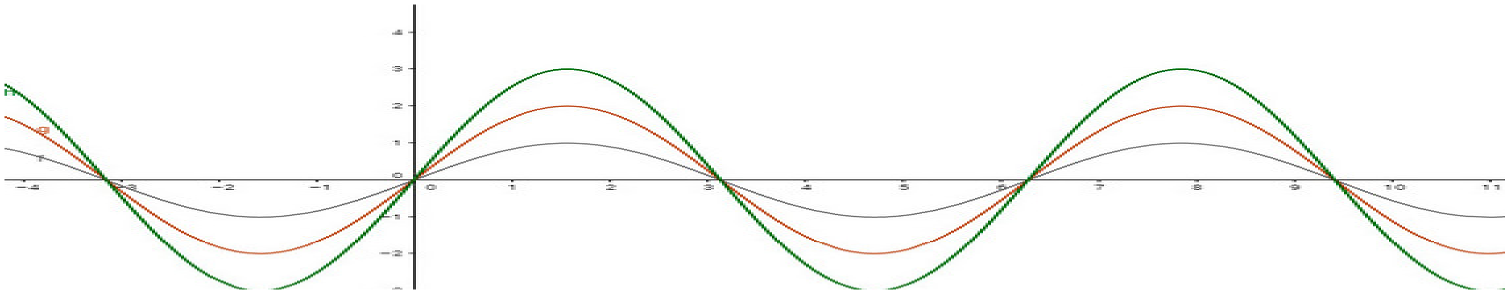
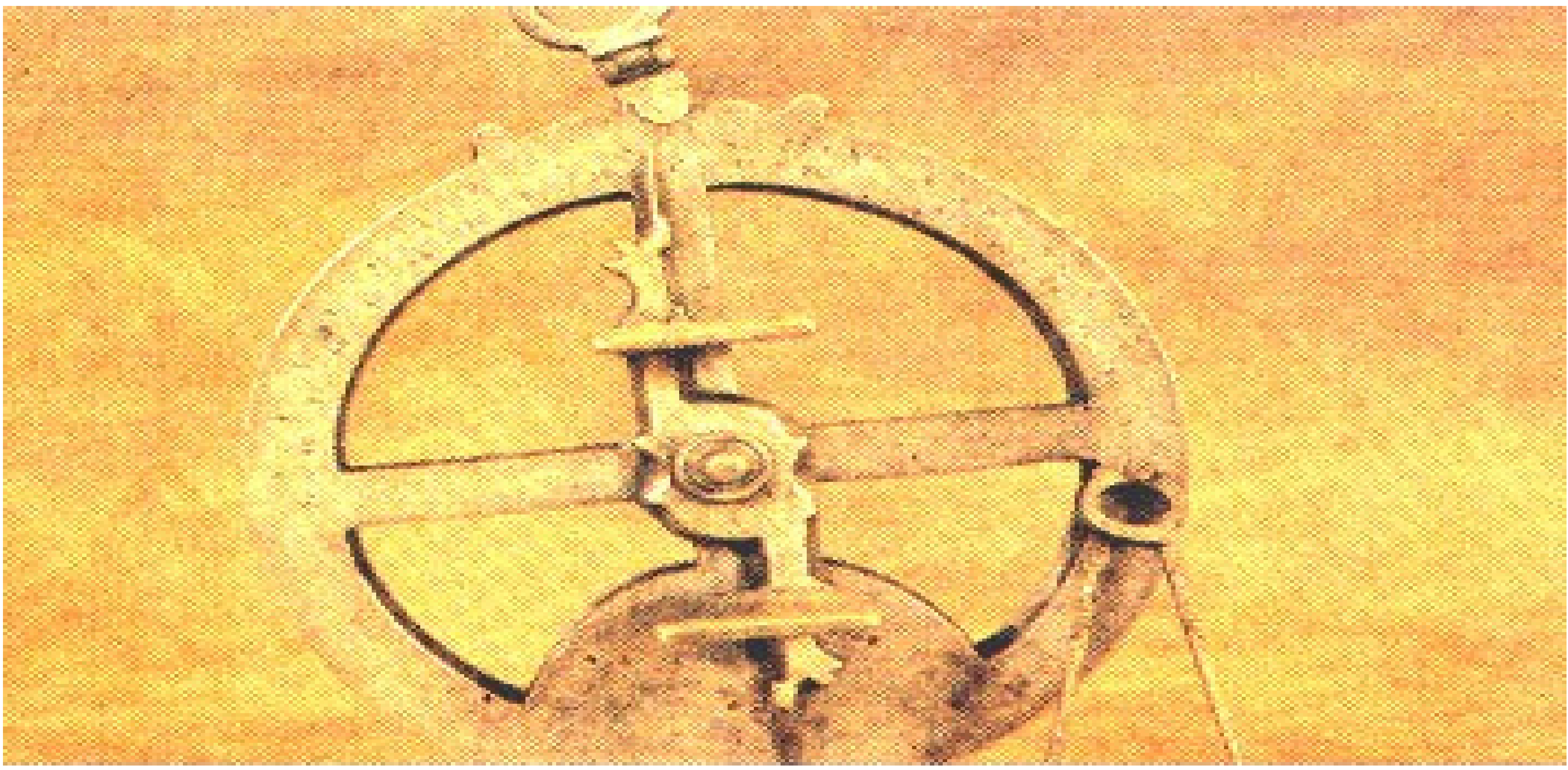
DIÁLOGO EM SALA DE AULA: INTERAÇÕES MEDIADAS PELA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Produto Educacional





PPGMAT

Sequência de Atividades

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA - (PPGMAT)

JULIANA APARECIDA ALVES DA COSTA

DIÁLOGO EM SALA DE AULA: INTERAÇÕES MEDIADAS PELA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

LONDRINA

2018

Sumário

Caro Professor,

Este material é uma sugestão de atividades exploratórias para o ensino de alguns objetos matemáticos por meio da Investigação Matemática.

Este trabalho é fruto da nossa Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Londrina/Cornélio Procópio (UTFPR – LD/CP), intitulada “DIÁLOGO EM SALA DE AULA: Interações Mediadas pela Investigação Matemática” sob a orientação da Profª. Drª. Elaine Cristina Ferruzzi.

As atividades exploratórias aqui apresentadas foram aplicadas e analisadas com o intuito de contribuir com o Ensino de Matemática, promovendo a compreensão, a discussão e a busca pelo conhecimento nos processos de ensino e de aprendizagem. Nosso objetivo é oferecer a você, Professor e futuro Professor de Matemática, um material contendo atividades de exploração e conjecturação relacionadas a conteúdos diversos.

Além de roteiros de atividades, este material traz um referencial teórico sobre o papel da Investigação Matemática como prática pedagógica, na sequência apresenta a qualidade do diálogo na perspectiva da aprendizagem, logo minha sugestão é que se realize a leitura do mesmo como uma forma de entendimento para o desenvolvimento das atividades em sala de aula.

Em face às diversas práticas pedagógicas evidenciadas na atualidade, e frente às situações de ensino e aprendizagem vivenciadas em ambientes escolares, deixamos esse material como sugestão de apoio para professores e futuros professores de matemática. Assim, desejamos que este material para além de contribuir com o ensino e aprendizagem dos alunos, proporcione reflexões a respeito do estudo aqui apresentado, no sentido de um estudo mais aprofundado sobre o assunto, podendo surgir futuras contribuições para pesquisas.

Esperamos, ainda, que este material possa colaborar não apenas para o ensino e aprendizagem dos conteúdos apresentados nos roteiros, mas também com a utilização frequente da Investigação Matemática, como prática pedagógica em sala de aula.

Atenciosamente
Juliana Aparecida Alves da Costa
Elaine Cristina Ferruzzi

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Nesta pesquisa, a Investigação Matemática refere-se a investigar para tomar conhecimento daquilo que não se sabe, utilizando para isto, um conjunto de processos típicos da atividade matemática. Investigar tem suas particularidades, onde o investigador procura formular questões que posteriormente poderão ser testadas e provadas, quando necessário. Assim, o ato de investigar se mostra uma importante ferramenta, pois quando trabalhada adequadamente conduz o aluno a construção do conhecimento (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013), o que para Lamonato e Passos, (2011) "[...] se dá pela superação de incertezas, por meio do questionamento e pela busca de respostas, e não como consequência certa do acúmulo de conhecimento anteriores" (p. 54). Assim sendo, a dúvida e a incerteza tornam-se o combustível para busca do novo conhecimento.

A prática da Investigação Matemática tende a fornecer um contexto para que os alunos percebam a necessidade de justificar as suas informações ao evidenciar o seu raciocínio para o professor e demais colegas (PONTE et al., 1999), pois "[...] a socialização dos resultados obtidos também será oportunidade de construção de conhecimento, uma vez que envolverá uma situação pensada, experimentada e problematizada, um momento de novidades até para o aluno que concluiu sua atividade [...]" (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 64).

É função do professor iniciar e dirigir a discussão, envolver os alunos e cultivar seu interesse pelo assunto, propor questões que esclareça ou estimule-o, e deverá ainda, aceitar contribuição de todos os alunos não somente daqueles que têm habitualmente respostas corretas ou ideias apropriadas (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1999). Com isto, "[...] o professor deve pensar em intervenções que levem os alunos a perceber o que eles próprios já fizeram e a examinar novas possibilidades [...]" (LAMONATO; PASSOS, 2002, p. 65).

> O papel do professor é essencial na seleção de tarefas, na estruturação da aula, na sua condução e na negociação de significados, que é especialmente importante para a aprendizagem dos alunos. o professor tem que orientar processo de comunicação, reconhecendo o papel da linguagem não oral e tentando promover a linguagem matemática – sem a impor prematuramente. O professor deve estar ciente que pelos seus actos, ou mesmo por omissão, está constantemente transmitindo informação, através de linguagem oral e não oral – de modo que intervir e não intervir são basicamente, duas formas da intervenção (PONTE et al., 1999, p. 147).

São vários fatores determinantes para o sucesso de uma aula de Investigação Matemática, dentre estes estão a seleção ou criação das propostas, no qual os objetivos tendem a adequar a particularidade da turma e com a circunstância em que surgem na aula. Preparar uma aula com caráter investigativo exige do professor uma maior dedicação. Por isso,

> A natural insegurança do professor num tipo de trabalho que ainda não domina, aliada ao investimento que exige, especialmente quando faltam recursos apropriados na escola, podem constituir obstáculo se não intransponíveis, pelo menos limitantes ao desenvolvimento deste tipo de actividade (OLIVEIRA; SEGURANDO; PONTE, 1999, p.191).

Para que isto não ocorra é importante que o professor conheça bem esta prática pedagógica, ficando ao seu critério como os alunos irão trabalhar se em grupos ou não, e como estes grupos serão constituídos. É importante considerar que o trabalho quando desenvolvido em grupo promove a autoconfiança para enfrentar novos desafios (BRUNHEIRA; FONSECA, 1996), além de favorecer e contemplar a realização de registros escritos, questionamento, argumentação e desenvolvimento da habilidade de criticar (LAMONATO; PASSOS, 2002).

QUALIDADE DO DIÁLOGO NA PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM

Buscando contribuir para aprendizagem dos alunos optamos por utilizar a Investigação Matemática como prática pedagógica. Por isso, primeiramente iremos verificar se esta prática pedagógica proporciona o diálogo, pois de acordo com Alrø e Skovsmose (2010) se proporcionar então favorece a aprendizagem. Para uma comunicação influenciar a aprendizagem da matemática é necessário que se tenha uma "qualidade nesta comunicação" o que pode ser apresentado em termos de relações interpessoais, posto que

> Aprender é uma experiência pessoal, mas que ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais. E por conseguinte a aprendizagem depende da qualidade do contato nas relações interpessoais que se manifesta durante a comunicação entre os participantes (ALRØ E SKOVSMOSE, 2010, p. 12).

Falar sobre diálogo não parece ser algo difícil, porém quando se trata de analisá-lo em determinado ambiente, este sim se torna complexo. A sala de aula é um destes ambientes que exige uma análise mais cuidadosa quando se trata de averiguar a existência do diálogo nas interações entre os participantes.

O ensino demanda a participação de todos, mesmo daqueles que não se encontram em posição de igualdade, pois não podemos esquecer que o professor tem o conhecimento, mas é por meio do diálogo que este procurará disseminar este conhecimento buscando contribuir para o crescimento dos seus alunos (PORTO, 2010). Nesse sentido, um entendimento particular de diálogo é apontado por Alrø e Skovsmose (2010), e que será discutido na próxima seção.

DIÁLOGO EM SALA DE AULA

O termo diálogo é caracterizado por Alrø e Skovsmose (2010) como uma conversação que contempla aspectos específicos (chamados de atos dialógicos), que visam promover a aprendizagem e desenvolver habilidades para a aplicação de conceitos matemáticos estudados. O estudo sobre o diálogo implica em analisar a qualidade com que este acontece entre professor/aluno e aluno/aluno. Segundo os autores citados, a hipótese inicial que norteou suas investigações versa sobre "*As qualidades da comunicação na sala de aula influenciam as qualidades da aprendizagem de Matemática [...], (*p.11)." Entretanto, a qualidade de uma conversação se refere a certas propriedades de uma interação que não podem existir enquanto houver um dominante.

Nesse sentido, Alrø e Skovsmose (2010), entendem que

> As qualidades de comunicação podem ser expressas em termos de relações interpessoais. Muito mais do que uma simples transferência de informação de uma parte a outra, o ato de comunicação em si mesmo tem papel de destaque no processo de aprendizagem. A comunicação tem um sentido mais profundo do que se percebe à primeira vista [...]. Aprender é uma experiência pessoal, mas ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais. E, por conseguinte, a aprendizagem depende da qualidade do contato nas relações interpessoais que se manifesta durante a comunicação entre os participantes. [...] (p.12).

Deste modo, a aprendizagem está diretamente ligada à qualidade do contato que se evidencia na comunicação entre os participantes. Embora a aprendizagem seja um processo individual, no qual cada um constrói, esta depende de conhecer novas ideias que só descobrimos nas relações com outras pessoas. Assim o diálogo seria uma forma de promover a aprendizagem, uma vez que é motivado por uma perspectiva de mudança (PORTO, 2010). Compreendemos que o intuito da Investigação Matemática não é oferecer respostas prontas a problemas estudados, mas instigar a busca por eles.

Segundo Alrø e Skovsmose (2010), o diálogo não está restrito a uma situação ou problema, mas sim na interação e comprometimento entre os participantes. Nesse sentido, os autores reforçam as ideias de Freire (1970), o qual aponta a importância das palavras “ação” e “reflexão”, e que no diálogo uma pode complementar a outra, e que a ausência de uma delas implica no prejuízo da outra. Atuar sem refletir implica em ativismo, e refletir sem ação torna-se verbalismo.

Na visão do autor supracitado, dialogar é uma ação de partilha e estímulo a investigação, o qual está repleto de suas particularidades e qualidades. Dessa maneira, os autores buscam “[...] pontuar certos aspectos da comunicação que podem apoiar certos aspectos da aprendizagem e, ao mesmo tempo, enfatizar a importância destes aspectos” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.16). O aspecto do diálogo mencionado envolve “realizar uma investigação; correr riscos e promover a igualdade” (p.123). Cada aspecto expressa uma característica própria, no caso de “realizar uma investigação” reforça que o diálogo consiste numa conversação onde se procura adquirir conhecimentos e novas experiências (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010).

Ao compreenderem que o diálogo é uma “conversação com certas qualidades” Alrø e Skovsmose (2010) se mostram interessados no caso de que este “[...] tem uma relação próxima com certa interpretação de investigação [...]” (p. 119). Diante disso, na concepção dos autores o diálogo trata-se de uma conversação que visa aprendizagem.

Trabalhar em uma investigação denota que os partícipes do diálogo deverão sair da sua zona de conforto, onde o “correr riscos” faz parte do processo, e a curiosidade atuará como combustível na busca por uma solução do problema, (PORTO, 2010). Acompanhando a linha de raciocínio deste autor, o diálogo volta-se para uma conversação investigativa, no qual o intuito é buscar algo desconhecido (conhecimento), que ainda não se tem, mas que almeja alcançá-lo.

Atuar em um processo investigativo vai além da zona de conforto onde não se tem a certeza de uma resposta pronta, seja ela, parcial ou não. Viajar até o desconhecido faz parte do processo investigativo, e os participantes exercem o papel de condutor e executor deste processo. Vale ressaltar que quando falamos em participantes, estamos falando de professores e alunos envoltos em uma cooperação mútua na busca pelo até então desconhecido (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010).

A colaboração dos participantes constitui um processo importante, no sentido de explorar perspectivas e às vezes até abrir mão de outras para que se possa inovar, pois quando o participante assume esta postura ele deixa sua comodidade de lado podendo engajar em um processo cuja solução final resultará de sua disposição e curiosidade (FERRUZZI, 2011).

Estar acessível a novas ideias e preparado para assumir situações inesperadas é o que Alrø e Skovsmose (2010) pontuam como "correr riscos". Esse aspecto do diálogo "[...] é uma forma de expressar a natureza imprevisível dos desdobramentos de um diálogo [...] (p. 123), assim quem participa do diálogo precisa expor aos outros participantes do grupo suas ideias, e estar apto a ouvir críticas e argumentações sobre seu ponto de vista, assim como ser flexível a mudanças.

Tendo em vista que "correr riscos" faz parte do diálogo e que

> [...] um diálogo é algo imprevisível. Não há respostas prontas, conhecida de antemão, para os problemas. Elas surgem através de um processo compartilhado de curiosa investigação e reflexão coletiva, com o propósito de obter conhecimento [...] (ALRØ E SKOVSMOSE, 2010, p.128).

Conhecimento este, que, em uma aula de matemática é concebido de distintas maneiras pelos alunos resultando em diferentes construções de significados matemáticos (ARAÚJO, 2004).

O ato de dialogar é um processo arriscado, e o professor deve estar pronto para enfrentar desafios, sendo que este pode ocorrer de ambos os lados. Assim "[...] Para que o diálogo aconteça é importante [...] não remover o risco, mas estabelecer um ambiente de aprendizagem confortável e respeitoso e uma atmosfera de confiança mútua, [...]" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.129). Desta forma, o professor pode agir como supervisor tomando cuidado para que os alunos não se percam ao se depararem com uma situação de risco, sem, porém, suprimir o risco por completo.

O ambiente de investigação pode ocasionar desafios ao professor, por não ter como presumir as reações e questões inesperadas dos alunos (FERRUZZI, 2011). Assim, o professor

> [...] deve estar preparado a se deparar com uma resposta inesperada por parte do grupo. O diálogo pode tomar rumos não previstos, que podem ser tanto ruins quanto interessantes, cabendo ao professor, conduzi-lo para outros caminhos, que podem ir além do que tinha sido planejado [...], (PORTO, 2010, p. 9).

Para isso, o professor deve estar atento, caso seja necessário tomar decisões rápidas e fazer escolhas durante o procedimento. O trabalho do professor como coordenador de discussões e como mediador dos obstáculos encontrados, compreende entre outras situações: motivar e observar constantemente o comportamento dos alunos fornecendo orientações, além de reforçar os aspectos que sejam importantes para a condução da atividade. Assim, um processo investigativo envolve vários aspectos que são apontados por (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010).

O fato de realizar investigação implica em correr riscos, o que também, faz parte dos aspectos do diálogo. Outro aspecto apontado por Alrø e Skovsmose (2010), trata-se de "promover a igualdade", o que faz referência ao relacionamento interpessoal que é indispensável para o diálogo como aqui qualificado. Para os autores, promover a igualdade não requer negar as diferenças e diversidades, mas sim saber tratá-la e para isto, os alunos não pode sofrer interferência pela autoridade do professor, uma vez que

> [...] Igualdade não se limita ao aspecto da competência profissional, ela precisa ser percebida como uma forma de trato respeitoso entre as pessoas que são parceiras de investigação. Como já foi dito, ser igualitário não significa negar a existência de diferenças [...], (ALRØ; SKOVSMOSE, p.139).

Em cada aula, onde impera a prática do processo investigativo, o professor altera seu papel, e a parceria na investigação é um deles. Entretanto, para um diálogo investigativo ocorrer, o desafio proporcionado pelo professor precisa estar dentro das possibilidades e conhecimentos dos alunos no assunto. Assim, "É importante entender que não é qualquer ato da fala que compõe um diálogo [...]", mas sim a qualidade dela (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.133).

Os autores, acima citados, relacionam o ato da fala com os "atos dialógicos". E estes atos são considerados com características especiais que ajudam a desenvolver, controlar e "sustentar" o diálogo. Conforme esses autores, os atos dialógicos consistem em "eventos" especiais, mas precisamente oito, que são consideradas uma segunda caracterização. Esta segunda caracterização incide em: 1) estabelecer contato, 2) perceber, 3) reconhecer, 4) posicionar-se, 5) pensar alto, 6) reformular, 7) desafiar e 8) avaliar. Todos são considerados atos dialógicos "e conseqüentemente envolvem realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade" (ALRØ E SKOVSMOSE, 2010, p. 135).

SEQUÊNCIAS DE ATIVIDADES

De acordo com a realização de nossa de pesquisa, é possível inferir contribuições para a aprendizagem dos alunos, utilizando atividades investigativas, pois os alunos têm a oportunidade de compartilhar suas inquietudes e aprimorar conhecimentos já estabelecidos anteriormente. Nossa pesquisa apontou que a prática de atividades investigativas contribui para ocorrência do diálogo, assim como, para a compreensão dos alunos.

As atividades de investigação tendem a promover um ambiente dinâmico, sento possível a discussão, a conjecturação e a colaboração entre os participantes, possibilidades estas que nem sempre fazem parte de uma aula tradicional. Pontes, Brocardo e Oliveira (2013) e Alrø e Skovsmose (2010) compartilham da ideia de que os professores tem um papel importante para favorecimento deste ambiente. Ambos os autores ressaltam que o professor deve prover condições para que os alunos tenham curiosidades não os deixando desanimar.

É preciso aguçar no aluno o desejo de explorar um “terreno” até então desconhecido por ele, onde o correr risco faz parte do percurso. Portanto, o professor dever ser o orientador, o mediador e o incentivador de um ambiente investigativo (PONTES; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013).

Ainda lembramos que é importante que os alunos desenvolvam as atividades em grupos ou duplas de forma que tenham a oportunidade de trocar ideias, compartilhar dúvidas e defenderem seus pontos de vista. Quanto ao professor, assumindo o papel acima descrito, deve auxiliar os alunos no sentido de questioná-los, levando-os à reflexão, sem, no entanto, interferir muito no desenvolvimento.

ROTEIRO 1: Função Seno

Caro professor,

Esta atividade deve ser desenvolvia com o auxílio do software GeoGebra. Desta forma, antes de iniciar sua aula, divida os alunos em grupos, familiarize-os com o uso do software. Entregue a atividade e estipule um tempo para que leiam e troquem ideias sobre a atividade. Passe pelos grupos e incentive as discussões, converse com os alunos sobre como será a atividade, que eles farão um trabalho investigativo buscando entender o "papel" de cada parâmetro (A, B, C e D) da função $f(x) = A + B\ sen(Cx + D)$, com $x \in$ R.

i. Solicite aos alunos que insiram a função $f(x) = A + B\ sen(Cx + D)$, no Geogebra, indicando as variáveis e os parâmetros.
ii. Solicite aos alunos que atribuam o valor 0 (zero) para os parâmetros A e D e o valor 1 (um) para os parâmetros B e C.
iii. Solicite que os alunos analisem o gráfico da função construída no Geogebra e respondam as seguintes questões:

Questão 1: Qual o domínio da função $f(x) = sen(x)$?
Questão 2: Qual a imagem da função $f(x) = sen(x)$?

Permita que os alunos discutam sobre estas duas questões. Dê tempo. Se necessário revise o conceito de Domínio e Imagem gráfica de uma função. (Lembre-se de fazer isso utilizando funções diferentes da que eles estão analisando). Na sequencia explique aos alunos como determinam graficamente o período da função e encerre a atividade enfatizando as conclusões da mesma:

Para $f(x) = sen\ x\ ,\ \ com\ x \in R$
Temos:
$Im(f) =\ [-1, 1]$e$P = 2\,\pi\ rad$

Análise do Parâmetro B

Inicie esta atividade, distribuindo os alunos em grupos, e relembrando as conclusões da atividade anterior.

Para $f(x) = sen\, x$, $com\, x \in R$ Temos: $Im(f) = [-1, 1]$e$P = 2\,\pi\, rad$

i. Solicite que os alunos retomem a função $f(x) = A + Bsen(Cx + D)$ e fixem o valor 0 (zero) para os parâmetros A e D e o valor 1 (um) para o parâmetro C.

ii. Verifique se os alunos ficaram com a função $f(x) = Bsen(x)$.

iii. Mostre para os alunos que a única diferença entre a função que trabalharam na atividade anterior ($f(x) = sen(x)$) e a que estão trabalhando agora é o parâmetro B.

iv. Solicite que os alunos investiguem o papel do parâmetro B no gráfico da função. Deixe-os discutir por um tempo. Passe pelos grupos, discuta, incentive, não dê a solução, porém não os deixe desanimar. Caso, depois de um tempo eles não consiga descobrir como determinar a função de B, traga a responsabilidade para você de novo e apresente a tabela abaixo.

v. Solicite que atribuam valores aleatórios para B≠0, analisem os gráficos construídos no GEOGEBRA e preencham a tabela.

$f(x) = Bsen(x)$	B	Imagem da função	Período da função

vi. Após o preenchimento da tabela, solicite novamente que identifiquem qual o papel de B no gráfico da função. (Se necessário faça com que atribuam mais valores para B).

vii. Depois que os alunos concluírem que o parâmetro B interfere na imagem da função, multiplicando-a, solicite que preencham a tabela abaixo. Esta tabela deve ser preenchida SEM a construção gráfica. Isto é muito importante para que o professor verifique o entendimento ou não do aluno.

viii. Forneça a imagem e o período das funções abaixo, sem construir os gráficos:

$f(x) = A + Bsen(CX + D)$	Imagem da função	Período da função
$f(x) = 2\,sen(x)$		
$f(x) = 3\,sen\,(x)$		
$f(x) = 4\,sen(x)$		
$f(x) = -2\,sen(x)$		

OBS: Não se esqueça de fazer uma síntese ao final da atividade, mostrando que a amplitude da função $f(x) = B\ sen(x),\ x \in R$ é B unidades, ou seja, a imagem da função

$f(x) = B\ sen(x)\ \ é\ \ \ Im(f) = [-B, B]$.

Para analisar o papel dos parâmetros A, C e D faça o mesmo procedimento da aula anterior.

Professor, a seguir apresentamos algumas tabelas e questões que podem auxiliar no desenvolvimento da investigação.

Análise do Parâmetro C

Questão 01

Atribua valores para C, analise os gráficos construídos no GEOGEBRA e preencha a tabela.

$f(x) = sen(CX)$	C	Imagem da Função	Período da Função

Questão 02

Analisando os resultados que você encontrou que tipo de alterações ocorre no comportamento do gráfico da função, quando variamos os valores do parâmetro C?

Questão 03

Sem construir o gráfico, determine a Imagem o período das funções abaixo.

$f(x) = sen(CX)$	Imagem da Função	Período da Função
$f(x) = sen(\frac{x}{4})$		
$f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$		
$f(x) = sen(2x)$		
$f(x) = sen(4x)$		

Análise do Parâmetro A

Questão 01

Atribua valores para A, analise os gráficos construídos no GEOGEBRA e preencha a tabela.

$f(x) = A + sen(x)$	A	Imagem da Função	Período da Função

Questão 02

Analisando os resultados que você encontrou que tipo de alterações ocorre no comportamento do gráfico da função, quando variamos os valores do parâmetro A?

Questão 03

Sem construir o gráfico, determine a Imagem e o período das funções abaixo.

$f(x) = A + sen(x)$	Imagem da Função	Período da Função
$f(x) = 1 + sen(x)$		
$f(x) = -1 + sen(x)$		
$f(x) = 2 + sen(x)$		

ROTEIRO 2 : Progressão Aritmética (Termo geral)

Caro professor,

Existem inúmeras maneiras de investigar as Progressões Aritméticas (P.A.) e neste roteiro apresentamos uma delas.

Antes de iniciar esta atividade, peça aos alunos para formarem grupos. O aluno deve saber o que é uma sequência ou sucessão numérica, como é indicado seus termos e o que caracteriza uma sequência finita ou infinita, crescente ou decrescente, etc.

Ou seja, cada termo de uma sequência pode ser representado pela de letra “a” minúscula juntamente com a posição que o termo ocupa. Por exemplo, admita

a) a_1 como sendo o 1º termo;

b) a2 como sendo o 2º termo;

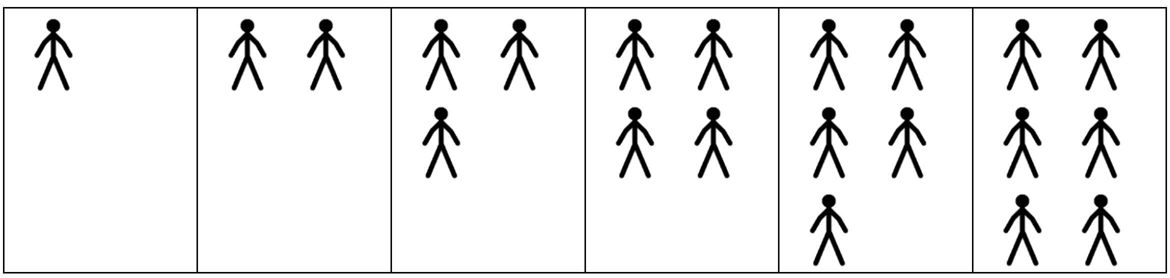
c) a3 como sendo o 3º termo e assim sucessivamente.

i. Pergunte aos alunos como faria para representar um termo que não se sabe qual é. Caso os alunos tenham dificuldade com a resposta explique a eles que assim como os primeiros termos são representados como mencionado acima, o enésimo termo será representado por “a_n”.

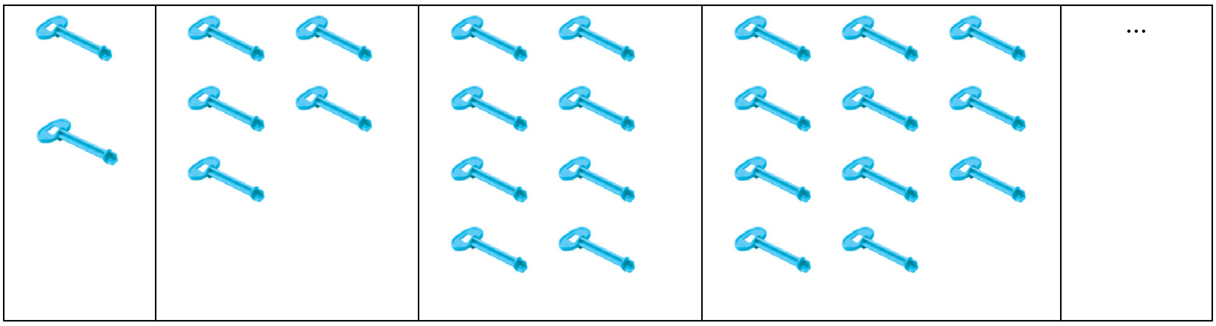
Tendo estes conhecimentos, sugerimos o seguinte roteiro:

Apresente algumas sequências aleatórias aos alunos e solicite que eles investiguem o que acontece em cada uma delas. Dê tempo para que discutam, conversem, reflitam, pois geralmente eles não sabem por onde começar, já que você, o professor, não disse o que quer que eles respondam. Alguns exemplos são apresentados abaixo, porém, existem inúmeros que podem ser utilizados.

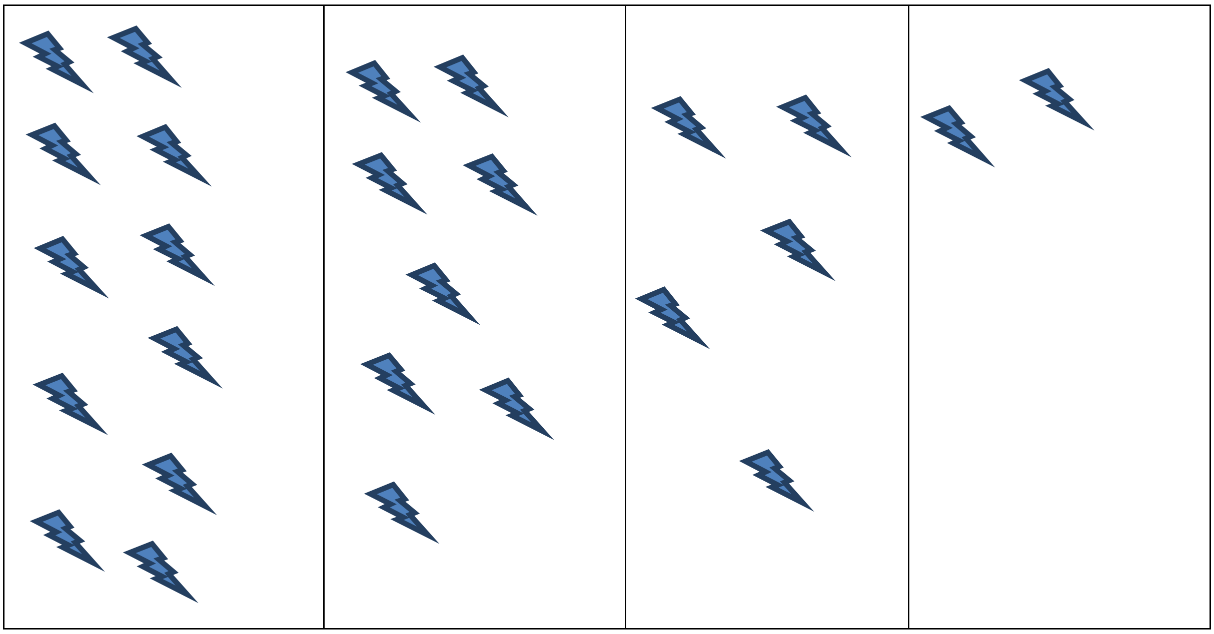
a)



b)



c)



d) $(2, 8, 14, 20 \ldots)$

e) (32, 29, 26, 23, ...)

Espera-se que os alunos consigam visualizar o comportamento de cada sequencia:

a) Aumentando de 1 em 1; crescente
b) Aumentando de 3 em 3; crescente
c) Diminuindo de 3 em 3; decrescente
d) Aumentando de 6 em 6; crescente
e) Diminuindo de 3 em 3; decrescente.

ii. Incentive-os a encontrarem mais regularidades. Os alunos podem chegar a outras observações, como por exemplo, a soma os extremos serem iguais à soma dos meios, $a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$, etc, podem observar ainda que a soma dos índices é sempre igual.

iii. Caso os alunos apresentem dificuldade, auxilie-os, porém não dê o resultado. Ajude-os a analisar.

iv. Esta atividade pode demorar um bom tempo, mas é necessário que os alunos investiguem todas as regularidades.

v. Depois que os alunos observarem o comportamento (crescente, decrescente, de tanto em tanto), é hora que do professor apresentar um nome para este incremento. Fale para os alunos que esta diferença entre os termos chama-se razão, é representada por r e que este tipo de sequencia chama-se Progressão Aritmética.

vi. Na sequencia, solicite que os alunos investiguem como encontrar um termo, tendo seu anterior. Espera-se que os alunos consigam visualizar que

$a_2 = a_1 + r;\ a_3 = a_2 + r; a_4 = a_3 + r;$ e assim por diante.

vii. Lembre-os que qualquer termo deve ser representado por a_n, sendo n um número natural, e solicite que generalizem o que encontraram no item anterior.

viii. Espera-se que os alunos determinem que $a_n = a_{n-1} + r.$ Isto pode demorar um bom tempo.

ix. Na sequencia, solicite aos alunos que investiguem como encontrar qualquer termo tendo apenas $a_1\ e\ r.$ Este é o momento principal da atividade. Deixe-os trabalhar o tempo necessário para que consigam visualizar que $a_n = a_1 + (n-1)r;$

Após este entendimento, retome os conceitos, trabalhe-os de forma que consigam encontrar qualquer termo de uma sequencia dada e encerre esta atividade.

Progressão Aritmética (Soma dos termos)

Caro professor,

Retome os conceitos da atividade anterior para que fiquem claros para os alunos. Após esta revisão apresente algumas sequências finitas e solicite aos alunos que investiguem como podem somar seus termos sem somá-los um a um. Inicie com sequências de quantidade de termos pares. Peça aos alunos para formarem grupos.

Exemplos:

a) (1,5,9,13,17,21)
b) (3,5,7,9,11,13, 15, 17)
c) (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)

Caso tenham dificuldade para visualizar a soma dos termos, dê algumas dicas, como por exemplo:

a) Pergunte a soma do primeiro e último termo;
b) Pergunte quais outros termos tem a mesma soma;
c) Depois de responderem, solicitem que pensem mais um pouco como poderia somar todos sem somar um a um. Dê tempo para que discutam entre si.

Talvez cheguem à conclusão que:

a) A soma dos termos é 22 x 3
b) A soma dos termos é 20 x 4
c) A soma dos termos é 11 x5

Se chegarem a conclusão do item anterior,

i. Peçam que verifiquem se existe alguma relação entre um dos termos do produto e o número de termos da sequencia.
ii. Solicitem que somem os vinte primeiros termos da sequencia (1,6,11,...)
iii. Solicite a soma dos 200 primeiros números naturais.

Para finalizar, retome os conceitos e formalize as fórmulas do termo geral e soma de uma P.A. finita.

ROTEIRO 3: Progressão Geométrica - PG

Inicie a aula, pedindo aos alunos para formarem grupos, na sequência apresente a sequência **(2, 6, 18, 54...)** e solicite que investiguem o que está acontecendo entre os números, e que escreva mais cinco números desta sequência.

i. Disponibilize um tempo para que os alunos discutam, e acompanhe as discussões procurando instigá-los a dizer quais foram os termos que colocaram, e que a sequência está sendo multiplicada por três.
ii. Caso perceba que os alunos (ou grupo) não cheguem à conclusão, o professor deve participar mais da interação, sem dizer o que gostaria que fizessem, mas sim, levá-los a reflexão.
iii. Algumas questões que o professor pode fazer aos alunos:
   a) O que está acontecendo com os termos da sequência?
   b) Observe o que acontece de um termo para o outro.
   c) Existe algo em comum entre os termos?

Após a exploração desta sequencia insira outras e procure explorá-la da mesma forma. Por exemplo:

a) (3, 6, 12,___,___,___,___)
b) (1, 5,___,___,___,___,___,__)
c) (-2, -6, -18,___,___,___,___,__)

Espera-se que os alunos consigam visualizar que cada termo é o seu anterior multiplicado por uma constante.

iv. Neste momento fale sobre a razão da P.G e como a mesma é representada. Em seguida solicite que generalizem a relação encontrada.
v. Pergunte aos alunos como determinar qualquer termo tendo apenas o primeiro termo e a razão.
vi. Dê tempo para pensarem e discutirem a respeito. Depois de dado este tempo (quanto o professor considerar importante), caso os alunos apresentem dificuldade, ou não consigam generalizar, auxilie-os instigando-os:
vii. De que termo precisamos para encontrar o décimo? Espera-se que respondam que precisam do nono termo e da razão. Assim, escreva juntamente com os alunos:

$$a_{10} = a_9 . q$$

viii. Depois de representar o décimo termo questione como representamos o nono termo.

ix. Substitua, juntamente com os alunos, $a_9 = a_8.q$ em $a_{10} = a_9.q$, ficando

$$a_{10} = a_8.q.q \ = \ a_{10} = a_8.q^2$$

Instiguem os alunos a observarem mais relações existentes (entre os índices, entre os índices de cada termo e o expoente da razão). Espera-se que concluam que qualquer termo é igual a um termo qualquer (menor que o termo desejado) multiplicado pela razão elevada à diferença entre os índices dos termos, ou seja, $a_{10} = a_8.q^2 = a_7.q^3 = a_4.q^6$, etc...

x. Após esta constatação, pergunte aos alunos como ficaria o décimo termo em função do primeiro termo e da razão. E como ficaria o vigésimo termo? Assim por diante.

xi. Espera-se que consigam generalizar a fórmula do termo geral de uma P.G. qual seja: $a_n = a_1.q^{n-1}$

ROTEIRO 4 : Coeficiente Angular da Função do Primeiro Grau $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$

Caro professor,

Primeiramente peça aos alunos para formarem grupos. Na sequência inicie a atividade definindo a função do primeiro grau do tipo $f(x) = ax + b$. Não é necessário que defina os termos, apenas diga que a e b são constantes e que x é a variável independente. Mostre alguns exemplos.

i. Solicite aos alunos que insiram no GeoGebra a função $f(x) = ax + b$, indicando as constantes e a variável.

ii. Solicitem que investiguem o "papel" da constante "a" no gráfico desta função.

iii. Deixe-os discutir por um tempo. Passe pelos grupos, discuta, incentive, não dê a solução, porém não os deixe desanimar. Caso, depois de um tempo eles não consigam descobrir como começar, solicite que atribuam o valor 0 (zero) para a constante "b"

iv. Verifique se ficaram com a função $f(x) = ax$.

v. Com esta função definida, solicite para que investiguem o papel de "a" no gráfico da função. Dê tempo para discutirem. Caso não consigam iniciar a investigação, solicite que atribuam diferentes valores para "a" e descubram sua função gráfica. Porém, só faça isso depois de dar um bom tempo para discutirem. Provavelmente eles consigam fazer.

vi. Espera-se que os alunos identifiquem que o coeficiente "a" interfere na inclinação da reta e que se "a" for positivo a função é crescente, se "a" for negativo a função é decrescente.

vii. Formalize esta propriedade e dê um nome para "a" = coeficiente angular.

viii. Na sequencia solicite que completem as tabelas abaixo e investiguem o que mais o coeficiente "a" diz sobre a função.

a)

x	$f(x) = 3x - 2$
1	
2	
5	
8	
15	
20	
50	

b)

x	$f(x) = -2x - 3$
1	
2	
5	
8	
15	
20	
50	

Espera-se que com a atividade do item anterior os alunos consigam concluir que o coeficiente “a” indica o crescimento ou decrescimento da função e o valor deste incremento, ou seja, a taxa de variação da função. Se for necessário, acrescente outras tabelas até que os alunos consigam visualizar.

Coeficiente Linear da Função do Primeiro Grau $f(x) = ax + b$

Caro professor,

Para este roteiro é necessário que antes de iniciar a atividade, os alunos formem os grupos, é importante que eles já tenha conhecimento de que a função do primeiro grau é representada por $f(x) = ax + b$. Não é necessário que defina os termos, apenas diga que a e b são constantes e que x é a variável independente. Mostre alguns exemplos.

i. Solicite aos alunos que insiram no GeoGebra a função $f(x) = ax + b$, indicando as constantes e a variável.

ii. Solicitem que investiguem o "papel" da constante "b" no gráfico desta função.

iii. Deixe-os discutir por um tempo. Passe pelos grupos, discuta, incentive, não dê a solução, porém não os deixe desanimar. Caso, depois de um tempo eles não consigam descobrir como começar, solicite que atribuam o valor 1(um) para a constante "a".

iv. Verifique se ficaram com a função $f(x) = x + b$.

v. Com esta função definida, solicite para que investiguem o papel de "b" no gráfico da função. Dê tempo para discutirem. Caso não consigam iniciar a investigação, solicite que atribuam diferentes valores para "b" e descubram sua função gráfica. Porém, só faça isso depois de dar um bom tempo para discutirem. Provavelmente eles consigam fazer.

vi. Espera-se que os alunos identifiquem que o coeficiente "b" indica o ponto onde o gráfico intercepta o eixo OY, ou seja, $f(0) = b$.

vii. Formalize esta propriedade e dê um nome para "b" = coeficiente linear.

viii. Termine a atividade solicitando que os alunos esbocem o gráfico de algumas funções sem atribuir valores para x, apenas indicando onde o gráfico intercepta o eixo OY, se a função é crescente ou decrescente e qual é a taxa de variação.

Explorando o zero da função do primeiro grau $f(x) = ax + b$

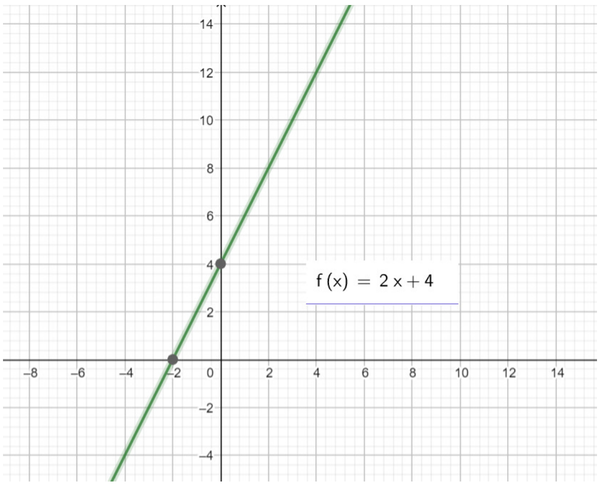
Caro professor,

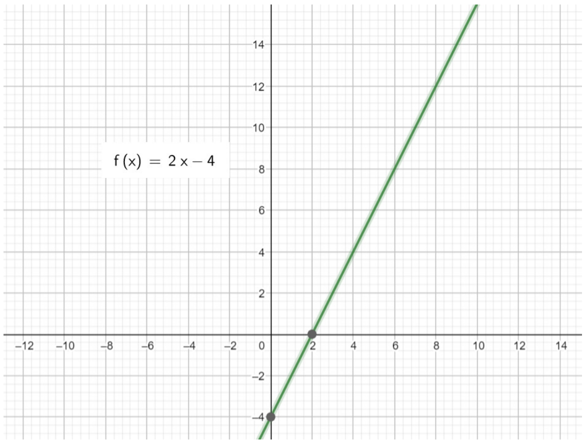
Após os dois roteiros anteriores é interessante que os alunos explorem o zero da função.

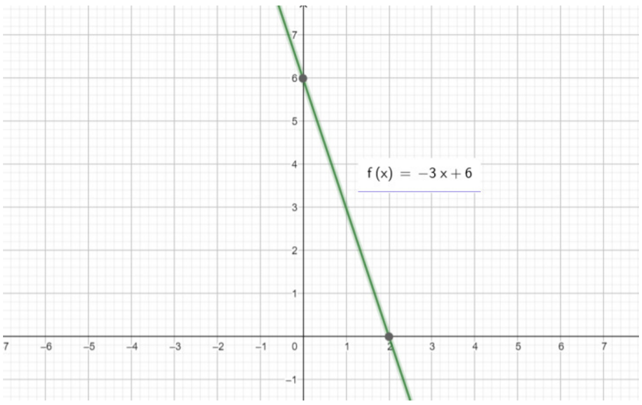
Apresente aos alunos algumas funções e seus respectivos gráficos.

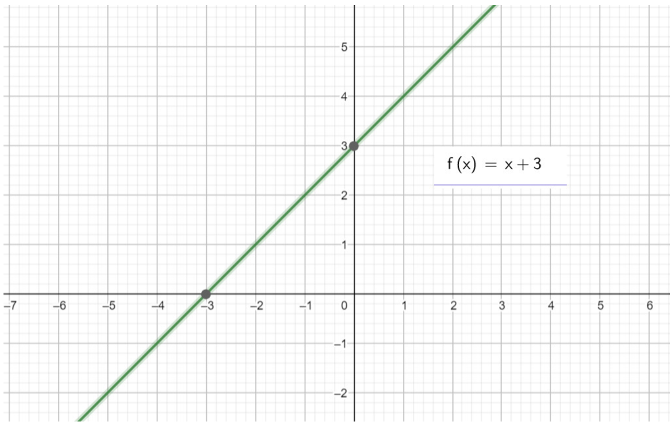
Solicite que descrevam tudo o que sabe da função (se é crescente, decrescente, qual é a taxa de variação, etc) e na sequencia investiguem como poderiam obter o ponto onde o gráfico intercepta o eixo OX sem construir o gráfico.

Exemplos de gráficos que podem ser apresentados aos alunos:









Caso sinta necessário, apresente mais alguns gráficos.

Ao final desta atividade espera-se que o aluno compreenda que o ponto onde o gráfico intercepta o eixo OX é P(x,0) ou ainda P(-b/a; 0) .

Neste momento é importante que o aluno compreenda que este ponto é chamado de Zero ou Raiz da função e é o valor de x que faz com que a função seja nula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao abordar as atividades utilizando a prática de Investigação Matemática, além de envolver o aluno no processo de busca de seu conhecimento e proporcionar-lhe a oportunidade de pensar, esta possibilita também o desenvolvimento de habilidades como: a interpretação, a reflexão, a sistematização, a autonomia e finalmente a capacidade de argumentação.

As atividades propostas sugerem mudança na postura do professor, assim como Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) e Alrø e Skovsmose (2010), pois seu papel passa de detentor do conhecimento para: coordenador de discussões, mediador de obstáculos, além de motivador e orientador na condução das atividades e finalmente o incentivador aquele que estimula e encoraja os alunos em suas atuações.

Em se tratando das ações do professor, quando este adota a prática de ensino Investigação Matemática, é importante que ele sugira a leitura e a compreensão da situação proposta; que proporcione a discussão para que todos entendam o que se busca no problema; não forneça responda pronta sem que sejam levantados questionamentos considerados oportunos durante o desenvolvimento do trabalho e que procure estimular a análise do processo.

REFERÊNCIAS

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Tradução: Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

ARAÚJO, J. L. **Um diálogo sobre comunicação na sala de aula de Matemática**. Veritati, Salvador, n. 04, p. 81-93, 2004.

BRUNHEIRA, L. **O conhecimento e as atitudes de três professores estagiárias face à realização de actividades de investigação na aula de Matemática**. APM, 2000.

FERRUZZI, E. C. **Interações discursivas e aprendizagem em modelagem matemática**. 2011. 228 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2011.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L.B. **Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática:** reflexões para o ensino de Matemática. Zetetiké-FE/Unicamp, v. 19, 2011.

OLIVEIRA, H.M.; SEGURADO, M. I; PONTE, J.P da.**Explorar, investigar e discutir na aula de Matemática**.In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, e L. Brunheira (ed.), Investigações Matemáticas na aula e no currículo (p. 175-182). Lisboa: Projecto MPT e APM.

PONTE, J. et al. (1999). **Investigando as aulas de investigações matemáticas**. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, e L. Brunheira (ed.),Investigações matemáticas na aula e no currículo (p. 133-151). Lisboa: Projecto MPT e APM.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PORTO, J. F. **Diálogo e interatividade em vídeo aulas de Matemática**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.