UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA (PPGMAT)

JULIANA APARECIDA ALVES DA COSTA

# DIÁLOGO EM SALA DE AULA: INTERAÇÕES MEDIADAS PELA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

LONDRINA
2018

**JULIANA APARECIDA ALVES DA COSTA**

# DIÁLOGO EM SALA DE AULA: INTERAÇÕES MEDIADAS PELA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito para obtenção do título de mestre. Linha de Pesquisa: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Elaine Cristina Ferruzzi

**LONDRINA**

**2018**

**TERMO DE LICENCIAMENTO**



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

C837d Costa, Juliana Aparecida Alves da
Diálogo em sala de aula: interações mediadas pela investigação matemática / Juliana Aparecida Alves da Costa. - Londrina : [s.n.], 2018.
90 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Profª Drª Elaine Cristina Ferruzzi.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Londrina, 2018.
Bibliografia: f. 70-73.

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Funções trigonométricas 3 . Análise de interação na educação. 4. Aprendizagem baseada em problemas. I. Ferruzzi, Elaine Cristina, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Cristina Benedeti Guilhem - CRB: 9/911

# TERMO DE APROVAÇÃO

## DIÁLOGO EM SALA DE AULA: INTERAÇÕES MEDIADAS PELA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

por

JULIANA APARECIDA ALVES DA COSTA

Esta dissertação foi apresentada às 10h30min do dia 26 de fevereiro de 2018, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Linha de Pesquisa: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Londrina. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho APROVADO

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dra Elaine Cristina Ferruzzi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dra Adriana Helena Borssoi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Profa. Dra. Ivanete Zuchi Siple
Universidade do Estado de Santa Catarina

Londrina, 26 de fevereiro, 2018.

“A folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.”

Dedico este trabalho a minha família e a meu esposo, pelo incentivo e pelas palavras de encorajamento para completar mais esta etapa da minha formação profissional.

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que me fortaleceu, iluminou meu caminho e me abençoou nesta jornada que havia preparado.

A minha orientadora Elaine Cristina Ferruzzi pela confiança, dedicação, paciência, competência, responsabilidade e por ter me acolhido, acreditando na minha capacidade para a elaboração deste trabalho.

Aos professores do Mestrado, que fizeram parte desta jornada.

A todos os professores que cederam suas aulas para que a pesquisa fosse realizada.

Aos colegas do Mestrado, pela convivência e pelas contribuições para que este trabalho fosse desenvolvido.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para esta conquista.

Deixo registrado, também, o meu reconhecimento a minha família, pois sem a contribuição deles seria muito complicado vencer este desafio.

Enfim, a todos os que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta pesquisa.

Desde já, peço desculpas a todos cujo nome não está presente, mas que de algum modo deixou sua contribuição para a concretização desta pesquisa. Com certeza, todos estão inclusos na minha gratidão.

COSTA, J. A. A da. **Diálogo em sala de aula:** Interações mediadas pela Investigação Matemática. 2018. 90 p. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018.

## RESUMO


Esta pesquisa consiste em investigar as interações ocorridas entre os participantes de uma aula de Investigação Matemática, onde o conteúdo abordado foi a função seno e seus parâmetros. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo, que tem como objetivo responder à questão: "As interações que podem ser desencadeadas pela Investigação Matemática possuem potencial para a aprendizagem?". Para tanto foi usada um sequência de quatro atividades que foram aplicadas para estudantes do Ensino Médio. Cada etapa desta pesquisa esta embasada pelos pressupostos teóricos da Investigação Matemática, como prática pedagógica e as análises dos dados estão fundamentados no Diálogo. Os instrumentos utilizados para coleta dos dados versaram sobre gravações em áudio, registros escritos dos alunos e registros da professora. Foi possível constatar que as interações desencadeadas pela Investigação Matemática possuem potencial para a aprendizagem. Relacionada a pesquisa foi produzido um produto educacional que reuniu as atividades desenvolvidas para esta pesquisa, alem de outras que farão parte dos roteiros e que ficará à disposição dos professores por meio de um link disponibilizado na página do programa de mestrado. O produto educacional é composto por atividades que poderão auxiliar professores de Matemática em suas aulas.



**Palavras-chave:** Investigação Matemática. Interações. Diálogo. Produto Educacional.

COSTA, J. A. A da. **Dialogue in the classroom:** Interactions measured by mathematical research. 2018. 90 p. Dissertation presented to the Mathematics Teaching Postgraduate Program of the Federal Technological University of Paraná, Londrina, 2018.

## ABSTRACT

This research consists of investigating the interactions that took place between the participants of a Mathematical Research class, where the content covered was the sine function and its parameters. This is a qualitative research, whose objective is to answer the question: "Can the interactions that can be triggered by Mathematical Research have the potential for learning?" For this purpose a sequence of four activities were used that were applied to high school students. Each stage of this research is based on the theoretical presuppositions of Mathematical Research, as pedagogical practice and the analysis of the data are based on the Dialogue. The instruments used to collect data were about audio recordings, written records of the students and teacher records. It was possible to verify that the interactions triggered by Mathematical Investigation have potential for learning. Related to the research was produced an educational product that gathered the activities developed for this research, in addition to others that will be part of the scripts and that will be available to teachers through a link available on the page of the master program. The educational product is composed of activities that may help teachers of Mathematics in their classes.

**Keywords:** Mathematical Research. Interactions. Dialogue. Educational Product.

**LISTA DE FIGURAS**

## LISTA DE QUADROS

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

## APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

O debate sobre o ensino da Matemática escolar tem crescido consideravelmente nos últimos anos, impulsionado principalmente pela constatação de resultados nada animadores em relação à aprendizagem da mesma. Um resultado que tem preocupado a comunidade acadêmica da Educação Matemática é o do Programme for International Student Assessment – PISA/2015, o qual apresenta índices preocupantes em relação à Educação Brasileira e, em especial, à educação de Matemática, tendo em vista que estamos muito abaixo da média mundial para essa área: 66º lugar de um total de 72 países (OCDE, 2016). Lamentavelmente, esse panorama tem sido evidenciado diariamente em sala de aula e, desse modo, há necessidade de alterações no processo de ensino da Matemática escolar brasileira.

O anseio por essas mudanças tem mobilizado diversos pesquisadores da área e, por conseguinte, o constante debate sobre esse tema também nos conduziu à busca por um ensino que promova efetivamente a aprendizagem. Nesse sentido, nos propusemos ao estudo de diferentes práticas pedagógicas que possam ser desenvolvidas em sala de aula com vistas a minimizar o problema em questão.

A procura por práticas pedagógicas diferenciadas advém da constatação expressa por Corradi (2013) de que a maioria dos professores ministra suas aulas da forma tradicional, ou seja, introduz o conteúdo, apresenta as definições seguidas de listas de exercícios, e os alunos têm a função de reproduzi-los em um processo meramente decorado e muitas vezes não compreendido. Nesse sentido, Ramos et al. (2002, p.4) entende que, ao resolver exercícios de forma mecânica, os alunos desenvolvem

> [...] uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido pelo resolvedor, como a aplicação de algum algoritmo ou fórmula já conhecida. Ou seja, o exercício envolve mera aplicação de resultados teóricos [...].

Essa forma tradicional pode interferir consideravelmente na estrutura do pensamento do aluno, bem como em suas habilidades e rapidez na hora de ampliar seu raciocínio. É preciso repensar sobre essa forma de ensino, já que “o raciocínio matemático é a base do sucesso dos alunos tanto na compreensão da Matemática, como na sua utilização eficaz em situações do quotidiano [...]” (HENRIQUES; PONTE, 2014).

No mesmo sentido, Huanca (2006, p. 243) chama atenção para a importância do planejamento das aulas e o empenho do professor, tendo em vista que "é preciso que os professores estejam realmente comprometidos com o desenvolvimento contínuo do ensino [...]", pois o conhecimento do professor é primordial na hora de selecionar as atividades e de acompanhar seu desenvolvimento durante as aulas. Porém, se as potencialidades da atividade não forem bem exploradas, estas poderão encorajar ou desencorajar seus alunos (RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2014).

Considerando a diversidade de práticas evidenciadas na atualidade, entendemos, assim como Rocha (1980), que não existem metodologias que possam ser consideradas modelo-padrão de eficácia para a aprendizagem. Acreditamos que a escolha de uma ou outra, ou até mesmo a junção de duas ou mais, está intimamente relacionada ao estilo do professor, às características de seus alunos e ao tema a ser tratado. Desse modo, levando em consideração esses fatores, a escolha do professor terá maior possibilidade de influenciar positivamente a aprendizagem.

Com vistas a contribuir com o debate sobre a inserção de metodologias diferenciadas em sala de aula, procuramos neste trabalho evidenciar algumas características da Investigação Matemática que podem influenciar positivamente a aprendizagem. Assim sendo, desenvolvemos algumas atividades de Investigação Matemática (apêndice A) com um grupo de alunos e analisamos se as interações ocorridas no desenvolvimento dessas atividades podem ser consideradas um diálogo, como caracterizado por Alrø e Skovsmose (2010), uma vez que, na concepção desses autores, as "interações caracterizadas como 'diálogos' são interações que possuem qualidades que influenciam positivamente a aprendizagem" (FERRUZZI; ALMEIDA, 2015, p. 378).

Destarte, pautamos nosso estudo sobre a importância da Investigação Matemática como prática pedagógica e sobre a importância do diálogo como um facilitador da aprendizagem. Dessa forma, levantamos o seguinte questionamento: "As interações que podem ser desencadeadas pela Investigação Matemática possuem potencial para a aprendizagem?".

Para responder nossa indagação nos pautamos: 1) na Investigação Matemática como prática pedagógica, procurando elencar, por meio de uma revisão teórica, como vem sendo empregada e o que os pesquisadores têm buscado responder com suas pesquisas, e; 2) na ocorrência do diálogo como influência positiva para a aprendizagem.

# ESTRUTURA DO TEXTO

A estrutura deste texto compreende quatro capítulos, além da introdução e das referências bibliográficas.

No primeiro capítulo, iniciamos nosso estudo discorrendo sobre os problemas envolvendo o ensino e a aprendizagem da Matemática, o emprego da Investigação Matemática como uma prática pedagógica, diante do que ela pode proporcionar para a aprendizagem dos alunos. Tomamos como aporte teórico João Pedro da Ponte, que é o precursor dessa prática. A Investigação Matemática tem conquistado seu espaço no currículo escolar devido à importância que ela dá ao trabalho do aluno, no sentido de fazer Matemática. Destacamos, ainda, o papel do professor que é determinante para que essa prática pedagógica possa contribuir para a aprendizagem dos alunos.

Continuando o capítulo, procuramos elencar, por meio de uma revisão teórica, algumas pesquisas atuais desenvolvidas sobre a Investigação Matemática, no sentido de analisar como essa prática pedagógica vem sendo empregada no ensino e, ainda, como que os pesquisadores têm buscado responder suas indagações com essas pesquisas. Apresentamos, ainda, um estudo sobre a obra de Alrø e Skovsmose (2010) que defende o diálogo como um diferencial no processo de aprendizagem.

O segundo capítulo inicia-se com a metodologia que utilizamos para coletar os dados. Nela discorremos todos os passos dados em cada etapa de nosso trabalho, o que levamos em consideração para a escolha da instituição de ensino onde aplicamos as atividades, o que foi considerado como fonte de informação e quais as tecnologias empregadas para captar as informações que analisamos posteriormente.

No terceiro capítulo, descrevemos as atividades desenvolvidas e aplicadas para alunos em sala de aula e analisamos, à luz do referencial teórico, suas contribuições para a aprendizagem.

No quarto capítulo, elaboramos nossas considerações finais sobre o trabalho.

Apresentamos, por fim, as referências bibliográficas utilizadas para o desenvolvimento da pesquisa. Como apêndice desta dissertação, frente às atividades que foram desenvolvidas e analisadas, foi apresentado um material, Produto Educacional resultante de nosso trabalho, que poderá ser utilizado como material de apoio pelos professores de Matemática. O produto educacional será disponibilizado na *internet* por meio de um *link* na página do Programa de Mestrado Profissional de Ensino de Matemática - PPGMAT.

# QUADRO TEÓRICO

Neste capítulo, falaremos sobre a Investigação Matemática como prática pedagógica e a qualidade do diálogo para a aprendizagem de Matemática. Estudaremos a Investigação Matemática como prática pedagógica por acreditar que a mesma permite aos alunos desenvolverem suas habilidades de pensamento, assim como construírem seu conhecimento. No que se refere à qualidade do diálogo, apresentamos um estudo sobre o entendimento desta por Alrø e Skovsmose (2010) para que venha a ser considerada um diálogo e, consequentemente, contribuir para a aprendizagem dos alunos.

## 1.2 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO PRÁTICA PEDAGÓGICA

Optamos por estudar a Investigação Matemática como prática pedagógica, segundo as concepções de João Pedro da Ponte[1], por acreditar que a mesma possibilita aos alunos o desenvolvimento de habilidades matemáticas e a construção do conhecimento, como salientam Lamonato e Passos (2011, p. 62), para quem a Investigação Matemática é "[...] um meio pelo qual pode ocorrer a aprendizagem da Matemática em um processo que busca possibilitar ao estudante momentos de produção/criação de seus conhecimentos matemáticos, respeitando o nível de desenvolvimento em que ele se encontra [...]".

Para Fonseca (2000), Oliveira (1998), Brunheiras (2000), Brocardo (2001) e Varandas (2000), as aulas ministradas por meio da Investigação Matemática possibilitam um novo olhar para a Matemática, uma vez que uma aula investigativa suscita mudança de atitude de ambos os lados. Para o professor, uma reflexão associada a uma análise sobre sua prática de ensino; e para os alunos, uma possibilidade de participar ativamente da construção de modelos matemáticos. Com isso, tem se tornado cada vez mais presente a inserção de atividades investigativas nos currículos escolares. Essa inserção é defendida por proporcionar aos alunos o desenvolvimento de habilidades, como, por exemplo, pensar matematicamente, tomar decisões e atribuir novos sentidos ao que se estuda em sala de aula (CORRADI, 2013). Braumann (2002, p. 5) entende que

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada

[1]Professor no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É Coordenador Científico do Centro de Investigações em Educação (CIE) da faculdade. Trabalha na formação inicial e continuada de professores de Matemática. Coordena diversos projetos de investigação. É Coordenador da área de Formação de Professores no âmbito do grupo constituído pelo Ministério da Ciência, Inovação e Ensino.

> grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detectivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

Existem diversas maneiras de proporcionar ao aluno o desenvolvimento de um espírito investigativo, e eles próprios podem desencadear esse processo, seja por meio de questões das próprias atividades que estão a desenvolver, seja por questões apresentadas pelo professor no decorrer da aula. Trabalhar com atividades investigativas

> [...] não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado (PONTES; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 9).

Assim, "Uma Investigação Matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 16) que, inicialmente, não apresentam uma definição própria, mas que vão se consolidando conforme se delimitam os problemas. De acordo com esses autores, os problemas não precisam ser muito aprimorados, mas devem permitir que se formulem questões para as quais, inicialmente, não se tem uma resposta; essas serão obtidas no decorrer do estudo. Com isso, os alunos poderão ampliar suas múltiplas capacidades como a criatividade, a interpretação, a reflexão, a argumentação, a sistematização e a autonomia, que são aspectos da investigação.

A prática da Investigação Matemática tende a fornecer um contexto para que os alunos percebam a necessidade de justificar as suas informações ao evidenciar o seu raciocínio para o professor e demais colegas (PONTE et al., 1999).

Uma aula de investigação pode ser um bom ponto de partida para uma aula mais interativa de Matemática, cabendo ao professor a responsabilidade de preparar um ambiente adequado. Afinal, parte dele a ação de instigar seus alunos a pensar como um matemático, transformando aquele ambiente de aprendizagem em um ambiente de valorização, no qual os alunos sentirão que suas ideias são importantes. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), é determinante a maneira como o professor apresenta o problema para os alunos, responde suas dúvidas, dá-lhes atenção e incentiva-os, sem mostrar-lhes as respostas abertamente, pois essa é uma postura que fará com que os alunos reflitam e, assim, construam seu conhecimento, visto que esse "[...] se dá pela superação de incertezas, por meio do questionamento e pela busca de respostas, e não como consequência certa do acúmulo de conhecimento anteriores". Assim sendo, a dúvida e a incerteza tornam-se o combustível para a busca do novo conhecimento (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 54).

É função do professor iniciar e dirigir a discussão, envolver os alunos, cultivar seu interesse pelo assunto e propor questões que esclareçam ou estimulem-nos. Ele deverá, ainda, aceitar contribuição de todos os alunos, e não somente daqueles que habitualmente têm respostas corretas ou ideias apropriadas (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1999). Com isso, "[...] o professor deve pensar em intervenções que levem os alunos a perceber o que eles próprios fizeram e a examinar novas possibilidades [...]" (LAMONATO; PASSOS, 2002, p. 65).

É preciso que o professor deixe claro qual será sua função no decorrer das atividades e qual será a dos alunos, informando-os que terão seu apoio, mas que a atividade deve ser desenvolvida por seus próprios méritos (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013). Nesse sentido,

> O papel do professor é essencial na seleção de tarefas, na estruturação da aula, na sua condução e na negociação de significados, que é especialmente importante para a aprendizagem dos alunos. O professor tem que orientar o processo de comunicação, reconhecendo o papel da linguagem não oral e tentando promover a linguagem matemática – sem a impor prematuramente. O professor deve estar ciente que pelos seus actos, ou mesmo por omissão, está constantemente transmitindo informação, através de linguagem oral e não oral – de modo que intervir e não intervir são, basicamente, duas formas da intervenção (PONTE et al., 1999, p.147).

São vários os fatores determinantes para o sucesso de uma aula de Investigação Matemática. Dentre esses, está a seleção ou criação das propostas, na qual os objetivos tendem a se adequar às particularidades da turma e às circunstâncias que surgem na aula. Preparar uma aula com caráter investigativo exige do professor uma maior dedicação. Por isso,

> A natural insegurança do professor num tipo de trabalho que ainda não domina, aliada ao investimento que exige, especialmente quando faltam recursos apropriados na escola, podem constituir obstáculo, se não intransponíveis, pelo menos limitantes ao desenvolvimento deste tipo de actividade (OLIVEIRA; SEGURANDO; PONTE, 1999, p.191).

Para que isto não ocorra, é importante que o professor conheça bem essa prática pedagógica e esteja preparado para lidar com situações adversas ao que havia preparado.

## 1.2 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

O Ensino de Matemática, ainda hoje, dá pouca ou nenhuma importância a situações em que o aluno tenha oportunidade, por exemplo, de formular e resolver problemas, testar hipóteses, realizar investigações, analisar e demonstrar os resultados obtidos e argumentar a seu respeito. Embora sejam processos fundamentais em uma aula de Matemática, sua prática ainda é pouco explorada (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1999).

A prática da Investigação Matemática mostra que em uma situação investigativa é natural os alunos apresentarem abordagens diferentes do esperado, pois a Investigação Matemática é "[...] um processo intencional que tem por objectivo a descoberta [...]" (PORFÍRIO; OLIVEIRA, 1999, p.113). Essa descoberta consiste, também, em chegar a momentos onde uma ou mais hipóteses resistirão continuamente a testes, oportunizando, assim, aos alunos perceberem que uma relação válida para diversos casos é considerada válida para todos.

O professor deve considerar que os alunos podem não possuir os conhecimentos necessários para provar uma conjectura, mas cabe mostrar a importância de se realizar diversos testes. É preciso trabalhar com cuidado as atividades de investigação, estando essas dentro das possibilidades dos alunos de chegarem à prova das hipóteses que resistiram aos testes.

Uma das características da Investigação Matemática é possuir um caráter divergente, onde o objetivo é percorrer todos os caminhos que se mostrem interessantes a partir de uma dada conjuntura, o que a faz ser desafiadora e motivadora. Nisso, difere das atividades mais fechadas e estruturadas, aquelas que exigem do aluno uma resolução mecânica, que são muitas vezes utilizadas, ainda hoje, nas aulas de Matemática. A Investigação Matemática tem uma grande importância para a aprendizagem dos alunos, pois permite explorar diversos conceitos matemáticos, além de desenvolver e aprimorar as capacidades e habilidades dos alunos (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1999).

Não é possível fazer Matemática sem praticá-la. Não estamos nos referindo à prática mecânica, mas sim àquela baseada em tentativas, erros e acertos. "Por outro lado, necessitamos entender, compreender e tratar a Matemática como um processo, como uma ciência de fato, que tem caráter de investigação, que é um conhecimento historicamente em ***construção*** e não somente ***construído***" (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 54. Grifo dos autores).

Entendemos que a inserção de uma prática de ensino, como é o caso da Investigação Matemática, requer um lugar de destaque no ensino de Matemática, visto que essa possibilita estabelecer ligações entre os mais variados tópicos, apresentando uma interpretação distinta e associada da Matemática (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1999). Assim, dentro de suas abrangências, a Investigação Matemática na sala de aula oportuniza a vivência do estudante com a formulação de questões, conjecturas, testes, argumentações e discussão de ideias em uma nova visão do ensino da Matemática.

## 1.3 PREPARAÇÃO DE AULAS DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

A preparação de aulas de investigação é um momento em que o professor deve refletir e empenhar-se, pois

> A atividade investigativa preza a perseverança, a busca do inesperado e, no tocante aos problemas propostos, valoriza sua solução tanto quanto as diferentes formas e estratégias de resolvê-los. A exploração-investigação pode surpreender a proposta inicial feita e desvendar aspectos não observados pelo professor, ao preparar a tarefa ou ao propô-la (LAMONATO; PASSOS, 2002, p. 65).

Portanto, para que a prática de atividades de Investigação Matemática se torne verdadeiramente um momento de aprendizagem para os alunos, é preciso muito empenho do professor na preparação dessas aulas. Haja vista que a análise e a exploração de uma atividade investigativa não determinam seu grau de dificuldade, mas, sim, as explicações, informações, sugestões e orientações do professor que são desencadeados em sala de aula. A diversidade de procedimentos que os alunos podem desenvolver também demanda do professor uma preparação e uma visão além do que será proposto, isso para que não seja surpreendido por situações inesperadas (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999).

Seguindo a mesma linha de pensamento de Ponte et al. (1998), os autores Lamonato e Passos (2011) ressaltam que, ao criar ou optar por uma atividade investigativa, é importante que o professor saiba quais objetivos quer atingir, pois um dos aspectos relevantes de uma atividade investigativa está em propor situações abertas[2], ficando a cargo do investigador (estudante) estabelecer suas próprias questões.

Ao preparar uma atividade de investigação, o professor não tem a garantia do envolvimento dos alunos, mesmo diante das características inerentes a ela, pois não é possível

[2]Situações que exijam reflexão, compreensão de conceitos matemáticos já estudados e uma relação entre esses conceitos e uma possível solução para o problema.

saber de antemão como as coisas irão ocorrer em sala de aula. Da mesma forma, a aprendizagem também não é garantida por intermédio das atividades oferecidas, mas é ocasionada pelas atuações e pela atenção do aluno, envolvendo seu interesse, motivação, concepções sobre a Matemática e aprendizagem da mesma (LAMONATO; PASSOS, 2011).

Portanto, é necessário que o professor, além de todos os cuidados na preparação e escolha da atividade, pense na estrutura das aulas, ou seja, no modo como pretende que os alunos trabalhem. Um ponto a ser considerado é o tempo de duração das aulas, pois é importante que a atividade não seja interrompida pelo término da aula, tendo que deixar para a aula seguinte uma explicação ou até mesmo uma apresentação dos alunos, pois seria prejudicial para a aprendizagem (PONTES; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013); (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999).

A seguir, faremos referência a alguns trabalhos desenvolvidos no âmbito da Investigação Matemática, à sua importância, ao que os autores desenvolveram e quais objetivos pretendiam atingir com suas pesquisas, conduzindo, assim, para um novo olhar sobre nosso trabalho.

## 1.4 SOBRE O QUE TRATAM AS PESQUISAS DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA?

Nesta seção apresentaremos o estudo bibliográfico realizado sobre algumas pesquisas tendo como foco em Investigação Matemática. Consultamos alguns bancos de dados, onde utilizamos a Investigação Matemática como palavras chaves. Os artigos foram pesquisados nos seguintes bancos de dados: ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática); CIBEM (Congresso Iberoamericano de Educação Matemática; ZETIKE (Revista de Educação Matemática) e UNIFRA (Centro Universitário Franciscano. Após analisar alguns trabalhos, selecionamos seis (quadro 1) que vinham ao encontro de nosso objetivo para esta pesquisa.

Analisamos, nestes artigos, como a Investigação Matemática, como essa prática pedagógica, vem sendo empregada, e o que os pesquisadores têm buscado responder com essas pesquisas.

| Autor | Ano | Título |
|---|---|---|
| Pereira, Bernardelli e Junior | 2010 | Um Estudo sobre a função seno e seus parâmetros por meio da Investigação Matemática em Sala de Aula. |
| Strapason e Bisogni | 2010 | Investigação matemática na sala de aula: experiência com Alunos do ensino médio sobre sucessões numéricas. |
| Fernandes, Boni e Savioli | 2013 | Investigação matemática no ensino de números decimais: um relato de experiência. |
| Grando e Belke | 2014 | Investigação matemática na sala de aula: tratamento da informação no ensino fundamental. |
| Guerra e Bisognin | 2016 | Investigação matemática na sala de aula: Ensino de conceitos de estatística para o 8° ano do ensino fundamental. |
| Pereira, Munhoz, Quartieri | 2016 | Atividades investigativas: possibilidade de ensino de conceitos trigonométricos no triângulo retângulo na Licenciatura em atemática. |

**Quadro 1:** Relação de Artigos Escolhidos
**Fonte:** Autora

Após a leitura de alguns artigos encontrados nos bancos de dados, já mencionados, não encontramos trabalhos que fizesse menção a análise das interações que podem ocorrer em uma atividade de Investigação Matemática podendo este ser ou não considerado um diálogo conforme os autores Alrø e Skovsmose (2010). Isso reforçou nosso interesse pelo tema, a fim de colaborar com o processo de ensino e aprendizagem, visando à construção de um produto educacional, fruto de nossa dissertação do mestrado profissional.

Realizando uma triagem, selecionamos algumas leituras para tomar conhecimento sobre o que vem sendo desenvolvido sobre Investigação Matemática, bem como as abordagens prático-teóricas para uso na sala de aula.

Não houve um critério específico para a escolha dos trabalhos que serão apresentados, a não ser o fato de serem de 2010 até o momento. Durante nossa pesquisa, encontramos nesses trabalhos a utilização da Investigação Matemática como prática pedagógica sequenciada pela aplicação de atividades. Na pesquisa desenvolvida por Pereira, Bernardelli e Santos (2010), intitulada *Um estudo sobre a função seno e seus parâmetros por meio da Investigação Matemática em sala de aula*, os autores apresentam uma atividade envolvendo a função seno e seus parâmetros, onde os alunos foram convidados a investigar cada parâmetro dentro da função seno.

Pereira, Bernardelli e Santos (2010) utilizam a atividade investigativa para mostrar que o ato de investigar possibilita identificar características matemáticas implícitas em dadas situações, e que essa alternativa pedagógica é uma possível estratégia de ensino. Para os autores, a Investigação Matemática proporciona experiência na identificação dos procedimentos matemáticos envolvidos em uma dada situação, bem como ajuda a compreender características que se pretende que os alunos desenvolvam, tais como: ampliação da sua capacidade de observação, autonomia e destreza para questionar e defender seus pontos de vista.

Strapason e Bisogni (2010), no artigo *Investigação Matemática na sala de aula: experiência com alunos do Ensino Médio sobre sucessões numéricas* descreveram o resultado de uma experiência realizada sobre o estudo de sucessões numéricas utilizando a Investigação Matemática como metodologia de ensino. A tarefa incidiu sobre a construção de polígonos por meio de palitos de fósforo. O material ficou à disposição dos alunos para que pudessem manipulá-lo na busca por estratégias e soluções. Os autores observaram que a maioria dos grupos demonstrou a capacidade de fazer generalizações e relacionar os conteúdos com a geometria.

Na concepção dos autores, os alunos perceberam que a sucessão se tratava de uma função e que a representação geométrica associada à manipulação dos palitos contribuiu profundamente para a compreensão do conceito. Ao final, os autores completam dizendo que a introdução de atividades investigativas no cotidiano de sala de aula contribuiu de forma efetiva para a compreensão do conteúdo estudado, além de possibilitar aos alunos um ambiente de confiança entre eles e o professor.

Fernandes, Boni e Savioli (2013, p. 1) relatam o resultado de uma experiência realizada com uma turma da sala de apoio[3], utilizando a Investigação Matemática como intervenção pedagógica. As autoras estabeleceram como objetivo "relatar essa experiência destacando a necessidade dos professores de se preocuparem em identificar metodologias que mais se adequam aos seus alunos, evidenciando o quanto isso facilita a aprendizagem dos mesmos".

A professora montou na sala de aula um minimercado, com diversos produtos e preços, e assumiu a posição de comerciante e dona do mercado; já seus alunos eram os clientes. Cada aluno deveria fazer a compra indicada nas listas que receberam, e que eram diferentes entre si; além disso, cada aluno recebeu uma quantia diferente de dinheiro, entre cédulas e moedas. Ao realizarem as compras, os alunos eram questionados pela professora se o dinheiro que tinham era suficiente. Com isso eles tinham que fazer cálculos, inclusive para saber qual seria o valor do troco, caso houvesse. Os alunos não poderiam usar lápis, papel ou

[3]Programa de Atividades Complementares Curriculares em Contraturno na Educação Básica na Rede Estadual de Ensino. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=28

calculadora; deveriam fazer cálculo mental, porém, poderiam conversar com os colegas. Essa atitude, segundo as autoras, contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio e para o estabelecimento de relações entre a matemática da sala de aula e a do cotidiano deles.

Fernandes, Boni e Savioli (2013) concluíram que a Investigação Matemática como metodologia de ensino contribuiu para o progresso dos alunos, em sua maioria, tendo em vista que conseguiram entender que a Matemática aprendida na escola é a mesma Matemática utilizada por eles em situações cotidianas.

Grando e Belke (2013) desenvolveram uma pesquisa com o objetivo de "analisar o potencial da abordagem de Investigação Matemática no desenvolvimento de conteúdos do bloco Tratamento da Informação[4]". O tema escolhido para trabalhar com os alunos foi "o lixo", onde os alunos, em grupos, tiveram primeiramente que elaborar questões sobre o tema com a finalidade de entrevistar pessoas da comunidade e, com isso, obter informações para estudar e aplicar o conteúdo matemático sobre o bloco Tratamento da Informação.

Em sintonia com as ideias de João Pedro da Ponte, os autores certificaram que, ao participarem de atividades investigativas, os alunos tendem a aprender uns com os outros, revelando um progresso na maneira de pensar e representar matematicamente. Portanto, com base nos resultados obtidos, os autores concluíram que a Investigação Matemática influenciou de forma positiva a aprendizagem e o desenvolvimento intelectual dos alunos, pois estes conseguiram abstrair informações essenciais que os permitiram generalizar a situação. Para os autores, o processo de formação de conceitos sobre os conteúdos estudados foi significativo, mas não o suficiente para garantir sua plenitude, nem, tampouco, que os alunos detenham todo o conhecimento do conteúdo.

Guerra e Bisognin (2016) também apresentam uma pesquisa cujo objetivo é analisar se a Investigação Matemática, apoiada nas Tecnologias da Informação e da Comunicação, contribui efetivamente para o ensino e a aprendizagem dos conceitos de Estatística em uma turma de alunos do 8° ano do Ensino Fundamental. Procurando alcançar esses objetivos os autores desenvolveram uma sequência de atividades contemplando a construção de conceitos de Estatística. As atividades foram aplicadas para os alunos, por meio da Investigação Matemática, embasada nas ideias de Ponte (2003), que contou, ainda, com o apoio das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC).

[4]O bloco do Tratamento da Informação, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, compreende conteúdos de Probabilidade, Estatística e Contagem.

As atividades foram pensadas para que pudessem envolver ativamente os alunos na busca por dados e informações. Para isso, a atividade voltava-se a pesquisar o perfil da própria turma. Após estabelecerem o que seria investigado (quais as características da turma), a professora abriu um fórum no ambiente virtual (AVA) *Moodle* para que respondessem as questões. Ao término da atividade, e frente às discussões surgidas durante a apresentação dos resultados obtidos pelos grupos, as autoras observaram que, dentre os seis grupos formados, apenas dois tiveram dificuldade em compreender satisfatoriamente os conceitos abordados nas atividades, pois eram formados por alunos um pouco mais introvertidos e que participavam pouco das aulas.

Ao final do trabalho, as autoras observaram uma maior desenvoltura no uso do computador, no ambiente virtual, nas interações com os colegas, na escrita e nas apresentações orais. As autoras concluíram que a metodologia Investigação Matemática colaborou para o ensino e a aprendizagem dos conceitos de Estatística, sendo possível construí-los a partir de situações do cotidiano, fazendo com que os alunos participassem mais ativamente do processo de construção do conhecimento matemático.

Pereira, Munhoz e Quartieri (2016) trabalharam em seu artigo os conceitos de triângulo retângulo por meio da Investigação Matemática, tendo como objetivo "abordar as conjecturas que emergiram de atividades investigativas, envolvendo alguns conceitos de trigonometria no triângulo retângulo com alunos da Licenciatura em Matemática". Buscando alcançar seu objetivo, os autores prepararam e desenvolveram atividades investigativas que foram aplicadas para pequenos grupos de alunos do 2º ano de Licenciatura em Matemática.

Para o desenvolvimento das atividades os participantes receberam régua, compasso e transferidor, e ao término das atividades os grupos explanaram os resultados para o restante da turma e professor.

Analisando os resultados obtidos com a pesquisa, os autores Pereira, Munhoz e Quartieri (2016) perceberam uma notória progressão dos alunos quanto ao entendimento do conceito de trigonometria no triângulo retângulo, ao trabalharem o conteúdo utilizando a Investigação Matemática. Ainda de acordo com os autores, as atividades possibilitaram refletir e construir uma nova perspectiva em relação aos conteúdos de Matemática, pois os resultados demonstraram um crescimento da capacidade de elaborar conjecturas e de reconhecer de modo significativo a aprendizagem de alguns conceitos trigonométricos.

Como podemos observar nesses poucos trabalhos, a interação ocorrida em atividades de

Investigação Matemática é citada e considerada importante, porém não encontramos trabalhos que evidenciam como deve ser essa interação para que a mesma possua potencial para promover a aprendizagem dos alunos. Diante disto, justificamos a importância de nossa pesquisa para a área de Educação Matemática. Considerando o valor das interações que podem emergir durante as atividades de Investigação Matemática, trataremos na próxima seção sobre a qualidade do diálogo na perspectiva da aprendizagem sob a ótica de Alrø e Skovsmose (2010).

## 1.5 QUALIDADE DO DIÁLOGO NA PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM

Para uma comunicação influenciar a aprendizagem é necessário que se tenha qualidade nessa comunicação, o que pode ser apresentado em termos de relações interpessoais, posto que

> Aprender é uma experiência pessoal, mas que ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais. E, por conseguinte, a aprendizagem depende da qualidade do contato nas relações interpessoais que se manifesta durante a comunicação entre os participantes (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 12).

Falar sobre diálogo não parece ser algo difícil, porém quando se trata de analisá-lo em determinado ambiente, isso, sim, se torna complexo. A sala de aula é um desses ambientes que exige uma análise mais cuidadosa quando se trata de averiguar a existência do diálogo nas interações entre os participantes.

O ensino demanda a participação de todos. Afinal, não podemos esquecer que o professor tem o conhecimento, mas é por meio do diálogo que ele procurará disseminar esse conhecimento, buscando contribuir para o crescimento dos seus alunos. (PORTO, 2010).

O termo diálogo é caracterizado por Alrø e Skovsmose (2010) como uma conversação que contempla aspectos específicos (chamados de atos dialógicos), que visam a promover a aprendizagem e desenvolver habilidades para a aplicação de conceitos matemáticos estudados. O estudo sobre o diálogo implica em analisar a qualidade com que esse acontece entre professor e aluno, e entre aluno e aluno. Segundo os autores citados, a hipótese inicial que norteou suas investigações afirma que “as qualidades da comunicação na sala de aula influenciam as qualidades da aprendizagem de Matemática [...]” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 11). Entretanto, a qualidade de uma conversação se refere a certas propriedades de uma interação que não podem existir enquanto houver um dominante.

Nesse sentido, Alrø e Skovsmose (2010, p. 12) entendem que

> As qualidades de comunicação podem ser expressas em termos de relações interpessoais. Muito mais do que uma simples transferência de informação de uma parte a outra, o ato de comunicação em si mesmo tem papel de destaque no processo de aprendizagem. A comunicação tem um sentido mais profundo do que se percebe à primeira vista [...]. Aprender é uma experiência pessoal, mas ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais. E, por conseguinte, a aprendizagem depende da qualidade do contato nas relações interpessoais que se manifesta durante a comunicação entre os participantes [...].

Desse modo, a aprendizagem está diretamente ligada à qualidade do contato que se evidencia na comunicação entre os participantes. Embora a aprendizagem seja um processo individual, essa depende de conhecer novas ideias que só descobrimos nas relações com outras pessoas. Assim, o diálogo seria uma forma de promover a aprendizagem, uma vez que é motivado por uma perspectiva de mudança (PORTO, 2010). Compreendemos que o intuito da Investigação Matemática não é oferecer respostas prontas a problemas estudados, mas instigar a busca por eles.

Segundo Alrø e Skovsmose (2010), o diálogo não está restrito a uma situação ou problema, mas, sim, à interação e ao comprometimento entre os participantes. Nesse sentido, os autores reforçam as ideias de Freire (1970), o qual aponta a importância das palavras ação e reflexão, de modo que no diálogo uma pode complementar a outra, e a ausência de uma delas implicam no prejuízo da outra. Atuar sem refletir implica em ativismo, e refletir sem atuar torna-se verbalismo.

Na visão dos autores, Alrø e Skovsmose (2010), dialogar é uma ação de partilha e estímulo à investigação, o qual está repleto de suas particularidades e qualidades. Dessa maneira, os autores buscam “[...] pontuar certos aspectos da comunicação que podem apoiar certos aspectos da aprendizagem e, ao mesmo tempo, enfatizar a importância destes aspectos” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.16). Esses aspectos mencionados envolvem “realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade” (p.123), e cada um expressa uma característica própria. No caso de realizar uma investigação, esse reforça que o diálogo consiste numa conversação onde se procura adquirir conhecimentos e novas experiências. (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010).

Ao compreenderem que o diálogo é uma “conversação com certas qualidades”, Alrø e Skovsmose (2010, p. 119) se mostram interessados no caso de que este “[...] tem uma relação próxima com certa interpretação de investigação [...]”. Diante disso, na concepção dos autores, o diálogo trata-se de uma conversação que visa à aprendizagem.

Trabalhar em uma investigação denota que os partícipes do diálogo deverão sair da sua zona de conforto, onde correr riscos faz parte do processo, e a curiosidade atuará como combustível na busca por uma solução do problema (PORTO, 2010). Acompanhando a linha de raciocínio desse autor, o diálogo volta-se para uma conversação investigativa, no qual o intuito é buscar algo desconhecido (conhecimento), que ainda não se tem, mas que se almeja alcançar.

Atuar em um processo investigativo vai além da zona de conforto, onde não se tem a certeza de uma reposta pronta, seja ela parcial ou não. Viajar até o desconhecido faz parte do processo investigativo, e os participantes exercem o papel de condutor e executor desse processo. Vale ressaltar que, quando falamos em participantes, estamos falando de professores e alunos envoltos em uma cooperação mútua na busca pelo até então desconhecido (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010).

A colaboração dos participantes constitui um processo importante, no sentido de explorar perspectivas e às vezes até abrir mão de outras para que se possa inovar, pois, quando o participante assume essa postura, deixa sua comodidade de lado, podendo engajar em um processo cuja solução final resultará de sua disposição e curiosidade. (FERRUZZI, 2011).

Estar acessível a novas ideias e preparado para assumir situações inesperadas é o que Alrø e Skovsmose (2010, p. 123) pontuam como correr riscos. Esse aspecto "[...] é uma forma de expressar a natureza imprevisível dos desdobramentos de um diálogo [...]". Assim, quem participa do diálogo precisa expor aos outros participantes do grupo suas ideias, e estar apto a ouvir críticas e argumentações sobre seu ponto de vista, assim como ser flexível a mudanças.

É preciso ter em vista que correr riscos faz parte do diálogo e que

> [...] um diálogo é algo imprevisível. Não há respostas prontas, conhecidas de antemão, para os problemas. Elas surgem através de um processo compartilhado de curiosa investigação e reflexão coletiva, com o propósito de obter conhecimento [...] (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.128).

Conhecimento esse, que, em uma aula de Matemática, é concebido de distintas maneiras pelos alunos, resultando em diferentes construções de significados matemáticos. (ARAÚJO, 2004).

O ato de dialogar é um processo arriscado, e o professor deve estar pronto para enfrentar desafios, sendo que estes podem ocorrer de ambos os lados. Assim, "[...] para que o diálogo aconteça, é importante [...] não remover o risco, mas estabelecer um ambiente de aprendizagem confortável e respeitoso e uma atmosfera de confiança mútua [...]" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.129). Dessa forma, o professor pode agir como supervisor, tomando cuidado para que os alunos não se percam ao se depararem com uma situação de risco, sem, porém, suprimir o risco por completo.

O ambiente de investigação pode ocasionar desafios ao professor por não ter como presumir as reações e questões inesperadas dos alunos (FERRUZZI, 2011). Assim, o professor

> [...] deve estar preparado a se deparar com uma reposta inesperada por parte do grupo. O diálogo pode tomar rumos não previstos, que podem ser tanto ruins quanto interessantes, cabendo ao professor conduzi-lo para outros caminhos, que podem ir além do que tinha sido planejado [...] (PORTO, 2010, p. 9).

Para isso, o professor deve estar atento, caso seja necessário tomar decisões rápidas e fazer escolhas durante o procedimento. O trabalho do professor como coordenador de discussões e como mediador dos obstáculos encontrados compreende, entre outras situações, motivar e observar constantemente o comportamento dos alunos, fornecendo orientações, além de reforçar os aspectos que sejam importantes para a condução da atividade. Assim, um processo investigativo envolve vários aspectos que são apontados por Alrø e Skovsmose (2010).

O fato de realizar investigação implica em correr riscos, o que também faz parte dos aspectos do diálogo. Outro aspecto apontado por Alrø e Skovsmose (2010) trata de promover a igualdade, o que faz referência ao relacionamento interpessoal, que é indispensável para o diálogo como aqui qualificado. Para os autores, promover a igualdade não requer negar as diferenças e diversidades, mas sim saber tratá-las e, para isso, os alunos não podem sofrer interferência pela autoridade do professor, uma vez que

> [...] Igualdade não se limita ao aspecto da competência profissional, ela precisa ser percebida como uma forma de trato respeitoso entre as pessoas que são parceiras de investigação. Como já foi dito, ser igualitário não significa negar a existência de diferenças [...] (ALRØ; SKOVSMOSE, p.139).

Em cada aula onde impera a prática do processo investigativo, o professor altera seu papel, inclusive no aspecto da parceria na investigação. Entretanto, para um diálogo investigativo ocorrer, o desafio proporcionado pelo professor precisa estar dentro das possibilidades e conhecimentos dos alunos no assunto. Assim, "é importante entender que não é qualquer ato da fala que compõe um diálogo [...]", mas sim a qualidade dela. (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.133).

Os autores acima citados relacionam o ato da fala com os atos dialógicos. E esses atos são considerados com características especiais que ajudam a desenvolver, controlar e sustentar o diálogo. Conforme esses autores, os atos dialógicos consistem em eventos especiais, mais precisamente oito, que são considerados uma segunda caracterização. Essa segunda caracterização inclui: 1) estabelecer contato; 2) perceber; 3) reconhecer; 4) posicionar-se; 5) pensar alto; 6) reformular; 7) desafiar, e; 8) avaliar. Todos são considerados atos dialógicos "e consequentemente envolvem realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 135).

A seguir será apresentada uma síntese das principais características dos atos dialógicos evidenciadas por Alrø e Skovsmose (2010).

### 1.5.1 Estabelecer Contato

Estabelecer contato denota entrar em sintonia com o colega, ouvindo, questionando, oferecendo apoio e buscando entender e respeitar o pensamento. O estabelecimento de contato é um aspecto essencial para que o diálogo ocorra. Além desse, existem também os fatores emocionais que "constituem parte essencial do processo de aprendizagem que propicia certas qualidades à aprendizagem" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 106). Ferruzzi (2011, p. 100) ressalta o ato de estabelecer contato no seguinte episódio:

> **1. A9**: Olha aqui... no começo parece linear... (mostrando os três primeiros pontos do gráfico apresentado na Figura 7).
> **2. A10**: Mas aqui "tá" longe... não dá pra ser uma reta... (mostrando o último ponto representado na tendência dos dados).
> **3. A9:** Ah... dá pra ver se é linear. É só ver a variação. Se for igual é linear, né?
> **4. A10**: A taxa de variação? Como assim?
> **5. A9**: É... a variação da concentração em relação à profundidade... se for constante, é linear...
> **6. A10:** Então vamos calcular... (FERRUZZI, 2011, p. 100)

Esse ato apresenta-se quando os alunos requerem a atenção um do outro para suas observações, empregando expressões do tipo: "olha aqui", "né?", "não é?", "ó". Esse tipo de interação consiste no que Alrø e Skovsmose (2010) apontam como "falando a mesma língua", onde expõem suas preocupações quanto ao entendimento e à formulação de hipóteses (FERRUZZI, 2011).

### 1.5.2 Perceber

Na concepção de Alrø e Skovsmose (2010), perceber se refere a avaliar o entendimento do aluno quanto a certo problema. Significa explorar algo desconhecido, a respeito do qual nada se sabia nem se tinha conhecimento antes. O ato de perceber de maneira apropriada vem acompanhado de questões que buscam explicações, de cujos resultados não se tem conhecimento de antemão.

Durante uma atividade investigativa, podem surgir ideias interessantes e relevantes, mas que muitas vezes não são levadas em consideração por não serem percebidas. Aproximar-se de um assunto e persistir nele, antes de desaprová-lo, também faz parte do contexto de perceber. Desse modo, essa ação desperta elementos investigativos, como, por exemplo, uma atitude de curiosidade e a formulação de questões hipotéticas que podem ser consideradas como algo positivo dentro do procedimento de investigação (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010). Essa atitude de curiosidade investigativa pode ser observada no seguinte episódio:

> **15. A9:** E a quantidade de cálcio pode ser perigosa.
> **16. Prof:** Perigosa? Por quê, A9?
> **17. A9:** Porque o excesso faz mal à saúde..pode causar pedras no rim.
> **18. A7:** E também é ruim para a natureza por causa da dureza da água.
> **19. Prof:** Dureza da água? O que é isso?
> **20. A7:** Ah... não pode beber água dura, nem lavar roupa...
> **21. Prof:** Por quê? Não pode usar nem pra lavar roupa?
> **22. A7:** Não é que não pode, é que como precisa de mais sabão para formar espuma, prejudica o meio ambiente.
> **23. A13:** Mas o cálcio também é bom para a saúde.
> **24. Prof:** Explique melhor, A13. (FERRUZZI, 2011, p.93).

Nessa interação, é possível observar a presença desse ato dialógico, denominado perceber, a partir do turno[5] 16, em que Ferruzzi (2011), por meio de questionamento, procura investigar, demonstrando curiosidade sobre o que os alunos estão pensando.

### 1.5.3 Reconhecer

Trata-se de um procedimento tanto do professor quanto dos alunos. O professor, participante do diálogo, pode assessorá-los em questões como "por quê?", levando-os a apresentar suas ideias matemáticas. Assim, o professor, procurando reconhecer o artifício que

[5]A palavra turno, no texto, refere-se a intervalos em que ocorrerão as falas dos alunos e do professor.

o aluno almeja utilizar no desenvolvimento da atividade, auxilia-o a explicar seu raciocínio ou o processo utilizado, conduzindo-o em seu reconhecimento (FERRUZZI, 2011).

Reconhecer consiste, às vezes, na perspectiva dos participantes reformularem e alterarem suas hipóteses para reconhecer a essência do problema. Esses delineamentos são essenciais para dar significado às atividades e aos cálculos seguintes. Por isso, ao fazer o questionamento reproduzido em seguida, a professora procura reconhecer os procedimentos utilizados pelos alunos, deixando visível sua intenção em fazer com que eles percebam a importância de analisar a hipóteses antes de aceitá-la. Eis o questionamento:

> **1**. **Prof:** Por que vocês estão utilizando este modelo?
> **2. A9:** A gente acha que não pode ser linear, então procuramos no livro a taxa de variação da função que vai diminuindo mas não chega no zero. É a exponencial, né?
> **3**. **Prof:** Mas vocês calcularam esta variação para ver se fica bom? (FERRUZZI, 2011, p.105).

### 1.5.4 Posicionar-Se

Consiste em expor o que se pensa, mas, também, em estar suscetível a críticas a respeito de suas posições. Assim, posicionar-se inclui fazer declarações e manifestar argumentos, com a finalidade de buscar conjuntamente um assunto ou uma perspectiva. Portanto, posicionar-se tem uma considerável implicação que é a focalização e a persistência, que se destinam a uma declaração ou sugestão e ao método de análise empregado antes de sua aceitação ou rejeição (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010), (FERRUZZI, 2011).

Assim, os alunos posicionam-se procurando defender seu ponto de vista e seu entendimento sobre a situação, conforme segue:

> **3. A1:** Olha, nós substituímos dois pontos para encontrar K e C, e deu errado, o erro "tava" grande (mostra a primeira validação apresentada na tabela 6). Depois substituímos outros pontos e o erro ainda "tá" grande (mostra a segunda validação apresentada na tabela 7).Ó, o modelo fica bom para os valores que a gente substitui para achar os parâmetros, mas não fica para os outros. O primeiro ficou bom para os dois primeiros pontos e o segundo para o terceiro e quarto, que foram os que a gente substituiu... assim não dá...
> **4. A2:** Pra ficar bom para todos acho que tinha que substituir todos... (risos).
> **5. A1:** Mas não dá... não dá pra substituir todos. Tem o sistema...
> **6. Prof:** você acha que deveria substituir todos?
> **7. A2:** Aí ficava bom para todos, né? (risos). (FERRUZZI, 2011, p. 118).

Tomar posição frente a uma ideia não denota sustentá-la porque é pessoal, tendo que defendê-la a qualquer custo, mas argumentar em favor de uma ideia como se por um momento ela pudesse ser minha ou nossa ideia. Assim, é interessante posicionar-se em benefício de ideias alternativas (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010).

### 1.5.5 Pensar Alto

Consiste em tornar público os pensamentos, as ideias, os sentimentos e as perspectivas. Conjecturas e questões hipotéticas, também, habitualmente surgem no pensar alto, o que incentiva a investigação, como na interação abaixo:

> **16. Prof:** Então... se a gente somar estes valores, eles podem se cancelar, o resultado pode até ser negativo.
> **17. A14:** É só pegar em módulo então.
> **18. Prof:** Poderia ser, A14, mas minimizar a soma dos módulos é mais difícil do que minimizar a soma dos quadrados e se a gente colocar esta diferença ao quadrado, ela fica sempre positiva, né?
> **19. A14:** Mas fica maior... fica ao quadrado... (FERRUZZI, 2011, p. 123).

Em um diálogo investigativo, no qual os alunos são convidados a tornarem públicas suas ideais e compreensões, eles tendem a contribuir para a aprendizagem, pois constituem uma característica essencial do processo investigativo, proporcionando aprofundamento dos conhecimentos. (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010).

### 1.5.6 Reformular

Consiste em repetir com palavras diferentes algo que já foi mencionado anteriormente. De acordo com Alrø e Skovsmose (2010) e Ferruzzi (2011), reformular tem o mesmo sentido de parafrasear, em que os participantes, procurando confirmar o que ouviram, fazem sugestões e repetem termos e ideias. Essa atitude pode ser convidativa para uma reflexão mais profunda, uma comprovação sobre seu entendimento em relação aos outros, ou até mesmo para restringir as divergências.

Note que **A9**, no turno 5, reformula sua própria fala emitida no turno 3, e que, no turno 8, **A10** propõe uma mudança de perspectiva, dando a entender que a situação não pode ser representada por uma função linear.

> **3. A9:** Ah... dá pra ver se é linear. É só ver a variação. Se for igual é linear, né?
> **5. A9:** É... a variação da concentração em relação à profundidade.... se for constante, é linear...
> **8. A10:** Mas dá um salto de -0,011 para -0,006. ...É grande... não pode ser.
> **9. A8:** É... parece muito... E, se fosse linear, aí ia chegar um momento, em uma profundidade, que seria negativa... não pode. "Tá" mais parecendo exponencial, não é? Aquela que vai diminuindo, diminuindo, mas não chega no zero. (FERRUZZI, 2011, p. 98).

Assim, uma reformulação

> [...] pode ser iniciada através de questões de conferência, por meio das quais [...] servem como importantes ferramentas de elucidação em qualquer processo de argumentação, bem como no processo de investigação como um todo (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 115).

Diante disso, reformular torna-se uma extensão do estabelecer contato, pois se trata de um considerável elemento emocional, tendo em vista que realiza a função de manter contato, que é parte da etapa principal do processo de investigação.

### 1.5.7 Desafiar

Consiste na tentativa de alterar a orientação dada ao encaminhamento utilizado no procedimento ou indagar conhecimentos ou perspectivas já estabelecidas. Este é o caso no exemplo citado anteriormente, na declaração de **A10** no turno 8: "Mas dá um salto de -0,011 para -0,006... é grande... não pode ser..."; essa fala indica um desafio. Portanto, ao defender uma ideia, esta pode ser instigada por meio de questões hipotéticas. Uma condição pré-estabelecida para que os alunos sejam desafiados está em esclarecer perspectivas, que pode acontecer tanto por meio de um novo posicionamento quanto por um reexame de perspectivas que já estão concretizadas.

É interessante ressaltar que um desafio também desempenha sua função caso ela seja contestada, por exemplo, com um argumento apropriado. (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010), (FERRUZZI, 2011).

### 1.5.8 Avaliar

Avaliar consiste em acompanhar o desenvolvimento do aluno, podendo essa avaliação admitir diversos formatos. Desse modo, "uma avaliação pode ser feita por terceiros ou pelo próprio indivíduo" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 116), na qual se subentende um *feedback* produtivo, como podemos ver na interação ocorrida nos turnos 28 a 35:

> **28. Prof:** Nós temos os valores do x e do y... O x é a profundidade tanto do modelo quanto do observado e o y é a concentração. Agora, como minimizar esta soma?
> **29. A7:** Derivadas?
> **30. Prof:** Por que derivadas?
> **31. A7:** Ah... porque a gente usava derivadas para achar pontos máximos e mínimos.
> **32. A14:** Derivava e igualava a zero.
> **33. Prof:** Como assim? Por que iguala a zero, A14?
> **34. A14:** Porque assim... nos pontos máximos e mínimos a derivada é zero. Aí, quando a gente queria encontrar os pontos de máximo e de mínimo, a gente derivava e igualava a zero.. pra achar os pontos.
> **35. Prof:** Muito bom, meninos... é isso mesmo... Temos que igualar a derivada desta soma a zero e aí encontrar os parâmetros a e b. Mas não se esqueçam de que temos duas variáveis... a e b...
> **36. A14:** Ah não!!!... Derivadas parciais!!!
> **37. Prof:** (Rindo da reação da aluna)... Isso mesmo, A14... Derivadas parciais...
> **38. Alunos:** (Reclamações generalizadas).

Os atos dialógicos apresentados fazem parte de um mesmo procedimento unificado de investigação. A individualização de cada ato como apresentado só é possível a título de explicação, pois fazem parte em conjunto de informações da comunicação que podem acontecer de diferentes formas e em qualquer ordem.

Delineamos, neste capítulo, primeiramente o problema norteador da pesquisa, as questões que embasaram nosso estudo e os procedimentos metodológicos. Descrevemos, ainda, como ocorreu a escolha das atividades e os instrumentos utilizados para a coleta de dados.

## 2.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. A pesquisa qualitativa pode ser evidenciada como a tentativa de compreender significados em meio a fenômenos a serem estudados, onde o que se almeja é o entendimento das singularidades e não a generalização (GERHARDT; SILVEIRA, 2009). Para estes autores

> A pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais. [...] A pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p.32).

Com isso, uma pesquisa qualitativa procura estudar as percepções dos sujeitos, buscando compreender e encontrar significados por meio de observações e não de números. Assim, para Godoy (1995), o entendimento de um fenômeno tende a ser compreendido com mais apreço na circunstância em que ocorre e do qual é membro. A busca por respostas faz o pesquisador ir a campo com o intuito de coletar diversos tipos de dados para uma melhor compreensão dos fenômenos que estão sendo estudados.

## 2.2 PROBLEMA DA PESQUISA

A construção do conhecimento, em particular de Matemática, é um processo contínuo que passa por diversas transformações em decorrência de situações que interferem direta ou indiretamente na sua prática, seja ela por meio da troca de experiências com colegas, uso de tecnologias e práticas de ensino diferenciadas que podem influenciar nestas mudanças.

Providos desses argumentos, este trabalho propõe-se a responder a questão: “As interações que podem ser desencadeadas pela Investigação Matemática possuem potencial para a aprendizagem?”

Com a finalidade de responder nosso questionamento, e após a realização de um estudo bibliográfico, desenvolvemos e aplicamos uma sequência de atividades para alunos do Ensino Médio de um Colégio Público. A partir dessas atividades, analisamos as interações ocorridas entre os participantes da pesquisa, procurando reconhecer aspectos considerados determinantes para a ocorrência do diálogo, segundo a concepção de Alrø e Skovsmose (2010).

Por meio dessa investigação, objetivamos mostrar que a Investigação Matemática, no âmbito da Educação Matemática, pode proporcionar interações que podem ser consideradas como diálogos na visão de Alrø e Skovsmose (2010), podendo assim favorecer a aprendizagem dos alunos.

## 2.3.OBJETIVO DA PESQUISA.

Buscamos verificar se a Investigação Matemática pode favorecer a aprendizagem, estimulada pelas interações entre os participantes, por meio de uma sequência de atividades que foram aplicadas para alunos de um colégio público do período noturno.

Estávamos interessadas em verificar, neste momento, se os alunos discutiriam questões relacionadas a atividade proposta. Será que haveria troca de ideias entre eles? Quais contribuições essas atividades, utilizando Investigação Matemática, poderia proporcionar aos participantes da pesquisa em relação a sua compreensão?

Como objetivo específico da pesquisa, elaboramos um produto educacional (apêndice A) que poderá ser utilizado e adaptado pelo professor para qualquer série que esteja lecionando, levando em consideração a faixa etária dos alunos. Esse material será disponibilizado por meio de um link disponível na página do Mestrado Profissional de Ensino de Matemática – PPGMAT.

Durante todo o processo de análise dos dados, foram utilizadas as categorias estabelecidas previamente com base no referencial teórico.

## 2.4. PROCEDIMENTOS PARA PESQUISA

Nossa pesquisa iniciou com a escolha e elaboração de atividades que compõe a função: $f(x) = A + Bsen(Cx + D)$. A escolha desta função ocorreu tendo em vista a dificuldade que os alunos têm em abstrair o conteúdo de trigonometria, e o nosso desejo de desenvolver uma pesquisa abordando este tema. Diante da decisão de trabalhar com a trigonometria, particularmente com a função seno, procuramos elaborar uma sequencia de atividades que pudesse proporcionar aos alunos observar o comportamento que cada um dos parâmetros exerce no gráfico da função. Para isto, as aulas foram ministradas no laboratório de informática utilizando o software GeoGebra.

A presente pesquisa constitui-se de duas fases: primeiramente, o levantamento bibliográfico e, na sequência a parte prática envolvendo a aplicação de uma sequência de atividades para alunos do Ensino Médio. Almejando atingir nossos objetivos realizamos um estudo bibliográfico em que buscamos conhecer as concepções de autores/pesquisadores sobre Investigação Matemática e diálogo. Quanto à Investigação Matemática, nos respaldamos nos conhecimentos de João Pedro da Ponte, que nos deu suporte para a preparação das atividades investigativas. Já quanto ao conhecimento do diálogo, nos embasamos em Helle Alrø e Ole Skovsmose, que nos forneceram subsídios para o encaminhamento de nossa pesquisa.

As sequências de atividades (apêndice A) desta pesquisa foram realizadas no Colégio Estadual Antônio dos Três Reis de Oliveira, localizado na Cidade de Apucarana, PR. Os participantes são estudantes do 2º ano do Ensino Médio do período noturno, totalizando 25 alunos regularmente matriculados.

A pesquisa ocorreu nos meses de março e abril de 2017, e seu propósito foi esclarecido a todos os participantes, bem como a necessidade de fazer uso dos registros produzidos por eles, ou seja, os áudios das aulas e os registros e observações realizados pela professora/pesquisadora. Após os esclarecimentos, os participantes que eram maiores de idade foram convidados a assinar o termo de consentimento livre e esclarecido, e quem era menor de idade, a levar para os pais ou responsáveis assinarem, juntamente com o seu filho, a autorização para que o mesmo pudesse participar da pesquisa (anexo C).

Adotamos, como critério fundamental para a escolha da instituição de ensino onde iríamos aplicar a pesquisa, o fato de esta possuir um laboratório de informática em que estivesse instalado o software GeoGebra. Apesar de atualmente a grande maioria dos alunos possuírem celular, e algumas escolas terem tabletes, optamos pelo laboratório de informática, tendo em vista que a realidade dos alunos desta instituição é outra, pois nem todos dispunham de celular, assim como a escola não dispunha de tabletes. Portanto, se os alunos possuírem aparelho celular, ou a escola dispuser de tabletes, os professores poderão trabalhar na própria sala de aula. Outro fator importante na escolha da instituição foi de que o professor da turma se mostrasse interessado na pesquisa e cedesse suas aulas para a efetivação da mesma.

Todas as atividades de investigação, uma por encontro, foram realizadas em grupos de três alunos, numa tentativa de proporcionar momentos de socialização, de aprendizagem e troca de conhecimentos. Todos os grupos formados no primeiro encontro se mantiveram até o final.

Os alunos deviam explorar as atividades, conforme sugeria o enunciado, e transcrever na folha, que lhes foram entregues no início de cada encontro, suas conclusões. As atividades foram aplicadas e reformuladas, quando necessário, para fazer parte do produto educacional. Embora tenhamos desenvolvido diversas atividades (apêndice A e B), apresentamos nesta pesquisa uma sequência de quatro atividades, sendo as outras apresentadas no produto educacional.

As atividades selecionadas (Apêndice A) tinham o intuito de desenvolver/aprimorar habilidades de trabalho em grupo, pois assim como Pontes (2003) acreditamos, também, ser este um fator importante na socialização dos alunos. Apresentamos e analisamos as interações de três grupos, sendo estes grupos assíduos nas aulas.

Cabe salientar que o mérito central dessa pesquisa estava na análise das interações ocorridas entre os participantes, durante a realização das atividades investigativas envolvendo a função seno e seus parâmetros. Assim sendo, foram realizadas observações, gravação em áudio e anotações tanto da pesquisadora quanto dos próprios alunos.

Para aplicação das atividades sobre a função $f(x) = A + Bsen\,(Cx + D)$ utilizamos seis encontros com 2h/aula cada, totalizando 12h/aula. Todos os encontros aconteceram às sextas-feiras com a aprovação do professor regente e da direção do colégio. Como o laboratório de informática não possuía computadores suficientes para todos os alunos, eles trabalharam em trios. Essa organização favoreceu a interação entre os alunos, no sentido de exporem suas opiniões e ideias. Os alunos ficaram livres para montar seu grupo, sendo esta uma etapa importante nas atividades investigativas.

Em conversa com os alunos, e analisando alguns cadernos, constatamos que já tinham estudado o conteúdo de trigonometria, conforme repassado pelo professor da turma.

Conforme combinado com o professor, ele não iria aprofundar o conteúdo com relação à função seno e seus parâmetros, deixando essa parte do conteúdo para nossa pesquisa.

Para realizar a coleta dos dados foram necessários alguns instrumentos que serão apresentados na sessão seguinte.

## 2.4 INSTRUMENTOS UTILIZADOS NA COLETA DE DADOS

Para coletar os dados para a pesquisa, utilizamos gravação de áudio, registros escritos pelos alunos e observação da professora.

Para cada aluno foi entregue uma folha impressa, contendo as atividades (apêndice A) a serem trabalhadas nas aulas, ficando acordado que as folhas seriam recolhidas ao final de cada aula. Foram distribuídos entre os grupos alguns gravadores que permaneceram com eles até o final de cada aula. As transcrições dos áudios eram realizadas conforme as aulas aconteciam.

A escolha da função trigonométrica, mais especificamente a função seno e seus parâmetros como primeira atividade, advém das dificuldades que os alunos apresentam quanto ao entendimento desse conteúdo e, também, devido ao nosso objetivo de utilizar a Investigação Matemática no ensino de Matemática.

No decorrer da pesquisa, procuramos proporcionar aos alunos um contato com a Investigação Matemática como forma de promover a reflexão, a retomada dos conteúdos anteriormente estudados, bem como conteúdos novos, como foi o caso da função seno e seus parâmetros, objeto de estudo de nossa pesquisa.

As aulas foram transcritas sempre após cada encontro, e a análise dos dados coletados ocorreu com base em nosso referencial teórico. Cientes de que os dados coletados são o que nortear á nosso trabalho, primeiramente fizemos uma análise de cada encontro e, posteriormente a isso, realizamos uma consideração geral. Para entender e responder a nossa problemática, a professora foi participante ativa e comprometida com o processo, e com os envolvidos na pesquisa.

No próximo capítulo sessão encontram-se a intervenção pedagógica, as interações entre os participantes, separadas por atividade e por episódios, bem como a análise das mesmas, imbricados com referencial teórico.

**CAPÍTULO 3**

# 3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Neste capítulo, apresentamos as atividades desenvolvidas com os alunos para tratar a função $f(x) = A + Bsen(Cx + D)$, com $x \in$ R, e seus respectivos parâmetros $A, B, C$ e $D$ que posteriormente serão descritos e analisados conforme estudos teóricos apresentados no capítulo 2. Em nosso estudo, procuramos obter dados que nos permitissem responder a pergunta norteadora de nossa pesquisa, ou seja, “As interações que podem ser desencadeadas pela Investigação Matemática possuem potencial para a aprendizagem?”. Para isso, escolhemos a Investigação Matemática como prática pedagógica pela versatilidade que apresenta em seu contexto, que vai desde a reflexão até a avaliação. Para Ponte (2013), a Investigação Matemática busca fazer com que o aluno pense e reflita sobre o problema, sendo esse um momento importante para a ocorrência do diálogo como um facilitador da aprendizagem.

Para analisar o envolvimento dos alunos com as atividades propostas, apresentaremos recortes das interações entre os participantes durante as aulas. Para as interações apresentadas adotaremos o termo episódio, e para os intervalos das conversas utilizaremos a palavra turno. A transcrição foi realizada de forma literal no que tange à exposição de termos como: “ahã”, “péra”, “mano”, “ixi”, etc, assim como erros de concordância. Em cada episódio, os alunos serão identificados por **A1**, **A2**, **A3** e assim sucessivamente, seguidos de suas respectivas falas.

A atividade aqui descrita ocorreu no laboratório de informática com a utilização do *software* GeoGebra. Cabe ressaltar que nossa escolha pelo *software* GeoGebra, além dos motivos já mencionados em capítulos anteriores, se deu pelo fato ser um *software* gratuito, com uma interface fácil de manusear, além de possuir recursos de movimentação como os utilizados nas sequências de atividades que os alunos desenvolveram.

A todo momento procuramos presenciar o que os alunos estavam desenvolvendo e, quando não estávamos interagindo, estávamos a observar e realizar anotações consideradas importantes para a pesquisa. Procuramos identificar a presença dos atos dialógicos nas interações ocorridas entre os participantes da pesquisa. Como já mencionada no capítulo 1, a ocorrência dos atos dialógicos (como: estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar) é elemento fundamental para que ocorra o diálogo, o qual, de acordo com nosso referencial teórico, oportuniza a aprendizagem.

## 3.2 ATIVIDADE 1

Nas duas primeiras aulas, foram realizadas instruções para os alunos sobre as ferramentas básicas para desenvolver as atividades e construírem os gráficos no GeoGebra.

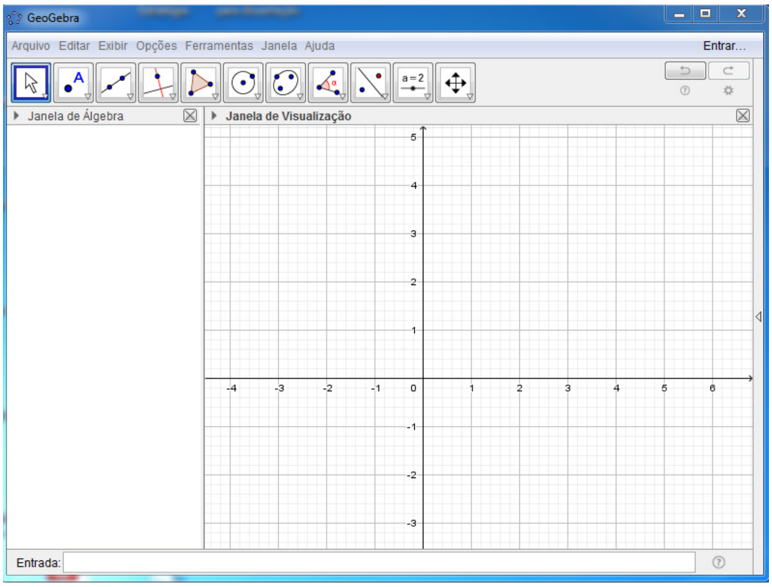



**Figura 1: Tela inicial do GeoGebra**

O software GeoGebra possui uma área de interação que contempla, além de uma janela geométrica e outra algébrica, um campo denominado entrada, que permite trabalhar os conteúdos algébricos. Com essa ferramenta é possível construir gráficos de funções e fazer cálculos matemáticos possibilitando explorar seus conceitos.

Na janela de visualização (figura 1), os objetos são construídos com o auxílio de elementos que constituem a barra de ferramentas ou do campo de entrada. Além desses recursos considerados importantes, está, também, o comando do mouse que permite alterar as características dos objetos construídos.

Nas atividades, os alunos tiveram oportunidade de manipular os gráficos que foram construídos por eles, trabalhando com a função seno e seus parâmetros, e assim analisar o que estava acontecendo com os gráficos a partir das manipulações que fizeram em suas construções.

A primeira atividade (quadro 1) foi uma retomada de conceitos já estudados anteriormente pelos alunos. E, mesmo sendo uma retomada de conteúdo, os alunos apresentaram muitas dúvidas que procuramos sanar no decorrer da atividade.

**<u>FUNÇÃO SENO</u>**

Vamos trabalhar com a representação gráfica da função $f(x) = A + Bsen(Cx + D), com\ x \in R$. Para esta atividade, fixe os parâmetros A, B, C e D, com $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ e $D = 0$ e com o auxílio do GeoGebra construa o gráfico da função dada e responda:

**Questão 1:** Qual o domínio da função $f(x) = sen(x)$?

_________________________________________________________

**Questão 2:** Qual a imagem da função $f(x) = sen(x)$?

_________________________________________________________

Note que o gráfico da função apresenta um determinado comportamento para um intervalo de valores em x, e esse comportamento se repete em outros intervalos.

**Questão 3:** Qual é o comprimento deste intervalo? ________________. O nome deste comprimento é PERÍODO da função. Desse modo, podemos afirmar que a função$f(x) = sen(x)$possui:

a) Período igual a:_________________.

b) Imagem igual a:_________________.

Na sequência, solicitamos aos alunos que variassem os parâmetros $A, B, C\ e\ D$ e verificassem que alterações essas modificações produziam no comportamento do gráfico da função.

**Quadro 2: Primeira atividade da função seno**
**Fonte: Autora**

### 3.2.1Episódio1

A interação apresentada no episódio 1 se deu entre a professora e um grupo de três alunos (**A1**, **A2** e **A3**) e houve momentos em que a professora/pesquisadora interagiu com a turma toda.

1. **Prof:** Cada um de vocês recebeu uma folha, mas não há necessidade de colocar nome. Vocês têm aí à frente de vocês um *software*, com um plano cartesiano. Quais são os eixos?
2. **A1:** x e y!
3. **Prof:** Muito bem! Nós vamos trabalhar com a representação gráfica da função o quê?
4. **A1:** sen x!
5. **Prof:** Isso! Mas tem um A e um B antes...
6. **A1:** Tem?
7. **Prof:** Vocês têm a função$f(x) = A + Bsen(Cx + D)$ para fixar valores para os parâmetros A, B, C e D, e na sequência pede-se para construir o gráfico.
8. **Prof:** Na parte superior da barra tem um a, uma reta e um ponto. Isso se chama controle deslizante. Esse controle é para fixar o intervalo ao qual o eixo vai deslizar. Podem clicar nesse controle deslizante.
9. **A2:** “Tá”!

10. **Prof:** Vejam que abre uma caixinha de texto com a letra a. Abriram? Agora cliquem em qualquer lugar na tela.
11. **A1:** Cliquei!
12. **Prof:** O que apareceu lá para vocês?
13. **A1:** Controle!
14. **A1:** Apareceu um a.
15. **Prof:** O nome pode ser o a minúsculo mesmo. Os valores que apareceram para vocês foram -5 e 5 e o incremento 0.1?
16. **A1:** Sim!
17. **Prof:** Pode clicar em *ok*!
18. **Prof:** Esse é o primeiro valor que temos para a, não é isso?
19. **A3:** Professora, o que aconteceu com o meu? [O controle deslizante que ele havia criado sumiu da tela, sendo necessário refazê-lo].
20. **Prof:** Nós vamos ter que criar novamente o controle deslizante. Clique na caixa controle deslizante, e depois em qualquer lugar na tela. Criamos o controle para a, agora você vai fazer a mesma coisa para a, b e assim por diante.
21. **Prof:** Fizeram? Alguém ficou com dúvida na questão do controle deslizante? Todos fizeram?
22. **A1:** Sim!
23. **Prof:** Na tela de vocês, no canto inferior esquerdo, tem uma caixa escrito entrada. Nessa caixa digitem a função que foi dada no enunciado do exercício. Na sequência deem *enter*. O que apareceu na tela de vocês?
24. **Alunos:** Um gráfico.
25. **Prof:** De todos "apareceram" um gráfico? Teve alguém que apareceu algo diferente?
26. **Alunos:** Não!!!

Esse primeiro encontro mostra, por meio das interações, que procuramos familiarizar os alunos com as ferramentas básicas do software e, ao mesmo tempo, identificar o tipo de função que estava sendo trabalhada. Como nesse primeiro momento o foco é apresentar o software aos alunos, isto tornou a comunicação mais formal. Mas, mesmo diante da formalidade da interação, procuramos instigar, entre os alunos, a interação, a troca de informação e ideias. Diante disso, e de acordo com nosso referencial teórico, não houve o diálogo, visto que os alunos tiveram uma participação mais no sentido de conhecer o *software* e suas ferramentas.

### 3.2.2Episódio 2

A interação apresentada no episódio 2 se deu entre a professora e um grupo de três alunos (**A1**, **A2** e **A3**).

Após a familiarização com o *software* GeoGebra, os alunos iniciaram a construção do gráfico, e, apesar do tempo que tiveram para explorar o *software*, foi no momento de construir o gráfico que surgiram as dificuldades, com questões como: "Professora, o que é o a, mesmo?", "O que eu fiz de errado?", "O meu não apareceu o gráfico.", "Onde tenho que digitar?". Outras questões também foram levantadas, porém não foi possível compreendê-las, no áudio, por questionarem ao mesmo tempo.

Passamos pelos grupos procurando sanar as questões que estavam impossibilitando os alunos a seguirem com a atividade, mas tomamos o cuidado de não interferir em seus raciocínios quando estes se referiam a algum tipo de cálculo. Conforme fomos observando que tinham construído o gráfico, fizemos o seguinte questionamento:

1. **Prof:** O gráfico que vocês construíram representa qual função mesmo?
2. **A1:** Função cosseno!
3. **Prof:** Todos concordam?
4. **A1:** Função seno!
5. **A4:** O que é para fazer? [Este aluno pertencia a outro grupo que estava sentado próximo, e aproveitou para questionar e interagir com o outro grupo]
6. **A1:** O domínio era zero, não é?
7. **A2:**Vixi! Não lembro.
8. **A1:** Professora, aqui é zero, não é? [o aluno estava se referindo ao domínio da função]
9. **Prof:** Por que zero?
10. **A1:** Não sei!
11. **A1:** Professora, vai do -1 ao 1? [o aluno apontou os valores como indicados na figura 2, referindo-se à imagem da função].

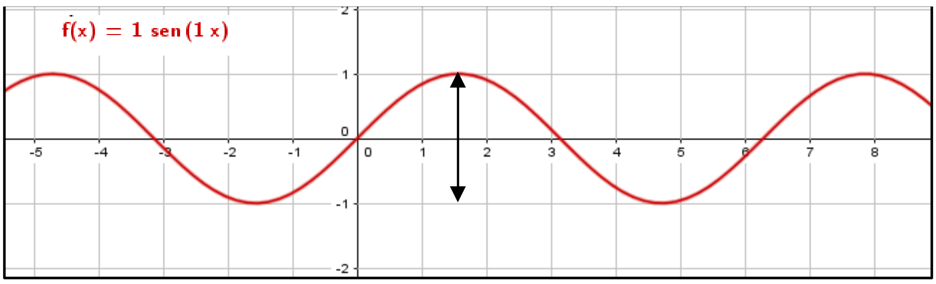



**Figura 2: Gráfico da função sen(x)**

12. **Prof:** Estamos falando de quem?
13. **A1:**"Vixi"! Confundi tudo.
14. **Prof:** Pense um pouco, movimente seu gráfico, analise o que você fez.
15. **A4:** Professora, o comprimento do gráfico vai até o três? [perguntou em voz alta]
16. **A3:** Como assim?
17. **A3:** Então o intervalo é três?
18. **Prof:** Mas vocês estão falando de quem?
19. **A4:** Do comprimento do gráfico.
20. **Prof:** Então vamos imaginar o seguinte. Vamos imaginar o gráfico começando em zero (figura 3). [Para que ficasse mais claro para o aluno entender, analisamos o gráfico começando em zero].

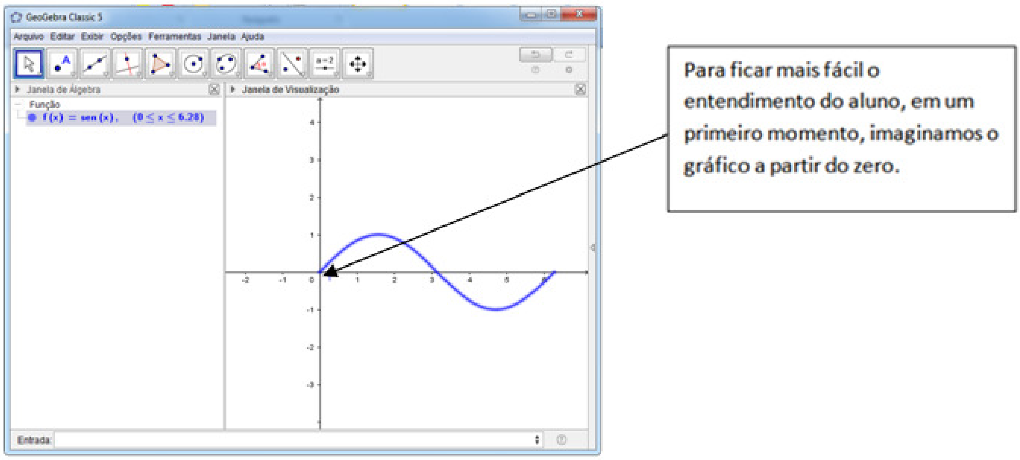



**Figura 3: Gráfico da função sen (x)**

21. **Prof:** A partir do zero a onda sobe, desce, passa pelo eixo x, continua descendo e depois volta a subir passando novamente pelo eixo x em qual valor?
22. **A1:** Seis e alguma coisa?
23. **Prof:** Então, que seria esse comprimento? Qual o nome dele?
24. **A4:** Hum... período? Imagem?
25. **Prof:** Você está perguntando ou afirmando?
26. **A4:** [risos]

Analisando as interações, não foi possível perceber uma aprendizagem matemática, pois os alunos buscam, mesmo que timidamente, relembrar algo já estudado anteriormente. Os alunos demonstraram não ter o hábito de trabalharem sem o auxílio do docente, mas, sim, esperar que o professor forneça a resposta pronta (turnos 8, 11, 22 e 24). A todo momento, eles questionam sobre o que fazer, se estava correto o que estavam fazendo ou, ainda, respondem uma pergunta com outra pergunta.

Para os alunos, a forma como a aula foi ministrada era novidade, e a dependência com relação à professora ficou evidente, não sendo possível, naquele primeiro momento, a ocorrência do diálogo. Assim, entendemos, como Alrø e Skovsmose (2010) e Ferruzzi (2011), que a interação ocorrida nesse episódio constituiu um jogo de perguntas e que contribuímos para isso, entendendo ser necessário naquele momento. Assim, conforme passávamos pelos grupos, os alunos procuravam captar informações que pudessem ajudá-los na solução da atividade.

## 3.3 ATIVIDADE 2

No segundo dia de aula, esperávamos que os alunos trabalhassem de forma mais independente, mas não foi o que aconteceu. Após a entrega da folha 2 (quadro 2), os alunos começaram a nos chamar para auxiliá-los com a atividade.

**FOLHA 2**

Da tarefa anterior, verificamos que, se $f(x) = sen(x)$, temos Im f(x) = [-1,1] e P = $2\pi$ rad.

**Questão 4**: Fixe os valores para parâmetros A=0, C=1 e D=0, e atribua valores para B≠0.

Na sequência, analise os gráficos construídos no GeoGebra e complete a tabela.

| $f(x) = Bsen(x)$ | B | Imagem da função | Período da função |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**Questão 5:** Diante dos resultados que você encontrou, quais alterações ocorrem no comportamento gráfico da função, quando variamos os valores de B? Descreva-as.

______________________________________________________________________

**Questão 6:** Você consegue generalizar sua conclusão? Apresente-a.

______________________________________________________________________

**Questão 7:** Forneça a imagem e o período das funções abaixo, sem construir os gráficos:

| $f(x) = A + Bsen(CX + D)$ | Imagem da função | Período da função |
|---|---|---|
| $f(x) = 2sen(x)$ | | |
| $f(x) = 3sen(x)$ | | |
| $f(x) = 4sen(x)$ | | |
| $f(x) = -2sen(x)$ | | |

**Quadro 3: Segunda Atividade**
**Fonte: Autora**

### 3.3.1Episódio 3

A interação apresentada no episódio 3 se deu entre a professora e dois grupos de 3 alunos (**A1**, **A2** e **A3**, e **A4**, **A5** e **A6**), que estavam sentados próximos, permitindo, assim, a interação.

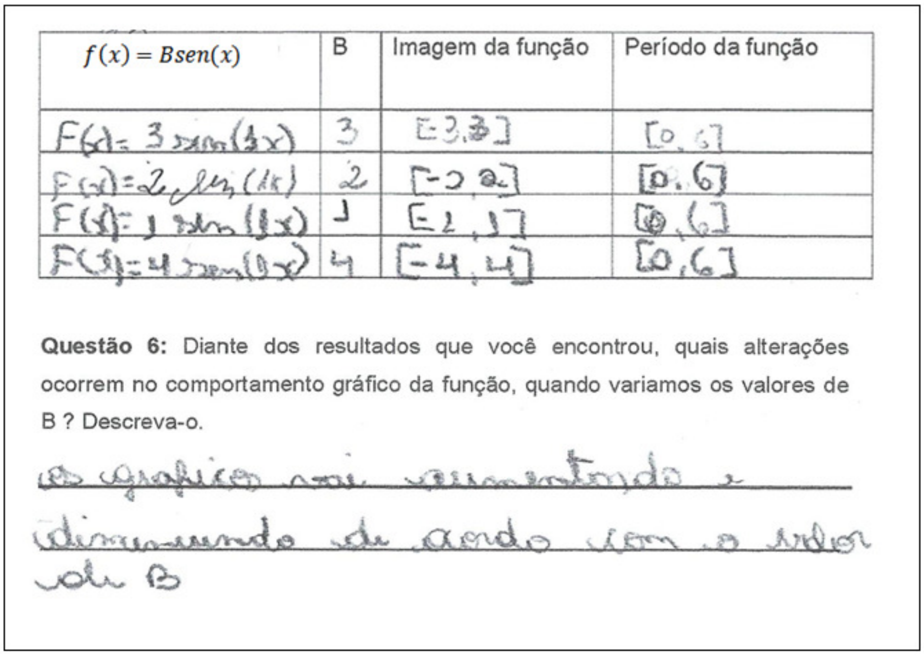
1. **Prof:** Pessoal, na aula passada vocês receberam a folha 1 e hoje estão recebendo a folha 2, certo? Não há a necessidade de colocar nome. Na folha que acabaram de receber tem um quadro que terão que completar. Vocês vão fixar os valores para os parâmetros A, C, e D, conforme fornecido no enunciado, e vão atribuir qualquer valor para o parâmetro B, mas o B tem que ser diferente de zero.
2. **A4:** Qual vai ser o B?
3. **Prof:** O valor de B vocês vão atribuir. Relembrando a aula passada, primeiro vocês vão criar os controles deslizantes, depois vão digitar a função na caixa de entrada já com os valores dos respectivos parâmetros. Podem começar!
4. **A4:** Professora, vem cá! Pode colocar esse valor? [O aluno mostrou um valor para o B].
5. **Prof:** Pode!
6. **Prof:** Pessoal! Quantos valores diferentes vocês vão ter que atribuir para B?
7. **Alunos:** Quatro!
8. **A1:** Professora, não está dando certo!
9. **Prof:** "Tá"! Mas quanto que é seu A?
10. **A1:** É esse aqui! [O aluno mostrou o valor de A=0].
11. **Prof:** Então, olha aqui! Você vai ter que montar a tabela. O valor de B é você que vai colocar. Vai montando a tabela que fica mais fácil pra você entender.
12. **A1:** Como eu acho isso aqui? [Referiu-se à imagem da função].
13. **Prof:** Lembra do ponto mais alto e mais baixo que a onda atinge?
14. **A1**: Ah! "Tá"!
15. **A2:** O seu "tá" igual ao meu, mano!
16. **A3:** Professora, eu sempre esqueço: o que é a imagem mesmo?
17. **Prof:**Hum... O que é imagem?
18. **A3:** Então! Não sei... [risos].
19. **Prof:** Qual o ponto mais alto e mais baixo que a onda atinge?
20. **A5:** É aqui, mano! [Mostrou para A3 os valores -1 e 1].
21. **A3:** Vou colocar 1 e -1, então!
22. **A5:** É o zero que você tem que colocar, e não 1! [Referiu-se ao valor que A3 deveria colocar para A na caixa de entrada].
23. **A6:** Mas lá "tá" 1! Aí "tá" errado!
24. **A5:** Ó,você vai mexer na barrinha. [Referiu-se ao controle deslizante].
25. **A6:** O B não é 0? [O aluno estava pensando em voz alta].
26. **A5:** A professora falou que não.
27. **A6:** Hum! Aí eu tenho que colocar aqui neste quadradinho.
28. **A5:** Sim! Tem que completar.
29. **A6:** Deu certooooo!!! [O aluno falou da construção do gráfico].

Observamos nesse episódio uma maior interação entre os alunos. Ainda assim, esperavam uma resposta de nossa parte, mas, ao invés disso, procuramos a todo momento levar os alunos a refletir e buscar estratégias para obter respostas. "[...] Muitas vezes, quando os alunos lhe colocam uma questão, a melhor estratégia é devolvê-la, levando-os a pensar melhor sobre o seu problema [...]" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p.52). Apesar da similaridade com o episódio 2, houve momentos em que os alunos começaram a trocar ideias, como podemos observar a partir da fala de **A3** (turno 16), quando nos questiona sobre a imagem da função, e logo o aluno **A5** (turno 20) chama sua atenção, mostrando um possível valor que deveria colocar. Esses momentos são considerados importantes, pois auxiliam o professor a conhecer a forma de pensar dos seus alunos (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010).

Com base no que foi descrito no episódio, podemos inferir que os alunos se mantiveram focados no problema, estando eles a estabelecer contato, perceber e reconhecer. Entendemos, ainda, que esses atos dialógicos fazem parte do dito diálogo, porém aspectos importantes como promover a igualdade e correr riscos não são reconhecidos nesse episódio. Apesar destes não estarem presentes, podemos inferir que o diálogo aconteceu.

Após um tempo, **A12** nos chamou dizendo que tinha terminado a atividade e nos mostrou como havia completado a tabela.

A resolução apresentada por **A12** demonstra de certa forma seu envolvimento com a atividade durante a aula (quadro 4).



| $f(x) = Bsen(x)$ | B | Imagem da função | Período da função |
|---|---|---|---|
| F(x)= 3 sen(1x) | 3 | [-3,3] | [0,6] |
| F(x)=2 sen(1x) | 2 | [-2,2] | [0,6] |
| F(x)= 1 sen(1x) | 1 | [-1,1] | [0,6] |
| F(x)=4 sen(1x) | 4 | [-4,4] | [0,6] |

**Questão 6:** Diante dos resultados que você encontrou, quais alterações ocorrem no comportamento gráfico da função, quando variamos os valores de B ? Descreva-o.

os graficos vai aumentando e diminuindo de acordo com o valor de B

**Quadro 4: Resposta apresentada por A12**

Aparentemente houve compreensão, de sua parte, quanto ao conteúdo estudado, mesmo sem saber expressar-se matematicamente, pois esse é um hábito que os alunos vão adquirindo com o tempo. Já o que a aluna escreveu é possível verificar na figura 4, pois, conforme foi variando o valor de B, a imagem da função também variou, e isso implicou em sua resposta, quando diz que “vai aumentado e diminuindo de acordo com o valor de B”. Sua resposta quer dizer que, ao atribuir valores para o parâmetro B na função, teremos cada ordenada y da função f(x) = sen x multiplicada pelo valor atribuído ao parâmetro. Vamos tomar como exemplo a função g(x) = 3. sen (x), descrita no gráfico (figura 4). Ao atribuir valor 3 para o parâmetro B, a imagem desta função passa a ser igual a [-3,3].

Vejamos o gráfico na figura 4:

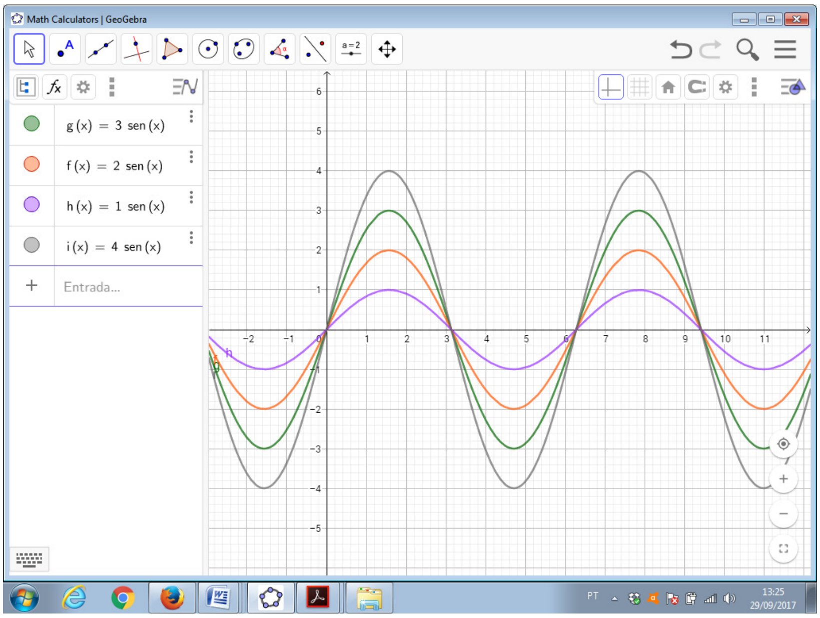



**Figura 4: Função f(x), g(x), h(x) e i(x)**

Nesse momento explicamos ao aluno que o período se mantém, mas a amplitude passa a ser igual a B unidades. Podemos concluir que o fator B de g(x) = B. sen (x), corresponde exatamente a essa amplitude. O período permanece igual a 2πrad e o conjunto imagem altera-se para [-B, B].

No próximo episódio, veremos que os alunos interagem um pouco mais, começando a defender suas ideias e refletir sobre as aulas anteriores, como poderemos observar nas falas dos participantes.

### 3.3.2Episódio 4

Neste episódio, a professora continuou a interação com os grupos do episódio 3, em que estavam iniciando a questão 7 (quadro 2), onde teriam que observar as funções dadas, responder as questões e completar a tabela sobre a imagem e o período da função. Nesta questão não era necessário construir o gráfico.

1. **A3:** Professora, aqui eu coloco o quê? [O aluno referiu-se à imagem e ao período da função que estavam na tabela a ser completada]
2. **Prof:** Ó, lembra da aula passada que tinha uma questão que vocês não precisavam construir o gráfico?
3. **A3:** É!
4. **Prof:** Então, aqui você vai olhar a função e dizer a imagem e o período dela.
5. **A3:** É só fazer a mesma coisa que eu fiz aqui, né? [Referiu-se à questão 4].
6. **Prof:** Isso! A mesma coisa. Como que você analisou a imagem da função aqui? O que te fez pensar que seria de -1 a 1 e de 2 a -2? Como que você chegou a essa conclusão?
7. **A3**: Eu fiz que nem nas outras aulas.
8. **Prof:** Então o que você observou para chegar à conclusão que você, já olhando ali, daria -1, -2 e assim por diante?
9. **A3:** Ixi! Já esqueci! É... deixa eu lembrar aqui.
10. **Prof:** Isso! Pensa um pouquinho, que você já vai relembrar.
11. **A5:** Acho que o período é 3 e alguma coisa. [O aluno falava com a **A6** sobre o período da função].
12. **A6:** Tem que olhar aqui no gráfico!

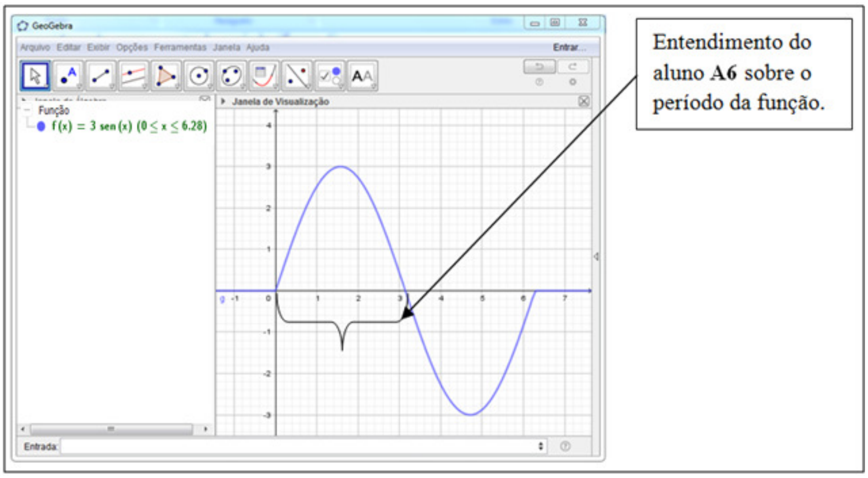



**Figura 5: Gráfico da função f (x) = 3 sen(x)**

13. **A6:** Ele vai do 0 ao 3. [**A6** tomou como parâmetro o gráfico iniciando em 0].
14. **A5:** Ah! "Tá"!
15. **A6:** A imagem da função vai de -3 a 3, entendeu? E o período da função começa daqui [apontando para o zero como início] e vai até o 3.

Na tentativa de explicar para o aluno **A5** sobre o período da função, **A6** cometeu um equívoco, considerando apenas parte do período (ver figura 5).

16. **A5:** Por que àquela hora a imagem dava certo no 2? [Referia-se ao valor da imagem, quando haviam sugerido 2 para o parâmetro B].
17. **A6:** Porque àquela hora o valor de B era 2.
18. **A6:** Ó, presta atenção! Aquele passava no 2 [assobios], aqui passa no 3 [assobios], entendeu? [**A6** fez uma comparação com o que tinham feito anteriormente, onde tinham colocado o valor de 2 para o parâmetro B na função. Quando ele disse "passava", ele estava se referindo ao ponto mais alto da função].

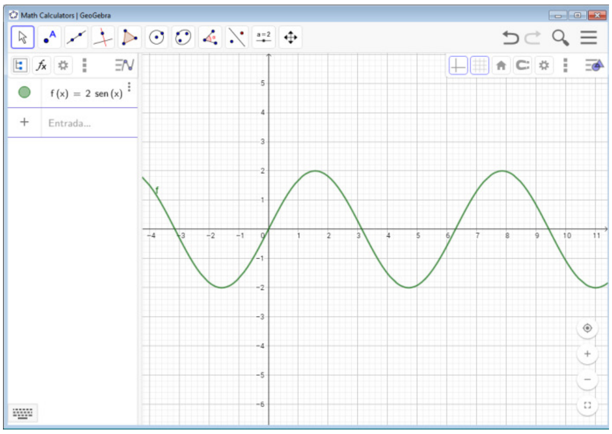


**Figura 6:** Gráfico da função f(x) = 2 sen (x)

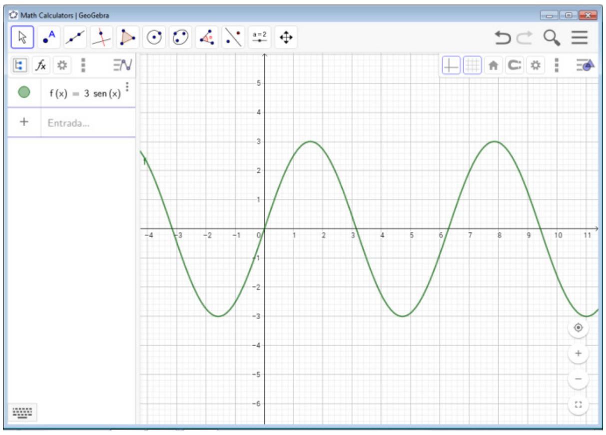


**Figura 7:** Gráfico da função f(x) = 3 sen (x)

Os gráficos apresentados retratam o que **A6** tentou explicar para **A5**: que, anteriormente, a imagem da função passava no 2 porque haviam sugerido esse valor para o parâmetro B, diferentemente do que aconteceu quando atribuíram um novo valor para o parâmetro.

**19. A5:** Acho que sim!
**20. A5:** Mas e o período? Tem que esperar uma onda pra baixo! [Referiu-se à posição da onda a partir do momento que tocou pela primeira vez o eixo x].
**21. A6:** Ela encolheu! A onda! [referiu-se à onda ter ficado achatada].
**22. A5:** Ah! “Tá”!
**23. A6:** Igual, no caso, se eu colocar 4, vai ficar? Aqui deu uma onda, daí você tem que esperar subir, na hora que subir de novo. Ó, Você começa no meio dela e a hora que subir você coloca o valor que deu. [**A6** procurou explicar para o colega, porém não conseguiu expressar-se matematicamente, deixando o amigo um pouco confuso].
**24. A5**: Ahã!

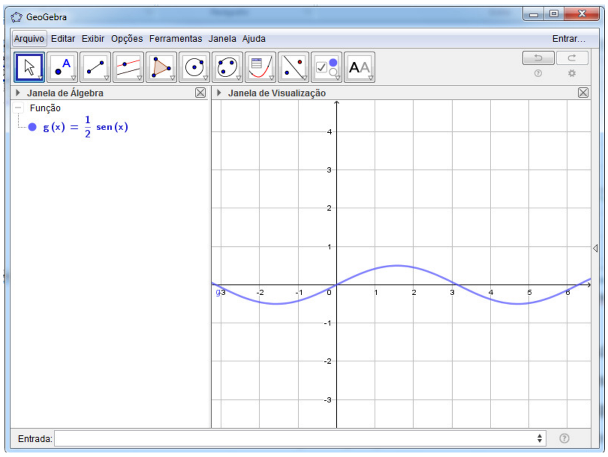



**Figura 8:** g(x) = ½ sen (x)

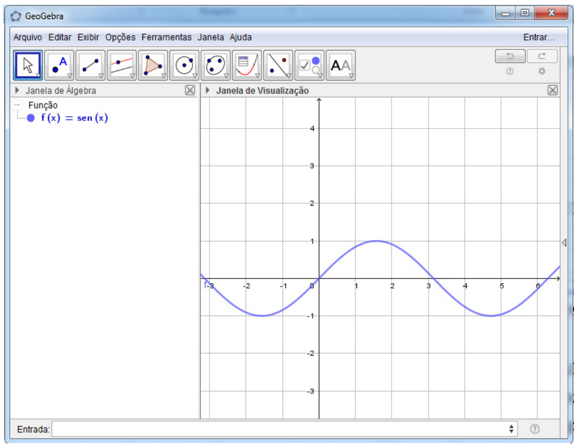



**Figura 9:** f(x) = sen (x)

As figuras 8 e 9 ilustram o que o aluno **A6** quis dizer para o colega, ao falar "a onda achatou" (turno 21). Nota-se em sua fala uma percepção sobre a implicação do parâmetro B na função, ainda que ele tenha tido certa dificuldade em expor seu pensamento. A seu modo, tentou explicar que, quanto menor for o valor atribuído para o parâmetro B, menor será a amplitude da onda, desde que B>0.

Nesse episódio, os alunos **A5** e **A6** (turnos 11 a 24) conversaram a respeito do problema. O aluno **A5** sugeriu que o período "é 3 e alguma coisa" (turno11), e **A6** explicou onde primeiramente ele tem que olhar para verificar o resultado (turnos 12 a 18). Com isso, iniciaram-se as explicações e argumentações, procurando chegar a um resultado. Com base nessas interações, é possível perceber a ocorrência de aspectos fundamentais do diálogo, tais como: estabelecer contato, reconhecer e perceber. Esses aspectos indicam a ocorrência do diálogo.

Esse tipo de interação colabora para que o aluno compreenda a necessidade de considerar as peculiaridades da situação em estudo, buscando reavaliar e reanalisar os dados do problema (FERRUZZI, 2011).

### 3.3.3Episódio 5

Nesse episódio, a professora interagiu com dois alunos do segundo grupo (A5 e A6). Nas interações que serão tratadas a seguir, os alunos apontaram seu entendimento a respeito do problema, pois, na busca por validar seu pensamento, **A6** nos chamou para que disséssemos estar certo ou errado o que tinha feito. Porém, não foi o que aconteceu, como veremos a seguir.

1. **A6:** Professora, vem cá!
2. **A6:** É isso professora?
3. **Prof:** Diga-me no que você pensou.
4. **A6:** É que quando é negativo dá duas voltas.
5. **Prof:** Como assim?
6. **A6:** Assim, ó! [Referiu-se ao valor de B na função $f(x) = -2sen(x)$(figura 10)].

Como o valor atribuído ao parâmetro B é negativo, ocorreu uma alteração no gráfico, levando **A6** a entender que o gráfico tinha dado uma volta a mais.

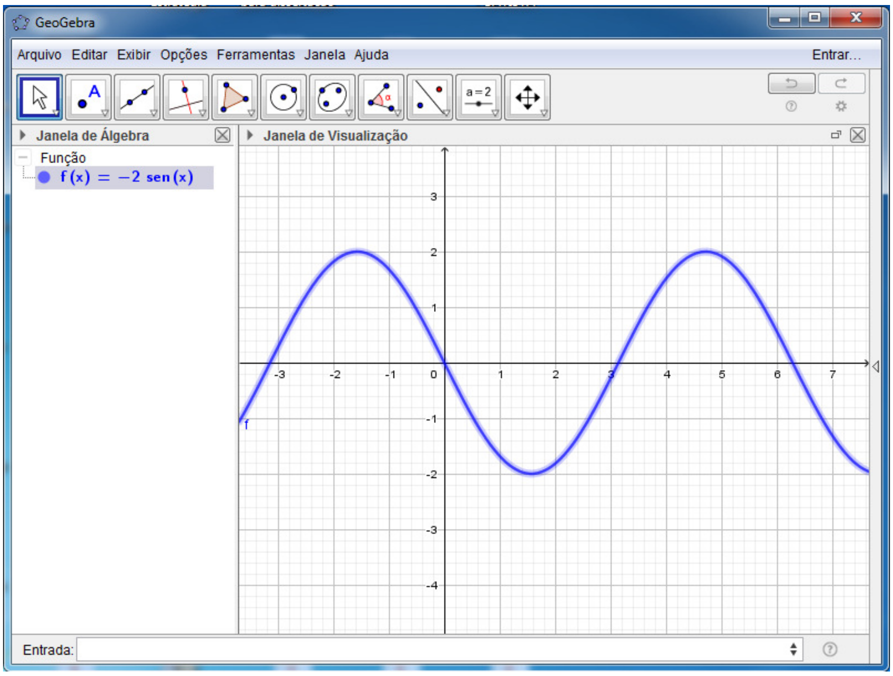



**Figura 10:** f(x) = -2 sen (x)

7. **Prof:** Como ficou o período e a imagem da função?

8. **A6:** Vai para cima e vai para baixo. Esse aqui vai de 0 a 6,5. [O aluno estava referindo-se ao período da função].
9. **Prof:** Pode ser um valor aproximado, não precisa ser exato, é o que vocês observarem.
10. **A6:** Ah! Então eu vou colocar de 0 a 6. [O aluno estava pensando alto sobre qual valor colocaria para o período].
11. **A6:** Aqui está mais perto do 6,5.
12. **A5:** Qual diferença?
13. **A5:** Vou colocar 6,1.
14. **A11:** Quando coloca número negativo, a função se inverte. [Referiu-se à inversão sofrida pelo gráfico em torno do eixo x (figura10)].
15. **A10:** Que legal, hein! Vou anotar isso aqui.

Nos turnos 4 e 14, observa-se um posicionamento dos alunos **A6** e **A11** no que se refere à influência do parâmetro B no gráfico. Para Alrø e Skovsmose (2010), trata-se de mais um dos elementos do diálogo: o posicionar-se. Esse posicionamento também está presente na atitude de **A5**, que, mesmo diante da afirmação de **A6** de que o valor está mais próximo de 6,5, insistiu em manter sua decisão (turnos 11 e 13).

É possível observar que os alunos buscam interpretar e consolidar diferentes valores para o período da função, como discutido por **A5** e **A6** (turnos 11 a 13). A postura deste aluno se apoia em um entendimento lógico e não apenas em um caso particular (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013). Já **A11** observa que, ao colocar valores negativos, a função se inverte, chamando a atenção de **A10**, que imediatamente resolve anotar a explicação (turno 15).

Apesar de não conseguir explicar matematicamente, o aluno observou uma relação existente entre os valores atribuídos para B e a amplitude da onda, pois ao construir o gráfico ele observou que, quando atribuiu valor negativo para B, a função f(x) se inverteu (figura 11) em relação ao eixo x (turno 14).

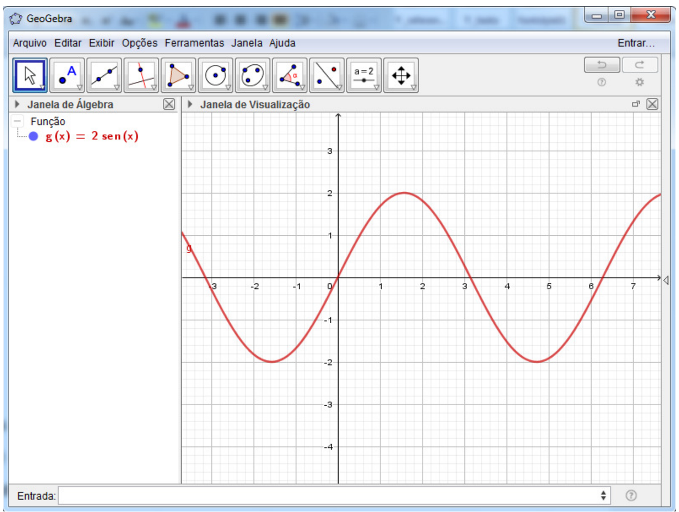



**Figura 11:** Gráfico da função g(x)

Comparando os gráficos das funções f(x) e g(x) (figuras 11 e 12), é possível observar que o gráfico da função g(x) deslocou duas unidades para cima e para baixo. Esse deslocamento é influenciado pelo fator B, que está multiplicando a função.

## 3.4 ATIVIDADE 3

Nessa aula trabalhamos a atividade 3 com os alunos, onde deveriam variar os valores do parâmetro A.

**FOLHA 3**

**Questão 8:** Fixe os valores para os parâmetros de $B = 1, C = 1 \; e \; D = 0$ e atribua valores para $A$ obtendo os gráficos das funções. Analise os gráficos e complete a tabela.

| $f(x) = A + sen(x)$ | $A$ | Imagem da Função | Período da Função |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**Questão 9**: Diante dos resultados que você encontrou, quais alterações ocorrem no comportamento gráfico da função quando variamos os valores de $A$? Descreva-as.

____________________________________________________________________________

**Questão 10:** Você consegue generalizar sua conclusão? Apresente-a.

**Questão 11:** Aplique esta regra e forneça a imagem e o período das funções abaixo:

| $f(x) = A + sen(x)$ | Imagem da Função | Período da Função |
|---|---|---|
| $f(x) = 1 + sen(x)$ | | |
| $f(x) = -1 + sen(x)$ | | |
| $f(x) = 2 + sen(x)$ | | |

**Quadro 5: Terceira atividade**
**Fonte: Autora**

### 3.4.1Episódio 6

Interação apresentada entre a professora, **A3** do primeiro grupo e **A4** e **A6** do segundo grupo.

1. **Prof:** Na aula passada vocês atribuíram valores para C. Agora vocês vão atribuir valores para A.
2. **A4:** Professora, vem cá.
3. **A4:** A única coisa que eu não lembro é a imagem da função.
4. **Prof:** Conversa entre vocês, tenta relembrar a aula passada.
5. **A3:** Professora, vem aqui! É assim, né, professora: f(x), 0?
6. **Prof:** Aí são os valores que você vai querer atribuir para A.
7. **A3:** Vou colocar tudo 0, então! [O aluno queria sugerir todos os valores para A igual a zero].
8. **Prof:** Se você colocar, não vai conseguir analisar o que estará acontecendo com seu gráfico.
9. **A1:** Professora! Primeiro eu tenho que colocar a fórmula, pra daí eu colocar as letras? [Referia-se ao *software* GeoGebra].
10. **Prof:** Isso! Depois vocês vão discutir a imagem da função. Lembram da aula passada?
11. **A6:** A imagem é aqueles que vão de mais a menos?
12. **Prof:** Será que é sempre assim? Mas esse é o caminho!
13. **A3:** É de 0 a -2, ou 1 a -1, ou de 0 a 6, assim? Eu não lembro qual que é?
14. **A3:** É esse aqui? [O aluno apontou no gráfico o eixo x].
15. **Prof:** Será?
16. **A3:** Esse aqui é o período da função?
17. **Prof:** Isso! E a imagem?
18. **A3:** Aqui!
19. **Prof:** Isso! A imagem está nesse eixo. Ai você analisa o gráfico.
20. **A6:** Professora, professora!
21. **Prof:** Oi!
22. **A6:** Eu fiz assim! Não sei se está certo!

Nessa etapa dos encontros (aulas), os alunos já deveriam estar caminhando sozinhos, porém não conseguiam desprender-se da figura do professor. A intenção aqui é quebrar esse paradigma, tornando os alunos construtores de seu próprio saber, bem como adquirir autonomia para defender seus pontos de vista. Analisando a interação apresentada nesse episódio, verificamos que os alunos, sem exceção, cada um a seu tempo, nos pedem ajuda. Esta é fornecida sem comprometer o envolvimento dos alunos, pois "[...] O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. [...]" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p.23).

Em processos como esse, ocorre uma característica fundamental de ambas as partes: a escuta ativa, que tem como pressuposto questionar e oferecer apoio não verbal, procurando descortinar o que ocorre com o outro. Essa sequência de interações, episódio 6, não caracteriza um diálogo, visto que a professora, mesmo que inconscientemente, direciona o questionamento do aluno **A3**.

### 3.4.2Episódio 7

Interação entre a professora e os alunos **A5** e **A6.**

1. **Prof:** O que você está em dúvida?
2. **A6:** Na imagem da função, porque vai do -1 ao 1.
3. **Prof:** Hum, muito bem!
4. **A6:** Professora, então eu queria entender uma coisa.
5. **Prof:** Hã!
6. **A6:** "Tá" aqui, né? Começa do 2 ao 3, né? (ver figura 12)

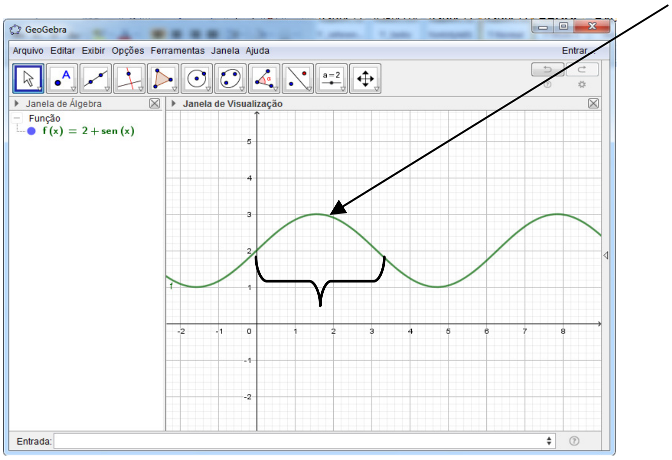



**Figura 12:** f(x) = 2+ sen (x)

7. **A5:** Não! Começa aqui e termina aqui, né, professora? [A5 mostrou o gráfico iniciando em zero e terminando em seis].
8. **Prof:** Esse é o...?
9. **A6:** Período.
10. **Prof:** Muito bem!
11. **A6:** Professora, e daí, depois que eu "fazer" esse aqui, e o segundo, como que faz ele?
12. **Prof:** Do mesmo jeito.
13. **A6:** Como assim vai ser do mesmo jeito? Que número que eu coloco? O 2? [Referiu-se ao próximo valor que iria colocar para A].
14. **Prof:** Você vai escolher outro número.
15. **A5:** Escolhe só o número do A, né, professora?
16. **Prof:** Isso! Vocês só vão escolher os valores de A, porque o B, C e D eu forneci pra vocês; são fixos.
17. **A6:** Eu coloquei aqui o 1 e aumentou pra cima.E agora?
18. **Prof:** Então agora você analisa! Houve mudança no comportamento do gráfico?
19. **A6:** Teve!Está aumentando pra cima.
20. **Prof:** Houve mudança em qual eixo? E por quê?
21. **A6:** Só "tá" aumentando...hum...eixo y. Porque só estou mexendo com o A, daí está subindo cada vez mais pra cima.

Nesse episódio, **A6** começa questionando a professora, e seus questionamentos surgem com ar de afirmação no intuito de obter respostas por meio das próprias perguntas formuladas por ela. Com isso, **A6** demonstra estar compreendendo qual a função do parâmetro A, quando diz: "só estou mexendo com o A, daí está subindo cada vez mais pra cima" (turno 21). **A6** observou que houve alteração no gráfico influenciada pelos valores atribuídos ao parâmetro A. Essa fala do aluno implica em dizer que o gráfico f(x) sofreu um deslocamento vertical para cima em duas unidades (figura 12). Esse deslocamento também provocou mudança no conjunto imagem da função, mas o aluno ainda não havia respondido essa questão.

Nota-se uma observação importante apontada por **A6,** em que atribuiu ao parâmetro A responsabilidade da interferência somente no eixo do y. Assim, entendemos que o argumento apontado por **A6** vem ao encontro das ideias defendidas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), nas quais, em se tratando de uma aula de investigação, o aluno é convidado a atuar como um matemático, incluindo, entre outras ações, a exposição de resultados, discussões e argumentações, sejam elas com os colegas ou com o professor.

Verificamos que as interações proporcionaram um ambiente favorável, dirigido à aprendizagem (QUEIROZ; BARBOSA; AMARAL, 2009), o que de algum modo configura uma investigação, mas não um diálogo na concepção de Alrø e Skovsmose (2010).

### 3.4.3Episódio 8

Interação entre a professora e os alunos **A3**, **A4** e **A5**, e **A6**, sendo este último pertencente ao grupo ao lado. Como os grupos ficavam próximos uns dos outros, facilitou com este participasse da conversa.

1. **A4:** O período da função é aquele que vai do 1 até aqui, não é?
2. **Prof:** Ele parou em quanto, mais ou menos?
3. **A4:** Em 6.
4. **Prof:** Esse é o período. Quando você está variando o valor de A, está tendo alteração no gráfico?
5. **A4:**“Tá”! Ele tá subindo.
6. **Prof:** Mas aí ele está em relação a qual eixo?
7. **A4:** y.
8. **Prof**: Então o eixo x não está tendo mudança?
9. **A4:** O período da função nunca muda, sempre é seis vírgula pouquinho.
10. **A6:** Professora!
11. **A6:** Professora, eu fiz assim.“Tá” certo?
12. **Prof:** É isso ai! Você atribuiu os valores que escolheu.
13. **A6:** Aqui vai ser sempre de -1 ao 7, né?
14. **A5:** Não, mano, aqui não muda nada! Nunca vai mudar o período, né, professora?
15. **Prof:**Você percebeu alguma alteração?
16. **A6:** Não professora! Porque a letra A não altera ele, entendeu?
17. **Prof:** Entendi! É isso que eu quero de vocês, essa discussão.
18. **A6:** Professora, o nosso gráfico não está mudando! Muda o negócio, mas não muda o gráfico.
19. **Prof:** O que não muda? Não! Este é o controle deslizante; ali não vai ter alteração no gráfico. O que vai diferenciar no gráfico de vocês é o valor que vocês vão atribuir para A.

20. **A6:** Mas, tipo assim, vai ser sempre +2, -2, +3, -3, vão ser sempre isso, na imagem da função?
21. **Prof:** Será que é sempre assim?
22. **A6:** Ué! Porque, tipo, ela vai de +2 a -2. E começa do 0?
23. **Prof:** Quando você altera o valor de A, a imagem é este valor?
24. **A6:** Não!
25. **Prof:** Então, ela não vai ser sempre -2 a 2.Aqui ela já oscilou. Então alguma coisa acontece quando você muda o valor de A.
26. **A3:** Professora, se eu colocar aqui, ó?
27. **Prof:** Diante dos resultados que você encontrou, quais alterações ocorrem no comportamento do gráfico?
28. **A3:** Eu posso falar assim, que ele aumenta e abaixa? Ele sobe e abaixa?[O aluno quis dizer que, ao alterar o valor de A, o gráfico desloca verticalmente sobre o eixo y].
29. **Prof:** Pode!
30. **A3:** Assim, professora, aumenta e diminui o tamanho da imagem da função, né?
31. **A3:** Vou colocar assim, o período da função continua a mesma.

Logo no início, **A4** nos perguntou sobre o período da função, demonstrando que ainda tinha dúvida. Outro fator que nos chamou a atenção ocorreu quando **A4** afirmou que o período da função nunca muda (turno 9); **A5** também faz a mesma afirmação para o **A6** (turnos 13 a 14), deixando evidente sua compreensão sobre o período da função. Ao ser questionado pela professora sobre uma possível alteração, **A6** é enfático ao dizer que o período não muda porque o A não o altera (turnos 15 e 16).

## 3.5 ATIVIDADE 4

Na atividade 4, os alunos deveriam sugerir valores para o parâmetro C. Observamos que os alunos, mesmo tendo realizado atividades anteriormente, ainda continuavam com algumas dúvidas.

Ao iniciarem a atividade 4, iniciaram-se, também, os questionamentos, como podemos ver a seguir.

**FOLHA 4**

**Questão 12:** Agora fixe o valor de $A = 0, B = 1, D = 0$. Faça variar o valor do parâmetro $C$ e construa os gráficos das funções. Analisando o gráfico, preencha a tabela.

| $f(x) = sen(CX)$ | $C$ | Imagem da Função | Período da Função |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**Questão 13:** Analisando os resultados que você encontrou que tipo de alterações ocorre no comportamento do gráfico da função, quando variamos os valores do parâmetro $C$?

___________________________________________________________________________

**Questão 14:** Você consegue generalizar sua conclusão? Apresente-a.

_______________________________________________________________________

**Questão 15:** Aplique esta regra e forneça a imagem e o período das funções abaixo:

| $f(x) = sen(CX)$ | Imagem da Função | Período da Função |
|---|---|---|
| $f(x) = sen\left(\frac{x}{4}\right)$ | | |
| $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$ | | |
| $f(x) = sen(2x)$ | | |
| $f(x) = sen(4x)$ | | |

**Quadro 6: Quarta atividade**
**Fonte: Autora**

### 3.5.1Episódio 9

Interação entre a professora e **A1** (do primeiro grupo), e **A4** e **A6**(do segundo grupo).

1. **A1:** Professora, ó, fica nisso? [referia-se ao preenchimento do quadro].

| $f(x) = sen(CX)$ | C | Imagem da função | Período da função |
|---|---|---|---|
| fx = 1sin (5x) | 5 | | |
| fx = sin (2x) | 2 | | |
| fx = sin (1x) | 1 | | |
| fx = sin (3x) | 3 | | |

**Quadro 7: Resposta apresentada por A1**

2. **Prof:** Você sugeriu valores. Agora tem que construir o gráfico para responder os outros.
3. **A1:** Aqui! Fiz isso!

4. **Prof:** O que está acontecendo no gráfico? Está mudando quem?
5. **A1:** O...x, período.
6. **Prof:** E a imagem está mudando?
7. **A1:** Não!
8. **Prof:** Quando você atribuiu valores para C, o que diferenciou no seu gráfico?
9. **A1:** O período.
10. **Prof:** A imagem mudou?
11. **A1:** Não altera.
12. **Prof:** É isso que eu quero que vocês analisem. Com o que você observou, tenta responder o restante do quadro.
13. **A6:** Ó, professora, o período eu tenho que copiar igual aos outros? [referia-se aos exercícios anteriores].
14. **Prof:** O período vai poder ser igual para todos?
15. **A6:** Hum...não sei!
16. **Prof:** Então analise o gráfico e veja se será igual para todos.
17. **A4:** Eu não estou conseguindo generalizar essa conclusão, não! Porque, você mexendo, aumentando ou diminuindo, o gráfico, ele sempre fica 6,28.
18. **Prof:** Sempre está no 6,28?
19. **A4:** Sempre, sempre, ele "tá" aqui, ó!
20. **Prof:** Vamos pensar que ele está começando no 0. Então ele vai fazer uma volta completa, subiu, desceu, subiu e parou aqui. Houve diferença?
21. **A4:** Sim! Quando você mexe no valor de x, o gráfico... Nossa, eu "tô"...!
22. **Prof:** Pode concluir seu raciocínio.
23. **A4:** [risos] Quando você mexe no valor de x, o gráfico pode ir de 0 a 1,28, ou até 6,28.
24. **Prof:** Essa é uma conclusão que você chegou. Quer ver, mexe o parâmetro C. O que está acontecendo com seu gráfico?
25. **A4:** Ele está aumentado e diminuindo. [O aluno falou do período da função].
26. **Prof:** Isso! Essa distância aqui, a gente chama do quê, mesmo?
27. **A4:** Ai, até esqueci! Como que é o nome disso? Função! Período da Função.
28. **A4:** Período!
29. **A4:** Isso!
30. **Prof:** Então, quando você mexe o parâmetro C, o que acontece com o período?
31. **A4:** Está aumentando e diminuindo.

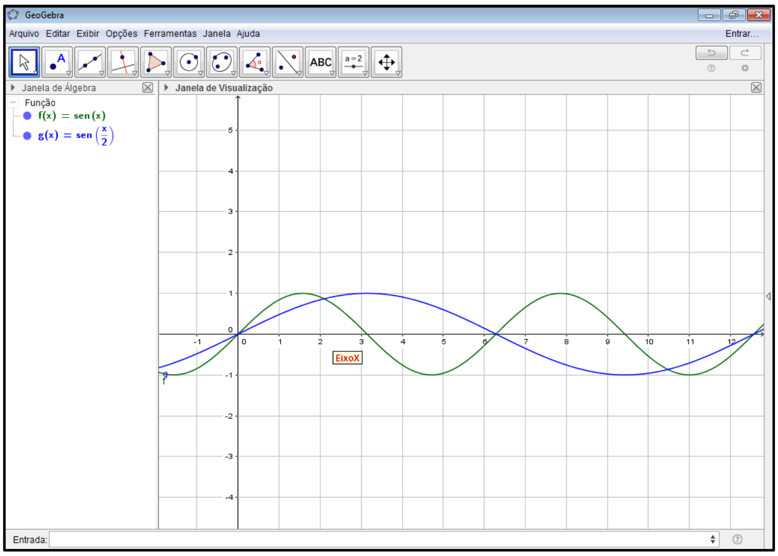



**Figura 13:** sen (x) e g(x) = sen (x/2)

A figura 8 retrata o entendimento de **A4,** quando este disse que o período da função estava "aumentando e diminuindo". Comparando as funções f(x) e g(x), observa-se que o gráfico da função g(x) sofreu alteração no período, passando de 6,28 para 12,56. Observe que para o parâmetro $C = \frac{1}{2}$ implicou em um período multiplicado por 2, ocasionando a alteração no gráfico (figura 8).

Consideramos este um momento importante, visto que o aluno consegue observar o que está acontecendo no gráfico, conforme se altera o valor do parâmetro C. Acreditamos, ainda, que a troca de informações tenha contribuído de alguma forma para a aprendizagem dos demais alunos.

Solicitamos aos alunos para que observassem o que estava acontecendo com o gráfico, pois eles teriam que responder a questão 14 (quadro 5), mas essa questão, por tratar-se de generalização, gerou dúvidas, como descrito por **A6**.

32. **A6**: Professora! O que é generalização?
33. **Prof**: É uma situação que você estende para todos.
34. **A6:** Tipo assim, eu entendo como se fosse pra todos?
35. **A6:** Deixa eu perguntar para alguém!
36. **A6:** Ó, tipo assim, quando vocês aumentam, vocês já perceberam que as ondinhas achatam? Tipo isso? [Perguntou para toda a turma].
37. **A5:** Estreita **A6**, estreita.
38. **A6:** E quando você diminui, expande.
39. **A6:** Tipo isso?
40. **A1:** Então, professora, você quer que eu te explique?
41. **Prof:** Sim!
42. **A1:** Como que a função, ela pode, tipo assim, mesmo ela estreitando, ficar no 1 e no -1?
43. **Prof:** Isso mesmo! Me explique.
44. **A1:** Professora, como é o nome disso aqui? [Mencionou o ponto máximo que o gráfico atingiu].

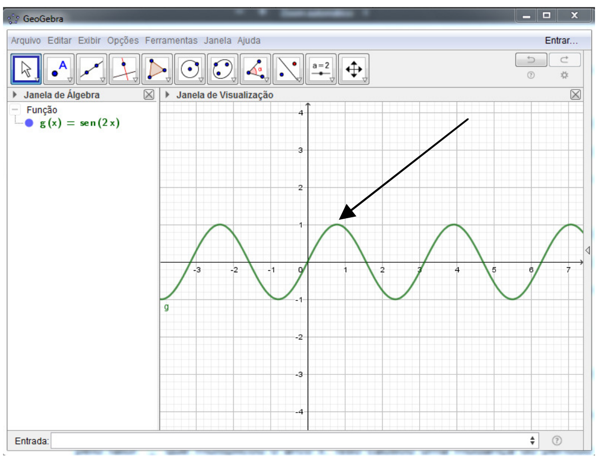



**Figura 14:** g(x) = sen (2x)

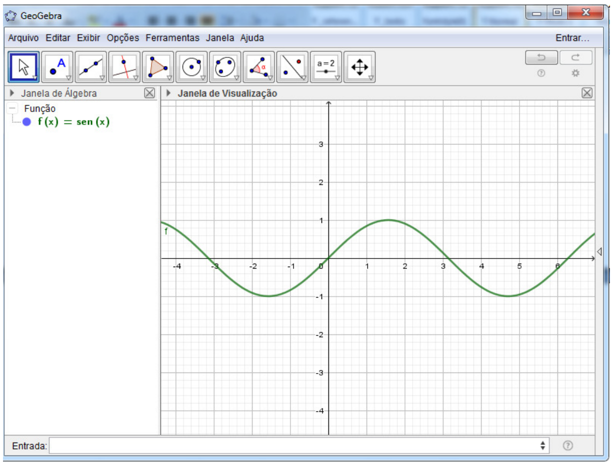


**Figura 15:** f(x) = sen (x)

**45. Prof:** Vamos dizer assim: seria a crista da onda.
**46. A1:** Aqui, quando eu troco o valor C, a crista continua a mesma, mas, se eu voltar pro 1, você vê que ela alarga.
**47. A1:** Se eu "ir" para o 2, ela vai diminuindo, ela vai estreitando.
**48. A12:** Quanto mais você vai aumentando, mais vai diminuindo.
**49. A1:** Quanto mais aumenta, mais ela diminui.
**50. Prof:** Legal essa sua análise.

Quando o aluno **A1** disse que a onda vai estreitando, este se refere às alterações ocorridas com o período da função. Ao comparar as funções representadas pelas figuras 9 e 10, é possível observar que o gráfico g(x) sofreu uma compressão horizontal em relação a f(x) (figura 10), ocasionando alteração no período da função. Essa alteração fez com que **A1** dissesse que a onda estava estreitando.

Ao expor seu pensamento (turnos 36 a 38, episódio 9)*,* **A6** despertou em **A1** a curiosidade de saber qual o nome dado ao ponto máximo que a onda atinge (turno 47). A postura de ambos os alunos reforça que, "se o propósito de um diálogo é estabelecer algum tipo de compromisso, então faz sentido pensar em exploração [...] como um processo de descoberta e aprendizagem [...]" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.127).

Após a troca de ideias entre os alunos, é preciso que generalizem a situação (questão 12, quadro 5), e isso causa certo desconforto, pois alguns não sabiam o significado da palavra generalização, como é o caso do aluno **A6** (turno 32). Nesse momento foi preciso intervir junto ao restante da turma, explicando o significado da palavra em questão.

Analisando a interação, é possível reconhecer o diálogo, pois dentre os elementos apontados por Alrø e Skovsmose (2010), os alunos estabeleceram contato, posicionaram-se, perceberam, avaliaram e pensaram alto. Assim entendemos que houve o diálogo.

De acordo com Alrø e Skovsmose (2010), a interação pode ser considerada um diálogo, tendo em vista que procuramos a todo o momento levar o aluno **A4** a refletir de forma que ele mesmo formulasse sua conclusão. A postura da professora é importante com vistas a fazer com que os alunos desenvolvam os conceitos científicos (FERRUZZI, 2011), pois quando solicitada pelos alunos, ela não fornece a resposta pronta (MORTIMER; SCOTT, 2002). Pelo contrário, oferece ajuda por meio de novos questionamentos.

Observamos, por meio da fala de **A4,** certa compreensão sobre o problema, pois mesmo não sabendo expressar-se matematicamente, ele tentou explicar, à sua maneira, o que havia observado ao variar os valores do parâmetro C na função (turnos 25 a 31), sugerindo, assim, certa compreensão de sua parte.

Nesse episódio, entendemos que ocorreu o diálogo entre a professora e o aluno, tendo em vista que elementos do diálogo estavam presentes.

Ao término dessa atividade, explicamos para toda a turma o significado matemático de aumenta, diminui, estreita, etc., realizando, assim, o fechamento da atividade quanto às falas dos alunos apresentadas no episódio.

No último dia do encontro realizamos um feedback para os alunos, no sentido e realizar o fechamento do conteúdo que estavam estudando. Para isso explicamos sobre o período da função, ou seja, chamamos atenção deles para aquele valor que estavam colocando como sendo 6,28 referia-se a $2\pi$ radiano.

Para fazer com que os alunos refletissem sobre o que estavam fazendo, procuramos a todo momento responder seus questionamentos com outros questionamentos, sendo esta uma postura colaborativa quando se trata de uma aula de Investigação Matemática. Essa atitude é apontada por Alrø e Skovsmose (2010), por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) e por Ferruzzi (2011), como de fundamental importância para que os alunos não desanimem em continuar sua busca, pois, além da cooperação da professora, é importante que se construa um ambiente propício para que se sintam estimulados.

A postura apresentada pela professora retrata um momento de reflexão, ou seja, seu objetivo é levar o aluno a refletir. Isso difere do que ainda hoje ocorre nas aulas de Matemática, em que, diante de uma pergunta do aluno, o professor fornece de imediato a resposta, sem que o mesmo possa pensar e chegar ele próprio à resposta. Os professores não estão acostumados a fazer perguntas, mas sim a dar respostas, e isso só faz reforçar que o tradicionalismo ainda está muito presente nas práticas cotidianas das salas de aulas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013).

Analisando a interação ocorrida nesse episódio, consideramos que os elementos característicos do diálogo, como os atos de perceber, reconhecer, avaliar, promover a igualdade, correr riscos e realizar investigação, estão presentes na interação, confirmando, assim, segundo nosso referencial teórico, a ocorrência do diálogo.

Ressaltamos que as interações, sejam elas caracterizadas como diálogos ou não, são todas relevantes. Enquanto umas proporcionam a aprendizagem dos conceitos matemáticos, outras contribuem para o desenvolvimento dos alunos, dando-lhes oportunidade de expor suas ideias, como também, de defendê-las (FERRUZZI, 2011).

Com o término das aulas, o professor titular da turma reforçou que o conteúdo trabalhado com os alunos durante a aplicação da pesquisa seria também levado em conta por ele na avaliação bimestral, além de já estar sendo considerado como trabalho mensal. Segundo o professor, ele iria fazer uma retomada dos conteúdos como forma de revisão antes da prova bimestral, que ainda demoraria um pouco a ser realizada.

# 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retomando a problemática que deu vida a esta pesquisa, ou seja, "As interações que podem ser desencadeadas pela Investigação Matemática possuem potencial para aprendizagem?", analisamos as interações sob a ótica de Alrø e Skovsmose (2010), procurando obter subsídios para responder nossa indagação. Apesar de alguns percalços, como a falta de hábito dos alunos de trabalhar com investigação, podemos inferir que tivemos um resultado satisfatório.

Como professoras, podemos dizer que foi um desafio ministrar aulas investigativas. A preparação de uma aula que envolve a Investigação Matemática consiste em uma etapa importante, pois é preciso selecionar, adaptar ou até mesmo construir uma atividade tendo claramente quais objetivos querem atingir. Esse não é um trabalho simples, sendo que o professor precisará recorrer à sua criatividade, para desenvolver e estimular o interesse dos alunos pela atividade proposta. De acordo com Pontes, Brocardo e Oliveira (2013), a habilidade de criar atividades de investigação demanda tempo, onde a reflexão sobre a estrutura das aulas, á maneira como os alunos irão trabalhar (se individual ou em grupo), e a escolha de materiais que serão utilizados, são fatores que devem ser considerados

Um dos fatores que tivemos dificuldade para trabalhar, no começo, foi o fato dos alunos não estarem habituados a esse tipo de aula, em que era preciso interação, compartilhamento de ideias e conhecimentos. Podemos salientar que a Investigação Matemática facilitou, entre outros aspectos, a reflexão de nossa parte, pois diversas situações foram observadas, como, por exemplo, a dificuldade dos alunos com o conteúdo de Matemática, o fato de não estarem habituados a refletir, expor suas ideias e debatê-las, assim como, trabalhar em grupo. Esses aspectos são características da Investigação Matemática, o que vem a contribuir para o desenvolvimento dos alunos.

Iniciamos as aulas familiarizando os alunos com o contexto a ser trabalhado, pois não era habitual deles participar de aulas investigativas. Com isso, tivemos um pouco de dificuldade de fazer com que se envolvessem ambientalmente e contextualmente com o que estávamos propondo na aula. Entretanto, com o passar das aulas, observamos que os alunos foram se envolvendo e começaram a participar da aula, trocando informações. Nesse sentido, podemos dizer que

> A aprendizagem da Matemática deve, assim, contemplar oportunidades de os alunos se envolverem em momentos genuínos de actividade matemática. Ao invés de apresentar a Matemática aos alunos como uma ciência dedutiva e sistemática, destaca-se o seu processo de construção [...] (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTES, 1999, p.189).

Como o processo de construção gerou, entre outros fatores, a interação entre os participantes da pesquisa, podemos inferir que a Investigação Matemática se mostrou favorável a ocorrência do diálogo, desencadeando, o potencial para aprendizagem. Isso, de acordo com nosso referencial teórico, promove a absorção do conhecimento.

Outro ponto a ser considerado é o ambiente em que os alunos foram inseridos para fazerem parte desta pesquisa. Trabalharam no laboratório de informática, onde não tinha o hábito de frequentar, e isto contribuiu positivamente para o bom andamento da aula. A mudança de ambiente possibilitou aos alunos observarem que não eram apenas sujeitos prontos a receber informações, mas, sim, aptos a contribuírem com sua própria aprendizagem.

Salientamos que, nas primeiras aulas, não tivemos, segundo Alrø e Skovsmose (2010), a presença do diálogo, o qual pode ser observado somente da sexta aula em diante. Conforme o objetivo exposto é possível inferir que a utilização de atividades investigativas proporciona a interação, a qual conduz à aprendizagem e contribui para uma relação de cooperação e interação entre professor e aluno, e entre aluno e aluno.

Essa prática pedagógica tende a despertar nos estudantes um olhar diferenciado para os conteúdos estudados, como se pode observar na fala daquele que, mesmo sem saber se pronunciar matematicamente, ressaltou para os colegas a mudança no gráfico, "Ó, tipo assim, quando vocês aumentam, vocês já perceberam que as ondinhas achatam? Tipo isso?" (turno 36, episódio 9). Nota-se que, conforme os alunos foram se envolvendo com as atividades, eles se tornaram mais questionadores, o que reforça ser a Investigação Matemática "[...] uma estratégia de ação para a construção de conceitos matemáticos e para o início da autonomia (e confiança em si mesmo) nas aulas de Matemática" (SANTOS, 2012).

Face às análises dos episódios, percebemos a importância de oportunizar aos alunos ações que os envolvam em novas experiências, como é o caso da discussão sobre o comportamento da onda no gráfico, visto que são momentos como esses que dão aos alunos a oportunidade de construir, relembrar e até mesmo reconstruir conhecimentos considerados primordiais para seu desenvolvimento (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010).

Assim sendo, concordamos com Alrø e Skovsmose (2010) de que o diálogo, sendo uma comunicação com qualidades específicas, contribui para o processo de aprendizagem dos alunos. Logo, o diálogo objetiva a construção coletiva do conhecimento, seja ele um conceito matemático ou a resolução de um problema.

Ao apresentar trechos das interações entre os participantes da pesquisa, a ideia foi mostrar que a Investigação Matemática possibilita a troca de ideias e a autonomia, e contribui para o desenvolvimento do diálogo, o qual, segundo nosso referencial teórico, contribui positivamente para a aprendizagem, respondendo assim nossa questão de pesquisa: “As interações que podem ser desencadeadas pela Investigação Matemática possuem potencial para aprendizagem?”.

Um fator importante mencionado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), por Alrø e Skovsmose (2010), por Ferruzzi (2011) e por Corradi (2013) consiste no papel do professor ao conduzir uma atividade investigativa. Constatamos que seu desempenho foi essencial durante o desenvolvimento da atividade, tendo em vista o seu apoio aos participantes da pesquisa, mediando, orientando e conduzindo a atividade mesmo diante dos obstáculos que surgiram.

A função do professor como orientador e mediador é importante para o sucesso de uma aula de Investigação Matemática. Nossa atuação neste trabalho corroborou para os resultados obtidos, pois procuramos despertar nos alunos a curiosidade e o desejo de obter informações e procuramos, também, oportunizar situações que os fizessem levantar questionamentos e indagações a serem discutidas, além de buscarmos transmitir uma postura investigativa.

Acreditamos que a maneira como a atividade investigativa foi conduzida tenha contribuído para a compreensão dos alunos, pois este trabalho permitiu aos participantes descobrir padrões e relações por meio da investigação e da argumentação. Isso desenvolveu neles um espírito de investigador, permitindo, além do mais, a cada um empenhar-se no seu próprio ritmo.

Tendo analisado as atividades de Investigação Matemática e tendo constatado que as mesmas se mostraram favoráveis a aprendizagem, nos propusemos a desenvolver um material que chamamos aqui de produto educacional. O produto educacional desenvolvido contém roteiros de atividades que foram construídos especificamente para este fim, ou seja, construção do produto educacional resultante desta dissertação.

Cabe salientar que nossa pesquisa abordou a função seno e seus parâmetros como atividade investigativa, mas que esta pode ser estendida a outras funções como, por exemplo, função cosseno, tangente e outras que o professor sentir-se a vontade para trabalhar em suas aulas. Com isso, talvez seja possível que outras pesquisas sejam desenvolvidas como forma de cooperar com o desenvolvimento do ensino.

## REFERÊNCIAS


ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Tradução: Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

ARAÚJO, J. L. **Um diálogo sobre comunicação na sala de aula de Matemática**. Veritati, Salvador, n. 04, p. 81-93, 2004.

BRAUMANN, C. **Divagações sobre Investigação Matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática**. In: J. P. Ponte, C. Costa, AI Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A.F Dionísio (Org.), Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores, p. 5-24, 2002.

BROCARDO, J. **Investigações na aula de Matemática: A história da Rita**. Actas ProfMat. p. 155-161. Lisboa: APM, 2001.

BRUNHEIRA, L. **O conhecimento e as atitudes de três professores estagiárias face à realização de actividades de investigação na aula de Matemática**. APM, 2000.

CORRADI, D. K. S. **Investigações Matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno: uma experiência com alunos do 2º ano do Ensino Médio**. 2013, 208 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto, 2013.

FERRUZZI, E. C.; ALMEIDA, L. M. W de: **Diálogos em modelagem matemática**. Ciência & Educação (Bauru), v. 21, n. 2, 2015.

FERRUZZI, E. C. **Interações discursivas e aprendizagem em modelagem matemática**. 2011. 228 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2011.

FERNANDES, K. T.; BONI, R. K.; SAVIOLI, A. P. das D. **Investigação Matemática no Ensino de Números Decimais:** um relato de experiência. Actasdel VII CIBEM ISSN, v. 2301, n. 0797, p. 1386, 2013.

FONSECA, H. **Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula**. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM. 2000.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. da. **As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática**. Actas do ProfMat, v. 99, p. 91-101, 1999.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido. Rio de Janeiro**, 1970, 17ª ed. Paz e Terra

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, Denise T. (org.). **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GODOY, A. S. **Pesquisa qualitativa:** tipos fundamentais. Revista de Administração de Empresas, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

GRANDO, N. I.; BALKE, M. **Investigação Matemática na sala de aula:** tratamento da informação no ensino fundamental. Zetetiké – FE/Unicamp, v.21, n.40, jul. /dez. 2013.

GUERRA, S. H. R.; BISOGNIN, V. **Investigação Matemática na Sala de Aula:** ensino de conceitos de estatística para o 8° ano do ensino fundamental. VIDYA, v. 36, n. 2, p. 275-292, 2016.

HENRIQUES, A.; PONTE, J. P. da. (2014). **As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de Investigação**. Bolema, 28 (48), 276 -298.

HUANCA, R. R. H. **A resolução de problemas no processo ensino aprendizagem-avaliação de Matemática na e além da sala de aula**. 2006, 253 fl. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. **Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática:** reflexões para o ensino de Matemática. Zetetiké - FE/Unicamp, v. 19, 2011.

MOREIRA, M. A. **O mestrado (profissional) em ensino**. Revista Brasileira de Pós-Graduação, Brasília, v. 1, n. 1, p. 131-142, jul. 2004.

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P. (2002). **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências:** uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. Investigações em Ensino de Ciências. Porto Alegre - RS, v.7, n.3, 2002. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n3/v7_n3_a7.htm> e Acessado em 23 de abril de 2017.

OCDE. **Organização de cooperação e de desenvolvimento econômico**. Programme for International Student Assessment (PISA). Results from PISA 2015. 2016. Disponível em: http://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Brazil-PRT.pdf . Acesso em: 10 janeiro. 2017.

OLIVEIRA, H. M. **Actividades de Investigação na Aula de Matemática:** aspectos da prática do professor**.** Lisboa, 1998.

OLIVEIRA, H. M.; SEGURADO, M. I; PONTE, J. P. da. **Explorar, investigar e discutir na aula de Matemática**. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, e L. Brunheira (ed.), Investigações Matemáticas na aula e no currículo. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p. 189 - 206.

______________. **Tarefas de investigação em Matemática:** histórias de sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, e L. Brunheira (ed.), Investigações Matemáticas na aula e no currículo. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999.p. 189-206.

______________.**Investigações Matemáticas na Sala de Aula:** Um Projecto colaborativo. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, e L. Brunheira (ed.), Investigações matemáticas na aula e no currículo (pp. 133-151). Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999.

PEREIRA, A. B.; MUNHOZ, A. V.; QUARTIERI, M. T. **Atividades investigativas:** possibilidade de ensino de conceitos trigonométricos no triângulo retângulo na Licenciatura em Matemática. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 11, n. 1, p. 131-147, 2016

PEREIRA, R. S. G.; BERNARDELLI, M. S.; SANTOS J. G. **Um estudo sobre a função seno e seus parâmetros por meio da investigação matemática em sala de aula.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. X Encontro Nacional de Educação Matemática: educação matemática, cultura e diversidade, 2010.

PONTE, J. et al. (1999). **Investigando as aulas de investigações matemáticas**. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, e L. Brunheira (ed.), Investigações matemáticas na aula e no currículo (p. 133-151). Lisboa: Projecto MPT e APM.

PONTE, J. P. da. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. Investigar em educação, p. 93-169, 2003.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PONTE, J. P. da; Oliveira, H.; Cunha, M. H.; Segurado, M. I. (1998). **Histórias de investigações matemáticas.** Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

PORFÍRIO, J.; OLIVEIRA, H. Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. **Investigações matemáticas na aula e no currículo**, p. 111-118, 1999.

PORTO, J. F. **Diálogo e interatividade em vídeo aulas de Matemática**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

QUEIROZ, M. P. de; BARBOSA, R. M. N.; AMARAL, E. M. R. do. **Uma análise de interações discursivas promovidas pela aplicação de métodos cooperativos em aulas de química**. Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências, v. 9, n. 3, 2011.

RAMOS, A. P. et al. **Problemas matemáticos:** caracterização, importância e estratégias de resolução. USP - Seminários de Resolução de Problemas, 2002. Disponível em: http://www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-8-resolucao_problemas.pdf. Acesso em: 30 abr.2016

ROCHA, A.; PONTE, J. P. da. **Aprender Matemática investigando**. Zetetiké. Cempem. Unicamp. V. 14, n 26. 2006

ROCHA, E.M.B. **O processo de ensino-aprendizagem: modelos e componentes**. In: PENTEADO, W. M. A. (org) Psicologia e Ensino. São Paulo: Papelivros, 1980.

RODRGUIES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. da.**Tarefas matemáticas no ensino da álgebra.** In Brocardo, J.; Boavida, A.; Delgado, C.; Santos, E.; Mendes F.; Duarte, J.; Baía, M.; Figueiredo, M. (ed.). Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática. EIEM 2014. p 353-367. Sesimbra: ESE Setúbal.

SANTOS, M. N. dos. **A história da Matemática como desencadeadora de atividades investigatórias sobre o teorema de tales:** análise de uma experiência realizada com uma classe do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2012. 180f. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

STRAPASON, L. P.; BISOGNI, V. **Investigação Matemática na Sala de Aula:** experiência com alunos do ensino médio sobre sucessões numéricas. X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, BA, 2010.

VARANDAS, J. M. **Avaliação de investigações matemáticas:** uma experiência. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM, 2000. Disponível em http://ia.fc.ul.pt, 2000

**APÊNDICE A–** Roteiros de Atividades Sobre Função Seno

**FUNÇÃO SENO**

Vamos trabalhar com a representação gráfica da função$f(x) = A + Bsen(Cx + D), com x \in R$. Para esta atividade, fixe os parâmetros A, B, C e D, com A = 0, B = 1, C = 1 e D = 0 e, com o auxílio do GeoGebra, construa o gráfico da função dada e responda:

**Questão 1:** Qual o domínio da função f(x)= sen(x)?

_______________________________________________________________

**Questão 2:** Qual a imagem da função f(x)= sen(x)?

_______________________________________________________________

Note que o gráfico da função apresenta um determinado comportamento para um intervalo de valores em x, e esse comportamento se repete em outros intervalos.

**Questão 3:** Qual é o comprimento deste intervalo? ________________. O nome deste comprimento é PERÍODO da função. Desse modo, podemos afirmar que a função $f(x) = sen(x)$ possui:

c) Período igual a: _________________.

d) Imagem igual a:_________________.

Na sequência, solicitamos aos alunos que variassem os parâmetros A, B, C e D e verificassem que alterações essas modificações produziam no comportamento do gráfico da função.

**FOLHA 2**

Fixe os valores para os parâmetros de B =1, C=1 e D= 0 e atribua valores para A, obtendo os gráficos das funções. Analise os gráficos e complete a tabela.

| $f(x) = A + sen(x)$ | A | Imagem da Função | Período da Função |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**Questão 4**: Diante dos resultados que você encontrou, quais alterações ocorrem no comportamento gráfico da função quando variamos os valores de A? Descreva-as.

________________________________________________________________________

**Questão 5:** Você consegue generalizar sua conclusão? Apresente-a.

**Questão 6:** Aplique esta regra e forneça a imagem e o período das funções abaixo:

| $f(x) = A + sen(x)$ | Imagem da Função | Período da Função |
|---|---|---|
| $f(x) = 1 + sen(x)$ | | |
| $f(x) = -1 + sen(x)$ | | |
| $f(x) = 2 + sen(x)$ | | |

**FOLHA3**

Da tarefa anterior, verificamos que se $f(x) = sen(x)$, temos Im f(x) = [-1,1] e P = $2\pi$ rad.

**Questão 7**: Fixe os valores para parâmetros A=0, C=1 e D=0, e atribua valores para B≠0. Na sequência, analise os gráficos construídos no GeoGebra e complete a tabela.

| $f(x) = Bsen(x)$ | B | Imagem da função | Período da função |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**Questão 8:** Diante dos resultados que você encontrou, quais alterações ocorrem no comportamento gráfico da função, quando variamos os valores de B? Descreva-as.

______________________________________________________________________

**Questão 9:**Você consegue generalizar sua conclusão? Apresente-a.

______________________________________________________________________

**Questão 10:** Forneça a imagem e o período das funções abaixo, sem construir os gráficos:

| $f(x) = A + Bsen(CX + D)$ | Imagem da função | Período da função |
|---|---|---|
| $f(x) = 2sen(x)$ | | |
| $f(x) = 3sen(x)$ | | |
| $f(x) = 4sen(x)$ | | |
| $f(x) = -2sen(x)$ | | |

**FOLHA 4**

Agora fixe o valor de A= 0, B=1, D=0. Faça variar o valor do parâmetro C e construa os gráficos das funções. Analisando o gráfico, preencha a tabela.

| $f(x) = sen(CX)$ | C | Imagem da Função | Período da Função |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**Questão 11:** Analisando os resultados que você encontrou que tipo de alterações ocorre no comportamento do gráfico da função, quando variamos os valores do parâmetro C?

_______________________________________________________________________________

**Questão 12:** Você consegue generalizar sua conclusão? Apresente-a.

_______________________________________________________________________________

**Questão 13:** Aplique esta regra e forneça a imagem e o período das funções abaixo:

| $f(x) = sen(CX)$ | Imagem da Função | Período da Função |
|---|---|---|
| $f(x) = sen\left(\frac{x}{4}\right)$ | | |
| $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$ | | |
| $f(x) = sen(2x)$ | | |
| $f(x) = sen(4x)$ | | |

# **APÊNDICE B**– Progressão Geométrica

**PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)**

Inicie a aula apresentando a sequência: 2, 6, 18, 54 (...). Solicite aos alunos que:

a) Investiguem o que está acontecendo entre os números e escrevam mais cinco números dessa sequência.

b) Respondam: “O que vocês observaram nessa sequência?”.

Após os alunos terem respondido os itens a e b, explique a eles que cada termo da sequência pode ser representado pela letra a minúscula, juntamente com a posição que o termo ocupa. Por exemplo, admita

- ✓ $a_1$ como sendo o 1º termo;
- ✓ $a_2$ como sendo o 2º termo;
- ✓ $a_3$ como sendo o 3º termo, e assim sucessivamente.

Pergunte aos alunos como fariam para representar um termo que não se sabe qual é. Caso os alunos tenham dificuldade com a resposta, explique a eles que, assim como os primeiros termos são representados como mencionado acima, o enésimo termo será representado por $a_n$.

Disponibilize um tempo para que os alunos discutam e acompanhe as discussões. Procure instigá-los a dizer quais foram os termos que colocaram, bem como perceberem que a sequência está sendo multiplicada por três.

Caso perceba que os alunos (ou grupo) não chegam à resolução, o professor deve participar mais da interação. Não deve, porém, dizer o que gostaria que fizessem, mas, sim, levá-los a reflexão.

Algumas questões que o professor pode apresentar aos alunos:

- ✓ O que está acontecendo com os termos da sequência?
- ✓ Observe o que acontece de um termo para o outro.
- ✓ Existe algo em comum entre os termos?

Ao verificar que os alunos notaram que a sequência é múltipla de um número, pergunte:

- ✓ Está multiplicando por quanto?
- ✓ A divisão de um termo pelo outro é sempre o mesmo?
- ✓ Qual é o 5º termo?
- ✓ Qual o valor do 10º termo?

Após a exploração dessa sequência numérica, insira outras e procure explorá-las da mesma forma.

Exemplos:

a) (3, 6, 12,___,___,___,___)
b) (1, 5,___,___,___,___,___,__)
c) (-2, -6, -18,___,___,___,___,__)

Ao término das atividades, procure demonstrar a fórmula do termo geral da PG, utilizando, para isso, uma das sequências numéricas anteriores, conforme sugestão a seguir:

**Termo Geral**

Observe a sequência numérica: 2, 6, 18, 54 (...).

Pergunte aos alunos qual letra representa o primeiro termo da sequência. Espera-se que os alunos respondam que é representado por $a_1$, o segundo, por $a_2$, o terceiro, por$a_3$, e assim sucessivamente:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\ldots$$

Até o momento, não se falou a respeito da nomenclatura dada à razão de uma PG. Seria interessante discutir com os alunos sobre isso. Pergunte se eles têm alguma ideia da letra que representa o valor pelo qual os termos são multiplicados a fim de se chegar ao próximo termo. Ao debater, leve-os a perceber que este valor é chamado razão, e que é representado pela letra q minúscula. A todo momento, procure retirar o máximo de informações dos alunos sem fornecer a reposta de forma imediata.

Ao término da explicação, peça aos alunos para preencherem a tabela de acordo com a sequência escolhida, pois se trata de uma sequência que eles já terão resolvido antes.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_1=2$ | $a_1=2*3^0=2$ | $a_1=a_1$ | $a_1=a_1*q^0$ |
| $a_2=2*3=6$ | $a_2=2*3^1=6$ | $a_2=a_1*q$ | $a_2=a_1*q^1$ |
| $a_3=2*3*3=18$ | $a_3=2*3^2=18$ | $a_3=a_1*q*q$ | $a_3=a_1*q^2$ |
| $a_4=2*3*3*3=54$ | $a_4=2*3^3=54$ | $a_4=a_1*q*q*q$ | $a_4=a_1*q^3$ |
| $a_5=2*3*3*3*3=162$ | $a_5 = 2*3^4 =162$ | $a_5=a_1*q*q*q*q$ | $a_5=a_1*q^4$ |
| $a_6=$ | $a_6=$ | $a_6=$ | $a_6 =$ |
| $a_7=$ | $a_7=$ | $a_7=$ | $a_7=$ |
| | | | .<br>.<br>.<br>$a_n=a_1*q^{n-1}$ |

Caso os alunos apresentem dificuldade no preenchimento da tabela, relembre com eles sobre como encontrar os termos subsequentes. Se, ainda assim, observar que os alunos estão tendo dificuldade, procure participar das interações, questionando-os e fazendo-os refletirem sobre o problema.

Peça aos alunos para observarem a terceira coluna da tabela acima. Pergunte se eles veem alguma regularidade. Deixe-os pensarem e discutirem com os colegas, de forma que consigam notar que qualquer termo sempre será o primeiro ($a_1$) multiplicado pela razão tantas vezes quantas necessárias. E que essas tantas vezes estabelecem uma relação com a posição desse termo (primeiro, segundo, terceiro...), que é sempre uma unidade menor, ou seja, o número de termos menos um. Talvez seja necessário relembrar um pouco sobre o conteúdo de potência de mesma base para que possam dar andamento ao preenchimento da tabela. Se for o caso de relembrar o conteúdo de potência, faça em um lado da lousa, mas sempre de maneira que eles forneçam a resposta. Posteriormente a isso, peça para que analisem a coluna mencionada acima, ou seja, a terceira.

Então, a fórmula do termo geral de uma PG fica da seguinte forma:

$$\boxed{a_n=a_1*q^{n-1}}$$

Essa é a fórmula do termo geral da PG, em que diz que qualquer termoé igual ao anterior multiplicado pela razão, como, por exemplo:

$$a_5 = a_4 * q$$
$$a_{12} = a_{11} * q$$
$$a_{72} = a_{71} * q$$

Resolva mais alguns exemplos com os alunos e procure questioná-los no sentido de verificar se compreenderam o que foi proposto.

**ANEXO A -**Termo de Assentimento

TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO LIVRE E ESCLARECIDO (Adolescentes com 12 anos completos, maiores de 12 anos e menores de 18 anos).

**Informação geral:** O assentimento informado para a criança/adolescente não substitui a necessidade de consentimento informado dos pais ou guardiões. O assentimento assinado pela criança/adolescente demonstra a sua cooperação na pesquisa.

**Título do Projeto:** INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DA SUA CONTRIBUIÇÃO PARA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA.

**Investigador (a):** Elaine Cristina Ferruzzi e Juliana Aparecida Alves da Costa

**Local da Pesquisa:** Colégio Estadual Antônio dos Três Reis de Oliveira – Ensino Fundamental e Médio, Apucarana, PR

**Endereço:** Rua Santa Helena, s/n, Apucarana – Paraná – Brasil.

**O que significa assentimento?**

O assentimento significa que você concorda em fazer parte de um grupo de adolescentes da sua faixa de idade para participar de uma pesquisa. Serão respeitados seus direitos, e você receberá todas as informações, por mais simples que possam parecer.

**Pode ser que este documento, denominado TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO, contenha palavras que você não entenda. Por favor, peça ao responsável pela pesquisa ou à equipe do estudo para explicar qualquer palavra ou informação que você não entenda claramente.**

**ANEXO B**–Informação ao Sujeito da Pesquisa

# INFORMAÇÃO AO SUJEITO DA PESQUISA

## a) Apresentação da Pesquisa

Você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa cujo objetivo é analisar se os enunciados das questões influenciam ou não os registros produzidos pelos alunos, bem como se implicam ou não as ações cognitivas de tratamento, conversão e coordenação. Você participará, caso concorde, respondendo uma lista de questões matemáticas. Com a aplicação dessa lista, pretendo analisar e posteriormente inferir, com base na fundamentação teórica, se o enunciado das questões influencia nos tipos de registros de representação e nas ações cognitivas apresentadas e de que forma isso se manifestou.

## b) Desconfortos, Riscos e Benefícios.

Conforme a Resolução nº 466 de 12 de dezembro de 2012, existe a possibilidade de danos à dimensão psíquica e moral do indivíduo, já que envolve questões de caráter pessoal e coletivo. O pesquisador responsável suspenderá a pesquisa imediatamente ao perceber algum risco ou dano à saúde do sujeito participante da pesquisa, consequente à mesma, não previsto no termo de consentimento. Os participantes não pagarão e nem serão remunerados por sua participação e poderão, sem qualquer ônus, desistir a qualquer momento da pesquisa.

O projeto de pesquisa foi elaborado pensando em contribuir com as discussões de professores com relação à aprendizagem dos alunos, no que diz respeito à seleção, desenvolvimento e elaboração de enunciados de questões utilizadas nas aulas de Matemática, para que, assim, a comunidade de professores da Educação Básica compreenda as diferentes formas com que seus alunos apreendem.

A presente pesquisa será gravada por meio de áudio e transcrita posteriormente, sem que qualquer aluno seja identificado no ato da transcrição.

## c) Confidencialidade

A pesquisa não divulgará seu nome, garantindo o anonimato.

## d) Critérios de inclusão e exclusão

Foram selecionados, para participar dessa pesquisa, alunos matriculados regularmente no segundo ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Antônio dos Três Reis de Oliveira, da cidade de Apucarana, PR. Não se aplica o critério de exclusão.

**e) Ressarcimento e indenização**

Estão assegurados o ressarcimento e a indenização provenientes de custos ou danos gerados ao participar dessa pesquisa.

**f) Contato para dúvidas**

Se você ou os responsáveis por você tiver (em) dúvidas com relação ao estudo, aos direitos do participante, ou aos possíveis riscos relacionados ao estudo, você deve contatar o(a) investigador(a) do estudo ou membro de sua equipe: JULIANA APª ALVES DA COSTA, telefone : (43) 9972-5568 e ELAINE CRISTINA FERRUZZI, telefone : (43) 3315-6116. Se você tiver dúvidas sobre seus direitos como um paciente de pesquisa, você pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O CEP é constituído por um grupo de profissionais de diversas áreas, com conhecimentos científicos e não científicos, que realizam a revisão ética inicial e continuada da pesquisa para mantê-lo seguro e proteger seus direitos.

**ANEXO C–**Declaração de Assentimento

**DECLARAÇÃO DE ASSENTIMENTO DO SUJEITO DA PESQUISA:**

Eu li e discuti com o investigador responsável pelo presente estudo os detalhes descritos neste documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar a participação, e que posso interrompê-la a qualquer momento, sem a necessidade de dar uma razão. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Eu entendi a informação apresentada neste TERMO DE ASSENTIMENTO. Eu tive a oportunidade de fazer perguntas, e todas as minhas perguntas foram respondidas.

Eu receberei uma cópia assinada e datada desta DECLARAÇÃO DE ASSENTIMENTO INFORMADO.

______________________________________________________________

NOME DO ADOLESCENTE ASSINATURA DATA

______________________________________________________________

NOME DO INVESTIGADOR ASSINATURA DATA

______________________________________________________________

NOME DO RESPONSÁVEL ASSINATURA DATA

**Endereço do Comitê de Ética em Pesquisa para recurso ou reclamações do sujeito pesquisado:**

Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR) REITORIA: Av. Sete de Setembro, 3165, Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba, PR.Telefone: (41) 3310-4943; e-mail: coep@utfpr.edu.br