

ppgmat

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

LEANDRO QUIRINO DOS ANJOS

**DESENVOLVENDO COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE
RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO
PARA OS ANOS INICIAIS**

LONDRINA

2023

LEANDRO QUIRINO DOS ANJOS

**DESENVOLVENDO COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE
RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO
PARA OS ANOS INICIAIS**

**DEVELOPING UNDERSTANDINGS ABOUT MATHEMATICAL
REASONING PROCESSES: A TEACHER'S EDUCATION PROPOSAL
FOR ELEMENTARY SCHOOL**

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman

LONDRINA

2023



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



LEANDRO QUIRINO DOS ANJOS

**CONTRIBUIÇÕES DE UM PROCESSO FORMATIVO PARA PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS
VISANDO A COMPREENSÃO DOS ENTENDIMENTOS ESSENCIAIS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 31 de Março de 2023

Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, Doutorado - Fundação Universidade Federal do Abc (Ufabc)

Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 31/03/2023.

**DESENVOLVENDO COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE
RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO
PARA OS ANOS INICIAIS**

LEANDRO QUIRINO DOS ANJOS¹

ELIANE MARIA DE OLIVEIRA ARAMAN



CADERNO

***PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES QUE
ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL***

¹ Contato: leandroquirino2011@gmail.com

APRESENTAÇÃO

PREZADO(A) FORMADOR(A),

É com muita satisfação que temos a oportunidade de apresentar a proposta de um processo de formação continuada intitulada *DESENVOLVENDO COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO PARA OS ANOS INICIAIS*. Trata-se de um processo de formação continuada, tendo-se como principal objetivo oportunizar aos professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, momentos de discussão e reflexão sobre os processos de Raciocínio Matemático.

A partir da realização de algumas Tarefas de Aprendizagem Profissional – TAP e das discussões em grupos e coletivas, pretendem-se propor aos participantes do processo de formação, momentos de análises e reflexões sobre os Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento dos processos de Raciocínio Matemático. Ressalta-se que as análises serão realizadas a partir de alguns registros de práticas (dados coletados durante o desenvolvimento de uma aula de matemática).

Esse processo de formação continuada foi elaborado à luz da fundamentação teórica envolvendo a abordagem dos Entendimentos Essenciais do Raciocínio Matemático, definidos por Lannin, Ellis e Elliot (2011), e a estrutura e encaminhamentos metodológicos propostos por meio do Modelo PLOT, proposto por Ribeiro e Ponte (2020).

Desde já desejamos que a proposta apresentada neste caderno sirva como apoio para o desenvolvimento de alguns processos de formação continuada, e que de alguma forma, as abordagens propostas a cada encontro, possam possibilitar a realização de discussões e reflexões tendo como principal foco o reconhecimento e as compreensões envolvendo os processos de Raciocínio Matemático.

Atenciosamente,

Os autores.

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do Raciocínio Matemático é um dos principais objetivos do ensino de Matemática (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018), e, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (2018), o seu desenvolvimento, deve ser contemplado por meio das propostas curriculares desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Segundo Jeannotte e Kieran (2017), os documentos curriculares sobre o ensino de matemática de todo o mundo preconiza o desenvolvimento do Raciocínio Matemático. No entanto, a forma como o Raciocínio Matemático é descrito nos documentos orientadores “tende a ser vago, assistemático, e até contraditório de um documento para o outro” (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.1-2), ou seja, há um entendimento polissêmico sobre o que é o Raciocínio Matemático².

Este caderno de formação continuada foi elaborado e utilizado durante o desenvolvimento de uma pesquisa³, que ocorreu por meio de uma investigação realizada a partir de contexto formativo voltado para professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Desta forma, a partir das reflexões e discussões promovidas ao se realizar algumas análises sobre os processos de RM, e o modo que são mobilizados por alguns alunos ao resolver uma tarefa matemática, pretende-se promover aos participantes do processo de formação o desenvolvimento de compreensões mais aprofundadas sobre os Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento dos processos de Raciocínio Matemático.

Acreditamos que o desenvolvimento de um processo formativo constituído a partir de reflexões baseadas na prática letiva, no caso deste processo de formação, as resoluções dos alunos, podem promover contribuições com o desenvolvimento profissional. Pois, consequentemente, isso pode viabilizar o desenvolvimento de algumas Oportunidades de Aprendizagem Profissional (RIBEIRO; PONTE, 2020) durante a realização do processo de formação continuada.

Segundo Ribeiro e Ponte (2020), as Oportunidades de Aprendizagem Profissional podem emergir a partir de um contexto interativo envolvendo discussões e reflexões

² Utilizaremos a sigla RM para a expressão Raciocínio Matemático.

³ Os resultados da pesquisa encontram-se na dissertação intitulada “Contribuições de um processo formativo para professores dos Anos Iniciais visando a compreensão dos Entendimentos Essenciais de Raciocínio Matemático” (ANJOS, 2023).

viabilizadas ao se promover um processo formativo utilizando alguns registros de prática. Ou seja, trata-se de um contexto de formação que propicia, por meio das interações entre os sujeitos envolvidos, uma aproximação entre as experiências vivenciadas em sala de aula e os conhecimentos científicos na perspectiva de promover algumas contribuições para o desenvolvimento da prática docente. Deste modo, ressalta-se que as discussões e reflexões podem ser promovidas a partir do desenvolvimento de algumas Tarefas de Aprendizagem Profissional – TAP envolvendo a utilização de alguns registros de prática (protocolos com resoluções dos alunos e transcrições de áudios coletados durante o desenvolvimento de uma aula de Matemática).

Ressalta-se que esta proposta de processo de formação continuada, foi estruturada com base no Modelo PLOT (Professional Learning Opportunities for Teachers⁴) proposto por Ribeiro e Ponte (2020). Diante disto, enfatiza-se que, durante a realização do processo formativo voltado para professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, apresenta-se neste caderno de formação uma proposta envolvendo o desenvolvimento de 3 TAP (Tarefas de Aprendizagem Profissional).

Com base nos estudos desenvolvidos em pesquisas sobre o desenvolvimento do RM, consideramos fundamental para o desenvolvimento de compreensões envolvendo os processos de RM, o estudo apresentado por Lannin, Ellis e Elliot (2011), pois os pesquisadores apresentam um modelo específico envolvendo os processos de RM para o ensino de Matemática no Ensino Fundamental, descrevendo quais são os Entendimentos Essenciais e a forma como eles podem ser mobilizados durante o desenvolvimento do RM.

Pensando-se no desenvolvimento de um processo de formação continuada para professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais, com foco nos processos de RM e nas ações que contribuem com o desenvolvimento profissional, percebe-se que a utilização do Modelo PLOT (Professional Learning Opportunities for Teachers), definido por Ribeiro e Ponte (2020), pode propiciar, por meio de algumas ações (PAF, TAP e IDP)⁵, o desenvolvimento de um processo formativo que viabilize a ampliação, por parte dos professores, das compreensões envolvendo os Entendimentos Essenciais do RM, assim como gerar Oportunidades de Aprendizagem Profissional.

Considerando, que um dos aspectos envolvidos no desenvolvimento deste processo de formação continuada, é propiciar aos participantes um processo formativo gerando algumas

⁴ Traduzindo temos: Oportunidades de Aprendizagem Profissional para professores.

⁵ Sugerimos que o formador realize o estudo do artigo “Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática” (RIBEIRO; PONTE, 2020). Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8659072/25615>

Oportunidades de Aprendizagem Profissional, durante o desenvolvimento das TAP pretende-se:

- Discutir e refletir sobre as resoluções matemáticas dos alunos, buscando compreender os raciocínios matemáticos desenvolvidos por eles.
- Reconhecer os processos de RM a partir das resoluções dos alunos.
- Discutir e refletir sobre os processos de RM, levando, em consideração, os aspectos fundamentais dos Entendimentos Essenciais.
- Identificar algumas das dificuldades em relação aos conceitos, propriedades e relações matemáticas apresentadas pelos alunos durante a resolução de uma tarefa matemática.
- Reconhecer, discutir e refletir sobre os conteúdos que são essenciais para auxiliar o aluno durante o processo de aprendizagem.
- Identificar os momentos em que são necessárias as intervenções do professor durante a resolução de uma tarefa matemática.
- Refletir sobre as ações didáticas que podem ser desenvolvidas a partir das práticas de ensino, ou seja, as práticas realizadas em sala de aula.
- Discutir sobre as dificuldades que o professor tem em relação à abordagem de um determinado conteúdo, discutindo principalmente sobre os conceitos, propriedades e relação matemáticas.
- Reconhecer que as resoluções (corretas ou incorretas) dos alunos podem apresentar argumentos que necessitam ser investigados. Devendo explorar os conceitos e ideias matemáticas utilizadas pelos alunos para resolver uma determinada tarefa de modo mais aprofundado.
- Refletir sobre a utilização da justificação matemática como um suporte para promover a aprendizagem.

Após esta introdução, apresentamos, a seguir, os elementos que constituem a organização deste processo de formação, a estrutura do processo de formação continuada e os encaminhamentos metodológicos para o desenvolvimento de cada encontro.

ESTRUTURA DO PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA⁶		
Encontros	Conteúdos	Carga Horária
1º Encontro	O que é o raciocínio matemático e os processos de raciocínio matemático. <i>Objetivo do encontro: discutir sobre os seguintes temas: o que é o raciocínio matemático e quais são os processos de raciocínio matemático.</i>	3 horas
2º Encontro	O que são e quais são os processos de Raciocínio Matemático. <i>Objetivo do encontro: mobilizar compreensões sobre os processos de Raciocínio Matemático e a relação com tarefas de natureza exploratória, assim como quais ações o professor pode desenvolver para auxiliar no desenvolvimento do Raciocínio Matemático.</i>	3 horas
3º Encontro	Reflexões sobre a aplicação de uma tarefa de exploratória: um olhar para os processos de Raciocínio Matemático. <i>Objetivo do encontro: realizar reflexões envolvendo a aplicação de uma tarefa matemática visando apropriação sobre a utilização de tarefas exploratórias em sala de aula.</i>	3 horas
4º Encontro	Processos de Raciocínio Matemático mobilizados durante a resolução de tarefas exploratórias. Parte 1 <i>Objetivo deste encontro é analisar algumas resoluções de uma tarefa matemática tendo como foco a identificação dos processos de raciocínio matemático.</i>	3 horas
5º Encontro	Processos de Raciocínio Matemático mobilizados durante a resolução de tarefas exploratórias. Parte 2 <i>Objetivo do encontro: analisar episódios da discussão promovida por uma dupla de alunos durante a resolução de uma tarefa matemática. Logo, o principal foco é a identificação dos processos de Raciocínio Matemático.</i>	3 horas

⁶ Sugerimos que o formador inclua na estrutura do processo de formação continuada alguns momentos para os professores discutirem sobre os conteúdos matemáticos envolvidos no desenvolvimento das TAP.

1º ENCONTRO

O QUE É RACIOCÍNIO MATEMÁTICO?

Objetivo do Encontro: Mobilizar compreensões sobre o conceito de Raciocínio Matemático.

Considerando que o objetivo deste processo de formação continuada é oportunizar aos professores momentos de discussão e reflexão sobre os processos de Raciocínio Matemático, pretende-se inicialmente discutir-se sobre alguns aspectos que embasam os estudos e discussões que serão realizadas durante o processo de formação. Desta forma, apresenta-se no decorrer deste texto, algumas características sobre o que é o raciocínio matemático e os seus processos.

De acordo com a BNCC (2018)⁷, raciocinar matematicamente trata-se de uma habilidade, portanto, para que os estudantes consigam adquirir esta habilidade, é necessário que alguns processos sejam propostos durante as práticas de ensino. Analisando-se a BNCC nota-se que alguns elementos estão implicitamente relacionados ao desenvolvimento do raciocínio matemático, por exemplo, quando se estabelece que o letramento matemático envolve as “habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas”. Neste sentido, apontamos a necessidade de compreender o que são conjecturas, como e quando elas são formuladas.

Durante a realização deste encontro pretende-se discutir sobre os processos de raciocínio matemático que envolva a formulação de conjecturas, a generalização, a exemplificação, a justificação (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Ressalta-se que de acordo com as pesquisadoras, também fazem parte do desenvolvimento do raciocínio matemático os processos de provar e provar formalmente, porém durante este encontro não serão discutidos estes processos, visto que envolvem aspectos mais sofisticados e que não são contemplados como habilidades no ensino de matemática para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Para auxiliar na compreensão sobre o conceito de Raciocínio Matemático, sugerimos o desenvolvimento da TAP 1.

⁷ Sugerimos que o formador realize a leitura da BNCC (2018, p. 265-266) para compreender os aspectos envolvendo o desenvolvimento do Raciocínio Matemático no Ensino Fundamental.

TAP 1 – VOCÊ SABE O QUE É RACIOCÍNIO MATEMÁTICO⁸?

Esta TAP consiste em discutir sobre as afirmações de alunos que podem ser consideradas como expressão de Raciocínio Matemático. Ela é dividida em dois momentos. No Momento 1, os participantes do processo de formação continuada devem individualmente analisar algumas afirmações de alunos, identificar e justificar porquê as afirmações podem ou não ser consideradas como expressão de Raciocínio Matemático. No Momento 2, deve-se promover uma discussão coletiva a partir da análise realizada no Momento 1.

Objetivo da TAP 1: identificar quais afirmações ou resoluções é uma expressão de raciocínio matemático, e na sequência, realizar uma discussão coletiva tendo-se com foco a compreensão do que é o raciocínio matemático. Durante o desenvolvimento desta TAP, pretende-se mobilizar compreensões sobre o conceito de Raciocínio Matemático.

Encaminhamentos metodológicos para o desenvolvimento da TAP 1:

- Momento 1 – Análise Individual
- Momento 2 – Discussão Coletiva

NOTAS PARA O FORMADOR

Quadro 1 - Considerações referentes a cada uma das tarefas, para ser utilizado durante o momento da discussão coletiva.

TAREFA 1: Não expressa o raciocínio matemático, pois o aluno não apresenta em sua resposta alguma relação ou propriedade matemática. Ele apenas relata o que observou durante a manipulação dos elásticos. Embora ele exemplifique por meio do desenho o que observou.

TAREFA 2: Apresenta aspectos do raciocínio matemático, inclusive elabora a conjectura que todas as figuras construídas por ele tem 8 cm de perímetro. Exemplifica e investiga se realmente é válida a sua conjectura.

TAREFA 3: É uma expressão de raciocínio matemático, pois o aluno possivelmente investigou o perímetro do quadrado e justificou o processo que utilizou para obter o dobro e o triplo da Figura 1.

TAREFA 4: Este episódio não demonstra expressão de raciocínio matemático, pois, os alunos apenas relatam e discutem sobre informações matemáticas que eles já conhecem.

TAREFA 5: Esta resolução é uma expressão de raciocínio matemático, pois, o aluno indica que 25 cm equivalem a uma parte de 1 metro, e juntando as quatro partes de 25 cm cada uma dá um metro.

Após a realização do Momento 1, em que os professores identificam quais das afirmações e resoluções expressam ou não o desenvolvimento do Raciocínio Matemático, sugerimos realizar-se um momento de leitura utilizando os aspectos teóricos sobre as definições de Raciocínio Matemático. E após, a leitura realizar o Momento 2.

⁸ Sugerimos a leitura do artigo intitulado “O conhecimento de futuros professores sobre os processos de raciocínio matemático antes e depois de uma experiência de formação” (VIEIRA; RODRIGUES; SERRAZINA, 2020), disponível em: <https://quadrante.apm.pt/article/view/23012/17075>

2º ENCONTRO

VOCÊ SABE QUAIS SÃO OS PROCESSOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO?

Objetivo do Encontro: Mobilizar compreensões sobre os processos de Raciocínio Matemático e a relação com tarefas de natureza exploratória, assim como quais ações o professor pode desenvolver, para auxiliar no desenvolvimento do Raciocínio Matemático.

TAP 2 – IDENTIFICANDO OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO EM RESOLUÇÃO DE TAREFAS

Esta TAP consiste em identificar os processos de Raciocínio Matemático por meio de algumas resoluções matemáticas e transcrições de áudios gravados durante o desenvolvimento de uma aula, em uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental. A TAP 2 deve ser realizada em dois momentos. Sugerimos que seja realizada a leitura e discussão do texto “Processos de Raciocínio Matemático (do material do participante)” antes da realização do Momento 1.

No Momento 1, os participantes do processo de formação continuada devem em duplas analisar algumas resoluções da tarefa e transcrições de áudios de uma dupla de alunos, identificando os processos de Raciocínio Matemático que são mobilizados por meio da resolução, e justificar porquê consideram a existência do processo identificado. Ressalta-se que neste momento, os professores devem discutir de modo, mais autônomo, ou seja, devem discutir e refletir com base em seus próprios entendimentos e compreensões. Cabe, ao formador o papel de fazer questionamento com a intenção de auxiliar os professores durante as discussões.

No Momento 2, deve-se promover uma discussão coletiva a partir da análise realizada no Momento 1. Neste momento, o formador pode realizar de modo mais pontual as suas intervenções com a intenção de auxiliar na compreensão dos processos de Raciocínio Matemático.

Objetivo da TAP 2: identificar quais processos de Raciocínio Matemático são mobilizados durante a resolução de uma tarefa matemática.

Encaminhamentos metodológicos para o desenvolvimento da TAP 2:

- Momento 1 – Análise em duplas ou grupos
- Momento 2 – Discussão Coletiva

3º ENCONTRO

PROCESSOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Objetivo do Encontro: Realizar reflexões envolvendo a aplicação de uma tarefa matemática visando apropriação sobre a utilização de tarefas exploratórias em sala de aula.

TAP 3 – REFLEXÕES SOBRE A APLICAÇÃO DE UMA TAREFA EXPLORATÓRIA E ANÁLISE DE RESOLUÇÕES: UM OLHAR PARA OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Esta TAP consiste em desenvolver reflexões envolvendo a aplicação de uma tarefa exploratória. Logo, pretende-se analisar algumas resoluções dos alunos, tendo-se como proposta a identificação dos processos de Raciocínio Matemático. Na primeira parte da TAP 3, os participantes do processo de formação continuada devem resolver a tarefa envolvendo a ideia de sequência numérica, e na sequência, discutir e refletir sobre algumas questões relacionadas ao processo de ensino-aprendizagem. Na segunda parte da TAP 3, os participantes devem analisar algumas resoluções da tarefa apresentadas por alguns alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental, tendo-se como foco, a identificação dos processos de Raciocínio Matemático por meio das resoluções dos alunos. E por fim, na terceira parte, realizar a análise de alguns episódios da discussão promovida por uma dupla de alunos enquanto resolviam a tarefa exploratória.

Objetivo da TAP 3: identificar os processos de raciocínio matemático durante a resolução de uma tarefa matemática.

Encaminhamentos metodológicos para o desenvolvimento da 1ª Parte da TAP 3:

- Momento 1 – Os participantes (em duplas ou grupos) devem resolver a tarefa exploratória.
- Momento 2 – Cada dupla ou grupo deve discutir e refletir sobre alguns aspectos envolvendo aplicação da tarefa em sala de aula.
- Momento 3 – Discussão coletiva: Cada dupla ou grupo deve apresentar a sua resolução e as reflexões que foram promovidas sobre a aplicação da tarefa. Durante este momento, o formador deve questionar sobre quais processos de raciocínio matemático estão sendo mobilizados por meio das suas resoluções.

4º ENCONTRO

IDENTIFICANDO OS PROCESSOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

PARTE 2

Objetivo do Encontro: *Analisar algumas resoluções de uma tarefa matemática tendo-se como foco a identificação dos processos de Raciocínio Matemático.*

Este encontro contempla o desenvolvimento da 2ª parte da TAP 3, no qual os participantes devem analisar algumas resoluções da tarefa apresentadas por alguns alunos, tendo-se como foco a identificação dos processos de Raciocínio Matemático que são mobilizados por meio das resoluções dos alunos.

Objetivo da TAP 3: identificar os processos de raciocínio matemático durante a resolução de uma tarefa matemática.

Encaminhamentos metodológicos para o desenvolvimento da 2ª parte da TAP 3:

- Momento 1 – Analisar em duplas ou grupos as resoluções de uma tarefa matemática, tendo-se como objetivo, identificar quais processos de Raciocínio Matemático os participantes consideram ser mobilizados com base na resolução da tarefa.
- Momento 2 – Cada dupla ou grupo deve apresentar para os demais participantes do processo de formação os processos de Raciocínio Matemático que foram e os que não foram identificados por meio da resolução, assim como, as suas justificativas. Neste momento, o formador deve mediar à realização da discussão coletiva, de modo que favoreça a interação dialógica com os demais participantes.

SUGESTÃO PARA O FORMADOR

A quantidade de resoluções a serem analisadas depende da quantidade de duplas ou grupos que será possível formar com os participantes do processo de formação continuada. Sugerimos no máximo a análise de duas resoluções por dupla ou grupo.

Sugerimos que seja realizada a leitura da “apresentação dos resultados” da dissertação “Contribuições de um processo formativo para professores dos Anos Iniciais visando a compreensão dos Entendimentos Essenciais de Raciocínio Matemático” (ANJOS, 2023).

5º ENCONTRO

IDENTIFICANDO OS PROCESSOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

PARTE 3

Objetivo do Encontro: *Analisar episódios da discussão promovida por uma dupla de alunos durante a resolução de uma tarefa matemática e da plenária realizada pelo professor ao finalizar a aplicação da tarefa em sala de aula. Logo, deve-se ter como foco a identificação dos processos de Raciocínio Matemático.*

Este encontro contempla o desenvolvimento da 3ª parte da TAP 3, no qual os participantes devem analisar alguns episódios da discussão promovida por uma dupla de alunos durante a aplicação da tarefa, tendo-se como foco a identificação dos processos de Raciocínio Matemático. Assim como, analisar alguns episódios da plenária realizada em sala de aula, após a aplicação da tarefa exploratória.

Objetivo da TAP 3: identificar os processos de raciocínio matemático durante a resolução de uma tarefa matemática.

Encaminhamentos metodológicos para o desenvolvimento da 3ª parte da TAP 3:

- Momento 1 – Tarefa em dupla ou grupos: analisar em duplas ou grupos as transcrições dos áudios, identificando os processos de Raciocínio Matemático.
- Momento 2 – Discussão coletiva: cada dupla ou grupo deve apresentar para os demais participantes do processo de formação continuada os processos que foram e os que não foram identificados em cada episódio. Assim como, as justificativas.

SUGESTÃO PARA O FORMADOR

Sugerimos que todas as duplas ou grupos analisem os mesmos episódios ao mesmo tempo. E que seja, realizado da seguinte forma:

Momento 1 envolvendo o Episódio 1, e na sequência Momento 2.

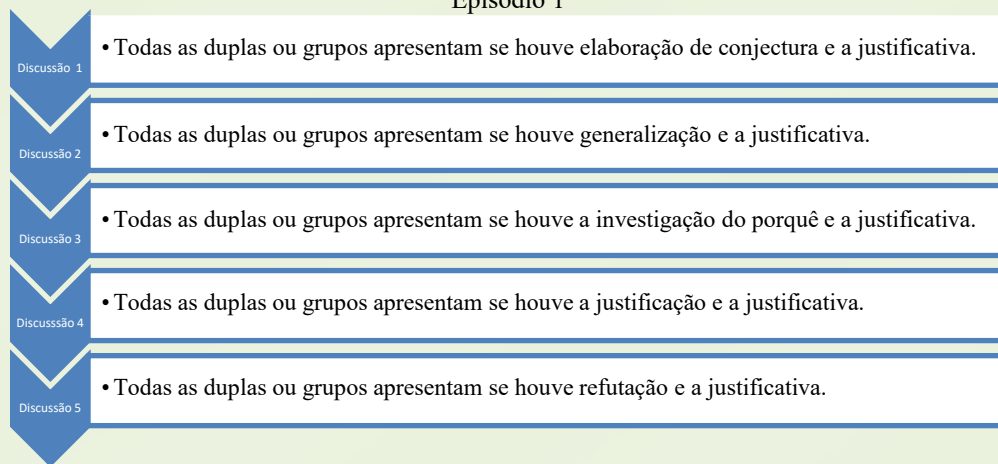
Momento 1 envolvendo o Episódio 2, e na sequência Momento 2. E assim, sucessivamente com os demais episódios.

Ressaltamos que nos espaços destinados as anotações apresentam-se o nome dos processos de Raciocínio Matemático que podem ser identificados por meio da análise em cada episódio, no entanto, isso não significa que em cada episódio será possível identificar todos os processos citados no respectivo espaço de anotações.

Caso o participante, identifique que não houve uma generalização no episódio 1, logo, ele deve justificar por que não houve a mobilização do processo de generalização. O mesmo encaminhamento deve ser realizado com os demais processos que não foram identificados.

Sugerimos que o Momento 2 seja realizado após a análise de cada episódio da seguinte forma:

Figura 1 – Esquema de organização para a discussão promovida no Momento 2 envolvendo a análise do Episódio 1



A mesma dinâmica deve ser realizada com os demais episódios que forem analisados durante o encontro.

*MATERIAL PARA SER IMPRESSO E
UTILIZADO DURANTE O
DESENVOLVIMENTO DAS TAP*

**DESENVOLVENDO COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE
RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO
PARA OS ANOS INICIAIS**

LEANDRO QUIRINO DOS ANJOS

ELIANE MARIA DE OLIVEIRA ARAMAN



CADERNO

***PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES QUE
ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL***

1º ENCONTRO

O QUE É RACIOCÍNIO MATEMÁTICO?

TAP 1 – VOCÊ SABE O QUE É RACIOCÍNIO MATEMÁTICO?

MOMENTO 1 – TAP 1

ANÁLISE INDIVIDUAL

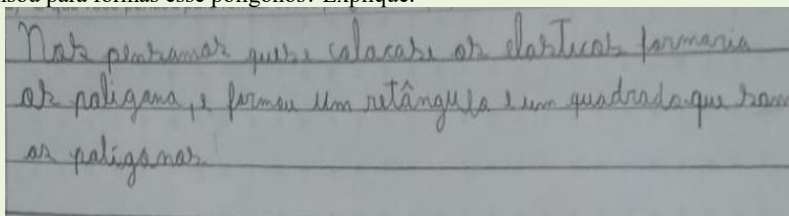
Considerando as seguintes resoluções de tarefas matemáticas e respostas dadas por alguns alunos, assinale um x nas que você considera como expressão de raciocínio matemático.

Quadro 1 – Resoluções e afirmações para análise – TAP 1

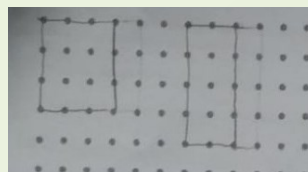
TAREFA 1: Renato tem um geoplano e gosta de construir figuras geométricas nele. Mas agora, ele tem algumas questões para resolver utilizando o geoplano. Vamos ajudá-lo?

1) Construa no geoplano um retângulo e um quadrado e depois desenhe na malha pontilhada.

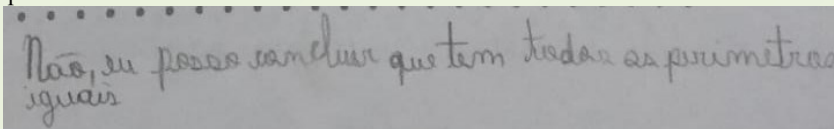
a) O que você pensou para formar esse polígonos? Explique.



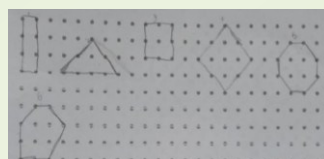
Nós pensamos que se colocasse os elásticos formaria os polígonos, e formou um retângulo e um quadrado que são os polígonos.



TAREFA 2: Construa várias figuras com o perímetro igual a 8 cm. Todas as figuras têm a mesma área? O que você pode concluir?



Não, eu posso concluir que tem todos os perímetros iguais.

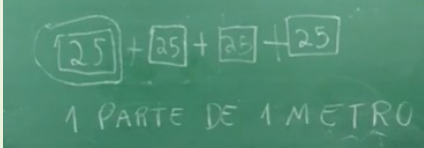


TAREFA 3: Renato formou no geoplano um quadrado com área 9 cm^2 e precisa encontrar o perímetro, depois preencher a tabela abaixo:

	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Área	9 cm^2	O dobro da área da figura 1	O triplo da área da figura 1
Perímetro	12	24	36

Agora mostre para Renato como fez para formar essas figuras escrevendo ou realizando os cálculos.

A gente multiplicou doze vezes dois, dá o dobro. Pegamos o resultado e acrescentamos mais doze, e deu o triplo.

<p>TAREFA 4: Episódio de discussão sobre a composição de 1 metro. Professora: Agora vocês vão formar 1 metro com esses pedaços de EVA e registrar como foi feito, não pode usar régua nem metro. Lorenzo: Pra dar 1 metro? Professora: Sim, pra dar 1 metro. Bruna: Posso colar? Lorenzo: Sim. Professora: Quantos centímetros tem o metro mesmo? Lorenzo, Guilherme e Bruna: 100 cm. Professora: Isso, 100 cm.</p>	
<p>TAREFA 5: Considerando que um pedaço de fita mede 25 cm, quanto vale essa parte em relação a 1 metro?</p> 	

Fonte: Dados da Pesquisa

Agora, explique por que você considera ou não considera as afirmações e respostas apresentadas no Quadro 1 como expressão de raciocínio matemático.

Espaço para anotações

<p>TAREFA 1:</p>
<p>TAREFA 2:</p>
<p>TAREFA 3:</p>
<p>TAREFA 4:</p>
<p>TAREFA 5:</p>

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Partindo do entendimento que o raciocínio matemático é uma das capacidades que os professores devem estimular durante o desenvolvimento das propostas de ensino de matemática, se faz necessário compreender o que de fato é o raciocínio matemático⁹.

Para Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 781), “raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas, ou seja, utilizar a informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”. Neste sentido, Jeannotte e Kieran (2017, p. 7) definem o “Raciocínio Matemático como um processo de comunicação com os outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos de outros enunciados matemáticos”.

Lannin, Ellis e Elliot (2011) definem que o raciocínio matemático é um processo que envolve as ações de conjecturar, generalizar, investigar o porquê, desenvolver e avaliar argumentos. Deste modo, pode-se entender que raciocinar matematicamente infere nas conexões matemáticas que os alunos estabelecem entre o conhecimento matemático que já sabem e a descoberta de novos conhecimentos, sendo estes argumentados e justificados matematicamente. Segundo Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012, p. 356) “o grande objetivo do ensino da Matemática é o desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos”.

Visando melhor compreensão, apresenta-se no Quadro 2 algumas definições para o raciocínio matemático:

Quadro 2 – Algumas definições para Raciocínio Matemático

Definição	Referência
“Processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos”.	JEANNOTTE; KIERAN (2017, p. 7)
Processo de inferência como o que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões.	STYLIANIDES (2009)
Processo que utiliza “informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”.	MATA-PEREIRA; PONTE (2018, p. 782)
Processo conjunto de conjecturar, generalizar, investigar porquê, argumentar e refutar se necessário.	LANNIN; ELLIS; ELLIOT (2011)
Um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas como verdadeiras (conhecimento prévio).	MORAIS; SERRAZINA; PONTE (2018)

Fonte: Araman; Serrazina (2020, p. 119)

⁹ Sugerimos a leitura do Capítulo 1 da dissertação “Contribuições de um processo formativo para professores dos anos iniciais visando a compreensão dos entendimentos essenciais de raciocínio matemático”

MOMENTO 2 – TAP 1

DISCUSSÃO COLETIVA

Considerando os argumentos apresentados no texto sobre o Raciocínio Matemático, discutam coletivamente sobre as respostas e as justificativas dadas no Momento 1 da TAP 1.

Após a discussão coletiva, definam, quando uma afirmação matemática pode ser considerada como expressão de Raciocínio Matemático.

Espaço para anotações

2º ENCONTRO

VOCÊ SABE QUAIS SÃO OS PROCESSOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO?

TAP 2 – IDENTIFICANDO OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO EM RESOLUÇÃO DE TAREFAS

PROCESSOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Para ler e discutir antes do Momento 1

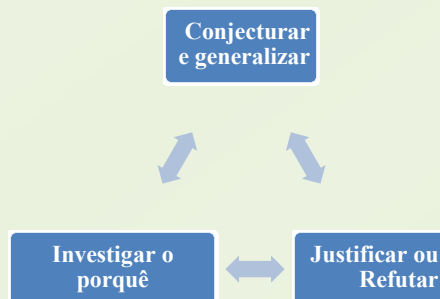
De acordo com Jeannotte e Kieran (2017) os processos de raciocínio matemático se dividem em dois aspectos: o aspecto da estrutura e o aspecto do processo. O aspecto da estrutura adotado pelas autoras se refere aos raciocínios dedutivo, indutivo e abdutivo. Já o aspecto do processo envolve as ações de generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar, classificar, justificar, provar e provar formalmente. De acordo com as autoras, os processos de raciocínio matemático estão intrinsecamente ligados às inferências que emergem a partir das narrativas produzidas na busca pelo desenvolvimento de um conhecimento matemático, sendo exigidas dos alunos diferentes habilidades cognitivas, pressupondo que os alunos evoluem na investigação envolvendo os raciocínios indutivo e dedutivo.

Considerando que neste processo formativo pretende-se discutir sobre o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático com foco nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, vamos focar principalmente nos processos de conjecturar, generalizar, identificar um padrão, comparar, classificar, exemplificar e justificar, pois os demais processos são mais direcionados a outros níveis de escolaridade.

Ao promover o desenvolvimento do raciocínio matemático é possível os alunos explorarem diferentes situações matemáticas, sendo que as mesmas dependendo da escolha da tarefa e a forma como é conduzida pelo professor pode ter o potencial de propiciar aos alunos, a abordagem de um conhecimento matemático partindo dos saberes que os alunos já dominam (conhecimento empírico) para adquirem um novo conhecimento, no entanto, há processos que exigem uma investigação mais complexa apoiada em definições, teoremas e postulados matemáticos, para possibilitar concluir que uma determinada afirmação matemática é válida.

Outro aspecto importante citado por Lannin, Ellis e Elliot (2011) é que os processos de raciocínio matemático são inter-relacionados, sendo representados pelas autoras conforme ilustração na Figura 1.

Figura 1 – Modelo de processos do raciocínio matemático



Fonte: Adaptado de Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 11)

O modelo proposto por Lannin, Ellis e Elliot (2011), parte de um conceito geral sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático, sendo definido pelos autores como uma grande ideia, ou seja, que o raciocínio matemático é um processo que envolve as ações de conjecturar, generalizar, investigar o porquê, desenvolver e avaliar argumentos, sendo composto pelos seguintes processos: conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar. Além de definir os processos que constituem cada ação, os autores definem que há nove entendimentos essenciais que subsidiam o desenvolvimento do raciocínio matemático. Sendo definidos conforme apresentados no Quadro 3.

Quadro 3 – Entendimentos Essenciais do Raciocínio Matemático e suas definições

Processos	Entendimento Essencial	Definição
Conjecturar e Generalizar	Entendimento Essencial 1	Conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras. Essas declarações são chamadas de conjecturas.
	Entendimento Essencial 2	Generalizar envolve identificar semelhanças entre os casos ou estendendo o raciocínio para além do intervalo em que se originou.
	Entendimento Essencial 3	Generalizar envolve reconhecer o domínio relevante para a aplicação da generalização.
	Entendimento Essencial 4	Conjecturar e generalizar envolve o uso e o esclarecimento do significado de termos, símbolos e representações.
Investigar o porquê	Entendimento Essencial 5	O raciocínio matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa.
Justificar e refutar	Entendimento Essencial 6	Uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas.
	Entendimento Essencial 7	Uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa.
	Entendimento Essencial 8	Justificar e refutar envolve avaliar a validade dos argumentos.
	Entendimento Essencial 9	Uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral não é um argumento baseado em autoridade, percepção, consenso popular ou exemplos.

Fonte: Autoria própria, adaptado de Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 12)

As definições contidas no Quadro 3 possibilitam compreender que os Entendimentos Essenciais do Raciocínio Matemático são processos que propiciam contribuições com o desenvolvimento do conhecimento matemático. Desta forma, torna-se fundamental que os alunos tenham a oportunidade de utilizar os processos de conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar mobilizado durante o desenvolvimento do Raciocínio Matemático.

Ressalta-se que o professor também assume um papel muito importante no desenvolvimento dos processos de Raciocínio Matemático, pois cabe ao professor proporcionar aos alunos tarefas desafiadoras que viabilizem aos alunos o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático. Analisando as definições sobre o Raciocínio Matemático, é perceptível que as compreensões a serem atribuídas a cada Entendimento Essencial do Raciocínio Matemático, não é algo tão evidente e preciso, por isso, apresentamos a seguir um breve resumo de algumas considerações envolvendo os aspectos dos Entendimentos Essenciais.

RESUMO DO QUE SÃO OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO¹⁰

- **Elaboração de conjectura:** O aluno faz uma afirmação com base na observação de um determinado conjunto de relações matemáticas.
- **Generalização:** O aluno a partir de um conjunto de relações matemáticas verifica que uma conjectura é válida, logo, admite e assume que existe uma relação matemática válida para qualquer situação.
- **Investigação do porquê:** O aluno utiliza argumentos matemáticos que buscam explicar por que a sua conjectura ou generalização é válida.
- **Justificação:** O aluno apresenta argumentos matemáticos que validam a sua conjectura ou generalização.
- **Refutação:** O aluno apresenta argumentos matemáticos que negam a validade da conjectura ou generalização formulada.

¹⁰ Para melhor compreensão do que são os Entendimentos Essenciais, sugerimos que seja realizada a leitura do “Capítulo 1” da dissertação “Contribuições de um processo formativo para professores dos Anos Iniciais visando a compreensão dos Entendimentos Essenciais de Raciocínio Matemático” (ANJOS, 2023).

MOMENTO 1 – TAP 2
EM DUPLAS OU GRUPOS

Analise as seguintes resoluções de tarefas e transcrições de áudios e indique quais dos processos de Raciocínio Matemático, você consegue identificar em cada resolução ou episódio da discussão entre os alunos. Justifique a sua resposta.

Processos que podem ser identificados: *elaboração de conjectura; generalização; investigação do porquê; justificação; e refutação.*

Caso considere não existir a mobilização de um determinado processo, justifique.

Resolução 1

- 1) Renato formou no geoplano um quadrado com área 9 cm^2 e precisa encontrar o perímetro, depois preencher a tabela abaixo:

Área	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Perímetro	9 cm^2	O dobro da área da figura 1	O triplo da área da figura 1
	12 cm	24 cm	36 cm

Agora mostre para Renato como fez para formar essas figuras escrevendo ou realizando os cálculos.

(Espaços para anotações)

Elaboração de conjectura

Generalização

Investigação do porquê

Justificação

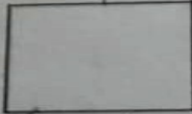
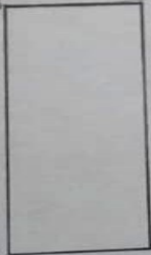
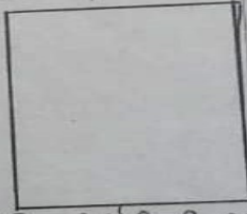
Refutação

Resolução 2

1) Renato formou no geoplano um quadrado com área 9 cm^2 e precisa encontrar o perímetro, depois preencher a tabela abaixo.

	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Área	9 cm^2	O dobro da área da figura 1 18 cm^2	O triplo da área da figura 1
Perímetro	12 cm	24 cm	36 cm

Agora mostre para Renato como fez para formar essas figuras escrevendo ou realizando os cálculos.

Figura 1	Figura 2	Figura 3
$\begin{array}{r} 3 \\ \times 3 \\ \hline 9 \end{array}$  <p>Área = 9 Perímetro = 12</p> <p>$3 \times 4 = 12$ $3 \times 3 = 9$</p>	$\begin{array}{r} 12 \\ \times 2 \\ \hline 24 \end{array}$  <p>Área = 32 Perímetro = 24</p> <p>$12 \times 4 = 24$ $9 \times 2 = 18$</p>	$\begin{array}{r} 12 \\ \times 3 \\ \hline 36 \end{array}$  <p>$12 \times 3 = 36$ $3 \times 9 = 27$</p>

Nós percebemos que as figuras ficaram diferentes com as multiplicações, e os tamanhos também mudaram.

(Espaços para anotações)

Elaboração de conjectura

Generalização

Investigação do porquê

Justificação

Refutação

Episódio 1: Transcrição de áudio de uma dupla de alunos enquanto resolviam a tarefa conforme apresentado na Resolução 1

(Obs.: F1 significa Fala 1, F2 significa Fala 2, ...)

F1 - Bruno: Tarefa 3. 1 Renato formou no geoplano um quadrado com área 9 cm^2 e precisa encontrar o perímetro. Depois preencher a tabela abaixo. Tá.

F2 - Maria: Então significa que cada quadrado é 1 centímetro, né?

F3 - Bruno: É. Então, a gente tem que fazer um de 9.

F4 - Maria: Sim, assim?

F5 - Bruno: Não, mais aí tem? Espera. A precisa fazer 5 mais 4.

F6 - Maria: Pronto. Aí, fiz um quadrado, 3 por 3.

F7 - Bruno: [contando os quadradinhos] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Então vai ser esse [referindo-se a construção do quadrado no geoplano].

F8 - Maria: O perímetro vai ser? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. [contando os segmentos que formam o quadrado de 9 cm^2 no geoplano].

F9 - Bruno: Tá, então 12. Agora, tem que fazer o dobro. Vai ser 24, o dobro.

F10 - Maria: Tá, aqui ele tá pedindo o perímetro e o dobro da área da figura abaixo.

F11 - Bruno: Tem que fazer os cálculos aqui, né? Mas, [pausa pensando] 18!

F12 - Maria: Não! Não pode ser 18!

F13 - Bruno: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 [contando no quadrado do geoplano]. F14

- Maria: Espera!! 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. Ué que está acontecendo. Não dá? Vamos colocar 24, porque o dobro de 12 é 24.

F15 - Bruno: Ué, vai que assim vai.

F16 - Maria: Acabei de entender o porquê de não está indo, tá vendo que aqui quando a gente faz isso, o que está aqui no meio não fica, 18, 19, 20, 21 e não dá certo de novo, do mesmo jeito. [manuseando o elástico] 22, 23, 24 ... É isso! Fica olhando. Se eu fizer uma [manuseando o elástico], agora conta.

F17 - Bruno: Tem que contar o do meio.

(Espaço para anotações)

Elaboração de conjectura

Generalização

Investigação do porquê

Justificação

Refutação

Episódio 2: Transcrição de áudio de uma dupla de alunos enquanto resolviam a tarefa conforme apresentado na Resolução 1

F1 - Bruno: Então, vai ser 24 mesmo? Então, $12 + 12$ é 24. Faz a conta aí embaixo.

F2 - Maria: Verdade. Nossa, a gente não fez aqui, né?

F3 - Bruno: Ah, mas não precisa!

F4 - Maria: Não, tem como.

F5 - Bruno: Agora, o triplo da área? Vai ser mais 3. Então, $12 + 12 + 12$.

F6 - Maria: O triplo da área da figura.

F7 - Bruno: Vai dá 36. Você colocou o centímetro?

F8 - Maria: Coloquei.

F9 - Bruno: Não precisa contar! Mas, vamos contar, né. Aqui vai dá 36 Ana.

F10 - Maria: Sim.

F11 - Bruno: Fazer um branco.

F12 - Maria: Professora, aqui, o dobro da figura 1, a gente tem que calcular a área ou o perímetro? O perímetro, né.

F13 - Professora: O dobro do quê? Olha aqui, essa aqui é a linha da área e essa do perímetro. Entendeu?

F14 - Bruno: Vamos ver se dá, 36. É Maria, tem que dá 36!

F15 - Maria: Mas deu.

F16 - Bruno: Vou contar. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36.

F17 - Maria: Deu certo. Tá, mas vai ficar um pouquinho só [referindo-se ao registro escrito], não vai?

F18 - Bruno: Você fez de mais e eu fiz de vezes.

F19 - Maria: É tão mais fácil fazer de vezes, Bruno [risos].

(Espaço para anotações)

Elaboração de conjectura

Generalização

Investigação do porquê

Justificação

Refutação

<p>Episódio 3: Transcrição de áudio de uma dupla de alunos enquanto resolviam a tarefa conforme apresentado na Resolução 1</p> <p><i>F1 - Bruno: A gente fez assim: 3 quadrados. Daí 12 cm o perímetro, daí a gente conta 3 vezes. F2 - A gente até tentou fazer, aumentar assim eles juntos, mas não estava dando certo. Parece que a gente não contou a parte, aí a gente dividiu.</i></p> <p><i>F3 - Professora: Tá, mais para fazer qual? Vocês fizeram 3 quadrados para quê? Não consegui entender.</i></p> <p><i>F4 - Bruno: um para descobrir o perímetro de 9.</i></p> <p><i>F5 - Professora: Esse aqui é a figura 1. Primeiro quadrado. Tá, e a figura 2?</i></p> <p><i>F6 - Bruno: A gente fez dois.</i></p> <p><i>F7 - Professora: dois quadrados, dobraram?</i></p> <p><i>F8 - Bruno: Depois, o triplo a gente fez mais um quadrado.</i></p> <p><i>F9 - Professora: Deu 24 a área com dois [a professora disse área, mas ela quis dizer deu 24 o perímetro dos dois quadrados]</i></p> <p><i>F10 - Bruno: Sim.</i></p>	(Espaços para anotações)
	Elaboração de conjectura
	Generalização
	Investigação do porquê
	Justificação
<p>Episódio 4: Transcrição de áudio de uma dupla de alunos enquanto resolviam a tarefa conforme apresentado na Resolução 1</p> <p><i>F1 - Professora: Tá, aqui no dobro da figura, você desenhou duas figuras iguais. Isso?</i></p> <p><i>F2 - Bruno: É.</i></p> <p><i>F3 - Professora: E você disse que o perímetro deu 24.</i></p> <p><i>F4 - Bruno: É.</i></p> <p><i>F5 - Professora: Mas é assim, eu preciso de uma figura que tenha o dobro dessa área. Não duas ou três figuras. Então, vamos ver. Quando vocês dobram a figura quanto que deu? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 [contando a área de dois quadrados]. É legal essa ideia. Mas eu gostei do pensamento de vocês. Então aqui vocês fizeram duas figuras e aí deu o dobro da área, três figuras deu o triplo da área, e seu fizesse 4 figuras, seu quisesse o quádruplo da área, vocês fariam 4 figuras. Terminem esse raciocínio de vocês, aí lá trás vocês por favor, é agora vou propor uma outra, o dobro da figura, ou seja, vocês vão pegar e desenhar outra figura que tenha o dobro da dessa área, uma figura só. Então, é 9 cm², o dobro vai ser quanto?</i></p> <p><i>F6 - Maria: É 18.</i></p> <p><i>F7 - Professora: 18. Então, vocês vão desenhar uma figura de área 18.</i></p>	(Espaços para anotações)
	Elaboração de conjectura
	Generalização
	Investigação do porquê
	Justificação
Refutação	

MOMENTO 2 – TAP 2

DISCUSSÃO COLETIVA

Neste momento, cada dupla ou grupo deve inicialmente apresentar as considerações sobre a análise realizada no Momento 1 da TAP 2. Após as apresentações, os demais participantes do processo de formação podem apresentar questionamentos ou pontuar aspectos que a dupla ou grupo não identificou. Importante, que no Momento 2 da TAP 2, o formador promova a mediação da discussão fazendo intervenções para auxiliar na compreensão dos processos de Raciocínio Matemático e nas justificativas que os professores produzem referente à identificação de cada processo de Raciocínio Matemático.

(Espaço para anotações)

SUGESTÃO DE LEITURA COMPLETAR

Caso os participantes queiram saber mais sobre as ações do professor durante o desenvolvimento de uma aula envolvendo o Ensino Exploratório e o que são as tarefas exploratórias, sugerimos a leitura dos seguintes artigos:

Artigo 1: Processos de Raciocínio Matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade (ARAMAN; SERRAZINA, 2020). Disponível em:

<https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6189/4212>

Artigo 2: Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem (PONTE, 2010). Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3043/1/10-Ponte-Union_21.pdf

3º ENCONTRO

PROCESSOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

1ª PARTE – TAP 3

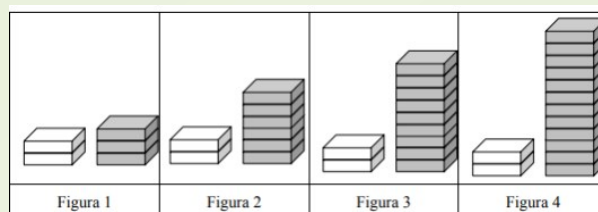
REFLEXÕES SOBRE O DESENVOLVIMENTO DE UMA AULA UTILIZANDO UMA TAREFA EXPLORATÓRIA

Esta 1ª parte da TAP 3 deve ser desenvolvida em dois momentos, sendo realizada em duplas ou grupos. No Momento 1, os professores devem resolver a tarefa exploratória. E, no Momento 2, deve-se realizar algumas reflexões sobre a aplicação da tarefa em sala de aula¹¹.

MOMENTO 1 – RESOLUÇÃO DA TAREFA EXPLORATÓRIA:

TAREFA EXPLORATÓRIA (Adaptada de Mosquito, 2008, p. 157):

Observe a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, seguindo uma determinada regra.



Fonte: Mosquito (2008, p. 157)

a) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 5**. Explique como você obteve cada resultado.

i. Número de azulejos brancos: _____

ii. Número de azulejos cinzentos: _____

iii. Número total de azulejos: _____

¹¹ Caso o formador opte por realizar o planejamento de uma aula envolvendo a aplicação de uma tarefa exploratória, sugerimos a leitura do artigo “Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática” (RIBEIRO; PONTE, 2020). Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8659072/25615>

b) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 10**. Explique como você obteve cada resultado.

i. Número de azulejos brancos: _____

ii. Número de azulejos cinzentos: _____

iii. Número total de azulejos: _____

c) Considerando a regularidade da sequência de figuras, qual figura terá um total de **38 azulejos**? Explique a sua resposta.

d) Considerando a regularidade da sequência de figuras, existe alguma figura com um total de **66 azulejos**? Explique a sua resposta.

e) Com base na observação da sequência de figuras, construa uma sequência numérica com **10 termos**. Explique qual regularidade você utilizou para escrever a sequência numérica e qual cálculo realizou para obter cada termo da sequência.

MOMENTO 2 – REFLEXÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA TAREFA

Após resolver a tarefa, discuta (em dupla ou grupo) as seguintes questões:

a) Em sua opinião, qual ano escolar é possível aplicar esta tarefa? Por quê?

b) A partir da sua resolução e do ano escolar que você escolheu. Cite e justifique quais conteúdos podem ser abordados com a aplicação desta tarefa.

c) Você acha que esta tarefa estimula o desenvolvimento do raciocínio matemático? Justifique sua resposta.

d) Esta tarefa é aberta ou fechada? Explique a sua resposta.

e) Em sua opinião, esta tarefa pode ser considerada de baixo, médio ou alto nível cognitivo?

Justifique a sua resposta.

d) O que você acha que os alunos vão perceber com facilidade durante a resolução da tarefa?

e) Quais as possíveis dificuldades os alunos poderão apresentar durante a realização da tarefa?

f) Levando em consideração que de acordo com a BNCC, o conteúdo sequências numéricas e regularidades devem ser abordado a partir do 1º ano do Ensino Fundamental. Quais orientações e questionamentos fazer para auxiliar os alunos a compreender e construir a sequência numérica com base na observação das figuras da tarefa 1? Explique o que você pensou.

MOMENTO 3 – REFLEXÃO SOBRE OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Apresente para os demais participantes do processo de formação, como a sua dupla ou grupo resolveu cada item da tarefa. Durante a sua apresentação, explique quais processos de Raciocínio Matemático vocês consideram estar sendo mobilizados por meio da sua resolução.

4º ENCONTRO

2ª PARTE – TAP 3

IDENTIFICANDO OS PROCESSOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: PARTE 1

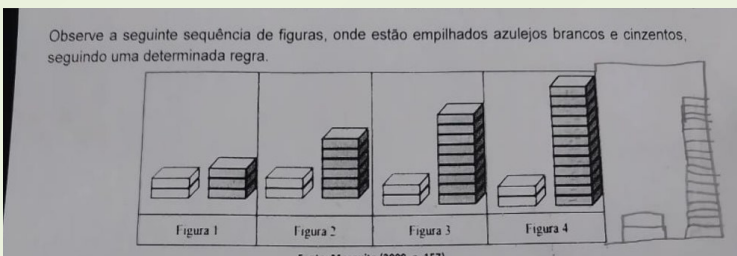
MOMENTO 1 – ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DA TAREFA

Neste momento, pretende-se analisar as resoluções e registros produzidos durante a aplicação da tarefa exploratória envolvendo o conteúdo de identificação de regularidades e padrões em sequências numéricas. Assim como, realizar a identificação dos processos de raciocínio matemático que demonstram ser mobilizados através da resolução da tarefa exploratória. Sendo assim, analise as seguintes resoluções da tarefa exploratória e indique quais dos processos de Raciocínio Matemático você consegue identificar em cada resolução. Justifique a sua resposta.

Processos que podem ser identificados: elaboração de conjectura; generalização; investigação do porquê; justificação; e refutação.

Caso considere não existir a mobilização de um determinado processo, justifique.

Observe a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, seguindo uma determinada regra.	Análise da Resolução do Aluno A (Espaços para anotações)
<p style="text-align: center;">Fonte: Mosquito (2008, p. 157)</p> <p>a) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a Figura 5. Explique como você obteve cada resultado.</p> <p>i. Número de azulejos brancos: <u>2</u></p> <p>ii. Número de azulejos cinzentos: <u>30</u></p> <p>iii. Número total de azulejos: <u>32</u></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 5px;"> <p><i>Deu oito porque quatro mais quatro dá oito, porque não dá outro resultado. E trinta, porque o número de azulejos deu a quantidade trinta. E deu trinta e dois porque somamos os dois da base.</i></p> </div>	<p>Elaboração de conjectura</p> <hr/> <p>Generalização</p> <hr/> <p>Investigação do porquê</p> <hr/> <p>Justificação</p> <hr/> <p>Refutação</p>
<p>Deu oito, porque quatro mais quatro dá oito, porque não dá outro resultado. E trinta, porque o número de azulejos deu a quantidade trinta.</p>	



Fonte: Mosquito (2008, p. 157)

a) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 5**. Explique como você obteve cada resultado.

i. Número de azulejos brancos: 2

ii. Número de azulejos cinzentos: 15

iii. Número total de azulejos: 17

Eu vi que a figura 1 estava com 2 azulejos brancos e 3 cinzentos, na figura 2 estava a mesma coisa, mas tinha mais 3 cinzentos, a mais então eu percebi que a regra é 3 em 3 no cinzentos e não sobe e nem diminui o branco.

Eu vi que a figura 1 estava com 2 azulejos brancos e 3 cinzentos, na figura 2 estava a mesma coisa, mas tinha mais 3 cinzentos a mais, então eu percebi que a regra é 3 em 3 no cinzentos, e não sobe e nem diminui o branco.

Análise da Resolução do Aluno B (Espaços para anotações)

Elaboração de conjectura

Generalização

Investigação do porquê

Justificação

Refutação

b) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 10**. Explique como você obteve cada resultado.

i. Número de azulejos brancos: 16

ii. Número de azulejos cinzentos: 60

iii. Número total de azulejos: 76

Na figura dez o azulejos brancos deu dezesseis. Por que oito mais oito dá dezesseis. Por que há outra resposta igual a sessenta, trinta mais trinta dá sessenta, e não tem como da outro número, o resultado deu setenta e seis. Por que juntado dezesseis mais sessenta dá 76.

Na figura dez o azulejos brancos deu dezesseis. Por que oito mais oito dá dezesseis. Por que há outra resposta igual a sessenta, trinta mais trinta dá sessenta, e não tem como da outro número, o resultado deu setenta e seis. Por que juntado dezesseis mais sessenta dá 76.

Análise da Resolução do Aluno C (Espaços para anotações)

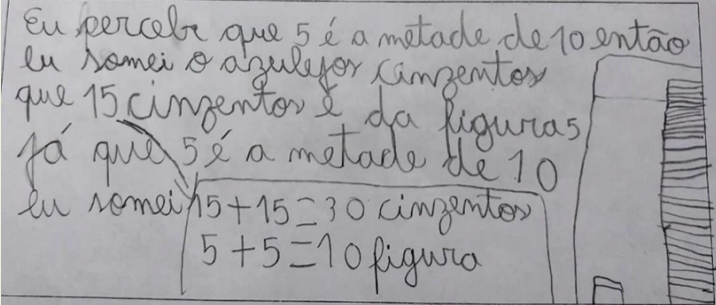
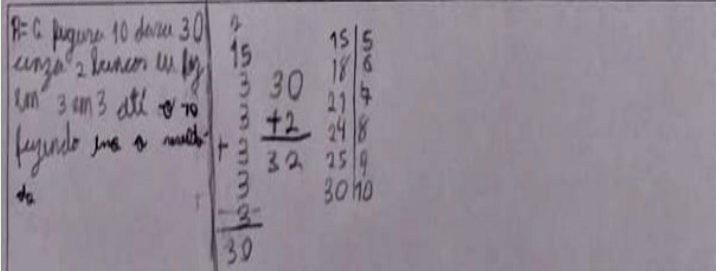
Elaboração de conjectura

Generalização

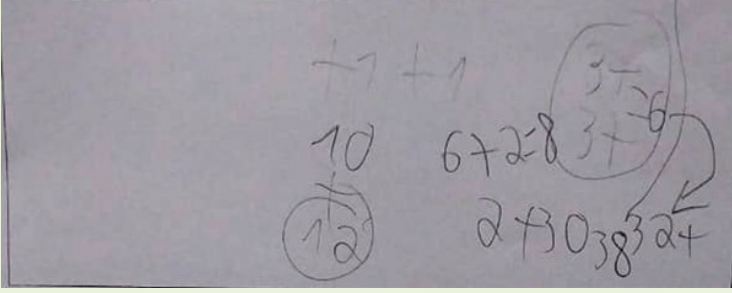
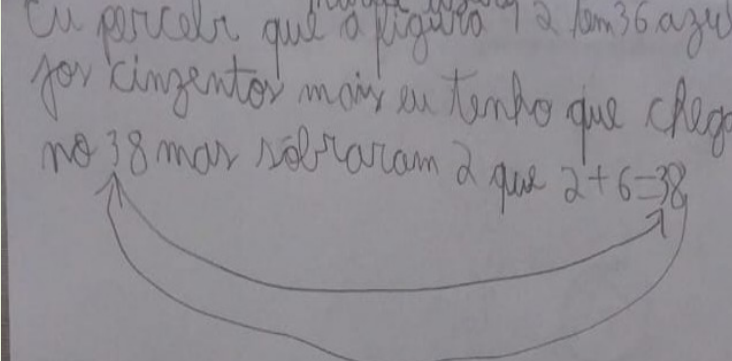
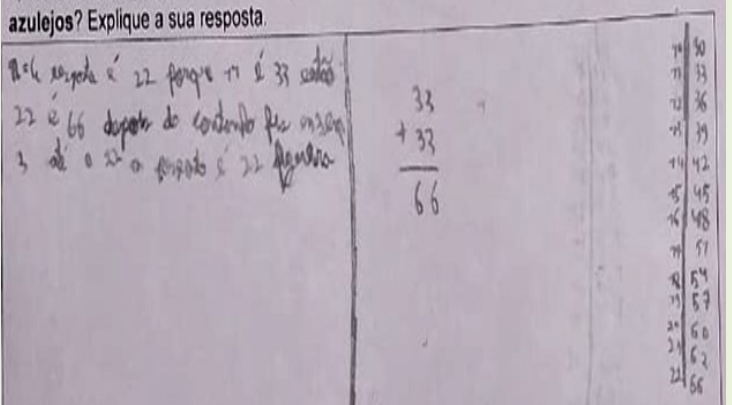
Investigação do porquê

Justificação

Refutação

<p>b) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a Figura 10. Explique como você obteve cada resultado.</p> <p>i. Número de azulejos brancos: <u>2</u></p> <p>ii. Número de azulejos cinzentos: <u>30</u></p> <p>iii. Número total de azulejos: <u>32</u></p> 	<p>Análise da Resolução do Aluno D (Espaços para anotações)</p> <p>Elaboração de conjectura</p>
<p><i>Eu percebi que 5 é a metade de 10, então eu somei o azulejos cinzentos que 15 cinzentos é da figura 5, já que 5 é a metade de 10 eu somei</i></p> <p>$15 + 15 = 30$ cinzentos</p> <p>$5 + 5 = 10$ figuras</p>	<p>Generalização</p> <p>Investigação do porquê</p> <p>Justificação</p> <p>Refutação</p>
<p>b) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a Figura 10. Explique como você obteve cada resultado.</p> <p>i. Número de azulejos brancos: <u>2</u></p> <p>ii. Número de azulejos cinzentos: <u>30</u></p> <p>iii. Número total de azulejos: <u>32</u></p> 	<p>Análise da Resolução do Aluno E (Espaços para anotações)</p> <p>Elaboração de conjectura</p>
<p><i>R: A figura 10 dará 30 cinzas e 2 brancos. Eu fiz em 3 em 3 até o 10, fazendo isso o resultado.</i></p>	<p>Generalização</p> <p>Investigação do porquê</p> <p>Justificação</p> <p>Refutação</p>

<p>b) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a Figura 10. Explique como você obteve cada resultado.</p> <p>i. Número de azulejos brancos: <u>2</u></p> <p>ii. Número de azulejos cinzentos: <u>30</u></p> <p>iii. Número total de azulejos: <u>32</u></p> <p><i>Como eu vi o padrão de 3 em 3, e então aqui eu apliquei esta regra — vezes 10, então esta foi a minha conclusão.</i></p>	<p>Análise da Resolução do Aluno F (Espaços para anotações)</p> <p>Elaboração de conjectura</p> <p>Generalização</p> <p>Investigação do porquê</p> <p>Justificação</p> <p>Refutação</p>
<p>c) Considerando a regularidade da sequência de figuras, qual figura terá um total de 38 azulejos? Explique a sua resposta.</p> <p>R: A figura 12 daria 38 azulejos, teria 36 cinzas e 2 brancos, juntando os dois dará 38.</p>	<p>Análise da Resolução do Aluno G (Espaços para anotações)</p> <p>Elaboração de conjectura</p> <p>Generalização</p> <p>Investigação do porquê</p> <p>Justificação</p> <p>Refutação</p>

<p>c) Considerando a regularidade da sequência de figuras, qual figura terá um total de 38 azulejos? Explique a sua resposta.</p>	<p>Análise da Resolução do Aluno H (Espaços para anotações) Elaboração de conjectura</p>
	<p>Generalização</p>
	<p>Investigação do porquê</p> <p>Justificação</p>
<p><i>Eu percebi que a figura 12, tem 36 azulejos cinzentos, mas eu tenho que chegar no 38, mas sobraram , que $2 + 6 = 38$</i></p>	<p>Refutação</p>
<p>d) Considerando a regularidade da sequência de figuras, existe alguma figura com um total de 66 azulejos? Explique a sua resposta.</p>	<p>Análise da Resolução do Aluno I (Espaços para anotações) Elaboração de conjectura</p>
	<p>Generalização</p> <p>Investigação do porquê</p>
<p><i>R: A resposta é 22, porque 14 é 33, então 22 é 66 depois da continha fiz em 3 em 3 até 22, a resposta é 22 figura.</i></p>	<p>Justificação</p>
	<p>Refutação</p>

d) Considerando a regularidade da sequência de figuras, existe alguma figura com um total de 66 azulejos? Explique a sua resposta.

Handwritten work for problem d showing calculations: $12 = 36$, $10 = 30$, and $20 = 60$. There are also some scribbles and arrows, including a circled '66' and a circled '20'.

d) Eu sei que 10 = 30 mas 20 que é = 60 mas $2 + 20 = 22 = 66$ porque 10 é = 30 então eu tive que somar $10 + 10$ que $30 + 30 = 60 + 6 = 66$

Análise da Resolução do Aluno J (Espaços para anotações)

Elaboração de conjectura

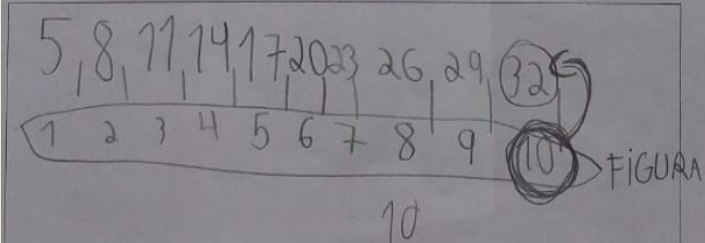
Generalização

Investigação do porquê

Justificação

Refutação

e) Com base na observação da sequência de figuras, construa uma sequência numérica com 10 termos. Explique qual regularidade você utilizou para escrever a sequência numérica e qual cálculo realizou para obter cada termo da sequência.



e) 3 em 3 até 10 = 30

Handwritten calculation: $10 \times 3 = 30$

Análise da Resolução do Aluno K (Espaço para anotações)

Elaboração de conjectura

Generalização

Investigação do porquê

Justificação

Refutação

5º ENCONTRO

3ª PARTE – TAP 3

IDENTIFICANDO OS PROCESSOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: PARTE 2

MOMENTO 1 – IDENTIFICAÇÃO DOS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO A PARTIR DA DISCUSSÃO DE UMA DUPLA DE ALUNOS

Neste momento, pretende-se analisar a discussão de uma dupla de alunos produzida durante a aplicação da tarefa exploratória envolvendo o conteúdo de identificação de regularidades e padrões em sequências numéricas. Assim como, realizar a identificação dos processos de raciocínio matemático que são mobilizados através da discussão. Sendo assim, analise as transcrições dos episódios da discussão, indique e justifique quais processos de Raciocínio Matemático você consegue identificar em cada episódio.

Caso considere não haver a mobilização de um determinado processo de Raciocínio Matemático, também justifique.

Processos que podem ser identificados:

- *Elaboração de conjectura;*
- *Generalização;*
- *Investigação do porquê;*
- *Justificação;*
- *Refutação.*

Caso identifique a formulação de conjecturas ou generalização, explique se a mesma é válida ou deve ser refutada. Explique por quê?

<p style="text-align: center;">EPISÓDIO 1:</p> <p>F1-Yuri: Olha eu não sei que regra é essa, mas a primeira imagem acho que segue uma regra. F2-Miguel: Espera aí vou ler toda aqui, parece fácil. F3-Yuri: Será que é de ordem numérica. F4-Miguel: [lendo o enunciado da tarefa]. F5-Yuri: Olha! F6-Miguel: Não entendi, fala que é para construir uma figura? F7-Yuri: Eu acho que aqui deve ter algum padrão. F8-Miguel: Será que é para construir uma figura? Por que aqui está falando o total de azulejos para construir uma figura. F9-Yuri: E aqui fala que ele segue uma determinada regra. Mas eu não sei que regra é essa? F10-Miguel: Não sei trocar ideia. F11-Yuri: Nem eu! Tá. F12-Miguel: O que você acha que é? F13-Yuri: Mas eu acho que deve ter algum padrão. F14-Miguel: Tá bom, eu acho que tem que montar uma figura? F15-Yuri: Espera aí. Olha! Miguel observa a figura número um e a número dois. A número dois tem quantos azulejos cinzentos? F16-Miguel: um, dois, três, quatro, cinco, seis. F17-Yuri: E qual é o divisor por 2 de 6. F18-Miguel: 3. F19-Yuri: E qual é o número de azulejos cinzentos que estão na primeira imagem? F20-Miguel: 3! F21-Yuri: Talvez essa seja a regra ou algo do tipo. F22-Miguel: Não sei! Não estou entendendo nada! F23-Yuri: [contando] um, dois, três, quatro, cinco, um, dois, três, um, dois, três, um, dois, três, um, dois, três, um, dois, três. Todas as quatro figuras. F24-Miguel: Tem mais três aqui. F25-Yuri: É! Só não sei qual é o significado dos azulejos brancos. F26-Miguel: Mas esse aqui é branco. F27-Yuri: Eu não sei. F28-Professor: [falando para a turma] Pessoal, não se preocupe em utilizar apenas contas, pode fazer uma escrita, pode fazer desenho, qualquer tipo de registro desde que explique a ideia que você teve, certo? F29-Miguel: Espera aí, eu entendi. Azulejos são tijolos, tijolos cinzentos, cinzentos são esses aqui e brancos são esses daqui. F30-Yuri: É! Isso já estava bem explícito. F31-Miguel: Explique como você obteve cada resultado. Espera aí, vai ter que somar tudo? F32-Yuri: Oh, a letra A fala assim! Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a figura 5.</p>	<p style="text-align: center;">Espaços para anotações referentes a identificação dos Processos de Raciocínio Matemático</p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Elaboração de conjectura</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Generalização</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Investigação do porquê</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Justificação</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Refutação.</i></p>
---	--

<p style="text-align: center;">EPISÓDIO 2:</p> <p>F1-Miguel: Professor! F2- Yuri: Mas esses daqui, não conta? F3- Professor: Oi? F4- Yuri: Esses azulejos aqui não conta? F5- Professor: Mas você não quer saber a quinta figura? F6- Yuri: Aham. F7- Professor: Então, isso aqui vai te ajudar na quinta figura? F8- Yuri: Vai. F9- Miguel: É porque esse aqui começa a subir mais três. F10- Professor: Ah! O que acontece? F11- Miguel: Um, dois, três. F12- Yuri: De três em três. F13- Miguel: Um, dois, três, quatro, cinco. F14- Professor: De três em ...? F15- Yuri: Em três. F16- Professor: Isso, aí como que você fez? F17- Miguel: Aí eu fiquei contando esse último aqui. Aí, eu coloquei mais três aqui. F18- Professor: Ah, bacana! Então, agora você fez o desenho? F19- Miguel: Sim. F20- Professor: Aí você vai explicar isso pra mim, aqui tá. Explica. Você entendeu, agora? F21- Miguel: Aham. F22- Professor: Você explica como obteve esses resultados aqui. F23- Miguel: Pode escrever? F24- Professor: Pode! Pode escrever, cálculos. F25- Miguel: Ah!!! Tem que escrever como você pensou nessa ideia? F26- Professor: Isso!!! Como que você obteve o 2? Como que você obteve o 15? F27- Miguel: Tá. F28- Professor: O que você observou aqui? Escreve isso.</p>	<p style="text-align: center;">Espaços para anotações referentes a identificação dos Processos de Raciocínio Matemático</p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Elaboração de conjectura</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Generalização</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Investigação do porquê</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Justificação</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Refutação.</i></p>
---	--

<p align="center">EPISÓDIO 3:</p> <p>F1- Yuri: Sabe uma coisa que eu estou pensando aqui? Eu acho que é para somar todos esses azulejos aqui ou algo do tipo. Não sei!</p> <p>F2- Miguel: Não!!! É para desenhar aqui e responder sua resposta aqui! Não é para somar tudo!</p> <p>F3- Yuri: O professor disse que é para fazer aqui?</p> <p>F4- Miguel: Agora escreve a sua resposta aí, por que você teve essa ideia que esse aqui tinha mais desse.</p> <p>F5- Yuri: Era para fazer aqui mesmo?</p> <p>F6- Professor: Tanto faz, pode ser aqui ou pode ser aqui. É independente.</p> <p>F7- Yuri: Professor, mas esses azulejos brancos, o que a gente faz?</p> <p>F8- Professor: Os brancos</p> <p>F9- Yuri: É. Vai ter que somar ou algo do tipo?</p> <p>F10- Miguel: Não.</p> <p>F11- Professor: Precisa? Por que você vai pensar na figura. Oh, eu poderia até recortar essas figuras, não poderia?</p> <p>F12- Yuri: É.</p> <p>F13- Professor: Porque essa é a figura 1, essa a figura 2, essa a figura 3 e essa a figura 4. Você tem que pensar na figura 5. É outra figura! E aí tem que pensar nela, que eu acho que você já pensou. Não pensou?</p> <p>F14- Miguel: É!! Aí aqui vai ter que ter mais três.</p> <p>F15- Yuri: Porque eu acho que aqui, poderia somar e desenhar aqui ou algo do tipo. Miguel: Professor.</p> <p>F16- Yuri: Não sei!</p> <p>F17- Miguel: Professor, oh! Eu entendi tudo, mas só que ele está pensando que tem que somar tudo.</p> <p>F18- Professor: Precisa somar tudo para obter a figura 5?</p> <p>F19- Miguel: Só precisa somar ...</p> <p>F20- Professor: Por que não é cada uma, uma figura?</p> <p>F21- Miguel: Só precisa somar este aqui mais este aqui.</p> <p>F22- Yuri: É verdade.</p> <p>F23- Miguel: Que aí vai ficar a figura.</p> <p>F24- Yuri: Mas é que eu estou pensando que a figura 5 deve ter alguma diferença em relação aos azulejos azuis [o aluno citou a cor errada, quis dizer cinzentos].</p> <p>F25- Miguel: Mas tem uma diferença! Esse aqui sobe mais três cubinhos.</p> <p>F26- Professor: Ah!! Qual é a diferença?</p> <p>F27- Miguel: Porque fica subindo de três em três. Esse aqui fica parado. Então aqui vai ter que ter mais três, aí vai ter que fazer mais três aqui, aí tem que fazer como eu entendi que era de três em três.</p> <p>F28- Yuri: Aqui então vai ter que ficar parado [referindo a quantidade de azulejos brancos].</p> <p>F29- Miguel: Não pode escrever que meu amigo me falou isso não, tem que escrever por causa que eu vi as figuras indo em três em três.</p> <p>F30- Professor: Isso!</p> <p>F31- Miguel: E os brancos ficaram parados.</p> <p>F32- Professor: Muito bem! Isso mesmo, você tem que explicar pra mim o porquê é esse resultado.</p>	<p>Espaços para anotações referentes a identificação dos Processos de Raciocínio Matemático</p>
	<p align="center"><i>Elaboração de conjectura</i></p>
	<p align="center"><i>Generalização</i></p>
	<p align="center"><i>Investigação do porquê</i></p>
	<p align="center"><i>Justificação</i></p>
<p align="center"><i>Refutação.</i></p>	

<p align="center">EPISÓDIO 3:</p> <p>F1- Yuri: Sabe uma coisa que eu estou pensando aqui? Eu acho que é para somar todos esses azulejos aqui ou algo do tipo. Não sei!</p> <p>F2- Miguel: Não!!! É para desenhar aqui e responder sua resposta aqui! Não é para somar tudo!</p> <p>F3- Yuri: O professor disse que é para fazer aqui?</p> <p>F4- Miguel: Agora escreve a sua resposta aí, por que você teve essa ideia que esse aqui tinha mais desse.</p> <p>F5- Yuri: Era para fazer aqui mesmo?</p> <p>F6- Professor: Tanto faz, pode ser aqui ou pode ser aqui. É independente.</p> <p>F7- Yuri: Professor, mas esses azulejos brancos, o que a gente faz?</p> <p>F8- Professor: Os brancos</p> <p>F9- Yuri: É. Vai ter que somar ou algo do tipo?</p> <p>F10- Miguel: Não.</p> <p>F11- Professor: Precisa? Por que você vai pensar na figura. Oh, eu poderia até recortar essas figuras, não poderia?</p> <p>F12- Yuri: É.</p> <p>F13- Professor: Porque essa é a figura 1, essa a figura 2, essa a figura 3 e essa a figura 4. Você tem que pensar na figura 5. É outra figura! E aí tem que pensar nela, que eu acho que você já pensou. Não pensou?</p> <p>F14- Miguel: É!! Aí aqui vai ter que ter mais três.</p> <p>F15- Yuri: Porque eu acho que aqui, poderia somar e desenhar aqui ou algo do tipo. Miguel: Professor.</p> <p>F16- Yuri: Não sei!</p> <p>F17- Miguel: Professor, oh! Eu entendi tudo, mas só que ele está pensando que tem que somar tudo.</p> <p>F18- Professor: Precisa somar tudo para obter a figura 5?</p> <p>F19- Miguel: Só precisa somar ...</p> <p>F20- Professor: Por que não é cada uma, uma figura?</p> <p>F21- Miguel: Só precisa somar este aqui mais este aqui.</p> <p>F22- Yuri: É verdade.</p> <p>F23- Miguel: Que aí vai ficar a figura.</p> <p>F24- Yuri: Mas é que eu estou pensando que a figura 5 deve ter alguma diferença em relação aos azulejos azuis [o aluno citou a cor errada, quis dizer cinzentos].</p> <p>F25- Miguel: Mas tem uma diferença! Esse aqui sobe mais três cubinhos.</p> <p>F26- Professor: Ah!! Qual é a diferença?</p> <p>F27- Miguel: Porque fica subindo de três em três. Esse aqui fica parado. Então aqui vai ter que ter mais três, aí vai ter que fazer mais três aqui, aí tem que fazer como eu entendi que era de três em três.</p> <p>F28- Yuri: Aqui então vai ter que ficar parado [referindo a quantidade de azulejos brancos].</p> <p>F29- Miguel: Não pode escrever que meu amigo me falou isso não, tem que escrever por causa que eu vi as figuras indo em três em três.</p> <p>F30- Professor: Isso!</p> <p>F31- Miguel: E os brancos ficaram parados.</p> <p>F32- Professor: Muito bem! Isso mesmo, você tem que explicar pra mim o porquê é esse resultado.</p>	<p>Espaços para anotações referentes a identificação dos Processos de Raciocínio Matemático</p> <hr/> <p align="center"><i>Elaboração de conjectura</i></p> <hr/> <p align="center"><i>Generalização</i></p> <hr/> <p align="center"><i>Investigação do porquê</i></p> <hr/> <p align="center"><i>Justificação</i></p> <hr/> <p align="center"><i>Refutação.</i></p>
---	---

<p style="text-align: center;">EPISÓDIO 4:</p> <p>F1- Professor: O que vocês pensaram? F2- Yuri: Na figura 10? F3- Professor: É na figura 10. F4- Miguel: Eu pensei o seguinte, já que aqui, já que cinco, já que isso aqui é a figura 5 e que a metade daqui a figura 5 é metade do que 10, certo? F5- Professor: Isso. F6- Miguel: Então, eu fiz essa resposta mais, mais essa resposta. Que é tipo, esse aqui, mais este aqui. Que vai ficar 10. Aí eu fiz, 15 mais 15 aí ficou 30. Já que esse aqui é 10, esse aqui é a metade, vai ter que somar duas vezes esse aqui para ficar 10. Então, tem que somar duas vezes esse aqui para ficar o resultado dela. F7- Professor: Somar duas vezes o quê? F8- Miguel: Os azulejos cinzentos, já que o branco fica parado, esse aqui mexe porque fica de três em três, então vai ficar 30. Por causa que 10 é a metade do que 5, e 5 mais 5 é 10, então tem que somar este aqui mais esse aqui que vai ficar 10. F9- Professor: Ah!!! Muito legal, bacana. Gostei.</p>	<p style="text-align: center;">Espaços para anotações referentes a identificação dos Processos de Raciocínio Matemático</p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Elaboração de conjectura</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Generalização</i></p>
<p style="text-align: center;">EPISÓDIO 5:</p> <p>F1- Yuri: O que você fez? F2- Miguel: Eu fiz aqui. F3- Yuri: Não, mas. Posso ler. F4- Miguel: Pode. F5- Yuri: Tá bom. Você percebeu que 5 é a metade de 10, então você somou os azulejos cinzentos. F6- Miguel: Do 5, é que eu esqueci de fazer. F7- Yuri: [fala incompreensível] ... cinzentos e da figura 5, já. F8- Miguel: Oi! Espera aí. Quer que eu leia? F9- Yuri: É só que explica do seu jeito, por que eu consegui não. F10- Miguel: Eu percebi que 5 é a metade do que 10. F11- Yuri: É! Isso todo mundo sabe. F12- Miguel: Eu somei os azulejos cinzentos, que 15 é da figura 5, já que 15 é. F13- Yuri: É espera aí, não. Você somou os azulejos de qual figura? F14- Miguel: Do 5. F15- Yuri: Que é? F16- Miguel: 15. F17- Yuri: Que são os azulejos. F18- Miguel: 15. É certo, 15 cinzentos da figura, certo? F19- Yuri: Aí, você fez 15 mais 15? F20- Miguel: É! Por que é a mesma coisa que a figura 5 mais a figura 5. F21- Yuri: Ah!! Que aí dá 30! Ah! Você somou as metades das figuras? F22- Miguel: É tipo, eu somei a figura 5 mais a figura 5 sem contar isso aqui. F23- Yuri: Ou seja, você fez vezes 2, só que com o 5. F24- Miguel: Vai ser isso aqui, somando isso aqui vai dá 30. F25- Yuri: Olha, boa jogada! F26- Miguel: Então, é a mesma coisa que somar duas vezes essa figura que vai dá 10. A figura 5 mais a figura 5 dá 10.</p>	<p style="text-align: center;"><i>Investigação do porquê</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Justificação</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Refutação.</i></p>

<p style="text-align: center;">EPISÓDIO 6:</p> <p>F1- Miguel: Professor, como assim, terá um total de 38? Já que 38 não entra, só 39.</p> <p>F2- Professor: Por que só 39?</p> <p>F3- Miguel: Por causa 30, certo? 33, 36, 39.</p> <p>F4- Professor: Humm.</p> <p>F5- Miguel: Como é que vai dá isso aqui, terá um total de 38 azulejos. Explique a sua resposta.</p> <p>F6- Professor: Mas aí, você não está pensando somente só no 3?</p> <p>F7- Miguel: É, por que tipo, o 8 não entra no.</p> <p>F8- Professor: 8 não entra onde?</p> <p>F9- Miguel: Como que se fala, 8 não entra na figura 30, 3 vezes 1 até 10, só entra no 18.</p> <p>F10- Professor: Ah sim, mas pensa um pouquinho. Essa ideia é boa. Mas tem uma figura que vai ter 38. Agora, por quê?</p> <p>F11- Miguel: Ah!!!! A figura tem que ter 38. Não que tem que ter 38 na figura.</p> <p>F12- Professor: 38 cinzentos, é isso que você está pensando?</p> <p>F13- Miguel: É, somando este daqui também.</p> <p>F14- Professor: Isso, vai somar os dois e vai dar 38.</p> <p>F15- Miguel: Ah, agora entendi.</p> <p>F16- Professor: Por quê? O que você entendeu.</p> <p>F17- Miguel: Pode ser desse ou deste?</p> <p>F18- Professor: Pode. Você que escolhe a estratégia.</p> <p>F19- Miguel: Pode somar, somar mais 3 aqui? Tipo mais 3 aqui, aí é como seu eu fosse, a conta ser 11, aqui sobe mais 3.</p> <p>F20- Professor: Pode.</p> <p>F21- Miguel: Então vai dar certinho, por que se for 12, isso aqui vai subir mais 3, vai fica 6, 6 mais 2 é igual a 8, por que olha o dois aqui.</p> <p>F22- Professor: Hum.</p> <p>F23- Miguel: Então aqui vai ficar 38 somando tudo.</p> <p>F24- Professor: E qual é a figura que vai ter 38 azulejos?</p> <p>F25- Miguel: A 12.</p> <p>F26- Professor: Por que a figura 12? Explica de novo, só para eu entender.</p> <p>F27- Miguel: Oh eu vou desenhar. Por que vai subir mais 3, vai subir mais 3 e aumentar mais 1, vai aumentar mais 1 na figura porque subiu mais 3, já que aqui subiu mais 3 na figura 2 e aqui subiu mais 3 na figura 3, então vai subir a figura. Somando tudo isso, vai dar resultado de 12. Tá bom, a figura é 2, já que sabemos que a figura é 2, esse resultado vai se juntar a esse daqui. Que juntando esses dois vai ficar 32. Já que 6 mais 2 é igual a 8, então esses 3 juntando vai ficar 6, então o 6 entra aqui. Que somando tudo isso vai ficar 38, aqui é o resultado.</p>	<p style="text-align: center;">Espaços para anotações referentes a identificação dos Processos de Raciocínio Matemático</p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Elaboração de conjectura</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Generalização</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Investigação do porquê</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Justificação</i></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><i>Refutação.</i></p>
--	--

MOMENTO 2 – DISCUSSÃO COLETIVA

Neste momento, cada dupla ou grupo deve apresentar para os demais participantes do processo de formação, os processos de Raciocínio Matemático que identificou, e os que não identificaram durante a análise da discussão entre os alunos, assim como, as suas justificativas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este produto educacional trata-se de uma proposta de formação continuada que visa contribuir com as compreensões sobre os processos de Raciocínio Matemático. Assim, espera-se que o desenvolvimento das TAP contribua para a compreensão dos processos e dos Entendimentos Essenciais do Raciocínio Matemático. Desta forma, ressaltamos que o desenvolvimento das TAP busca envolver os participantes em um processo de formação, no qual sejam viabilizadas algumas Oportunidades de Aprendizagem Profissional, principalmente, as oportunidades de discussão e reflexão a partir das práticas em sala de aula.

A utilização dos registros de práticas (neste caso, as resoluções e discussões realizadas pelos alunos) nos auxilia a compreender como os alunos desenvolvem o seu Raciocínio Matemático. Nesta perspectiva, sugerimos, no decorrer do desenvolvimento das TAP, a utilização de alguns registros de prática que nos possibilitam identificar como são mobilizados os processos de Raciocínio Matemático pelos alunos. Importante salientar que as resoluções e discussões são apenas uma parte do que aconteceu durante o desenvolvimento da aula envolvendo a tarefa exploratória utilizada, porém, a partir de uma análise minuciosa é possível identificar aspectos que nos possibilitam refletir sobre a aprendizagem matemática e as contribuições que os processos de Raciocínio Matemático podem propiciar durante as práticas de ensino.

Acesse a dissertação e o Produto Educacional
<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2119>



REFERÊNCIAS

- ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade. **RPEM**, Campo Mourão/ PR, v.09, n.18, p.118-136, jan.-jun. 2020.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston: **National Council of Teachers of Mathematics**, 2011.
- JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. **A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics**. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, p. 1 – 16, 2017.
- MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 781-801, 2018.
- MOSQUITO, E. M. L. **Práticas Lectivas dos Professores de Matemática do 3º Ciclo do ensino básico**. 2008. 183p. Dissertação (Mestrado em Educação Especialidade de Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.
- Ponte, J. P. Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. **UNIÓN – REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, São Paulo/SP, n. 21, p. 13-30, mar. 2010.
- PONTE, J.P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa/PR, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul. 2012.
- RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. M. Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. **Zetetiké**, Campinas/SP, v.28, p. 1-20, 2020.
- VIEIRA, W.; RODRIGUES, M.; SERRAZINA, L. O conhecimento de futuros professores sobre os processos de raciocínio matemático antes e depois de uma experiência de formação. **Quadrante**, v. 29, n. 1, p. 8-35, 2020.