UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LEANDRO QUIRINO DOS ANJOS

CONTRIBUIÇÕES DE UM PROCESSO FORMATIVO PARA PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS VISANDO A COMPREENSÃO DOS ENTENDIMENTOS ESSENCIAIS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

LONDRINA
2023

LEANDRO QUIRINO DOS ANJOS

CONTRIBUIÇÕES DE UM PROCESSO FORMATIVO PARA PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS VISANDO A COMPREENSÃO DOS ENTENDIMENTOS ESSENCIAIS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

CONTRIBUTIONS OF A FORMATIVE PROCESS FOR TEACHERS OF THE ELEMENTARY SCHOOL AIMED AT UNDERSTANDING THE ESSENTIAL UNDERSTANDINGS OF MATHEMATICAL REASONING

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman.

LONDRINA

2023

4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.
Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

LEANDRO QUIRINO DOS ANJOS

CONTRIBUIÇÕES DE UM PROCESSO FORMATIVO PARA PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS VISANDO A COMPREENSÃO DOS ENTENDIMENTOS ESSENCIAIS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 31 de Março de 2023

Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, Doutorado - Fundação Universidade Federal do Abc (Ufabc)

Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 31/03/2023.

Dedico esse trabalho a todas as pessoas que estiveram comigo durante os momentos de estudos e realização desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por me permitir concluir mais uma etapa em minha vida profissional. Muito obrigado, Deus, por me auxiliar a superar todos os desafios do dia a dia.

Em segundo lugar, agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman, por todos os ensinamentos compartilhados a cada conversa que tivemos. Serei eternamente grato por toda paciência e atenção que sempre demonstrou comigo, assim como a todos os conselhos e contribuições direcionadas ao desenvolvimento desta pesquisa. Resumo toda a minha forma de agradecimento em uma palavra: “GRATIDÃO”!

Agradeço aos membros da banca, os professores Dr. André Luis Trevisan e o Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, pela disponibilidade na leitura do meu trabalho. Muito obrigado pelas valiosas sugestões, pois, as vossas contribuições propiciaram a melhora no desenvolvimento desta pesquisa, auxiliando-me, principalmente, na realização de novas reflexões.

Agradeço à minha família, em especial, à minha mãe, Joselma, e à minha esposa, Karine, por ter compreendido todos os meus momentos de ausência.

Agradeço aos professores do programa PPGMAT, Henrique, Línlya, Andresa, Leonardo e Emerson, por todos os conhecimentos compartilhados em suas disciplinas.

Agradeço à Secretaria Municipal de Educação de Marialva e à direção da Escola Municipal Nilo Peçanha por me autorizarem e apoiarem no desenvolvimento desta pesquisa na respectiva escola.

Agradeço a todas as professoras que se dispuseram a participar do processo de formação continuada durante o desenvolvimento de minha pesquisa.

Agradeço aos colegas de grupo de estudos pelas discussões, reflexões e momentos de aprendizado, viabilizados a cada um dos nossos encontros; em especial, à Nilva, pelos trabalhos que tivemos a oportunidade de realizar em parceria.

Por fim, agradeço à UTFPR e ao programa PPGMAT, pela oportunidade de realizar mais uma parte do meu projeto de vida profissional.

ANJOS, Leandro Quirino. **Contribuições de um processo formativo para professores dos Anos Iniciais visando a compreensão dos Entendimentos Essenciais de Raciocínio Matemático.** 2023. 129 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

RESUMO

O desenvolvimento do raciocínio matemático tem sido objeto de estudo em diferentes pesquisas que envolvem análises do raciocínio matemático desenvolvido por alunos, bem como as práticas de ensino que os professores desenvolvem, levando-se em consideração as ações que contribuem para a mobilização dos processos de raciocínio matemático dos alunos. Diante disso, a presente pesquisa, de natureza qualitativa e interpretativa, tem como objetivo, compreender como o desenvolvimento de um processo de formação continuada pode contribuir na compreensão dos Entendimentos Essenciais de Raciocínio Matemático para o ensino de matemática, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Ressalta-se que o processo de formação continuada foi estruturado com base no modelo PLOT (Professional Learning Opportunities for Teachers). Nesta perspectiva, por meio da utilização do método de pesquisa Investigação Baseada em Design (IBD), pretende-se: (a) compreender como os professores reconhecem os processos de Raciocínio Matemático por meio da resolução dos alunos; e (b) identificar e compreender as Oportunidades de Aprendizagem Profissional no contexto de um processo de formação continuada, tendo-se, como foco, os Entendimentos Essenciais sobre os processos de Raciocínio Matemático. Diante disso, ressalta-se que, durante a realização do processo de formação continuada, foram desenvolvidas 3 TAP (Tarefas de Aprendizagem Profissional), porém, nesta pesquisa, a investigação concentra-se na 3ª TAP. A coleta de dados foi realizada por meio de gravações de áudios e produções escritas dos participantes durante a realização do processo de formação continuada. O produto educacional consiste em um caderno de formação que foi utilizado durante a realização do processo formativo. Como resultados desta pesquisa, concluímos que o desenvolvimento do processo de formação continuada possibilitou aos professores participantes, aperfeiçoarem as compreensões sobre os processos de RM e seus Entendimentos Essenciais, assim como a oportunidade de participarem de momentos de discussões e reflexões que impactam diretamente no processo de ensino de Matemática; mais especificamente em relação ao desenvolvimento do Raciocínio Matemático e seus processos. Propiciou, também, contribuições para o desenvolvimento profissional por meio da concretização das Oportunidades de Aprendizagem Profissional.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Raciocínio Matemático. Processos de Raciocínio Matemático. Tarefas de Aprendizagem Profissional. Formação de Professores.

ANJOS, Leandro Quirino. **Contributions of a formative process for teachers of the Elementary School aimed at understanding the Essential Understandings of Mathematical Reasoning.** 2023. 129 p. Dissertation (Master’s degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

ABSTRACT

The development of mathematical reasoning has been the object of study in different researches that involve analyzes of the mathematical reasoning developed by students, as well as the teaching practices that teachers develop, taking into account the actions that contribute to the mobilization of processes students' mathematical reasoning processes. Therefore, this qualitative and interpretative research aims to understand how the development of a continuing education process can contribute to understanding the Essential Understandings of Mathematical Reasoning for teaching mathematics in the Elementary School. It should be noted that the continuing education process was structured based on the PLOT model (Professional Learning Opportunities for Teacher’s). In this perspective, through the use of the Design-Based Research (DBR) research method, it is intended: (a) to understand how teachers recognize the processes of Mathematical Reasoning through students' resolution; and (b) identify and understand Professional Learning Opportunities in the context of a continuing education process focusing on the Essential Understandings of Mathematical Reasoning processes. In view of this, it is noteworthy that, during the completion of the continuing education process, 3 TAP (Professional Learning Tasks) were developed, however, in this research, the investigation focuses on the 3rd TAP. Data collection was carried out through audio recordings and written productions of the participants during the continuing education process. The educational product consists of a teacher's education notebook that was used during the formative process. As a result of this research, we concluded that the development of the continuing education process made it possible for the participating teachers to improve their understanding of the RM processes and their Essential Understandings. Just as they had the opportunity to participate in moments of discussion and reflection that directly impact the process of teaching Mathematics, more specifically in relation to the development of Mathematical Reasoning and its processes, as well as providing contributions to professional development, through the concretion of Professional Learning Opportunities.

Keywords: Mathematics Teaching. Mathematical Reasoning. Processes of Mathematical Reasoning. Professional Learning Tasks. Teacher’s education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular;
IBD	Investigação Baseada em Design;
IDP	Interações Discursivas entre os Participantes;
MA	Matemática Acadêmica;
ME	Matemática Escolar;
OAP	Oportunidades de Aprendizagem Profissional;
PAF	Papel e Ações do Formador;
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais;
PLOT	Professional Learning Opportunities for Teachers;
RM	Raciocínio Matemático;
TAP	Tarefas de Aprendizagem Profissional;
TME	Tarefa/s Matemática/s dos Estudantes;
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do raciocínio matemático é um dos principais objetivos do ensino de Matemática (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018) e, de acordo com os documentos normativos, por exemplo, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), o raciocínio deve ser contemplado por meio das propostas curriculares do ensino de Matemática desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Segundo Jeannotte e Kieran (2017), os documentos curriculares sobre o ensino de matemática de todo o mundo preconizam o desenvolvimento do raciocínio matemático. No entanto, o modo como o raciocínio matemático é descrito nos documentos orientadores "tende a ser vago, assistemático, e até contraditório de um documento para o outro" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.1-2), ou seja, há um entendimento polissêmico sobre o que é o raciocínio matemático. Neste sentido, Jeannotte e Kieran (2017) apontam que muitos educadores matemáticos utilizam o termo Raciocínio Matemático, mas muitos não demonstram ter clareza sobre o seu significado. Sendo assim, as pesquisadoras pontuam que há a necessidade de promover formações na perspectiva do desenvolvimento profissional, enfatizando abordagens sobre o Raciocínio Matemático – RM[1].

Considerando que o desenvolvimento do RM envolve diferentes aspectos que podem contribuir com o processo de ensino-aprendizagem de matemática, é compreensível que o conhecimento do professor envolvendo os aspectos didáticos do ensino de Matemática influencia diretamente as ações desenvolvidas com o objetivo de estimular e compreender o desenvolvimento do RM. Desta forma, apresentar-se-á, no decorrer da fundamentação teórica, as dimensões do conhecimento didático (PONTE, 2012) envolvendo o ensino de Matemática.

O desenvolvimento desta pesquisa, ocorreu por meio da investigação realizada em um contexto de processo de formação continuada para professores dos Anos Iniciais. Desta forma, a partir das reflexões e discussões promovidas ao se realizar algumas análises sobre os processos de RM e o modo que são mobilizados por alguns alunos ao resolverem uma tarefa matemática, buscou-se encontrar argumentos que possibilitassem identificar aspectos que contribuíssem para o desenvolvimento profissional dos participantes do processo formativo. Diante disto, acredita-se que o desenvolvimento de um processo formativo constituído a partir de reflexões baseadas em registros da prática letiva, no caso desta pesquisa, as resoluções dos alunos, pode promover contribuições com o desenvolvimento profissional.

[1] Para a expressão Raciocínio Matemático, utilizar-se-á a sigla RM.

Consequentemente, isso pode viabilizar o desenvolvimento de algumas Oportunidades de Aprendizagem Profissional[2] (RIBEIRO; PONTE, 2020).

Segundo Ribeiro e Ponte (2020), as Oportunidades de Aprendizagem Profissional podem emergir a partir de um contexto envolvendo discussões e reflexões viabilizadas ao se promover um processo formativo, utilizando alguns registros de prática, ou seja, trata-se de um contexto de formação que propicia, por meio das interações entre os sujeitos envolvidos, uma aproximação entre as experiências vivenciadas em sala de aula e os conhecimentos científicos, na perspectiva de promover algumas contribuições para o desenvolvimento da prática docente. Deste modo, ressalta-se que as discussões e reflexões analisadas nos dados desta pesquisa, foram promovidas a partir do desenvolvimento de algumas Tarefas de Aprendizagem Profissional envolvendo a utilização de alguns registros de prática (protocolos com resoluções dos alunos).

Esta dissertação apresenta resultados de uma pesquisa de natureza qualitativa e interpretativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994) sobre os processos e os Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento do RM e as compreensões promovidas por meio de um processo de formação continuada, para professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Ressalta-se que o processo de formação continuada investigado, foi estruturado com base no Modelo PLOT (Professional Learning Opportunities for Teachers[3]), proposto por Ribeiro e Ponte (2020). Diante disto, enfatiza-se que, durante a realização do processo formativo voltado para professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, foram desenvolvidas 3 TAP (Tarefas de Aprendizagem Profissional). Nesta pesquisa, a investigação concentra-se durante o desenvolvimento de uma parte da 3ª TAP, executada no processo formativo.

Considerando que alguns pesquisadores que investigam os processos do RM têm desenvolvido e apresentado resultados de pesquisas que culminam na compreensão do que seja o RM e a forma como os processos de RM são mobilizados durante o processo de ensino-aprendizagem, dentre esses pesquisadores destacam-se Jeannotte e Kieran (2017); Lannin, Ellis e Elliot (2011); Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012); Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020); entre outros.

Com base em resultados de estudos e pesquisas envolvendo o RM e seus processos, considera-se fundamental para o desenvolvimento desta pesquisa o estudo apresentado por Lannin, Ellis e Elliot (2011), pois os pesquisadores apresentam, no respectivo estudo, um

---

[2] Utilizar-se-á a sigla OAP para a expressão Oportunidades de Aprendizagem Profissional.
[3] Traduzindo, tem-se: Oportunidades de Aprendizagem Profissional para professores.

modelo específico envolvendo os processos de RM para o ensino de Matemática no Ensino Fundamental, descrevendo quais são os Entendimentos Essenciais e a forma como eles podem ser mobilizados durante o desenvolvimento do RM.

Pensando-se no desenvolvimento de um processo de formação continuada para professores que ensinam matemática nos Anos Iniciais, com foco nos processos de RM e nas ações que contribuem com o desenvolvimento profissional, percebe-se que a utilização do Modelo PLOT (Professional Learning Opportunities for Teachers), definido por Ribeiro e Ponte (2020), pode propiciar, por meio de algumas ações, o desenvolvimento de um processo formativo que viabilize a ampliação, por parte dos professores, das compreensões envolvendo os Entendimentos Essenciais do RM, assim como gerar oportunidades de aprendizagem profissional que possibilitem realizar a coleta de dados para a análise da pesquisa.

Sendo assim, o objetivo desta pesquisa consistiu em compreender como o desenvolvimento de um processo de formação continuada pode contribuir na compreensão dos Entendimentos Essenciais de RM para o Ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Diante disto, pretende-se: (a) compreender como os professores reconhecem os processos de Raciocínio Matemático, por meio da resolução dos alunos; e (b) identificar e compreender as Oportunidades de Aprendizagem Profissional no contexto de um processo de formação continuada, tendo-se, como foco, os Entendimentos Essenciais sobre os processos de Raciocínio Matemático.

Considerando que esta pesquisa é de natureza qualitativa e interpretativa, pretende-se utilizar, neste estudo, o método de Investigação Baseada em Design – IBD (PONTE *et al.*, 2016), pois uma das vertentes da utilização deste método é a análise de processos dialógicos pautados por ações que permeiam as práticas voltadas para o aspecto de ensino-aprendizagem. Ressalta-se que os resultados apresentados nesta dissertação envolvem, especificamente, a realização do 1º ciclo da IBD.

Após essa introdução, destaca-se que o primeiro capítulo desta dissertação apresenta os pressupostos teóricos de RM, os processos de RM e os Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento do RM; no segundo capítulo, descrevem-se alguns aspectos de um processo de formação continuada e as contribuições para o desenvolvimento profissional; no terceiro capítulo, apresentam-se os procedimentos metodológicos; no quarto capítulo, apresentam-se os resultados da análise dos dados e; por fim, no quinto capítulo, a discussão dos resultados da pesquisa e as considerações finais.

1. RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Partindo do entendimento de que o raciocínio matemático é uma das capacidades que os professores devem estimular durante o desenvolvimento de propostas de ensino de matemática, faz-se necessário compreender em que de fato ele consiste.

Segundo Oliveira (2008, p. 3), "a expressão raciocínio matemático designa um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)". Para Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 781), "raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas, ou seja, utilizar a informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões". Neste sentido, Jeannotte e Kieran (2017, p. 7) definem o "Raciocínio Matemático como um processo de comunicação com os outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos de outros enunciados matemáticos". Nesta perspectiva, Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 10) definem que "o raciocínio matemático é um processo que envolve conjecturar, generalizar, investigar o porquê, desenvolver e avaliar argumentos". Deste modo, pode-se entender que raciocinar matematicamente infere conexões matemáticas que os alunos estabelecem entre o conhecimento matemático que já possuem e a descoberta de novos conhecimentos, sendo argumentados e justificados matematicamente.

Segundo Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012, p. 356), "o grande objetivo do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos". Desta forma, é fundamental, para o desenvolvimento desta pesquisa, analisar o que dizem os documentos curriculares sobre os objetivos e finalidades do ensino de Matemática, tendo como foco de investigação o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Analisando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) e Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), que são os documentos normativos que norteiam e orientam o trabalho pedagógico sobre o ensino de Matemática no Brasil, é possível notar que o desenvolvimento do RM sempre foi apresentado de forma sucinta e superficial, fato que ainda é identificado na atualidade. Na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), são apresentadas algumas indicações que remetem à importância do desenvolvimento do RM, apresentando alguns objetivos para o Ensino Fundamental e Médio.

Em relação aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2018) não apresenta claramente quais abordagens devem ser realizadas tendo como foco o desenvolvimento do RM; apenas aponta que, nesta etapa, os alunos devem argumentar e justificar os procedimentos utilizados para resolver problemas, assim como verificar a plausibilidade dos resultados. Já para os Anos Finais do Ensino Fundamental, o documento define que os alunos, nesta etapa, devem relacionar observações do mundo real a diferentes tipos de representações, assim como utilizar essas representações para fazerem induções e conjecturas, podendo estimular "a dedução de algumas propriedades e verificação de conjecturas" (BRASIL, 2018, p. 265). Neste sentido, eles devem "desenvolver habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas" (BRASIL, 2018, p. 266). Ressalta-se que não há especificações sobre o que são conjecturas.

Em relação ao Ensino Médio, a BNCC (BRASIL, 2018) enfatiza, de modo mais amplo, a importância do desenvolvimento do raciocínio matemático, apresentando algumas características mais específicas, abordando os processos de raciocinar como uma das competências específicas da área de conhecimento da Matemática e suas Tecnologias. Na perspectiva de desenvolver habilidades envolvendo os processos de raciocínio matemático, os alunos "devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados" (BRASIL, 2018, p. 529). Assim, as práticas de ensino devem envolver os processos de investigação, explicação e justificação. Pressupondo que esses processos estão associados ao desenvolvimento do raciocínio matemático, os métodos de representação e comunicação devem auxiliar para expressar as generalizações, "bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado" (BRASIL, 2018, p. 529).

Outro aspecto apresentado na BNCC, é a discussão coletiva sobre as resoluções e justificativas das soluções dos problemas desenvolvendo a capacidade de argumentar sobre formulações e teste de conjecturas, a partir de justificativas. O documento aponta que, ao

> formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições (BRASIL, 2018, p. 540).

Neste sentido, a BNCC (BRASIL, 2018) define cinco competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio, sendo que a quinta competência é a seguinte:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 531).

Com base na competência citada anteriormente, o documento reforça a importância da utilização de processos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio matemático. Porém, não são apresentadas, em seu texto, definições claras e objetivas do que sejam esses processos. Outro aspecto apresentado no texto é a abordagem de diferentes tipos de raciocínio matemático, ou seja, o raciocínio hipotético-dedutivo e o raciocínio hipotético-indutivo.

A partir dos apontamentos e definições sobre os processos de RM apresentados na BNCC, nota-se que não há clareza sobre o que são tais processos e a forma como eles se efetivam durante as práticas de ensino de Matemática; principalmente no que tange às abordagens a serem realizadas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Efetuando-se a comparação entre os objetivos estabelecidos para o Ensino Fundamental e Médio, nota-se que a BNCC apresenta algumas características sobre o desenvolvimento do RM, porém só é dada maior ênfase na proposta curricular voltada para o Ensino Médio.

Considerando que os documentos de orientação curricular brasileiro, em especial a BNCC, não apresentam uma definição clara e objetiva do que seja o RM e seus processos, apresenta-se alguns aspectos sobre o RM citados no documento intitulado *Programa de Matemática para o Ensino Básico* (PONTE *et al.*, 2007), no qual os autores descrevem a proposta curricular do ensino de Matemática em Portugal. Logo, apresentam as finalidades e objetivos gerais para o ensino de Matemática. A proposta curricular de Portugal define o RM como uma das capacidades transversais a toda a aprendizagem de matemática; sendo assim, o RM deve ser estimulado durante todas as etapas da Educação Básica e merece "uma atenção permanente no ensino" (PONTE *et al.* 2007, p. 1).

Visando ampliar as compreensões sobre o desenvolvimento do RM, apresenta-se alguns apontamentos descritos no Programa de Matemática (PONTE *et al.* 2007), pois o documento possibilita ter uma dimensão mais objetiva de como o RM e seus processos podem ser desenvolvidos durante o ensino de Matemática na Educação Básica. Ressalta-se que o *Programa de Matemática para o Ensino Básico* de Portugal foi recentemente reformulado e, atualmente, é denominado como *Aprendizagens Essenciais - Ensino Básico* (PORTUGAL, 2020). Nesta nova proposta, os aspectos sobre o desenvolvimento do RM são descritos em documentos curriculares específicos de acordo com cada ano da escolaridade; por isso, optou-se por analisar a proposta curricular apresentada no Programa de Matemática, pois o contexto envolvendo a abordagem do RM é apresentado em um único documento.

Em relação aos processos de RM, o Programa de Matemática para o Ensino Básico (PONTE *et al.*, 2007, p. 2) define que em uma atividade matemática, "a resolução e formulação de problemas, a formulação e teste de conjecturas, a generalização e a demonstração, e a elaboração e refinamento de modelos são algumas das suas dimensões principais". Neste sentido, o documento aponta que uma das finalidades do ensino de matemática na educação básica é:

> Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.
> Esta finalidade deve ser entendida como incluindo o desenvolvimento nos alunos da: • compreensão de conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos e da capacidade de os utilizar na análise, interpretação e resolução de situações em contexto matemático e não matemático;
> • capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação matemática;
> • capacidade de abstracção e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos;
> • capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega (PONTE *et al.*, 2007, p. 3).

Deste modo, é compreensível que o desenvolvimento do RM deva ser tratado com extrema importância e cabe aos professores, o papel de oportunizar aos alunos a resolução de tarefas matemáticas que lhes possibilitem aperfeiçoar o seu modo de raciocinar. Logo, cabe ao aluno explorar os procedimentos e estratégias para justificar os raciocínios utilizados. Durante toda a Educação Básica, "os alunos devem ser capazes de raciocinar matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos" (PONTE *et al.*, 2007, p. 5), desenvolvendo as seguintes capacidades:

> • seleccionar e usar fórmulas e métodos matemáticos para processar informação;
> • reconhecer e apresentar generalizações matemáticas e exemplos e contraexemplos de uma afirmação;
> • justificar os raciocínios que elaboram e as conclusões a que chegam;
> • compreender o que constitui uma justificação e uma demonstração em Matemática e usar vários tipos de raciocínio e formas de demonstração;
> • desenvolver e discutir argumentos matemáticos;
> • formular e investigar conjecturas matemáticas (PONTE *et al.*, 2007, p. 5).

Desta forma, é evidente que os processos que culminam com o desenvolvimento do RM devem ser abordados durante toda a Educação Básica. Inclusive, no Programa de Matemática para o Ensino Básico (PONTE *et al.*, 2007), também, cita-se que os alunos devem aprender, desde os Anos Iniciais de escolaridade, a justificar as suas informações, e, conforme avançam na escolaridade, "as suas justificações devem ser mais gerais, distinguindo entre exemplos e argumentos matemáticos gerais para toda uma classe de objectos" (PONTE *et al.*, 2007, p. 5).

Em Portugal, o RM é entendido como uma capacidade fundamental na Educação Básica; desta forma, os alunos devem fazer "formulações e testes de conjecturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração" (PONTE *et al.*, 2007, p. 8). Outro aspecto considerado é o de que os "alunos devem compreender o que é uma generalização, um caso particular e um contraexemplo" (PONTE *et al.*, 2007, p. 8), e, ao final do 3º ciclo, ou seja, do 9º ano, os alunos "devem ser capazes de distinguir entre raciocínio indutivo e dedutivo e reconhecer diferentes métodos de demonstração" (PONTE *et al.*, 2007, p. 8). Com esta afirmação, percebe-se o quanto o currículo nacional de Portugal enfatiza a importância do desenvolvimento do raciocínio matemático, sendo considerado como uma capacidade fundamental no ensino de matemática, e cabe aos alunos, além de utilizarem, também terem o domínio da distinção entre os diferentes tipos de raciocínio.

Considerando os aspectos que envolvem o desenvolvimento do RM citados na BNCC (BRASIL, 2018), principalmente em relação às práticas de ensino, nota-se que os objetivos de aprendizagem com foco no RM e seus processos são apresentados de modo amplo e sucinto, ou seja, não há uma descrição específica sobre os processos de RM e a forma como eles devem ser mobilizados durante a escolaridade na Educação Básica. Para auxiliar no esclarecimento em relação aos objetivos de aprendizagem envolvendo o desenvolvimento do RM em cada ano de escolaridade do Ensino Fundamental, apresenta-se, no Quadro 1, os tópicos, objetivo geral, objetivos específicos e encaminhamentos metodológicos envolvendo o desenvolvimento do RM para cada ciclo da Educação Básica em Portugal.

Quadro 1 - Tópicos, objetivo geral, objetivos específicos e encaminhamentos metodológicos envolvendo o desenvolvimento do raciocínio matemático para cada ciclo da educação básica em Portugal

1º Ciclo (1º, 2º, 3º e 4º ano)
Tópicos: justificação, formulação e testes de conjecturas (PONTE et al., 2007, p. 31). **Objetivo geral:** raciocinar matematicamente, formulando e testando conjecturas, explicando processos e ideias e justificando resultados (PONTE et al., 2007, p. 29). **Objetivos específicos:** explicar ideias e processos e justificar resultados matemáticos; formular e testar conjecturas relativas a situações matemáticas simples (PONTE et al., 2007, p. 31). **Encaminhamentos metodológicos:** pedir a explicação de raciocínios matemáticos oralmente e por escrito; solicitar exemplos, contraexemplos e analogias; propor a investigação de regularidades e relações numéricas nas tabuadas; usar as tabuadas para a formulação e teste de conjecturas (PONTE et al., 2007, p. 31).
2º Ciclo (5º e 6º ano)
Tópicos: justificação; argumentação; formulação e teste de conjecturas (PONTE *et al.*, 2007, p. 47). **Objetivo geral:** raciocinar matematicamente, formulando e testando conjecturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos relativos a resultados, processos e ideias matemáticos (PONTE *et al.*, 2007, p. 45). **Objetivos específicos:** explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos e à análise exaustiva de casos; formular e testar conjecturas e generalizações e

justificá-las fazendo deduções informais (PONTE *et al.*, 2007, p. 47). **Encaminhamentos metodológicos:** fazer perguntas do tipo, Como fizeste? Porque consideras que o que fizeste está certo? Fazer perguntas do tipo, O que acontecerá se...? Isto verificar-se-á sempre? Solicitar a apresentação de argumentos, assim como exemplos e contraexemplos. Através da apresentação de exemplos e de outros casos particulares e de perguntas como, O que acontecerá a seguir? Será que isto é válido para outros os casos? Procurar que os alunos façam generalizações (PONTE *et al.*, 2007, p. 47).
3º Ciclo (7º, 8° e 9° ano)
Tópicos: formulação, teste e demonstração de conjecturas; indução e dedução; e argumentação (PONTE *et al.*, 2007, p. 64). **Objetivo geral:** raciocinar matematicamente, formulando e testando conjecturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos, incluindo cadeias dedutivas (PONTE *et al.*, 2007, p. 62). **Encaminhamentos metodológicos:** formular, testar e demonstrar conjecturas; distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjectura e fazer demonstrações simples; identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo; compreender o papel das definições em matemática; distinguir uma argumentação informal de uma demonstração; seleccionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração (PONTE *et al.*, 2007, p. 64). **Proposta didática:** pedir aos alunos para identificarem casos particulares, formularem generalizações e testarem a validade dessas generalizações; proporcionar situações em que os alunos raciocinem indutivamente (formulando conjecturas a partir de dados obtidos na exploração de regularidades) e dedutivamente (demonstrando essas conjecturas); salientar o papel das definições na dedução de propriedades, por exemplo, no estudo dos quadriláteros; realizar uma pesquisa histórica sobre os Elementos de Euclides e a organização axiomática desta obra; salientar os significados de axioma, teorema e demonstração; analisar a demonstração da primeira proposição dos Elementos; fazer referência à análise exaustiva de casos e à redução ao absurdo como métodos de demonstração; pedir a fundamentação de afirmações através de conceitos, propriedades ou procedimentos matemáticos, ou contraexemplos (PONTE *et al.*, 2007, p. 64).

Fonte: Adaptado do Programa de Matemática do Ensino Básico (PONTE *et al.*, 2007).

Conforme descrito nos objetivos gerais e específicos, nota-se que a capacidade dos alunos desenvolverem o raciocínio matemático é estimulada desde os Anos Iniciais e, conforme os alunos progridem na escolaridade, os objetivos vão se tornando maiores e exigindo capacidades mais amplas, ou seja, inicia-se com a formulação e teste de conjecturas e tem, como objetivo, atingir um nível em que os alunos sejam capazes de realizar generalizações e demonstrações, assim como desenvolver o seu raciocínio matemático pautado em conhecimentos indutivos e dedutivos. A partir desta perspectiva, apresentar-se-á, a seguir, dois modelos conceituais envolvendo os processos de raciocínio matemático.

1.1 PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

De acordo com Jeannotte e Kieran (2017), os aspectos centrais do RM podem ser categorizados em relação a dois aspectos: estrutural e processual. O aspecto estrutural adotado pelas autoras, se refere aos raciocínios dedutivo, indutivo e abdutivo. Já o aspecto processual, envolve os processos de generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar, classificar, justificar, provar e provar formalmente. Ressalta-se que as autoras classificam os processos em: processos relacionados à busca por semelhanças e diferenças e processos relacionados à validação, conforme apresentados no Quadro 2.

Quadro 2 - Processos de Raciocínio Matemático e suas definições, com base no modelo de raciocínio matemático proposto por Jeannotte e Kieran (2017)

	Processo	Definição
Processos relacionados à busca por semelhanças e diferenças	Generalizar	Pela busca de semelhanças e diferenças, infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos do conjunto de um subconjunto deste conjunto.
	Conjecturar	Pela busca de semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico provável ou verdadeiro e que tem o potencial para teorização matemática.
	Identificar um padrão	Pela busca por semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas.
	Comparar	Infere, pela busca de semelhanças e diferenças, uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas.
	Classificar	Infere, pela busca de semelhanças e diferenças entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos baseada em propriedades e definições matemáticas.
Processos relacionados à validação	Validar	Visa alterar o valor epistêmico (ou seja, a probabilidade ou a verdade) de uma narrativa matemática.
	Justificar	Ao pesquisar dados, garantias e apoio, permite modificar o valor epistêmico de uma narrativa provável para muito provável.
	Provar	Ao pesquisar dados, garantia e apoio, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável a verdadeira.
	Provar formalmente	Ao procurar dados, garantia e apoio, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável a verdadeira, com rigor e grau de formalismo maiores do que em provar.

Fonte: Autoria própria.

Conforme as autoras enfatizam no modelo proposto, os processos de raciocínio matemático estão intrinsecamente ligados às inferências que emergem a partir das narrativas produzidas na busca pelo desenvolvimento de um conhecimento matemático, sendo exigidas dos alunos diferentes habilidades cognitivas, pressupondo que os alunos evoluem na investigação envolvendo os raciocínios indutivo e dedutivo. Baseado no modelo proposto por Jeannotte e Kieran (2017), Carneiro (2021) apresenta alguns entendimentos sobre os processos de raciocínio matemático que possibilitam compreender, com mais clareza, a finalidade de cada um dos processos citados pelas autoras.

Quadro 3 - Compreensões sobre os processos de raciocínio matemático.

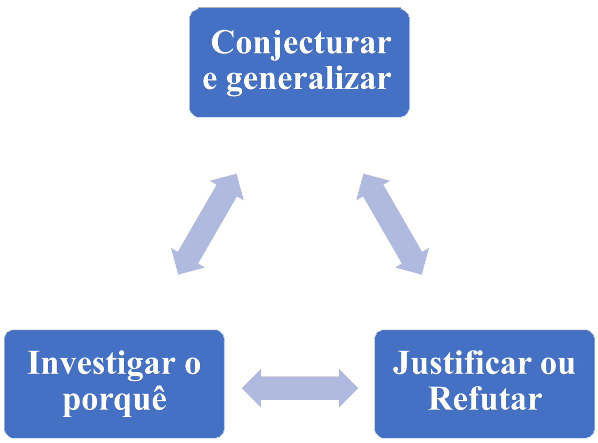
Validação	Demonstração	Processo que valida uma declaração por meio de verdades sistematizadas em uma teoria e de uma estruturação de natureza dedutiva; seus resultados são formalizados em teoria matemática.
	Prova	Processo que valida uma declaração explicitando verdades já aceitas pelo grupo de alunos em questão e possui uma estruturação de natureza dedutiva; seus resultados são acessíveis ao grupo de alunos.

	Justificação	Processo que busca por elementos para validar ou refutar uma declaração.	Dedutiva	Possui uma estrutura dedutiva e independe de casos particulares.
			Empírica	Baseada em casos particulares.
Busca por semelhanças e diferenças	Generalização	Processo de inferência de uma declaração sobre um conjunto de objetos matemáticos a partir de elementos do conjunto.	Teórica	Construída a partir da atribuição de um modelo aos dados observados.
			Empírica	Construída a partir da exploração de poucos exemplos.
	Conjectura	Processo de inferência de uma declaração potencialmente válida.		
	Identificação de padrões	Processo que infere uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas.		
	Classificação	Processo que junta ou separa objetos matemáticos de acordo com seus atributos críticos.		
	Comparação	Processo que busca por semelhanças ou diferenças entre objetos matemáticos com o objetivo de produzir uma declaração.		

Fonte: Carneiro (2021, p. 32).

Ao desenvolver o RM, é possível aos alunos explorarem diferentes situações matemáticas, as quais, dependendo da escolha da tarefa e a forma como é conduzida pelo professor, podem ter o potencial de envolvê-los na utilização de diferentes processos do RM. Outro aspecto importante, citado por Lannin, Ellis e Elliot (2011), é o de que os processos de RM são inter-relacionados, sendo representados pelos autores, conforme ilustração na Figura 1.

Figura 1 - Modelo de processos do raciocínio matemático



Fonte: Adaptado de Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 11).

De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011), os processos de RM são dinâmicos e possibilitam que os alunos utilizem os processos de conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar ou refutar em diferentes momentos de uma resolução matemática. Deste modo, ao utilizar-se uma tarefa exploratória pode-se presumir que novos conhecimentos matemáticos poderão surgir durante a resolução da tarefa e, consequentemente, contribuir para a utilização dos processos de RM.

Para Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) a criação de um novo conhecimento está relacionada ao raciocínio indutivo e abdutivo, enquanto a validação associa-se ao raciocínio dedutivo, sendo que de acordo com os autores, "o raciocínio dedutivo tem um lugar incontornável na validação das afirmações matemáticas, mas muitas dessas afirmações são descobertas através de raciocínio indutivo e abdutivo" (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020, p. 8), mas o que é raciocínio dedutivo, indutivo e abdutivo?

Raciocínio dedutivo: Conforme definição de alguns autores (ARAMAN; SERRAZINA, 2020; PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012), o raciocínio matemático está relacionado à forma de raciocinar formalmente, de modo que o raciocínio dedutivo "relaciona-se com os processos de justificação, prova e prova formal" (ARAMAN; SERRAZINA, 2020, p. 120). Neste sentido, Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) afirmam que, tendo-se como objetivo a validação de um conhecimento matemático, o raciocínio dedutivo é desenvolvido quando a justificativa parte de um conceito geral para casos particulares. Desta forma, ao realizar a justificativa de asserções de forma lógica e isenta de erros, há a prerrogativa de se produzir conclusões válidas, ou seja, trata-se de "um raciocínio formal, muito relacionado com as demonstrações dedutivas e lógicas" (MATA-PEREIRA, 2012, p. 9). Para Mata-Pereira (2012), o raciocínio dedutivo é um dos tipos de raciocínio fundamental para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Neste mesmo sentido, Marcatto (2021) afirma que, dependendo da conclusão envolvendo o conceito geral, é possível validar ou refutar uma determinada premissa.

Raciocínio indutivo: De acordo com Marcatto (2021, p. 7), "o raciocínio indutivo desenvolve-se a partir de observações que acontecem com a exploração de conceitos e ideias matemáticas", do qual se analisa as particularidades de uma informação matemática e o seu potencial para propiciar a significação e a validade de um conhecimento matemático. Para Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020, p. 7), o raciocínio indutivo está relacionado à "inferência de uma regra a partir da observação do que é constante em diversos casos particulares". Neste sentido, Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012, p. 357) também afirmam que é "através do raciocínio indutivo que se elaboram conjecturas que podem ser posteriormente verificadas”, desenvolvendo-se a partir de um caso particular para um conceito geral. De acordo com alguns pesquisadores matemáticos (JEANNOTTE; KIERAN, 2017; ARAMAN; SERRAZINA, 2020), o raciocínio indutivo relaciona-se com o processo de generalização.

Raciocínio abdutivo: Segundo Rivera (2013), quando os alunos analisam uma situação matemática eles produzem interpretações plausíveis em relação a uma particularidade e, consequentemente, algumas dessas observações evoluem para uma hipótese, ou seja, neste momento o aluno está realizando uma abdução. Neste sentido, Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) afirmam que o raciocínio abdutivo está relacionado às inferências que partem de um caso particular ou que não é admitido como verdade, mas que, por meio das conjecturas formuladas, viabiliza a formulação de uma hipótese que pode conduzir à generalização de um caso particular. Conforme descrito por Jeannotte e Kieran (2017), o raciocínio abdutivo relaciona-se às inferências sobre as justificações dadas a cada afirmação (conjectura), mas, de acordo com Rivera (2013), essas justificações não necessariamente provam a validade de uma generalização.

1.2 OS ENTENDIMENTOS ESSENCIAIS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

De acordo Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 10), “frequentemente, o processo de raciocínio começa com o desenvolvimento de uma conjectura ou generalização”; no entanto, a capacidade de raciocinar matematicamente envolve uma variedade de aspectos que constituem os Entendimentos Essenciais do RM. No desenvolvimento desta pesquisa, utilizou-se o modelo de RM proposto por Lannin, Ellis e Elliot (2011), pois ele define os processos de RM que podem emergir durante o ensino de Matemática no Ensino Fundamental.

O modelo proposto por Lannin, Ellis e Elliot (2011) parte de um conceito geral sobre o desenvolvimento do RM, sendo definido pelos autores como *uma grande ideia* que envolve os processos de conjecturar, generalizar, investigar o porquê, desenvolver e avaliar argumentos. Logo, os autores denominam, no modelo, os processos de RM da seguinte forma: conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar. Além de definir os processos que constituem o desenvolvimento do RM, os autores apontam que há nove Entendimentos Essenciais que subsidiam o desenvolvimento do RM, os quais são definidos conforme apresentados no Quadro 4. Ressalta-se que estes entendimentos subsidiaram o desenvolvimento desta pesquisa, pois tivemos como um dos objetivos, investigar como os professores se apropriam da efetivação dos Entendimentos Essenciais durante o desenvolvimento de algumas tarefas matemáticas.

Quadro 4 – Entendimentos Essenciais do Raciocínio Matemático e suas definições

Processos	Entendimento Essencial	Definição
Conjecturar e Generalizar	Entendimento Essencial 1	Conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras. Essas declarações são chamadas de conjecturas.
	Entendimento Essencial 2	Generalizar envolve identificar semelhanças entre os casos ou estender o raciocínio para além do intervalo em que se originou.
	Entendimento Essencial 3	Generalizar envolve reconhecer o domínio relevante para a aplicação da generalização.
	Entendimento Essencial 4	Conjecturar e generalizar envolvem o uso e o esclarecimento do significado de termos, símbolos e representações.
Investigar o porquê	Entendimento Essencial 5	O raciocínio matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar a razão de uma generalização ser verdadeira ou falsa.
Justificar e refutar	Entendimento Essencial 6	Uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas.
	Entendimento Essencial 7	Uma refutação matemática consiste em mostrar que uma afirmação particular é falsa.
	Entendimento Essencial 8	Justificar e refutar envolvem avaliar a validade dos argumentos.
	Entendimento Essencial 9	Uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral não é um argumento baseado em autoridade, percepção, consenso popular ou exemplos.

Fonte: Autoria própria, adaptado de Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 12).

Por meio das definições dos Entendimentos Essenciais apresentados no Quadro 4, nota-se que esses entendimentos implicam diretamente na aprendizagem matemática, assim como dão uma dimensão da forma como os processos são inter-relacionados. Desta forma, os pesquisadores enfatizam que o desenvolvimento do RM deve envolver especificamente os processos de conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar. Ressalta-se que o professor assume um papel fundamental no desenvolvimento destes processos, pois cabe a ele proporcionar aos alunos tarefas desafiadoras que viabilizem a mobilização dos processos de RM. Deste modo, apresenta-se algumas características que são fundamentais na compreensão dos nove Entendimentos Essenciais, propostos no modelo de RM de Lannin, Ellis e Elliot (2011).

1.2.1 Entendimentos Essenciais para Conjecturar e Generalizar

O processo de conjecturar e generalizar, de acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011), necessita da compreensão dos Entendimentos Essenciais 1, 2, 3 e 4.

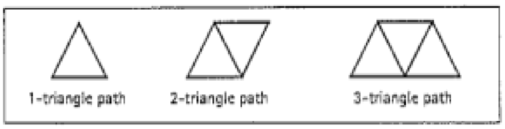
Entendimento Essencial 1: Para Lannin, Ellis e Elliot (2011), a partir dos conceitos e habilidades matemáticas que detém, os alunos podem apresentar afirmações sobre um fato matemático, sendo que estas afirmações podem ser verdadeiras ou falsas. Após uma investigação posterior, podem produzir uma justificativa que deve ser aceita ou refutada, assumindo, assim, a veracidade da conjectura formulada. Outra característica importante é que as conjecturas podem ser formuladas de diferentes formas, por meio da escrita ou da verbalização, podendo ser ou não generalizações.

Criar conjecturas significa elaborar afirmações sobre uma determinada situação matemática. Por exemplo, se perguntarmos a um aluno $2/3 + 3/8 < 2$?, e o aluno responder "esta expressão é verdadeira, pois, $2/3$ é menor que 1, $3/8$ é menor que 1, logo, $2/3 + 3/8$ também será menor que $1+1$, ou seja, $2/3 + 3/8$ é menor que 2", ele elaborou uma conjectura. Mas o aluno também poderia responder: "as duas frações são menores que 1; logo, a soma das duas será menor que 2", e esta também é uma conjectura, mas numa perspectiva de generalização.

Entendimento Essencial 2: De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011), uma generalização pode ou não envolver a formulação de uma regra ou expressão algébrica. Isso ocorre porque, na verdade, a generalização está relacionada à identificação da semelhança entre os casos observados em uma determinada situação. No entanto, de acordo com os autores o processo de generalização pode ocorrer de dois modos, ou seja: (a) identificação de elementos comuns; e (b) extensão do raciocínio além do intervalo em que originalmente identificou os elementos comuns (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

Quando se fala em generalização, uma das primeiras ideias a que remetemos é a relação entre uma expressão algébrica e uma sequência numérica ou geométrica. No entanto, o processo de generalização vai além deste objetivo, pois "os alunos podem generalizar sobre padrões, estratégias, processos, relacionamentos ou regras em qualquer área de conteúdo matemático" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 22). Por exemplo, se for considerada a sequência de figuras formadas por palitos, mostradas na Figura 2, reconhecer-se-á que os alunos podem formular diferentes generalizações.

Figura 2 – Exemplo de sequência de figuras.



Fonte: Lannin; Ellis; Elliot (2011, p. 18).

a) Pela identificação de elementos comuns, um aluno pode afirmar o seguinte: a sequência é formada pela união de palitos formando triângulos, onde a posição da figura observada na sequência, indica a quantidade de triângulos que formam a figura da sequência;

b) Pela extensão do raciocínio, além do intervalo em que originalmente se identificou os elementos comuns, o aluno pode generalizar que, analisando-se a sequência da figura, nota-se que o número de palitos que forma cada uma das figuras é equivalente ao número da figura multiplicado por dois mais um ou, também, em um estágio mais avançado, pode-se dizer que o número de palitos que forma a figura pode ser determinado através da expressão 2n + 1, em que n é o número da posição da figura. Os exemplos citados apontam a possibilidade da generalização ser escrita, verbal ou de um modo mais avançado, utilizando a linguagem algébrica.

Um outro exemplo de extensão do raciocínio é o seguinte: um aluno, ao determinar o valor de 72 – 45, utiliza uma estratégia de resolução conforme expresso na Figura 3. Diante disso, ele testa se a estratégia utilizada para determinar 72 – 45 também é válida para determinar o resultado de 235 – 123, conforme expresso na Figura 4:

Figura 3 – Exemplo de raciocínio utilizado para resolver 72 – 45:

$$70 - 40 = 30$$
$$30 - 5 = 25$$
$$25 + 2 = 27$$

Fonte: Autoria própria.

Figura 4 – Exemplo de generalização pela extensão do raciocínio para resolver 235 – 123:

$$200 - 100 = 100$$
$$30 - 20 = 10$$
$$100 + 10 = 110$$
$$110 - 3 = 107$$
$$107 + 5 = 112$$

Fonte: Autoria própria.

Analisando-se o raciocínio utilizado na Figura 4, nota-se que há uma generalização a partir do raciocínio utilizado no caso da Figura 3, pois, para resolver 72 – 45, o aluno considerou que, em uma subtração, pode-se tirar as unidades do minuendo e, depois, acrescentar ao resultado. Isso não altera o resultado da operação; logo, ele testa o mesmo raciocínio para resolver 235 – 123 e verifica que é válido. Considerando-se o exemplo, pode-se verificar que o raciocício utilizado para resolver 72 – 45, também é válido para resolver 235 – 123, ou seja, tudo indica que se trata de uma possível generalização. É importante ressaltar que uma generalização nem sempre é verdadeira, mas sim, acredita-se que há uma possibilidade de ser verdade. Por exemplo, *todo polígono que tem 4 lados com a mesma medida é um quadrado*. Essa é uma generalização falsa, pois, para ser verdadeira, é necessário considerar as medidas dos ângulos internos e a posição dos lados do polígono.

Entendimento Essencial 3: De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 23), "generalizar envolve dois tipos de atividades - pensar sobre um relacionamento, ideia, representação, regra, padrão ou outra propriedade matemática para identificar semelhanças e estender o raciocínio além do domínio em que se originou". Logo, é muito importante que os alunos desenvolvam a habilidade de identificar o domínio e os limites relevantes para formular uma generalização, pois cada generalização se aplica a um domínio particular. Neste sentido, é natural que, ao desenvolver uma generalização, o aluno tenha analisado e realizado a sua formulação a partir de um determinado contexto. No entanto, de acordo com os autores, é plausível que os limites das generalizações sejam explicitados pelos alunos, possibilitando obter uma melhor compreensão sobre a generalização e, com isso, poder validar ou refutar a generalização apresentada (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

Para exemplificar o Entendimento Essencial 3, Lannin, Ellis e Elliot (2011) citam a seguinte situação: quando se fala em área de polígono, uma das principais ideias que os alunos se lembram é o produto das dimensões (comprimento e largura). No entanto, esta é uma generalização somente válida para os retângulos, ou seja, o domínio da generalização são os retângulos. Outro exemplo citado pelos autores é que, *para obter a medida de qualquer lado de um triângulo, pode-se utilizar o Teorema de Pitágoras*. Esta é uma generalização válida, porém existe o dominío da generalização, que, no caso, só há validade ao se tratar de um triângulo retângulo.

Entendimento Essencial 4: Considerando que a linguagem matemática envolve o uso de símbolos, termos e diferentes representações, ao desenvolver as ações de conjecturar e generalizar, é necessário que o professor tenha um certo cuidado sobre as afirmações apresentadas para os alunos, pois, de acordo Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 26), "esclarecer a linguagem matemática, os símbolos e as representações é uma parte essencial do raciocínio do aluno", já que os alunos podem apresentar diferentes interpretações sobre um símbolo, termo ou propriedade matemática.

Ressalta-se que "à medida que os alunos desenvolvem conjecturas e generalizações, eles geralmente introduzem termos que precisam de esclarecimento à medida que validam ou refutam uma conjectura ou generalização" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 26). Desta forma, é necessário compreender e analisar os termos utilizados pelo aluno durante o desenvolvimento do seu raciocínio, pois, dependendo do significado que o aluno constrói, é possível ocorrer compreensões ou entendimentos equivocados, sendo necessário uma exploração mais ampla.

Muitas vezes, diante da incompreensão de termos, símbolos e propriedades, é necessário que os alunos realizem uma investigação, tendo-se como perspectiva a elaboração de uma justificativa para validar os conceitos matemáticos utilizados. Com isso, pode surgir a necessidade de aperfeiçoar e ampliar a discussão envolvendo a abordagem de um determinado conhecimento matemático. Uma situação que exemplifica o Entendimento Essencial 4 é a seguinte: quando um aluno conjectura que *somente o quadrado tem as medidas iguais*, esta é uma conjectura limitada e válida somente para os primeiros anos do Ensino Fundamental, já que, conforme o aluno avança na escolaridade, ele descobre novas propriedades, definições e termos que possibilita refinar e descobrir que a conjectura formulada não é válida.

1.2.2 Entendimento Essencial para Investigar o porquê

Entendimento Essencial 5: De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 30), investigar porque uma afirmação é verdadeira ou falsa é uma parte essencial no desenvolvimento do RM, visto que este processo tende a contribuir com a validade de uma justificativa ou a refutação de conjecturas e generalizações. Para os autores, o processo de *investigar o porquê* pode ocorrer através da investigação sobre os fatores que explicam por que uma determinada afirmação matemática é válida, dando "atenção a características particulares que fornecem insights sobre relacionamentos que podem explicar se uma generalização é verdadeira ou falsa" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 30), assim como através das explicações do porquê, uma afirmação geral é válida ou inválida.

O Entendimento Essencial 5 está relacionado à ideia de que, quando um aluno investiga o porquê de uma conjectura ou generalização ser válida ou não, ele pode utilizar várias explicações para formular a sua justificativa. Contudo, é importante citar que este processo envolve as ações de: (a) retornar ao significado das operações e termos para examinar se e por que uma relação geral existe ou não existe; (b) considerar o que é semelhante a partir da utilização de diferentes exemplos; (c) examinar várias representações que podem fornecer uma visão sobre uma relação geral (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). Um exemplo do Entendimento Essencial 5 está representado na Figura 5.

Figura 5 – Exemplo evolvendo o Entendimento Essencial 5

Conjectura de Maria
Multipliquei 3 x 5 e percebi que é um a menos que 4 x 4. Tentei fazer isso com alguns outros números e parece funcionar para todos os números. 4 x 6 = 24, e isso é um a menos que 5 x 5 = 25 7 x 9 = 63, e isso é um a menos que 8 x 8 = 64 6 x 8 = 48, e isso é um a menos que 7 x 7 = 49 Acho que sempre que você multiplica dois números separados por dois, o resultado é um a menos do que o produto do número do meio, por ele mesmo.

Fonte: Traduzido de Lannin; Ellis; Elliot (2011, p. 31).

Neste exemplo, o processo de *investigar o porquê* consiste em apresentar argumentos matemáticos de forma lógica, justificando o porquê da conjectura, ou seja, a conclusão *"Acho que sempre que você multiplica dois números separados por dois, o resultado é um a menos do que o produto do número do meio, por ele mesmo",* é válida.

1.2.3 Entendimentos Essenciais para Justificar e Refutar

Entendimento Essencial 6: De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011), partindo do conhecimento prévio e das declarações gerais que os alunos utilizam para fazer as suas generalizações, eles podem construir justificativas válidas ou não. Isso depende do modo como eles lidam com a argumentação para formular a sua conclusão. Deste modo, ressalta-se que:

> Para fornecer uma justificativa válida, os alunos devem fornecer uma sequência lógica de afirmações, cada uma com base em afirmações, ideias ou entendimentos já "sabidamente verdadeiros", para chegar a uma conclusão. A justificativa deve mostrar que a generalização é verdadeira para todos os casos no domínio, apelando para relacionamentos subjacentes válidos (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 35).

Desta forma, a produção de uma justificativa é mais ampla do que verificar a validade de uma afirmação, sendo necessário investigar se uma conjectura ou generalização é verdadeira além do domínio que está sendo explorado. A justificativa "precisa ser estendida para que aborde todos os aspectos, ou explique todos os elementos do domínio" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 35), sendo importante que se utilize uma linguagem geral, demonstrando que a justificativa é válida e se aplica para mais de um exemplo particular. Neste sentido, Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 41) apontam que, para a produção de uma justificativa ser válida, é importante que sejam identificados os seguintes componentes: "(1) linguagem que afirma uma relação geral e especifica um domínio, e (2) raciocínio que apoia a afirmação da relação geral e mostra que ela é válida para todas as instâncias do domínio".

Com base no exemplo citado por Lannin, Ellis e Elliot (2011), uma justificação baseada em ideias já comprendidas, pode ser a seguinte: supondo que um aluno afirme que *somando dois números ímpares, o resultado sempre será par.* Por exemplo, considerando os números ímpares 11 e 13 e reescrevendo-os, tem-se 11 = 1+10 e 13 = 1+12, a soma de 11 e 13 é equivalente a fazer (1+10) + (1+12). A soma de 10+12 é par, porque, somando dois números pares, o resultado é par. E, somando 1 (que foi adicionado a 10) mais 1 (que foi adicionado a 12), o resultado também é par, ou seja, o resultado de 11+13 é par. Desta forma, neste exemplo, pode-se observar que existe uma argumentação lógica a partir das ideias matemáticas que o aluno já compreende e essa é uma parte que contribui na validação de sua conjectura.

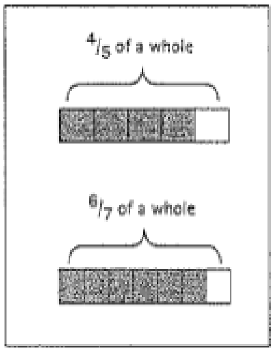
Entendimento Essencial 7: Considerando-se que refutar e validar são etapas que envolvem os argumentos matemáticos utilizados durante a formulação de uma justificativa e que chegar a uma conclusão, ou seja, se a conjectura é verdadeira ou falsa, é importante que os alunos compreendam a importância da utilização dos contraexemplos e o seu papel para apoiar a argumentação de que uma declaração particular é falsa. Neste sentido, Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 43) afirmam que "um único contraexemplo pode invalidar a conjectura", assim como uma generalização.

Para exemplificar a aplicação de uma refutação, suponha-se que um aluno elabore a seguinte conjectura: *somando dois números, o resultado é maior do que qualquer uma das parcelas da adição*. Essa é uma conjectura válida apenas para um subconjunto dos números; no caso, os números naturais, pois se o aluno expandir essa ideia para o conjunto dos números inteiros, utilizando um contraexemplo do tipo (-5) + (-3) = -8 para argumentar a sua justificativa, ele pode concluir que a conjectura é falsa. Desta forma, com o uso do contraexemplo o aluno pode mostrar que existe uma particularidade na conjectura; logo, se o aluno afirmasse que, *somando dois números naturais, o resultado é maior que qualquer uma das parcelas da adição*, a conjectura do aluno seria válida.

Entendimento Essencial 8: Para Lannin, Ellis e Elliot (2011), criar e avaliar argumentos, explicar porque as conjecturas são verdadeiras, refinar as conjecturas com base nos argumentos que sustentam a sua formulação, compreender a aplicação de definições e contraexemplos e mostrar que as conjecturas são falsas, são fatores importantes na justificação matemática. Isso inclui a identificação e revisão de erros ou equívocos apresentados em uma justificativa, seja a partir de uma conclusão ou apenas parte da declaração geral. A avaliação de uma justificativa pode envolver a utilização de diferentes formas de representação matemática para mostrar que a conjectura é falsa, a reformulação de uma conjectura de modo que a torne mais apropriada ou até mesmo verdadeira, a revisão de uma conjectura na perspectiva de dar sentido à afirmação formulada, assim como uma análise mais detalhada dos argumentos que sustentam a validade das conclusões válidas.

Um exemplo que envolve avaliar a validade dos argumentos, citado por Lannin, Ellis e Elliot (2011), é o seguinte: 4/5 é igual a 6/7, porque, para cada fração, há uma parte faltando em uma unidade inteira. Considerando-se que 4/5 tem uma parte faltando no todo e 6/7 também, conforme mostra a Figura 6, logo, o aluno afirma que as duas frações são iguais.

Figura 6 – Representação de 4/5 e 6/7 de um todo.



Fonte: Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 46).

Neste caso, é essencial que o aluno tenha a compreensão de que, embora falte uma parte em cada fração, as partes representadas não são equivalentes, ou seja, essa é uma conjectura inválida, pois o fato de os tamanhos das partes serem diferentes não possibilita elaborar uma justificativa envolvendo uma argumentação lógica. Portanto, a conjectura é falsa e deve ser refutada.

Entendimento Essencial 9: Considerando que muitas das justificações produzidas pelos alunos são elaboradas a partir de ideias matemáticas utilizadas ou apresentadas anteriormente pelo professor, durante a utilização de exemplos para verificar a validade de conjecturas, é essencial que os alunos tenham a compreensão de que a validade de uma generalização não deve ser baseada apenas em ideias matemáticas, teste de exemplos e opiniões sobre a veracidade de uma informação. Neste sentido, no desenvolvimento das justificações em que os alunos exploram as relações matemáticas que apoiam e garantem a validade da generalização, o aluno deve apresentar argumentos que mostrem que uma relação matemática é válida para todos os casos possíveis. Assim, Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 53) afirmam que "basear uma decisão matemática na popularidade de uma ideia, ao invés de um argumento matemático, não constitui uma justificativa matematicamente apropriada".

Desta forma, para melhor compreensão citar-se-á o seguinte exemplo: um aluno generaliza que a adição entre dois números posicionados em qualquer ordem não altera o resultado, pois sua professora havia ensinado essa regra no ano anterior e, verificando a operação de alguns exemplos, tais como 12+23 e 23+12 e 76+82 e 82+76, ele concluiu que a regra dita pela professora é válida. De fato, essa é uma generalização válida, já que, de certa forma, o aluno está utilizando a propriedade da comutativa. No entanto, não se pode considerá-la como uma justificativa válida, pois ele apresenta a sua argumentação levando em consideração a ideia que foi apresentada pela professora e a utilização de alguns exemplos.

Considerando os conceitos e exemplos apresentados em cada definição dos Entendimentos Essenciais (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011), enfatiza-se que a compreensão deles exerce um papel de suma importância no desenvolvimento desta pesquisa. É esta compreensão que se busca investigar, ou melhor, busca-se identificar de que modo essas compreensões sobre os processos de RM são mobilizadas pelos professores durante uma um processo de formação continuada, envolvendo a análise de resoluções matemáticas apresentadas por alguns alunos.

2. PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA E AS CONTRIBUIÇÕES COM O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL

No ensino de Matemática, um dos recursos que o professor utiliza como apoio para desenvolver a prática pedagógica são os pressupostos teóricos definidos nos documentos de orientações curriculares. No entanto, ao analisar as orientações para o ensino de Matemática no Ensino Fundamental na BNCC (2018), nota-se que o documento não apresenta uma definição objetiva sobre o que é o RM. Neste sentido, Jeannotte e Kieran (2017) afirmam que o desenvolvimento do RM é um aspecto descrito em praticamente todos os documentos curriculares que tratam do ensino de Matemática. Contudo, o conteúdo desses documentos, ao definir o que, de fato, é RM, "tende a ser vago, assistemático e até contraditório de um documento para o outro" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.1-2), ou seja, não propicia um entendimento objetivo e claro em relação à sua definição. Desta forma, Jeannotte e Kieran (2017) pontuam que o raciocínio matemático é um dos temas que devem ser abordados em processos formativos que tenham, como objetivo, contribuir com o desenvolvimento profissional. Neste contexto, Vieira, Rodrigues e Serrazina (2020, p. 14) afirmam que:

> Para que os professores promovam o desenvolvimento do raciocínio nos seus alunos, é necessário que, durante a sua formação, sejam confrontados com situações concretas que envolvam explicitamente o raciocínio matemático, experimentem diferentes estratégias e analisem diferentes situações, preferencialmente trabalhos realizados por alunos.

Com base na afirmação dos autores, é compreensível que a reflexão acerca das resoluções de tarefas oportuniza o reconhecimento do RM desenvolvido por um aluno. Logo, essas resoluções podem ser utilizadas como objeto de estudo em um processo formativo e, com isso, propiciarem contribuições para o avanço profissional, no sentido de que os professores possam aperfeiçoar o seu conhecimento a partir de experiências vivenciadas no próprio contexto escolar. Neste sentido, Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012, p. 375) apontam que é "necessário que os professores conheçam os processos de raciocínio dos seus alunos e reflitam sobre eles".

Considerando-se que o conhecimento do RM é uma das dificuldades apresentadas por professores, pois, muitas vezes, os professores utilizam esse termo, mas não demonstram realmente compreender o que de fato é o raciocínio matemático (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 2), Araman e Gomes (2020) apontam que a formação continuada é uma das formas de contribuir com as dificuldades que perpassam as práticas de ensino-aprendizagem. Desta maneira, a formação continuada pode "ser o espaço no qual o professor pode diminuir as lacunas deixadas pela sua formação inicial e, principalmente, permitir a este sujeito desenvolver-se profissionalmente por meio da reflexão apoiada na prática" (ARAMAN; GOMES, 2020, p. 454).

No que diz respeito à formação do professor de matemática, Santana, Serrazina e Nunes (2019, p. 12-13) afirmam que:

> No Brasil, diferentes ações no âmbito da pesquisa e de ações governamentais têm sido implementadas ao longo dos anos na formação do professor, seja ela inicial ou continuada, contudo, muito ainda precisa ser feito para que, efetivamente, essas ações se repercutem na aprendizagem dos estudantes. Acreditamos que, para atingir esse objetivo, é preciso que a formação proporcione um diálogo com a prática do professor na sala de aula, numa relação direta entre o conhecimento didático, a prática e o conhecimento curricular da matemática.

Neste sentido, as autoras apontam que um processo formativo que tenha como objetivo, proporcionar contribuições ao desenvolvimento profissional deve, implicitamente. promover uma abordagem envolvendo o conhecimento didático, a prática e o conhecimento curricular. Nesta perspectiva, Santana, Serrazina e Nunes (2019, p. 13) definem que: (i) o conhecimento didático refere-se à utilização de aportes teóricos e metodológicos para subsidiar o planejamento e execução prática de uma aula; (ii) as práticas referem-se às atividades desenvolvidas cotidianamente em sala de aula, levando em conta o modo que o professor age durante o desenvolvimento de uma aula e as mediações realizadas para promover a aprendizagem; (iii) o conhecimento curricular da matemática são os conteúdos definidos nos documentos de orientação curricular e o que professor precisa saber para poder implementar nas proposta de ensino.

Desta a forma, entende-se que a proposta de processo formativo apresentado por Santana, Serrazina e Nunes (2019) consiste, basicamente, em uma abordagem que leva em consideração o conhecimento matemático e os métodos de ensino que os professores utilizam durante o desenvolvimento de suas aulas. Com isso, o formador assume o papel de mediador e o processo formativo se constitui a partir da troca de experiências entre os professores, promovendo reflexões que envolvem os aspectos teóricos e metodológicos que visam contribuir com o processo de ensino-aprendizagem.

Nóvoa (2019) cita que o desenvolvimento profissional se inicia com a formação inicial e se completa com a formação continuada. Logo, o autor aponta que "face à dimensão dos problemas e aos desafios atuais da educação precisamos, mais do que nunca, reforçar as dimensões coletivas do professorado" (NÓVOA, 2019, p. 10). Neste sentido, Santana, Serrazina e Nunes (2019, p.15) apontam que:

> O desenvolvimento profissional ocorre ao longo da carreira do professor, sendo um fazer contínuo, e não pontual. Os professores, contudo, trabalham isoladamente e,

> para potencializar o seu processo formativo, é preciso promover culturas de ações colegiadas, em que possamos contar com o diálogo e a troca de experiências entre os diferentes atores do cenário escolar.

Desta forma, um processo de formação continuada necessita promover ações em que os professores tenham a oportunidade de pensar e discutir coletivamente, estimulando o trabalho em equipe e a reflexão conjunta. Nesta perspectiva, Ponte (1994) aponta alguns aspectos importantes sobre a concepção do que é a reflexão no contexto da formação profissional. Ele considera que:

> um professor reflexivo vive permanentemente num ciclo, da prática e da teoria à reflexão, para voltar de novo à teoria e à prática. A teoria é fundamental para um alargamento de perspectivas e para indicar linhas condutoras de reflexão. A prática permite o envolvimento activo do próprio professor, proporcionando uma experiência concreta a partir da qual é possível refletir. A reflexão estimula novos interesses, chama a atenção para novas questões e possibilita uma prática mais segura, mais consciente e mais enriquecida PONTE (1994, p. 11).

Nesta perspectiva, com base nas ideias apresentadas por Shoön (1983) e Ponte (1994), Silva, Serrazina e Campos (2014) indicam a importância da reflexão no contexto do desenvolvimento profissional. Logo, consideram que um processo de reflexão deve envolver uma dinâmica que leve em consideração as dimensões do conhecimento na ação, da reflexão na ação e da reflexão sobre a ação. Sendo definidas por Silva, Serrazina e Campos (2014, p. 1507) da seguinte forma:

> - Conhecimento na ação (knowing-in-action) – é o conhecimento que os profissionais demonstram na execução da ação;
> - Reflexão na ação (reflection-in-action) – são descrições verbais ocorridas enquanto os profissionais atuam;
> - Reflexão sobre a ação (reflection-on-action) – é a reconstrução mental da ação para tentar analisá-la retrospectivamente.

Neste contexto de formação em que a *ação* desempenhada pelo professor se torna implicitamente um objeto de estudo e que, por sua vez, pode contribuir ao desenvolvimento de processos formativos em que o professor seja um elemento ativo na construção do conhecimento, Oliveira e Serrazina (2022) apontam que:

> o professor, inserido na equipa de professores com que trabalha, tem de analisar a situação concreta, perceber os alunos com que está a trabalhar, o que se espera que eles aprendam em Matemática, o que se entende hoje por aprender e ensinar Matemática e o seu papel na formação pessoal e social do aluno. É este processo investigativo realizado pelo professor, em termos individuais e colectivos, que o leva a acção. Para que este processo tenha lugar é necessário que o professor questione e reflicta sobre situações de sala de aula e que o faça no contexto da sua equipa (OLIVEIRA; SERRAZINA, 2022, p. 9).

No caso desta pesquisa, a *ação* a ser investigada pelos professores do processo de formação continuada está intrinsecamente ligada à identificação de como o desenvolvimento do RM e seus processos são mobilizados no contexto escolar e, por meio do diálogo entre os professores, pretende-se promover a reflexão acerca dos aspectos que contribuem para a execução de práticas de ensino, nas quais o RM é o foco central da aprendizagem. Neste sentido, Ponte (1994) pontua que:

> O desenvolvimento profissional dos professores diz respeito aos diversos domínios onde se exerce a sua acção. Assim, há a considerar a prática lectiva e as restantes actividades profissionais, dentro e fora da escola, incluindo a colaboração com os colegas, projectos de escola, actividades e projectos de âmbito disciplinar e interdisciplinar e participação em movimentos profissionais. Mas há igualmente que ter presente o carácter fundamental do autoconhecimento do professor e do desenvolvimento dos seus recursos e capacidades próprias - ou seja, a dimensão do desenvolvimento do professor como pessoa (PONTE, 1994, p. 11).

Neste sentido, compreende-se que o desenvolvimento profissional está intrinsecamente relacionado aos conhecimentos que são mobilizados durante as práticas de ensino, assim como às ações envolvendo a didática da matemática. Desta forma, considera-se importante o conhecimento dos alunos e acredita-se que eles podem trazer contribuições durante a realização de um processo formativo, tendo como foco as práticas de ensino de Matemática. Nesta vertente, Ponte (1992) aponta que:

> A Didáctica da Matemática, retomando ideias essenciais sobre o processo de construção dos saberes próprios desta ciência, constitui uma referência fundamental da formação. Ela terá de incluir conhecimento da natureza e papel das experiências matemáticas dos alunos (abordando tópicos como resolução de problemas, formulação de problemas, realização de conjecturas, testes, argumentação e demonstração), da relação entre a Matemática e a realidade, e do papel de processos de pensamento específicos (como a especialização e a generalização) (PONTE, 1992, p. 33).

Com isso, considera-se que um processo formativo, tendo como objeto de estudo *o raciocínio matemático desenvolvido por alunos*, pode propiciar reflexões que contribuam com o conhecimento do professor sobre o modo que os alunos raciocinam e, consequentemente, sobre as ações que fortalecem as práticas de ensino da Matemática, com o objetivo de estimular o desenvolvimento do RM. Desta forma, quando se trata do desenvolvimento do RM na perspectiva de formação do professor, além do conhecimento do conteúdo que o aluno demonstra saber existe outra vertente a ser considerada que, segundo Ponte (1994), é prática de autoquestionamento sobre os saberes mobilizados pelos alunos. Nesta perspectiva, é compreensível que a aprendizagem do professor possa emergir a partir da investigação da prática letiva e, consequentemente, oportunizar contribuições ao seu desenvolvimento profissional.

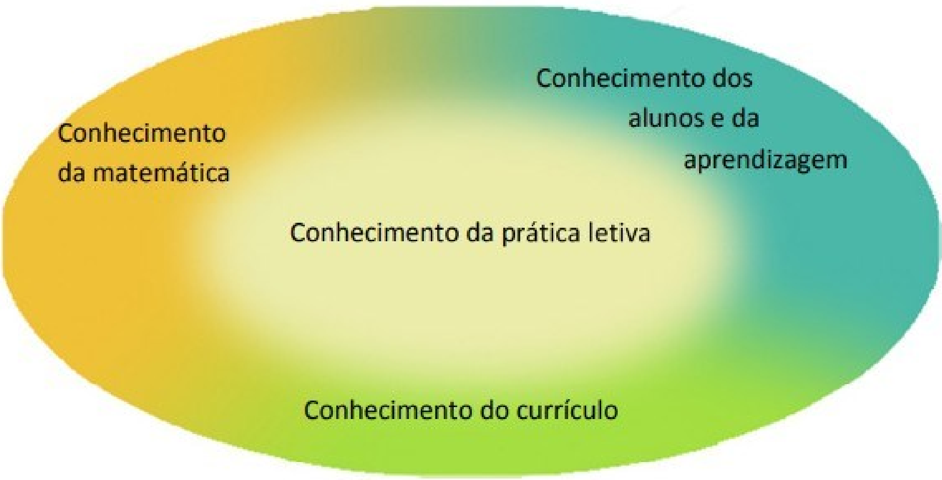
Visando promover um processo formativo com foco no desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática, é importante considerar que:

> O conhecimento profissional do professor de Matemática inclui diversos aspectos, dos quais nos interessa sobretudo o que se refere à prática lectiva, aquele onde se faz

> sentir de modo mais forte a especificidade da disciplina de Matemática, e que designamos por conhecimento didático. Nele distinguimos quatro grandes vertentes: o conhecimento da Matemática, o conhecimento do currículo, o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem e o conhecimento dos processos de trabalho na sala de aula (PONTE, 2012, p. 4).

Considerando as quatro vertentes do conhecimento didático, Ponte (2012) apresenta, conforme representado na Figura 7, um modelo no qual elenca os conhecimentos que devem ser mobilizados pelos professores durante as práticas de ensino de Matemática.

Figura 7 – Vertentes do conhecimento didático



Fonte: Ponte (2012, p. 4).

Apresentar-se-á, com base em Ponte (2012), as características de cada uma das vertentes do conhecimento didático:

a) O conhecimento da matemática refere-se ao modo como o professor utiliza os conceitos, relações, propriedades e teoremas para desenvolver a sua prática de ensino em sala de aula; ou seja, trata-se da interpretação que o professor faz sobre o que é essencial e qual procedimento utilizar para promover a aprendizagem de um determinado conteúdo;

b) O conhecimento do currículo refere-se à gestão do conteúdo matemático. Envolve a organização sistemática dos conteúdos conforme definidos pelos documentos de orientações curriculares, a seleção dos métodos de ensino e o processo de avaliação; ou seja, trata-se do momento em que o professor, em sua prática letiva, faz a escolha “do que ensinar, como ensinar e como avaliar” a aprendizagem do aluno;

c) O conhecimento do aluno e da aprendizagem refere-se ao fato de que o professor necessita conhecer o seu aluno, os interesses e os pontos de vista que o aluno demonstra quando envolvido em um contexto. Desta forma, torna-se essencial o professor criar um elo de aproximação com o aluno, tendo como objetivo descobrir as suas fragilidades, necessidades e dificuldades enquanto está desenvolvendo a sua aprendizagem. Logo, deve levar em consideração que cada aluno aprende de uma forma e, com isso, em uma sala de aula ocorrem necessidades diferenciadas;

d) O conhecimento da prática letiva refere-se especificamente aos processos de ensino e aprendizagem. Desta forma, compreende as ações a serem desenvolvidas em sala de aula, ou seja: a seleção dos conteúdos e os tipos de tarefas, a escolha dos métodos de ensino, a condução e as intervenções necessárias para auxiliar e dar apoio ao aluno durante o processo de aprendizagem e o desenvolvimento da avaliação.

Considerando-se as definições das *vertentes do conhecimento didático* do professor que ensina matemática, entende-se que vários aspectos conduzam a pensar sobre o desenvolvimento do RM, pois trata-se de uma habilidade essencial e, ao mesmo tempo, complexa durante o desenvolvimento de uma aula; logo, as ações desenvolvidas pelo professor podem ou não estimular o desenvolvimento do RM durante as práticas de ensino. Deste modo, pensar sobre as práticas letivas que envolvem a abordagem do RM se torna algo relevante, porém complexo, para muitos professores.

A partir da complexidade envolvendo as compreensões que os professores que ensinam matemática possuem sobre o desenvolvimento do RM e seus processos, considera-se essencial pensar em um processo de formação continuada que promova reflexões sobre os Entendimentos Essenciais do RM e os conhecimentos didáticos, com foco na aprendizagem, propiciando, assim, contribuições ao desenvolvimento profissional do professor. Ponte (1994, p. 12) aponta a necessidade de pensar no desenvolvimento profissional como um momento de reflexão, "tomando uma nova postura de iniciativa no equacionar e resolver os problemas que se colocam no seu dia a dia docente".

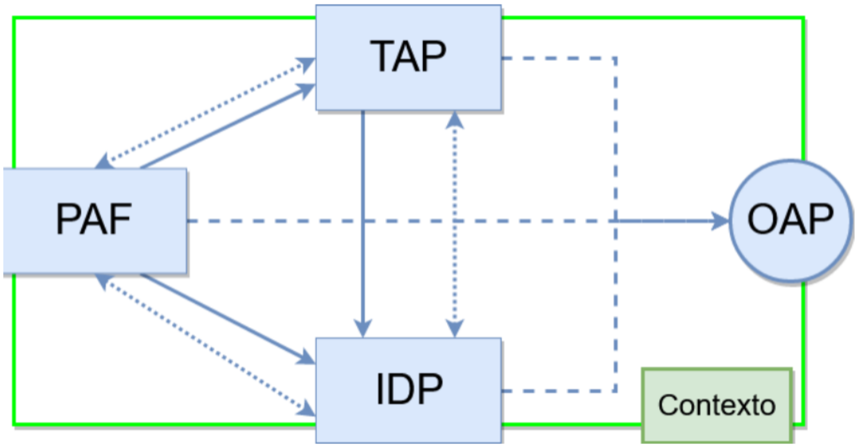
Pensando nos argumentos apresentados e na percepção de qual tipo de formação pode contribuir com o desenvolvimento profissional, Ribeiro e Ponte (2020) propõem o Modelo PLOT (Professional Learning Opportunities for Teachers) para subsidiar a organização e o desenvolvimento de processos de formação de professores, sendo que este modelo

> Constitui um modelo teórico-metodológico para (i) organizar o design de processos formativos que objetivem promover aprendizagem aos professores e (ii) gerar oportunidades para os professores aprenderem durante processos formativos a partir de três domínios: (a) Papel e Ações do Formador (PAF), (b) Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), e (c) Interações Discursivas entre os Participantes (IDP) (RIBEIRO; PONTE, 2020, p. 2).

Conforme a definição de Ribeiro e Ponte (2020), é compreensível que o Modelo PLOT trate da constituição de processos formativos tendo, como objetivo, propor

Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP) para os professores por meio de um processo formativo que envolva ações “interconectadas e interativas” (RIBEIRO; PONTE, 2020, p. 4), sendo que as ações a serem desenvolvidas devem consistir na inter-relação entre os três domínios que constituem o Modelo PLOT. Os autores esquematizam o modelo conforme apresentado na Figura 8.

Figura 8 – Modelo PLOT (Professional Learning Opportunities for Teachers)



Fonte: Ribeiro e Ponte (2020, p. 4).

Visando melhor compreensão do Modelo PLOT, Ribeiro e Ponte (2020) descrevem na Figura 8, as dimensões conceitual e operacional para o desenvolvimento de um processo formativo que proponha Oportunidades de Aprendizagem Profissional para Professores (OAP), por meio de um contexto envolvendo a articulação entre as três dimensões (PAF, TAP e IDP[4]).

[4] **PAF,** abreviação de Papel e Ações do Formador; **TAP,** abreviação de Tarefa de Aprendizagem Profissional; e **IDP,** abreviação de Interações Discursivas entre os Participantes.

Figura 9 – Dimensões conceitual e operacional para o Modelo PLOT

	Dimensão Conceitual		*Dimensão Operacional*	
	Componente	**Característica**	**Componente**	**Característica**
Papel e Ações do Formador (PAF)	***Aproximação***	Favorecer a aproximação da Matemática Acadêmica (MA) à Matemática Escolar (ME) e vice-versa.	***Gestão***	Promover o gerenciamento de um ambiente de ensino-aprendizagem exploratório, com as diferentes fases desta abordagem.
	Articulação	Estimular a articulação entre as dimensões matemática e didática do conhecimento profissional para ensinar.	***Orquestração***	Preparar e desenvolver a orquestração de discussões matemáticas e didáticas entre todos os participantes.
Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP)	***Conhecimento Profissional***	Explorar os conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores, relacionados à/s TME.	***Tarefa Matemática***	Contemplar tarefa/s matemática/s dos estudantes (TME), de alto nível cognitivo.
	Ensino Exploratório	Possuir estrutura que propicie um ambiente de ensino-aprendizagem exploratório.	***Registros de Prática***	Envolver diferentes tipos de registros de prática, organizados em forma de *Vignettes*.
Interações Discursivas entre os Participantes (IDP)	***Discussões Matemáticas e Didáticas***	Contemplar, de forma articulada, as discussões matemáticas e didáticas relacionados às TME.	***Linguagem mobilizada***	Contemplar a utilização de linguagem matemática e didática adequada e pertinente ao nível de ensino das TME.
	Argumentação e Justificação	Envolver argumentação e justificação matemáticas e didáticas válidas.	***Comunicação dialógica***	Promover a comunicação dialógica e integrativa entre todos os participantes.

Fonte: Ribeiro e Ponte (2020, p. 7).

Considerando-se as características descritas em cada domínio do Modelo PLOT, nota-se que ele tem o potencial de auxiliar na estruturação de um processo de formação continuada que viabilize aos professores participantes e ao formador, inserirem-se em um processo de aprendizagem profissional, levando-se em consideração elementos que permeiam o próprio processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula. Logo, essa é uma das perspectivas adotadas durante a realização desta pesquisa, na qual adotou-se, como principal objeto de estudo, os dados coletados durante a realização da TAP 3, que ocorreu durante o desenvolvimento de um processo de formação continuada.

Com relação às Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), Barboza, Pazuch e Ribeiro (2021, p. 7) indicam que "as TAP são compostas de situações a serem exploradas, possibilitando a formulação de conjecturas matemáticas, sua validação, reformulação e a mobilização de conhecimentos necessários à prática letiva". No caso desta pesquisa, considera-se que os Entendimentos Essenciais dos processos de RM, são compreensões que o professor deve considerar durante o desenvolvimento de um raciocínio apresentado pelos alunos. Neste sentido, Trevisan, Ribeiro e Ponte (2020, p. 3) apontam que o trabalho com as TAP pode ser semelhante ao desenvolvimento de "uma aula de matemática na perspectiva do ensino baseado na investigação (em que os alunos trabalham com tarefas e se desenvolvem em três momentos: lançamento da tarefa, trabalho autônomo dos alunos e discussões com toda a turma)". Em outras palavras, o trabalho consiste na proposta de uma tarefa em que os professores possam realizar a investigação sobre um determinado conhecimento, individualmente ou em pequenos grupos, e, com base nos resultados da investigação, promover discussões e reflexões envolvendo os demais participantes do processo formativo.

Barboza, Pazuch e Ribeiro (2021) apontam que as TAP são instrumentos relevantes para o desenvolvimento da aprendizagem profissional, pois a sua estrutura alicerçada em aspectos voltados para a prática, contribui para a formulação de questionamentos com o potencial de impactar ou, até mesmo, promover determinadas transformações nas práticas profissionais. Logo, "compreende-se que as TAP são instrumentos ou materiais planejados pelo formador, de maneira a possibilitar discussões e reflexões sobre os conhecimentos matemáticos e didáticos do professor" (BARBOZA; PAZUCH; RIBEIRO, 2021, p. 7-8). Nesta perspectiva, considera-se que uma TAP consiste na estruturação de uma ação formativa que tenha potencial de proporcionar, aos professores, um processo dialógico e reflexivo, envolvendo aspectos vivenciados durante a prática docente. Neste sentido, o desenvolvimento de uma TAP pode propiciar um momento em que os professores coletivamente discutam sobre questões de natureza pedagógica ou curricular e, assim, possam utilizar as conclusões obtidas por meio do desenvolvimento das TAP para contribuir com o seu desenvolvimento profissional.

Segundo Ribeiro e Ponte (2020), um dos aspectos relevantes do Modelo PLOT é o desenvolvimento de um processo formativo interativo, no qual as dimensões PAF, TAP e IDP são interconectadas. Com base no esquema do Modelo PLOT representado na Figura 8, nota-se que a dimensão do Papel e Ações do Formador (PAF) implica no desenvolvimento das TAP e, consequentemente, pode estimular a ocorrência de Interações Discursivas entre os Participantes – IDP durante o desenvolvimento de um processo formativo. Desta forma, saber quais as principais características e como as dimensões PAF e IDP podem contribuir com o desenvolvimento de uma TAP se torna relevante, visto que as dimensões PAF e IDP também ocorrem durante a realização de uma TAP.

O desenvolvimento do Papel e Ações do Formador é um aspecto essencial e de suma importância na realização de um processo formativo, pois cabe ao formador definir os objetivos e perspectivas contempladas durante o desenvolvimento da proposta de formação. Nesta perspectiva, Ribeiro e Ponte (2020) indicam alguns componentes que fazem parte da dimensão do PAF: aproximação entre a matemática escolar e os conhecimentos acadêmicos; a articulação entre os conhecimentos matemáticos e a proposta didática utilizada para promover o ensino de matemática; reflexões envolvendo os métodos de ensino de matemática utilizados em sala de aula, em especial, o uso do Ensino Exploratório como um processo que visa contribuir com o desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem; e, por fim, a realização de discussões com foco nas práticas didáticas e conhecimentos matemáticos, tendo como objetivo, promover reflexões que contribuam com a aprendizagem dos professores.

Em relação ao desenvolvimento das IDP, Ribeiro e Ponte (2020) citam que esta dimensão do Modelo PLOT corresponde a ações que envolvem as discussões matemáticas, a didática, a argumentação e a justificação numa perspectiva dialógica. Assim, os professores, implicitamente, promovem reflexões sobre o ensino, o conhecimento matemático e discussões de tarefas matemáticas, favorecendo, assim, a aprendizagem profissional. Desta forma, os componentes elementares do desenvolvimento das IDP são: as discussões matemáticas e didáticas, mobilizando conhecimentos que contribuam com a aprendizagem profissional do professor; a utilização da justificação e argumentação para promover os momentos de discussão, tendo como foco, a discussão de tarefas matemáticas na perspectiva do ensino para os alunos; o estímulo à utilização da linguagem matemática de modo formal e apropriado, levando em consideração o nível de ensino; e a conscientização da importância de se promover a comunicação dialógica entre os professores e alunos durante as práticas letivas que envolvem o processo de ensino-aprendizagem.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresenta-se: na seção 3.1, a metodologia da pesquisa; na 3.2, o produto educacional; na 3.3, a estrutura do processo de formação continuada e as TAP desenvolvidas; na 3.4, a descrição da pesquisa; na 3.5, o desenvolvimento da TAP 3; e, na 3.6, métodos de coleta e de análise dos dados.

3.1 METODOLOGIA DA PESQUISA

Esta pesquisa, de natureza qualitativa e interpretativa (BOGDAN, BIKLEN, 1994), consistiu em elaborar e desenvolver um processo de formação continuada para professores que contribuísse para a compreensão dos Entendimentos Essenciais de Raciocínio Matemático para o ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, cujo método utilizado foi a Investigação Baseada em Design – IBD (PONTE *et al.* 2016).

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), uma investigação qualitativa envolve as experiências vivenciadas por determinados sujeitos e o modo como eles mesmos as interpretam diante de um contexto, sendo que nesta perspectiva:

> Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador. O processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre investigadores e respectivos sujeitos, dado estes não serem abordados por aqueles de uma forma neutra (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51).

Embora os pesquisadores não utilizem a expressão qualitativa e interpretativa, adotou-se essa denominação porque, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), os procedimentos utilizados pelos investigadores qualitativos consistem, também, na interpretação rigorosa e minuciosa de dados que certificam a aprendizagem e propiciam a produção de significados em diferentes perspectivas, podendo, durante a pesquisa, realizar a análise de gravações, artigos, transcrições de entrevistas etc. Neste caso, esta pesquisa consiste na análise de transcrições de áudios que foram gravados durante a coleta de dados.

Segundo Manson (2006, p. 168), os “pesquisadores interpretativistas tendem a usar métodos qualitativos como estudos de caso, estudos etnográficos, estudos fenomenográficos e outros. Eles tentam reunir grossos, ricos conjuntos de dados que os ajudarão a entender o fenômeno em seu contexto”. Considerando os aspectos citados por Manson, optou-se por utilizar o método de Investigação Baseada em Design (IBD) para subsidiar os encaminhamentos metodológicos a serem desenvolvidos no decorrer desta pesquisa.

O método de pesquisa Investigação Baseada em Design (IBD), segundo Ponte *et al.* (2016), preconiza o envolvimento do processo de ensino e aprendizagem, no qual se estudam as intervenções educacionais. O foco dos estudos pode estar centrado “na aprendizagem dos alunos, no ensino realizado pelos professores, na produção de novos currículos ou materiais educativos, na formação de professores, ou em mudanças nos sistemas educativos” (PONTE *et al.*, 2016, p. 76). Neste sentido, os conhecimentos a serem investigados devem ser pautados pelos saberes, contextos e ações desempenhadas por indivíduos no âmbito da prática educacional.

Desta forma, o desenvolvimento de uma IBD pode partir do pressuposto que o contexto e os encaminhamentos metodológicos são elementos fundamentais para o processo de investigação. Nesta pesquisa, as ações e os raciocínios matemáticos desenvolvidos por alunos durante a resolução de tarefas, podem apresentar elementos que contribuem com a sistematização de um contexto formativo, viabilizando a elaboração de novos conhecimentos.

Segundo Ponte *et al.* (2016), a IBD envolve o desenvolvimento de ciclos, sendo constituídos pelas fases de preparação, realização e análise retrospectiva. No Quadro 5, detalha-se esses ciclos e o modo como foram organizados na pesquisa.

Quadro 5 – Aspectos importantes para o desenvolvimento de uma IBD e o modo de aplicação nesta pesquisa

Fases	Aspectos	Modo de aplicação nesta Pesquisa
Preparação	- Clarificação da proposta teórica, das ideias disciplinares, dos objetivos de aprendizagem e dos aspectos de transformação; - Especificação do ponto de partida e definição da aprendizagem pretendida em um determinado contexto; - Elaboração de uma conjectura a ser testada e aperfeiçoada no decurso da investigação.	- Estudos envolvendo os aspectos do raciocínio matemático e os seus processos, a compreensão dos Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento do raciocínio matemático e os aspectos que visam contribuir para o desenvolvimento profissional; - Seleção de resoluções de tarefas matemáticas que serão utilizadas como objeto de estudo durante o processo de formação continuada, tendo-se como objetivo promover discussões que contribuíssem para a compreensão e identificação dos processos e Entendimentos Essenciais do RM; -Elaboração de 3 TAP (Tarefas de Aprendizagem Profissional) para os participantes do curso realizarem a investigação envolvendo os Entendimentos Essenciais; - Elaboração da conjectura de que *a análise de tarefas matemáticas resolvidas por alunos possibilita, aos professores participantes de um processo formativo, compreender os Entendimentos Essenciais do raciocínio matemático.*
Realização	- Assumir uma perspectiva clara dos possíveis percursos de aprendizagem e manter ativos os meios de suporte potenciais; - Não perder de vista que o objetivo é desenvolver uma compreensão profunda envolvendo a aprendizagem;	- Assumiu-se, desde o início da estruturação do curso, que as resoluções dos alunos poderiam contribuir para a compreensão e investigação envolvendo os Entendimentos Essenciais dos processos de Raciocínio Matemático, sendo que essas resoluções apoiaram o processo de discussões e reflexões; - Realização de 3 TAP com momentos de análises das resoluções e áudios dos alunos, discussões em duplas, trios

	- Realização de momentos de reflexão regulares, onde se analisam e interpretam os acontecimentos registrados e se planejam as atividades futuras a partir das conclusões obtidas.	e coletivamente, para promover reflexões acerca das resoluções de alunos e a identificação e utilização dos Entendimentos Essenciais para auxiliar na compreensão dos processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos; - Durante a realização das 3 TAP, todas as análises realizadas pelos participantes do processo de formação continuada partiram das resoluções e raciocínios matemáticos apresentados por alunos.
Análise Retrospectiva	- Realizar uma análise num contexto teórico mais amplo ao final de cada ciclo; - Analisar dados de diferentes membros da equipe investigada, assim como de diferentes momentos da investigação, pois este fato tende a contribuir para que se produza uma variedade de interpretações.	- Análise de trechos das discussões entre os participantes, tendo com objetivo identificar quando e porque os participantes do processo da formação continuada consideram determinados momentos como aspectos que contribuem com a compreensão dos Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento do Raciocínio Matemático; - Análise levando em consideração o contexto geral da investigação realizada neste ciclo e os aspectos teóricos que fundamentam o processo de investigação, viabilizando-se, assim, a interpretação de possíveis aspectos e artefatos que podem ser refinados na realização de um novo ciclo.

Fonte: Autoria própria, baseado em Ponte *et al.* (2016, p. 80-82).

Com base nos argumentos apresentados no Quadro 5, entende-se que o desenvolvimento deste 1º ciclo da IBD, por meio do design utilizado durante o processo formativo com o uso de diferentes registros de prática (resoluções escritas, gravações de áudios e vídeos), pode gerar Oportunidades de Aprendizagem Profissional. Logo, intrinsecamente proporcionará contribuições com desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Considerando que o objetivo desta pesquisa é compreender como o desenvolvimento de um processo de formação continuada pode contribuir na compreensão dos Entendimentos Essenciais de Raciocínio Matemático para o Ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, elaborou-se a conjectura de que *a análise de tarefas matemáticas resolvidas por alunos possibilita, aos professores participantes de um processo formativo, compreender os Entendimentos Essenciais do raciocínio matemático*. Desta forma, durante a realização da pesquisa, pretende-se: (a) compreender como os professores reconhecem os processos de Raciocínio Matemático por meio da resolução dos alunos; e (b) identificar e compreender as oportunidades de aprendizagem profissional no contexto de um processo de formação continuada, tendo-se como foco os Entendimentos Essenciais sobre os processos de Raciocínio Matemático.

Como parte integrante desta pesquisa, elaborou-se, como produto educacional, o caderno de formação continuada intitulado "Desenvolvendo compreensões sobre os processos de Raciocínio Matemático: uma proposta de formação para os Anos Iniciais[5]". Ressalta-se que o produto educacional foi organizado a partir da versão preliminar do material (caderno de formação) utilizado no processo de formação continuada, pois ele precisou ser ajustado em função da análise retrospectiva realizada neste estudo. Assim, a próxima seção, aponta alguns elementos da versão preliminar do produto educacional, contemplando algumas das ações desenvolvidas durante a realização do processo de formação continuada. Logo, no corpo desta dissertação, apresentam-se as análises realizadas no 1º ciclo da IBD, tendo como base as discussões promovidas durante a realização da 2ª parte da TAP 3.

3.2 PRODUTO EDUCACIONAL

De acordo com o Art. 51, do regulamento interno do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, é um dos requisitos obrigatórios para a conclusão do mestrado profissional a elaboração e/ou aplicação de um produto educacional. Desta forma, elaborou-se e aplicou-se o caderno formativo "Desenvolvendo compreensões sobre os processos de Raciocínio Matemático: uma proposta de formação para os Anos Iniciais", durante o processo de formação continuada que propiciou a coleta de dados para a realização desta pesquisa.

Considerando-se que foi utilizado o método de Investigação Baseada em Design (IBD), o caderno foi estruturado na etapa de preparação para o desenvolvimento da pesquisa, sendo que, antes da sua elaboração, foram realizados estudos por meio do grupo de pesquisa sobre o raciocínio matemático, os seus processos e os Entendimentos Essenciais para a mobilização dos processos de RM. Ressalta-se que, após a realização do processo formativo (1º ciclo da IBD), algumas adequações após a análise retrospectiva se mostraram necessárias. No entanto, considerando-se não haver a possibilidade de realizar, neste momento, um novo ciclo, as devidas adequações são apresentadas por meio da versão aprimorada do caderno de formação que constitui o produto educacional que acompanha esta dissertação.

No corpo do caderno de formação, apresentam-se a proposta do estudo a ser realizada em cada encontro envolvendo a utilização de resoluções de tarefas matemáticas e as transcrições de áudios em uma perspectiva de ensino do exploratório, sendo que as resoluções

[5] Disponível em: http://portal.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/stricto-sensu/ppg-mat/producao-academica

foram coletadas por meio de algumas pesquisas desenvolvidas por membros do grupo de pesquisa[6]. As resoluções de tarefas foram incluídas na proposta de estudo que foi desenvolvida durante a realização do processo de formação continuada. O caderno também apresenta alguns textos que embasam e fundamentam os aspectos teóricos utilizados durante o desenvolvimento do processo formativo.

3.3 ESTRUTURA DO PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA E AS TAP DESENVOLVIDAS

Considerando-se que a realização deste processo de formação continuada foi estruturada com base nos encaminhamentos metodológicos que preconizam o desenvolvimento de uma IBD, na fase de preparação, foi realizada a estruturação do processo formativo e a seleção dos registros de práticas para compor o caderno de formação. Desta forma, o processo formativo foi organizado e realizado como mostrado no Quadro 6:

Quadro 6 – Estrutura, ações e conteúdos do Processo de Formação Continuada

Encontro	Data (Carga horária)	Ações desenvolvidas e conteúdos
1º Encontro	29/08/2022 (3 horas)	• Leitura e discussão envolvendo os aspectos teóricos sobre o desenvolvimento do Raciocínio Matemático, conforme definições descritas na BNCC; • Desenvolvimento da TAP 1: Análise e discussões envolvendo alguns registros de prática, tendo como objetivo a identificação das informações que podem ser consideradas como expressão de RM; • Leitura e discussão envolvendo os aspectos teóricos sobre o conceito de RM, com base em definições apresentadas por alguns autores.
2º Encontro	05/09/2022 (3 horas)	• Leitura e discussão envolvendo os aspectos teóricos sobre os processos de RM e os Entendimentos Essenciais, conforme definições de Lannin, Ellis e Elliot (2011); • Desenvolvimento da TAP 2: Análise e discussões de alguns registros de prática, tendo como objetivo identificar quais processos de RM estavam sendo mobilizados por alguns alunos do 5º ano, enquanto resolviam uma tarefa exploratória envolvendo o conceito de área e perímetro. Ressalta-se que essa tarefa fez parte de um estudo realizado por Morais (2022); • Leitura e discussão visando promover um diálogo sobre as ações do professor e a utilização de tarefas exploratórias para o ensino de Matemática.
3º Encontro	12/09/2022 (3 horas)	• Leitura e discussões envolvendo a percepção do modo como deve ser realizado um planejamento coletivo de uma aula na perspectiva do Ensino Exploratório; • 1ª parte da TAP 3: Momentos para os participantes do processo formativo

[6] Fazem parte deste grupo de pesquisa: dois professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Cornélio Procópio e Londrina, e seus respectivos orientandos.

		discutirem matematicamente a resolução de uma tarefa exploratória, sendo que o objetivo desta etapa foi propor para os participantes um momento de discussão, envolvendo algumas vertentes do conhecimento didático (PONTE, 2012) que julgavam necessários para a aplicação da tarefa e o desenvolvimento da aula. Ressalta-se que a tarefa exploratória foi, antecipadamente, selecionada pelo formador.
4º Encontro	19/09/2022 (3 horas)	• 2ª parte da TAP 3: Análise das resoluções de alguns alunos do 5º ano para a tarefa exploratória (apresentada na Figura 14), envolvendo o conceito de sequência numérica. Neste encontro, os participantes do processo formativo tiveram que analisar as resoluções (protocolos dos alunos) da tarefa e identificar quais processos de RM os alunos demonstravam mobilizar, com base nos registros apresentados como resolução da tarefa. Ressalta-se que os dados (protocolos dos alunos) foram coletados pelo formador, durante a aplicação da tarefa envolvendo o conceito de sequência, em uma turma cedida por uma professora da rede municipal de Ensino. Durante o desenvolvimento da aula, o formador deste processo formativo atuou como professor da turma.
5º Encontro	26/09/2022 (3 horas)	• 3ª Parte da TAP 3: Análise de alguns registros de prática coletados durante o desenvolvimento da aula envolvendo o conceito de sequência numérica. Nesta etapa da TAP 3, os participantes do processo formativo tiveram que analisar alguns trechos da discussão promovida por uma dupla de alunos, enquanto resolviam a tarefa (para auxiliar na análise, as professoras receberam as transcrições dos áudios) e alguns trechos de vídeos gravados durante o momento da plenária realizada como fechamento da tarefa exploratória (os áudios dos vídeos também foram transcritos); • Elaboração de um esquema sintetizando os aspectos discutidos durante o processo de formação continuada; em particular, o foco era o desenvolvimento do RM e seus processos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Visando propiciar uma compreensão das TAP que foram desenvolvidas durante o processo de formação continuada, apresenta-se, a seguir, as TAP utilizadas durante os encontros. Porém, sugere-se ao leitor desta dissertação, que faça a leitura do caderno de formação (Produto Educacional).

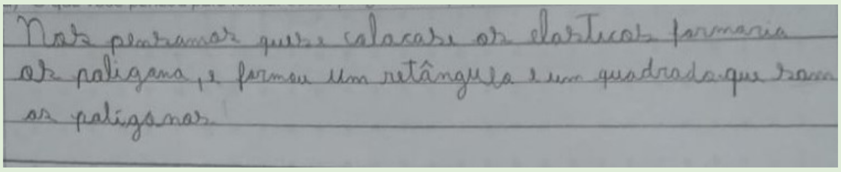
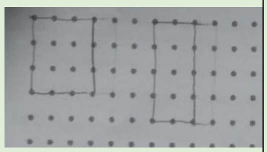
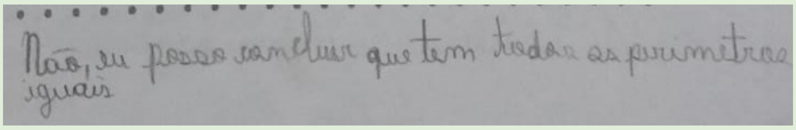
3.3.1 TAP 1 - O que é o Raciocínio Matemático?

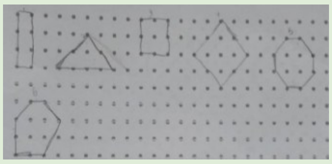
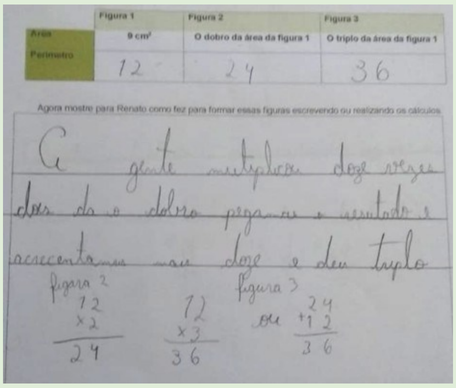
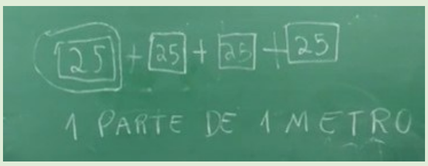
Essa TAP foi desenvolvida em dois momentos, sendo:

Momento 1 – Análise individual: Neste momento, as professoras analisaram individualmente os registros de prática[7] e assinalaram os itens que consideram haver desenvolvimento do RM. Na sequência, tinham que justificar por que consideravam haver expressão de RM.

[7] Os registros de práticas utilizados na TAP 1, foram coletados por Morais (2022) e Bellini (2022) durante o desenvolvimento de suas respectivas pesquisas.

Figura 10 – Registros de prática utilizados no desenvolvimento da TAP 1

<table>
<tr><td colspan="2">Momento 1 – TAP 1
ANÁLISE INDIVIDUAL
Considerando as seguintes resoluções de tarefas matemáticas e respostas dadas por alguns alunos, assinale um x nas que você considera como expressão de raciocínio matemático.</td></tr>
<tr><td>TAREFA 1: Renato tem um geoplano e gosta de construir figuras geométricas nele. Mas agora, ele tem algumas questões para resolver utilizando o geoplano. Vamos ajudá-lo?
1) Construa no geoplano um retângulo e um quadrado e depois desenhe na malha pontilhada.
a) O que você pensou para formas esse polígonos? Explique.
 </td><td></td></tr>
<tr><td>TAREFA 2: Construa várias figuras com o perímetro igual a 8 cm. Todas as figuras têm a mesma área? O que você pode concluir?


</td><td></td></tr>
<tr><td>TAREFA 3: Renato formou no geoplano um quadrado com área 9 cm² e precisa encontrar o perímetro, depois preencher a tabela abaixo:

</td><td></td></tr>
<tr><td>TAREFA 4: Episódio de discussão sobre a composição de 1 metro.
Professora: Agora vocês vão formar 1 metro com esses pedaços de EVA e registrar como foi feito, não pode usar régua nem metro.
Lorenzo: Pra dar 1 metro?
Professora: Sim, pra dar 1 metro.
Bruna: Posso colar?
Lorenzo: Sim.
Professora: Quantos centímetros tem o metro mesmo?
Lorenzo, Guilherme e Bruna: 100 cm.
Professora: Isso, 100 cm.</td><td></td></tr>
<tr><td>TAREFA 5: Considerando que um pedaço de fita mede 25 cm, quanto vale essa parte em relação a 1 metro?

</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

Momento 2 – Discussão coletiva: Após a análise individual realizada por cada uma das participantes, o formador realizou a leitura de um breve texto sobre os aspectos que auxiliam a compreender o que é o RM e, a partir das definições citadas no texto, discutiram e refletiram coletivamente sobre as assertivas que, de fato, expressam o desenvolvimento do RM. Neste momento, os participantes do processo formativo discutiram sobre as respostas e resoluções que podem ser consideradas como expressão de RM, justificando e explicando o porquê das opiniões.

3.3.2 TAP 2 - Identificando os processos de Raciocínio Matemático em resolução de tarefas

Esta TAP consistiu em favorecer a identificação dos processos de RM, por meio de resoluções e transcrições de áudios promovidos durante a resolução de uma tarefa matemática por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Ressalta-se que a TAP 2 foi dividida em dois momentos:

Momento 1 - Os participantes do processo formativo, em duplas, analisaram algumas resoluções de uma tarefa e transcrições de áudios de uma dupla de alunos do 5º ano, tendo como objetivo, identificar os processos de RM (elaboração de conjectura, generalização, investigação do porquê, justificação e refutação) que são mobilizados por meio da resolução e justificar porque consideravam a existência do processo identificado.

Os registros de prática utilizados na TAP 2 foram coletados durante o desenvolvimento de uma pesquisa realizada por Morais (2022), sendo utilizados os seguintes registros: protocolos escritos e transcrições de áudio, conforme Figura 11, Figura 12 e Figura 13.

Figura 11 – Enunciado da TAP 2 e registros de prática (resoluções)

MOMENTO 1 – TAP 2

EM GRUPO

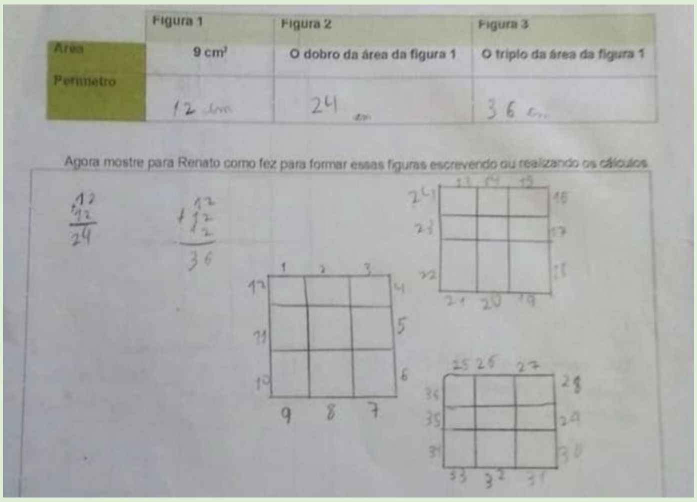
Analise as seguintes resoluções de tarefas e transcrições de áudios e indique quais dos processos de Raciocínio Matemático você consegue identificar em cada resolução ou trecho da discussão entre os alunos. Justifique a sua resposta.

Processos que podem ser identificados:

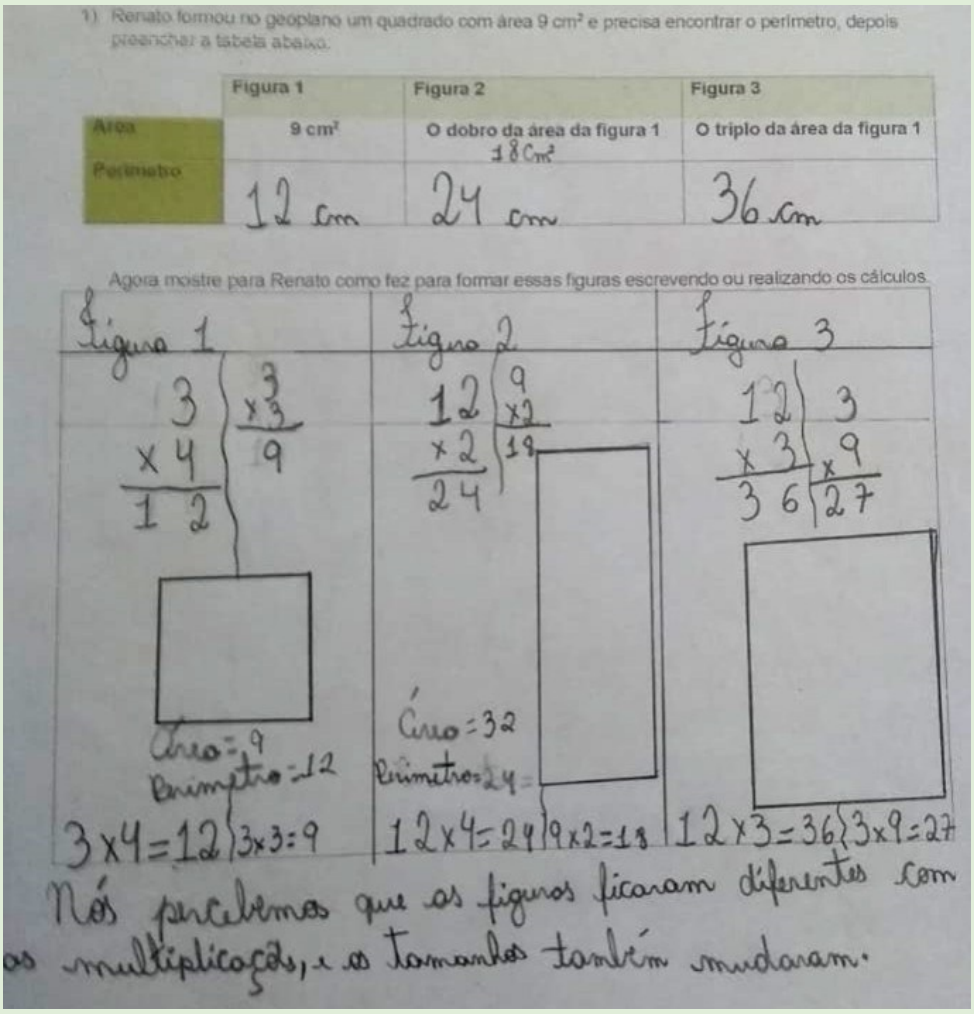
- ***Elaboração de conjectura;***
- ***Generalização;***
- ***Investigação do porquê;***
- ***Justificação;***
- ***Refutação.***

TRECHO 1: Resolução de tarefa

1) Renato formou no geoplano um quadrado com área 9 cm² e precisa encontrar o perímetro, depois preencher a tabela abaixo:



TRECHO 2: Resolução de tarefa.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 12 – Transcrições de áudios envolvendo a resolução do Trecho 1

TRECHO 3: Transcrição de áudio envolvendo a resolução da mesma tarefa apresentada no trecho 1. (Obs.: F1 significa Fala1, F2 significa Fala 2, ...) *F1 - Bruno: Tarefa 3. 1 Renato formou no geoplano um quadrado com área 9 cm² e precisa encontrar o perímetro. Depois preencher a tabela abaixo, tá?* *F2 - Maria: Então significa que cada quadrado é 1 centímetro, né?* *F3 - Bruno: É. Então, a gente tem que fazer um de 9.* *F4 - Maria: Sim! Assim?* *F5 - Bruno: Não, mas aí tem? Espera. Ah, precisa fazer 5 mais 4.* *F6 - Maria: Pronto. Aí, fiz um quadrado, 3 por 3.* *F7 - Bruno: [contando os quadradinhos] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Então vai ser esse [referindo-se à construção do quadrado no geoplano].* *F8 - Maria: O perímetro vai ser... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. [contando os segmentos que formam o quadrado de 9 cm² no geoplano].* *F9 - Bruno: Tá... então 12. Agora, tem que fazer o dobro. Vai ser 24, o dobro.* *F10 - Maria: Tá... Aqui ele tá pedindo o perímetro e o dobro da área da figura abaixo.* *F11 - Bruno: Tem que fazer os cálculos aqui, né? Mas, [pausa pensando] 18!* *F12 - Maria: Não! Não pode ser 18!* *F13 - Bruno: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 [contando no quadrado do geoplano]. F14 - Maria: Espera!! 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. Ué que está acontecendo? Não dá? Vamos colocar 24, porque o dobro de 12 é 24.* *F15 - Bruno: Ué, vai que assim vai.* *F16 - Maria: Acabei de entender o porquê de não está indo: tá vendo que aqui quando a gente faz isso, o que está aqui no meio não fica, 18, 19, 20, 21 e não dá certo de novo, do mesmo jeito? [manuseando o elástico] 22, 23, 24 ... É isso! Fica olhando. Se eu fazer uma [manuseando o elástico], agora conta.* *F17 - Bruno: Tem que contar o do meio.*
TRECHO 4: Transcrição de áudio envolvendo a resolução da mesma tarefa apresentada no trecho 1. *F1 - Bruno: Então, vai ser 24 mesmo? Então, 12 + 12 é 24. Faz a conta aí embaixo.* *F2 - Maria: Verdade. Nossa, a gente não fez aqui, né?* *F3 - Bruno: Ah, mas não precisa!* *F4 - Maria: Não; tem como.* *F5 - Bruno: Agora, o triplo da área? Vai ser mais 3. Então, 12 + 12 + 12.* *F6 - Maria: O triplo da área da figura.* *F7 - Bruno: Vai dá 36. Você colocou o centímetro?* *F8 - Maria: Coloquei.* *F9 - Bruno: Não precisa contar! Mas, vamos contar, né? Aqui vai dá 36, Ana.* *F10 - Maria: Sim.* *F11 - Bruno: Fazer um branco.* *F12 - Maria: Professora, aqui, o dobro da figura 1, a gente tem que calcular a área ou o perímetro? O perímetro, né?* *F13 - Professora: O dobro do quê? Olha aqui, essa aqui é a linha da área e essa do perímetro. Entendeu?* *F14 - Bruno: Vamos ver se dá, 36. É Maria, tem que dá 36!* *F15 - Maria: Mas deu.* *F16 - Bruno: Vou contar. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36.* *F17 - Maria: Deu certo. Tá, mas vai ficar um pouquinho só [referindo-se ao registro escrito], não vai?* *F18 - Bruno: Você fez de mais e eu fiz de vezes.* *F19 - Maria: É tão mais fácil fazer de vezes, Bruno [risos].*

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 13 – Continuação das transcrições dos áudios envolvendo a resolução do Trecho 1

TRECHO 5: Transcrição de áudio envolvendo a resolução da mesma tarefa apresentada no trecho 1. (Obs.: F1 significa Fala1, F2 significa Fala 2, ...) *F1 - Bruno: A gente fez assim: 3 quadrados. Daí 12 cm o perímetro, daí a gente conta 3 vezes.* *F2 - A gente até tentou fazer, aumentar assim eles juntos, mas não estava dando certo. Parece que a gente não contou a parte, aí a gente dividiu.* *F3 - Professora: Tá, mas para fazer qual? Vocês fizeram 3 quadrados para quê? Não consegui entender.* *F4 - Bruno: um para descobrir o perímetro de 9.* *F5 - Professora: Esse aqui é a figura 1. Primeiro quadrado. Tá, e a figura 2?* *F6 - Bruno: A gente fez dois.* *F7 - Professora: dois quadrados; dobraram?* *F8 - Bruno: Depois, o triplo a gente fez mais um quadrado.* *F9 - Professora: Deu 24 a área com dois [a professora disse área, mas ela quis dizer deu 24 o perímetro dos dois quadrados]* *F10 - Bruno: Sim.*
TRECHO 6: Transcrição de áudio envolvendo a resolução da mesma tarefa apresentada no trecho 1. (Obs.: F1 significa Fala1, F2 significa Fala 2, ...) *F1 - Professora: Tá, aqui no dobro da figura, você desenhou duas figuras iguais... Isso?* *F2 - Bruno: É.* *F3 - Professora: E você disse que o perímetro deu 24.* *F4 - Bruno: É.* *F5 - Professora: Mas é assim, eu preciso de uma figura que tenha o dobro dessa área. Não duas ou três figuras. Então, vamos ver: Quando vocês dobram a figura, quanto que deu? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 [contando a área de dois quadrados]. É legal essa ideia. Mas eu gostei do pensamento de vocês. Então aqui vocês fizeram duas figuras e aí deu o dobro da área, três figuras deu o triplo da área e se eu fizesse 4 figuras, se eu quisesse o quádruplo da área, vocês fariam 4 figuras. Terminem esse raciocínio de vocês, aí lá trás vocês por favor, é... agora vou propor uma outra, o dobro da figura, ou seja, vocês vão pegar e desenhar outra figura que tenha o dobro da dessa área; uma figura só. Então, é 9 cm², o dobro vai ser quanto?* *F6 - Maria: É 18.* *F7 - Professora: 18. Então, vocês vão desenhar uma figura de área 18.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Momento 2 - Neste momento, cada dupla ou trio deveria, inicialmente, apresentar as considerações sobre a análise realizada no Momento 1 da TAP 2. Após as exposições de ideias, os demais participantes do processo formativo poderiam apresentar questionamentos ou pontuar aspectos que a dupla ou trio, talvez, não identificou. Ressalta-se que, neste momento, cabe ao formador promover a mediação da discussão, tendo-se, como principal foco, a identificação dos processos de RM e a argumentação utilizada para justificar a mobilização dos processos.

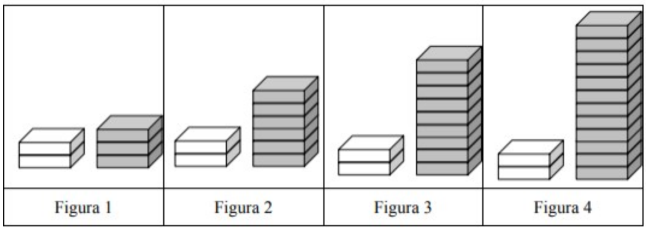
3.3.3 TAP 3 – Planejamento de uma aula e análise de resolução de tarefas: um olhar para os processos de raciocínio matemático

Considerando que a proposta do processo formativo admite uma relação implícita com o desenvolvimento de uma aula na perspectiva do Ensino Exploratório, propôs-se, na realização das TAP 3, uma abordagem formativa, dividindo-a em 3 partes: a 1ª parte corresponde ao momento em que as professoras resolvem e discutem a tarefa matematicamente, assim como refletem sobre algumas questões didáticas envolvendo a aplicação da tarefa e o planejamento de uma aula na perspectiva do Ensino Exploratório; a 2ª parte corresponde ao momento em que os participantes analisam algumas resoluções dos alunos, buscando identificar os processos de RM (ressalta-se que essa parte é o momento em que realizou-se a coleta de dados para serem analisados no desenvolvimento desta pesquisa); e, por fim, na 3ª parte os participantes analisaram alguns trechos da discussão promovida por uma dupla de alunos, enquanto resolviam a tarefa matemática em sala de aula, assim como analisaram alguns trechos de vídeos coletados durante o momento em que o professor faz a plenária de fechamento da tarefa em sala de aula.

Na 1ª etapa do desenvolvimento da TAP 3, a qual denominamos como planejamento, as professoras resolveram, em duplas e trios, a seguinte tarefa:

Figura 14 - Tarefa exploratória envolvendo a ideia de sequência numérica

Observe a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, seguindo uma determinada regra.



Fonte: Mosquito (2008, p. 157).

a) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 5.** Explique como você obteve cada resultado.

i. Número de azulejos brancos: __________
ii. Número de azulejos cinzentos: ________
iii. Número total de azulejos:____________

b) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 10**. Explique como você obteve cada resultado.

i. Número de azulejos brancos: __________
ii. Número de azulejos cinzentos: ________
iii. Número total de azulejos:_________

c) Considerando a regularidade da sequência de figuras, qual figura terá um total de **38 azulejos**? Explique a sua resposta.

d) Considerando a regularidade da sequência de figuras, existe alguma figura com um total de **66 azulejos**? Explique a sua resposta.

e) Com base na observação da sequência de figuras, construa uma sequência numérica com **10 termos**. Explique qual regularidade você utilizou para escrever a sequência numérica e qual cálculo realizou para obter cada termo da sequência.

Fonte: Dados da pesquisa.

Após resolverem a tarefa apresentada na Figura 14, as professoras refletiram sobre algumas questões didáticas que devem ser discutidas antes da aplicação da tarefa exploratória em sala de aula. Logo, as questões foram as seguintes:

Figura 15 – Questões para a reflexão durante a realização do planejamento

2ª Etapa: Reflexão sobre a aplicação da tarefa
Após resolver a tarefa, discuta em grupos as seguintes questões:
a) Em sua opinião, qual ano escolar é possível aplicar esta tarefa? Por quê?
b) A partir da sua resolução e do ano escolar que você escolheu, cite e justifique quais conteúdos podem ser abordados com a aplicação desta tarefa.
c) Você acha que esta tarefa estimula o desenvolvimento do raciocínio matemático? Justifique sua resposta.
d) Esta tarefa é aberta ou fechada? Explique a sua resposta.
e) Em sua opinião, esta tarefa pode ser considerada de baixo, médio ou alto nível cognitivo? Justifique a sua resposta.
d) O que você acha que os alunos vão perceber com facilidade durante a resolução da tarefa? e)
Quais as possíveis dificuldades os alunos poderão apresentar durante a realização da tarefa?
f) Levando em consideração que, de acordo com a BNCC, o conteúdo sequências numéricas e regularidades devem ser abordados a partir do 1º ano do Ensino Fundamental, quais orientações e questionamentos fazer para auxiliar os alunos a compreenderem e construírem a sequência numérica, com base na observação das figuras da tarefa 1? Explique o que você pensou.

Fonte: Dados da pesquisa.

Como fechamento desta 1ª parte que compõe o desenvolvimento da TAP 3, as professoras discutiram coletivamente sobre as resoluções e estratégias utilizadas para resolver a tarefa, assim como algumas questões para explorar diferentes vertentes do conhecimento didático (PONTE, 2012), conforme apresentadas na Figura 15.

A 2ª parte do desenvolvimento da TAP 3 consistiu na análise de algumas resoluções da tarefa exploratória (Figura 13) apresentadas por alguns alunos do 5º ano. O objetivo desta parte da TAP 3 foi promover, aos professores participantes do processo formativo, um momento de reflexão e discussão, tendo como foco, a identificação dos processos de RM mobilizados por meio das resoluções dos alunos. Os registros de prática utilizados durante este momento serão apresentados posteriormente na seção 3.5, pois a 2ª parte da TAP 3 é o momento em que se desdobrou o desenvolvimento desta pesquisa.

E, por fim, a 3ª parte da TAP 3 consistiu na análise coletiva de trechos de áudios de uma dupla de alunos enquanto resolviam a tarefa (apresentada na Figura 14) e trechos de vídeos gravados durante o momento em que o professor realizou a plenária para finalizar a aplicação da tarefa. O objetivo desta parte foi identificar os processos de RM mobilizados pelos alunos enquanto resolviam a tarefa envolvendo a ideia de sequência numérica e analisar os aspectos didáticos que o professor utilizou ao realizar a plenária como fechamento da aplicação da tarefa. Para o desenvolvimento desta parte, utilizou-se as gravações de áudios e vídeos, assim como as suas transcrições (Figura 17).

Figura 16 – Enunciado para o desenvolvimento da 3ª parte da TAP 3

MOMENTO 1 – IDENTIFICAÇÃO DOS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO – DISCUSSÃO DA DUPLA DE ALUNOS

Neste momento pretende-se analisar a discussão de uma dupla de alunos, produzida durante a aplicação da tarefa exploratória envolvendo o conteúdo de identificação de regularidades e padrões em sequências numéricas, assim como realizar a identificação dos processos de raciocínio matemático que são mobilizados através da discussão. Leia e analise as transcrições dos episódios, indicando quais dos processos de Raciocínio Matemático você consegue identificar em cada episódio. Justifique a sua resposta.
Processos que podem ser identificados:
- Elaboração de conjectura;
- Generalização;
- Investigação do porquê;
- Justificação;
- Refutação.

Caso identifique a formulação de conjecturas ou generalização, explique se ela é válida ou deve ser refutada. Explique por quê.

Fonte: Dados da pesquisa.

Apresentar-se-á, na Figura 17, apenas a transcrição de um episódio da discussão promovida pelos alunos durante a resolução da tarefa em sala de aula. Os demais episódios podem ser encontrados no produto educacional desenvolvido durante a realização desta pesquisa.

Figura 17 – Transcrição do diálogo entre a dupla de alunos Yuri e Miguel enquanto resolviam a tarefa apresentada na Figura 14

EPISÓDIO 1:

F1-Yuri: Olha eu não sei que regra é essa, mas a primeira imagem acho que segue uma regra.
F2-Miguel: Espera aí vou ler toda aqui; parece fácil.
F3-Yuri: Será que é de ordem numérica?
F4-Miguel: [lendo o enunciado da tarefa].
F5-Yuri: Olha!
F6-Miguel: Não entendi! Fala que é para construir uma figura?
F7-Yuri: Eu acho que aqui deve ter algum padrão.
F8-Miguel: Será que é para construir uma figura? Porque aqui está falando o total de azulejos para construir uma figura.
F9-Yuri: E aqui fala que ele segue uma determinada regra. Mas eu não sei que regra é essa.
F10-Miguel: Não sei trocar ideia!
F11-Yuri: Nem eu, Tá?
F12-Miguel: O que você acha que é?
F13-Yuri: Mas eu acho que deve ter algum padrão.
F14-Miguel: Tá bom, eu acho que tem que montar uma figura.
F15-Yuri: Espera aí. Olha! Miguel observa a figura número um e a número dois. A número dois tem quantos azulejos cinzentos?
F16-Miguel: um, dois, três, quatro, cinco, seis.
F17-Yuri: E qual é o divisor por 2 de 6?

F18-Miguel: 3. F19-Yuri: E qual é o número de azulejos cinzentos que estão na primeira imagem? F20-Miguel: 3! F21-Yuri: Talvez essa seja a regra ou algo do tipo. F22-Miguel: Não sei! Não estou entendendo nada! F23-Yuri: [contando] um, dois, três, quatro, cinco, um, dois, três, um, dois, três, um, dois, três, um, dois, três, um, dois, três, um, dois, três. Todas as quatro figuras. F24-Miguel: Tem mais três aqui. F25-Yuri: É! Só não sei qual é o significado dos azulejos brancos. F26-Miguel: Mas esse aqui é branco. F27-Yuri: Eu não sei. F28-Professor: [falando para a turma] Pessoal, não se preocupe em utilizar apenas contas. Pode fazer uma escrita, pode fazer desenho, qualquer tipo de registro, desde que explique a ideia que você teve, certo? F29-Miguel: Espera aí, eu entendi. Azulejos são tijolos, tijolos cinzentos, cinzentos são esses aqui e brancos são esses daqui. F30-Yuri: É! Isso já estava bem explícito. F31-Miguel: Explique como você obteve cada resultado. Espera aí, vai ter que somar tudo? F32-Yuri: Oh, a letra A fala assim! Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a figura 5.

Fonte: Dados da pesquisa.

Ressalta-se que, durante o momento envolvendo a análise das transcrições, as professoras também tiveram a oportunidade de ouvir os áudios e assistir aos vídeos que foram gravados pelo formador, enquanto realizavam a aplicação da tarefa em uma turma de 5º ano[8].

3.4 DESCRIÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada em um processo de formação continuada, intitulado *Compreensões sobre os processos de raciocínio matemático e as contribuições com o desenvolvimento profissional*, protocolado como curso de extensão com o código nº 6850 e aprovado pelo Departamento Acadêmico de Matemática (DAMAT-CP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio. O processo de formação continuada foi realizado em uma escola da rede municipal de ensino de Marialva – PR, onde o autor desta dissertação atuava como professor e, durante a realização do processo de formação, atuou como formador.

O processo de formação continuada foi realizado de modo presencial, sendo 5 encontros de 3 horas cada um. Participaram do processo formativo, 10 professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, sendo todas da mesma escola onde foi realizada a formação e onde o formador também atuava como professor. Ressalta-se que as inscritas no processo

[8] Turma cedida para a realização do desenvolvimento da aula. Ressalta-se que todos os registros de práticas (dados coletados em sala de aula) utilizados durante o desenvolvimento desta pesquisa, foram autorizados pelos responsáveis dos alunos. O termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) segue no Anexo B.

formativo participaram por livre e espontânea vontade; inclusive, ao assinarem o termo de consentimento para uso de imagem e som de voz (TCUISV)[9], tomaram ciência de que o processo formativo fazia parte de uma pesquisa e a sua participação seria de caráter voluntário.

Durante a realização do processo formativo, o formador desenvolveu três TAP (denominadas TAP 1, TAP 2 e TAP 3), leituras e discussões envolvendo tópicos que contribuíssem com a compreensão dos processos de RM e a relação com as práticas de ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Logo, realizaram-se discussões em duplas, grupos e coletivas envolvendo a análise de resoluções de tarefas matemáticas.

Durante o 1º encontro, as participantes, individualmente, realizaram o desenvolvimento da TAP 1, a qual envolvia a análise de afirmações e resoluções matemáticas apresentadas por alguns alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Ressalta-se que esses registros de prática (resoluções) foram gerados a partir da coleta de dados realizada por duas professoras (MORAIS, 2022; MELO, 2022) que fazem parte do projeto de pesquisa, do qual o autor desta dissertação também faz parte. O objetivo da TAP 1 foi identificar quais afirmações ou resoluções apresentadas por alguns alunos expressavam o desenvolvimento do RM e, na sequência, realizou-se uma discussão coletiva, tendo como foco a compreensão do que é o Raciocínio Matemático. A discussão coletiva levou em consideração os argumentos apresentados pelos participantes do processo formativo e a forma como o conceito de RM é apresentado na Base Nacional Comum Curricular, sendo que o principal foco do encontro foi mobilizar compreensões sobre o conceito de Raciocínio Matemático.

No 2º encontro realizou-se a TAP 2, a qual envolvia a análise de algumas resoluções matemáticas apresentadas por alunos do 5º ano, durante aplicação de uma tarefa exploratória envolvendo os conceitos de área e perímetro. Ressalta-se que essa tarefa exploratória fez parte de uma pesquisa realizada por Morais (2022), na perspectiva de analisar os processos de RM mobilizados pelos alunos. A coleta dos dados utilizados pela pesquisadora ocorreu durante a aplicação da tarefa, na qual foram coletados registros das resoluções dos alunos e gravações de áudios. Em regime de colaboração com o desenvolvimento desta pesquisa, Morais cedeu alguns registros de práticas que não foram utilizados em sua dissertação para que fossem utilizados durante o desenvolvimento da TAP 2. Com isso, selecionou-se algumas resoluções da tarefa exploratória e alguns trechos de áudios (gravados durante a discussão de uma dupla

---

[9] O desenvolvimento desta pesquisa faz parte de um projeto mais amplo, o qual foi submetido e aprovado pelo Comitê de Ética. Segue, no Anexo C, uma cópia do termo de consentimento para uso de imagem e som de voz (TCUISV).

de alunos enquanto resolviam a tarefa) que foram transcritos para a utilização no desenvolvimento da TAP 2.

Durante a análise das resoluções da tarefa e das transcrições dos áudios, as participantes do processo formativo, em duplas e trios, tiveram que analisar as resoluções dos alunos, assim como a discussão promovida por eles ao resolverem a tarefa, identificando a mobilização dos processos de RM, ou seja, os processos de conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar. Nesta etapa da TAP 2, as professoras tinham que identificar o processo de RM que julgavam ter sido mobilizado pelo aluno e justificar o porquê da identificação do processo.

Após os participantes realizarem a análise das resoluções da tarefa e transcrições dos áudios, promoveu-se uma discussão coletiva envolvendo as considerações de cada dupla ou trio e as percepções que os demais participantes tinham sobre as resoluções dos alunos e os processos de RM que foram identificados. Além disso, discutiu-se, também, a respeito das contribuições da tarefa exploratória que foi analisada e os conteúdos matemáticos que estavam envolvidos. Neste encontro, o principal objetivo foi proporcionar às professoras participantes do processo formativo, um olhar mais crítico sobre as resoluções de tarefas matemáticas, com a proposta de identificar os processos de RM mobilizados a partir resoluções dos alunos.

No 3º encontro, iniciou-se o desenvolvimento da 1ª parte da TAP 3, que corresponde ao momento em que os participantes resolveram e discutiram sobre a aplicação da tarefa matemática voltada para alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. A 2ª parte da TAP 3 foi o momento em que os participantes do processo formativo analisaram as resoluções dos alunos da tarefa matemática discutida durante o desenvolvimento da 1ª parte da TAP 3. A 3ª parte da TAP 3 corresponde ao momento em que é realizada a análise do diálogo promovido por uma dupla de alunos durante a resolução da tarefa matemática e alguns vídeos da plenária realizada pelo professor (que aplicou a tarefa) para finalizar a aplicação da tarefa.

Durante a realização da 1ª parte da TAP 3, foram desenvolvidas algumas ações com a proposta de refletir sobre o planejamento de uma aula usando uma tarefa exploratória, assim como a discussão de algumas questões didáticas envolvendo a sua aplicação. A tarefa matemática utilizada durante esta 1ª parte, envolvia o conceito de sequência numérica e foi antecipadamente elaborada pelo formador. Em duplas e trios, as professoras resolveram e discutiram a resolução da tarefa, bem como alguns aspectos importantes a serem discutidos e pensados durante o momento do planejamento de uma aula que envolva a aplicação de uma tarefa exploratória. Também discutiu-se sobre as ações do professor durante o planejamento da aula e o momento da aplicação da tarefa exploratória em sala de aula.

Após a realização das discussões em duplas e trios envolvendo a resolução da tarefa exploratória, assumindo-se um olhar enquanto professor que visa realizar o planejamento de uma aula de matemática envolvendo perspectivas do Ensino Exploratório, realizou-se uma discussão coletiva com o objetivo de verificar quais estratégias de resolução foram utilizadas pelas professoras e as possíveis estratégias que os alunos poderiam apresentar durante a resolução da tarefa. Discutiu-se, também, sobre alguns encaminhamentos metodológicos que devem ser pensados durante o planejamento de uma tarefa exploratória. Ressalta-se que este foi um momento importante para o desenvolvimento do processo formativo, pois foi o momento em que as professoras tiveram a oportunidade de pensar no planejamento de uma aula envolvendo uma abordagem exploratória, executando algumas ações que devem ser contempladas durante o planejamento de aplicação da tarefa exploratória, resolvendo e discutindo questões de natureza pedagógica, com foco no processo de ensino e aprendizagem.

Para o desenvolvimento do 4º e 5º encontros do processo formativo, o formador utilizou alguns registros de prática (registros escritos, áudios e vídeos) coletados durante a aplicação da tarefa exploratória discutida no 3º encontro. A tarefa foi aplicada pelo formador em uma turma do 5º ano de uma escola municipal localizada no município de Marialva-PR. Ressalta-se que os alunos resolveram a tarefa em duplas e registraram as suas resoluções em protocolos. A escolha das resoluções utilizadas no 4º encontro foi realizada pelo formador e o critério de escolha dos protocolos foram as resoluções que o formador considerava envolver o RM e seus processos. Já os áudios utilizados durante o 5º encontro, apresentam trechos da discussão de uma dupla de alunos enquanto resolviam a tarefa e os trechos de vídeos apresentam o momento em que o professor (formador) realizava a plenária envolvendo a resolução da tarefa. Todos os trechos de áudios e vídeos utilizados durante o processo formativo foram transcritos e contemplados no caderno de formação.

No 4º encontro, as participantes analisaram algumas resoluções (registros escritos) da tarefa exploratória (tarefa que fez parte do planejamento realizado no 3º encontro) aplicada pelo formador. Durante a análise das resoluções, as participantes tinham como objetivo identificar quais processos de RM foram mobilizados pelos alunos, com base em algumas resoluções da tarefa. Elas realizaram a análise inicialmente em duplas e trios e tiveram que apresentar as suas considerações para os demais participantes do curso, viabilizando a discussão coletiva, com foco na compreensão sobre os processos de RM. Este encontro foi o momento em que foram escolhidos alguns trechos das discussões promovidas na 3ª TAP para realizar a investigação por meio desta pesquisa, visto que as professoras, neste encontro, desempenharam um papel mais autônomo e independente em relação à identificação dos processos de RM, assim como mobilizaram algumas compreensões envolvendo os Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento do RM.

No 5º encontro, as participantes deram continuidade à análise de alguns áudios da discussão promovida por uma dupla de alunos durante a aplicação da tarefa exploratória (tarefa que fez parte do planejamento realizado no 3º encontro) e analisaram vídeos[10] do momento em que o professor que aplicou a tarefa realizou a plenária em sala de aula. Por fim, construíram, coletivamente, um esquema envolvendo os aspectos relevantes sobre o desenvolvimento do RM. Durante a análise dos áudios, as participantes tiveram que identificar os processos de RM que estavam sendo mobilizados durante a discussão da dupla de alunos. Já a análise da plenária, realizada pelo professor em sala de aula, teve como objetivo possibilitar que as participantes identificassem as ações e a forma como o professor conduziu as discussões, contribuindo ou não com o processo de ensino-aprendizagem. O momento da construção coletiva do esquema[11] teve como proposta, sintetizar os conhecimentos adquiridos pelas professoras durante a realização do processo formativo. Logo, para a sistematização do esquema foi proposto que as professoras relatassem os aspectos que consideravam contribuir com o desenvolvimento do RM.

3.5 O DESENVOLVIMENTO DA TAP 3

Para a realização desta pesquisa, escolheu-se a 2ª parte da TAP 3, desenvolvida durante o processo de formação continuada. A escolha da 2ª parte da TAP 3 se justifica pelo fato de que, neste momento da formação, as professoras realizaram as análises de algumas resoluções de tarefas, tendo como foco a identificação dos processos de RM que consideravam ser mobilizados pelos alunos. Desta forma, enfatiza-se que a 2ª parte da TAP foi constituída a partir das discussões realizadas em dois momentos, sendo realizadas, em cada momento, as seguintes ações:

Momento 1– Análise em duplas ou grupos envolvendo as resoluções que alguns alunos do 5º ano do Ensino Fundamental apresentaram para a tarefa exploratória da Figura 14. Durante as discussões, os participantes deveriam realizar a análise da resolução da tarefa

---

[10] As transcrições dos vídeos encontram-se no Apêndice A, desta dissertação.
[11] Imagem do esquema, estruturado durante o fechamento do processo de formação, segue no Apêndice B.

matemática, na perspectiva de identificar os processos de RM que consideravam ser mobilizados pelos alunos a partir da resolução da tarefa e justificar o porquê consideram existir a mobilização do processo em determinado momento da resolução.

Momento 2 - Neste momento, os participantes do processo formativo, em duplas e trio, apresentaram as considerações de suas análises e, a partir delas, o formador mediou a discussão coletiva envolvendo os demais participantes, na perspectiva de proporcionar uma análise mais ampla e mais compreensiva sobre os processos de RM. Ressalta-se que, durante a realização do Momento 2, todos os participantes podiam contribuir com a discussão, apresentando argumentos que não foram identificados pela dupla ou trio responsável em analisar a tarefa. Durante o debate, as professoras apresentaram quais processos de raciocínio matemático o aluno possivelmente utilizou durante a resolução da tarefa e, a cada processo identificado ou citado, tinham que apresentar uma justificativa para a sua identificação. Coube ao formador, o papel de instigar e fazer questionamentos com base nas definições dos Entendimentos Essenciais para auxiliar as professoras a validarem ou refutarem determinado processo de raciocínio matemático.

3.6 MÉTODOS DE COLETA E DE ANÁLISE DOS DADOS

Os dados desta pesquisa foram coletados por meio de gravações de áudios durante a realização da 3ª TAP, desenvolvida no processo de formação continuada. Após a coleta de dados, transcreveu-se os áudios da TAP e selecionou-se alguns trechos que vão ao encontro do objetivo desta pesquisa, ou seja, momentos em que, a partir das falas dos participantes, foi possível inferir compreensões dos Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento dos processos de RM, assim como os momentos de discussões e reflexões que auxiliaram a identificar e reconhecer as Oportunidades de Aprendizagem Profissional geradas a partir do contexto em que os participantes do processo formativo foram inseridos. Ressalta-se que foram coletados áudios de todas as discussões (em duplas, trios e coletivas) promovidas durante a realização de cada um dos encontros.

Para a análise dos dados, utilizou-se as discussões promovidas em dois momentos da segunda parte da TAP 3, sendo utilizadas as gravações de áudio e as transcrições dos diálogos promovidos por um trio e uma dupla (cada dupla ou trio recebeu um gravador para registrar o diálogo) durante o primeiro e segundo momento da TAP. O primeiro momento é quando as professoras, em duplas ou trios, discutem a resolução da tarefa apresentada por alguns alunos do 5º ano e buscam identificar os processos de RM que o aluno mostra mobilizar por meio da resolução da tarefa. O segundo momento é quando a dupla ou trio apresenta as suas considerações para os demais professores participantes do processo formativo e, a partir destas considerações, ocorre a discussão coletiva, na qual os demais professores puderam apresentar os processos não identificados pela dupla ou trio e os argumentos que auxiliam na compreensão dos processos de RM.

Na análise dos dados, buscou-se identificar os processos de RM que os professores reconheceram por meio da resolução dos alunos e os que foram mobilizados por meio da discussão. A partir destes resultados, elaborou-se um quadro sintetizando quais Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento do RM foram mobilizados durante as discussões, assim como apresentou-se a justificativa de considerar-se que ocorreu a utilização de um Entendimento Essencial.

Outro aspecto que buscou-se investigar durante o desenvolvimento do processo de formação continuada, foram as OAP viabilizadas por meio do processo formativo. Para a análise dos dados, considerou-se os momentos de discussões e reflexões (por meio das transcrições dos áudios) em duplas e trios e as discussões coletivas que foram realizadas durante o desenvolvimento da 2ª parte da TAP 3.

Ressalta-se que as OAP não foram uma abordagem específica em discussão para os participantes do processo formativo, pois consideramos que estas oportunidades serão desenvolvidas de modo implícito durante as ações realizadas por meio do processo de formação, visto que a inter-relação entre as dimensões PAF, TAP e IDP é o que vai constituir o contexto de desenvolvimento das OAP (RIBEIRO; PONTE, 2020).

Com base nas ideias propostas pelo Modelo PLOT, buscou-se identificar quais ações foram desenvolvidas durante os momentos em que as professoras analisavam as resoluções dos alunos, tendo como foco a identificação dos processos de RM. Após realizar-se uma análise minuciosa envolvendo a forma como as professoras agiram, discutiram e refletiram sobre cada uma das resoluções dos alunos, assim como os processos de RM, apresentou-se, ao final de cada seção de discussão (descritas no capítulo 4), uma síntese das OAP que foram propiciadas durante a análise de cada uma das resoluções.

4. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentam-se as discussões que as participantes do processo de formação continuada realizaram durante a 2ª etapa da TAP 3, sendo que o objetivo desta etapa da TAP era proporcionar momentos para os participantes identificarem e discutirem os processos de raciocínio matemático mobilizados apresentados por meio de registros escritos produzidos por alguns alunos de um 5º ano do ensino fundamental. Nesta etapa da TAP, a análise de cada uma das resoluções da tarefa foi dividida em dois momentos: no Momento 1, as participantes analisaram a resolução da tarefa em duplas ou trios e, no Momento 2, tiveram que apresentar as suas conclusões para os demais participantes do processo formativo, dando início ao momento da discussão coletiva. Deste modo, analisar-se-á quais Entendimentos Essenciais dos processos de RM são mobilizados durante os momentos de discussão em duplas, trios e coletivamente, envolvendo todos os participantes do processo formativo. Ressalta-se que os nomes das professoras são fictícios, visto que se preza por garantir o anonimato de cada um dos participantes envolvidos nesta pesquisa.

4.1 DISCUSSÃO ENVOLVENDO A RESOLUÇÃO DO ALUNO A

A análise da resolução do Aluno A foi realizada, a princípio, pelas professoras Eloysa, Paula e Carolina.

4.1.1 Discussão em grupo envolvendo a resolução do Aluno A – Momento 1

Neste momento, o trio Eloysa, Paula e Carolina realizou a análise da resolução do Aluno A (Figura 18). Durante a análise da resolução do aluno, *as professoras tinham que identificar quais processos de RM (elaboração de conjectura, generalização, investigação do porquê, justificação ou refutação) consideravam terem sido mobilizados pelo Aluno A durante a resolução da tarefa.* Após identificarem, tinham que explicar como chegaram a tal conclusão.

Figura 18 – Resolução do Aluno A[12]

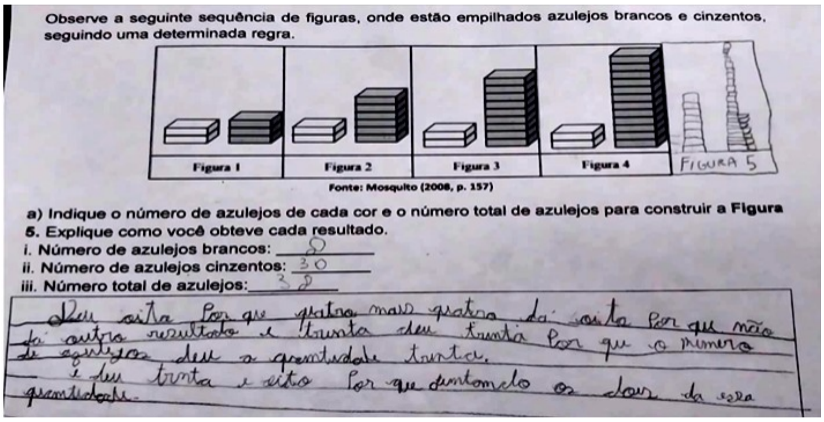

Observe a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, seguindo uma determinada regra.

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	FIGURA 5

Fonte: Mosquito (2008, p. 157)

a) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a Figura 5. Explique como você obteve cada resultado.

i. Número de azulejos brancos: 8

ii. Número de azulejos cinzentos: 30

iii. Número total de azulejos: 38

Deu oito Por que quatro mais quatro da oito Por que não da outro resultado e trinta deu trinta Por que o numero de azulejos deu a quantidade trinta. e deu trinta e oito Por que juntando os dois da essa quantidade.

Fonte: Protocolo do aluno.

Após analisarem a resolução do Aluno A, Eloysa, Paula e Carolina apresentaram os seguintes argumentos durante a sua discussão:

> **Paula:** Eles aqui não seguiram o que nós estávamos fazendo, né?
> **Eloysa:** Sim.
> **Paula:** Como que vocês concluíram na semana passada? [Paula estava em outro grupo no encontro anterior]
> **Carolina:** Eu fiz de 3 em 3. Aqui eles fizeram de 3 em 3?
> **Paula:** Mas aqui, essa dupla não fez.
> **Carolina:** Não!
> **Paula:** O que será que eles fizeram aqui, que os cinza dá 30? Será que eles somaram? 3, 6, 9, 18. Oh, eles somaram. 3+6 dá 9, mais 9 dá 18, mais 12 dá 30 aparentemente.

Primeiramente, Paula, Carolina e Eloysa identificaram que a resolução apresentada pelo aluno é diferente da que elas desenvolveram durante o momento em que discutiram a tarefa matematicamente. Com isso, Carolina questionou se o aluno utilizou a ideia (conjectura) de aumentar de três em três. Paula afirma que o aluno não utilizou essa conjectura; logo, ela nota que, para obter a Figura 5, ele realizou a soma dos azulejos contidos em cada figura. E, a partir disso, apresentam as seguintes considerações sobre os processos de RM:

> **Paula:** Ah! Exatamente isso que ele fez, ele somou os brancos também. 4+4 dá 8; isso significa que a quantidade de azulejos dá 30, então ele somou mesmo. A explicação dele já está dizendo que é a soma.
> **Carolina:** Mas aí é uma elaboração de conjectura?
> **Eloysa:** Não sei... não consegui entender não; é complexo. Por que ele partiu do 4 mais 4 dá 8? Da onde?
> **Carolina:** Então, eu acho que foi aqui.
> **Paula:** Ele pegou esses 4 [Figuras 1 e 2] e depois esses 4 [Figuras 3 e 4].
> **Eloysa:** Entendi.
> **Paula:** Então, ele já generalizou? [demonstrando dúvida].
> **Carolina:** É uma afirmação dele; é uma conjectura.

---

[12] Transcrição da resposta do Aluno A: Deu oito. Porque quatro mais quatro dá oito. Porque não dá outro resultado, e trinta deu trinta, porque o número de azulejos deu a quantidade trinta. E deu trinta e oito, porque juntando os dois dá isso.

Paula: Sim. É uma conjectura dele baseada no quê? No que ele se baseou para fazer isso daí?
Carolina: Eu acho que foi baseado no que ele já sabia.
Paula: Ele sabia de que forma isso daí? Por que, como que ele sabia que era assim? Por que o que fez ele chegar nessa soma, sendo que dessa pra essa não foi somado? Então, é uma sequência, mas o que fez ele chegar nisso daí?
Carolina: Não sei. Então, não é uma conjectura.
Eloysa: Eu estou achando que não.

Neste trecho Paula nota que, embora o aluno não tenha realizado uma afirmação que possibilite identificar a conjectura elaborada por ele, ele utiliza a conjectura de somar todos os azulejos brancos e cinzentos para compor a Figura 5. Isso fica claro quando ela afirma que "ele somou os brancos também. 4+4 dá 8; isso significa que a quantidade de azulejos dá 30, então ele somou mesmo". Diante disso, Carolina e Eloysa expressam dúvida com relação a tratar-se de uma conjectura, pois, de fato, o aluno não apresentou explicitamente uma afirmação matemática. No entanto, elas mostram compreender que essa é a afirmação que apoia a elaboração da conjectura formulada pelo aluno. No momento, em que Paula faz o seguinte questionamento: "é uma conjectura dele baseada no quê? No que ele se baseou para fazer isso daí?", ela externa a compreensão de que a elaboração de uma conjectura deve ser apoiada na observação de um determinado fato matemático. Como o aluno não apresentou, em sua resolução, algum registro que possibilite identificar que sua conjectura está pautada na observação de um caso, elas ficam em dúvida se é ou não uma conjectura.

Carolina: Eu acho que é uma refutação. Conjectura é uma conclusão?
Paula: É.
Carolina: É uma refutação então?
Paula: Refutação é uma negativa do resultado. É uma investigação do porquê. Ele busca argumentos matemáticos que justificam a sua conjectura. Então, ele está justificando a sua conjectura, não que seja verdadeira.
Carolina: Investigação do porquê, então?
Eloysa: É, vamos colocar.
Paula: É, porque a conjectura do aluno pode ser verdadeira ou não, mas ele está querendo, ele está utilizando argumentos matemáticos; ele utilizou um argumento matemático. Ele fez uma soma e chegou nesse resultado. Ele somou todos os quadradinhos e chegou nesse resultado, né?
Carolina: Uhum.
Paula: Então, é uma investigação do porquê, pois o aluno justifica sua resposta através da argumentação matemática da soma dos azulejos. E somando os azulejos chega nesse resultado, então, que é a sua conjectura; não quer dizer que ela seja.
Carolina: Certa.
Paula: Verdadeira.

Diante da incerteza se o aluno havia ou não elaborado uma conjectura, Paula, Carolina e Eloysa tentam identificar se é mobilizado outro processo de RM. A partir disso, Paula afirma que a conjectura é uma conclusão sobre um determinado fato e rejeita a ideia de ser uma refutação. Ela entende que refutação é o momento em que o aluno apresenta algum argumento que nega a validade do resultado. Com isso, elas apontam que houve a investigação do porquê, pois o aluno apresentou argumentos matemáticos para validar a conjectura utilizada por ele. Logo, na percepção do trio, elas mostram compreender que a investigação do porquê envolve a argumentação matemática que justifica a utilização de uma conjectura, mesmo que se trate de uma conjectura inválida.

4.1.2 Discussão coletiva envolvendo a resolução do Aluno A – Momento 2

Para iniciar a discussão coletiva, Paula, Eloysa e Carolina apresentaram as suas considerações envolvendo os processos de RM que identificaram durante a análise da resolução do Aluno A para os demais participantes do processo formativo. Desta forma, Eloysa sintetiza a reflexão do grupo:

> **Eloysa:** A Paula fez uma anotação! Ela colocou assim: que é a investigação do porquê, pois o aluno justifica a sua resposta através da argumentação matemática da soma dos azulejos, que é a sua conjectura inicial; não quer dizer que ela está certa ou é verdadeira na verdade, e foi isso que a gente colocou.

Neste trecho, Eloysa afirma que apenas identificaram o processo de *investigação do porquê*, pois houve uma argumentação matemática para justificar a conjectura; porém, elas reconhecem que houve a utilização de uma conjectura, mas não a citam em suas considerações. A partir disso, o Formador faz alguns questionamentos, pois, na percepção dele, não foi só o processo de investigar o porquê.

> **Formador:** Tá, e como ficou a conjectura?
> **Eloysa:** Não entendi! Qual é a conjectura, é isso? [É a conjectura que o formador quer saber?]
> **Formador:** Qual é a conjectura? Vocês chegaram a formular a conjectura?
> **Eloysa e Carolina:** Não.
> **Formador:** Na 1 [referindo-se a resolução do Aluno A], não saiu nenhuma conjectura?
> **Eloysa:** Na verdade ele tinha [uma conjectura] porque ele foi então fazendo o que, ele percebeu que o branco continuava o mesmo e que os cinzentos ele ia aumentando de 3 em 3, então essa era a conjectura dele. A partir daí que ele foi investigar o porquê, ele foi continuando a fazer, não sei se está certa [a conjectura que elas pensam ter identificado]?

Após os questionamentos do formador, Eloysa reconhece que o aluno utilizou uma conjectura, porém não era válida para determinar a quantidade de azulejos de cada cor na Figura 5, mas mesmo sendo uma conjectura inválida, ela cita que houve um registro que possibilita identificar a mobilização do processo de investigar o porquê.

> **Eloysa:** Ele somou.
> **Rosana:** Ele colocou 8, mas ele não chegou na Figura 5 então. Ele chegou só até a Figura 4 nos azulejos brancos.
> **Aline:** 2, 4, 6, 8.
> **Rosana:** E nos azulejos cinzentos, para achar a Figura 5 ele dobrou o 12, mas o que ele fez para achar o 30 nos azulejos cinzentos?
> **Formador:** Vamos ler a resposta dele; pode ser? Deu 8 porque 4 mais 4 dá 8, porque não dá outro resultado e 30 porque o número de azulejos deu a quantidade 30 e 38 porque juntando os dois dá essa quantidade.
> **Rosana:** É uma conjectura. Ele já tá fazendo um pensamento.
> **Formador:** Tem um pensamento, e esse pensamento é a conjectura.

Rosana: É.
Formador: É isso que a gente tem que pensar. O que ele pensou? De onde que saiu esse 4 que ele está falando?
Rosana: Ele fez da Figura 1 e 2 dá 4, aí mais 4 deu 8 no total. É isso que ele quis dizer, provavelmente? 2 mais 2, 4, mais duas de 2, que dá mais 4, então no total dá 8.

Rosana e Aline identificam que a conjectura do aluno consiste na ideia de somar os azulejos brancos contidos nas figuras 1, 2, 3, e 4. Com isso, Rosana afirma que houve um pensamento matemático, com base na conjectura que ele formulou para os azulejos brancos. No entanto, elas não mostram compreender se a conjectura que o aluno utilizou para os brancos também é válida para os cinzentos, quando ele afirma que 30 é o número de azulejos cinzentos. Além disso, Rosana questiona o porquê do valor 30. Desta forma, verifica-se que a afirmação "30 azulejos cinzentos" é um registro que contribuiu para a produção de uma justificativa para validar uma das conjecturas elaborada pelo aluno.

Formador: Tá, e o 30?
...
Rosana: Ah! Mas ele não pode ter! Ele dobrou? Ele chegou na Figura 5 que dá 15 e aí ele dobrou ela. Por que que ele dobrou?
Cristina: É uma possibilidade?
Rosana: Porque ele estava dobrando os 2 brancos ali, entendeu? Eu acredito.
Formador: Só que veja o seguinte...
Rosana: Então ele não teve uma sequência de nada... então ele não generalizou porque ele não teve uma sequência, ele não teve uma generalização; só uma conjectura.
Formador: Ah! Mas espera lá... então você falou que ele não teve uma sequência.
Rosana: Não teve.
Formador: Você acha que ele não seguiu sequência?
Rosana: Não.
Formador: E de onde saiu esse 8?
Cristina: Porque ele fez a dobra das figuras, não foi? 2 mais 2 deu 4.
Eloysa: Ele somou a Figura 1 e 2.
Rosana: Depois ele viu que a 3 e 4 também eram duas.
Cristina: Ele fez uma dobra.
Rosana: Aí ele dobrou.
Cristina: Do azulejo branco e aí o outro ele fez um raciocínio e dobrou de volta.

Na perspectiva de investigar o porquê dos 30 azulejos cinzentos, Rosana mostra compreender que o aluno não utilizou uma generalização para obter esse valor, pois, se assim o fosse, ele deveria ter observado e utilizado a regularidade da sequência de figuras. No entanto, Rosana e Cristina realizaram um processo que, embora não seja válido para a resolução da tarefa, apresenta um aspecto muito importante na formulação de generalização, que é a identificação da semelhança entre os casos, visto que elas descrevem que, para obter o 8, o aluno dobrou o valor 4 e, para encontrar 30, ele dobrou o valor 15.

Rosana: Ele fez o raciocínio lá do 12, do 12 ele observou que tinha uma sequência pra dá 15 na 5? Dá pra contar quantos azulejos têm na última dele, dá pra contar? Aí.
Formador: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Cristina: Ele fez 30.
Rosana: Nossa, ele fez 30.
Formador: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Cristina: Dá onde ele tirou 30?
Formador: 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.
Rosana: Ele fez 30 ali... De onde que ele tirou esse 30?
Eloysa: Será que ele não pensou que aumentou, ele percebeu que aumentaria 3, e daí ele dobrou?
Rosana: É, mas aí...
Eloysa: Mas não tem lógica, né? Mas não sei...
Carla: Eu acho que ele somou todas as figuras e dá 30. Até a Figura 4, 3 + 6 + 9 + 12 dá 30.
Formador: Dá quanto?
Aline: Dá 30.
Formador: Todo mundo ouviu o que a Carla falou?
Carla: A Aline que chegou à conclusão!
Formador: Ah! Então explica pra nós, Aline, o que aconteceu.
Aline: Para chegar no 30 ele somou as Figuras 1, 2, 3, e 4. 12 + 9 + 6 + 3.
Rosana: Ah! Dá pra chegar no 30. É verdade!

Após verificarem que a conjectura do dobro era inválida, as participantes decidem realizar a contagem dos azulejos representados na resolução do aluno. Assim, refutam a ideia de que o aluno utilizou a conjectura de aumentar de três em três. Quando Carla faz a afirmação "eu acho que ele somou todas as figuras e dá 30. Até a Figura 4, 3 + 6 + 9 + 12 dá 30", ela apresenta uma argumentação que auxilia na compreensão de uma justificativa para o aluno ter registrado a quantidade de 30 azulejos cinzentos. Ressalta-se que ela utiliza uma argumentação matemática para formular a sua justificativa, que é uma etapa relevante na produção de uma justificativa.

Formador: Então, qual que foi a conjectura dele?
Cristina: A soma.
Formador: A soma das figuras, de tudo para obter a Figura 5.
Rosana: Então, teve uma generalização?
Cristina: Ah, agora entendi porque deu 30.
Formador: Mas é uma generalização?
Carla: Não, porque não está certo.
...
Formador: Porque, assim, pra ser uma generalização tem que olhar caso 1, caso 2, caso 3 e perceber essa regularidade em todos os casos.
Rosana: É verdade.

Neste trecho, Cristina mostra compreender que a conjectura utilizada pelo aluno para determinar a quantidade de azulejos brancos e cinzentos na Figura 5, é a soma das quantidades de azulejos contidos nas figuras anteriores. Carla aponta que para se considerar uma generalização, a resolução da tarefa deve estar correta. Neste sentido, aponta-se que não é só o fato de a resolução estar correta, mas é, também, necessário que ocorra a elaboração de uma conjectura que deve ser válida em diferentes casos. Esse entendimento fica claro quando o formador faz a afirmação "ser uma generalização tem que olhar caso 1, caso 2, caso 3 e perceber essa regularidade em todos os casos". O formador, ao explicar sobre o conceito de generalização, utilizou o termo regularidade; no entanto, seria mais adequado utilizar a expressão relação matemática.

Formador: Ele apresenta alguma justificação?
Cristina: Não.
Rosana: Juntando os dois dá essa quantidade [referindo-se aos brancos e cinzentos]. Mas não é uma justificativa? Juntando os dois dá essa quantidade.
...
Rosana: Por que não é uma justificativa real, né?
...
Formador: Mas dá para entender de onde saiu esse 8?
Cristina: Ele usou o que já tinha nas quatro figuras para fazer a Figura 5.
Rosana: Ele somou tudo; ele fez uma soma.
Aline: Ele somou os brancos.
Rosana: 2, 4, 6, 8. E somou também os cinzas.
Formador: Tá, ele fez isso. Vamos verificar se vale no caso 4, também? Porque se vale no caso 4, é um caso para se investigar o porquê. Caso 4, é que o branco, o que vale eliminar ali é a questão dos brancos, né?
Eloysa: É.
Cristina: É.
Formador: Mas vamos ver se os cinzentos dá? Vai ter quantos cinzentos na 4? 12, 9 com 6, já não dá também.
Rosana: Não dá.

Neste momento, as participantes, com o auxílio do formador, buscam compreender se o RM utilizado pelo aluno apresenta alguma lógica e acabam identificando argumentos que fortalecem a necessidade de refutar a conjectura utilizada pelo aluno, pois uma refutação não pode ser baseada em percepções; deve-se utilizar argumentos matemáticos que comprovem que a conjectura não é válida. Além disso, quando Rosana cita que uma justificativa é o momento em que o aluno afirma que "juntando os dois dá essa quantidade", pode-se notar que, mesmo que uma conjectura seja inválida, muitas vezes ela se baseia em um conhecimento que é assumido como verdadeiro.

Formador: E eles investigaram o porquê? Tem o processo do investigar o porquê?
Cristina: Não.
Paula: Sim. Ali eles investigam o porquê. Nós colocamos assim, porque o aluno justifica a sua resposta através da argumentação matemática da soma dos azulejos. Então, pra ele a afirmativa dele é verdadeira. A afirmativa pode ser ou não verdadeira, mas ele faz uma afirmação, justifica ali; a investigação que ele fez foi essa. Ele afirmou com essa soma dos azulejos ele vai chegar no 30; a soma dos azulejos cinza.
...
Rosana: Não. Ele não conseguiu, porque se ele tivesse investigado o caso 4 e ele tivesse observado que ocorria a soma dos brancos e a soma dos cinzentos, aí beleza; testou no caso 4 deu certo, então caso 5 vai ser isso também, soma os brancos e soma os cinzentos.

Ao serem questionadas pelo formador sobre o processo de *investigar o porquê,* Paula mostra compreender que se o aluno produz uma argumentação matemática e apresenta uma afirmação verdadeira que justifica a conjectura elaborada em um caso, ele já está investigando o porquê. Rosana acrescenta que, para investigar o porquê, o aluno tem que ir além do que Paula descreveu; é necessário que ele identifique uma semelhança entre os casos analisados e esse vai ser o aspecto que vai nortear a investigação do porquê.

No Quadro 7, apresenta-se uma síntese dos Entendimentos Essenciais que foram mobilizados durante as discussões e reflexões, a partir das análises dos registros envolvendo a resolução do Aluno A.

Quadro 7 - Síntese dos Entendimentos Essenciais mobilizados durante as discussões da resolução do Aluno A

Trechos	Entendimentos Essenciais	Justificativa do porquê consideramos um entendimento
Carolina: É uma afirmação dele, é uma conjectura.	Entendimento Essencial 1	Carolina compreende que uma conjectura consiste na formulação de uma afirmação.
Paula: Refutação é uma negativa do resultado.	Entendimento Essencial 7	Paula compreende que uma refutação consiste em mostrar que o resultado não é válido, ou seja, se o resultado está errado, é porque a conjectura utilizada pelo aluno também é falsa.
Paula: É uma investigação do porquê. Ele busca argumentos matemáticos que justificam a sua conjectura. Então, ele está justificando a sua conjectura; não que seja verdadeira.	Entendimento Essencial 5	Paula compreende que a investigação do porquê consiste em utilizar a argumentação matemática para investigar se uma conjectura é válida.
Paula: É, porque a conjectura do aluno pode ser verdadeira ou não, mas ele está querendo, ele está utilizando argumentos matemáticos, ele utilizou um argumento matemático. Ele fez uma soma e chegou nesse resultado. Ele somou todos os quadradinhos e chegou nesse resultado, né?	Entendimento Essencial 1	Paula compreende que uma conjectura é uma afirmação que necessita ser investigada, pois pode ser válida ou não. Logo, ela considera que a conjectura é formulada a partir de um raciocínio utilizado para estabelecer uma relação matemática durante a argumentação matemática.
Eloysa: [...] o aluno justifica a sua resposta através da argumentação matemática da soma dos azulejos que é a sua conjectura inicial; não quer dizer que ela está certa ou é verdadeira na verdade, e foi isso que a gente colocou.	Entendimento Essencial 6	Eloysa compreende que uma justificativa envolve a utilização da argumentação matemática com base em ideias já compreendidas; neste caso, a conjectura inicial.
Eloysa: Na verdade, ele tinha porque ele foi então fazendo o que, ele percebeu que o branco ele continuava o mesmo e que os cinzentos ele ia aumentando de 3 em 3, então essa era a conjectura [...]	Entendimento Essencial 1	Eloysa compreende que uma conjectura é formulada a partir de um raciocínio utilizado sobre uma relação matemática.
Rosana: Então ele não teve uma sequência de nada; então ele não generalizou porque ele não teve uma sequência, ele não teve uma generalização; só uma conjectura.	Entendimento Essencial 2	Rosana compreende que generalizar consiste em utilizar uma regularidade, ou seja, identificar a semelhança entre os casos.
Formador: Porque, assim, pra ser uma generalização tem que olhar caso 1, caso 2, caso 3 e perceber essa regularidade em todos os casos.	Entendimento Essencial 2	O formador explica que a generalização consiste em identificar uma relação matemática que é válida em diferentes casos.

Fonte: Dados da pesquisa.

4.1.3 As oportunidades de aprendizagem durante as discussões envolvendo a resolução do Aluno A

Diante dos diálogos promovidos durante a análise da resolução do Aluno A, chega-se às seguintes conclusões:

i) Durante os momentos de discussão envolvendo a resolução do Aluno A, as professoras tiveram a oportunidade de refletir e discutir a partir de uma resolução incorreta, buscando compreender o raciocínio utilizado pelo aluno (PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012). O fato de a resolução do aluno apresentar aspectos matemáticos que, de modo particular, envolvem uma relação com as informações apresentadas na tarefa, remete à compreensão de que houve a elaboração de uma conjectura. No entanto, isso não significa que a conjectura seja válida, mas a investigação dos fatores que contribuíram para a formulação da possível conjectura, pode revelar informações matemáticas que necessitem ser aprofundadas durante a sistematização do conteúdo. Ou seja, necessita-se "avaliar a validade dos argumentos matemáticos" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 12) que o aluno utilizou para definir a respectiva conjectura.

Em busca de compreender qual foi a conjectura elaborada pelo Aluno A, as professoras encontraram evidências de que o raciocínio desenvolvido na resolução da tarefa não é coerente com a situação-problema, pois não existe uma argumentação lógica que dê condições para aceitar o raciocínio utilizado pelo aluno. Com isso, as professoras identificaram possíveis dificuldades em relação aos conceitos matemáticos que devem ser envolvidos na abordagem da tarefa;

ii) Ao encontrarem argumentos matemáticos que mostram a necessidade de refutar a conjectura formulada pelo aluno, as professoras têm a oportunidade de compreender que existe uma fragilidade entre o conhecimento do aluno e da aprendizagem (PONTE, 2012), pois, levando-se em consideração que a resolução do Aluno A não apresenta uma argumentação lógica, isso inviabiliza a possibilidade do aluno desenvolver um raciocínio coerente com a proposta da tarefa; consequentemente, é um dos motivos que dificultam a sua aprendizagem. Assim, as professoras têm a oportunidade de identificar uma das possíveis intervenções necessárias para auxiliar o aluno durante o processo de aprendizagem (PONTE, 2012);

iii) Considerando que as discussões possibilitaram promover reflexões sobre as ações desenvolvidas por meio das práticas de ensino (PONTE, 2012; OLIVEIRA; SERRAZINA,

2022) e que, neste caso, é a forma como o aluno resolveu a tarefa, nota-se que as professoras tiveram a oportunidade de incluir, em seus diálogos, aspectos importantes para a compreensão dos Entendimentos Essenciais do RM. Com base nos diálogos promovidos durante a análise da resolução do Aluno A, as professoras mostraram compreender que uma conjectura consiste na elaboração de uma afirmação matemática que o aluno apresenta (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; JEANNOTTE; KIERAN, 2017; CARNEIRO, 2021), ou que, muitas vezes, utiliza de acordo com seu pensamento matemático. Além disso, reconhecem a importância de utilizar a argumentação matemática de forma lógica para desenvolver uma justificativa e, consequentemente, mostrar se uma conjectura é válida ou não.

4.2 DISCUSSÃO ENVOLVENDO A RESOLUÇÃO DO ALUNO B

A análise da resolução do Aluno B foi realizada, a princípio, pelas professoras Paula, Carolina e Eloysa.

4.2.1 Discussão em grupo envolvendo a resolução do Aluno B – Momento 1

Nesta seção, analisa-se a discussão promovida por Paula, Carolina e Eloysa, envolvendo a resolução apresentada abaixo:

Figura 19 - Resolução do Aluno B

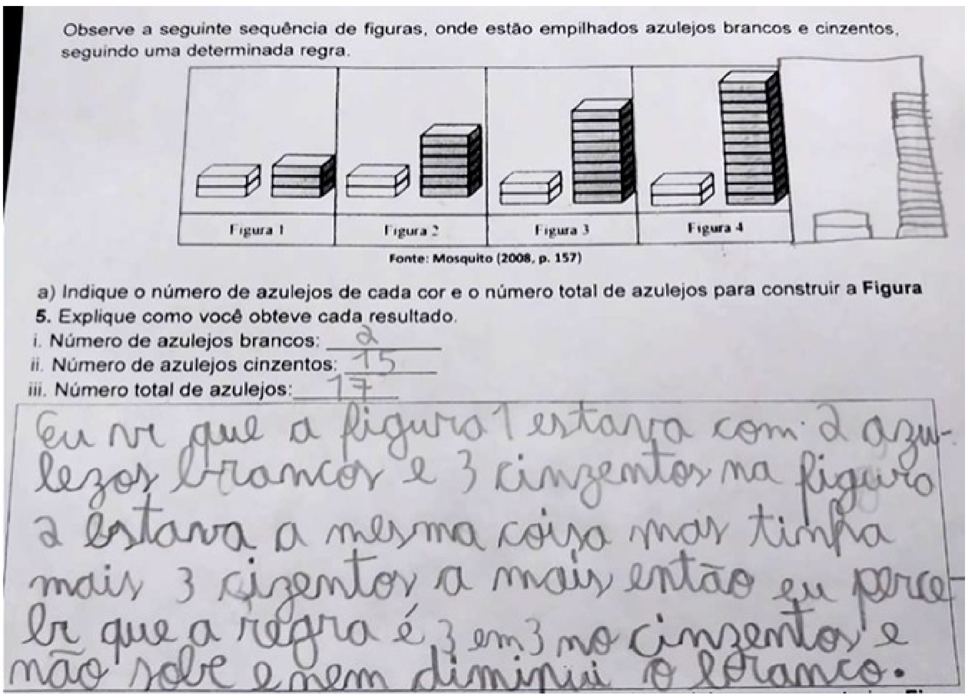

Observe a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, seguindo uma determinada regra.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Fonte: Mosquito (2008, p. 157)

a) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 5.** Explique como você obteve cada resultado.

i. Número de azulejos brancos: 2

ii. Número de azulejos cinzentos: 15

iii. Número total de azulejos: 17

Eu vi que a figura 1 estava com 2 azulezos brancos e 3 cinzentos na figura 2 estava a mesma coisa mas tinha mais 3 cizentos a mais então eu percebi que a regra é 3 em 3 no cinzentos e não sobe e nem diminui o branco.

Fonte: Protocolo do aluno.

Com base na resolução e na justificativa apresentada pelo Aluno B, Eloysa, Paula e Carolina promovem a seguinte discussão:

> **Carolina:** Agora, na tarefa 2.
> **Paula:** Número de azulejos brancos 2, cinzentos 15. É para a Figura 5 também, né? Total 17.
> **Carolina:** Eu fiz essa regra de 3 em 3.
> **Paula:** [Lendo a resposta do aluno] Eu vi que a Figura 1 estava com 2 azulejos brancos e 3 cinzentos; na Figura 2 estava a mesma coisa, mas tinha 3 cinzentos a mais. Então eu percebi que a regra é 3 em 3 nos cinzentos e não sobe e nem diminui o branco.
> **Carolina:** Eu acho que... Eu não sei... Pode ser uma justificação?
> **Eloysa:** Eu acho que é uma conjectura, não é?
> **Paula:** Aqui ele fez a relação matemática.
> **Eloysa:** Aham.
> **Paula:** Permanece os brancos e sobem [os cinzentos].
> **Eloysa:** Vai aumentando.
> **Paula:** De 3 em 3. Então, aqui é uma conjectura.

Ao analisar a resolução do Aluno B, Carolina reconhece que o aluno utilizou a conjectura que ela havia formulado anteriormente, durante o planejamento, ou seja, que ela também utilizou a regra de aumentar os cinzentos de 3 em 3. Paula e Eloysa compreendem que o aluno identificou uma relação matemática e, a partir disso, elaborou a conjectura de que o número de azulejos brancos permanece o mesmo e a quantidades de azulejos cinzentos, aumenta 3 azulejos a cada nova figura representada.

> **Formador:** Isso é importante você colocar nas considerações de vocês. Isso que você está falando na verdade é o quê?
> **Paula:** É o que acontece, mas ele colocou na resposta.
> **Formador:** Tá. Mas o que acontece? Qual processo que é? É uma conjectura? É uma investigação do porquê? É a justificação? O que é a justificativa?
> **Carolina:** Apresenta argumentos matemáticos.
> **Formador:** Isso é argumento matemático? [referindo-se à justificativa do aluno]
> **Eloysa:** É, não é?
> **Formador:** Ou é uma relação matemática?
> **Carolina e Eloysa:** É uma relação.
> **Formador:** Então, na verdade qual processo que é esse [processo]? Porque você falou assim, porque percebeu que aumenta de 3 em 3, não é isso?
> **Paula:** Os cinzas e permanece o branco.
> **Formador:** E como que a gente fala isso? Ele está começando a construir o quê? Qual processo que ele está começando a sistematizar?
> **Paula:** Não está construindo uma conjectura?
> **Formador:** Conjectura! Ele está começando; esse aí é um processo importante, ele está iniciando, ele observou o que a gente fala padrões e regularidades. Para chegar a uma generalização por exemplo, ele vai precisar desses padrões; ele tem que olhar diferentes casos e vê que a mesma relação que ele viu na Figura 2, vale para a Figura 1, vale para a Figura 3.

Paula, Eloysa e Carolina mostram compreender que o aluno identificou uma relação matemática, com base em uma argumentação matemática apoiada pela conjectura inicial: "a quantidade de azulejos brancos permanece a mesma quantidade e os cinzentos aumenta de 3 em 3". O formador explica que, nesta fase da argumentação matemática, o aluno, provavelmente, começou a elaborar a sua conjectura e, embora reconheça que existe uma regularidade entre os casos, ele não utilizou uma generalização, porque o aluno apenas identificou a semelhança entre os casos, e, para ser generalização, há a necessidade de identificar uma relação matemática a ser analisada em mais de um caso.

> **Paula:** A gente responde o que [que] é. Aqui é uma investigação do porquê e aqui é uma conjectura. O aluno iniciou com o processo de construção de conjecturas a partir do momento que ele percebe que os azulejos brancos permanecem o mesmo e os cinzentos aumenta de 3 em 3 em cada figura, né?
> **Carolina:** Essa foi a justificativa dele?
> **Paula:** Então, ele iniciou o processo de construção de conjecturas a partir do momento que ele percebe isso daí.
> **Eloysa:** E também acontece a generalização, não é?
> **Paula:** Mas aí ele já passou pela generalização; quando ele chegou na conjectura ele já passou por todos esses outros aqui. A conjectura é o último que ele consegue chegar, não é?

Neste trecho, Paula afirma que a conjectura elaborada pelo aluno é "que os azulejos brancos permanecem o mesmo e os cinzentos aumenta de 3 em 3 em cada figura". Quando Eloysa questiona se aconteceu uma generalização, Paula mostra uma compreensão equivocada. Ela afirma que a conjectura só é formulada após a mobilização dos outros processos do RM; logo, essa compreensão não é verdadeira, já que, para chegar a uma generalização, é essencial que, primeiramente, seja elaborada uma conjectura e, a partir da validade desta conjectura, existe a possibilidade da realização da generalização.

> **Eloysa:** Não. Ó, na generalização o aluno a partir de um conjunto. Será?
> **Paula:** Eu acho que sim. Eu acho que a conjectura é o último.
> **Eloysa:** Será? Porque aqui fala que ele vai verificar que a conjectura é válida e admite que existe uma relação matemática válida para qualquer situação. Eu acho que a generalização está além dessa conjectura.
> [...]
> **Paula:** Então a gente está tentando achar na tarefa. O aluno, a partir de um conjunto de relações matemáticas, verifica que uma conclusão é válida e admite que existe uma relação matemática válida para qualquer situação [lendo o texto de apoio].
> **Eloysa:** Mas eu acredito que tem também.
> **Paula:** Qualquer situação? Mas essa daqui não é qualquer situação.
> **Eloysa:** Então, vamos deixar assim.
> **Paula:** Porque a gente pode fazer um conjunto de figuras diferentes, agora já é diferente de uma regra matemática, em qualquer situação vai ser aquela mesma regra, né?

Eloysa mostra compreender que a generalização é um processo que será produzido a partir de um conjunto de relações matemáticas e que o aluno a utilizou durante a sua resolução. No entanto, ela não descreve qual foi a generalização utilizada. Ela mostra compreender que uma generalização é muito mais do que uma afirmação, quando diz "eu acho que a generalização está além dessa conjectura". Porém, ao citar a expressão relação matemática, Paula e Eloysa mostram não compreender que uma generalização envolve a identificação de uma relação matemática que é válida em um conjunto de diferentes casos, sendo que estes casos devem admitir a existência de um fator semelhante em cada um deles.

4.2.2 Discussão coletiva envolvendo a resolução do Aluno B – Momento 2

Durante a plenária, Paula, Eloysa e Carolina apresentam para os demais participantes do processo formativo, os processos de RM que conseguiram identificar por meio da resolução do aluno apresentada na Figura 19.

> **Formador:** Quais processos vocês conseguiram identificar?
> **Paula:** Conjectura.
> **Formador:** Qual conjectura?
> **Rosana:** Ele acertou!
> **Paula:** Falando sobre o processo de conjectura, a partir do momento em que ele escreveu que o azulejo branco permanece o mesmo e os cinzentos aumenta de 3 em 3 em cada figura.
> **Formador:** Isso, legal. Mais alguém?
> **Paula:** Nota 10, pra ele!
> **Rosana:** Ele fez certinho o pensamento dele.
> **Formador:** Foi isso a conjectura dele?
> **Rosana:** Ele fez uma conjectura, generalizou, justificou.
> **Formador:** Espera lá! [risos].

Paula cita que identificaram a ocorrência da formulação de uma conjectura, pois o aluno escreveu “que o azulejo branco permanece o mesmo e os cinzentos aumenta de 3 em 3 em cada figura”, mas não justificaram o porquê de ser uma conjectura. Desta forma, é compreensível que elas deveriam ter explicado que é uma conjectura, porque o aluno escreveu uma afirmação com base na observação de figuras. Outro aspecto que chama a atenção durante a discussão, é o momento em que Rosana aponta que aluno “fez uma conjectura, generalizou, justificou”, visto que o aluno acertou a resolução da tarefa e seu raciocínio está correto. Desta forma, é importante destacar que o fato do raciocínio e resolução estarem corretos, não significa que ele utilizou todos os processos de raciocínio matemático citados por Rosana.

> **Rosana:** Tem a investigação.
> **Eloysa:** Aí ele fez a investigação neste caso.
> **Formador:** Por quê?
> **Cristina:** Ele percebe a regularidade.
> **Rosana:** Ele percebe a regularidade.
> **Formador:** E qual é a regularidade?
> **Rosana:** Que são 3 sempre nos cinza e não sobe e nem diminui o branco. Ele percebeu a regularidade.
> **Formador:** Isso. Ele já percebeu uma regularidade que é bem mais válida do que a primeira, né?
> **Eloysa:** Sim, com certeza.
> **Formador:** Aumenta de 3 em 3.
> **Aline:** Não sobe, nem diminui.
> **Paula:** Permanece o branco.
> **Cristina:** O branco permanece.

Neste trecho, as participantes mostram compreender que um dos fatores que possibilita identificar que houve o processo de investigar o porquê, é o fato do aluno ter identificado a regularidade existente entre os casos. No entanto, este fato é apenas uma das características, pois, além disso, é necessário que o aluno apresente uma relação matemática que tenha o potencial de justificar por que uma generalização é verdadeira ou não.

> **Formador:** E o investigar o porquê no caso ali, eles fazem o investigar o porquê?
> **Cristina:** Aí ele chega que a regra é de 3 em 3 no cinzento.
> **Rosana:** E que nem sobe e nem diminui o branco.
> **Formador:** E o total de azulejos?
> **Rosana:** Tá correto.
> **Paula:** É a soma.
> **Formador:** Eles investigam a relação matemática?
> **Cristina:** Ao total não!
> **Rosana:** Ao total, não! Porque aqui não deu o total.
> **Formador:** Por que o 15? Eles falam 15 nos cinzentos.
> **Rosana:** É. Porque ele percebeu a regularidade, sempre a regra é 3 em 3 nos cinzentos.
> **Paula:** Mas não justifica o total.
> **Rosana:** Não, ele não justifica.
> **Paula:** Só justifica as figuras. Não justifica o total.

Cristina e Rosana mostram compreender que o processo de investigar o porquê se justifica pelo fato de o aluno ter identificado e utilizado uma propriedade matemática, que é observada por meio da sequência de figuras. No entanto, é compreensível que esta propriedade seja apenas uma parte da argumentação matemática que auxilia na formulação e validação da conjectura inicial. Contudo, o formador busca auxiliar na compreensão, questionando se o aluno utilizou uma relação matemática. Desta forma, Rosana dá a entender que uma possível investigação do porquê, ocorreria se o aluno tivesse justificado o valor total de azulejos contidos na Figura 5 da tarefa.

> **Formador:** Na figura ele justificou, né? Certo. Então, espera lá. Conjectura que vai aumentar de 3 em 3 a quantidade de cinzentos. A justificativa, vocês falaram que tem, por que há justificativa?
> **Rosana:** Porque tem uma...
> **Eloysa:** Aqui está validando a conjectura dele.
> **Formador:** Está validando a conjectura; que de certa forma, a figura dele está coerente com o que ele diz. Ele só não deixou explícito o porquê do 15.
> **Rosana:** É.
> **Formador:** Que ali seria um detalhe para aparecer o investigar o porquê. Porque a relação ele entendeu, que é de 3 em 3.
> **Paula:** Mas deixou.
> **Formador:** Mas investigar o porquê 15? Ele deixou por que 15?
> **Rosana:** Ele entendeu a regra, mas ele não explicou o porquê deu 15.
> **Cristina:** O resultado. Como ele chegou na Figura 5.
> **Rosana:** Ele teria que falar que 12 mais 3 é 15. Porque a regra é sempre.
> **Formador:** Paula você ia falar mais alguma coisa?
> **Paula:** É isso daí que está escrito ali, que a regra é.
> **Aline:** De 3 em 3.
> **Rosana:** Só que ele não justificou o total.

Eloysa reconhece que, por meio da resolução do aluno, é possível identificar que ele validou a conjectura de que a pilha de azulejos cinzentos aumenta de três em três. Logo, os questionamentos do formador auxiliam as participantes a perceberem que, para se mobilizar o processo de investigação do porquê, há a necessidade de descrever uma relação matemática que tenha o potencial de explicar por que, na Figura 5 da resolução, há 15 azulejos cinzentos.

Com isso, Rosana afirma que o aluno "teria que falar que 12 mais 3 é 15". No entanto, não é verdade. Se o aluno fizesse essa afirmação, ele não estaria utilizando uma relação matemática, mas uma propriedade da conjectura.

> **Formador:** É a conjectura que auxilia na justificativa, mas investigar o porquê, seria analisar caso a caso e identificar uma relação. Ele identificou que aumenta de 3 em 3 de um para o outro, mas isso aí pode-se dizer que é uma relação matemática?
> **Rosana:** É.
> **Formador:** Que aumenta de 3 em 3 de um para o outro! E se eu perguntasse a Figura 100?
> **Rosana:** Se ele faria?
> **Formador:** É.
> **Paula:** A tabuada do 3.

Percebendo que as participantes ainda não identificaram a relação matemática que pode ser identificada para justificar o porquê da quantidade de azulejos cinzentos em cada figura, o formador apresenta uma questão para as participantes compreenderem a necessidade de identificar uma relação matemática a partir da semelhança entre os casos. Quando o formador questiona "e se eu perguntasse a [quantidade de azulejos na] Figura 100?", Paula mostra compreender que, para determinar a quantidade de azulejos cinzentos na Figura 100, poderia utilizar a tabuada do três, ou seja, ela compreende que a relação matemática envolve determinar uma quantidade de azulejos sendo múltipla de três.

> **Formador:** Vocês acham que ele teria coragem de ir até a Figura 100? [referindo-se à representação utilizando o desenho das figuras]
> **Eloysa:** Não.
> **Formador:** Então para chegar a uma investigação do porquê, ele não precisaria dessa relação matemática? Ele trouxe essa relação matemática ali?
> **Paula:** Não.
> **Formador:** Vocês entenderam? Ele percebeu que aumenta de 3 em 3, mas se eu pergunto a Figura 100, talvez ele já não vai querer fazer, porque fazer desenho vai dar trabalho, então ele precisa do que você falou, Paula, até se você conseguir completar um pouquinho, mas ela [a fala] pode completar.
> **Paula:** Completar a resposta aqui?
> **Formador:** É. Que é o 10 x 3, que aí se fosse a Figura 100 ele ia ter que pensar em algum número vezes 3 dava a 100 [azulejos cinzas], mais o 2 ainda.
> **Paula:** Ou seja, trabalhando a tabuada do 3.
> **Formador:** Isso. Ele teria que envolver a tabuada do 3 de certa forma, para chegar na 100, e não esquecer do 2. Que aí é onde ele começa a investigar o porquê e provavelmente acaba formalizando uma generalização.
> **Paula:** E também precisa utilizar uma sentença matemática para o total de azulejos.
> **Formador:** Poderia. Aqui não precisaria ele chegar no ponto de utilizar a letra n, a estrutura algébrica, mas este pensamento ele já teria que utilizar neste momento. Por exemplo, ao observar a Figura 4, a Figura 4 tem 12, 4 x 3, a Figura 3, 9, 3 x 3, ou seja, ele está começando a observar a regularidade da figura. Eu não posso pegar e pensar de um caso para o outro; eu tenho que pensar no primeiro caso, encontra uma regularidade, olha no segundo caso, encontra outra regularidade, e a regularidade que eu utilizei para o primeiro e válida para o segundo; aí sim isso envolve investigar o porquê. Porque eu descobri uma regularidade; a regularidade vale no primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto, quer dizer, essa regularidade tem potencial de se tornar uma generalização.

Neste trecho, o formador auxilia as participantes a perceberem a importância da relação matemática entre o número da figura e a quantidade total de azulejos, e a forma como defini-la a partir da observação das figuras. Quando o formador cita a questão de determinar a quantidade de azulejos na Figura 100, ele reconhece que as participantes já compreenderam que existe uma conjectura, ou seja, que a quantidade total de azulejos envolve uma quantidade múltipla de três, mas elas não identificaram que, para obter essa quantidade, deve-se multiplicar o número da figura por três e acrescentar os 2 azulejos brancos. Desta forma, o diálogo do formador permite compreender que, para mobilizar o processo do investigar o porquê, é importante formular antes uma relação matemática a ser identificada e investigada, tendo-se como objetivo, verificar se ela é válida em cada um dos casos analisados. Inclusive, deve-se, também, estender essa investigação para outros casos que estão fora do domínio onde se originou a relação, isto é, investigar se a conjectura é válida além do domínio de origem (ou seja, se seguindo o mesmo padrão, a relação matemática entre a posição da figura e a quantidade de azulejos é válida para outros casos além das representadas na sequência de figuras) e, caso seja válida, essa relação matemática pode passar a ser entendida como uma generalização.

Quadro 8 - Síntese dos Entendimentos Essenciais mobilizados durante as discussões da resolução do Aluno B

Trechos	Entendimentos Essenciais	Justificativa do porquê consideramos um entendimento
Eloysa: Eu acho que é uma conjectura, não é? Paula: Aqui ele fez a relação matemática. ... **Paula:** De 3 em 3. Então, aqui é uma conjectura.	Entendimento Essencial 1	Paula mostra compreender que uma conjectura é formulada a partir de um raciocínio utilizado para elaborar uma afirmação com base na relação matemática identificada.
Formador: [...] O que é a justificativa? **Carolina:** Apresenta argumentos matemáticos.	Entendimento Essencial 6	Carolina mostra compreender que o processo de justificar, envolve a utilização de argumentos matemáticos para comprovar as ideias que foram compreendidas.
Formador: Conjectura! Ele está começando; esse aí é um processo importante, ele está iniciando, ele observou o que a gente fala padrões e regularidades. Para chegar a uma generalização, por exemplo, ele vai precisar desses padrões; ele tem que olhar diferentes casos e vê que a mesma relação que ele viu na Figura 2, vale para a Figura 1, vale para a Figura 3.	Entendimento Essencial 2	O formador cita a ideia de semelhanças entre os casos para auxiliar na formulação da generalização, o que de certa forma envolve a utilização de uma conjectura.
Paula: [...] O aluno iniciou com o processo de construção de conjecturas a partir do momento	Entendimento Essencial 1	Paula compreende que uma conjectura consiste em produzir uma afirmação com base em ideias já assumidas como

que ele percebe que os azulejos brancos permanece o mesmo e os cinzentos aumenta de 3 em 3 em cada figura, né?		verdadeiras.
Paula: Porque a gente pode fazer um conjunto de figuras diferentes, agora já é diferente de uma regra matemática; em qualquer situação vai ser aquela mesma regra, né?	Entendimento Essencial 3	Paula compreende que a aplicação de uma regra matemática deve ser testada em casos além do domínio.
Rosana: Que são 3 sempre nos cinza e não sobe e nem diminui o branco. Ele percebeu a regularidade.	Entendimento Essencial 6	Rosana apresenta uma justificativa com base em ideias já compreendidas e assumidas como verdadeira.
Rosana: Ele entendeu a regra, mas ele não explicou o porquê deu 15.	Entendimento Essencial 6	Rosana compreende que não houve a justificação matemática com base e ideias já compreendidas.
Formador: Então para chegar a uma investigação do porquê, ele não precisaria dessa relação matemática? Ele trouxe essa relação matemática ali?	Entendimento Essencial 5	O formador enfatiza que a investigação do porquê consiste em investigar fatores que auxiliam na explicação do porquê uma generalização é válida.

Fonte: Dados da pesquisa.

4.2.3 As oportunidades de aprendizagem durante as discussões envolvendo a resolução do Aluno B

Com base nas discussões promovidas durante o momento de análise, discussão e reflexão sobre a resolução do Aluno B, nota-se que:

(i) Ao analisar a resolução do Aluno B, as professoras, com o apoio das ações do formador (RIBEIRO; PONTE, 2020), tiveram a oportunidade de refletir e discutir sobre fatores que poderiam contribuir com a compreensão do processo de generalização. Os questionamentos realizados pelo formador auxiliaram as professoras a refletir sobre uma argumentação matemática que pudesse resultar na utilização de uma relação matemática a partir da semelhança entre os casos (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; CARNEIRO, 2021);

(ii) Durante os momentos em que o formador busca possibilitar às professoras a compreensão do processo de generalização envolvendo a sequência de figuras, fica evidente que as professoras apresentaram dificuldades em relação ao conhecimento da matemática (PONTE, 2012), pois não mostraram ter clareza quanto à existência de uma relação entre a posição da figura e quantidades de azulejos. Desta forma, as professoras mostraram uma fragilidade sobre os conceitos e propriedades essenciais (PONTE, 2012) para a compreensão da tarefa desenvolvida em sala de aula;

(iii) Além disso, nota-se que as discussões possibilitaram definir conceitos, propriedades e relações matemáticas que são fundamentais na abordagem do conteúdo

(PONTE, 2012) envolvendo o conceito de regularidades e padrões em uma sequência numérica. A discussão promovida durante a análise da resolução do Aluno B, possibilitou identificar que o aluno apresentou uma informação matemática com base nos conhecimentos matemáticos já compreendidos. Logo, ao utilizar uma argumentação matemática lógica e isenta de erros, viabilizou a elaboração de uma conjectura que é válida (MATA-PEREIRA, 2012). Desta forma, durante os momentos de discussão, fica evidente que houve a mobilização envolvendo os aspectos dos Entendimentos Essenciais do RM que corroboram a compreensão dos processos de conjecturar, generalizar, investigar o porquê e justificar.

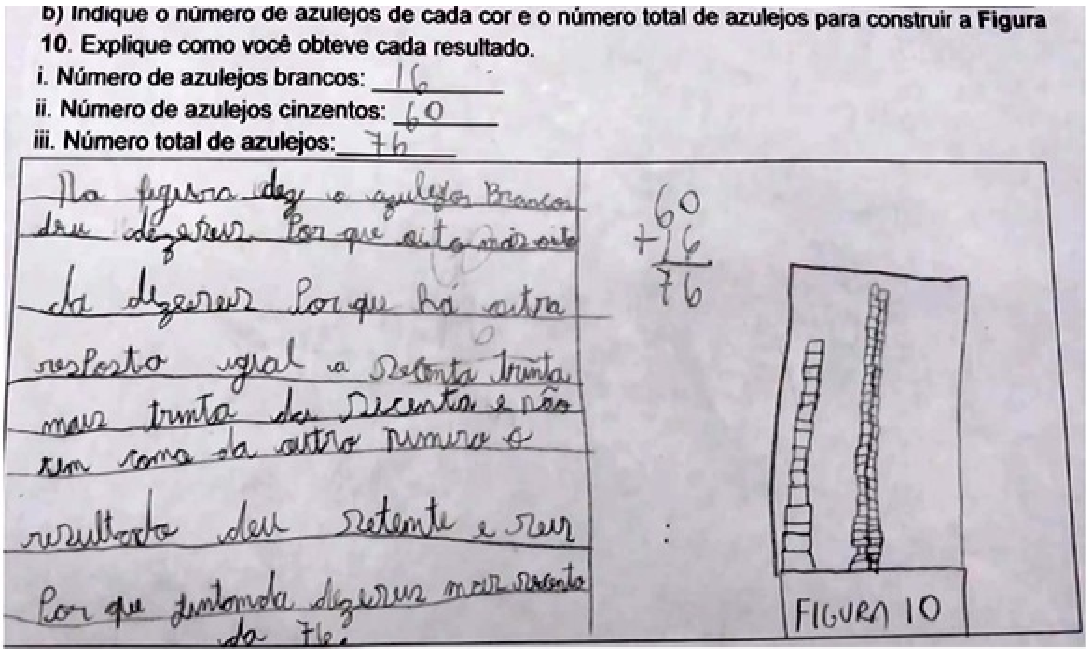
4.3 DISCUSSÃO ENVOLVENDO A RESOLUÇÃO DO ALUNO C

A análise da resolução do Aluno C foi realizada, a princípio, pelas professoras Cristina e Rosana.

4.3.1 Discussão em dupla envolvendo a resolução do Aluno C – Momento 1

Nesta seção, analisar-se-á a discussão promovida pelas professoras Cristina e Rosana envolvendo a resolução do Aluno C, conforme apresentada na Figura 20:

Figura 20 – Resolução do Aluno C


b) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a Figura 10. Explique como você obteve cada resultado.

i. Número de azulejos brancos: 16

ii. Número de azulejos cinzentos: 60

iii. Número total de azulejos: 76

Na figura dez os azulejos brancos deu dezesseis por que oito mais oito da dezesseis por que há outra resposta igual a secenta trinta mais trinta da secenta e não um soma da outro numero o resultado deu setente e seis por que juntando dezesseis mais secenta da 76.

$$\begin{array}{r} 60 \\ +16 \\ \hline 76 \end{array}$$

FIGURA 10

Fonte: Protocolo do aluno.

As professoras Rosana e Cristina realizaram a leitura da resposta do Aluno C e, em seguida, promoveram a seguinte discussão:

Rosana: Está certo isso daqui?
Cristina: Então, a gente tem que ver se eles pensaram em alguma coisa, estou achando que não!
Rosana: Então olha só, está escrito aqui que conjecturar envolve raciocinar sobre a relação matemática para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras [realizando a leitura da definição apresentada no texto de apoio]. Aqui não é uma conjectura?
Cristina: Na Figura 10 o azulejo branco deu 16, porque 8 mais 8 são 16 [lendo a resposta do aluno].
Rosana: Então, aqui é uma conjectura. Na Figura 10 os azulejos brancos deram 16.
Cristina: É, ele começou com esse raciocínio, porque ele colocou lá em cima. [Referindo-se ao registro do aluno]
Rosana: Aqui é generalizar, porque 8 mais 8 dá 16. Então, envolve identificar a semelhança entre os casos ou estendendo o raciocínio para além do intervalo em que se originou [realizando a leitura da definição apresentada no texto de apoio].
Cristina: Essa primeira parte eles fizeram o raciocínio, a conjectura. Que processo eles pegaram aqui? Por que você está vendo as respostas? 16, 60, o total dá 76 azulejos. Na Figura 10, os azulejos brancos deu 16, porque 8 mais 8 dá 16 [afirmação do Aluno C].
Rosana: Então, conjecturar!
Cristina: Teve conjectura para ele chegar neste raciocínio, que é a primeira parte.
Rosana: Eu acho que a partir do momento em que ele começa a pensar matematicamente, é uma conjectura.
Cristina: É a conjectura, aham!
Rosana: Então aqui, porque 8 mais 8 dá 16, é aqui que eles começam a conjectura. Será que é? Então, será que ele está conjecturando a partir do momento [que] 8 mais 8 dá 16?

Neste trecho da discussão, Rosana mostra compreender que a resolução do Aluno C está incorreta, porém ela considera que o aluno começou a elaborar uma conjectura, apresentando uma afirmação envolvendo a quantidade de azulejos brancos. Rosana aponta que a conjectura formulada pelo aluno é o momento em que ele afirma que, na “Figura 10 os azulejos brancos deram 16”. Ao dialogar com Cristina, Rosana pontua que a conjectura ocorre a partir do momento que o aluno começa a pensar matematicamente. Assim, Rosana afirma que a conjectura do aluno é a afirmação “8 mais 8 dá 16”.

Na sequência, Rosana e Cristina discutem sobre a segunda parte da conjectura; no caso, a que envolve a quantidade de azulejos cinzentos.

Rosana: E 30 mais 30 dá 60 [parte da resposta do aluno].
Cristina: Essa outra parte aqui, porque é a outra resposta.
Rosana: Então, coloco que começaram em 30 mais 30 dá 60?
Cristina: Porque é outra resposta; igual a 60. 30 mais 30 dá 60 e não tem como dá outro número. O resultado deu 76, porque juntando 16 e 60 dá 76 [lendo a resposta do Aluno C].
Rosana: Como?
Cristina: Porque juntando 16 mais 60 dá 76.
Rosana: Nossa! Estou com dificuldade para entender isso aqui.
Cristina: Mais 60 dá 76. Porque na verdade ele começou fazendo tanto dos brancos quanto dos cinzas.

Com base na resposta do aluno, Rosana e Cristina consideram que a parte da conjectura envolvendo a quantidade azulejos cinzentos é a afirmação “30 mais 30 dá 60”.

Com isso, Cristina conclui que a conjectura elaborada pelo aluno envolve tanto os azulejos brancos quanto os cinzentos. Isso fica evidente pelo fato de o aluno ter somado 16 mais 60. Embora as professoras não citem, elas percebem que, quando o aluno soma esses valores, existe uma parte importante da conjectura que deveria ser formulada, pois quando o aluno soma 16 mais 60, ele está, na realidade, considerando que a composição da Figura 10 envolve a soma da quantidade de azulejos brancos e cinzentos.

Conforme Rosana já tinha apontado, a resolução do Aluno C está incorreta. Ela e Cristina começam a discutir, levando em consideração a resposta correta da tarefa.

> **Cristina:** Então, no nosso tinha dado 30 e 32 no total, mas a dele não bate com a nossa [referindo-se ao momento em que as professoras resolveram a tarefa].
> **Rosana:** Mas como que ele imaginou? Espera aí, deixa eu ver.
> **Cristina:** A dele não bate informação nenhuma.
> **Rosana:** De onde que ele utilizou esse 60 da Figura 10?
> **Cristina:** Ele foi aumentando de 2 em 2 até a Figura 10 para dá os brancos, né?
> **Rosana:** É... 2, 4, 6, 8.
> **Cristina:** Mas mesmo assim não dá.
> **Rosana:** Ah! Mas ele não fez a Figura 5, então. Como que ele fez, porque 2, 4, 6, 8, 8 mais 8, 16? E aqui está dando quanto mesmo? 3. Quanto que dá mesmo? 3 mais 6, 9.
> **Cristina:** Igual a 60. 30 mais 30, 60. Deu 30.
> **Rosana:** Ele contou aqui. Deu 30 no total; ele somou. Ele não viu que era a Figura 4. Ele simplesmente dobrou aqui.
> **Cristina:** Daí, ele chegou na resposta da [Figura] 10. É. Por quê?
> **Rosana:** Ele fez isso, ele pegou aqui.
> **Cristina:** 2, 4, 6, 8.
> **Rosana:** 8. Aí ele fez, aqui tem 30. 8 mais 8 dá 16 e 30 mais 30 dá 60.
> **Cristina:** 60 mais 16 dá 76.
> **Rosana:** É. Esse foi o pensamento dele.
> **Cristina:** É. Tem essa sequência aqui, entendeu?
> **Rosana:** Então, mas ele fez errado. Ele fez da Figura 4, não fez da figura [5].

Neste trecho da discussão, Rosana e Cristina buscam compreender o que o Aluno C pensou para obter o resultado de 76 azulejos na Figura 10. Logo, elas apontam que uma possibilidade foi o aluno ter somado a quantidade de azulejos brancos (das figuras 1, 2, 3 e 4) e os cinzentos (das figuras 1, 2, 3 e 4), obtendo, assim, 8 azulejos brancos e 30 cinzentos. Com base na resolução do aluno, Rosana e Cristina mostraram compreender que o aluno pensou que a Figura 5 teria 8 azulejos brancos e 30 cinzentos; portanto, a Figura 10 teria o dobro da quantidade de azulejos contidos na Figura 5. Isso fica evidente no próximo trecho da discussão.

> **Cristina:** Mas o raciocínio dele foi baseado em cima só das 4 figuras pela lógica que você fez aí. Então, o raciocínio dele foi baseado nas figuras apresentadas, nas 4 figuras.
> **Rosana:** É.
> **Cristina:** Ele conjecturou a partir delas para chegar nesta resposta e justificar.
> **Rosana:** Foi isso que ele fez.
> **Cristina:** É, porque não tem outra forma; porque ele simplesmente desenhou a Figura 10.
> **Rosana:** É.
> **Cristina:** Então dá para a gente deduzir que ele se baseou nas figuras de 1 a 4, utilizou o raciocínio de dobro em cima delas para construir a Figura 10. Seria mais ou menos isso?
> **Rosana:** É. Que é a conjectura?

Cristina: É. E agora, a gente escreve e explica que podemos deduzir que usou as informações das figuras.
Rosana: As figuras iniciais.
Cristina: Colocar da 1 a 4. Podemos deduzir que usou as informações das figuras de 1 a 4.
Rosana: Interessante ele ter dobrado de 1 a 4.
Cristina: Pois é, e dá certo. Quando chega na informação, você tem que ir buscar o que era antes.
Rosana: É.
Cristina: Podemos deduzir que usou as informações das figuras de 1 a 4 e dobrou as quantidades para chegar ao resultado apresentado. Se ele continuar isso daqui, dos dois azulejos, tanto do branco quanto dos cinzas ele fez o dobro. Dobrou as quantidades.

Neste trecho, Cristina identifica que o aluno elaborou uma conjectura levando em consideração a soma dos azulejos das quatro primeiras figuras para determinar a quantidade de azulejos na Figura 10. Cristina e Rosana presumem que a conjectura envolva a questão do dobro, pois o aluno fez o dobro de 8 azulejos brancos e 30 azulejos cinzentos. Diante disso, elas supõem que o aluno considerou que a Figura 5 tem 8 azulejos brancos e 30 cinzentos (somando a quantidade de azulejos brancos e cinzentos das figuras 1, 2, 3 e 4). Calculando o dobro da figura, obtém-se, também, o dobro da quantidade de azulejos. Embora a quantidade de azulejos indicados pelo aluno na Figura 5 e na Figura 10 estejam incorretas, já que ele não utilizou a regularidade da sequência de figuras, Rosana e Cristina indicam um fator que merece ser investigado, ou seja, se o número da figura dobrar, a quantidade de azulejos também dobra?

Rosana: Mas a gente tem que colocar aqui qual é a conjectura?
Cristina: Dá para colocar essa primeira parte.
Rosana: É.
Cristina: Na verdade ele fez uma conjectura; não fez nenhuma investigação, nem justificou. A única coisa que ele justifica é...
Rosana: Aqui no final. A justificativa dele?
Cristina: É. Porque na verdade ele está fazendo a primeira, porque a primeira parte que ele faz, ele está falando dos azulejos brancos e a segunda parte ele está falando dos azulejos cinzentos, porque aí é outra resposta igual. Aí ele coloca do 30, que é os cinzentos e aqui no final ele só chega à conclusão que juntando 16 com 60 dá 76.
Rosana: Ah, isso que é investigação. Raciocínio matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa [realização a leitura da definição apresentada no texto de apoio].
Cristina: Na primeira parte ele analisa, faz a conjectura dos azulejos.
Rosana: É. Junto com a generalização, porque ele está falando aqui matematicamente como que ele resolveu.
Cristina: Isso. Aí a última parte é a justificativa. Essa parte final aqui, porque juntando 16 mais 60 dá 76; já justificou.
Rosana: Ele não faz a investigação, então?
Cristina: É, porque ele não vai atrás de saber se o que ele está fazendo ali é verdadeiro ou falso. Ele simplesmente chega nos azulejos, né?
Rosana: Uhum.
Cristina: É, porque justificar e refutar pode ser falsa ali também [referindo-se à resolução do aluno].
Rosana: A gente tem que explicar.
Cristina: Então, nessa primeira parte.
Rosana: Ele justificou.
Cristina: Houve uma conjectura e uma justificativa.

No diálogo, Rosana e Cristina apontam que o aluno elaborou duas conjecturas: uma para a quantidade de azulejos brancos e outra para a quantidade de azulejos cinzentos. Além disso, elas consideram que o aluno elaborou uma justificativa, pois ele explica, na sua resolução, como determinou a quantidade total de azulejos. No entanto, levando em consideração o que foi solicitado na tarefa, essa é uma visão equivocada sobre a justificativa, porque a justificativa seria o momento em que o aluno explica o que fez para obter 16 azulejos brancos e 60 cinzentos na Figura 10; logo, esse aspecto não ficou evidente em sua resolução. Outro aspecto apontado por Rosana e Cristina é a possibilidade de o aluno ter elaborado "uma conjectura com uma generalização". Na verdade, essa é uma interpretação equivocada, pois no desenvolvimento do raciocínio matemático, a conjectura (a afirmação) é a parte que contribui para a formulação de uma generalização (relação matemática que abrange diferentes casos).

Em certo momento da discussão, o formador conversa com a dupla para verificar quais processos de RM Rosana e Cristina haviam identificado. Com isso, elas explicam que ocorreu a elaboração de conjecturas, apresentando detalhes conforme relatados nos diálogos anteriores. Porém, o formador, percebendo que elas estavam mantendo o foco no processo de conjecturar, faz o seguinte questionamento:

Formador: Tem mais algum processo que vocês conseguiram perceber?
Rosana: A justificativa, porque ele chegou nesse resultado [referindo-se ao 76].
Formador: Em certo momento você citou a generalização, não falou?
Rosana: É, porque ele faz a parte, a parte matemática, né?
Formador: Qual parte matemática?
Rosana: Aqui, de 8 mais 8 é 16, 30 mais 30 é 60, para chegar no resultado final.
Formador: Mas isso pode ser considerado uma generalização?
Rosana: Não [demonstrando incerteza].

Rosana mostra compreender que o fato de o aluno ter apresentado o resultado de 76 azulejos no total e explicado como ele determinou o 76, que, no caso, foi a partir da soma de 16 mais 60, pode ser considerado como uma justificativa. No entanto, pensando-se nos processos de RM, a justificativa consiste na argumentação matemática baseada em ideias já compreendidas para mostrar se uma conjectura ou generalização é verdadeira ou falsa. Neste caso os argumentos utilizados por Rosana são inválidos. Outro aspecto que Rosana apresenta é em relação à generalização, pois ela considera que o fato de o aluno ter utilizado as ideias matemáticas de que "8 mais 8 é 16 e 30 mais 30 é 60", ou seja, que envolvem conhecimento matemático, trata-se de uma generalização. Contudo, salienta-se que foi equivocada a percepção de Rosana. A generalização envolve a identificação de semelhança entre os casos e não apenas o fato de utilizar ideias matemáticas. Visando melhor compreensão, o formador faz os seguintes questionamentos:

> **Formador:** Qual que é a conjectura?
> **Cristina:** Que sempre ia aumentando de 3 em 3 [referindo-se a quantidade de azulejos cinzentos].
> **Formador:** Em todos eles?
> Cristina: Isso.
> **Formador:** Então quer dizer, isso faz parte da generalização, porque você observa que do primeiro para o segundo aumenta 3, do segundo para o terceiro aumenta 3.
> **Rosana:** Ele não fez essa observação.
> **Formador:** Isso! Então vai aumentando. Para ser, ele investigou esse processo [referindo-se à regularidade da sequência]?
> **Rosana:** Não.
> **Formador:** Não! Por que a própria conjectura dele vocês já refutaram? Porque ele fez a soma, mas é das 4 figuras.
> **Cristina:** É.
> **Formador:** Porque se já refutou uma conjectura.
> **Cristina:** Já não tem a generalização.

Quando o formador questiona qual a conjectura que as professoras elaboraram durante o momento em que elas resolveram e discutiram a tarefa matematicamente, ele possibilita que Rosana e Cristina levem em consideração que uma das conjecturas que poderia ser elaborada pelo aluno é a de que a quantidade de azulejos cinzentos aumenta 3 azulejos (cinzentos) a cada nova figura da sequência. Com isso, o formador realiza a exemplificação de uma conjectura com potencial de generalização, pois ao analisar a sequência de figuras, verifica-se que a semelhança entre os casos é justamente o fato de que cada figura da sequência possui 3 azulejos cinzentos a mais que a figura anterior.

4.3.2 Discussão coletiva envolvendo a resolução do Aluno C – Momento 2

Neste momento Rosana inicia a discussão apresentando aos demais participantes do processo formativo, os processos de RM que conseguiram identificar por meio da resolução do Aluno C.

> **Rosana:** Nós observamos que houve uma conjectura, porque a gente pode deduzir que ele [o Aluno C] usou as informações das figuras 1 a 4 e dobrou as quantidades para chegar no resultado apresentado. Então, ele não usou a Figura 5; ele fez só da figura 1 a 4 Ele não está correto no pensamento, mas ele fez uma conjectura. Daí, no final ele conseguiu fazer uma justificativa por que ele chegou naquele resultado dele, que ele fez lá, porque juntando 10 mais, juntando os 16 mais 60 ele chegou ao resultado 76.

Efetuando-se uma análise da fala de Rosana, nota-se que ela e Cristina conseguiram identificar uma possível conjectura formulada pelo Aluno C; no caso, a de que o aluno conjecturou que a Figura 10 teria o dobro da soma da quantidade de azulejos contidos nas figuras 1, 2, 3 e 4. Além disso, após analisarem a resolução, concluíram que o raciocínio desenvolvido pelo aluno está errado, ou seja, refutaram a possível conjectura utilizada pelo aluno, pois sua resolução envolvia uma argumentação matemática inválida. Um outro ponto é que elas consideraram que o aluno, ao explicar como obteve o resultado, produziu uma justificativa. Com isso, entende-se que, na verdade, o aluno apresentou apenas uma parte da justificativa, pois para desenvolver o processo de justificação, é necessário concluir se a conjectura do aluno é verdadeira ou não. Neste caso, a justificativa deveria, especificamente, envolver o porquê de o aluno considerar que, na Figura 10, há 16 azulejos brancos e 60 cinzentos e não apenas o que ele fez para obter o resultado de 76 azulejos.

Após a Rosana apresentar as considerações de sua dupla, o formador faz mais alguns questionamentos.

> **Formador:** E a generalização aparece?
> **Rosana:** Não, porque ele [o Aluno C] não tem nenhuma. Ele não tem nada apresentando; ele só apresenta uma somatória ali do 1 ao 4 [referindo-se as figuras] e depois ele dobra.
> **Formador:** Então, assim, uma coisa que a gente tem que entender na generalização é você notar o domínio.
> **Rosana:** Não tem regularidade no pensamento dele.
> **Formador:** Você vai notar o domínio, define uma relação matemática para este domínio, no caso Figura 1, Figura 2, Figura 3, Figura 4; este é o seu domínio, você vai investigar ali. A partir deste momento, você estende para os outros. Então, tem que pensar nesta questão do domínio relevante, que é onde eu vou observando estas relações matemáticas.
> **Rosana:** Ele não tem.
> **Formador:** Mas aí, é o que eles fizeram Figura 1, Figura 2, Figura 3 e Figura 4. Brancos deu 8 e cinzentos deu 30. Aí eles determinaram, brancos foi para 16 e os cinzentos para 60. Então, de certa forma, eles utilizaram a ideia do dobro. Isso apareceu na resolução de vocês no encontro passado [momento em que as professoras discutiram e resolveram a tarefa].
> **Rosana:** Sim.
> **Formador:** Apareceu né? Então esses valores, a ideia do dobro está coerente, só que a questão é o 8; tanto o 8 quanto o 30, porque na verdade não deu 30 na Figura 5.

Neste trecho, Rosana mostra compreender que o aluno não apresentou nenhuma generalização, pois na resolução dele não há indícios de que ele identificou a semelhança entre os casos. Porém, o formador busca enfatizar que, embora a conjectura do aluno não seja válida, há um aspecto interessante na resolução dele. O fato de o aluno ter utilizado a ideia de dobro, coincide com uma das hipóteses de conjectura elaborada pelas professoras do processo formativo durante o momento em que elas resolviam e discutiam a tarefa matemática. Com isso, o formador busca compreender qual o possível raciocínio utilizado pelo aluno, porque ele considera que a ideia do dobro é uma questão que merece ser investigada: "será que dobrando o número da figura também dobra a quantidade de azulejos?" Caso isso aconteça, e se esta conjectura for válida, existe a possibilidade de uma generalização e, consequentemente, a mobilização do processo de investigar o porquê.

> **Formador:** E ele [o aluno] apresenta a justificação matemática?
> **Rosana:** No final sim, porque ele explica que ele juntou 8 e 8 que deu 16, mais o 60 que dá 76. Então, ele justifica como que ele chegou ao resultado final.
> **Formador:** E a justificação dele é válida?
> **Rosana:** É válida dentro do pensamento dele, sim.
> **Formador:** De certa forma, ele validou.
> **Rosana:** É, ele validou.
> **Formador:** Na justificação dele a gente vê uma argumentação matemática.
> **Rosana:** É.

Formador: Tanto no algoritmo, quanto também na representação.
Rosana: Sim.
Formador: O algoritmo está certinho, que é juntar brancos mais cinzentos.
Rosana: É.

Rosana mostra compreender que o fato de o aluno ter argumentado sobre o modo como ele determinou o resultado, consiste em uma justificação matemática. No entanto, o formador explica que, de fato, ele produziu uma argumentação que valida o resultado 76. Porém, deve-se entender que não ocorreu a justificação matemática, de acordo com a resolução da tarefa, pois o aluno não produz uma argumentação de modo lógico, visto que os valores 16 e 60 estão equivocados diante da conjectura que envolve a sequência de figuras.

Com base nos apontamentos realizados durante o momento de discussão envolvendo a resolução do Aluno C, nota-se que houve a mobilização dos Entendimentos Essenciais do RM listados no Quadro 9.

Quadro 9 - Síntese dos Entendimentos Essenciais mobilizados durante as discussões da resolução do Aluno C

Trechos	**Entendimentos Essenciais**	**Justificativa do porquê consideramos um entendimento**
Cristina: Essa primeira parte eles fizeram o raciocínio, a conjectura. Que processo eles pegaram aqui? Por que você está vendo as respostas? 16, 60, o total dá 76 azulejos. Na Figura 10, os azulejos brancos deu 16 porque 8 mais 8 dá 16 [afirmação do Aluno C]. **Rosana:** Então, conjecturar! **Cristina:** Teve conjectura para ele chegar neste raciocínio, que é a primeira parte. **Rosana:** Eu acho que a partir do momento em que ele começa a pensar matematicamente é uma conjectura. **Cristina:** É a conjectura, aham! **Rosana:** Então aqui, porque 8 mais 8 dá 16, é aqui que eles começam a conjectura. Será que é? Então, será que ele está conjecturando a partir do momento [que] 8 mais 8 dá 16?	Entendimento Essencial 1	Rosana e Cristina reconhecem que o aluno elabora uma conjectura a partir do momento em que ele apresenta uma afirmação com base em alguma ideia matemática assumida como verdadeira; neste caso é o fato da Figura 10 ter 16 azulejos brancos.
Rosana: De onde que ele utilizou esse 60 da Figura 10? **Cristina:** Ele foi aumentando de 2 em 2 até a Figura 10 para dá os brancos, né? **Rosana:** É, 2, 4, 6, 8. **Cristina:** Mas mesmo assim, não dá. **Rosana:** Ah! Mas ele não fez a Figura 5, então. Como que ele fez, porque 2, 4, 6, 8, 8 mais 8, 16? E aqui está dando quanto mesmo? 3. Quanto que dá mesmo? 3 mais 6, 9. **Cristina:** Igual a 60. 30 mais 30, 60. Deu 30. **Rosana:** Ele contou aqui. Deu 30 no total; ele somou. Ele não viu que era a Figura 4. Ele simplesmente dobrou aqui. **Cristina:** Daí ele chegou na resposta da 10. É, porque... **Rosana:** Ele fez isso, ele pegou aqui. **Cristina:** 2, 4, 6, 8. **Rosana:** 8. Aí ele fez, aqui tem 30. 8 mais 8 dá 16 e 30	Entendimento Essencial 7	Neste momento da discussão, embora Cristina e Rosana não citem, elas mobilizam um aspecto importante para realização de uma refutação, pois elas utilizam a argumentação matemática seguindo uma lógica para mostrar que a afirmação de que na Figura 10 há 16 azulejos brancos e 60 cinzentos é falsa.

mais 30 dá 60. **Cristina:** 60 mais 16 dá 76. **Rosana:** É. Esse foi o pensamento dele. **Cristina:** É. Tem essa sequência aqui, entendeu? **Rosana:** Então, mas ele fez errado. Ele fez da Figura 4, não fez da figura [5].		

Fonte: Dados da pesquisa.

4.3.3 As oportunidades de aprendizagem durante as discussões envolvendo a resolução do Aluno C

Com base na análise das discussões promovidas por Rosana e Cristina a partir da resolução do Aluno C, foi possível verificar que:

i) As professoras tiveram a oportunidade de compreender que a elaboração de uma conjectura consiste em analisar as particularidades de uma informação matemática, realizando "a exploração de conceitos e ideias" (MARCATTO, 2021, p. 7), sendo que, em alguns momentos, mesmo que a resolução do aluno estivesse errada, a argumentação matemática que ele utilizou poderia possibilitar a identificação de propriedades e relações matemáticas que necessitassem ser investigadas, viabilizando-se, assim, a verificação a partir de um caso particular para um conceito geral (PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012). Outro aspecto que viabilizou uma aprendizagem profissional, foi o fato das professoras se envolverem em um processo em que buscam compreender o raciocínio desenvolvido pelo aluno (PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012; VIEIRA; RODRIGUES; SERRAZINA, 2020).

A partir da análise do raciocínio desenvolvido pelo aluno, as professoras acabam produzindo uma argumentação matemática, trazendo em discussão aspectos que contribuem para a compreensão dos processos de RM. Diante das discussões, as professoras tiveram a oportunidade de compreender que uma conjectura ou generalização são processos que também podem ser mobilizados durante os momentos em que o aluno comete alguns equívocos durante a resolução, pois, ao discutirem sobre a argumentação matemática apresentada por meio da resolução da tarefa, elas indicam aspectos que contribuem para a produção de uma justificativa, tendo como objetivo promover a refutação da conjectura utilizada pelo aluno. Desta forma, as professoras apresentaram argumentos matemáticos que invalidam a resposta apresentada, ou seja, utilizam um dos aspectos que envolvem o processo de refutação, visto que a intenção das professoras consistiu em mostrar que uma afirmação em particular é falsa (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, p. 12);

(ii) Durante as discussões envolvendo a resolução do Aluno C, nota-se que as reflexões promovidas pelas professoras revelaram aspectos importantes envolvendo o conhecimento do aluno e da aprendizagem (PONTE, 2012), pois embora o aluno apresentasse uma resolução incorreta, visto que a conjectura inicial não é válida, outros aspectos puderam ser discutidos na perspectiva de compreender o raciocínio desenvolvido por ele. Consequentemente, os diálogos realizados pelas professoras possibilitaram discutir o conhecimento matemático necessário para o aluno resolver e desenvolver o seu raciocínio corretamente, ou seja, possibilitou realizar reflexões, levando-se em consideração as intervenções necessárias para auxiliar a aprendizagem do aluno (PONTE, 2012).

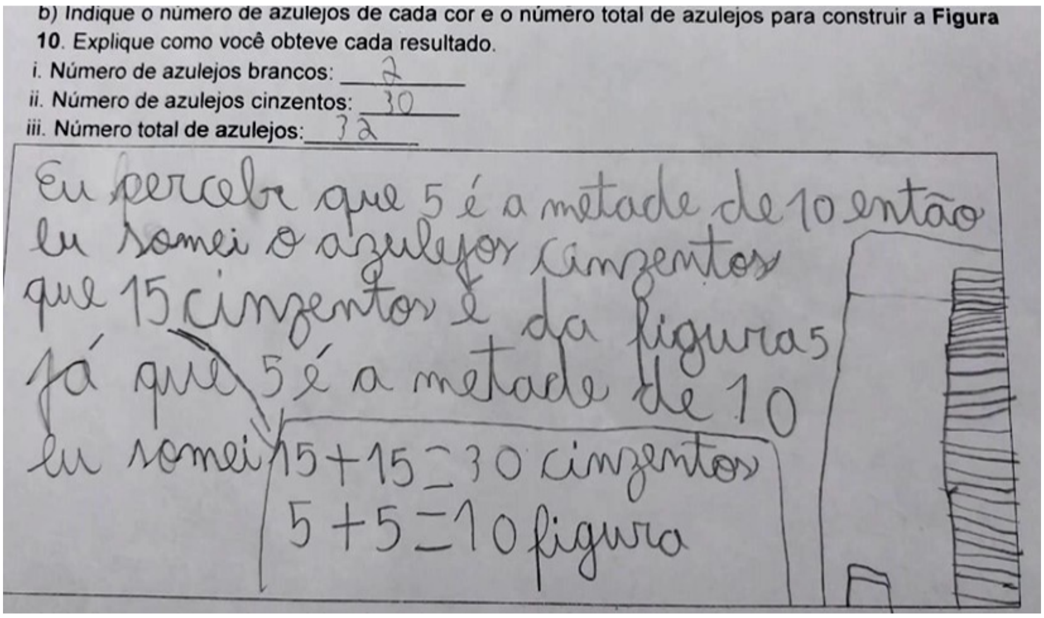
4.4 DISCUSSÃO ENVOLVENDO A RESOLUÇÃO DO ALUNO D

A análise da resolução do Aluno D foi realizada, a princípio, pelas professoras Cristina e Rosana.

4.4.1 Discussão em dupla envolvendo a resolução do Aluno D – Momento 1

As professoras Rosana e Cristina iniciaram este momento da análise da resolução do Aluno D, apresentada, a seguir, na Figura 21.

Figura 21- Resolução do Aluno D


b) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 10**. Explique como você obteve cada resultado.

i. Número de azulejos brancos: 2

ii. Número de azulejos cinzentos: 30

iii. Número total de azulejos: 32

Eu percebi que 5 é a metade de 10 então
eu somei o azulejos cinzentos
que 15 cinzentos é da figura 5
já que 5 é a metade de 10
eu somei 15+15=30 cinzentos
5+5=10 figura

Fonte: Protocolo do Aluno.

As professoras iniciam a discussão, verificando se resolução do aluno está correta e, com isso, promovem o seguinte diálogo:

Rosana: Então o que ela fez, eu percebi que 5 é a metade de 10.
Cristina: Eu somei, então, os cinzentos, que é 15. Aqui dá 15? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (Contando). Ah, não é 12.
Cristina: 12, mas ela está pensando na Figura 5. Ele fez a Figura 5.
Rosana: É.
Cristina: Dá 15. Ela fez a Figura 5.
Rosana: 12 mais 3 dá 15.
Cristina: Isso. Eu percebi que 5 é a metade de 10; então eu somei os azulejos cinzentos, 15 cinzentos da Figura 5.Eela até coloca; ela fez a Figura 5. Já que 5 é a metade de 10, eu somei 15 mais 15, 30 cinzentos; está certo.
Rosana: E 5 mais 5 igual 10 figuras? Ah tá; igual a Figura 10. Entendi.
Cristina: É, o raciocínio dela foi pela metade.
Rosana: É que ela não fez nada do branco. Ela só fez dos cinzas.
Cristina: Ela não fez o total, mas os cinzas está correto.
Rosana: É o cinza está correto. Ela dobrou, já que 5 mais 5 é 10; igual a gente dobrou naquele dia [referindo-se ao momento em que as professoras resolveram a tarefa durante o 3º encontro].
Cristina: É. Ela percebeu que aqui deu 15; ela pensou na metade da figura.
Rosana: Isso.
Cristina: Ela só fez uma conjectura; ela não chegou em justificativa de nada.
Rosana: Ela fez uma conjectura, e só de uma parte.
Cristina: É porque ela não fala no total. Ele calculou; ela não.

Neste trecho, Rosana e Cristina reconhecem que o aluno percebeu a semelhança entre os casos, ou seja, a cada nova figura da sequência, acrescentavam-se 3 azulejos. Com isso, as professoras perceberam que o aluno utilizou a conjectura envolvendo o conceito de proporcionalidade, porque a Figura 5 tem a metade de azulejos contidos na Figura 10. Logo, o aluno utilizou este raciocínio, pois levou em consideração que cinco é a metade de dez. As professoras apontam que, por meio da resolução do aluno, só foi elaborada a conjectura. No entanto, nesta situação, nota-se que o aluno produziu uma argumentação matemática para mostrar por que a conjectura dele é válida.

Rosana: Ah, deu 32. Olha, ela fez certa.
Cristina: Sim, mas ela só diz dos cinzentos.
Rosana: Ela não explicou.
Cristina: Não.
Rosana: Mas ela fez.
Cristina: Ela fez certo, mas ela não explicou por que ela chegou no 32.
Rosana: Então, ela só fez a conjectura.
Cristina: A conjectura de uma parte da situação.
Rosana: Aqui ela fez a conjectura.
Cristina: É, porque o que ela analisou, a Figura 5.
Rosana: E justificou.
Cristina: Ela pensou em duas coisas, ela na Figura 5 que é a metade de 10, que a Figura 10 é o que ela está analisando, 15 mais 15 dá 30, o dobro que ela fez.
Rosana: Ela só fez a conjectura, né?
Cristina: Só. O raciocínio da aluna ficou melhor que o dele, mas ela não conseguiu explicar como que justificou.
Rosana: Mas sabia que no desenho ela deixou?
Cristina: É. Ela percebeu que se mantinha os 2.
Rosana: Ela percebeu que se mantinha os 2 e que aqui era sempre mais 3. Então, ela percebeu a sequência; ela só não explicou. Então, ela fez uma investigação.

Cristina: Exatamente.

Rosana e Cristina reconhecem que a conjectura formulada pelo aluno envolve apenas a quantidade de azulejos cinzentos. No entanto, por meio do registro do Aluno C, elas notam que o aluno também utilizou os 2 azulejos brancos. Com isso, as professoras mostram compreender que a conjectura do aluno diz respeito à relação da metade (envolvendo a quantidade de azulejos cinzentos), porém há 2 azulejos brancos que devem ser adicionados para obter a quantidade total de azulejos na Figura 10.

Rosana: Uma investigação, não! Ela fez.
Cristina: Uma justificativa, na verdade, né?
Rosana: Ela fez a justificativa? Não.
Cristina: Ela fez a conjectura.
Rosana: E a generalização ela fez.
Cristina: É, isso.
Rosana: Então, ela fez a conjectura e a generalização.
Cristina: É, porque conjecturar e generalizar envolve o uso e esclarecimento do significado de termos, símbolos e representações [lendo definições do texto de apoio].
Rosana: Então, ela entendeu.
Cristina: Porque ela percebeu a regularidade.
Rosana: Que só repete e que ali vai aumentando de 3 em 3.
Cristina: E ela explicou desta forma.

Neste trecho, Rosana aponta que o aluno utilizou os processos de elaboração de conjectura e generalização. No entanto, pode-se verificar, pela resolução do aluno, que houve a elaboração de conjectura, mas, em relação à generalização, o aluno não apresenta argumentos suficientes para chegar a tal conclusão, pois o aluno estabeleceu a relação do dobro com base em apenas um caso e esta relação não possibilita determinar a quantidade total de azulejos contidos em qualquer figura.

Rosana: Então, ela fez a conjectura e a generalização [fala não audível].
Cristina: Acho que sim, vamos ver. Vamos ver como ela fez. Que ela percebeu que a Figura...
Rosana: Tem uma sequência.
Cristina: Ela percebeu a regularidade dos azulejos brancos.
Rosana: E cinzas.
Cristina: Vai saber se é ela ou ele, só percebeu?
Rosana: Você é mais inteligente, então é ela. [risos]
Cristina: Percebeu a regularidade dos azulejos brancos.
Rosana: E cinzas. E continuou a sequência. Como que a gente põe. E continuou com a regularidade, chegando no resultado.
Cristina: No resultado da Figura 10, né? Então, houve conjectura e generalização.
Rosana: Agora, a explicação dela do porquê... Ela só faz uma explicação? Ela não justificou por que chegou neste resultado.
Cristina: É, ela só fez a parte dos azulejos. Então, vamos ver a conjectura da tarefa. Na explicação ela percebeu a regularidade, acho que só isso.
Rosana: E também apresentou a justificativa. Ela justificou!

Cristina mostra compreender que o aluno apresentou argumentos matemáticos envolvendo a regularidade de sequências de figuras; logo, este fato contribuiu para a elaboração de uma conjectura. No entanto, em relação à generalização, é necessário compreender que se deve envolver a identificação de semelhança entre os casos, porém além do domínio em que se originou. Neste caso, não é possível fazer uma afirmação de que o aluno utilizou a generalização, pois ele apresenta argumentos apenas com base em um caso.

4.4.2 Discussão coletiva envolvendo a resolução do Aluno D – Momento 2

Neste momento, Rosana apresenta para os demais participantes do processo formativo, os processos que consideraram ter identificado por meio da resolução do Aluno D. Desta forma, iniciam a discussão coletiva fazendo os seguintes apontamentos:

> **Rosana:** Na Tarefa 4 nós percebemos que há uma regularidade dos azulejos brancos e cinzentos e ele continua com a regularidade para a Figura 10. Então, houve conjectura e generalização nesta tarefa.
> **Formador:** Conjectura e generalização?
> **Rosana:** Sim.
> **Formador:** Qual conjectura?
> **Rosana:** A conjectura ele percebeu que 5 é a metade de 10, então ele fez a soma dos azulejos cinzentos que são 15, na Figura 5. Ele tentou; ele pegou os 12 mais 3 que deu 15. Lá nos cinzas, então aí ele já fez uma conjectura. E a generalização é porque ele percebeu que tem uma regularidade ali.
> **Paula:** Sem envolver o de 3 em 3.
> **Rosana:** É. Só que ele não justificou como chegou ao resultado final.
> **Formador:** Ele não utilizou o padrão 3? A regularidade do 3.
> **Rosana:** É.
> **Formador:** Mas ele utilizou a ideia do dobro.
> **Rosana:** É.
> **Formador:** Que aqui aparentemente é válido.
> **Rosana:** 15 mais 15 é 30. Porque olha lá, ele fez o dobro que se 5 mais 5 são 10, 5 figuras mais 5 figuras dá 10, então 15 mais 15 dá 30.

Neste trecho, Rosana reforça a ideia de que, por meio da resolução do aluno, foi possível identificar que ele utilizou uma conjectura. Neste caso, dobrando a posição da figura, também se obtém o dobro da quantidade de azulejos cinzentos. No entanto, essa conjectura não pode ser considerada, ainda, como uma generalização, pois se trata de uma informação matemática baseada em apenas um fato e, pensando-se no total de azulejos, a relação do dobro utilizada pelo aluno torna-se inválida, porque o total de azulejos na Figura 10 não é o dobro da quantidade total de azulejos contidos na Figura 5. A partir disso, o formador faz alguns questionamentos.

> **Formador:** Certo! O 2 ele nem se preocupou com isso, sobre a questão do 2. Porque ele já convencionou pra ele que o 2 pra ele já não é um conhecimento da matemática; é uma informação que ele já tem.
> **Rosana:** Só que no desenho ele representou. O 2 se repete, não faz soma. Ele representou lá.
> **Formador:** E veja assim, a ideia a metade, porque a gente ficou falando o dobro, o dobro e ele já pensou o inverso.
> **Rosana:** É. Metade de 10. Já que 5 é a metade de 10, eu somei. Aí assim, eu acho que ele não fez uma justificativa final de como ele conseguiu chegar neste resultado de 32. Ele colocou a parte de como ele chegou no 30.

Rosana mostra compreender que o aluno não apresentou uma justificativa matemática. Ela considera que a justificativa está relacionada aos argumentos matemáticos utilizados para mostrar a validade do resultado. No entanto, considerando a resolução do aluno, ele produziu, sim, uma justificativa matemática que valida a conjectura que elaborou, ou seja, ao dobrar a posição da figura, também se dobra a quantidade de azulejos cinzentos. Esse é um Entendimento Essencial relacionado à elaboração de conjectura, já que se trata de uma afirmação matemática que envolve uma relação matemática que, a princípio, demonstra ser verdadeira.

> **Formador:** Sim. E ele identifica a semelhança entre os casos? Nesta resolução dele tem aspecto de semelhança entre os casos.
> **Rosana:** Eu acho que sim.
> **Paula:** Da Figura 4, 3, 2 e 1 você diz?
> **Formador:** Exatamente.
> **Rosana:** Sim, porque ele vê os brancos; eles apenas se repetem através do desenho. Eu acredito que ele entendeu.
> **Formador:** É os brancos sim, tudo bem. Mas aí não caberia ele apresentar a lógica?
> **Rosana:** Ah tá! A regularidade que acontece para que ele consiga chegar, né?
> **Formador:** Isso.
> **Rosana:** Não. Ele não apresenta.

Neste trecho da discussão, nota-se que o formador busca direcionar no sentido de verificar se as participantes identificaram algum aspecto que conduz a pensar que o aluno utilizou a identificação de semelhança entre os casos, ou seja, uma relação matemática que vale para determinar a quantidade total de azulejos na Figura 1, na Figura 2, na Figura 3 etc. Logo, Rosana aponta que não, pois o raciocínio que o aluno utilizou serve apenas para identificar o total de azulejos contidos na Figura 10; a conjectura do aluno foi elaborada em um intervalo do domínio e não houve a expansão da aplicação da conjectura considerando outros casos.

> **Paula:** Só que esse é um dos casos que a gente vê acontecer demais dentro de uma sala de aula; vários raciocínios para chegar a um mesmo resultado, porque a matemática é exata, que não seria esse caso, porque neste caso a gente precisaria mostrar uma regularidade entre as figuras, mas o resultado dele não está errado.
> **Formador:** Como diz, essa conjectura que ele formulou, que ele utilizou, melhor dizendo, porque ele não apresentou a conjectura formulada.
> **Rosana:** Não.
> **Formador:** Essa é a dificuldade nossa, pois não está escrito a conjectura.
> **Paula:** Aham.
> **Formador:** A gente tem que olhar e tentar entender o que ele fez para pensar na conjectura que ele utilizou, mas ele utilizou.
> **Rosana:** Aham.
> **Formador:** A gente vê que não está errada a ideia dele.
> **Paula:** É.
> **Formador:** Só que o detalhe para pensar no raciocínio matemático dessa situação, ele teria que pensar em uma relação matemática.
> **Paula:** A intenção de justificar de uma figura para a outra, ele não justificou.

Neste trecho da discussão, o formador argumenta sobre o aspecto de que, muitas vezes, os alunos utilizam as conjecturas, porém não as escrevem. E isso fica evidente por meio da resolução do aluno, pois a resolução dele está certa, ou seja, ele provavelmente elaborou e utilizou uma conjectura que é válida, mas a argumentação matemática utilizada não é o suficiente para auxiliar no processo de generalização. Com isso, Paula complementa, na discussão, dizendo que, de fato, o aluno não produziu uma justificativa que possibilite identificar essa semelhança entre os diferentes casos.

Com base nos apontamentos realizados durante o momento de discussão envolvendo a resolução do Aluno D, nota-se que houve a mobilização dos Entendimentos Essenciais do RM listados no Quadro 10.

Quadro 10 - Síntese dos Entendimentos Essenciais mobilizados durante as discussões da resolução do Aluno D

Trechos	Entendimentos Essenciais	Justificativa do porquê consideramos um entendimento
Cristina: Isso. Eu percebi que 5 é a metade de 10, então eu somei os azulejos cinzentos, 15 cinzentos da Figura 5; ela até coloca, ela fez a Figura 5. Já que 5 é a metade de 10, eu somei 15 mais 15, 30 cinzentos, está certo!	Entendimento Essencial 1	Cristina reconhece que a aluna utilizou uma relação matemática para afirmar que a Figura 10 terá o dobro da quantidade de azulejos cinzentos contidos na Figura 5, ou seja, trata-se do início de uma conjectura que a aluna formulou, levando em consideração o seu conhecimento sobre a noção de proporcionalidade.
Cristina: É. Ela percebeu que se mantinha os 2. **Rosana:** Ela percebeu que se mantinha os 2 e que aqui era sempre mais 3. Então, ela percebeu a sequência; ela só não explicou. Então, ela fez uma investigação.	Entendimento Essencial 1	Cristina e Rosana identificaram que a aluna formulou uma conjectura com base nas propriedades da sequência de figuras. Porém, ao afirmar que houve uma investigação, considera-se que não, pois, por meio da fala das professoras, não há evidências de fatores que contribuam para o desenvolvimento de uma generalização.
Rosana: A conjectura ele percebeu que 5 é a metade de 10, então ele fez a soma dos azulejos cinzentos que são 15, na Figura 5. Ele tentou; ele pegou os 12 mais 3 que deu 15. Lá nos cinzas, então aí ele já fez uma conjectura. E a generalização é porque ele percebeu que tem uma regularidade ali.	Entendimento Essencial 2	Rosana demonstra compreender que o fato de a aluna ter identificado a regularidade na sequência de figuras, mostra que ela utilizou uma generalização. No entanto, com base na fala de Rosana não é possível afirmar que houve uma generalização, mas sim, apenas a elaboração de uma conjectura, pois por meio da resolução não há evidências de a aluna ter utilizado a semelhança entre os casos.
Formador: Ele não utilizou o padrão 3? A regularidade do 3. **Rosana:** É. **Formador:** Mas ele utilizou a ideia do dobro. **Rosana:** É. **Formador:** Que aqui aparentemente é válido. **Rosana:** 15 mais 15 é 30. Porque olha lá, ele fez o dobro que se 5 mais 5 são 10, 5 figuras mais 5 figuras dá 10, então 15 mais 15 dá 30.	Entendimento Essencial 6	O formador aponta que a aluna utilizou uma possível generalização, ou seja, dobrando a posição da figura, dobra-se as quantidades de azulejos cinzentos. Desta forma, Rosana demonstra compreender que a aluna elaborou uma justificativa matemática com base em ideias já compreendidas.
Formador: E veja, assim, a ideia a	Entendimento	O formador aponta a utilização da aplicação das

metade, porque a gente ficou falando o dobro, o dobro e ele já pensou o inverso.	Essencial 4	ideias de metade e dobro para promover a elaboração de uma conjectura, ou seja, a aluna demonstra compreender a utilização destes termos diante da resolução da tarefa.
Formador: Sim. E ele identifica a semelhança entre os casos? Nesta resolução dele tem aspecto de semelhança entre os casos. **Rosana:** Eu acho que sim. **Paula:** Da Figura 4, 3, 2 e 1 você diz? **Formador:** Exatamente.	Entendimento Essencial 2	Paula mostra compreender que a semelhança entre os casos consiste em identificar uma relação matemática que é válida em diferentes situações. Desta forma, ressalta-se que esta é uma das etapas que contribuem para a formulação de uma generalização.
Rosana: É. Metade de 10. Já que 5 é a metade de 10, eu somei. Aí assim, eu acho que ele não fez uma justificativa final de como ele conseguiu chegar neste resultado de 32. Ele colocou a parte de como ele chegou no 30.	Entendimento Essencial 8	Rosana mostra compreender que a justificativa matemática está relacionada a avaliar a validade dos argumentos que mostram que a conjectura do aluno é verdadeira.

Fonte: Dados da pesquisa.

4.4.3 As oportunidades de aprendizagem durante as discussões envolvendo a resolução do Aluno D

Com base na análise das discussões promovidas por Rosana e Cristina a partir da resolução do Aluno D, foi possível verificar que:

i) As professoras tiveram a oportunidade de compreender que a elaboração de uma conjectura, envolve a produção de uma afirmação matemática levando em consideração todo o contexto da tarefa e não apenas a particularidade de um caso. Desta forma, foi possível identificar que houve uma “exploração de conceitos e ideias matemáticas” (MARCATTO, 2021, p. 7), assim como a argumentação matemática utilizada para justificar e validar a elaboração da conjectura do aluno. Contudo, ressalta-se que as afirmações formuladas a partir de casos particulares podem auxiliar na elaboração de uma conjectura ou generalização. Diante das discussões promovidas por Rosana e Cristina, nota-se que os argumentos utilizados durante os diálogos possibilitaram identificar fatores que potencializam e auxiliam na compreensão do Entendimento Essencial envolvendo o processo de generalização;

(ii) Durante as discussões envolvendo a resolução do Aluno D, nota-se que as reflexões promovidas pelas professoras revelaram aspectos importantes envolvendo o conhecimento do aluno e da aprendizagem (PONTE, 2012), pois, neste caso, o aluno apresenta uma conjectura levando em consideração o seu ponto de vista, ou seja, trata-se de um conhecimento matemático que ele adquiriu em outro contexto da aprendizagem, que é a utilização do conceito envolvendo as noções de proporcionalidade (metade/dobro).

As discussões também revelaram algumas dificuldades em relação ao conhecimento da matemática (PONTE, 2012), pois ao discutir sobre o processo de generalização, as professoras não consideraram a possibilidade de que o aluno poderia ter utilizado a identificação de uma relação matemática que tivesse o potencial de auxiliar na compreensão de semelhança entre os casos (por exemplo, que a quantidade de azulejos na Figura 10 poderia ser determinada a partir da expressão matemática 3x10+2). Neste sentido, percebe-se que as professoras não levaram em consideração os conceitos, relações e propriedades que poderiam ser explorados a partir da resolução da tarefa. Desta forma, as professoras mostraram compreender que a semelhança entre os casos consiste em identificar uma regularidade que é válida com base nos dados da sequência de figuras e não na relação matemática que poderia ser definida a partir da semelhança entre os casos.

5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Ao observar-se as discussões promovidas pelas participantes do processo formativo durante a análise de cada uma das tarefas, nota-se que as professoras tiveram a oportunidade de discutir e refletir sobre aspectos importantes que auxiliaram na compreensão do que são os processos de RM e o modo como esses processos são mobilizados pelos alunos. Ressalta-se que as discussões propiciaram, principalmente, a identificação e a compreensão dos processos que envolvem a elaboração de conjecturas, a justificação e a refutação. Entende-se que houve reflexões menos aprofundadas envolvendo os processos de generalização e investigação do porquê, visto que as resoluções analisadas apresentavam poucos elementos para subsidiar as discussões sobre esses dois processos. Deste modo, considera-se que o processo de generalização também foi uma limitação durante o momento em que os alunos resolveram a tarefa. Isso, provavelmente, pode estar relacionado ao nível de abstração matemática desenvolvido pelos alunos, à estrutura da tarefa que foi proposta ou até mesmo em relação à forma de condução da aula.

A análise das resoluções possibilitou às professoras discutirem sobre questões de natureza didática envolvendo o ensino de Matemática (PONTE, 1992), assim como o processo de aprendizagem. Logo, percebe-se que os diálogos oportunizaram a realização de reflexões sobre a forma que alguns conhecimentos matemáticos (no caso, os conhecimentos matemáticos envolvendo a ideia de sequência numérica) são compreendidos pelos alunos, promovendo-se, assim, discussões com base em situações vivenciadas no contexto de sala de aula (OLIVEIRA; SERRAZINA, 2022). Desta forma, nota-se que as discussões a partir dos registros de prática, possibilitaram identificar aspectos que revelam algumas das dificuldades dos alunos em relação ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

Por meio da utilização de resoluções (corretas e incorretas), “podemos identificar erros típicos que nós (e nossos alunos) cometemos ao tentar fornecer uma justificativa válida e obter insights sobre exemplos de argumentos lógicos que representam justificativas válidas” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 36). Desta forma, considera-se que as resoluções dos alunos utilizadas durante os momentos de discussões, apresentaram elementos significativos para a compreensão dos processos de RM. As resoluções, independentemente de estarem corretas ou incorretas, apresentaram argumentos matemáticos que viabilizaram às professoras estabelecer, de modo mais compreensível, a relação dos Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento dos processos de RM e a forma como esses entendimentos são mobilizados durante os momentos em que um aluno resolve uma tarefa.

Por meio dos momentos de reflexões, nota-se que uma das principais dificuldades das professoras está relacionada ao processo de generalização e investigação do porquê. Isso se deve ao fato de as professoras utilizarem percepções equivocadas sobre o processo de generalizar. Em alguns trechos das discussões, percebe-se que as professoras mostraram compreender que uma generalização está relacionada ao momento em que o aluno utiliza um conhecimento matemático para explicar como fez para obter a resposta da tarefa. Assim, durante as discussões elas, de certa forma, utilizaram poucos argumentos que pudessem contribuir com a compreensão do processo de generalização. Isso fica evidente, pois, na maioria das vezes que este processo entra em discussão, parte de uma abordagem promovida pelo formador.

Considerando-se a dificuldade das professoras em identificar aspectos que pudessem contribuir com a compreensão dos processos de generalização e investigação do porquê, nota-se que o processo de formação continuada propiciou, durante o desenvolvimento da TAP 3, discussões e reflexões com potencial de auxiliar na compreensão. No entanto, como as professoras apresentaram poucos argumentos envolvendo a identificação desses dois processos, eles acabaram sendo tratados de modo mais sucinto e superficial. Desta forma, entende-se que o formador (pesquisador) poderia ter aprofundado a discussão, fazendo questões mais objetivas e pontuais, dando condições das professoras notarem aspectos que favorecessem à identificação dos respectivos processos de RM.

Durante as discussões promovidas pelos participantes, percebe-se que uma das principais dificuldades em relação ao conhecimento matemático envolve a abordagem específica do conteúdo, pois as professoras não mostraram compreender que uma das principais ideias a ser constituída pelos alunos era a relação matemática formulada a partir das informações apresentadas na tarefa. Deste modo, considera-se que o processo de formação continuada promoveu algumas contribuições envolvendo a vertente do conhecimento da matemática (PONTE, 2012), visto que as abordagens conduzidas pelo formador tinham, como perspectiva, promover discussões considerando conceitos, propriedades e relações matemáticas essenciais para promover a aprendizagem envolvendo números e operações.

Durante as discussões envolvendo as resoluções erradas, nota-se que um dos aspectos favoráveis ao processo de aprendizagem é o fato de as professoras conseguirem identificar argumentos matemáticos que possibilitam estabelecer a identificação dos processos de RM e, consequentemente, dão condição de compreender a mobilização dos Entendimentos Essenciais, conforme definidos por Lannin, Ellis e Elliot (2011), ou seja, as professoras evidenciam que os processos de RM não estão explicitamente relacionados somente aos conhecimentos matemáticos assumidos como verdadeiros. Neste sentido, considera-se este fato como algo positivo, pois nota-se que houve a oportunidade de incluir durante as reflexões aspectos essenciais para a aprendizagem do conteúdo, levando em consideração as experiências matemáticas vivenciadas em sala de aula (PONTE, 1992).

Com base nas sínteses dos Entendimentos Essenciais mobilizados durante as discussões envolvendo a resolução dos alunos (Quadro 7, Quadro 8, Quadro 9 e Quadro 10), verificou-se que, durante o desenvolvimento da TAP 3, investigada nesta pesquisa, ocorreram diferentes discussões e reflexões que contribuíram para a perspectiva de realizar a identificação e compreensão dos Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento do RM. Desta forma, apresenta-se, no Quadro 11, um panorama geral dos momentos em que as professoras tiveram a oportunidade de discutir e refletir sobre os aspectos que corroboraram na compreensão dos Entendimentos Essenciais, levando-se em consideração as resoluções de alguns alunos. Ressalta-se que os espaços assinalados com um X, indicam que a resolução do aluno propiciou mobilizações envolvendo os Entendimentos Essenciais.

Quadro 11 - Síntese geral das resoluções que possibilitaram mobilizar compreensões sobre os Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento do RM

Entendimentos Essenciais	Resolução do Aluno A	Resolução do Aluno B	Resolução do Aluno C	Resolução do Aluno D
Entendimento Essencial 1	**X**	**X**	**X**	**X**
Entendimento Essencial 2	**X**	**X**		**X**
Entendimento Essencial 3		**X**		
Entendimento Essencial 4				**X**
Entendimento Essencial 5	**X**	**X**		
Entendimento Essencial 6	**X**	**X**		**X**
Entendimento Essencial 7	**X**		**X**	
Entendimento Essencial 8				**X**
Entendimento Essencial 9				

Fonte: Dados da pesquisa.

Com base nos dados apresentados no Quadro 11, conclui-se que todas as resoluções dos alunos apresentaram aspectos que contribuíram para a realização de reflexões e discussões envolvendo a compreensão do Entendimento Essencial 1 (reconhecimento de que o processo de elaboração de conjecturas consiste na formulação de uma afirmação matemática produzida pelo aluno). A partir das resoluções dos alunos A, B e D, houve a possibilidade de as professoras identificarem aspectos que contribuíram para a compreensão do Entendimento Essencial 2 (que envolve reconhecer que o processo de generalizar consiste na identificação de semelhança entre os casos) e do Entendimento Essencial 6 (que a justificação matemática deve ser produzida a partir de argumentos lógicos e com base em ideias já compreendidas).

As resoluções dos alunos A e B, viabilizaram a identificação de argumentos que auxiliaram na compreensão do Entendimento Essencial 5 (compreensão de que o processo de investigar o porquê envolve a investigação de fatores com potencial de explicarem por que uma generalização é verdadeira ou falsa). As resoluções dos alunos A e C possibilitaram identificar fatores envolvendo a compreensão do Entendimento Essencial 7 (compreensão de que uma refutação matemática consiste em demonstrar que uma afirmação particular é falsa).

A resolução do Aluno B, viabilizou discutir os aspectos envolvendo a compreensão do Entendimento Essencial 3 (o reconhecimento de que o processo de generalização envolve a identificação da aplicabilidade de uma relação matemática, estendendo-o para casos além do domínio relevante). E, por fim, a resolução do Aluno D possibilitou identificar características que auxiliam na compreensão do Entendimento Essencial 8 (a compreensão de que os processos de justificar e refutar, consistem em avaliar a validade dos argumentos matemáticos para mostrar se uma conjectura ou generalização é verdadeira ou falsa). Em relação ao Entendimento Essencial 9, nota-se que não houve ocorrências nos trechos analisados. Talvez isso tenha ocorrido, possivelmente, pelo fato de os registros de práticas não terem apresentado argumentos envolvendo aspectos referentes a este entendimento.

Após ser realizada a análise dos Entendimentos Essenciais, buscou-se investigar quais OAP foram concretizadas durante a realização da segunda parte da TAP 3. Desta forma, conseguiu-se identificar, por meio das discussões e reflexões promovidas durante os momentos de análise em duplas ou trios e nos diálogos realizados de modo coletivo, que as participantes do processo de formação continuada tiveram as seguintes Oportunidades de Aprendizagem Profissional:

De modo em geral, é possível notar que as OAP foram geradas a partir do desenvolvimento das TAP; no entanto, as TAP também viabilizaram a realização de outras ações, as quais, de certa forma, estabeleciam relações com os outros domínios do Modelo PLOT, ou seja, o PAF e as IDP. Diante disso, considera-se que o desenvolvimento do processo de formação continuada estruturado, com base nos domínios do Modelo PLOT, possibilitou a concretização das seguintes OAP, apresentadas no Quadro 12:

Quadro 12 – Oportunidades de Aprendizagem Profissional – OAP geradas durante a realização do processo de formação continuada e a relação com os domínios do Modelo PLOT

Domínios do Modelo PLOT	**Dimensão Conceitual[13]**		**OAP**
	Componente	**Característica**	
Papel e Ações do Formador (PAF)	Aproximação	Favorecer a aproximação da Matemática Acadêmica (MA) à Matemática Escolar (ME) e vice-versa.	• Discussões e reflexões sobre os processos de RM, levando-se em consideração os aspectos fundamentais dos Entendimentos Essenciais.
	Articulação	Estimular a articulação entre as dimensões matemática e didática do conhecimento profissional para ensinar.	• Identificação dos momentos em que seriam necessárias as intervenções do professor durante a resolução de uma tarefa matemática.
Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP)	Conhecimento Profissional	Explorar os conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores, relacionados à/s TME.	• Discussões e reflexões sobre as resoluções matemáticas dos alunos, buscando compreender os raciocínios matemáticos desenvolvidos por eles; • Reconhecimento dos processos de RM a partir das resoluções dos alunos; • Identificação de algumas das dificuldades em relação aos conceitos, propriedades e relações matemáticas apresentadas pelos alunos durante a resolução de uma tarefa matemática; • Explorações e discussões sobre as dificuldades que o professor tem em relação à abordagem de um determinado conteúdo, discutindo, principalmente, sobre os conceitos, propriedades e relação matemáticas essenciais para o ensino do respectivo conteúdo; • Identificação de características envolvendo os Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento dos RM.
	Ensino Exploratório	Possuir estrutura que propicie um ambiente de ensino-aprendizagem exploratório.	• Reconhecimento de que as resoluções (corretas e incorretas) dos alunos podem apresentar argumentos que necessitam ser investigados, ou seja, exploração dos conceitos e ideias matemáticas utilizadas pelos alunos para resolver uma determinada tarefa; • Argumentação utilizando os registros de prática para justificar a identificação dos processos de RM.
Interações Discursivas entre Participantes (IDP)	Discussões Matemáticas e Didáticas	Contemplar, de forma articulada, as discussões matemáticas e didáticas relacionados às TME.	• Reconhecimento, discussões e reflexões sobre os conteúdos que são essenciais para auxiliar o aluno durante o processo de aprendizagem; • Reflexões sobre as ações didáticas que podem ser desenvolvidas a partir das práticas de ensino, ou seja, as práticas realizadas em sala de aula.
	Argumentação e Justificação	Envolver argumentação e justificação	• Discutir sobre a forma de mostrar para um aluno que a resolução dele está incorreta, ou seja, utilizar a justificação matemática como um

[13] Os componentes e as características que definem a dimensão conceitual do Modelo PLOT, foram extraídos dos de Ribeiro e Ponte (2020, p. 7).

		matemáticas e didáticas válidas.	suporte para promover a aprendizagem e não apenas dizer para o aluno que está errado, mas, também, que é inválido o que ele fez.

Fonte: Dados da pesquisa

Além das OAP, verificou-se que a utilização das resoluções dos alunos contribuiu para as discussões e reflexões promovidas pelos participantes do processo de formação continuada, pois foi possível identificar aspectos envolvendo aspectos envolvendo as vertentes do conhecimento didático (PONTE, 2012). Desta forma, apresentar-se-á, no Quadro 13, uma síntese das discussões das resoluções de tarefas que propiciaram identificar aspectos das vertentes do conhecimento didático.

Quadro 13 - Síntese das discussões das resoluções de tarefas que propiciaram identificar aspectos das vertentes do Conhecimento Didático

Vertentes do Conhecimento didático	**Resolução do Aluno A analisada por Eloysa, Paula e Carolina**	**Resolução do Aluno B analisada por Eloysa, Paula e Carolina**	**Resolução do Aluno C analisada por Cristina e Rosana**	**Resolução do Aluno D analisada por Cristina e Rosana**
Conhecimento da Matemática	**X**	**X**	**X**	**X**
Conhecimento do Currículo				
Conhecimento do Aluno e da Aprendizagem	**X**	**X**	**X**	**X**
Conhecimento da Prática Letiva	**X**	**X**	**X**	**X**

Fonte: Dados da pesquisa.

Com base nos dados do Quadro 13, conclui-se que, durante as análises de todas as resoluções dos alunos, as discussões e reflexões apresentaram aspectos que auxiliaram a compreender como as vertentes do conhecimento didático se efetivam durante as práticas de ensino. Contudo, considera-se que não houve a mobilização de aspectos envolvendo a vertente do Conhecimento do Currículo, pois, conforme definido por Ponte (2012), trata-se de ações relacionadas à gestão curricular, ou seja, está relacionado à escolha dos conteúdos e os métodos de ensino. Logo, essa não foi a proposta da segunda parte da TAP 3.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo, a compreensão de como o desenvolvimento de um processo de formação continuada pode contribuir para a compreensão dos Entendimentos Essenciais de Raciocínio Matemático para o Ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Assim, elaborou-se a conjectura de que *a análise de tarefas matemáticas resolvidas por alunos possibilita, aos professores participantes de um processo formativo, compreender os Entendimentos Essenciais do raciocínio matemático*. Nesta perspectiva, pretendeu-se, no decorrer desta pesquisa: (a) compreender como os professores reconhecem os processos de Raciocínio Matemático por meio da resolução dos alunos; e (b) identificar e compreender quais as oportunidades de aprendizagem profissional no contexto de um processo de formação continuada, tendo-se, como foco, os Entendimentos Essenciais sobre os processos de Raciocínio Matemático.

Para subsidiar o desenvolvimento da investigação proposta nesta pesquisa, utilizou-se, como pano de fundo, os aspectos apresentados na fundamentação teórica, ou seja, a concepção do que são e como são mobilizados os processos de RM (JEANNOTTE; KIERAN, 2017; CARNEIRO, 2021; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011), os objetivos de aprendizagem (PONTE *et al.* 2007) e os Entendimentos Essenciais (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011) para o desenvolvimento do RM, sendo possível notar algumas características que, implicitamente, estabelecem relações com os pressupostos teóricos definidos sobre o Modelo PLOT (RIBEIRO; PONTE, 2020), assim como o desenvolvimento de Oportunidades de Aprendizagem Profissional, as proposições envolvendo o contexto de uma processo de formação continuada, propiciando reflexões sobre práticas de ensino de matemática (PONTE, 1994. SILVA; SERRAZINA; CAMPOS, 2014. OLIVEIRA; SERRAZINA, 2022) e o desenvolvimento de reflexões sobre algumas práticas de ensino de matemática, considerando as características das vertentes do conhecimento matemático definido por Ponte (2012).

Durante o desenvolvimento desta pesquisa, constatou-se que as resoluções dos alunos possibilitaram identificar fatores que auxiliaram a compreender como os processos de RM são mobilizados por meio das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos. Desta forma, verificou-se que as professoras demonstraram reconhecer os processos de RM com base na argumentação matemática utilizada em cada resolução, pois os argumentos utilizados pelos alunos possibilitaram identificar se houve ou não a mobilização de um determinado processo de RM.

Em relação às Oportunidades de Aprendizagem Profissional, nota-se que o desenvolvimento de um processo de formação continuada estruturado com base no Modelo PLOT (RIBEIRO; PONTE, 2020), oportunizou às professoras desenvolverem compreensões sobre os Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento do RM (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011), por meio das discussões e reflexões promovidas entre os pares ou de modo coletivo, envolvendo todos os participantes do processo formativo. Desta forma, identificou-se e compreendeu-se que as professoras tiveram a oportunidade de aprender umas com as outras, apresentando argumentos matemáticos que facilitam a compreensão dos Entendimentos Essenciais. Percebe-se que o Papel e as Ações desenvolvidas pelo Formador (RIBEIRO; PONTE, 2020), buscou estimular e contribuir para o desenvolvimento de reflexões sobre alguns aspectos que as professoras não haviam identificado e que poderiam contribuir para a compreensão dos processos de RM (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

A estruturação do processo de formação continuada com base no modelo PLOT (Professional Learning Opportunities for Teachers), proposta por Ribeiro e Ponte (2020), viabilizou às professoras participantes a oportunidade de aperfeiçoarem o conhecimento sobre os processos de RM a partir da utilização de registros de prática, propiciando-se, assim, algumas reflexões sobre questões que permeiam o ensino de Matemática, conforme dizem Oliveira e Serrazina (2022). Como consequência, nota-se que este fato apresentou momentos de discussões que, implicitamente, propiciaram contribuições para o desenvolvimento profissional. O desenvolvimento das TAP foi fundamental para o progresso do processo formativo e auxiliou as professoras a aperfeiçoarem as compreensões sobre os processos de raciocínio matemático e o modo como eles são mobilizados durante as práticas de ensino de Matemática.

A utilização do método de Investigação Baseada em Design (IBD) possibilitou, neste ciclo, identificar fatores que contribuem para o processo de ensino de matemática; principalmente em relação ao desenvolvimento do RM, visto que a pesquisa foi realizada a partir dos argumentos que os professores apresentaram, levando em consideração as suas experiências didáticas e o conhecimento matemático que os alunos expressavam por meio das resoluções das tarefas. Ressalta-se que a etapa de análise retrospectiva possibilitou identificar elementos que podem ser refinados na realização de um novo ciclo, visando aperfeiçoar as interpretações acerca dos processos de RM. Considerando o aspecto cíclico da IBD, sugere-se que em novos estudos o formador aprimore momentos de discussão matemática dos conteúdos abordados em cada uma das TAP e realize a análise do processo de formação continuada após a realização de cada um dos encontros, buscando realizar possíveis ajustes na proposta formativa.

Como os resultados desta pesquisa, conclui-se que o desenvolvimento do processo de formação continuada possibilitou aos professores participantes, aperfeiçoarem as compreensões sobre os processos de RM (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; JEANNOTTE; KIERAN, 2017) e, com isso, apresentaram argumentos que contribuíram para a identificação dos Entendimentos Essenciais, promovendo discussões e reflexões que impactam diretamente no processo de ensino de matemática e, também, algumas contribuições para o desenvolvimento profissional.

Dentre as contribuições, pode-se citar que as professoras tiveram a oportunidade de: discutir e refletir sobre práticas de ensino no contexto de sala de aula (ARAMAN; GOMES, 2020); vivenciar momentos em que tinham que identificar os raciocínios desenvolvidos pelos alunos (PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012) e associá-los aos Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento do RM; discutir sobre aspectos envolvendo o desenvolvimento do conhecimento didático (SANTANA; SERRAZINA; NUNES, 2019; PONTE, 2012), propiciando contribuições para o processo de aprendizagem; pensar e discutir coletivamente (NÓVOA, 2019) sobre as dificuldades envolvendo o processo de ensino de Matemática; exercer o papel de professor reflexivo e investigativo (OLIVEIRA; SERRAZINA, 2022), levando em consideração situações vivenciadas em sala de aula; inserir-se em um processo de formação onde o seu papel não é apenas de um mero ouvinte, mas também de um sujeito ativo durante as ações desenvolvidas durante o processo formativo.

Em relação à conjectura elaborada inicialmente, ou seja, que *a análise de tarefas matemáticas resolvidas por alunos possibilita, aos professores participantes de um processo formativo, compreender os Entendimentos Essenciais do raciocínio matemático*, constata-se que ela é válida. Logo, os participantes do processo de formação continuada, ao realizarem as TAP envolvendo a identificação dos processos de RM e a utilização de alguns registros de prática, tiveram a oportunidade de reconhecer e discutir sobre aspectos que auxiliam na mobilização dos Entendimentos Essenciais para o desenvolvimento do RM. Também verificou-se que a realização das TAP auxiliou na concretização de algumas Oportunidades de Aprendizagem Profissional, dentre as quais ser possível identificar, principalmente, momentos de discussões e reflexões envolvendo os raciocínios matemáticos desenvolvidos pelos alunos.

REFERÊNCIAS

ARAMAN, E. M. O.; GOMES, L. F. Desenvolvimento profissional e histórias da matemática: um exemplo a partir das geometrias não euclidianas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo/SP, v. 22, n. 2, p. 452-482, 2020.

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade. **RPEM**, Campo Mourão/ PR, v.09, n.18, p.118-136, jan.-jun. 2020.

BARBOZA, L. C. S.; PAZUCH, V.; RIBEIRO, A. J. Tarefas para aprendizagem de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. **Zetetiké**, Campinas/SP, v. 29, p. 1-25, 2021.

BELLINI, J. A. M. **Processos de raciocínio matemático no Ensino Fundamental: tarefas exploratórias sobre medidas de comprimento.** 2022. 81 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação.** Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 1998.

CARNEIRO, L. F. G. **Processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do Ensino Fundamental.** 2021. 123 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. **A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. Educational Studies in Mathematics,** v. 96, n. 1, p. 1-16, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8. Reston: National Council of Teachers of Mathematics,** 2011.

MANSON, N.J.; Is operations research really research? **Orion**, v. 22, n. 2, p. 155-180, 2006.

MARCATTO, F. S. F. O Desenvolvimento do Professor de Matemática para promover o Raciocínio Matemático. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo/SP, v. 18, p. 1-17, 2021.

MATA-PEREIRA, J. F. D. G. **O Raciocínio matemático em alunos do 9º ano no estudo dos números reais e inequações.** 2012. 163p. Dissertação (Mestrado em Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 781-801, 2018.

MORAIS, R. S. **Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes do 5º ano ao argumentar matematicamente a respeito de figuras geométricas planas.** 2022. 152 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2022.

MOSQUITO, E. M. L. **Práticas Lectivas dos Professores de Matemática do 3º Ciclo do ensino básico.** 2008. 183p. Dissertação (Mestrado em Educação Especialidade de Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

NÓVOA, A. Os Professores e a sua Formação num Tempo de Metamorfose da Escola. **Educação e Realidade**, Porto Alegre, v. 44, n. 3, p. 1-15, 2019.

OLIVEIRA, I; SERRAZINA, L. **Uma reflexão e o professor como investigador.** Disponível em: < https://www.researchgate.net/publication/260942853_A_reflexao_e_o_professor_como_investigador >. Acesso em: 10 mar. 2023.

OLIVEIRA, P. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. **Educação e Matemática**, v. 100, p. 3-9, 2008.

PONTE, J. P. Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. **Educação matemática: Temas de investigação**, Lisboa, p. 185-239, 1992. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/2985 . Acesso em: 11 mar. 2023.

PONTE, J. P. Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In **N. Planas (Ed.), Teoría, crítica y prática de la educación matemática, Barcelona,** p. 83-98. Barcelona, 2012.

PONTE, J. P. O desenvolvimento profissional do professor de Matemática. Educação e Matemática, 1994. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/277201836_O_desenvolvimento_profissional_do_professor_de_Matematica. Acesso em: 12 nov. 2021.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, L.; GUIMARÃES, H. M.; BREDA, A.; GUIMARÃES, F.; SOUSA, H.; MENEZES, L.; MARTINS, M. E. G.; OLIVEIRA, P. A. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC, 2007.

PONTE, J.P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa/PR, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul. 2012.

PONTE, J.P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA. **Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?**. Disponível em: < https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/44393/1/Ponte%2c%20Quaresma%2c%20Mata-Pereira%20EM%202020.pdf >. Acesso em: 22 set. 2021.

PONTE; J. P.; CARVALHO, R.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, v. 25, n. 2, p. 77-98, 2016.

PORTUGAL. **Aprendizagens Essenciais – Ensino Básico**. Lisboa: DGE, 2020.

RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. M. Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. **Zetetiké**, Campinas/SP, v.28, p. 1-20, 2020.

RIVERA, F. D. **Teaching and learning patterns in school mathematics. Dordrecht, Heidelberg,** New York London: Springer, 2013.

SANTANA, E.; SERRAZINA, L.; NUNES, C. Contribuições de um processo formativo para o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos. **Relime - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,** México/México, v. 22, n. 1, p. 11-38, 2019.

SILVA, A. F. G.; SERRAZINA, M. L.; CAMPOS, T. M. M. Formação Continuada De Professores que Lecionam Matemática desenvolvendo a prática reflexiva docente. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1505-1524, 2014.

TREVISAN, A. L.; RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. Professional Learning Opportunities Regarding the Concepto f Funtion in a Pratice-based Teacher Education Program. **IEJME – INTERNATIONAL ELETRONIC JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION**, v. 15, n. 2, p. 1-14, 2020.

VIEIRA, W.; RODRIGUES, M.; SERRAZINA, L. O conhecimento de futuros professores sobre os processos de raciocínio matemático antes e depois de uma experiência de formação. **Quadrante**, v. 29, n. 1, p. 8-35, 2020.

APÊNDICE A – EPISÓDIOS DA PLENÁRIA REALIZADA DURANTE A APLICAÇÃO DA TAREFA EXPLORATÓRIA

EPISÓDIO 1:

F01- Professor: Vejam o seguinte: a figura 1 tem quantos brancos?
F02- Alunos: 2.
F03- Professor: Vou colocar aqui brancos e cinzentos, tá? Brancos, quantos têm na Figura 1?
F04- Alunos: 2.
F05- Professor: Cinzentos?
F06- Alunos: 3.
F07- Professor: Então vou colocar aqui, brancos 2, cinzentos 3. Isso aqui é a Figura 1. Vamos pensar na figura 2. Figuras 2, quantos brancos têm?
F08- Alunos: 2.
F09- Professor: Quantos cinzentos?
F10- Alunos: 6.
F11- Professor: Figura 3, quantos brancos?
F12- Alunos: 2.
F13- Professor: Quantos Cinzentos?
F14- Alunos: 9.
F15- Professor: E a Figura 4, quantos brancos?
F16- Alunos: 2.
F17- Professor: Quantos cinzentos?
F18- Alunos: 12.
F19- Professor: Brancos são quantos mesmo?
F20- Alunos: 2.
F21- Professor: Figura 4, certo? Essa é a ideia que a gente vai utilizar, então. Figura 1, 2 brancos e 3 cinzentos; Figura 2, 2 brancos e 6 cinzentos; Figura 3?
F22- Alunos: 2 brancos e 9 cinzentos.
F23- Professor: Figura 4?
F24- Alunos: 2 brancos e 12 cinzentos.
F25- Professor: Isso; aí a Figura 5? Quantos brancos vai ter a figura 5?
F26- Alunos: 2.
F27- Professor: Então vai ter 2 brancos e quantos cinzentos?
F28- Alunos: 15.
F29- Professor: Quantos?
F30- Alunos:15.
F31- Professor: 15. Por que 15 cinzentos?
F32- Aluno: Porque subiu mais 3.
F33- Professor: Subiu mais 3 onde?
F34- Aluno: Nos cinzentos.
F35- Professor: Mas, aí você utilizou 3 mais quantos para dar 15?
F36- Aluno: 3 mais 12.
F37- Professor: De onde você tirou esse 12?
F38- Alunos: Da Figura 4.
F39- Professor: Da Figura 4! Então você observou que a Figura 4 tinha 12 e aumentou mais ...
F40- Alunos: 3.
F41- Professor: Isso, 12 mais 3 deu 15. 15 cinzentos mais 2 brancos, quanto que dá o total?
F42- Alunos: 17.
F43- Professor: 17! Isso aqui é o número total, certo? Todo mundo concorda agora?
F44- Alunos: Sim.
F45- Professor: Então, 38 está certo? O 38.
F46- Alunos: Não, Sim.
F47- Professor: Tem lógica? Porque o 8 provavelmente... O que você fez para obter o 8?
F48- Aluno: Somei todos os brancos.
F49- Professor: Somou todos os brancos! E na figura 5, você ia somar todos os brancos?
F50- Alunos: Não.
F51- Professor: Não! Porque é uma sequência. Então, você vai continuar observando o que acontece. A quantidades de brancos permanece a ...
F52- Alunos: Mesma.
F53- Professor: O que vai mudar é onde? Na coluna dos ...
F54- Alunos: Cinzentos.
F55- Professor: E você sabe que vai aumentar de quanto?
F56- Alunos: De 3 em 3.
F57- Professor: De 3 em 3. Então, essa é uma propriedade importante, essa questão do 3, certo?
F58- Professor: Então, aqui deu 17.

EPISÓDIO 2

F01- Professor: Segunda pergunta. Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a Figura 10. Explique como você obteve cada resultado. Quem gostaria de explicar?
F02- Maria: Pra eu e minha parceira que a gente estava fazendo junto, a gente obteve esse resultado fazendo contas, sempre aumentando mais conforme o resultado. É uma explicação, tipo assim, tinha 30 aí a gente subiu mais 3. Sempre subindo mais 3 para chegar no resultado. Pra gente fazer o desenho a gente utilizou a figura, as contas. Que as contas deram o nosso resultado. Então, é isso.
F03- Professor: Quantos brancos?
F04- Maria: 2.
F05- Professor: Cinzentos?
F06- Maria: 30.
F07- Professor: Muito bem! Obrigado. Mais alguém quer explicar? Miguel? Não quer? Vai lá, a sua ideia é bacana! Ou se o parceiro conseguir, pode ir o parceiro também.
F08- Miguel: Eu percebi que 5 é metade do que 10. Pra ficar 10 eu tive que colocar de 3 em 3 até chegar 30. Então, se a ideia da Figura 5 que é 15, eu somei a Figura 5 mais a Figura 5 sem contar os brancos, que a Figura 5 tem 15 mais 15 é 30. E 5 mais 5 é 10, então 10 é a figura e 30 é o resultado. Mais os azulejos brancos que eu não contei que ficaram 2.
F09- Professor: Beleza, obrigado! Tem mais alguém que apresentou uma ideia bem bacana. Agora, o professor não vai lembrar quem que é. É vocês, não é? A ideia de dobrar a quantidade. Alguém apresentou essa ideia. Foi vocês? Não! Vish, agora o professor não vai lembrar quem que é. Alguém apresentou a ideia se a Figura 5 tem? Quanto tem a Figura 5?
F10- Aluno: 17.
F11- Professor: 17! E aí dobrou a quantidade. Foi? Vai lá, fazendo um favor, explicar. Vai lá fazendo um favor; é legal a ideia. Vai, rapaz! Faz favor! É bem legal a sua ideia. Mostra para os colegas. Oh, essas ideias são bem bacanas tá! Então você sabendo a Figura 2, perdão a Figura 4, a Figura 5 têm quantos?
F12- Alunos: 17.
F13- Professor: 17! Então, vocês finalizaram. Quantos têm? É a Figura 10, é isso? Figura 10 [escrevendo no quadro]. Quantos brancos tem a figura 10?
F14- Alunos: 2.
F15- Professor: 2! Cinzentos, quantos que têm?
F16- Alunos: 30.
F17- Professor: 30! Isso? Agora, por que tem 30? Alguém fez o desenho para verificar se dá 30 mesmo, na Figura 10? 32 que é o total, isso? Total 32. Mas alguém verificou, fez o desenho até a Figura 10?
F18- Alunos: Sim.
F19- Professor: Alguém fez Figura 1, Figura 2, Figura 3 ...
F20- Aluno: Não.
F21- Professor: Figura 4, Figura 5, Figura 6, Figura 7, Figura 8, Figura 9, Figura 10? Não! Mas poderia ser um processo, tá? Mas, nas explicações depois o professor consegue observar com detalhes as informações, porque é muita coisa que ele falou ali. Mas, uma ideia é você observar o quê? A regularidade, o padrão. Vocês já perceberam que aumenta de quanto em quanto?
F22- Alunos: De 3 em 3.
F23- Professor: De 3 em 3? Isso! Então, essa é uma propriedade importante. A quantidade 2, vai aumentar ou permanece?
F24- Alunos: Permanece.
F25- Professor: Permanece! Então a gente poderia fazer assim! [professor iniciar representar algebricamente no quadro] Figura 1. Quantos brancos tem na Figura 1?
F26- Alunos: 2.
F27- Professor: Mais quantos cinzentos?
F28- Alunos: 3.
F29- Professor: Total daria quanto?
F30- Alunos: 5.
F31- Professor: Figura 2, quantos brancos?
F32- Alunos: 2.
F33- Professor: 2! Mais quantos cinzentos?
F34- Alunos: 6.
F35- Professor: Que vai dá quanto?
F36- Alunos: 8.
F37- Professor: 6. Por que 6?
F38- Aluno: Porque deu na 2.
F39- Professor: Na Figura 1, deu quanto?
F40- Alunos: 3.
F41- Professor: 3! Aumento?
F42- Aluno: Mais 3.
F43- Professor: Mais 3! Figura 3? Poderia ser quantos brancos?
F44- Alunos: 2.
F45- Professor: 2! Mais quantos cinzentos?
F46- Alunos: 9.
F47- Professor: 9! Total?
F48- Alunos: 11.
F49- Professor: 11! Figura 4? Brancos?
F50- Alunos: 2.
F51- Professor: Mais?
F52- Alunos: 12.
F53- Professor: 12! Por que 12?
F54- Aluno: Aumento 3.
F55- Professor: Aumentou 3! Figura 5? Quanto que é na Figura 5?
F56- Aluno: 17.
F57- Professor: 2 brancos. Brancos, são quantos?
F58- Alunos: 2.
F59- Professor: 2, mais quantos cinzentos?
F60- Alunos: 15.
F61- Professor: 2 mais 15?
F62- Alunos: 17.
F63- Professor: 17. Então, até a Figura 5 eu já sei. Figura 6? Quantos Brancos?
F64- Alunos: 2.
F65- Professor: 2 mais quantos cinzentos?
F66- Alunos: 18.
F67- Professor: 18. 18 mais 2?
F68- Alunos: 20.
F69- Professor: 20. Alguém pensou desta forma?
F70- Alunos: Não.
F71- Professor: Porque é uma forma que você conseguiria obter, né? Oi? Sem ter que fazer a figura. Poderia. A figura é uma estratégia? É uma estratégia válida. Essa aqui é outra estratégia. Figura 7? Quantos seria brancos?
F72- Alunos: 2.
F73- Professor: Mais quantos cinzentos?
F74- Alunos: 21.
F75- Professor: 21. Total? 21 mais 2?
F76- Alunos: 23.
F77- Professor: 23! Figura 8? Quantos brancos?
F78- Alunos: 2.
F79- Professor: Mais quantos cinzentos?
F80- Alunos: 24.
F81- Professor: Total?
F82- Alunos: 26.
F83- Professor: Figura 9? Brancos?
F84- Alunos: 2.

F85- Professor: Mais cinzentos?
F86- Alunos: 27.
F87- Professor: Total?
F88- Alunos: 29.
F89- Professor: E a Figura 10? Brancos, quantos brancos?
F90- Alunos: 2.
F91- Professor: Mais quantos cinzentos?
F92- Alunos: 30.
F93- Professor: 30. Igual a?
F94- Alunos: 32.
F95- Professor: 32. E aqui a gente tem que ouvir a fala do Miguel com muita calma. Ele falou muito rápido. Você falou Miguel que sabia que a Figura 5 tinha quantos?
F96- Miguel: 17.
F97- Professor: Quantos cinzentos?
F98- Miguel: 15.
F99- Professor: 15. Se a Figura 5 tinha 15, a Figura 10 teria quantos cinzentos?
F100- Alunos: 30.
F101- Professor: 30. Você também utilizou esta ideia, né? Seria o quê? O dobro. Se a Figura 5 tem 15, 10 é o dobro de 5, então teria quanto? 30. 2 é constante; permanece o mesmo, então 30 mais 2?
F102- Alunos: 32.
F103- Professor: Certo? Então a Figura 10, teria 32.

EPÍSÓDIO 3

F01- Professor: O item C. Quem gostaria de explicar o item C? Alguém pode fazendo um favor. Faz favor vem explicar o item C.
F02- Maria: A gente fez, que a gente percebeu não dava se a gente fosse subindo de 3 em 3, não dava 38. Daí a gente pensou e a gente viu que tinha mais 2 sobrando e a gente pensou que o 2 sobrando seria os brancos. Que aí a gente tava escrevendo a resposta que ela fala o que a gente pensou. Que a gente viu e gostaria que fosse, quer que eu fale a resposta?
F03- Professor: Pode.
F04- Maria: Os brancos e os cinzentos estão misturados com os outros misturados que dão 38.
F05- Professor: Deu 38, então? Conseguiu chegar em 38?
F06- Maria: Sim.
F07- Professor: Qual figura que tem 38?
F08- Maria: A figura?
F09- Professor: É. Porque a pergunta é qual figura terá 38?
F10- Maria: [pensa e responde] A Figura 9.
F11- Professor: 9? Mas escuta, se a Figura 10, quantos tem a Figura 10? Olha lá no quadro.
F12- Alunos: 32.
F13- Professor: Quantos tem o total?
F14- Maria: 32.
F15- Professor: 32! Seria a Figura 9 com 38?
F16- Maria: [pensa e responde] Não, não seria.
F17- Professor: Não, porque a Figura 9 tem quantos azulejos? Olha lá no quadro. O total?
F18- Maria: A Figura 9 tem 29.
F19- Professor: 29! Muito bem. Miguel quer ir lá, explica pra nó lá.
F20- Miguel: A resposta é 12, porque se 10 é 30. 12 vai somar mais 6, porque fica 3 mais 3 em cada figura que aumenta. Então a Figura 12 vai ficar 36, mais os azulejos brancos vai ficar 8. Porque 6 com 2 é 8. Então vai ser 38.
F21- Professor: Olha lá, você consegui explicar observando, olha no quadro fazendo um favor. A Figura 10, aí. Você consegue explicar utilizando essa informação?
F22- Miguel: Ficando 2 aqui [mostra embaixo do algarismo 0 da notação], vai somar mais 6 aqui [mostrando embaixo do 30].
F23- Professor: Fica de ladinho para os colegas conseguirem observar.
F24- Miguel: Esse [mostrando o) 10 vai virar 12, aí no 12 cada figura que aumenta vai subindo mais 3 [desenhando o 3 embaixo do 30], então vai aumentar mais 6 aqui [mostrando embaixo do algarismo 0 de 30]. Que 2 mais 36 é igual a 38, que aqui é o que está pedindo.
F25- Professor: Hum, então qual figura tem 38?
F26- Miguel: A 12.
F27- Professor: 12. Vocês concordam com isso?
F28- Alunos: Sim.
F29- Professor: Olha o que o Miguel falou. A Figura 10, tem quantos cinzentos? Porque a partir desta informação, se vocês tivessem estruturado desta forma, isso aqui já ajuda vocês bastante. Embora, o Miguel conseguiu obter essa informação no pensamento dele, no raciocínio dele ali, ele conseguiu chegar nessa ideia aqui [referindo-se a expressão do]. Se você sabe que na Figura 10, tem quantos cinzentos?
F30- Alunos: 30.
F31- Professor: Vocês já perceberam que a regra é, os cinzentos vai aumentando de quanto em quanto?
F32- Aluno: 3.
F33- Professor: De 3 em 3. Então olha o que ele fez, ele aumentou 3 aqui, deu quanto? Olha Figura 11, vamos pensar na Figura 11. Quantos brancos têm na Figura 11?
F34- Alunos: 2.
F35- Professor: 2, porque esse é constante, mais quantos que vai aumentar aqui?
F36- Alunos: 3.
F37- Professor: 3. Então se é 30 cinzentos mais 3, vai dá quanto?
F38- Alunos: 33.
F39- Professor: 33. 33 com mais 2?
F40- Alunos: 35.
F41- Professor: 35. Figura 12. Quantos brancos?
F42- Alunos: 2.
F43- Professor: 2. Mais quantos cinzentos?
F44- Alunos: 36.
F45- Professor: 36. 36 com mais 2?
F46- Alunos: 38.
F47- Professor: 38. Ou seja, com essa ideia o Miguel conseguiu chegar. Qual figura teria 38?
F48- Alunos: 12.
F49- Professor: Figura 12. Certo? Compreenderam? Agora, deixa eu perguntar para vocês. Ah, mais eu não consegui chegar nesta ideia, daria para utilizar a partir do número? Quantas figuras tem no total, perdão quantos azulejos têm? 38. É isso? O total de azulejos? Qual que é o total de azulejos?
F50- Alunos: 38.
F51- Professor: 38. Você quer saber a figura? O número da figura? Qual a relação número da figura e número total de azulejos? Existe relação entre o número de azulejos e o número da figura?
F52- Aluno: Não.
F53- Professor: Não existe nenhuma relação, será?
F54- Alunos: Sim.
F55- Professor: Oh, e alguém falou isso também. Foi você que falou essa ideia. Depois, você reformulou e acabou falando um pouquinho mais. Mas, você falou essa ideia. Oh! A figura o total de azulejos vai ser quantos?
F56- Alunos: 38.
F57- Professor: 38, esse aqui é o total. Mas você sabe o número da figura? Sabe qual figura tem 38?
F58- Alunos: 12.
F59- Professor: Vamos supor, pensa em outra coisa, esqueci isso aqui. Nós já sabemos que é 12, supondo que você não sabe ainda que é 12, tá. Você sabe a

quantidade da figura?
F60- Alunos: Não.
F61- Professor: Não. Mas vocês sabem que qualquer figura vai ter quantos brancos?
F62- Alunos: 2.
F63- Professor: 2. Mais o que? Quanto que tem que ter aqui para dar 38?
F64- Alunos: 36.
F65- Professor: Quanto que tem que ter aqui?
F66- Alunos: 36.
F67- Professor: 36 com mais 2, deu quanto?
F68- Alunos: 38.
F69- Professor: 38. Oh, eu já descobrir isso aqui. Agora, o número de cinzentos. Pensa nos números cinzentos. Observa aqui.
F70- Alunos: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36.
F71- Aluno: 39.
F72- Professor: O que acontece com esses números?
F73- Aluno: [fala não audível].
F74- Professor: Duplicam? Será que seria isso? O que?
F75- Aluno: É tipo a tabuada do 3.
F76- Professor: Tipo a tabuada do 3. Concordam com isso?
F77- Alunos: Sim.
F78- Professor: Ou seja, esses números são múltiplos de 3. São múltiplos de 3? 3 vezes quanto que 6?
F79- Alunos: 1.
F80- Professor: 3 vezes 1. 3 vezes quanto que dá 6?
F81- Alunos: 2.
F82- Professor: Então, nós poderia fazer o que? 36 é múltiplo de 3, não é? Concordam? Ou pode verificar. Se ele é múltiplo, vamos verificar se ele é divisível. O que é ser divisível? Como que nós determinamos se um número é divisível?
F83- Aluno: Dividir.
F84- Professor: Dividir. Então, pega lá. 36 dividido por ...
F85- Aluno: 3.
F86- Professor: Por 3. 36 dividido por 3, vai dá quanto?
F87- Alunos: 1.
F88- Professor: 3 por 3?
F89- Alunos: 1.
F90- Professor: 1 vez 3?
F91- Alunos: 3.
F92- Professor: Sobra quanto?
F93- Alunos: 0.
F94- Professor: Abaixa o?
F95- Alunos: 6.
F96- Professor: Quantas vezes o 3 cabe dentro do 6?
F97- Alunos: 2.
F98- Professor: Duas, sobra zero. Então, figura [igual, escrevendo no quadro], 2 mais 3 vezes quanto? 12. Então, esse aqui [circulando o 12] acaba sendo o número da figura. Por que ó... [mostrando a expressão referente à Figura 1] 3 vezes, não é a Figura 1, aqui não é a Figura 1?
F99- Alunos: Sim.
F100- Professor: Figura 1, 3 vezes 1, 3. Figura 2, 3 vezes 2, 6. Figura3, 3 vezes 3?
F101- Alunos: 9.
F102- Professor: Figura 4, 3 vezes 4?
F103- Alunos: 12.
F104- Professor: Figura 5, 5 vezes 3?
F105- Alunos: 15.
F106- Professor: Figura 6, 6 vezes 3?
F107- Alunos: 18.
F108- Professor: Figura 7, 7 vezes 3?
F109- Alunos: 21.
F110- Professor: Figura 8, 8 vezes 3?
F111- Alunos: 24.
F112- Professor: Figura 9, 9 vezes 3?
F113- Alunos: 27.
F114- Professor: Figura 10, 10 vezes 3?
F115- Alunos: 30.
F116- Professor: Figura 11, 11 vezes 3?
F117- Alunos: 33.
F118- Professor: Figura 12, 12 vezes 3?
F119- Alunos: 36.
F120- Professor: Somando com mais 2, dá 38. Tá. Então existe a relação entre o que? O número da figura com o número total de azulejos. É só pegar o número da figura vezes quanto?
F121- Alunos: Vezes 3.
F122- Professor: Vezes 3, porque vocês falaram que está aumentando de 3 em 3. E esse resultado soma com 2, que você vai obter o número total de azulejos.

EPISÓDIO 4

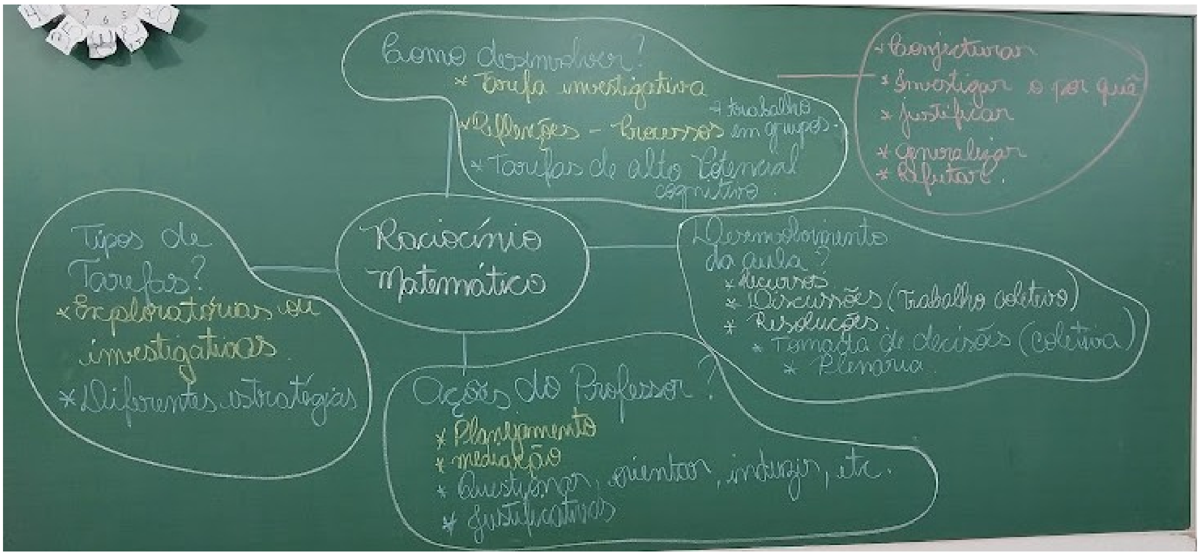
F01- Professor: O item D perguntava o seguinte, considerando a regularidade das figuras, existe alguma figura com um total de 66 azulejos?
F02- Alunos: Sim.
F03- Professor: Justifique a sua resposta. O que vocês responderam?
F04- Aluno: Não.
F05- Professor: Sim ou Não?
F06- Alunos: Sim.
F07- Professor: Apareceu a resposta de sim. Então, vamos pensar agora nesse 66. Aqui nós já pensamos em uma regra [mostrando na expressão referente a Figura 6] geral, vale para todos?
F08- Alunos: Sim.
F09- Professor: A mesma regra que utilizei aqui, também utilizei aqui, o que mudou? O número da figura, não é isso?
F10- Aluno: Sim.
F11- Professor: A figura que está mudando. A posição, a Figura 1, a Figura 2, Figura 3. Mas, nós já relatamos que a figural tal é igual, quantos azulejos brancos?
F12- Alunos: 2.
F13- Professor: Mais o que?
F14- Aluno: 3.
F15- Professor: 3. Não é múltiplo de 3?
F16- Alunos: Sim.
F17- Professor: Não é, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36. Ou seja, a segunda parte aqui, a segunda parcela todos são múltiplos de 3. Então, eu vou pensar 3 vezes algum número. Só que eu sei que a figura tal, não sei qual é, tem, é igual a quanto? Quanto que está supondo que ela tem aí? Sessenta e ...
F18- Alunos: Seis.
F19- Professor: É uma suposição. Eu quero saber se isso dá certo. 66, beleza. Quantos brancos desses 66?
F20- Alunos: 2.
F21- Professor: Então, 66 menos 2, vai dá quanto?
F22- Alunos: 64.
F23- Professor: 64 é múltiplo de 3?
F24- Alunos: Não.
F25- Professor: Por que não é múltiplo de 3? Como que eu sei se ele é múltiplo de 3? Qual que é a operação inversa da multiplicação?
F26- Aluno: Vezes
F27- Aluno: Divisão.
F28- Professor: Da multiplicação é a?
F29- Aluno: Mais.
F30- Professor: Não. Alguém falou aí.
F31- Aluno: Divisão.
F32- Professor: Divisão. Então, a gente pode pegar aqui 64 dividido por 3. Quantas vezes o 3 cabe dentro do 6?
F33- Alunos: 2.
F34- Professor: 2. 2 vezes 3?
F35- Alunos: 6.
F36- Professor: 6 tira 6, sobra 0, abaixa o 4. 3 cabe dentro do 4?
F37- Alunos: Não.
F38- Professor: Opa, não! Não cabe?
F39- Alunos: Sim.
F40- Professor: Cabe. Quantas vezes?
F41- Alunos: 1.
F42- Professor: 1 vezes 3, 3. Vai sobrar quanto?
F43- Alunos: Vai sobrar 1.
F44- Professor: E agora, 1 dá para dividir por 3?
F45- Alunos: Não.
F46- Alunos: Sim
F47- Professor: Dá para dividir 1 por 3?
F48- Alunos: Sim.
F49- Alunos: Não.
F50- Professor: Dá! Mas vai dá parte inteira?
F51- Alunos: Não.
F52- Professor: Não. Vai dar decimal, não vai?
F53- Alunos: Sim.
F54- Professor: Então quer dizer, deu quantos azulejos [quis dizer quantas figuras]? 21. A Figura 21 , perdão 21 vezes 3 dá 63. 63 mas aqui sobrou 1, não teria que continuar dividindo esse 1 por 3, pra dá exato? Então na verdade isso aqui dá 21 vírgula alguma coisinha. Então, é possível obter a figura que tenha 66 azulejos?
F55- Alunos: Sim.
F56- Alunos: Não.
F57- Professor: Tem como obter 21 figuras e mais um pouquinho, um pedacinho?
F58- Alunos: Sim.
F59- Alunos: Não.
F60- Professor: Não! Têm?
F61- Aluno: Não.
F62- Professor: Ou é 21 ou é 22. Tá! Se você pensar na Figura 22, oh! Figura 22, quantos brancos?
F63- Alunos: 2.
F64- Professor: 2 mais 3 vezes 22. Quanto que dá 22 vezes 3?
F65- Alunos: 64.
F66- Professor: 64? 22 vezes 3?
F67- Aluno: 66.
F68- Professor: 66. Ué professor, mas deu 66. 66 o quê?
F69- Aluno: Azulejos.
F70- Professor: Cinzentos. E os 2 brancos? Tem que somar, não têm? Por que perguntou na figura? 66 com mais 2 dá quanto?
F71- Alunos: 68.
F72- Professor: 68. Então, é possível obter uma figura com 66?
F73- Alunos: Não.
F74- Professor: O total? 66 cinzentos ok, dá certo. Mas 66 azulejos no total não é possível.

EPISÓDIO 5

F01- Professor: O último item, o item E, perguntava com base na observação da sequência de figuras construa uma sequência numérica com 10 termos, explique qual regularidade você utilizou para escrever. Aqui eu acho que a maioria acabou utilizando o quê? O que observou na sequência?
F02- Aluno: 3.
F03- Professor: De 3 em 3. A maioria que resolveu, acabou utilizando este conceito. Então, a sequência ficaria assim: Qual que é o primeiro termo?
F04- Alunos: 3.
F05- Professor: Qual é o primeiro termo?
F06- Alunos: 5.
F07- Professor: Segundo termo?
F08- Alunos: 8.
F09- Professor: Por que 8?
F10- Alunos: Mais 3.
F11- Professor: 8. Terceiro termo?
F12- Alunos: 11.
F13- Professor: 11. Por que 11?
F14- Alunos: Porque mais 3.
F15- Professor: Mais 3. Melhora um pouquinho este mais 3.
F16- Aluno: Mais 3 cinzentos.
F17- Professor: O que você somou com mais 3? O que você somou com mais 3 para dar 11?
F18- Alunos: 8.
F19- Professor: 8. Não é isso?
F20- Alunos: Sim.
F21- Professor: Próximo termo?
F22- Alunos: 14.
F23- Professor: Quinto termo?
F24- Alunos: 17.
F25- Professor: Sexto termo?
F26- Alunos: 20.
F27- Professor: Sétimo termo?
F28- Alunos: 23.
F29- Professor: Oitavo termo?
F30- Alunos: 26.
F31- Professor: Nono termo?
F32- Alunos: 29.
F33- Professor: Décimo termo?
F34- Alunos: 32.
F35- Professor: 32. Essa então é a sequência que poderia ser escrita. Certo? Porque aqui, quem tivesse utilizado essa ideia já conseguiu obter os termos aqui também, ou poderia utilizar essa ideia que vocês pensaram. Vai aumentando de 3 em 3. E isso é geral? Posso dizer que é uma generalização? Sempre vai aumentar de 3 em 3?
F36- Alunos: Sim.
F37- Professor: Em qualquer situação vai aumentando de 3 em 3?
F38- Alunos: Sim.
F39- Alunos: Não.
F40- Professor: Não é uma sequência?
F41- Alunos: Sim.
F42- Professor: Não é uma regra?
F43- Alunos: Sim.
F44- Professor: Qual que é a regra?
F45- Alunos: De 3 em 3.
F46- Professor: Aumentar de 3 em 3.

APÊNDICE B – ESQUEMA ELABORADO COLETIVAMENTE DURANTE O FECHAMENTO DO PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA

Figura 22 – Esquema sobre o desenvolvimento do Raciocínio Matemático



Fonte: Dados da Pesquisa.

ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO EDUCACIONAL

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Contribuições de um processo formativo para professores dos anos iniciais visando a compreensão dos entendimentos essenciais de raciocínio matemático
Título do Produto/Processo Educacional	Desenvolvendo compreensões sobre os processos de raciocínio matemático: uma proposta de formação para os Anos Iniciais
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Leandro Quirino dos Anjos
	Orientador/Orientadora: Eliane Maria de Oliveira Araman
	Outros (se houver):
Data da Defesa	31/03/2023

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *Apenas um item pode ser marcado. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	( ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.	( ) Local ( ) Regional (X) Nacional ( ) Internacional Justificativa (*obrigatória*): O Produto Educacional fica disponível no repositório institucional podendo ser acessado livremente a qualquer tempo e lugar.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do	( ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um

discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *Apenas um item pode ser marcado.	contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada *Apenas um item pode ser marcado.	( ) Econômica; ( ) Saúde; (X) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; ( ) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.	(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (X) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. (X) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	**Instituição**
Eliane Maria de Oliveira Araman	UTFPR
Alessandro Jacques Ribeiro	UFABC
André Luis Trevisan	UTFPR

ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) PARA OS RESPONSÁVEIS

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Coordenação do PPGMAT
UTFPR Campus Cornélio Procópio e Londrina

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) PARA OS RESPONSÁVEIS

Título da pesquisa: Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática
Pesquisador(es/as) ou outro (a) profissional responsável pela pesquisa, com Endereços e Telefones:
Eliane Maria de Oliveira Araman, Avenida Alberto Carazzai, 1640 CEP 86300-000 – Cornélio Procópio – Pr (43) 991453870

Local de realização da pesquisa: Escola Municipal Nilo Peçanha.
Endereço: R. Tieko Hamada, 424 – Jardim Hamada, Marialva – PR, 86990-000.
Telefone: (44) 3232 – 3279.

A) INFORMAÇÕES AO PARTICIPANTE

Gostaríamos de convidar o aluno pelo qual você é responsável a participar da pesquisa **"Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática"**, a ser realizada em aulas de matemática, da escola participante. As informações sobre a pesquisa seguem abaixo:

1. Apresentação da pesquisa.

Esta pesquisa visa o estudo de ambientes educacionais e tarefas exploratórias para o ensino e a aprendizagem matemática pensado a partir de um conjunto de fatores, com potencial para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos e, em consequência disso, a aprendizagem matemática. Nosso propósito é caracterizar o raciocínio matemático e seus processos, pensar tarefas que o integre nas aulas de matemática, promover formação de professores que implementem tais ações em salas de aula e investigar dados oriundos das aulas resultantes desses processos.

2. Objetivos da pesquisa.

O objetivo dessa pesquisa é compreender de que modo a realização de tarefas exploratórias pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes, bem como de que forma as ações dos professores apoiam esse processo.

3. Participação na pesquisa.

A participação do aluno pelo qual você é responsável é muito importante e ela se dará no contexto das próprias aulas de Matemática. Nós queremos ver que tipo de resoluções ele

apresenta, que estratégias utiliza para resolver as tarefas, ou seja, qual é o seu raciocínio. Fazemos essa pesquisa para analisar se as tarefas são adequadas para o ano em que ele estuda, se são muito difíceis ou muito fáceis. Queremos ver também quais conhecimentos matemáticos ele usa para resolvê-las e como você pensa e organiza suas ideias. Esta pesquisa pode trazer vários benefícios para ele e também para outros alunos, pois vai ajudar os professores de Matemática a proporem tarefas mais desafiadoras que ajudem os alunos a compreenderem os conceitos matemáticos. Para nossa pesquisa, precisamos de fotocópias das tarefas e áudios das discussões promovidas durante a resolução das tarefas. Informamos que vamos manter o sigilo sobre o nome dele e o seu e também dessas fotocópias e áudios. Não há riscos em participar da pesquisa, ele vai fazer a mesma coisa que sempre faz nas aulas, resolver as tarefas entregues pelo professor. Não há custos envolvidos, nem previsão de ressarcimento. Talvez ele sinta um pouco de vergonha por perceber que a sua discussão está sendo gravada. Mas, não se preocupe, ele não será avaliado ou julgado, e esse material não interfere em sua nota. Apenas nos ajudará a compreender melhor seu raciocínio.
Você precisa concordar voluntariamente em participar dessa pesquisa. Caso você aceite participar, ele vai receber algumas tarefas matemáticas durante as aulas e vai resolvê-las, em duplas, grupos ou individualmente. Durante as resoluções, serão feitas gravações de áudios dele e seus colegas resolvendo. O tempo que vai levar vai ser em torno de quatro a seis aulas, dependendo do tipo das tarefas. Se ele não quiser participar, não se preocupe, ele vai resolver as tarefas, mas não iremos gravar ele ou seu grupo, nem usar as resoluções que ele fizer.

4. Confidencialidade.

O nome do aluno pelo qual você é responsável e o seu não serão divulgados de forma alguma. Suas informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade dos envolvidos.

5. Riscos e Benefícios.

***5a) Riscos:** Considera-se um risco mínimo de constrangimento durante a coleta de dados, podendo o participante optar por sua não participação na pesquisa, sem prejuízo pedagógico.*

***5b) Benefícios:** Os benefícios esperados são de contribuir de forma significativa para a aprendizagem dos alunos e para a formação de professores, visto que envolve a implementação de tarefas exploratórias diferenciadas, que estimulam a participação ativa do aluno e desenvolvimento de habilidades como a formulação de hipóteses, a busca de soluções viáveis, o uso dos recursos com eficácia, a organização e o trabalho em grupos, enfim, vários componentes que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático.*

6. Critérios de inclusão e exclusão.

6a) Inclusão: *Alunos que, juntamente com seus responsáveis, autorizarem a coleta de dados durante as aulas.*

6b) Exclusão: *Não se aplica.*

7. Direito de sair da pesquisa e a esclarecimentos durante o processo.

Esclarecemos que o aluno pelo qual você é responsável pode deixar o estudo a qualquer momento assim como, pode solicitar esclarecimentos em qualquer etapa da pesquisa. Tanto ele quanto você têm a liberdade de recusar ou retirar o seu consentimento a qualquer momento sem penalização para seu aprendizado nem sua avaliação. Caso não deseje participar, ou interromper sua participação, você continuará participando das aulas normalmente, e suas resoluções não serão usados pelos pesquisadores. Os resultados da pesquisa poderão ser de seu conhecimento, bastando fazer a manifestação de interesse:

( ) quero receber os resultados da pesquisa (email para envio :____________________)
( ) não quero receber os resultados da pesquisa

Nome do aluno pelo qual você é responsável: ______________________________________

Dados e assinatura do responsável:
Nome Completo: ____
RG:______________Data de Nascimento:___/___/_____Telefone:_____________________
Endereço: ____
CEP: ________________ Cidade:____________________ Estado: _________________
Assinatura: _____________________________________ Data: ___/___/______

Eu declaro ter apresentado o estudo, explicado seus objetivos, natureza, riscos e benefícios e ter respondido da melhor forma possível às questões formuladas.

Nome completo: **Leandro Quirino dos Anjos**
Assinatura pesquisador (a): _________________ Data:___/___/__
(ou seu representante)

Para todas as questões relativas ao estudo ou para se retirar do mesmo, poderão se comunicar com Eliane Maria de Oliveira Araman, via e-mail: elianearaman@utfpr.edu.br ou telefone: (43) 991453870.

ANEXO C – TERMO DE CONSENTIMENTO PARA USO DE IMAGEM E SOM DE VOZ (TCUISV)

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Coordenação do PPGMAT
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio e Londrina

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA USO DE IMAGEM E SOM DE VOZ (TCUISV)

Título da pesquisa: Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática
Pesquisador(es/as) ou outro (a) profissional responsável pela pesquisa, com Endereços e Telefones:
Eliane Maria de Oliveira Araman, Avenida Alberto Carazzai, 1640 CEP 86300-000 – Cornélio Procópio – Pr (43) 991453870
André Luis Trevisan, Avenida dos Pioneiros, 3131 CEP 86036-370 - Londrina – PR, (43) 996931595

Local de realização da pesquisa: Escola Municipal Nilo Peçanha
Endereço: R. Tieko Hamada, 424 – Jardim Hamada, Marialva - PR, 86990-000. Telefone: (44) 3232-3279.

A) INFORMAÇÕES AO PARTICIPANTE

Gostaríamos de convidá-lo(a) a participar da pesquisa **"Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática"**, a ser realizada em aulas de matemática, da escola participante. As informações sobre a pesquisa seguem abaixo:

1. Apresentação da pesquisa.

Esta pesquisa visa o estudo de ambientes educacionais e tarefas exploratórias para o ensino e a aprendizagem matemática, desde a educação Básica até o Ensino Superior, pensado a partir de um conjunto de fatores, com potencial para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos e, em consequência disso, a aprendizagem matemática. Nosso propósito é caracterizar o raciocínio matemático e seus processos, pensar tarefas que o integre nas aulas de matemática, promover formação de professores que implementem tais ações em salas de aula e investigar dados oriundos das aulas resultantes desses processos.

2. Objetivos da pesquisa.

O objetivo dessa pesquisa é compreender de que modo a realização de tarefas exploratórias pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes, bem como de que forma as ações dos professores apoiam esse processo. Por isso, o ambiente educacional da sala de aula é o local adequado para a coleta dos dados.

3. Participação na pesquisa.

Sua participação é muito importante e ela se dará a partir da sua participação nas aulas regulares, conforme cronograma da disciplina, pela realização das atividades propostas. Em algumas situações poderão ser realizadas gravação de vídeos, áudios, fotografias de ambiente da sala de aula e solicitação de registro escritos e digitais dos participantes. Esclarecemos que sua participação é totalmente voluntária, podendo você recusar-se a participar ou mesmo desistir da participação a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo na sua avaliação durante a disciplina. Caso opte por não participar da pesquisa: (i) não será feita gravação em áudio nas equipes em que você estiver inserido; (ii) você será excluído do campo de alcance da câmera em momentos de filmagem (eventualmente, se alguma imagem for registrada, o pesquisador compromete-se em utilizar recursos como tarja preta para omitir a sua identificação); (iii) sua produção escrita será coletada normalmente (visto que se trata de atividades usuais de sala de aula, parte do planejamento pedagógico da disciplina), porém não serão utilizadas pelo pesquisador para fins de pesquisa. A utilização dos dados coletados se dará exclusivamente para fins da pesquisa, sendo que os resultados poderão compor publicações científicas de nossa área de estudo, a Educação Matemática.

4. Confidencialidade.

Seu nome não será divulgado de forma alguma. Suas informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar sua identidade.

5. Riscos e Benefícios.

5a) Riscos: *Considera-se um risco mínimo de constrangimento durante a coleta de dados, podendo o participante optar por sua não participação na pesquisa, sem prejuízo pedagógico.*

5b) Benefícios: *Os benefícios esperados são de contribuir de forma significativa para a aprendizagem dos alunos e para a formação de professores, visto que envolve a implementação de tarefas exploratórias diferenciadas, que estimulam a participação ativa do aluno e desenvolvimento de habilidades como a formulação de hipóteses, a busca de soluções viáveis, o uso dos recursos com eficácia, a organização e o trabalho em grupos, enfim, vários componentes que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático.*

6. Critérios de inclusão e exclusão.

6a) Inclusão: *Professores que, por iniciativa própria, inscreverem-se nos projetos de formação continuada acima mencionados; alunos desses professores, que, juntamente com seus responsáveis, autorizarem a coleta de dados durante as aulas.*
6b) Exclusão: *Não se aplica.*

7. Direito de sair da pesquisa e a esclarecimentos durante o processo.

Esclarecemos que você pode deixar o estudo a qualquer momento assim como, pode solicitar esclarecimentos em qualquer etapa da pesquisa. Você tem a liberdade de recusar ou retirar o seu consentimento a qualquer momento sem penalização para seu aprendizado nem sua avaliação. Caso não deseje participar, ou interromper sua participação, você continuará participando das aulas normalmente, e não lhe serão tomadas fotos, gravações, áudios e nem seus apontamentos serão usados pelos pesquisadores. Os resultados da pesquisa poderão ser de seu conhecimento, bastando fazer a manifestação de interesse:

( ) quero receber os resultados da pesquisa (email para envio :___________________)
( ) não quero receber os resultados da pesquisa

8. Ressarcimento e indenização.

A pesquisas não tem custo para os participantes e, portanto, não inclui ressarcimento, mas esclarecemos que o direito à indenização é obrigatório, se eventualmente a pesquisa ocasionar algum tipo de dano ao participante, comprovado por meio de provas e meios legais.

B) CONSENTIMENTO

Eu declaro ter conhecimento das informações contidas neste documento e ter recebido respostas claras às minhas questões a propósito da minha participação direta (ou indireta) na pesquisa e, adicionalmente, declaro ter compreendido o objetivo, a natureza, os riscos, benefícios, ressarcimento e indenização relacionados a este estudo.
Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo, permitindo que os pesquisadores relacionados neste documento obtenham ***fotografia, filmagem ou gravação de voz*** *de minha pessoa para fins de pesquisa científica/ educacional. As fotografias, vídeos e gravações ficarão sob a propriedade do grupo de pesquisadores pertinentes ao estudo e sob sua guarda.*
Concordo que o material e as informações obtidas relacionadas a minha pessoa possam ser publicados em aulas, congressos, eventos científicos, palestras ou periódicos científicos. Porém, não devo ser identificado por nome ou qualquer outra forma.
Estou consciente que posso deixar o projeto a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.
Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo.

Nome Completo: ____
RG:______________Data de Nascimento:___/___/_____Telefone:________________
Endereço: ____
CEP: ________________ Cidade:_____________________ Estado: ________________
Assinatura: ______________________________ Data: ___/___/______

Eu declaro ter apresentado o estudo, explicado seus objetivos, natureza, riscos e benefícios e ter respondido da melhor forma possível às questões formuladas.

Nome completo: **Leandro Quirino dos Anjos**
Assinatura pesquisador (a): ___________________ Data:___/___/__
(ou seu representante)

Para todas as questões relativas ao estudo ou para se retirar do mesmo, poderão se comunicar com Eliane Maria de Oliveira Araman, via e-mail: elianearaman@utfpr.edu.br ou telefone: (43) 991453870.

ESCLARECIMENTOS SOBRE O COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA:

O Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos (CEP) é constituído por uma equipe de profissionais com formação multidisciplinar que está trabalhando para assegurar o respeito aos seus direitos como participante de pesquisa. Ele tem por objetivo avaliar se a pesquisa foi planejada e se será executada de forma ética. Se você considerar que a pesquisa não está sendo realizada da forma como você foi informado ou que você está sendo prejudicado de alguma forma, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR). **Endereço:**Av. Sete de Setembro, 3165, Bloco N, Térreo, Bairro Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, **Telefone:** (41) 3310-4494, **e-mail:** coep@utfpr.edu.br.

Contato do Comitê de Ética em Pesquisa que envolve seres humanos para denúncia, recurso ou reclamações do participante pesquisado:
Comitê de Ética em Pesquisa que envolve seres humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR)
Endereço: Av. Sete de Setembro, 3165, Bloco N, Térreo, Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, **Telefone:** 3310-4494,**E-mail:**coep@utfpr.edu.br