \right\} = \frac{N k_d (z-1)}{\left(1 + \frac{N t_s}{2}\right) z + \frac{N t_s}{2} - 1} \quad (19)$$

e dessa forma, para a função de transferência do controlador PID discreto (no domínio z), tem-se

$$G_C(z) = k_p + \frac{k_i t_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + \frac{Nk_d(z-1)}{\left(1 + \frac{Nt_s}{2}\right)z + \frac{Nt_s}{2} - 1} \quad (20)$$

Tal controlador resulta, na forma de equações a diferenças, na parcela proporcional $P(k)$

$$P(k) = k_p(b \cdot r(k) - y(k)) \quad (21)$$

para a parcela derivativa $D(k)$, tem-se

$$D(k) = a_d D - b_d \cdot [y(k) - y(k-1)] \quad (22)$$

e por fim, para a parcela integral $I(k+1)$ tem-se

$$I(k+1) = I(k) + b_{i_1} e(k+1) + b_{i_2} e(k) \quad (23)$$

em que o parâmetro $0 \leq b \leq 1$ é o ajuste do erro e os parâmetros a_d , b_d , b_{i_1} e b_{i_2} são de valores que dependem do tipo de discretização, que para o método de Tustin são dados por

$$b_{i_1} = \frac{Kt_s}{2T_i}; \quad b_{i_1} = b_{i_2} = \frac{Kt_s}{2T_i}; \quad a_d = \frac{2T_d - Nt_s}{2T_d + Nt_s}; \quad b_d = \frac{2KT_d N}{2T_d + Nt_s} \quad (24)$$

sendo o controlador estável quando $|a_d| < 1$.

Dessa forma a lei de controle $u(k)$ para o PID discreto é dado pela soma das componentes $P(k)$, $I(k)$ e $D(k)$ limitadas a uma dada saturação.

Vale ressaltar que, para todos os termos do controlador PID discreto, quanto maior seja a frequência de amostragem, maior será a aproximação desse sistema em relação ao comportamento em tempo contínuo.

2.3 SISTEMAS PENDULARES

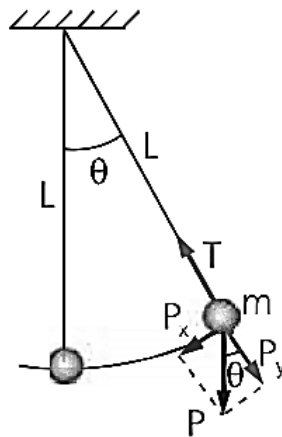
Na área de controle e automação, seja nos setores de pesquisas acadêmica ou industrial, é corriqueiro e recorrente o uso do sistema de pêndulo invertido para o estudo e/ou desenvolvimento de controladores de processos, pois esse sistema é: de modelagem matemática e mecânica bem difundida nas literaturas de engenharia; de fácil modificação para diversas aplicações; de natureza dinâmica, ou seja, naturalmente instável (MOREIRA *et al.*, 2019).

A seguir, dois sistemas pendulares serão descritos: o pêndulo simples e o invertido. A modelagem dos sistemas com pêndulo simples servirão de base para a modelagem do pêndulo invertido, sendo este último o sistema a ser utilizado para testar os controladores.

2.3.1 Sistema de Pêndulo Simples

O pêndulo simples é um sistema mecânico constituído por um corpo de massa m , suspenso desde o seu centro de massa por um fio flexível ou haste rígida, de comprimento L , que gira livremente em uma articulação O . A posição de equilíbrio é quando o corpo se encontra em repouso na vertical para baixo em relação ao ponto, sendo este eixo adotado como de referência (PALANDI *et al.*, 2010). A Figura 5 ilustra uma possível representação do pêndulo simples.

Figura 5 - Representação de pêndulo simples



Fonte: Adaptado de Albarello, Duarte e Faoro (2013, p. 85)

Neste trabalho será tratado o corpo de massa m como corpo pendular e considerado que esteja ligado à articulação por meio de uma haste rígida, extremamente delgada e incapaz de girar sobre seu eixo central longitudinal.

2.3.1.1 Movimento Rotacional no Pêndulo Simples

Para sua modelagem matemática rotacional, é necessário ter-se em consideração a Segunda Lei de Newton para sistemas rotativos, tendo como grandezas cinemáticas: posição angular θ , sendo a componente de interesse formada entre o eixo do corpo pendular e o eixo referencial; velocidade angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_{req.} \quad (25)$$

que está relacionada ao período de oscilação

$$T = \frac{1}{f_{req.}} \quad (26)$$

e à aceleração angular

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (27)$$

para um dado instante t . Como principais forças atuantes, e que se anulam no repouso do sistema, estão a força peso

$$P = m \cdot g ; \vec{P} = P \cos \theta + P \sen \theta \quad (28)$$

do próprio corpo pendular e a força centrípeta

$$F_{cp} = -P \cos \theta \quad (29)$$

de tração exercida pela haste sobre o corpo pendular. Para as componentes de aceleração tem-se a gravitacional

$$g = 9,81 [m/s^2] \quad (30)$$

e a centrípeta α_{cp}

$$\alpha_{cp} = \omega^2 \cdot L = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cdot L \quad (31)$$

(MOREIRA *et al.*, 2019).

Ao afastar o corpo pendular de sua posição de equilíbrio do sistema, a componente de intensidade $P \sen \theta$, perpendicular à haste e tangente à trajetória do corpo pendular, será a responsável por oscilar o pêndulo com um movimento periódico T , no sentido de que o sistema retorne ao equilíbrio (ALBARELLO; DUARTE; FAORO, 2013). Por ser um movimento com aceleração angular e havendo o momento de inércia

$$I = \int r^2 dm = L^2 m \quad (32)$$

em que r é o raio da semicircunferência formada pelo movimento do corpo pendular, terá a incidência no pêndulo de um somatório de torque

$$\sum \tau = I \cdot \alpha \quad (33)$$

que pode ser descrito como

$$\sum \tau = -mgL \sen \theta - B \frac{d\theta}{dt} \quad (34)$$

sendo B o coeficiente de amortecimento viscoso entre o sistema e o ar, que depende do formato geométrico do corpo. Ao substituir os elementos da Equação 33 por suas respectivas igualdades, tem-se

$$-mgL \sin \theta - B \frac{d\theta}{dt} = mL^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (35)$$

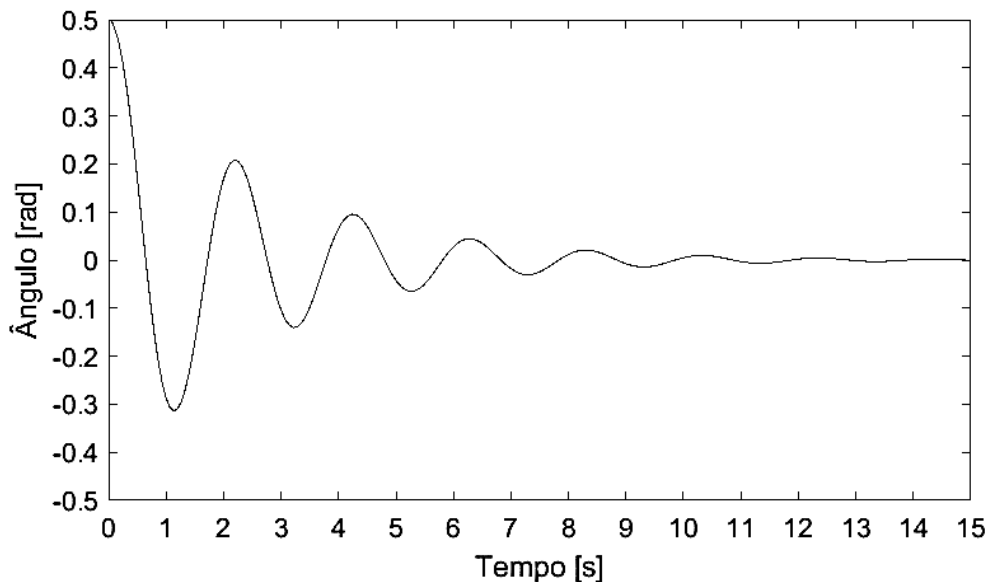
logo, dividindo ambos os lados da igualdade por mL^2 e igualando a zero, obtém-se

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B}{mL^2} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (36)$$

sendo esta *Equação Diferencial Ordinária* – EDO de segunda ordem o modelo matemático não linear do pêndulo simples (KLEIN *et al.*, 2014).

A forma de onda para o movimento do pêndulo simples em função do ângulo θ é ilustrada pela Figura 6, obtida pelo software MatLab a partir dos dados da Tabela 1 a seguir.

Figura 6 - Forma de onda para o movimento do pêndulo simples



Fonte: Autoria própria (2022), MatLab R2021a.

Em seguida é apresentada uma tabela com dados relativos a um ensaio a partir da EDO da Equação (36).

Tabela 1 - Definições de ensaio para o sistema de pêndulo simples

<i>Descrição</i>	<i>Notação</i>	<i>Valor</i>
aceleração da gravidade	g	9,810 m/s ²
massa do pêndulo	m	1,000 kg
comprimento da haste	L	1,000 m
momento de inércia	I	$m \cdot L^2$ kg · m ²
coeficiente de amortecimento viscoso ar-sistema	B	0,750
ângulo inicial	θ	$\pi/2$ rad 90 graus

Fonte: Autoria própria (2022)

2.3.2 Sistema de Pêndulo Simples em Carro Deslizante

Para o sistema pêndulo simples, além do possível movimento de rotação, visto até então, o pêndulo pode estar dependurado em um sistema que se desloque horizontalmente, oferecendo mais uma componente ao sistema do pêndulo simples: o movimento de translação horizontal. Na literatura, a ação de translação horizontal em um sistema com movimento rotacional é comumente conhecida como dinâmica do movimento rotacional no sistema (COSTA; LIRA; SILVA, 2012).

2.3.2.1 Dinâmica do Movimento Rotacional no Pêndulo Simples

Neste caso, será tomado para a translação o deslocamento retilíneo de atrito desprezível de um carro com massa M sobre um plano horizontal, passível de sofrer aplicação de uma força

$$F_{carro}(t) = M \cdot a \quad (37)$$

com uma aceleração

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (38)$$

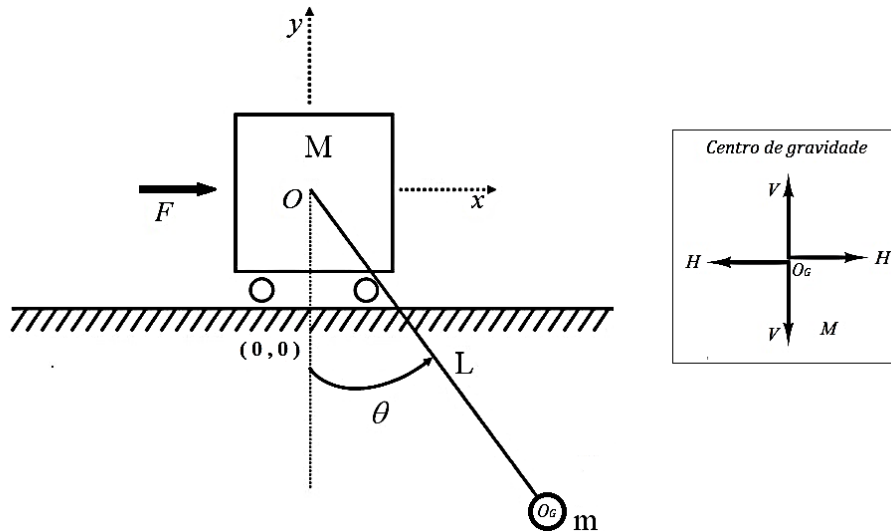
em que x representa a distância horizontal em relação ao ponto de origem e momento linear I_{carro} dado por

$$I_{carro} = M \cdot \vartheta = M \cdot \frac{dx}{dt} \quad (39)$$

com velocidade ϑ ou $\frac{dx}{dt}$. Nesse sistema o ponto de pivotamento O do pêndulo estará fixado ao ponto do centro de massa do carro, que independente de existir, ou não, o movimento linear horizontal deste, o pêndulo segue passível de girar livremente pela articulação O (COSTA; LIRA; SILVA, 2012), sendo esse sistema ilustrado pela Figura 7.

Com uma segunda massa no sistema, as componentes de interesse passam a ser, a posição angular θ do corpo em relação a vertical, e a posição x do carro em relação ao ponto de origem.

Figura 7 - Sistema pêndulo simples em carro



Fonte: Adaptado de Figueiredo e Dantas (2008, p. 226)

Para uma modelagem Newtoniana, Ogata (2010) propõe que seja levado em consideração a localização, em termos de coordenadas cartesianas, do centro de gravidade do conjunto formado pela haste e corpo pendular de forma a definir uma equação de movimento para a haste do pêndulo, sendo estas coordenadas x_G e y_G dadas por

$$x_G = x + L \sin \theta \quad (40)$$

e

$$y_G = L \cos \theta \quad (41)$$

respectivamente, e assumindo que no centro de gravidade da haste pendular a força horizontal F_H e a força vertical F_V sejam

$$F_H = m \cdot \frac{d^2(x_G)}{dt^2} \quad (42)$$

e

$$F_V = m \cdot \frac{d^2(y_G)}{dt^2} - mg \quad (43)$$

O movimento rotacional da haste pendular em torno de seu centro de gravidade é dado por um somatório de torques $\sum \tau$ envolvidos, como visto na Equação 33, tal que

$$F_V \cdot L \sin \theta - F_H \cdot L \cos \theta = I_H \cdot \frac{d^2(\theta)}{dt^2} \quad (44)$$

sendo I_H o momento de inércia da haste em relação ao seu centro de gravidade, que ao substituir as componentes de forças F_H e F_V por suas respectivas igualdades obtém-se

$$\left(m \cdot \frac{d^2(L \cos \theta)}{dt^2} - mg \right) \cdot L \sin \theta - m \cdot \frac{d^2(x + L \sin \theta)}{dt^2} \cdot L \cos \theta = I_H \cdot \frac{d^2(\theta)}{dt^2} \quad (45)$$

que sendo reorganizada, o movimento do pêndulo pode ser representado como

$$I_H \cdot \frac{d^2(\theta)}{dt^2} + mL^2 \cos \theta \frac{d^2(\sin \theta)}{dt^2} = -gmL \sin \theta - mL \cos \theta \frac{d^2(x)}{dt^2} + mL^2 \sin \theta \frac{d^2(\cos \theta)}{dt^2} \quad (46)$$

Para o movimento horizontal do carro, Ogata (2010) sugere que

$$F_{CP} = M \cdot \frac{d^2(x)}{dt^2} + F_H \quad (47)$$

em que F_{CP} é a força exercida sobre o carro para o sistema de carro-pêndulo sem qualquer representação de atrito, que pode ser expressada por

$$F_{CP} = M \cdot \frac{d^2(x)}{dt^2} + m \cdot \frac{d^2(x + L \sin \theta)}{dt^2} \quad (48)$$

ou

$$F_{CP} = (M + m) \cdot \frac{d^2(x)}{dt^2} + mL \frac{d^2(\sin \theta)}{dt^2} \quad (49)$$

Dessa forma, a Equação 46 e a Equação 49 caracterizam um modelo matemático do sistema de pêndulo simples em carro, descrevendo o movimento do sistema.

As equações colocadas por Ogata (2010) são muito similares às equações proposta por Franklin, Powell e Emami-Naeini (2013) em um de seus exemplos, das quais a de movimento horizontal do carro difere por considerar, em um primeiro momento, elementos de atrito $b \frac{dx}{dt}$ para a modelagem matemática de um sistema de guindaste rolante, como ilustrado na Figura 8, tendo

$$F_{CP} = (M + m) \cdot \frac{d^2(x)}{dt^2} + b \frac{d(x)}{dt} + mL \frac{d^2(\sin \theta)}{dt^2} \quad (50)$$

como expressão para o movimento horizontal do carro.

Como meio de linearização para a Equação 46 e a Equação 49, tanto Ogata (2010) quanto Franklin, Powell e Emami-Naeini (2013) supõem que as variações para o ângulo $\theta(t)$ serão muito pequenas para quando este estiver fora do ponto de equilíbrio, fazendo então aproximações para

$$\sin \theta \cong \theta ; \quad \cos \theta \cong 1 \quad e \quad \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (51)$$

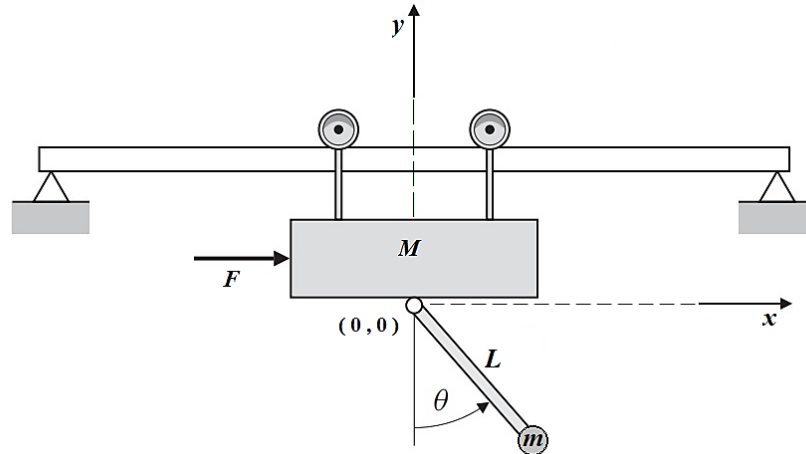
dessa forma, para o movimento da haste tem-se

$$(I_H + mL^2) \frac{d^2(\theta)}{dt^2} + mL \frac{d^2(x)}{dt^2} = -gmL\theta \quad (52)$$

e para o movimento do carro-pêndulo tem-se

$$F_{CP} = (M + m) \frac{d^2(x)}{dt^2} + mL \frac{d^2(\theta)}{dt^2} \quad (53)$$

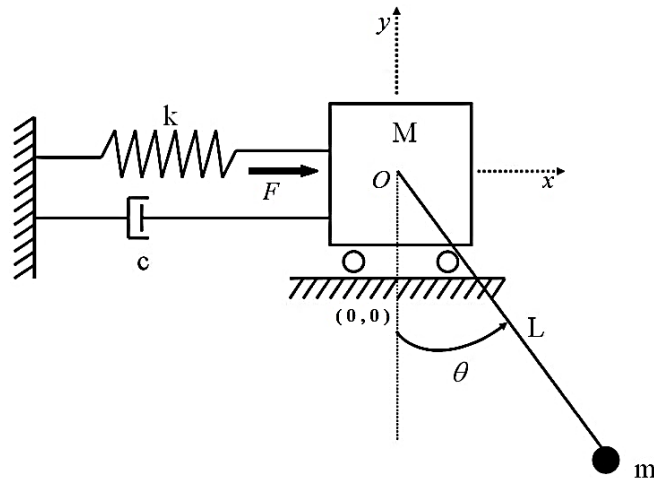
Figura 8 - Esquema de um guindaste rolante de suspensão



Fonte: Adaptado de Franklin, Powell e Emami-Naeini (2013, p. 31)

Todavia, outros métodos podem ser utilizados para a modelagem do sistema carro-pêndulo, como por exemplo pela mecânica lagrangiana que é explorada nos trabalhos de Figueiredo e Dantas (2008). Nesse trabalho apresenta-se um sistema similar ilustrado na Figura 9 que, em relação ao apresentado na Figura 7, difere pela presença de dois elementos adicionais que interagem com o movimento horizontal do sistema, uma mola com constante de Hooke k e um amortecedor com coeficiente de atrito viscoso b , que se encontram em paralelo e suas extremidades fixadas a uma superfície vertical e ao carro deslizante.

Figura 9 - Sistema pêndulo simples em carro



Fonte: Adaptado de Figueiredo e Dantas (2008, p. 226)

Para o sistema proposto por Figueiredo e Dantas (2008), sua dedução matemática parte das equações de Lagrange para as componentes de energia mecânica E_M do sistema, sendo

$$E_M = E_C + E_V \quad (54)$$

e o lagrangiano \mathcal{L} dado por

$$\mathcal{L} = E_C - E_V \quad (55)$$

que utiliza a energia cinética E_C dada por

$$E_C = \frac{1}{2} \left[(M + m) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2mL \cos \theta \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \quad (56)$$

e a energia potencial E_V dada por

$$E_V = \frac{k}{2} x^2 + gmL(1 - \cos \theta) \quad (57)$$

logo, sendo o lagrangiano expresso como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(M + m) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2mL \cos \theta \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] - \left[\frac{k}{2} x^2 + gmL(1 - \cos \theta) \right] \quad (58)$$

Dessa forma, tomando a Equação 58 como sendo o lagrangiano do sistema, as equações de Lagrange para o movimento do carro são

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -b\dot{x} \quad (59)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx \quad (60)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = (M + m)\ddot{x} + mL \cos \theta \ddot{\theta} + mL \sin \theta \dot{\theta}^2 \quad (61)$$

logo o movimento horizontal do carro é definido por

$$(M + m)\ddot{x} + mL \cos \theta \ddot{\theta} + mL \sin \theta \dot{\theta}^2 + b\dot{x} + kx = 0 \quad (62)$$

Da mesma forma, as equações de Lagrange para o movimento do pêndulo são

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -c\dot{\theta} \quad (63)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mL \sin \theta (\dot{x}\dot{\theta} + g) \quad (64)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = mL^2 \ddot{\theta} + mL \cos \theta \ddot{x} - mL \sin \theta \dot{x}\dot{\theta} \quad (65)$$

logo o movimento pendular é definido por

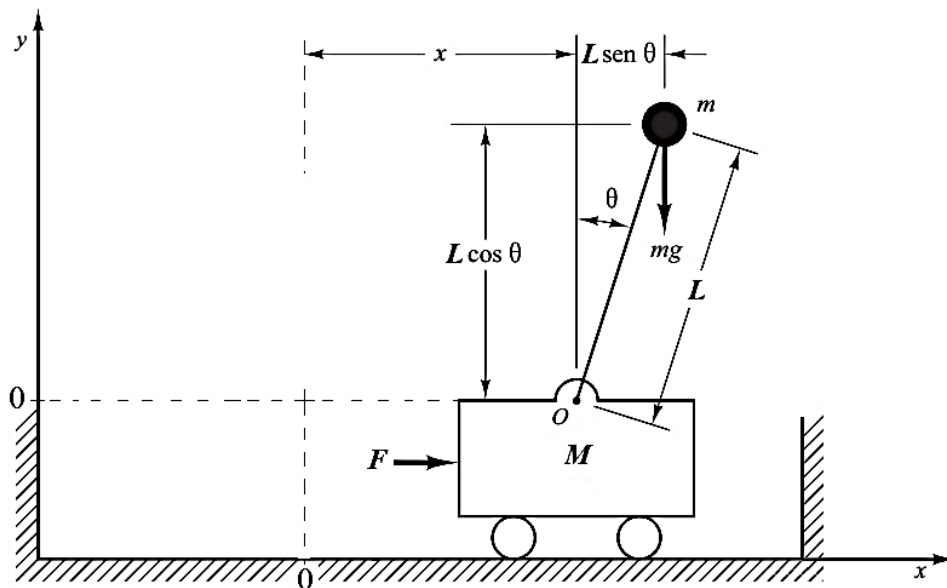
$$mL^2 \ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mL \cos \theta \ddot{x} + gmL \sin \theta = 0 \quad (66)$$

Explicações mais detalhadas sobre lagrangiano de sistemas e as equações de Lagrange podem ser encontradas no trabalho de Figueiredo e Dantas (2008) - *Dinâmica do Sistema Carro-Pêndulo*.

2.3.3 Sistema de Pêndulo Invertido

Sendo ilustrado pela Figura 10, este sistema é muito semelhante ao descrito no item 2.3.2 Sistema de Pêndulo Simples em Carro Deslizante. No entanto, para este caso o intuito é o de manter o equilíbrio do pêndulo na posição vertical para cima. A tarefa de manter na vertical o pêndulo e acima do carro deslizante deve ser alcançada através do controle do movimento do carro no sentido horizontal, buscando manter o ponto de equilíbrio para o pêndulo (OGATA, 2010; FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013).

Figura 10 - Sistema de pêndulo invertido



Fonte: Adaptado de Ogata (2010, p. 62)

Nesse sentido, é possível utilizar das deduções vistas anteriormente para as modelagens matemáticas do pêndulo simples em carro deslizante e aplicar ao pêndulo invertido por meio de uma simples inspeção (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013). Ao considerar que, na posição que se busca equilibrar o pêndulo, o ângulo θ formado com a vertical superior seja zero e a força peso atuante sobre o pêndulo se encontrará em direção totalmente oposta aos modelos anteriores, qualquer das equações propostas tanto por Ogata (2010) e Franklin, Powell e

Emami-Naeini (2013) quanto por Figueiredo e Dantas (2008) podem ser reescritas invertendo o sinal das componentes em que a gravidade g esteja envolvida, ou seja, nas equações para o movimento do pêndulo.

A seguir são apresentadas de forma resumida as equações que definem o comportamento do pêndulo invertido acoplado a um carro com deslocamento horizontal, sendo o movimento do pêndulo descrito por Ogata (2010) e Franklin, Powell e Emami-Naeini (2013)

$$I_H \cdot \frac{d^2(\theta)}{dt^2} + mL^2 \cos \theta \frac{d^2(\sin \theta)}{dt^2} = g mL \sin \theta - mL \cos \theta \frac{d^2(x)}{dt^2} + mL^2 \sin \theta \frac{d^2(\cos \theta)}{dt^2} \quad (67)$$

e o movimento do carro dado por

$$F_{CP} = (M + m) \cdot \frac{d^2(x)}{dt^2} + b \frac{d(x)}{dt} + mL \frac{d^2(\sin \theta)}{dt^2} \quad (68)$$

Já, o autor Figueiredo e Dantas (2008) descreve o movimento do pêndulo por

$$mL^2 \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + mL \cos \theta \ddot{x} - g mL \sin \theta = 0 \quad (69)$$

e o movimento do carro como

$$(M + m) \ddot{x} + mL \cos \theta \ddot{\theta} + mL \sin \theta \dot{\theta}^2 + b \dot{x} + kx = 0 \quad (70)$$

Vale ressaltar que para algumas situações a posição do carro durante a ação de equilibrar o pêndulo deve ser levada em consideração e mantida em um determinado ponto de referência, já que pode haver limites físicos para esse deslocamento. Para tal, comumente adota-se para essa posição a metade do segmento da trajetória e, como referência, adota-se o ponto de origem para os possíveis deslocamentos do carro.

3 METODOLOGIA

Para o sistema de pêndulo invertido foi realizada a modelagem matemática, bem como sua modelagem linearizada no espaço de estados para aplicação ao controlador SS-MPC, contando com uma modelagem em ambiente simulado que utilizou como ferramenta o MatLab. Nessa mesma ferramenta foram modelados tanto o controlador PID quanto o controlador preditivo SS-MPC, utilizando tais controladores para simulações.

A seguir, descrevem-se como foram modelados os sistemas e os controladores.

3.1 PARAMETRIZAÇÃO DO MODELO DE PÊNDULO INVERTIDO

Para a execução de simulação do sistema de pêndulo invertido, é necessário que as equações diferenciais de segunda ordem estejam dispostas em função do termo de maior ordem. A partir das equações dispostas por Franklin, Powell e Emami-Naeini (2013), Ogata (2010) e Figueiredo e Dantas (2008), a Equação 67 de movimento do pêndulo invertido e a Equação 68 de movimento horizontal do carro, considerando possíveis componentes de atrito μ , para a aceleração angular $\ddot{\theta}$ tem-se

$$\ddot{\theta} = \frac{-\mu_t \dot{\theta} - mL \cos \theta \ddot{x} + gmL \sin \theta}{(mL^2 + I_H)} \quad (71)$$

e da mesma forma para a aceleração linear \ddot{x} , tem-se

$$\ddot{x} = \frac{u + mL \sin \theta \dot{\theta}^2 - mL \cos \theta \ddot{\theta} - b\dot{x} - kx}{(M + m)} \quad (72)$$

em que u representa a presença da ação de controle. Substituindo os termos da aceleração linear \ddot{x} na equação de aceleração angular $\ddot{\theta}$, obtém-se

$$\ddot{\theta} = \frac{u \cos \theta + (M + m)g \sin \theta + mL \cos \theta (\sin \theta \dot{\theta}^2 + \mu_x \dot{x} + kx) - \mu_t \dot{\theta}}{mL \cos^2 \theta - (M + m)L} \quad (73)$$

e substituindo os termos da aceleração angular $\ddot{\theta}$ na equação de aceleração linear \ddot{x} , tem-se

$$\ddot{x} = \frac{u + mL \sin \theta \dot{\theta}^2 - gm \cos \theta \sin \theta (-\mu_x \dot{x} - kx)}{(M + m) - m \cos^2 \theta} \quad (74)$$

como o sistema de pêndulo invertido não possui uma componente de força elástica, ou seja, a mola com constante de *Hooke* k , a componente kx será zero. Dessa forma, o ultimo par de equações serão implementadas no MatLab representado o modelo a ser simulado.

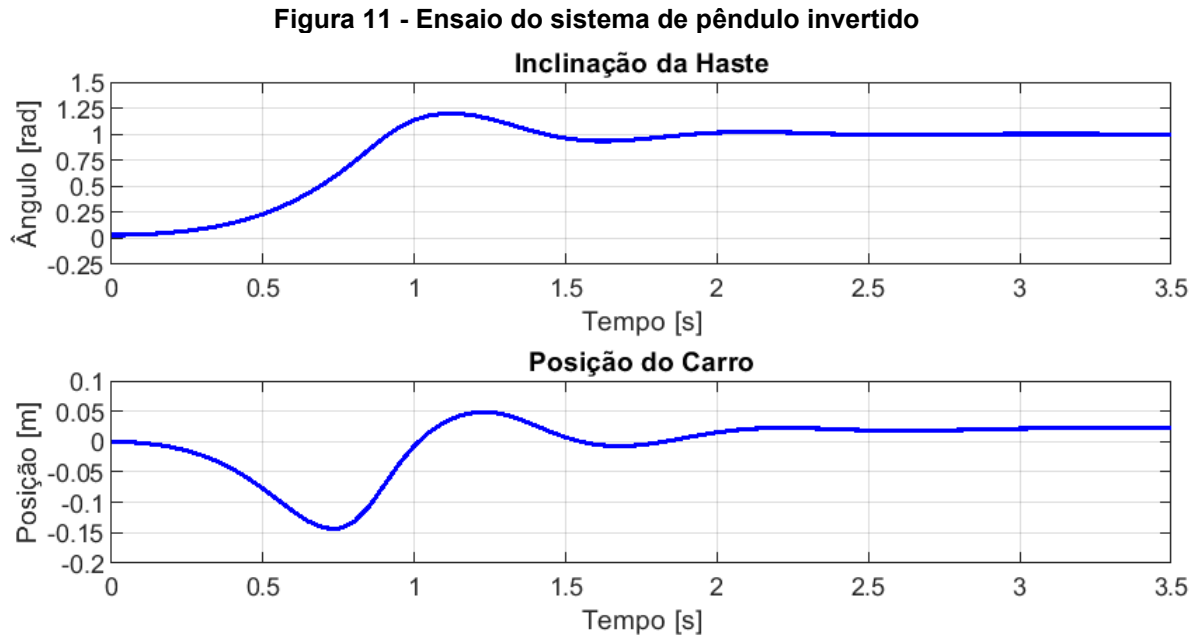
Para determinar o comportamento da simulação do sistema a partir das modelagens matemáticas, realizou-se a implantação computacional com auxílio da Tabela 2 em que são apresentadas as definições para um sistema de pêndulo invertido. Tal tabela tem como base de dados o trabalho de Peres (2019).

Tabela 2 - Definições para o sistema de pêndulo invertido

<i>Descrição</i>	<i>Notação</i>	<i>Valor</i>
aceleração da gravidade	g	9,810 m/s ²
massa do pêndulo	m	0,200 Kg
comprimento da haste	L	0,650 M
momento de inércia	I	0,038 kg · m ²
coeficiente de atrito do pivotamento	μ_t	0,045
ângulo inicial	θ	0,1 Rad 5,73 Graus
massa do carro deslizante	M	0,350 Kg
coeficiente de atrito do deslizamento de carro	μ_x	0,350
longitude de deslizamento para o carro	x_t	-0,350 +0,350 M
posição inicial do carro	x_0	0,000 M

Fonte: Autoria própria (2022)

A Figura 11 ilustra o ensaio de simulação para o sistema de pêndulo invertido. Nota-se que o ângulo θ oscila de forma a atingir o equilíbrio natural do sistema na vertical para baixo e que seu movimento oscilante tem como consequência a oscilação do carro, afastando-se naturalmente da posição x inicial.



Fonte: Autoria própria (2022), MatLab R2021a

Vale ressaltar que por não se tratar de simulação, para os sistemas pendulares deste trabalho optou-se por negligenciar as características geométricas da estrutura do pêndulo. No entanto, é interessante considerar o efeito do atrito oferecido pelo ar para a movimentação do pêndulo, que depende das características construtivas do sistema para isso para poder considerar essa força de atrito, utilizou-se como alternativa o valor do coeficiente de atrito do pivotamento μ_t , disponível no trabalho de Peres (2019).

3.2 MODELAGEM DO CONTROLADOR PID

Para que a implementação do controlador PID seja feita em meios digitais, como em um algoritmo computacional, o controlador discreto deve ser representado através de equações de diferenças. O controlador utilizado neste trabalho está baseado pela Equação 21 a Equação 23.

Foi necessário, inicialmente, estabelecer saturação para a parcela integral para evitar que crescesse indefinidamente caso o erro permanecesse por um tempo maior. Porém, para o caso do pêndulo invertido em que, inerentemente o sistema precisa estabilizar-se na posição zero rapidamente, tais saturações não foram mais necessárias.

A sintonia dos parâmetros P, I e D foram feitos pelo método tentativa e erro, buscando o melhor desempenho para o sistema e poder comparar com o controlador MPC proposto.

3.3 MODELAGEM DO CONTROLADOR SS-MPC

Uma característica do controlador SS-MPC é que ele se propõe a controlar o sistema utilizando previsões de um modelo linear. Esta característica traz a desvantagem inerente de estar utilizando um modelo aproximado e não o real. Porém, devido à robustez inerente que o controlador possui por utilizar a estratégia de horizonte deslizante, o fato de utilizar um modelo aproximado pode não ser um problema para o controlador, de maneira geral. E esta característica surge como uma vantagem: o controlador SS-MPC pode, ainda que utilizando-se de um modelo aproximado e, conseqüentemente, com fácil resolução por parte do otimizador, encontrar uma solução de controle suficientemente adequada.

Portanto, para a parametrização do controlador utiliza-se o modelo linearizado do sistema que pode ser representado pelas equações

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{-u + (M + m)g\theta}{ML} \\ \ddot{x} = \frac{u - gm\theta}{M} \end{cases} \quad (75)$$

cuja representação em espaço de estados dada pela matriz de dinâmica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g(M + m)/ML & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -mg/M & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

a matriz de entrada

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/ML \\ 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \quad (77)$$

a matriz de distúrbios

$$P = \begin{bmatrix} p_t \\ 0 \\ p_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (78)$$

a matriz de saída

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (79)$$

e enfim, a matriz de transmissão direta

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Dessa forma é possível obter o modelo de predição para o pêndulo invertido, sendo o conjunto no espaço de estados dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + Bu + P \\ y = C \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + Du \end{array} \right. \quad (81)$$

ou, de forma completa

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g(M+m)/ML & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -mg/M & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/ML \\ 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} p_t \\ 0 \\ p_x \\ 0 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{array} \right. \quad (82)$$

sendo esse conjunto de equações a representação da planta em tempo contínuo.

O modelo no espaço de estados discretizado com tempo de amostragem t_s de 0,05 *seg.*, resultando em

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0593 & 0,0510 & 0 & 0 \\ 2,3968 & 1,0593 & 0 & 0 \\ -0,0057 & -0,0001 & 1,0000 & 0,0500 \\ -0,2308 & -0,0057 & 0 & 1,0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0091 \\ -0,3674 \\ 0,0028 \\ 0,1106 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{array} \right. \quad (83)$$

A discretização do modelo no espaço de estados foi feita utilizando o comando `c2d` do MatLab, que faz a discretização pelo método do segurador de ordem zero. A Tabela 3 demonstra os parâmetros do controlador.

Tabela 3 - Principais definições para simulação do controlador MPC

<i>Descrição</i>	<i>Notação</i>	<i>Valor</i>
horizonte de predição	N	40
ponderação para a ação de controle	qu	0,01
ponderação para variável de estado ângulo "theta" θ	$qz1$	200
ponderação para variável de estado posição "x" x	$qz3$	15
predição de perturbação no pêndulo	p_t	
predição de perturbação no carro	p_x	

Fonte: Autoria própria (2022)

O otimizador utilizado foi o `quadprog` do MatLab, que é um *solver* de programação quadrática, cujo objetivo é encontrar o mínimo da função J sujeito às restrições do problema de otimização.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A seguir serão apresentados os resultados obtidos para os controladores PID e SS-MPC a partir de simulações de um sistema de pêndulo invertido modelado e estruturado computacionalmente com o auxílio do programa computacional MatLab. Serão discutidos tais resultados com o intuito de expor as principais características do controlador da família MPC frente ao clássico controlador PID com o típico arranjo paralelo ilustrado anteriormente pela Figura 4.

As simulações foram divididas em 3 cenários:

- Cenário 1: condições nominais do sistema. O objetivo deste cenário é avaliar o desempenho dos controladores para uma condição inicial em que o pêndulo esteja a 0,1 rad.
- Cenário 2: perturbação na posição x do carro. O objetivo deste cenário é avaliar o desempenho de ambos os controladores para uma perturbação que ocorra na posição do carro. Para casos em que a perturbação futura seja conhecida⁵, o controlador MPC pode levar isto em conta. Este cenário considera que o MPC tem a informação futura da perturbação.
- Cenário 3: Saturação da ação de controle. O objetivo deste cenário é avaliar o desempenho de ambos os controladores para o caso em que a ação de controle seja limitada.

O resultado das simulações nos diferentes cenário estão apresentados da Figura 12 à Figura 16 e estas foram subdivididas em subfiguras, a saber:

- a) Representação da inclinação de ângulo θ do pêndulo em relação a vertical para cima;
- b) Representação do deslocamento da posição x do carro ao centro da trajetória horizontal;
- c) Representação do esforço de controle exercido pelo controlador PID e/ou SS-MPC;
- d) Representação ampliada do item c) no transitório principal em discussão.

⁵ Em sistemas de controle não é incomum conhecer valores futuros de referência, como podem ser mudança de parâmetros em determinados horários, mudança de trajetória previamente conhecida, etc.

4.1 SIMULAÇÃO DOS CONTROLADORES PID E SS-MPC

Os controladores PID e SS-MPC propostos, foram projetados utilizando o ambiente simulacional MatLab. O simulador foi parametrizado segundo as definições mostradas na Tabela 4. Como é esperado para um caso real, o motor do pêndulo possui limitação para o seu acionamento, sendo que para este trabalho estabeleceu-se que as ações de controle dos controladores propostos, a priori, os valores mínimo e máximo como sendo $-5 u$ e $+5 u$ respectivamente, onde u é uma unidade de ação de controle.

Tabela 4 - Principais definições para a simulação do sistema: Cenário 1

<i>Descrição</i>	<i>Notação</i>	<i>Valor</i>
número de iterações	nit	200
tempo de amostragem	ts	0,05 S
vetor de tempo para geração de gráficos	T	$0: ts: nit * ts$ 10 S
ângulo inicial do pêndulo invertido	θ_0	0,1 Rad 5,73 Graus
referência de posicionamento angular para o pêndulo	θ_{ref}	0 Rad 0 Graus
posição inicial do carro	x_0	0,00 M
referência de posicionamento linear para o carro	x_{ref}	0,00 M
longitude de deslizamento para o carro	x_t	$-\infty \text{ } \text{e} \text{ } +\infty$ M
limites para ação de controle	$u_{m\acute{a}x}$	+5
	$u_{m\acute{i}n}$	-5 [u]

Fonte: Autoria própria (2022).

4.1.1 Cenário 1: Resultados com o Controlador PID

O controlador PID foi sintonizado pelo método tentativa e erro, baseando-se no conhecimento adquirido sobre cada um dos parâmetros P, I e D. Os resultados de simulação para o sistema compensado pelo controlador PID são ilustrados pela Figura 12 e seus parâmetros de sintonia são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 - Principais definições para simulação do controlador PID

<i>Descrição</i>	<i>Notação</i>	<i>Valor</i>
<i>PID para o ângulo θ do pêndulo</i>	<i>PID_t</i>	
ganho proporcional P	<i>kp_t</i>	20
ganho integral I	<i>ki_t</i>	2
ganho derivativo D	<i>kd_t</i>	0,07
<i>PID para a posição x do carro</i>	<i>PID_x</i>	
ganho proporcional P	<i>kp_x</i>	5
ganho integral I	<i>ki_x</i>	0,5
ganho derivativo D	<i>kd_x</i>	0,05

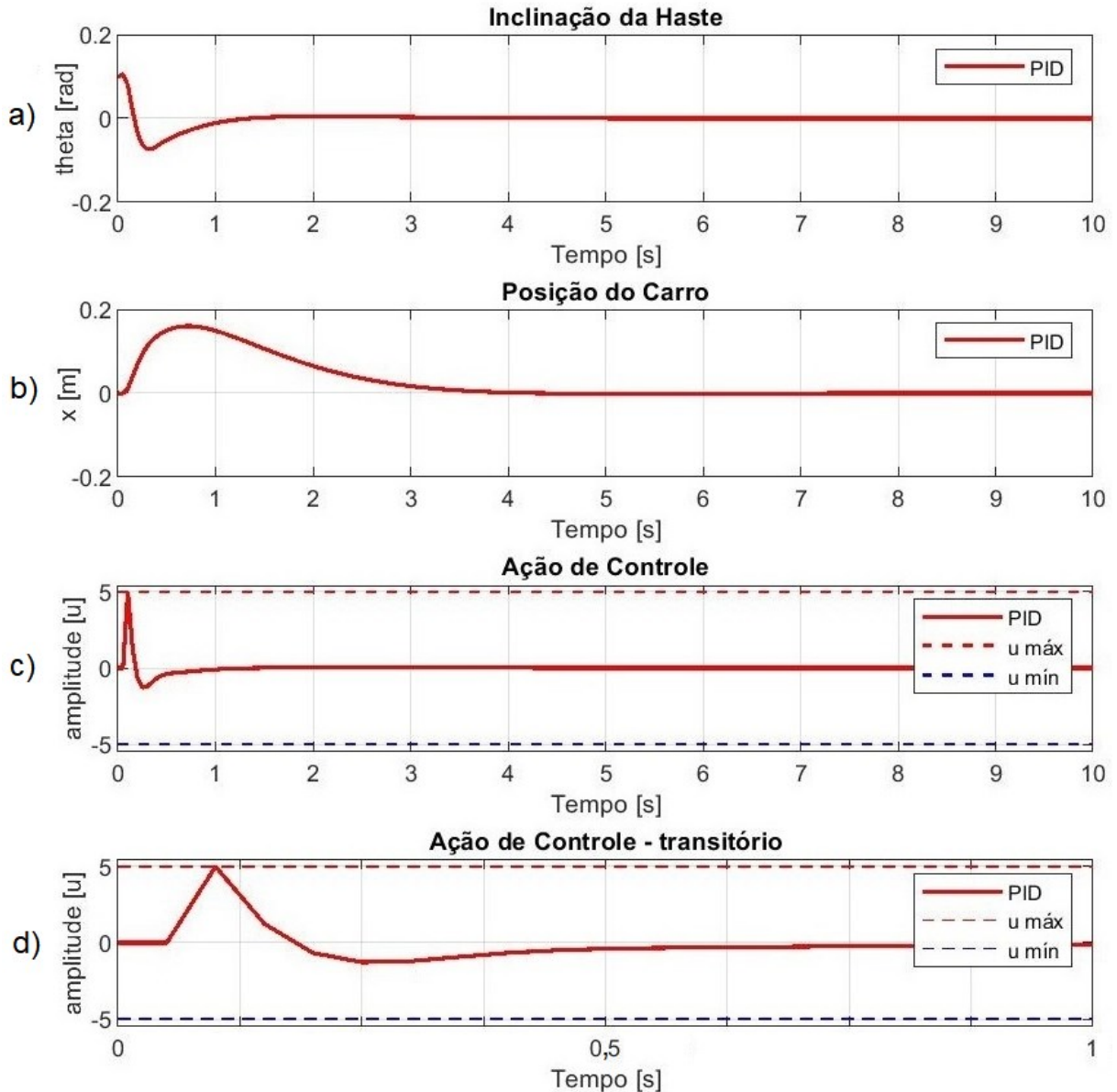
Fonte: Autoria própria (2022).

Para o desempenho do controlador PID, é verificado na Figura 12 a) que o controlador manteve o pêndulo em equilíbrio e estabilizou-se no ângulo de 0 rad antes de 2 s. Na Figura 12 b), após aproximadamente 4 s, o controlador PID foi capaz de alcançar o posicionamento de referência do carro, posição de x igual a zero, estabilizando-se nesta posição.

O esforço de controle ilustrado na Figura 12 d) chegou à saturação superior logo após o início da simulação, tendo seu pico inferior de esforço próximo de $1 u$, no tempo próximo de 0,25 s, estabilizando-se em torno de 1 s. Sendo assim, é plausível concluir que as sintonias dos controladores PID_t e PID_x foram satisfatórias para o sistema de pêndulo invertido.

É importante destacar que ambos controladores PID, PID_t de ângulo e PID_x de posição possuem apenas uma forma de atuar sobre o sistema, pois a ação aplicada no sistema é a soma de ambas, tendo apenas um atuador, o motor. Isto significa que o sistema é sub-atuado, ou seja, há menos ações de controle do que graus de liberdade do sistema (deslocamento do pêndulo e deslocamento do carro). Isto é o resultado de um sistema SIMO (uma entrada e duas saídas: θ e x). Esta característica faz com que, por vezes, as ações de controle possam ser, inclusive, conflitantes, já que em determinado momento o PID_t de ângulo pode querer levantar a haste e o PID_x de posição esteja querendo incliná-la para poder ajustar a posição do sistema. Este fato é relevante no que diz respeito à dificuldade que a estratégia de controle enfrentará para manter ambos os objetivos concomitantemente.

Figura 12 - Gráficos de desempenho do controlador PID



Fonte: Autoria própria (2022), MatLab R2021a

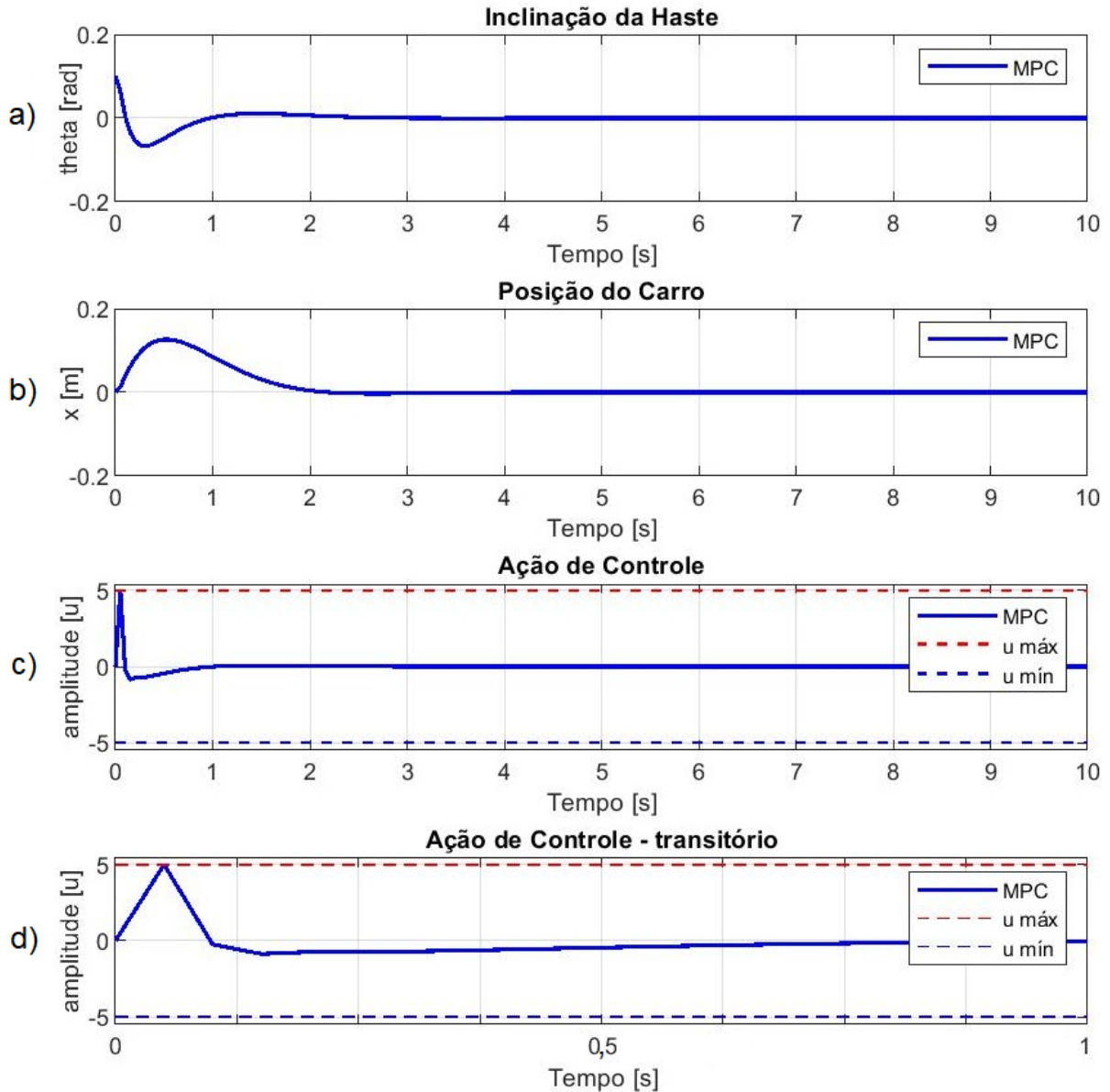
4.1.2 Cenário 1: Resultados com o controlador SS-MPC

Para o controlador SS-MPC, os resultados obtidos pela simulação do sistema de pêndulo invertido são ilustrados pela Figura 13 e seus principais parâmetros de configuração foram apresentados na Tabela 3.

Na simulação do MPC, notou-se pela Figura 13 d), que a ação de controle ao iniciar a simulação. No entanto, com praticamente a mesma velocidade com a qual atingiu o pico de limitação superior, a ação de controle cruzou o eixo de magnitude zero, permanecendo um pouco abaixo dessa linha e, aproximadamente

após 0,15 s, subiu gradativamente até alcançar zero, estabilizando-se logo após o intervalo de 1 s.

Figura 13 - Gráficos de desempenho do controlador SS-MPC



Fonte: Autoria própria (2022), MatLab R2021a

Essa ação de controle deslocou o carro, Figura 13 b), em sentido positivo por pouco mais de 10 cm, sendo que o carro foi deslocado gradativamente para a posição x de referência, passando pelo zero do deslocamento por volta dos 2 s e permanecendo estável. Já o pêndulo, com a ação de controle, foi deslocado para um ângulo de aproximadamente $-0,1$ rad, Figura 13 a), e em menos de 0,5 s estava retornando para o ângulo de referência, cruzando o zero angular logo após o

primeiro segundo, seguindo muito próximo do ângulo θ de referência até atingir lentamente para a estabilidade por volta dos 4 s.

Dado os resultados da simulação para o SS-MPC, é plausível considerar como satisfatório o desempenho desse controlador na atuação desse sistema de pêndulo invertido.

É interessante destacar que, diferentemente do controlador PID, o MPC possui uma *função custo* na qual são incluídos todos os objetivos de controle, a saber: ângulo θ do pêndulo em zero e posição x do carro em zero. Por ser uma função única, apesar dos objetivos separadamente poderem ser conflitantes, o controlador busca encontrar a melhor ação de controle levando em conta todos os parâmetros do problema de otimização.

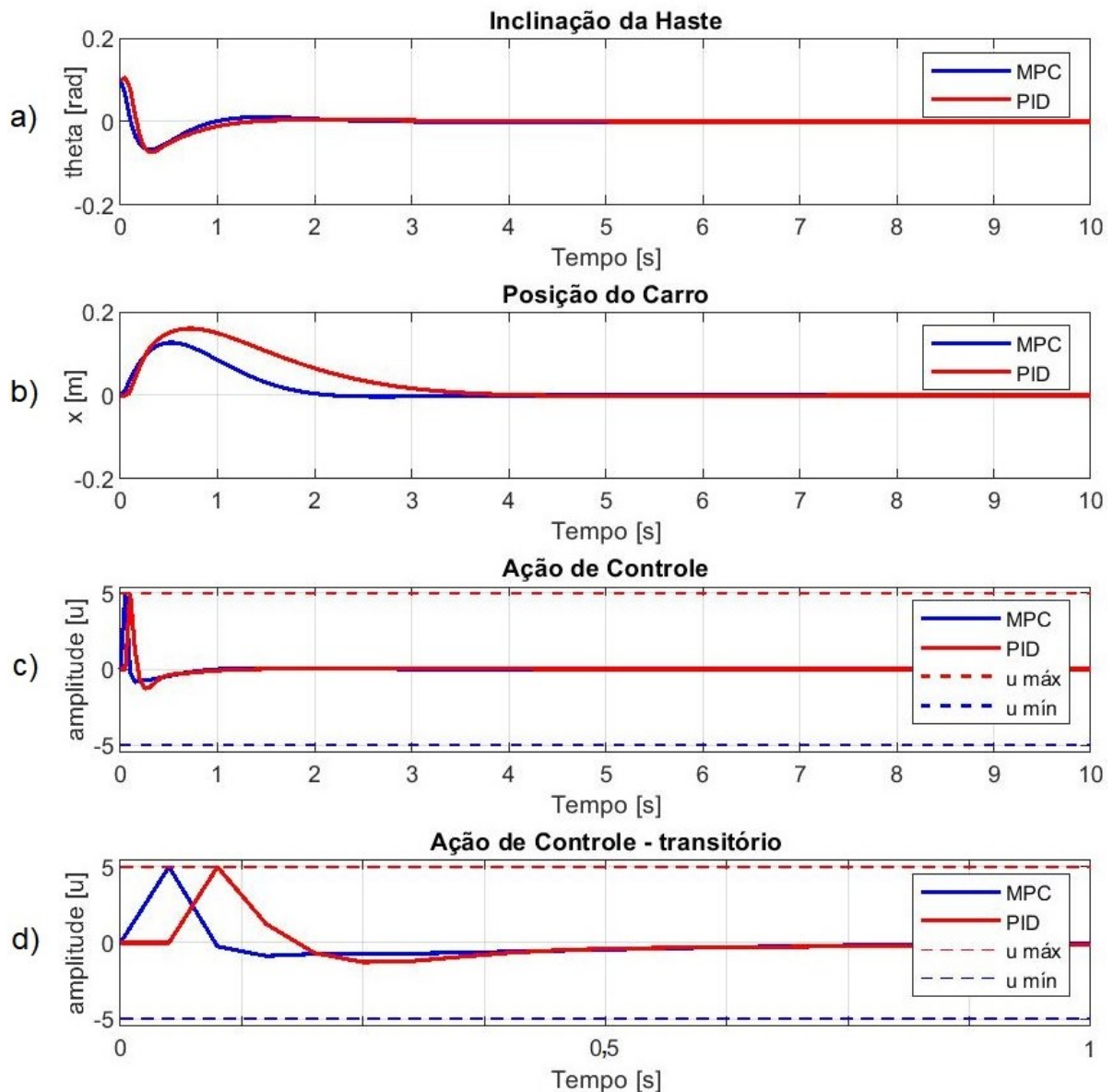
4.1.3 Cenário 1: Comparativo entre SS-MPC e PID

Haja visto o desempenho individual de cada um dos dois controladores propostos para o sistema de pêndulo invertido, o controlador PID e o controlador SS-MPC, nesta seção serão apresentados, com ilustração da Figura 14, os resultados comparativos entre ambos os controladores.

A Figura 14 mostra a simulação de ambos controladores para o sistema de pêndulo invertido, na qual nota-se, em um primeiro momento, que ambos os controladores têm seus desempenhos muito semelhante para uma condição inicial de Theta. As evoluções das ações de controle são muito parecidas, entretanto na Figura 14 d) é visível um atraso no início da ação de controle do PID pela necessidade de duas amostras de instantes imediatamente anteriores, as quais são utilizadas pela componente derivativa do controlador PID para calcular a próxima ação de controle, um efeito de atraso que em muitos casos é indesejável. O ângulo θ mostrado na Figura 14 a) se comporta de modo muito semelhante tanto para o controlador PID quanto para o controlador MPC, salvo por um mínimo atraso do controlador PID em levar o ângulo θ à posição de referência. Já para o posicionamento do carro ilustrado na Figura 14 b), o controlador SS-MPC consegue levar a posição x a zero antes, por conseguir executar a ação de controle mais cedo que a execução da ação de controle do PID.

Como dito anteriormente, é importante destacar que o controlador PID é do tipo SISO e foram necessários dois controladores trabalhado de modo paralelo para satisfazer os requisitos do sistema de pêndulo invertido, o PID_t para o posicionamento angular e o PID_x para o posicionamento linear.

Figura 14 - Desempenho PID x SS-MPC



Fonte: Autoria própria (2022), MatLab R2021a

Diferentemente do conjunto de controladores PID, para o controlador da família MPC a ação de controle é calculada sem a necessidade de múltiplos controladores, haja visto que este método admite vários critérios em uma mesma função objetivo que pode priorizar ou ponderar uma minimização no esforço da ação de controle u ao mesmo tempo que busca satisfazer as múltiplas referências de

entrada. Nesta simulação foram estabelecidos os objetivos de manter o pêndulo em equilíbrio com uma ponderação de controle das oscilações, bem como manter o carro na posição x desejada com outra ponderação de controle para a movimentação linear do conjunto. Como resultado, as características do controlador da família MPC o torna capaz de alcançar os mesmos objetivos que um conjunto de controladores PID com melhor desempenho.

4.2 OUTRAS SIMULAÇÕES PARA O PID E O SS-MPC

Além de um comparativo entre os controladores propostos dentro de uma situação de condição inicial nula, como apresentado no Cenário 1, foi analisado o comportamento do sistema, no Cenário 2, quando sujeito a perturbações na posição do carro. Já no Cenário 3, analisa-se o desempenho do sistema quando a ação de controle é sujeita aos seus limites operacionais máximos e mínimos (ou seja, é restrita). Dessa forma, observaram-se outras características muito interessantes do MPC que as distinguem dos controladores clássicos PID.

4.2.1 Cenário 2: Existência de Perturbações

Para simular a resposta do sistema sujeito a perturbações na posição x do carro, foi feita uma simulação em que foi inserida a informação de que o carro foi deslocado $+0,2$ m no instante de simulação em 5 s. Tal perturbação perdurou por apenas um período de amostragem ts . Os parâmetros desta simulação estão na Tabela 6 e os gráficos são ilustrados pela Figura 15.

Tabela 6 - Alterações no simulador para ocorrência de perturbação: Cenário 2

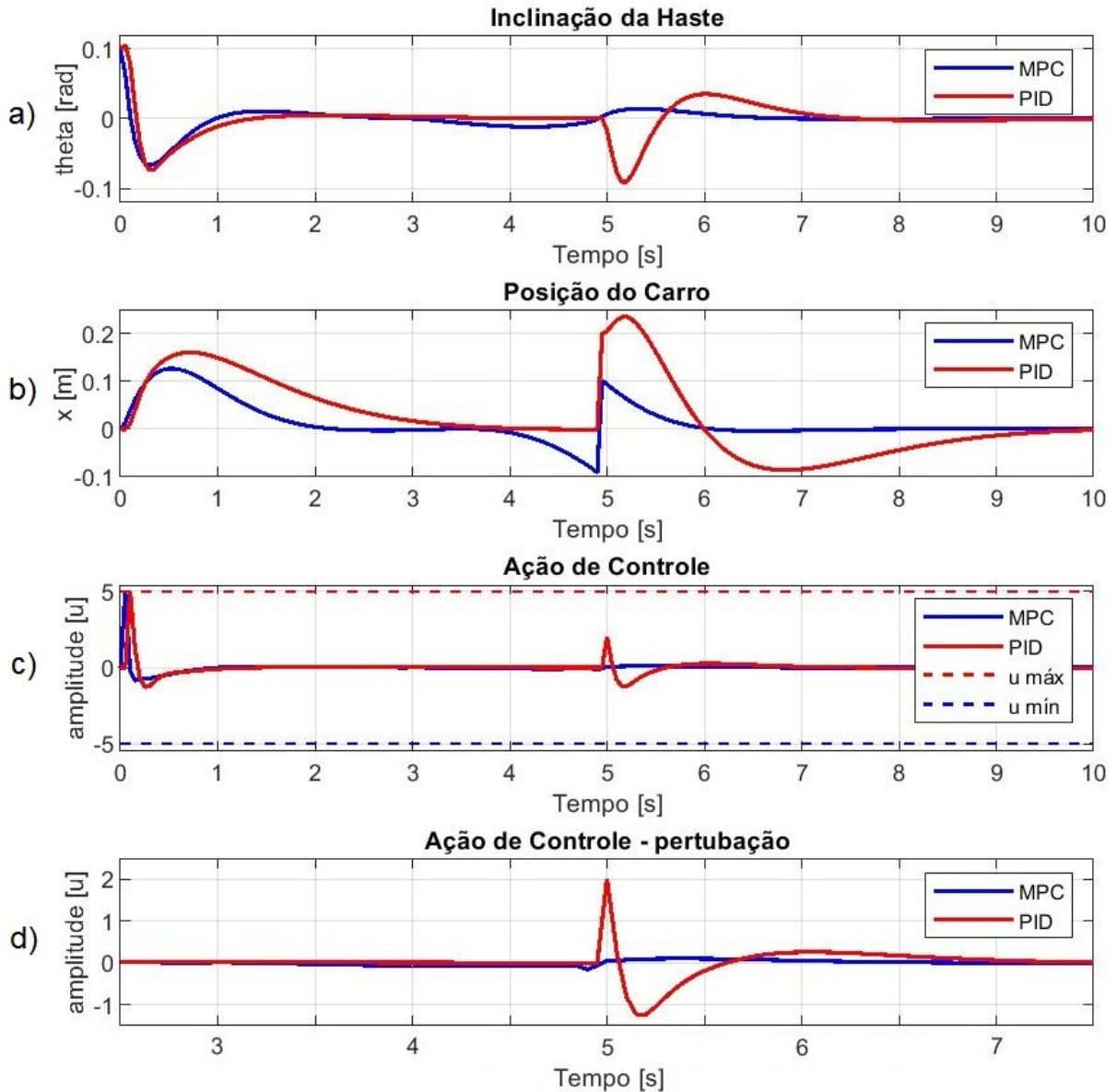
<i>Descrição</i>	<i>Notação</i>	<i>Valor</i>
iteração de ocorrência da perturbação	it_p	5 S
duração da perturbação	t_p	ts S
variável de incidência e magnitude da perturbação	x	+0,2 M

Fonte: Autoria própria (2022)

Para o caso da existência de perturbações, especialmente daquelas que forem conhecidas ou que se saiba que virão a acontecer, nota-se uma grande diferença no desempenho do controlador PID em relação ao desempenho do

controlador SS-MPC. Como exemplo desse tipo de perturbação, foi inserido na simulação um deslocamento repentino do carro para fora de sua posição de referência em vinte centímetros à direita no instante de tempo de cinco segundos.

Figura 15 - Desempenho PID x SS-MPC – ocorrência de perturbação



Fonte: Autoria própria (2022), MatLab R2021a

Neste caso, ilustrado pela Figura 15 b), no instante em que ocorre a perturbação, a ação de controle do PID leva o carro da posição x de referência para a posição aproximada de +20 cm buscando compensar o deslocamento do ângulo θ do pêndulo ilustrado na Figura 15 a), que se aproximou de +0,1 rad. Em seguida, o sistema ultrapassou o ângulo θ de equilíbrio no instante 5,5 s, retornando ao ângulo θ de referência e estabilizando-o por volta dos 8 s. Após seguir aumentando a

distância da posição x de forma gradual como visto na Figura 15 b), a ação de controle do PID faz com que o carro busque a posição x de referência, a qual é ultrapassada aos 6 *seg.*, alcançando quase -10 cm após os 6,5 s e, por fim, lentamente estabilizando-se na posição x de referência, após 10 s.

A ação de controle do PID atua bruscamente na ocorrência da perturbação, fato que pode ser observado na Figura 15 d), gerando uma ação de controle de $2u$ e descendo a quase $-1,5u$, seguindo então, uma trajetória gráfica muito semelhante à do ângulo θ descrita anteriormente ao subir o vale de $-0,1$ rad. Em relação ao controlador PID, haja visto o quarto gráfico da Figura 15, este modifica sua ação de controle somente após o acontecimento do evento, para então tentar recuperar o sistema em relação às referências pré-definidas, acarretando em um maior esforço de controle, um maior tempo de recuperação para as posições de referências e mudanças bruscas no ângulo θ para o equilíbrio do pêndulo.

Já em relação ao SS-MPC nesta mesma situação, devido ao fato que é possível oferecer a informação antecipada de perturbações futuras (caso estejam disponíveis), este busca antecipar-se aos efeitos da perturbação, modificando a ação de controle antes mesmo de que ocorra o evento. É fato que a comparação com o controlador PID pode ser "injusta" por não ter a possibilidade, na sua formulação original, de receber dados de perturbação futura. Porém, este Cenário foi concebido para destacar tal possibilidade, ainda que seja evidente o melhor desempenho do MPC frente ao PID. O MPC adianta-se ao evento da perturbação e, por volta dos 4 s de simulação modifica a ação de controle antecipadamente, levando o carro 10 cm à esquerda, como pode ser visto na Figura 15 b). Em seguida busca compensar levando o carro 20 cm à direita e finalmente, tal como atuou no carro ao se adiantar à perturbação, leva este a outros 10 cm à esquerda, retornando o carro para a sua posição x de referência zero com um mínimo esforço de controle, bem como uma mínima variação no ângulo θ de equilíbrio do pêndulo. Vale ressaltar que, quase instantaneamente após a ocorrência da perturbação, o SS-MPC havia iniciado o retorno do carro da posição x de $+10$ cm para a posição x de referência, sendo essa uma ação de controle notadamente diferente à ação do controlador PID.

Para o SS-MPC, é possível inserir naturalmente a modelagem das perturbações como outra entrada ao sistema. Essa atuação do controlador MPC se deve a sua janela de predição, ou seja, é o horizonte de predição N que possibilita

estimar o desempenho do sistema para todos os $y(k + j)$ a cada $j|_1^N$ passos à frente, e que quanto maior seja este horizonte N menor será a percepção das perturbações pelo processo. Uma excelente característica ausente no controlador PID.

4.2.2 Cenário 3: Redução nos Limites da Ação de Controle

Assim como ocorre em aplicações reais, a ação de controle é limitada pelos limites físicos do atuador. Para verificar o comportamento do sistema com ambos controladores, foram feitas algumas simulações cujos parâmetros estão na Tabela 7 e os resultados gráficos são ilustrados na Figura 16.

Tabela 7 - Alterações no simulador para limitação das ações de controle: Cenário 3

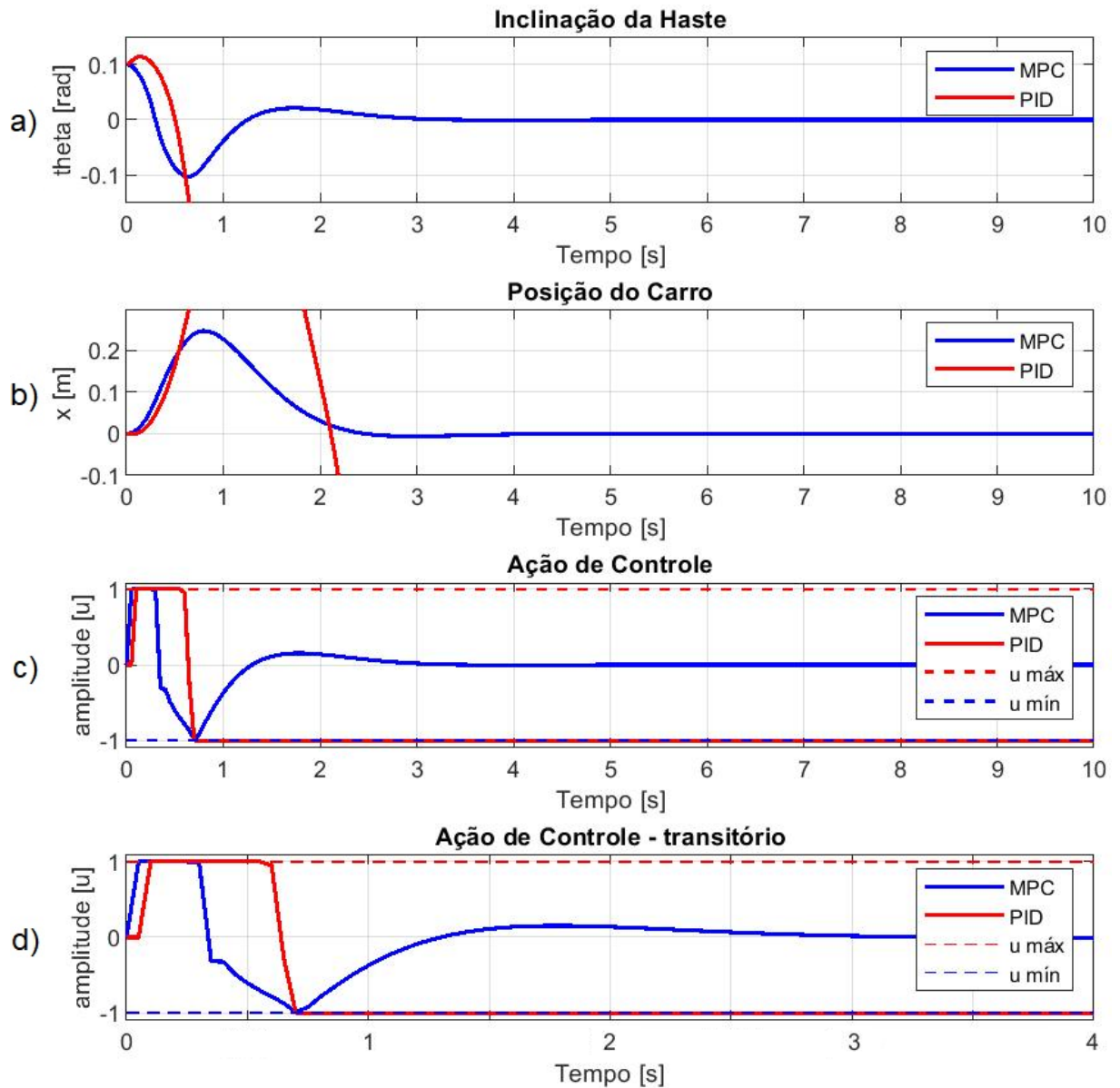
<i>Descrição</i>	<i>Notação</i>	<i>Valor</i>
limites para ação de controle	$u_{máx}$	+1
	$u_{mín}$	-1 [u]

Fonte: Autoria própria (2022)

Neste cenário, para o controlador PID, a ação de controle ilustrada pela Figura 16 d) chegou à saturação superior e permaneceu até passados os 0,5 s, quando então, em algum ponto a haste girou 180° (ou seja, caiu) e o controlador perdeu a capacidade de controlar o sistema. A partir desse momento o controlador PID tornou-se incapaz de seguir exercendo qualquer tipo de ação de controle suficientemente eficiente a ponto de equilibrar o pêndulo na vertical, Figura 16 a), seguindo pela trajetória linear para uma posição de $x \rightarrow (-\infty)$.

Já o controlador SS-MPC, apesar de atingir os limites de ação superior e inferior nos mesmo tempos que o controlador PID, foi capaz de equilibrar o pêndulo que chegou ao ângulo θ de $-0,1$ rad logo após os 0,5 s, estabilizando-se suavemente no ângulo θ de referência por volta dos 4 s. Logo após o instante em que o pêndulo atingiu o vale do ângulo θ , a posição x alcançou seu pico de deslocamento por volta dos +25 cm, e da mesma forma que o pêndulo, o carro retornou suavemente a posição x referencial e estabilizando-se por volta dos 4 s.

Figura 16 - Desempenho PID x SS-MPC – ação de controle limitada



Fonte: Autoria própria (2022), MatLab R2021a

O MPC, por ser um controlador baseado em um processo de solução de um problema de otimização, permite que sejam inseridas restrições para esse problema, fato que permite que o controlador tenha a informação da saturação de forma intrínseca, facilitando o controle nas proximidades dessa região de saturação.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho buscou apresentar as principais características de um controlador SS-MPC efetuando comparativos de desempenho frente ao clássico controlador PID de configuração tipicamente paralela, aplicando ambos os controladores ao sistema de pêndulo invertido.

Os resultados obtidos neste trabalho foram satisfatórios, haja visto que a simulação do sistema pêndulo invertido teve uma atuação bastante próxima do real, assim como a atuação dos controladores.

Os resultados demonstraram a habilidade que o controlador MPC tem frente a possibilidade de inserir no cálculo da ação de controle eventuais perturbações futuras. Por outro lado, o MPC apresentou melhores resultados na situação em que a ação de controle é limitada.

De forma geral, era esperado que o MPC, por ser uma estratégia de controle avançada utilizando recursos de otimização, apresentasse um desempenho melhor. Porém, cabe ressaltar que é possível, para o caso irrestrito, que o controlador MPC tenha um equivalente ao controlador PID (mais detalhes sobre essa formulação podem ser encontrados em Alessio e Bemporad (2009)).

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Como trabalhos futuros, pretende-se implementar outros dos sistemas pendulares mencionados no referencial teórico para novos levantamentos comparativos envolvendo o controlador SS-MPC. Pretende-se construir um protótipo dos dois sistemas pendulares, o normal e o invertido como meio didático, podendo fomentar estudos e pesquisas sobre os controladores MPC, ou mesmo, proporcionando um primeiro contato e conhecimento à essa técnica de controle avançado.

Ainda, pretende-se explorar as possibilidades que o controlador preditivo oferece no que diz respeito à garantia de factibilidade, já que o otimizador pode, em determinado momento, não oferecer solução factível. Preliminarmente, notou-se que ao utilizar um horizonte de predição considerado grande, este tipo de problema não ocorre, mas permanece como intensão de estudos a compreensão da problemática

existente na implementação de um controlador MPC no que diz respeito à garantia de factibilidade e estabilidade. Tais assuntos são abordados no artigo seminal de Rawlings, Angeli e Bates (2012) onde apresentam-se os fundamentos para o chamado MPC Econômico que é o MPC que apresenta as garantias citadas anteriormente. Ainda, o artigo de Mayne (2014) apresenta alguns dos desenvolvimentos recentes na área de controladores preditivos e algumas perspectivas para o futuro, material que servirá como base para a continuidade dos estudos nesta área.

REFERÊNCIAS

ALBARELLO, Janine da R.; DUARTE, Kelly P.; FAORO, Vanessa. Oscilação e velocidade do pêndulo simples na modelagem matemática. **Vivências: Revista Eletrônica de Extensão da URI**, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Erechim, v.9, n.17, p.83-94, out. 2013. ISSN 1809-1636. Disponível em: http://www2.reitoria.uri.br/~vivencias/Numero_017/artigos/pdf/Artigo_08.pdf. Acesso em 16 fev. 2022.

ALESSIO, Alessandro; BEMPORAD, Alberto. A survey on explicit model predictive control. **Nonlinear Model Predictive Control**. v.384, p.345-346, ISBN: 978-3-642-01094-1. Springer, 2009. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-01094-1_29.

ÅSTRÖM, Karl J.; HÄGGLUND, Tore. **Advanced PID Control**. Research Triangle Park, NC 27709: ISA, 2005.

BESSA, Carlos D. R. **Estratégia de controle com compensação dos efeitos do tempo morto aplicado a sistemas de ordem superior**. Natal – RN: Tese (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/22565/1/CarlosDeyvinsonRegesBessa_DISSERT.pdf. Acesso em: 21 maio 2022.

CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. A. **Model Predictive Control**, 2. ed. London: Springer-Verlag, 2007. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing).

CHEN, Chi-Tsong. **Analog and Digital Control System Design: transfer-function, state-space, and algebraic methods**. New York, New York: Oxford University Press, 1993.

COELHO, Antonio A. R.; JERONYMO, Daniel C.; ARAÚJO, Rejane de B. **Sistemas Dinâmicos: controle clássico e preditivo discreto**. Florianópolis: Editora UFSC, 2019. (Coleção Didática).

CONCEIÇÃO, Felipe C.; BECCARO, Wesley; JUSTO, João F. Ensinando métodos de discretização para projeto de sistemas de controle: comparação de controladores PID em sistemas embarcados. **JAIC – Journal of Applied Instrumentation and Control**, v.2, n.7 (2019), p. 8-15, 15 out. 2020. DOI: 10.3895/jaic.v7n2.10197 ISSN: 2318-4531. Disponível em: <https://revistas.utfpr.edu.br/bjic/article/view/10197>. Acesso em: 15 jun. 2022.

COSTA, André P. da; LIRA, Valnyr V.; SILVA, Samuel A. da. Simulações de pêndulo simples e invertido. **Congresso Norte Nordeste de Pesquisa e Inovação - VII CONNEPI**, out. 2012. ISBN 978-85-62830-10-5. Disponível em: <https://propi.ifto.edu.br/ocs/index.php/connepi/vii/paper/viewFile/3877/2554>. Acesso em: 17 fev. 2022.

DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. **Sistemas de Controle Modernos**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

FIGUEIREDO, Rafael A. DANTAS, Márcio J. H. Dinâmica do sistema carro-pêndulo. **FAMAT em Revista**, n.11, p. 205-230, out. 2008. Disponível em: <https://docplayer.com.br/25140025-Dinamica-do-sistema-carro-pendulo.html>. Acesso em: 27 maio 2022.

FRANKLIN, Gene F., POWELL, J. David; EMAMI-NAEINI, Abbas. **Sistemas de Controle para Engenharia**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

FUSER, Ruhan. **Projeto de controladores robustos sujeito a falhas no atuador: uma aplicação ao conversor buck-boost**. Toledo – PR: Tese (bacharelado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Eletrônica, Bacharelado em Engenharia Eletrônica, 2014. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/15820/2/TD_COELE_2014_1_07.pdf. Acesso em: 25 maio 2022.

GIORGINI, André L. **Implementação de um controlador PID digital para robótica baseado em computação reconfigurável**. São Carlos – SP: Tese (mestrado) – Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Ciências de Computação e Matemática Computacional, 2001. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55134/tde-18012018-172104/publico/AndreLinharesGiorgini.pdf>. Acesso em: 03 jun. 2022.

GOLNARAGHI, M. Farid; KUO, Benjamin C. **Sistemas de Controle Automático**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

KHALIL, Hassan K. **Nonlinear Systems**. 3. ed. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education, 2002.

KLEIN, Mauri J.; MARASCHIN, Leonardo B.; VALDIERO, Antonio C.; RASIA, Luiz A. Desenvolvimento de um modelo matemático com atrito não linear para o pêndulo simples. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, v.2, n.1, 2014. DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0034 CMAC-Sul, Curitiba, 2014. Disponível em: <http://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/download/278/280>. Acesso em: 17 fev. 2022.

MARRUEDO, D. L. **Control predictivo de sistemas no lineales con restricciones: estabilidad y robustez**. Sevilla: Tesis (doctoral) Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla, 2002. Disponível em: <http://www.esi2.us.es/~limon/papers/LimonPHD02.pdf>. Acesso em: 18 out. 2021.

MAYNE, David Q. Model predictive control: recent developments and future promise. **Automatica: A Journal of IFAC, the International Federation of Automatic Control**. v. 50, issue 12, dec. 2014, ISSN: 2967-2986. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0005109814005160?via%3Dihub>. Acesso em 31 maio 2022.

MENDES, P. R. da C. **Energy management of renewable energy based microgrids**. Florianópolis – SC: Tese (doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/174435/344654.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 14 maio 2022.

MOREIRA, João P. de S.; SILVA, Eduarda N. da; DALBETO, Lucas de O.; LIÃO, Mariana de M. R.; CARVALHO, Amauri D. Estudo e modelagem de um pêndulo simples através de equações diferenciais e análise de vídeo assistida por computador. **Revista Acadêmica - Ensino de Ciências e Tecnologias**, Cubatão, v.5, n.5, ago./dez. 2019. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. Disponível em: https://intranet.cbt.ifsp.edu.br/qualif/volume05/1.Engenharias/Ed05_EN_04_37_58.pdf. Acesso em: 15 fev. 2022.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

OLIVEIRA, Eduardo M. **Implementação de técnicas de controle avançado a uma planta piloto de controle de vazão e temperatura de ar**. Belo Horizonte – MG: Tese (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Eletrônica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2008. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/FGJA-7D6JRR/1/eduardo_magalh_es_oliveira.pdf. Acesso em 10 maio 2022.

OLIVEIRA, Ivânia de. Conservação do momento angular: cinemática e dinâmica de rotações. **Leis de Conservação**, Santo André, <https://propg.ufabc.edu.br/mnpef-sites/leis-de-conservacao/conservacao-de-momento-angular/>, maio 2018. Programa de Mestrado Nacional em Ensino de Física da Sociedade Brasileira de Física do polo da Universidade Federal do ABC. Disponível em: <https://propg.ufabc.edu.br/mnpef-sites/leis-de-conservacao/cinemática-e-dinâmica-de-rotacoes/>. Acesso em: 15 fev. 2022.

PALANDI, Joecir; FIGUEIREDO, Dartanhan B.; DENARDIN, João C.; MAGNAGO, Paulo R.; WEBE, Karla. Movimento circular uniforme, movimento harmônico simples e ondas. **Cadernos Didáticos**, Porto Alegre, <https://www.ufsm.br/grupos/gef/material-adicional>, 2010. Grupo de Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria. Disponível em: <https://www.ufsm.br/cursos/graduacao/santa-maria/fisica/wp-content/uploads/sites/450/2020/02/osciond.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2022.

PERES, Luis G. **Modelagem e implementação de protótipo de ensaios de pêndulo invertido linear**. Ponta Grossa – PR: Tese (bacharelado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Eletrônica, Bacharelado em Engenharia Elétrica, 2019. Disponível em: http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/16240/1/PG_DAELE_2019_2_01.pdf. Acesso em: 06 jun. 2022.

RAWLINGS, James B.; ANGELI, David; BATES, Cuyler N. Fundamentals of economic model predictive control. **51st IEEE Conference on Decision and Control**. 10-13 dec. 2012. Maui, Hawaii, USA.

SHINNERS, Stanley M. **Modern Control System and Design**. 2. ed. New York: Wiley-Interscience, 1998.

SILVA, Lucian R. da. **Estudo de similaridades entre estratégias de MPC explícito e o PSF com anti-windup para sistemas com atraso**. Florianópolis – SC Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior em Engenharia de Automação e Sistemas, Início: 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/182824/349540.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 30 jun. 2022.

VARGHESE, Elisa S.; VINCENT, Anju K.; BAGYAVEERESWARAN Veeramani. Optimal control of inverted pendulum system using PID controller, LQR and MPC. **14th ICSET-2017 IOP - Conf. Series: Materials Science and Engineering**, p. 263, 052007, doi:10.1088/1757-899X/263/5/052007, 2017: IOP Publishing Ltd. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/263/5/052007>. Acesso em: 10 jun. 2022.

VERGARA-DIETRICH, José Dolores. **Contribuições ao controle preditivo e otimização com aplicação em energias renováveis**. Florianópolis – SC: Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/216310/PEAS0347-T.pdf?sequence=-1>. Acesso em: 25 out. 2021.

