

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**JOÃO PEDRO GALDINO PILLAR**

**TEOREMAS DE PAPPUS E DESARGUES EM SUAS VERSÕES PROJETIVAS**

**PATO BRANCO**

**2022**

**JOÃO PEDRO GALDINO PILLAR**

**TEOREMAS DE PAPPUS E DESARGUES EM SUAS VERSÕES PROJETIVAS**

**Pappus and Desargues' Theorems in their projective versions**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Michael Santos Gonzales Gargate

**PATO BRANCO**

**2022**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**JOÃO PEDRO GALDINO PILLAR**

**TEOREMAS DE PAPPUS E DESARGUES EM SUAS VERSÕES PROJETIVAS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção do  
título de Licenciado em Matemática do Curso  
de Licenciatura em Matemática da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 06 de dezembro de 2022

---

Prof. Dr. Michael Santos Gonzales Gargate  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Prof. Dr. Ivan Ítalo Gonzales Gargate  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Prof. Dr. Mateus Eduardo Salomão  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**PATO BRANCO**

**2022**

Dedico este trabalho, aos meus pais que  
sempre me apoiaram e continuam me  
apoiando em minhas decisões.



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço em primeiro lugar à minha família, em especial aos meus pais, que sempre me incentivaram em meus estudos.

A todos aqueles que foram meus professores em algum momento de minha trajetória, principalmente aos professores da graduação e às minhas duas professoras de exatas do ensino médio.

Ao meu orientador Prof. Dr. Michael Santos Gonzales Gargate que me guiou com muita sabedoria.

Aos meus colegas de sala, especialmente ao meu grupo de amigos que sempre esteve comigo.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram diretamente ou indiretamente para a realização deste trabalho.

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar o Teorema de Pappus e o Teorema de Desargues, mostrar aplicações destes, bem como a demonstração de cada um usando a Geometria Projetiva, isto ocorrerá por meio de uma pesquisa bibliográfica, exploratória e de abordagem qualitativa. Uma vez que a geometria euclidiana é conhecida pela maioria das pessoas, visto que estudam-se seus conceitos básicos desde criança, ela é a mais famosa, em contrapartida esta não é a única geometria existente. Neste trabalho discute-se sobre duas geometrias não euclidianas com a motivação de que há uma diferença entre como enxergamos as coisas e como elas realmente são, será apresentada uma formalização que explica essas diferenças: a Geometria Projetiva. Nesse contexto, inicia-se com uma breve revisão sobre álgebra linear e, em seguida, fala-se sobre as geometrias não euclidianas, sendo estas a Geometria Projetiva e a Geometria Elíptica, enunciando seus axiomas e principais resultados que são utilizados nas demonstrações dos teoremas, vê-se, então, que podemos resolver algumas situações problemas a partir dos teoremas enunciados.

**Palavras-chave:** geometria projetiva; geometrias não euclidianas; teoremas de pappus; teorema de desargues.

## ABSTRACT

The present academic work has the aim to introduce the Pappus' Theorem and the Desargues' Theorem, to show applications of those, as well as the demonstration of each using the Projective Geometry, it will be defined through a bibliographic and exploratory research with a qualitative approach. Since Euclidean geometry is known by the majority of people, because they study its basic concepts since childhood, it is the most famous one, on the other hand is not the only existing geometry. In this work, two non-Euclidean geometries are discussed with the motivation that there is a difference between how we see things and how they really are, a formalization that explains these differences will be presented: Projective Geometry. In such context, it begins with a brief review of linear algebra and then talks about non-Euclidean geometries, which are the Projective Geometry and the Elliptic Geometry, stating their axioms and main results that are applied in the demonstrations of the theorems, therefore, it becomes clear that we can solve some problem situations from the described theorems.

**Keywords:** projective geometry; non-euclidean geometries; pappus' theorem; desargues' theorem.

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Trilhos do trem se encontrando no horizonte . . . . .  | 8  |
| Figura 2 – Linhas da rua se encontrando no ponto de fuga . . . . .                                      | 9  |
| Figura 3 – Obra de Leonardo da Vinci . . . . .  | 9  |
| Figura 4 – Elementos da Geometria Elíptica . . . . .  | 20 |
| Figura 5 – Comparação entre pontos colineares e não colineares . . . . .                                | 21 |
| Figura 6 – Comparação entre os espaços . . . . .  | 24 |
| Figura 7 – Dois casos possíveis de planos em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . . . . .                   | 25 |
| Figura 8 – Dois casos possíveis de retas em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . . . . .                    | 25 |
| Figura 9 – Inteserção entre $\bar{v}$ e $\mathbb{S}^2$ . . . . .  | 27 |
| Figura 10 – Pontos Ideais . . . . .   | 29 |
| Figura 11 – Comparação e relação entre elementos do dual, plano elíptico e plano<br>projetivo . . . . . | 31 |
| Figura 12 – Plano Afim . . . . .  | 32 |
| Figura 13 – Ilustração do Teorema de Pappus . . . . .   | 37 |
| Figura 14 – Ilustração do Teorema de Desargues . . . . .  | 41 |
| Figura 15 – Tetraedro . . . . .   | 41 |
| Figura 16 – Ilustração do Teorema de Desargues . . . . .  | 42 |
| Figura 17 – Problema inicial . . . . .  | 45 |
| Figura 18 – Uma solução para o problema inicial . . . . .   | 46 |
| Figura 19 – Problema 1 . . . . .  | 46 |
| Figura 20 – Solução do Problema 1 . . . . .   | 47 |
| Figura 21 – Problema 2 . . . . .  | 47 |
| Figura 22 – Solução do problema 2 . . . . .   | 48 |

## SUMÁRIO

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO</b>                               | <b>8</b>  |
| <b>2</b>   | <b>PRELIMINARES</b>                             | <b>11</b> |
| 2.0.1      | Espaço Vetorial                                 | 11        |
| 2.0.2      | Produto Interno e Produto Vetorial              | 13        |
| 2.0.3      | Transformações Lineares                         | 15        |
| 2.0.4      | Relação de equivalência                         | 15        |
| 2.0.5      | Esfera  | 16        |
| <b>3</b>   | <b>GEOMETRIA ELÍPTICA E GEOMETRIA PROJETIVA</b> | <b>17</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Geometria Elíptica</b>                       | <b>19</b> |
| 3.1.1      | Axiomas da Geometria Elíptica                   | 19        |
| 3.1.2      | Plano e reta elíptica                           | 19        |
| <b>3.2</b> | <b>Geometria Projetiva</b>                      | <b>23</b> |
| 3.2.1      | Plano e reta projetiva                          | 24        |
| 3.2.2      | Relação entre $S^2$ e $\mathbb{R}P^2$           | 27        |
| 3.2.3      | Plano Projetivo Dual                            | 30        |
| <b>3.3</b> | <b>Geometria Afim</b>                           | <b>32</b> |
| 3.3.1      | Colineações                                     | 34        |
| <b>4</b>   | <b>TEOREMAS DE PAPPUS E DESARGUES</b>           | <b>37</b> |
| <b>4.1</b> | <b>Teorema de Pappus</b>                        | <b>37</b> |
| <b>4.2</b> | <b>Teorema de Desargues</b>                     | <b>41</b> |
| <b>4.3</b> | <b>Aplicações</b>                               | <b>45</b> |
| <b>5</b>   | <b>CONCLUSÃO</b>                                | <b>50</b> |
|            | <b>REFERÊNCIAS</b>                              | <b>51</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

A palavra Geometria, surge dos termos gregos “geo” (terra) e “métron” (medir), o que sugere que a geometria é o estudo relacionado a medida, a posição e forma dos objetos no espaço, sendo então, de suma importância o estudo desta área. Além de identificar diferentes figuras e classificá-las, a Geometria é importante para realizar operações e usufruir de propriedades que nos ajudam no cotidiano, sendo as aplicações mais conhecidas a área e o perímetro de um terreno.

Neste trabalho apresentaremos a Geometria Projetiva, para que o leitor perceba que a Geometria Euclidiana, apesar da sua grande importância, não é a única existente. Enquanto a Geometria Euclidiana se preocupa com o mundo em que vivemos, o estudo sobre a Geometria Projetiva lida com o mundo que vemos.

Assim, por meio das técnicas utilizadas nesta geometria, podemos adquirir habilidade para representar profundidade sobre uma superfície plana (perspectiva), reproduzindo fielmente os objetos como são percebidos pela visão humana.

Um fato que evidencia a diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Projetiva é o que ocorre com a interseção de retas, na Geometria Euclidiana podem existir retas que não se interceptam (denominadas de retas paralelas) e na Geometria Projetiva isto jamais acontece, porque a característica marcante desta geometria é que duas retas quaisquer sempre se interceptam (propriedades visuais). Portanto, na Geometria Projetiva, não existem retas paralelas.

Por exemplo, na seguinte figura, ao que os olhos vêem, os trilhos de trem não são retas paralelas, e sim retas que se encontram no horizonte, no infinito.

**Figura 1 – Trilhos do trem se encontrando no horizonte**



**Fonte: <https://massa.ind.br/conheca-os-tipos-de-trilhos/> (Adaptado).**

Também, para explicar uma de suas principais diferenças, vamos tomar outro exemplo que nos cerca no dia a dia, perceba que ao observar uma estrada que segue em linha reta, temos a impressão de que as faixas brancas (laterais) estão cada vez mais próximas e que em algum lugar irão se interceptar (chamamos esse lugar de ponto de fuga). Entretanto, como estudado na Geometria Euclidiana e pelos conhecimentos cotidianos, sabemos que na realidade,

por serem retas paralelas, as faixas laterais da rua com certeza não terão interseção, é apenas a forma como as enxergamos que nos dá essa impressão.

Sendo assim, notamos que de fato, há diferença entre a forma com que enxergamos e o que de fato as coisas são, sendo que um dos principais intuítos desta Geometria Não Euclidiana, é estudar os objetos da forma com que enxergamos. Abaixo temos uma ilustração para facilitar o entendimento do que foi explicado.

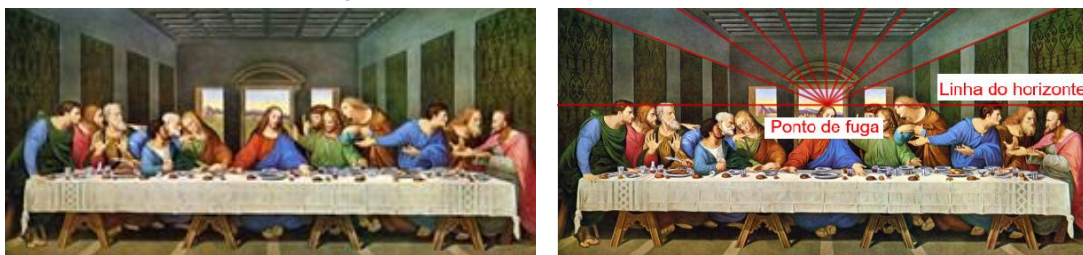
**Figura 2 – Linhas da rua se encontrando no ponto de fuga**



**Fonte:** <https://wallpatic-br.com/ceu-bonito-estrada-horizonte-asfalto/0bv3Tw> (Adaptado).

Neste intuito, historicamente tem-se que os estudos em relação à Geometria Projetiva iniciaram como forma de entender alguns conceitos utilizados na pintura, essa geometria tratou de assuntos que se iniciaram no renascentismo, visando deixar as obras mais parecidas com a forma com que enxergamos, e desenvolvendo técnicas são utilizados até hoje em obras de arte, tendo como os principais exemplos, o ponto de fuga e a linha do horizonte, como ilustrado abaixo na obra Renascentista “A última ceia”, de Leonardo da Vinci.

**Figura 3 – Obra de Leonardo da Vinci**



**Fonte:** <https://www.infoescola.com/pintura/a-ultima-ceia/> (Adaptado)).

Com isso, pretendeu-se desmistificar a crença de que a Geometria Euclidiana ainda é a única geometria existente.

É relevante ressaltar, que o desenvolvimento da Geometria Projetiva está associado ao desenvolvimento da perspectiva. Além disso, tal geometria não se preocupa com as propriedades métricas de seus objetos, ela estuda as propriedades descritivas das figuras geométricas,

sendo que uma das principais diferenças entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Projetiva está na ausência de retas paralelas.

No decorrer do trabalho, notaremos que, é possível estabelecer uma relação entre elementos da Geometria Projetiva com a Geometria Euclidiana, o que faz com que possamos usufruir de propriedades da Geometria Projetiva para resolvermos algum problema específico dado na Geometria Euclidiana.

Sendo esta Geometria desconhecida pela maioria das pessoas, busca-se com este trabalho apresentá-la por meio da introdução de conceitos fundamentais desta geometria e dar a conhecer e será apresentado uma demonstração de dois Teoremas importantes na Geometria Projetiva: o Teorema de Desargues e o Teorema de Pappus, assim como algumas aplicações destes resultados.

Esperando assim que através desta abordagem sobre algumas aplicações básicas da Geometria Projetiva, sejam proporcionadas condições necessárias para que o leitor, professores e especialistas aprofundem seus conhecimentos sobre esta geometria muito importante na nossa vida.

No segundo capítulo, faremos um resumo com os pré-requisitos de Geometria Analítica e Álgebra Linear, que são necessários para que o leitor consiga acompanhar os conceitos que serão estudados no trabalho.

Dando sequência, no terceiro capítulo, mostramos os axiomas, descrevemos alguns conceitos básicos e alguns resultados das Geometrias Elíptica e Projetiva, que são geometrias não euclidianas e tem uma relação importante entre estas duas. Serão apresentados também o plano projetivo dual e a definição e principais conceitos da Geometria Afim.

No capítulo quatro, enunciamos o Teorema de Pappus e o Teorema de Desargues, e suas demonstrações via Geometria Projetiva, utilizando os conceitos estudados nos capítulos anteriores. Mostramos também, alguns problemas que são resolvidos utilizando os teoremas estudados no trabalho e conceitos de geometria.

Por fim, no último capítulo comentamos sobre as conclusões obtidas com o trabalho, as aplicações e as principais diferenças entre a Geometria Projetiva e a Geometria Euclidiana, a qual estamos habituados.



## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo, faremos uma breve revisão de conceitos básicos que usaremos para explorar a respeito das Geometrias Projetiva e Elíptica, as definições e resultados enunciados, exceto quando outra fonte for citada, foram retirados do livro "Curso de álgebra linear" (COELHO, 2010) e as demonstrações da dissertação de mestrado "Um estudo da Geometria Projetiva Elíptica" (ANDRADE, 2015).

### 2.0.1 Espaço Vetorial

**Definição 2.1.** Dado um conjunto não vazio  $\mathbb{K}$ , uma *operação binária* em  $\mathbb{K}$  é uma aplicação  $\varphi : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  que associa a cada par de elementos de  $\mathbb{K}$  um único elemento de  $\mathbb{K}$ .

**Definição 2.2.** Sejam  $\mathbb{K}$  um conjunto não vazio e,  $+$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  duas aplicações binárias em  $\mathbb{K}$ . Dizemos que  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  é um *corpo* se as aplicações  $+$  e  $\cdot$  satisfazem:

$$A_1 : \forall x, y \in \mathbb{K}, x + y = y + x; \text{ (Comutatividade da soma)}$$

$$A_2 : \forall x, y, z \in \mathbb{K}, (x + y) + z = x + (y + z); \text{ (Associatividade da soma)}$$

$$A_3 : \exists 0 \in \mathbb{K}, \text{ tal que } \forall x \in \mathbb{K}, 0 + x = x = x + 0; \text{ (Elemento neutro da soma)}$$

$$A_4 : \text{ Para cada } x \in \mathbb{K}, \exists -x \in \mathbb{K}, \text{ tal que: } x + (-x) = 0 = (-x) + x \text{ (Elemento oposto);}$$

$$M_1 : \forall x, y \in \mathbb{K}, x \cdot y = y \cdot x; \text{ (Comutatividade da multiplicação)}$$

$$M_2 : \forall x, y, z \in \mathbb{K}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z); \text{ (Associatividade da multiplicação)}$$

$$M_3 : \exists 1 \in \mathbb{K}, \text{ tal que } \forall x \in \mathbb{K}, 1 \cdot x = x = x \cdot 1; \text{ (Elemento neutro da multiplicação)}$$

$$M_4 : \text{ Para cada } x \in \mathbb{K}, \text{ com } x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{K}, \text{ tal que: } x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x; \text{ (Elemento inverso);}$$

$$D : \forall x, y, z \in \mathbb{K}, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z. \text{ (Distributividade)}$$

**Definição 2.3.** Sejam  $V$  um conjunto não vazio,  $\mathbb{K}$  um corpo e duas operações

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V & \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (u, v) &\mapsto u + v & (\alpha, u) &\mapsto \alpha \cdot u \end{aligned}$$

Dizemos que  $(V, +, \cdot)$  é um *Espaço Vetorial* sobre  $\mathbb{K}$  se as operações  $+$  e  $\cdot$  gozam das seguintes propriedades:

$$A_1 : \forall u, v \in V, u + v = v + u \text{ (Comutatividade da soma)}$$

$A_2 : \forall u, v, w \in V, (u + v) + w = u + (v + w)$ ; (Associatividade da soma)

$A_3 : \exists 0 \in V$ , tal que  $\forall v \in V, 0 + v = v = v + 0$ ; (Vetor nulo)

$A_4 : \text{Para cada } v \in V, \exists -v \in V$ , tal que:  $v + (-v) = 0 = (-v) + v$  (Elemento oposto);

$M_1 : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u \in V, (\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$ ;

$M_2 : \forall u \in V, 1 \cdot u = u$ , onde 1 é o elemento neutro da multiplicação em  $\mathbb{K}$

$D_1 : \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u, v \in V$ ;

$D_2 : (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u \in V$

**Definição 2.4.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ .

- (a) Um vetor  $v \in V$  é uma *combinação linear* dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ , se existem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- (b) Seja  $B$  um subconjunto de  $V$ . Dizemos que  $B$  é um *conjunto gerador* de  $V$ , ou que  $B$  gera  $V$ , se todo elemento de  $V$  pode ser escrito como combinação linear de um número finito de elementos de  $B$ .

**Definição 2.5.** Um conjunto de vetores se diz *Linearmente Dependente* (LD) se houver um vetor neste conjunto que pode ser escrito como combinação linear dos demais. Caso contrário, o conjunto é chamado *Linearmente Independente* (LI).

**Definição 2.6.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Dizemos que  $B \subset V$  é uma *base* de  $V$  se:

- (a)  $B$  for um conjunto gerador de  $V$ ;
- (b)  $B$  for linearmente independente.

**Definição 2.7.** Seja  $V$  um espaço vetorial não nulo sobre  $\mathbb{K}$ . Se  $V$  admite uma base finita, então chamamos de *dimensão* de  $V$  o número de elementos de tal base. Se  $V = \{0\}$ , então convencionamos que a dimensão de  $V$  é 0.

**Proposição 2.1.** Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  um conjunto linearmente independente em  $V$ . Se  $v \in V$  não pode ser escrito como combinação linear dos elementos de  $B$ , então  $\{v_1, v_2, \dots, v_m, v\}$  é um conjunto linearmente independente.

*Demonstração.* Demonstração disponível em (ANDRADE, 2015), página 29. □

**Proposição 2.2.** Se  $V$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão  $n$ , com  $n \geq 1$  e  $B \subset V$  é uma base de  $V$ , então cada elemento se escreve de maneira única como combinação linear de elementos de  $B$ .

*Demonstração.* Demonstração disponível em (ANDRADE, 2015), páginas 30 e 31.  $\square$

**Definição 2.8.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Dizemos que um subconjunto  $W \subset V$  é um *subespaço vetorial* de  $V$  quando valem as propriedades:

1.  $0 \in W$
2.  $\forall u, v \in W, u + v \in W$
3.  $\forall u \in W$  e  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot u \in W$

## 2.0.2 Produto Interno e Produto Vetorial

**Definição 2.9.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Um produto interno sobre  $V$  é uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  satisfazendo as seguintes propriedades:

$$P_1 : \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V;$$

$$P_2 : \langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, w \in V$$

$$P_3 : \langle u, w \rangle = \overline{\langle w, u \rangle} \forall u, w \in V$$

$$P_4 : \langle u, u \rangle > 0 \text{ se } u \neq 0.$$

**Proposição 2.3.** Se  $V$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ , então:

$$A_1 : \langle 0, v \rangle = 0, \forall v \in V;$$

$$A_2 : \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0;$$

$$A_3 : \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \forall u, v, w \in V;$$

$$A_4 : \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V.$$

*Demonstração.* Demonstração disponível em (ANDRADE, 2015), página 34.  $\square$

**Definição 2.10.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Chamamos de **norma** (Euclidiana) de  $v$  ao número dado por  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

**Proposição 2.4.** Se  $V$  é um espaço vetorial com produto interno sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , então:

$$(a) \|u\| \geq 0, \forall u \in V \text{ e } \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

- (b)  $\|\alpha u\| = \|\alpha\| \|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u \in V.$
- (c)  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \forall u, v \in V$
- (d)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V$

*Demonstração.* Demonstração disponível em (ANDRADE, 2015), página 36.  $\square$

**Definição 2.11.** Sejam  $u$  e  $v$  vetores de  $\mathbb{R}^3$ . O *produto vetorial* de  $u$  e  $v$ , denotado por  $u \times v$ , e seja  $w$  um vetor em  $\mathbb{R}^3$ , então:

$$\langle w, u \times v \rangle = \det[w, u, v].$$

**Proposição 2.5.** Sejam  $u = (x_1, x_2, x_3)$  e  $v = (y_1, y_2, y_3)$ .

- (a)  $v \times u$  é perpendicular à  $u$  e  $v$ , simultaneamente.
- (b) O produto vetorial é dado por

$$u \times v = \left( \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right);$$

(iii)  $\|u \times v\|^2 = \det[u, v, u \times v]$

*Demonstração.* Demonstração disponível em (ANDRADE, 2015), páginas 38, 39, 40.  $\square$

**Proposição 2.6.** Se  $u = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $v = (y_1, y_2, y_3)$  e  $w = (z_1, z_2, z_3)$ , são vetores do  $\mathbb{R}^3$ , então:

- (a)  $\|u \times v\| = 0 \Leftrightarrow \{u, v\}$  é L.D.;
- (b)  $(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u;$
- (c)  $\langle u \times v, v \times w \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle u, v \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \end{bmatrix} = \langle u, v \rangle \cdot \langle v, w \rangle - \langle v, v \rangle \cdot \langle u, w \rangle;$
- (d)  $\langle u, v \times w \rangle = \langle w, u \times v \rangle = \langle v, w \times u \rangle;$
- (e)  $\langle \alpha u, \beta v \times \gamma w \rangle = \alpha \beta \gamma \langle u, v \times w \rangle, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$

*Demonstração.* Demonstração disponível em (ANDRADE, 2015), páginas 41 e 42.  $\square$

### 2.0.3 Transformações Lineares

**Definição 2.12.** Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Uma função  $T : U \rightarrow V$  é uma *transformação linear* se

1.  $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in U$
2.  $T(\lambda x) = \lambda T(x), \forall x \in U, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

**Definição 2.13.** Seja  $U$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Uma transformação linear cujo domínio e o contradomínio são iguais, isto é,  $T : U \rightarrow U$ , é chamado de **operador linear**.

**Proposição 2.7.** Se  $U$  e  $V$  são espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  e  $T : U \rightarrow V$  é uma transformação linear, então:

1.  $T(0_U) = 0_V$ , onde  $0_U$  e  $0_V$  são os vetores nulos de  $U$  e  $V$  respectivamente;
2.  $T(-u) = -T(u), \forall u \in U$ ;
3.  $T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \dots + \alpha_n T(u_n), \forall u_1, u_2, \dots, u_n \in U, \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

*Demonstração.* Demonstração disponível em (ANDRADE, 2015), página 44. □

### 2.0.4 Relação de equivalência

A definição a seguir foi escrita e adaptada com base no livro "Álgebra Moderna" (IEZZI; DOMINGUES, 2018).

**Definição 2.14.** Chama-se *relação binária* de  $E$  em  $F$  todo subconjunto  $R$  de  $E \times F$ . Logo  $R$  é relação (binária) de  $E$  em  $F$  se, e somente se,  $R \subset E \times F$ . Quando  $E = F$ , dizemos que  $R$  é uma relação binária sobre o conjunto  $E$

Dada uma relação binária  $R$  sobre um conjunto  $X$ , e  $a, b \in X$  dizemos que  $a$  está relacionado com  $b$  pela relação  $R$  e denotamos por  $a \sim b$ .

**Definição 2.15.** Uma relação binária  $R$  sobre um conjunto  $X$  é considerada uma relação de equivalência se e somente se for reflexiva, simétrica e transitiva. Isto é, para todos  $a, b$  e  $c$  em  $X$ :

- $\forall a \in X, a \sim a$  (reflexividade)
- $\forall a, b \in X, a \sim b \Rightarrow b \sim a$  (simetria)
- $\forall a, b, c \in X, a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$  (transitividade)

A classe de equivalência de  $a$  sob  $R$ , denotada  $\bar{a}$ , é definida como  $\bar{a} = \{b \in X \mid a \sim b\}$ .

### 2.0.5 Esfera

**Definição 2.16.** Uma *esfera* em  $\mathbb{R}^n$  de raio  $r > 0$  e centro  $c \in \mathbb{R}^n$  é o subconjunto denotado e definido por  $\mathbb{S}^{n-1}(c) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid d(c, v) = r\}$ , onde  $d(c, v) = r$  indica a distância entre os pontos  $c$  e  $v$ .

Uma esfera em  $\mathbb{R}^2$  recebe o nome de círculo. Quando o círculo tem raio  $r = 1$  e centro na origem,  $c = (0, 0)$ , diremos que ele é o círculo unitário canônico e denotamos por  $\mathbb{S}^1$ . Em resumo,

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

A esfera em  $\mathbb{R}^3$  centrada na origem  $c = (0, 0, 0)$ , e de raio  $r = 1$  é denotada por  $\mathbb{S}^2$  e é chamada de esfera unitária canônica. Assim,

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

### 3 GEOMETRIA ELÍPTICA E GEOMETRIA PROJETIVA

Inicialmente, mencionamos que a Geometria Euclidiana é um sistema matemático atribuído ao antigo matemático Grego Euclides, que o descreveu em seu livro: OS ELEMENTOS. A abordagem de Euclides é assumir um pequeno conjunto de axiomas (postulados) intuitivamente atraentes e deduzir muitas outras proposições a partir deles. Embora muitos dos resultados de Euclides tenham sido apresentados anteriormente, Euclides foi o primeiro a organizar essas proposições em um sistema lógico no qual cada resultado é provado a partir de axiomas e teoremas previamente comprovados. Por mais de dois mil anos, o adjetivo "euclidiano" não era necessário pois nenhum outro tipo de geometria havia sido concebido.

Por outro lado, uma importante contribuição do matemático Alemão David Hilbert para a Geometria Euclidiana plana e espacial foi a apresentação de um sistema de axiomas em que permaneciam válidos todos os resultados de "Os Elementos" assumindo seus postulados.

Para apresentarmos estes conceitos, usamos duas referências, o livro "Introdução a geometria projetiva" (BARROS; ANDRADE, 2010), e a dissertação de mestrado "Um estudo da Geometria Projetiva Elíptica" (ANDRADE, 2015).

Os axiomas da geometria plana adotados por Hilbert foram:

1. *Termos Indefinidos:*

- a) Ponto, reta, plano, pertence, estar entre, congruência.

2. *Axiomas de Incidência:*

- a) Para quaisquer dois pontos existe uma única reta que contém estes pontos.  
 b) Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.  
 c) Toda reta contém pelo menos dois pontos.

3. *Axiomas de Ordem:* São estabelecidos quatro axiomas que dizem respeito à ordenação dos pontos de uma reta. São eles:

- a) Se um ponto  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então os três pontos pertencem a uma mesma reta e  $B$  está entre  $C$  e  $A$ .  
 b) Para quaisquer dois pontos distintos  $A$  e  $C$ , existe pelo menos um ponto  $B$  pertencente à reta  $\overline{AC}$  tal que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ .  
 c) Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.  
 d) Sejam  $A, B$  e  $C$  três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja  $l$  uma reta do plano que não contém nenhum dos três pontos. Então, se  $l$  intersecta o segmento  $\overline{AB}$ , ela também intersecta o segmento  $\overline{AC}$  ou o segmento  $\overline{BC}$ .

4. *Axiomas de Congruência:* São estabelecidos cinco axiomas que dizem respeito à congruência de ângulos, segmentos e triângulos. São eles:

- a) Se  $A$  e  $B$  são dois pontos numa reta  $l$  e  $A'$  é um outro ponto de uma reta  $l'$ , não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto  $B'$  em (um dado lado da reta)  $l'$  tais que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  são congruentes.
- b) Se um segmento  $\overline{A'B'}$  e um segmento  $\overline{A''B''}$  são congruentes a um mesmo segmento  $\overline{AB}$  então os segmentos  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  são congruentes entre si.
- c) Sobre uma reta  $l$ , sejam  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  dois segmentos da mesma que, exceto por  $B$  não têm pontos em comum. Além disto, sobre uma outra ou a mesma reta  $l'$ , sejam  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$  dois segmentos que, exceto por  $B'$  não tem pontos em comum. Neste caso, se  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  e  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ , então  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ .
- d) Se  $\angle ABC$  é um ângulo e se  $\overrightarrow{B'C'}$  é uma semirreta, então existe exatamente uma semirreta  $\overrightarrow{B'A'}$  em cada lado de  $\overrightarrow{B'C'}$ , com  $A', B$  e  $C'$  outros pontos no plano, tal que  $\angle A'B'C' = \angle ABC$ . Além disto, cada ângulo é congruente a si mesmo.
- e) Se para dois triângulos  $\triangle ABC$   $\triangle A'B'C'$  as congruências

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AC} = \overline{A'C'} \text{ e } \angle BAC = \angle B'A'C'.$$

são válidas, então a congruência  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$  é satisfeita.

5. *Axioma das Paralelas:*

- a) Seja  $l$  uma reta e  $A$  um ponto não pertencente a  $l$ . Então, existe uma única reta no plano que passa por  $A$  e não intersecta  $l$ .

6. *Axiomas de Continuidade:*

- a) *Axioma de Arquimedes:* Se  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são segmentos, então existe um número natural  $n$  tal que  $n$  cópias de  $\overline{CD}$  construídas continuamente de  $A$  ao longo da semirreta  $\overrightarrow{AB}$  passará além do ponto  $B$ .
- b) *Axioma da Completude da Reta:* Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma reta com suas relações de congruência e ordem que poderiam preservar as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de congruência e ordem que seguem dos axiomas acima (menos o das paralelas), é impossível.

Sabendo destes Axiomas, apresentaremos uma Geometria onde nem todos os Axiomas citados são válidos ou existem. Está nova geometria será chamada de Geometria Elíptica.



### 3.1 Geometria Elíptica

Nesta Geometria são satisfeitos os axiomas de incidência, congruência, além do axioma de continuidade a menos de adaptações. Nega-se a existência do paralelismo e não é exigida a unicidade de interseção de retas.

Na presente seção veremos que a esfera unitária canônica  $\mathbb{S}^2$  será um modelo de “plano” da Geometria Elíptica. Aqui, por exemplo, definiremos as retas elípticas os quais são os grandes círculos da esfera  $\mathbb{S}^2$ .

Os Axiomas da Geometria Elíptica serão enunciados a seguir.

#### 3.1.1 Axiomas da Geometria Elíptica

##### 1. *Termos Indefinidos:*

- a) Ponto, Reta, Plano, Pertence e Congruência.

##### 2. *Axiomas de Incidência:*

- a) Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.
- b) Toda reta contém pelo menos dois pontos.
- c) Para cada dois pontos distintos existe uma reta que os contém.

##### 3. *Axiomas de Ordem:* (Não existem)

##### 4. *Axiomas de Congruência:*

##### 5. *Axioma das Paralelas:*

- a) Seja  $l$  uma reta e  $A$  um ponto não em  $l$ . Então toda reta que passa por  $A$  intersecta  $l$ .

##### 6. *Axiomas de Continuidade:*

- a) Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta menos um de seus pontos.

#### 3.1.2 Plano e reta elíptica

O *Axioma 1. a)* garante a existência dos termos que vão ser definidos agora, perceba que esses termos serão definidos de uma forma diferente da Geometria Euclidiana, uma reta elíptica, por exemplo, é diferente de uma reta a qual estamos habituados em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 3.1.** Chamaremos  $\mathbb{S}^2$  de *plano elíptico*, e seus elementos de *pontos elípticos*.

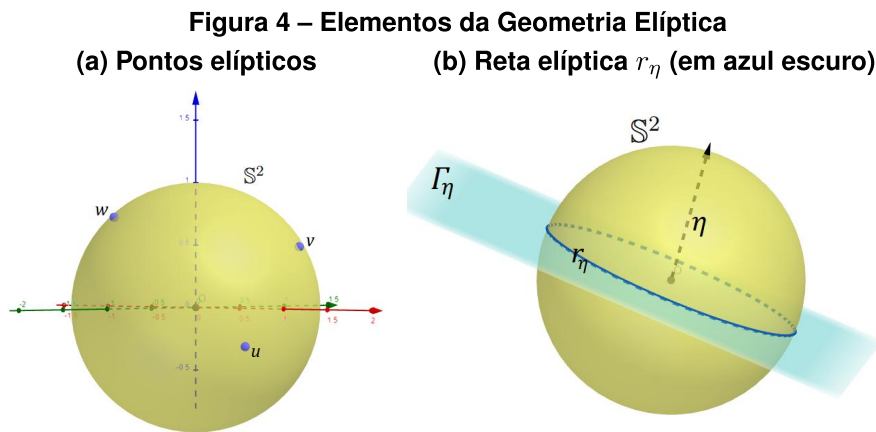
**Definição 3.2.** Seja  $\Gamma_\eta$ , o plano (em  $\mathbb{R}^3$ ) que passa pela origem, onde  $\eta$  é o vetor normal a este plano. Dizemos que  $r \subset \mathbb{S}^2$  é um *grande círculo* quando  $r = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$ .

Assim, dizemos que  $r_\eta$  é uma *reta elíptica*, se esta for um grande círculo em  $\mathbb{S}^2$ . Isto é,

$$r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$$

É importante ressaltar que  $\Gamma_\eta$  é um plano que passa pela origem, por este motivo, a interseção acima é não nula, e além disso é uma circunferência de raio 1.

As ilustrações abaixo representam os pontos elípticos e a reta elíptica definida pela interseção acima:



**Fonte: Autoria Própria.**

**Proposição 3.1.** Uma reta elíptica  $r_\eta$  incide no ponto  $v \in \mathbb{S}^2$  se, e somente se,  $\langle v, \eta \rangle = 0$ .

*Demonstração.* Considere  $r_\eta$  uma reta elíptica. Então, por definição os pontos  $v \in r_\eta$ , são os pontos da interseção entre o plano  $\Gamma_\eta$  com  $\mathbb{S}^2$ , isto é,  $v \in r_\eta \Leftrightarrow v \in \Gamma_\eta$  e  $v \in \mathbb{S}^2$ . Como o vetor normal do plano é  $\eta$ , sabemos da geometria analítica que  $v \in \Gamma_\eta \Leftrightarrow \langle v, \eta \rangle = 0$ .

Recíprocamente, sabemos da geometria analítica que se  $\langle v, \eta \rangle = 0$ , então existe um plano  $\Gamma$  de vetor normal  $\eta$  que passa pela origem. Seja  $\Gamma_\eta$  este plano. Assim, se  $v \in \Gamma_\eta$  e se exigirmos que  $v \in \mathbb{S}^2$ , então,  $v \in \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ , e por definição de reta elíptica  $v \in r_\eta$ , isto é, esta reta incide no ponto  $v$ .  $\square$

Com relação ao *Axioma 2. b)*, este pode ser facilmente mostrado utilizando a proposição acima e uma propriedade do produto interno listada no segundo capítulo da seguinte forma: seja  $u \in r_\eta$ , então pela propriedade de multiplicação por escalar do produto interno, temos,

$$\langle u, \eta \rangle = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot \langle u, \eta \rangle = -1 \cdot 0 \Leftrightarrow \langle -u, \eta \rangle = 0 \Leftrightarrow -u \in r_\eta,$$

logo, toda reta tem pelo menos dois pontos.

**Proposição 3.2.** Duas retas elípticas distintas,  $r_\eta$  e  $r_\nu$ , sempre se intersectam. Além disso, a interseção ocorre em:

$$u_1 = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu \quad \text{e} \quad u_2 = -\frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu.$$

*Demonstração.* Por definição de reta elíptica, temos que  $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$  e  $r_\nu = \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2$ , onde  $\Gamma_\eta$  e  $\Gamma_\nu$  são os planos (que passam pela origem) de vetores normais  $\eta$  e  $\nu$ , respectivamente.

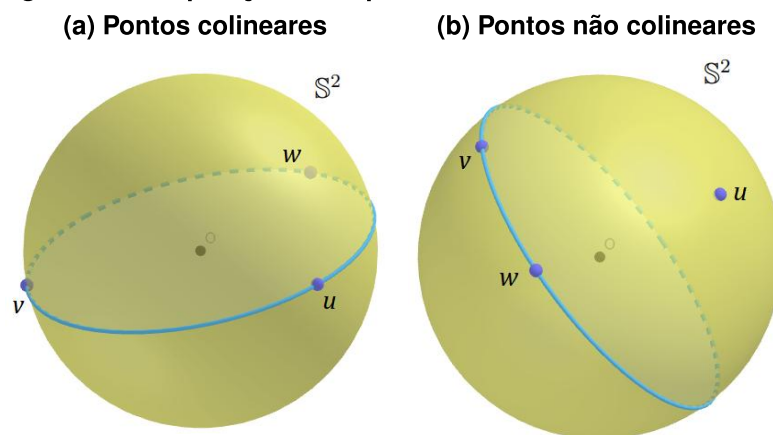
Devemos lembrar que como ambos os planos passam pela origem, estes se intersectam, e além disso, esta interseção é uma reta (que passa pela origem), e portanto, a interseção de uma reta que passa pela origem com  $\mathbb{S}^2$  ocorre em dois pontos. Para garantirmos quais pontos são estes, considere os pontos  $\{u_1, u_2\} = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu$ . Note que, os pontos de  $\Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu$  são os pontos  $u$  tais quais  $\langle u, \eta \rangle = 0$  e  $\langle u, \nu \rangle = 0$ , isto é,  $u = \lambda(\eta \times \nu)$ . Como  $\mathbb{S}^2$  é a esfera unitária, os pontos em  $\mathbb{S}^2$  tem norma 1, portanto, para tornar estes pontos unitários, basta dividirmos  $\lambda(\eta \times \nu)$  pela sua norma, isto é,

$u_1 = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu$ . Analogamente,  $u_2 = -\frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu$  também tem norma 1 e pertence a interseção dos planos. Estes são os dois pontos de interseção.  $\square$

O *Axioma 5. a)* é consequência da Proposição 3.2, pois se  $A$  não está em  $l$ , então qualquer reta elíptica que passa por  $A$  é distinta de  $l$ , e por tal proposição, estas sempre se intersectam.

**Definição 3.3.** Dizemos que três pontos elípticos são *colineares*, se existe uma reta elíptica que incide nos três pontos.

**Figura 5 – Comparação entre pontos colineares e não colineares**



Fonte: Autoria Própria.

O *Axioma 2. a)* é uma consequência da proposição abaixo.

**Proposição 3.3.** Os pontos elípticos  $u, v, w \in \mathbb{S}^2$  são colineares, se e somente se,

$$\det[u, v, w] = 0.$$

*Demonstração.* Sejam  $u, v, w \in \mathbb{S}^2$ , vamos dividir a prova em 3 casos:

1. Os pontos são não distintos: Suponha sem perda de generalidade que  $u = v$ , daí pelo axioma *c*) de incidência, existe uma reta elíptica que contém  $u$  e  $w$ , e como  $u = v$ , tal reta contém os três pontos e portanto estes são colineares. Se  $u = v = w$ , então toda reta passa por  $u$  contém os outros. Neste caso, os pontos são sempre colineares e, o determinante da matriz  $[u, v, w]$  será 0, pois terá duas colunas iguais.
2. Dois pontos são antípodas: Suponha sem perda de generalidade que  $u = -v$ . Neste caso, toda a reta elíptica que incide em  $u$ , incide em  $-v$ , pois  $u = \lambda v$ , e portanto qualquer vetor ortogonal a  $u$ , também é ortogonal a  $-v$ . Sendo assim, se tomarmos uma reta elíptica qualquer que passe por  $u$  e  $w$ , então pelo exposto acima, segue que tal reta também passará por  $-v$ , e por fim, os três pontos são sempre colineares. Portanto, o determinante da matriz  $[u, v, w]$  será 0, pois tem-se linhas que são múltiplas ( $u = \lambda v$ ).
3. Os três pontos são distintos: Vejamos que tais pontos são colineares, se existe uma reta elíptica  $r_\eta$  que os contém. Isto é, existe  $\eta \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\langle u, \eta \rangle = 0$ ,  $\langle v, \eta \rangle = 0$  e  $\langle w, \eta \rangle = 0$ . Suponha sem perda de generalidade que  $\langle u, v \rangle = 0$ , se tomarmos  $\eta$  tal qual,  $\langle u, \eta \rangle = 0$ ,  $\langle v, \eta \rangle = 0$ . Suponhamos por absurdo que exista  $w \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\langle w, \eta \rangle = \langle w, u \rangle = \langle w, v \rangle = 0$ , perceba então que o conjunto  $A = \{u, v, w, \eta\}$  é um conjunto de vetores linearmente independente, absurdo, pois  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ . Portanto, os pontos  $u, v$  e  $w$  são colineares, se e somente se, forem linearmente dependentes, e isto significa que  $\det[u, v, w] = 0$

□

Assim, para o Axioma 2.a), se tomarmos pontos  $u, v, w \in \mathbb{S}^2$  tais que  $\det[u, v, w] \neq 0$ , então pela Proposição 3.3 temos que  $u, v$  e  $w$  são três pontos que não estão sobre uma reta elíptica, mas todos estão em  $\mathbb{S}^2$ . Note que, neste caso, as retas são os grandes círculos e o plano é  $\mathbb{S}^2$ . Portanto, tais pontos são não colineares e estão no mesmo plano.

Observamos que, como pela Proposição 3.2, todas as retas elípticas se intersectam em dois pontos, todas as retas são concorrentes duas a duas. Na sequência veremos uma condição para que três retas elípticas sejam concorrentes, isto é, as três incidam nos mesmos dois pontos elípticos.

**Proposição 3.4.** As retas elípticas  $r_\eta, r_\mu$  e  $r_\nu$  são concorrentes, se e somente se,

$$\det[\eta, \mu, \nu] = 0.$$

*Demonstração.* Como as retas  $r_\eta, r_\mu$  e  $r_\nu$  são concorrentes, temos que  $r_\eta \cap r_\mu \cap r_\nu \neq \emptyset$ , e por definição,  $\Gamma_\eta \cap \Gamma_\mu \cap \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2 \neq \emptyset$ . Vejamos que  $\Gamma_\eta \cap \Gamma_\mu \cap \Gamma_\nu \neq \emptyset$ , se existir  $v_i \in \mathbb{R}^3$  tais que  $\langle v_i, \eta \rangle = 0$ ,  $\langle v_i, \mu \rangle = 0$  e  $\langle v_i, \nu \rangle = 0$ , isto é,  $v_i$  é ortogonal aos três vetores normais. Porém, como  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$  isto só é possível se os vetores  $\eta, \mu, \nu$  forem linearmente dependentes, caso contrário, eles gerariam uma base para este espaço, e não existiria  $v_i$  tal que isso ocorre. Mas sabemos da geometria analítica que  $\eta, \mu, \nu$  são linearmente dependentes se, e somente se,  $\det[\eta, \mu, \nu] = 0$ . A recíproca é análogo.  $\square$

Por fim, para os axiomas que faltaram temos:

Para o *Axioma 2. c)*: tomando os pontos  $u, v \in \mathbb{S}^2$ , sabemos que para que exista tal reta, deve ser a interseção entre um plano que passa pela origem com  $\mathbb{S}^2$ , vamos dividir em casos.

- Suponha que  $u, v$  não são antípodas, assim, basta tomarmos o plano  $\Gamma_\eta$  definido por  $u, v, 0$ , assim, sabemos da geometria analítica que três pontos não colineares definem um plano, a interseção entre este plano e  $\mathbb{S}^2$  é uma reta elíptica que contém  $u, v$ , pois  $u, v \in \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$ .
- No caso de  $u, v$  serem antípodas, basta tomarmos qualquer outro ponto de  $w \in \mathbb{S}^2$ , e fazer o plano  $\Gamma_\eta$  de forma análoga ao caso anterior, assim, a reta elíptica formada pela interseção do plano com  $\mathbb{S}^2$ , mas como  $u, w$  são antípodas, se tal reta elíptica passa um desses pontos, passa pela sua antípoda, logo esta reta contém  $u$  e  $v$ .

Para o *Axioma 6. a)*: temos a função  $\Phi : \mathbb{S}^1 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $N = (0, 1)$  é o polo da circunferência. Que leva o ponto  $s \in \mathbb{S}^1$  em um ponto  $\Phi(s) \in \mathbb{R}$ , onde  $\Phi(s)$  é o ponto de interseção da reta real com a reta definida pelos pontos  $N$  e  $s$ . Como esta reta é única (axiomas da geometria euclidiana), a função  $\Phi$  é bijetora.

### 3.2 Geometria Projetiva

Nesta seção, construiremos uma geometria bidimensional onde não existem retas paralelas, na qual quaisquer duas retas se intersectam em um único ponto, tal geometria será chamada de Geometria projetiva.

Nesta Geometria são considerados os grupos axiomáticos de incidência e continuidade.

Os Axiomas da Geometria Projetiva são dados por:

#### 1. Termos Indefinidos:

- a) Ponto, Reta, Plano e Pertence.

2. *Axiomas de Incidência:*

- a) Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.
- b) Toda reta contém pelo menos dois pontos.
- c) Para cada dois pontos distintos existe uma reta que os contém.

3. *Axiomas de Ordem:* (Não existem)

4. *Axiomas de Congruência:* (Não existem)

5. *Axiomas de Continuidade:*

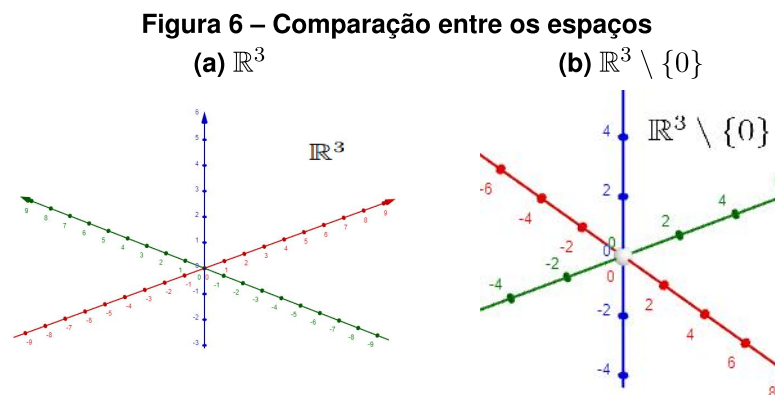
- a) Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta menos um de seus pontos.

3.2.1 Plano e reta projetiva

Levando em conta os aspectos mostrados na prática no capítulo anterior, seguiremos com a parte teórica deste estudo. Inicialmente, veremos algumas definições que servem como base para a estruturação desta Geometria e em seguida, apresentaremos a construção de um modelo axiomático que a fundamenta.

Primeiramente, consideremos o conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Neste caso,  $\{0\}$  significa o vetor nulo  $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ , ou seja, este conjunto é o  $\mathbb{R}^3$  sem a origem, e por esse motivo, iremos chamá-lo de  $\mathbb{R}^3$  *perfurado na origem*.

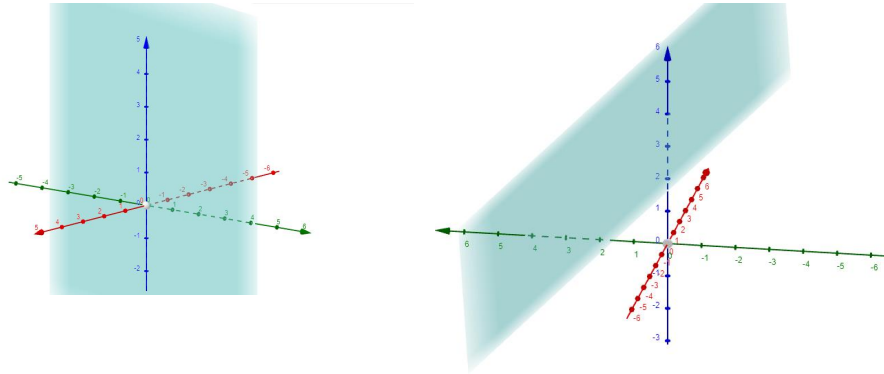
Ilustramos tal fato na sequência:



Fonte: Autoria própria 2022.

Iremos também utilizar termos análogos à esse para subconjuntos construídos a partir dele. Por exemplo, seja um plano  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  que passa pela origem, então em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  ele será um *plano perfurado*, caso não passe, será um plano da forma como estamos habituados no  $\mathbb{R}^3$ .

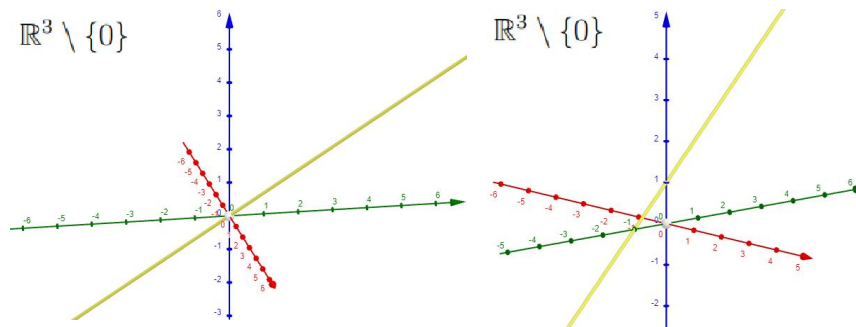
**Figura 7 – Dois casos possíveis de planos em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$**   
**(a) Plano Perfurado** **(b) Plano não perfurado**



Fonte: Autoria própria 2022.

O mesmo vale para uma reta, se em  $\mathbb{R}^3$  ela passar pela origem, significa que em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  ela será uma *reta perfurada*, caso contrário não. Perceba nas figuras abaixo, temos duas retas, a *reta perfurada*  $r$  e a *reta*  $s$ .

**Figura 8 – Dois casos possíveis de retas em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$**   
**(a) Reta perfurada** **(b) Reta não perfurada**



Fonte: Autoria própria 2022.

**Definição 3.4.** O Plano Projetivo  $\mathbb{RP}^2$ , é definido como o conjunto quociente obtido de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , com a seguinte relação de equivalência: dados  $u, v \in \mathbb{RP}^2$ , então:

$$v \sim w \Leftrightarrow \text{existe um número real } \lambda \neq 0 \text{ tal que } v = \lambda w. \quad (1)$$

Um elemento em  $\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim$  será uma classe denotada por  $\bar{v} = \overline{(v_1, v_2, v_3)}$ , onde  $v$  é um vetor não nulo de  $\mathbb{R}^3$ . Assim,  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  será chamado de ponto projetivo. De acordo com a definição, temos que:

$$\bar{v} = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\},$$

ou seja, como  $v$  é um vetor não nulo,  $\bar{v} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  será uma reta perfurada.

Consideremos a aplicação projeção

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{RP}^2 \\ v &\longmapsto \Psi(v) = \bar{v} \end{aligned}$$

temos que,  $\Psi$  leva a reta perfurada de vetor diretor  $v$ , que está em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  na classe de equivalência  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$ .

Por exemplo, seja  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , temos que:  $\Psi(v) = \bar{v} = \overline{(v_1, v_2, v_3)}$ . Esta é uma possível notação, no entanto, utilizaremos a notação em coordenadas homogêneas de  $v$ , dada por:

$$\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$$

**Observação 3.1.** Se  $v$  é um vetor de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  e  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  então  $\bar{v} = \overline{\lambda v}$ . De fato,

$$\overline{\lambda v} = \{\tilde{\lambda}(\lambda v), \tilde{\lambda} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{(\tilde{\lambda})\lambda v, \tilde{\lambda}\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{\lambda'v, \lambda' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \bar{v}.$$

**Definição 3.5.** Um subconjunto  $r \subset \mathbb{RP}^2$  é uma *reta projetiva* se  $r$  for a imagem de um plano  $\Gamma$  pela projeção  $\Psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ .

Sabemos que um plano  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  que contenha a origem  $(0, 0, 0)$  é determinado pelo seu vetor normal  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , onde  $\eta$  é um vetor não nulo. Tal plano será denotado por  $\Gamma_\eta$  e é definido pela equação linear:

$$\Gamma_\eta : \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0.$$

Para  $\lambda \neq 0$ , vimos que  $\Gamma_{\lambda\eta} = \Gamma_\eta$ , ou seja, todo elemento da classe

$$\bar{\eta} = \{\lambda\eta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

determina um único plano  $\Gamma_\eta$ .

O *Axioma 1. a)* garante a existência dos termos que foram definidos acima, novamente enfatizamos que esses termos serão definidos de uma forma diferente da Geometria Euclidiana e da Geometria Elíptica.



### 3.2.2 Relação entre $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$

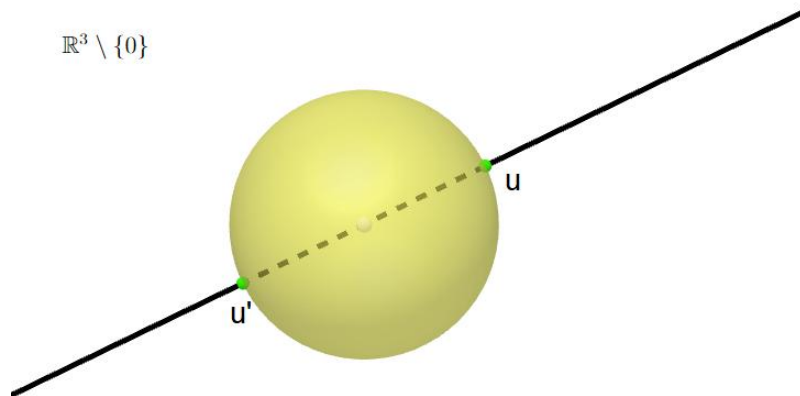
Considere um ponto  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$ . Considerando  $\bar{v} \cap \mathbb{S}^2$ , temos que esta interseção possui dois pontos (que são antípodas em  $\mathbb{S}^2$ ), sendo estes:

$$u = \frac{1}{\|v\|}v \quad \text{e} \quad -u = -\frac{1}{\|v\|}v.$$

Veja que, estes são os únicos pontos que são da forma  $\lambda v$ , que intersectam  $\mathbb{S}^2$ , pois são unitários.

Pela definição de ponto projetivo, segue que  $\bar{v} = \bar{u} = \overline{-u}$ , isto é, para cada reta projetiva, temos dois pontos representantes,  $u$  e  $-u$  na esfera unitária  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . A ilustração abaixo representa a interseção mencionada e as antípodas neste caso,  $u$  e  $u'$ .

**Figura 9 – Inteserção entre  $\bar{v}$  e  $\mathbb{S}^2$**



**Fonte: Autoria própria 2022.**

Podemos então analisar a restrição da aplicação  $\Psi$  definida anteriormente, tomando como domínio o conjunto  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , isto é:

$$\begin{aligned} \Psi_0 : \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{RP}^2 \\ v &\longmapsto \Psi(v) = \bar{v} \end{aligned}$$

com

$$\Psi_0^{-1}(\bar{v}) = \left\{ \frac{v}{\|v\|}, -\frac{v}{\|v\|} \right\}.$$

Perceba que a função  $\Psi_0$  é sobrejetiva, pois dada a classe  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  existem os pontos  $u = \frac{1}{\|v\|}v$  e  $-u = -\frac{1}{\|v\|}v$  ambos em  $\mathbb{S}^2$ , onde

$$\Psi_0(u) = \bar{v} = \Psi_0(-u).$$

Com o objetivo de obter um novo modelo para o plano projetivo, consideremos a seguinte relação de equivalência em  $\mathbb{S}^2$ . Para isto, considere  $u, v \in \mathbb{S}^2$  e a relação de equivalência:

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \text{ OU } u = -v,$$

assim,  $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / \sim$  e denotamos  $\tilde{v} = \{u \in \mathbb{S}^2; u \sim v\}$

Desta forma obtemos a aplicação  $\overline{\Psi}_0 : \mathbb{S}^2 / \sim \rightarrow \mathbb{RP}^2$ , onde  $\overline{\Psi}_0(\tilde{v}) = \bar{v}$ . Assim, ao tomarmos  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  este poderá ser representado por um ponto  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}^2$  com  $u_3 \geq 0$

Agora considere apenas o hemisfério norte da esfera unitária  $\mathbb{H}_{e_3} = \{x \in \mathbb{S}^2; \langle x, e_3 \rangle \geq 0\}$ . Claramente,  $\mathbb{H}_{e_3} \subset \mathbb{S}^2$ , e então considerando a restrição da aplicação projeção  $\Psi_0$  por este conjunto, temos que a imagem inversa de  $\Psi_0$  restrita a  $\mathbb{H}_{e_3}$  de um ponto projetivo  $\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3) \in \mathbb{RP}^2$  é:

$$\Psi_0^{-1}|_{\mathbb{H}_{e_3}}(\bar{v}) = \begin{cases} \frac{v}{\|v\|}, & v_3 > 0 \\ \left\{ \frac{v}{\|v\|}, -\frac{v}{\|v\|} \right\}, & v_3 = 0 \end{cases}.$$

Sendo assim, pela relação entre  $\mathbb{RP}^2$  e  $\mathbb{S}^2$ , o *Axioma 5. a)* é provado pelo próprio Axioma 5. a) da seção anterior.

Usando a aplicação projeção  $\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ , vamos transportar os conceitos definidos em  $\mathbb{S}^2$  para o plano projetivo  $\mathbb{RP}^2$ .

**Definição 3.6.** Um subconjunto  $r \subset \mathbb{RP}^2$  é uma reta projetiva se  $r$  for a imagem de uma reta elíptica pela projeção  $\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ .

Sabemos que uma reta elptica  $r_\eta$  é obtida pela interseção  $\Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ . Além disso, por definição uma reta projetiva  $r$  é obtida pela imagem de uma reta elíptica. Estes fatos motivam a seguinte notação:

Denotaremos  $r_\eta$ , à reta projetiva  $r$  obtida da imagem pela projeção da reta elíptica  $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ .

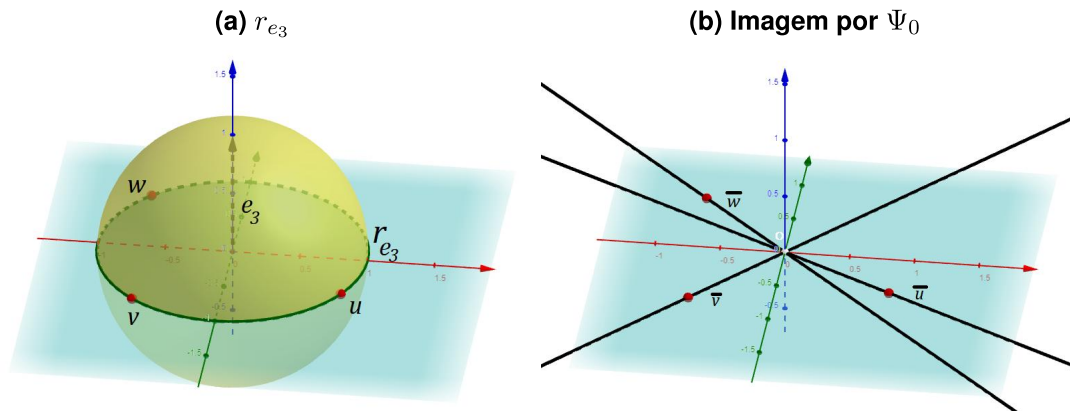
**Exemplo 3.1.** Dado o vetor normal  $e_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ , então  $r_{e_3}$  é a reta elíptica obtida pela interseção do plano  $XY$  com a esfera unitária. A imagem pela projeção de  $r_{e_3}$  é a reta projetiva  $r_{\bar{e}_3}$ , e chamamos os pontos desta reta de pontos ideais e denotamos por:  $I_\infty$

**Proposição 3.5.** Seja um ponto projetivo  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  e uma reta projetiva  $r_{\bar{\eta}} \subset \mathbb{RP}^{2*}$ . Então,  $\bar{v}$  e  $r_{\bar{\eta}}$  são incidentes se, e somente se,  $\langle v, \eta \rangle = 0$ .

*Demonstração.* Sejam um ponto projetivo  $\bar{u} \in \mathbb{RP}^2$  e uma reta elíptica  $r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$ , temos:

$$\langle u, \eta \rangle = 0 \Leftrightarrow \pm u \in \Gamma_\eta \Leftrightarrow \pm \frac{u}{\|u\|} \in r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta.$$

Figura 10 – Pontos Ideais



Fonte: Autoria própria 2022.

Pela definição da função  $\Psi_0$ , sabemos que:

$$\Psi_0^{-1}(\bar{u}) = \left\{ \frac{u}{\|u\|}, \frac{-u}{\|u\|} \right\}.$$

Além disso, como  $r_\eta$  é uma reta elíptica, a sua imagem,  $\Psi_0(r_\eta) = r_{\bar{\eta}}$ , é uma reta projetiva. Sendo assim, do que foi exposto, concluímos que:

$$\langle u, \eta \rangle = 0 \Leftrightarrow \pm \frac{u}{\|u\|} \in r_\eta \Leftrightarrow \Psi_0\left(\pm \frac{u}{\|u\|}\right) = \bar{u} \in \Psi_0(r_\eta) = r_{\bar{\eta}}$$

□

**Proposição 3.6.** Duas retas projetivas distintas,  $r_{\bar{\eta}}$  e  $r_{\bar{\mu}}$  concorrem em um único ponto  $\bar{v}$ , tal que

$$\bar{v} = \overline{\eta \times \mu} \in \mathbb{RP}^2. \quad (2)$$

*Demonstração.* Como  $r_{\bar{\eta}}$  e  $r_{\bar{v}}$  são retas projetivas, por definição, temos que  $\Psi_0^{-1}(r_{\bar{\eta}}) = r_\eta$  e,  $\Psi_0^{-1}(r_{\bar{v}}) = r_v$ . Deste modo,  $\Psi_0^{-1}(r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{v}}) = r_\eta \cap r_v$ . E, tal interseção no plano elíptico, pela Proposição 3.2 ocorre em:

$$u_1 = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu \quad \text{e} \quad u_2 = -\frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu.$$

Portanto, a interseção das retas projetivas se dá em

$$\Psi_0(u_1) = \Psi_0(u_2) = \overline{\eta \times \nu}.$$

□

**Proposição 3.7.** Três pontos projetivos  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  são colineares se, e somente se,  $\det[u, v, w] = 0$ .

*Demonstração.* Por definição, os pontos projetivos  $\bar{u}, \bar{v}$  e  $\bar{w}$  são colineares se existe uma reta projetiva que incide nos três pontos, seja então  $r_{\bar{\eta}}$  tal reta. Para que isso aconteça, pela definição, é necessário e suficiente que,  $\Psi_0^{-1}(\bar{u}) = \{u, -u\}$ ,  $\Psi_0^{-1}(\bar{v}) = \{v, -v\}$  e,  $\Psi_0^{-1}(\bar{w}) = \{w, -w\}$  pertençam todos a mesma reta elíptica. E pela Proposição 3.4, isto acontece, se e somente se,  $\det[u, v, w] = 0$ .

□

O *Axioma 2 (a)* é uma consequência direta da proposição acima, basta tomar três pontos projetivos tais quais o determinante da matriz mencionada não é nula. Todos estes pontos são pontos projetivos, logo, estão no plano projetivo, porém são não colineares.

### 3.2.3 Plano Projetivo Dual

**Definição 3.7.** Chamaremos de *plano projetivo dual*, o conjunto constituído por todas as retas projetivas e o denotaremos por  $\mathbb{RP}^{2*}$ .

Escolhendo um vetor  $\eta \in \mathbb{R}^3$  para indexar uma reta projetiva  $r_{\bar{\eta}}$ , todas as outras indexações possíveis são com vetores linearmente dependentes (não nulos) a  $\eta$ , isto é, múltiplos de  $\eta$ . Dessa forma, perceba que tomando a classe  $\bar{\eta} \in \mathbb{RP}^2$ , nela temos exatamente os vetores múltiplos (e não nulos) de  $\eta$ .

Assim, podemos descrever o plano plano projetivo dual como sendo:

$$\mathbb{RP}^{2*} = \{r_{\bar{\eta}}; \bar{\eta} \in \mathbb{RP}^2\}.$$

Mais do que isso, podemos associar de forma biunívoca, uma reta projetiva à um ponto projetivo, do seguinte modo:

$$f : \mathbb{RP}^{2*} \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad f(r_{\bar{\eta}}) = \bar{\eta}.$$

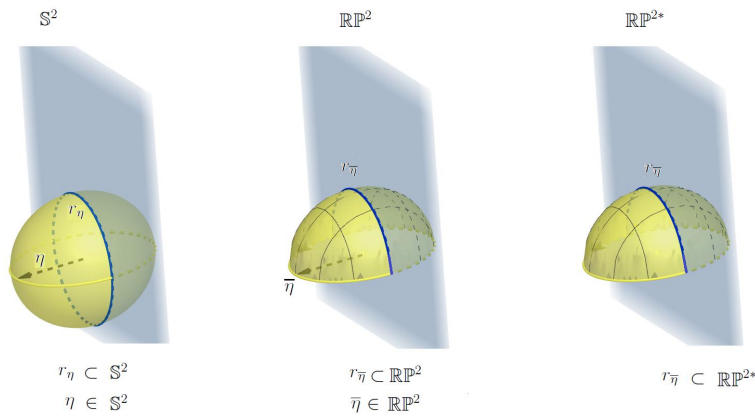
**Observação 3.2.** Perceba que, a reta projetiva  $r_{\bar{\eta}}$  é uma reta de  $\mathbb{RP}^{2*}$ , ao mesmo tempo que  $\bar{\eta}$  é um elemento de  $\mathbb{RP}^2$ , isto é, existem tantas retas projetivas quantos pontos projetivos.

Sendo assim, temos que:

$$r_{\bar{\eta}} \in \mathbb{RP}^{2*} \Leftrightarrow \bar{\eta} \in \mathbb{RP}^2.$$

Observe a imagem a seguir:

**Figura 11 – Comparação e relação entre elementos do dual, plano elíptico e plano projetivo**



**Fonte: Aatoria própria 2022.**

A partir disso, temos vários resultados interessantes que podemos estudar, pois agora, temos uma vantagem de poder trabalhar apenas com a classe do vetor normal à um plano que define uma reta projetiva, para fazermos alguma operação e depois facilmente retornar ao espaço projetivo.

**Proposição 3.8.** Por dois pontos projetivos  $\bar{v}$  e  $\bar{u}$  incide uma reta projetiva  $r_{\bar{\eta}}$ , onde:

$$\bar{\eta} = \overline{v \times u} \in \mathbb{RP}^{2*}.$$

*Demonstração.* Sejam  $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{RP}^2$ . Note que,  $\Psi_0^{-1}(\bar{u}) = \{u, -u\}$  e  $\Psi_0^{-1}(\bar{v}) = \{v, -v\}$ . Tomando  $\eta = u \times v$ , conseguimos, um vetor tal qual,  $\langle u, \eta \rangle = 0$  e  $\langle v, \eta \rangle = 0$ . Além disso,  $\langle -u, \eta \rangle = 0$  e  $\langle -v, \eta \rangle = 0$ , logo,  $\bar{u} \in r_\eta$  e  $\bar{v} \in r_\eta$ .  $\square$

**Proposição 3.9.** Sejam  $r_{\bar{\eta}}, r_{\bar{\mu}}, r_{\bar{\nu}} \in \mathbb{RP}^{2*}$  três retas projetivas, estas são concorrentes, se, e somente se,  $\det[\eta, \mu, \nu] = 0$ .

*Demonstração.* Suponha que  $r_{\bar{\eta}}, r_{\bar{\mu}}$  e  $r_{\bar{\nu}}$  são concorrentes. Assim, existe  $\bar{v}$  tal que

$$v \in r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}} \cap r_{\bar{\nu}},$$

então, se  $\bar{v} \in r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}}$ , pela Proposição (3.6), concluímos que  $\bar{v} = \overline{\eta \times \mu}$ , uma vez que  $\bar{v} \in r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}} \cap r_{\bar{\nu}}$ , então  $\overline{\eta \times \mu} \in r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}} \cap r_{\bar{\nu}}$ . Logo, pela Proposição 3.8, concluímos que as três retas são concorrentes se, e somente se:

1.  $\overline{\eta \times \mu} \in r_{\bar{\eta}}$
2.  $\overline{\eta \times \mu} \in r_{\bar{\mu}}$
3.  $\overline{\eta \times \mu} \in r_{\bar{\nu}}$

Porém, por construção, as condições 1 e 2 são satisfeitas, então, basta mostrar que  $\overline{\eta \times \mu} \in r_\nu$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \overline{\eta \times \mu} = \left( \frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|} \right) \in r_\nu &\Leftrightarrow \Psi_0 \left( \frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|} \right) \in \Psi_0(r_\nu) \Leftrightarrow \frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|} \in r_\nu = \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2 \\ &\Leftrightarrow \langle \nu, \eta \times \mu \rangle = 0 \Leftrightarrow \det[\nu, \eta, \mu]. \end{aligned}$$

A recíproca é análoga. □

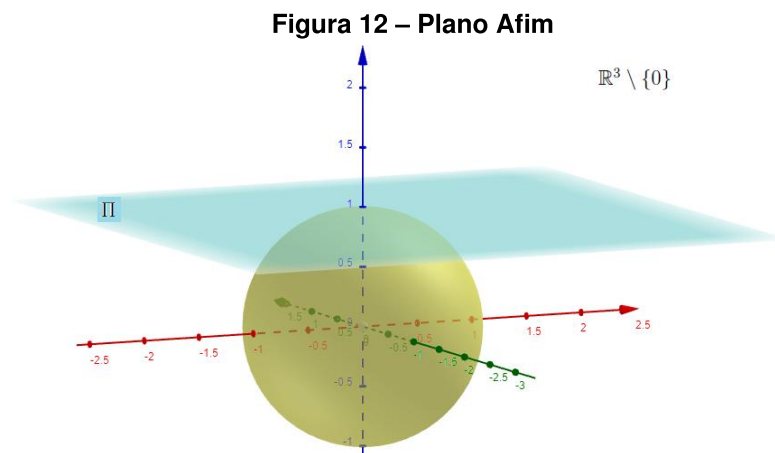
Consequentemente, vemos que os *Axioma 2 (b)* e *Axioma 2 (c)* são consequência da proposição acima.

### 3.3 Geometria Afim

Nesta seção, o objetivo é mostrar que podemos estabelecer uma relação entre  $\mathbb{R}^2$  e o plano projetivo. Para isso, faremos primeiro uma correspondência entre  $\mathbb{R}^2$  e um subconjunto de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , sendo este,  $\Pi = \{(x, y, 1); x, y \in \mathbb{R}\}$ . Em outras palavras,  $\Pi$  é o plano paralelo ao plano  $XY$  que passa por  $(1, 1, 1)$ . Dessa forma é simples relacionar tal plano a  $\mathbb{R}^2$ , podemos fazê-lo associando o ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ao ponto  $(x, y, 1) \in \Pi \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  (Perceba que tal relação é biunívoca).

Além disso, vejamos que  $\Pi$  é um plano tangente à  $\mathbb{S}^2$  no ponto  $(0, 0, 1)$  e, cada ponto  $(x, y, 1) \in \Pi \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  determina um único ponto em  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , sendo este,  $(x : y : 1)$ .

**Definição 3.8.** Chamaremos  $\mathbb{A}\mathbb{P}^2 = \{(x : y : 1) \in \mathbb{R}\mathbb{P}^2; (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\}$  de **plano afim**, e seus elementos de **pontos afins**.



Fonte: Autoria própria 2022.

Perceba que, todo ponto projetivo  $(x : y : z)$  com  $z \neq 0$  pode ser escrito como um ponto afim, basta tomar  $(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1)$ , onde  $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) \in \mathbb{R}^2$ . Chamaremos tal representação de identificação afim.

**Definição 3.9.** Chamaremos de *reta afim* a interseção entre uma reta projetiva com o plano afim.

**Definição 3.10.** O *plano afim dual* é o conjunto formado pelas retas afins, e o denotaremos por  $\mathbb{AP}^{2*}$ . Uma reta afim será indicada por  $\bar{\eta} \in \mathbb{AP}^{2*}$  ou por  $r_\eta \subset \mathbb{AP}^2$ .

Veremos agora, que podemos resolver um problema da geometria euclidiana utilizando a geometria projetiva e a geometria afim. Encontraremos a interseção de duas retas em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 3.2.** Considere as retas:

$$l_1 : 3x + 5y + 3 = 0 \quad \text{e} \quad l_2 : -2x + 4y = 0.$$

Usualmente, para descobrir a interseção, teríamos que resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = -3 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Agora podemos utilizar um artifício estudado neste trabalho para resolver tal problema.

Para isto, observe que as representações, como retas afins de  $l_1$  e  $l_2$  são, respectivamente os pontos projetivos  $\bar{\eta} = (3 : 5 : 3)$  e  $\bar{\nu} = (-2 : 4 : 0)$  elementos de  $\mathbb{AP}^{2*}$  onde a interseção entre tais retas é dada no ponto projetivo  $\bar{u} = \overline{\eta \times \nu}$ , isto é:

$$\eta \times \nu = \det \begin{bmatrix} i & 3 & -2 \\ j & 5 & 4 \\ k & 3 & 0 \end{bmatrix} = i(0 - 12) + j(-6 - 0) + k(12 + 10) = -12i - 6j + 22k.$$

Portanto,  $\bar{u} = (-12 : -6 : 22) = \left(\frac{-12}{22} : \frac{-6}{22} : 1\right) = \left(\frac{-6}{11} : \frac{-3}{11} : 1\right)$ . E, portanto o representante no plano  $\Pi : z = 1$  é  $u = \left(\frac{-6}{11}, \frac{-3}{11}, 1\right)$ . Assim, a garantimos que a interseção  $l_1 \cap l_2$  ocorre no ponto  $\left(\frac{-6}{11}, \frac{-3}{11}\right) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 3.3.** Considere as retas:

$$l_3 : 5x + 2y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad l_4 : 4x - y + 1 = 0.$$

As representações de  $l_3$  e  $l_4$  são os respectivamente os pontos projetivos  $\bar{\eta} = (5 : 2 : -1)$  e  $\bar{\nu} = (4 : -1 : 1)$ . Tomando um representante de cada classe, fazemos:

$$\eta \times \nu = \det \begin{bmatrix} i & 5 & 4 \\ j & 2 & -1 \\ k & -1 & 1 \end{bmatrix} = i(2 - 1) + j(-4 - 5) + k(-5 - 8) = i - 9j - 13k.$$

Portanto a interseção é dada no ponto projetivo  $\bar{u} = (1 : -9 : -13) = \left(\frac{-1}{13} : \frac{9}{13} : 1\right)$ . E, portanto o representante no plano afim é,  $u = \left(\frac{-1}{13}, \frac{9}{13}\right)$ , e concluímos que a interseção entre  $l_3$  e  $l_4$  ocorre em  $\left(\frac{-1}{13}, \frac{9}{13}\right) \in \mathbb{R}^2$ .

**Observação 3.3.** Isso é algo que pode ser utilizado no Ensino Médio, pois é uma maneira diferente de encontrar a interseção de duas retas, e para fazê-lo basta calcular um determinante e usar algumas noções básicas matemáticas.

### 3.3.1 Colineações

**Definição 3.11.** Uma *colineação* é uma aplicação biunívoca  $\psi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  que preserva a colinearidade, isto é, se  $\bar{u}, \bar{v}$  e  $\bar{w}$  são pontos projetivos colineares, então as imagens  $\psi(\bar{u}), \psi(\bar{v})$  e  $\psi(\bar{w})$  são pontos projetivos colineares.

A uma colineação, associamos um operador linear de  $\mathbb{R}^3$

**Proposição 3.10.** Se  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um operador linear invertível, então a aplicação  $\bar{A} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ ,  $\bar{A}(\bar{v}) = \overline{A(v)}$ , está bem definida e é uma colineação.

*Demonstração.* De fato,  $\bar{A}$  está bem definida, pois  $v \in \mathbb{RP}^2 \Rightarrow v \neq (0,0,0)$ . E como  $A$  é invertível,  $A(v) \neq 0$ , e portanto sua imagem, o elemento  $\overline{A(v)} \in \mathbb{RP}^2$  está bem definido.

Além disso, o valor de  $\bar{A}$  em um ponto projetivo, não depende do representante do ponto. De fato, sejam,  $u, v \in \mathbb{R}^3$ , tais quais pertencem a mesma classe, isto é,  $\bar{u} = \bar{v}$ . Sendo assim, pela definição de tal classe,  $\exists \lambda \neq 0$  tal que  $u = \lambda v$ . Porém, como por hipótese,  $A$  é um operador linear temos que:

$$\overline{A(u)} = \overline{A(\lambda v)} = \overline{\lambda A(v)} = \overline{A(v)}.$$

Note que, de fato, tal operador é uma colineação. Para isto, tome  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$ , colineares. Pelo critério de colinearidade (Proposição 3.7), temos que  $\det[u \ v \ w] = 0$ . Aplicando o operador citado acima e utilizando propriedades do determinante de matrizes temos:



$$\det[A(u), A(v), A(w)] = \det([A][u, v, w]) = \det[A] \det[u, v, w] = 0.$$

Portanto,  $\overline{A(u)}, \overline{A(v)}$  e  $\overline{A(w)}$  são colineares.  $\square$

**Proposição 3.11.** (Colineação) Se  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  e  $\bar{t}$  são pontos de  $\mathbb{RP}^2$  não colineares três a três, então existe uma colineação  $\bar{A} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  induzida por um operador linear invertível  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que:

$$\bar{A}(\bar{e}_1) = \bar{u}, \quad \bar{A}(\bar{e}_2) = \bar{v}, \quad \bar{A}(\bar{e}_3) = \bar{w} \quad \text{e} \quad \bar{A}(1 : 1 : 1) = \bar{t}$$

Mais ainda, tal operador linear é definido pela matriz  $[A] = [k_1 u \ k_2 v \ k_3 w]$ , onde  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$  e  $k_3 \neq 0$  são dados por:

$$k_1 = \frac{\det[t, v, w]}{\det[u, v, w]}, \quad k_2 = \frac{\det[u, t, w]}{\det[u, v, w]} \quad \text{e} \quad k_3 = \frac{\det[u, v, t]}{\det[u, v, w]}$$

Além disto, se um outro operador linear invertível  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  define a mesma colineação que  $A$ , então  $B \equiv \lambda A$  para algum escalar  $\lambda \neq 0$ .

*Demonstração.* Considere os representantes

$$u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3), \quad w = (w_1, w_2, w_3), \quad \text{e} \quad t = (t_1, t_2, t_3).$$

Por hipótese, quaisquer três pontos projetivos distintos citados acima, são não colineares, isto é, foram uma base para  $\mathbb{R}^3$ . Tome os pontos  $u, v$  e  $w$  citados, tal afirmação significa que  $\det[u, v, w] \neq 0$ . Por outro lado temos:

$$\begin{cases} A(e_1) = (k_1 u_1, k_1 u_2, k_1 u_3), \\ A(e_2) = (k_2 v_1, k_2 v_2, k_2 v_3), \\ A(e_3) = (k_3 w_1, k_3 w_2, k_3 w_3) \end{cases}$$

onde  $k_1, k_2, k_3 \neq 0$ . Portanto, conclui-se que a matriz  $[A]$  é da forma:

$$[A] = \begin{bmatrix} k_1 u_1 & k_1 v_1 & k_3 w_1 \\ k_1 u_2 & k_2 v_2 & k_3 w_2 \\ k_1 u_3 & k_2 v_3 & k_3 w_3 \end{bmatrix}$$

Mas, como  $k_1, k_2, k_3 \neq 0$  e  $\det[u, v, w] \neq 0$  concluímos que  $[A]$  não é singular.

Sendo assim, de  $\bar{A} = (1 : 1 : 1) = (t_1 : t_2 : t_3)$ . A condição  $A(1,1,1) = (t_1, t_2, t_3)$  nos leva ao sistema:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 u_1 & k_1 v_1 & k_3 w_1 \\ k_1 u_2 & k_2 v_2 & k_3 w_2 \\ k_1 u_3 & k_2 v_3 & k_3 w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}.$$

E, novamente usando o argumento de que  $\det[u, v, w] \neq 0$ , podemos resolver o sistema acima utilizando a regra de Cramer, e obtemos que:

$$k_1 = \frac{\det[t, v, w]}{\det[u, v, w]}, \quad k_2 = \frac{\det[u, t, w]}{\det[u, v, w]} \quad \text{e} \quad k_3 = \frac{\det[u, v, t]}{\det[u, v, w]}.$$

□

## 4 TEOREMAS DE PAPPUS E DESARGUES

Neste capítulo, apresentaremos dois importantes Teoremas da Geometria Projetiva. Para isto seguiremos utilizando o livro "Introdução a geometria projetiva" (BARROS; ANDRADE, 2010), e a dissertação de mestrado "Um estudo da Geometria Projetiva Elíptica" (ANDRADE, 2015) como principais referências.

### 4.1 Teorema de Pappus

Com base nos Teoremas de Menelau e Ceva, é possível provar alguns dos mais importantes Teoremas da Geometria Plana.

Um deles é o Teorema de Pappus, provado pela primeira vez por Pappus de Alexandria por volta de 300 a.C. Pappus foi o último geômetra grego (290 d.C e 350 d.C.) de importância. Sua fama reside em sua extensa obra denominada "THE COLLECTION", na qual ele reuniu uma lista de importantes obras antigas, algumas atualmente perdidas. Essa obra contém oito livros que abordam os seguintes tópicos: cônicas, geometria plana, mecânica, linhas retas tangentes a certas curvas, entre outros. Seu papel nos fundamentos da Geometria Projetiva não foi reconhecido até quase dezesseis séculos depois. O trabalho de Pappus é tido como a base da geometria projetiva moderna.

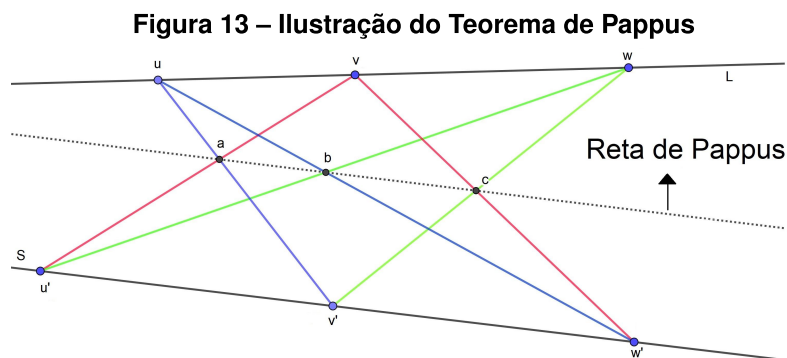
Primeiro apresentaremos o Teorema na sua versão dada na Geometria Euclídiana:

**Teorema 4.1.** Sejam  $L$  e  $S$  duas retas coplanares distintas com dois conjuntos de três pontos distintos  $\{u, v, w\} \subset L$  e  $\{u', v', w'\} \subset S$ . Considere as seguintes retas  $l_{uv'}$ ,  $l_{uv'}$ ,  $l_{vu'}$ ,  $l_{vw'}$ ,  $l_{wu'}$  e  $l_{wv'}$ . Então os pontos de interseção

$$a = l_{uv'} \cap l_{u'v}, \quad b = l_{uv'} \cap l_{u'w} \quad \text{e} \quad c = l_{vw'} \cap l_{v'w},$$

são colineares.

Observe a figura abaixo que ilustra o Teorema:



De certa forma o trabalho de Pappus inicia a chamada Geometria Projetiva e o Teorema 4.1, que leva o seu nome e foi demonstrado em sua versão na Geometria Euclidiana na dissertação de mestrado "Teorema de Pappus" (CHAVES, 2013).

Em seguida apresentamos o Teorema na sua versão dada na Geometria projetiva, onde apresentaremos sua demonstração.

**Teorema 4.2** (Teorema de Pappus). Sejam  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$ , seis pontos projetivos distintos, onde  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  estão sobre a reta projetiva  $r_{\bar{\eta}}$  e  $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$  estão sobre uma outra reta projetiva  $r_{\bar{v}'}$ . Então os pontos de interseção

$$\bar{a} = r_{\bar{\eta}_{uv'}} \cap r_{\bar{\eta}_{u'v}}, \quad \bar{b} = r_{\bar{\eta}_{uw'}} \cap r_{\bar{\eta}_{u'w}}, \quad \text{e} \quad \bar{c} = r_{\bar{\eta}_{vw'}} \cap r_{\bar{\eta}_{v'w}}$$

são colineares.

*Demonstração.* Considere os seguintes pontos projetivos  $\bar{u}, \bar{v}'$  e  $\bar{w}$  e  $\bar{b}$  e note que, por hipótese, tais pontos são não colineares três a três, logo mediante uma colinação, dada pela Proposição 3.11, podemos supor que:

$$\bar{u} = (1 : 0 : 0), \quad \bar{v}' = (0 : 1 : 0), \quad \bar{w} = (0 : 0 : 1) \quad \text{e} \quad \bar{b} = (1 : 1 : 1),$$

assim, com base nesta escolha primeiro encontraremos todos os pontos dados no Teorema.

Seja  $v = (v_1, v_2, v_3)$  e considere  $u = (1, 0, 0)$  e  $w = (0, 0, 1)$ . Assim, como por hipótese  $\bar{u}, \bar{v}$  e  $\bar{w}$  são colineares, então pela Proposição 3.7, segue que  $\det[u, v, w] = 0$ , isto é,

$$\det[u, v, w] = \det \begin{bmatrix} 1 & v_1 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & v_3 & 1 \end{bmatrix} = v_2 = 0,$$

assim, temos que  $v = (v_1, 0, v_3)$  e sua classe é dada por  $\bar{v} = (v_1 : 0 : v_2)$ . Como por hipótese todos os pontos são distintos,  $\bar{v} \neq \bar{w}$  implica  $v_1 \neq 0$  e  $\bar{v} \neq \bar{u}$  implica  $v_3 \neq 0$ . Portanto, podemos escrever

$$\bar{v} = v_3 \left( \frac{v_1}{v_3} : 0 : 1 \right) = (\beta : 0 : 1), \quad \text{com} \quad \beta = \frac{v_1}{v_3} \neq 0.$$

Agora, denote por  $\bar{u}' = (u'_1 : u'_2 : u'_3)$ . Como  $\bar{u}'$  é colinear a  $\bar{w}$  e a  $\bar{b}$ , tomando seus respectivos representantes,  $u' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ ,  $w = (0, 0, 1)$  e  $b = (1, 1, 1)$ , pela Proposição 3.7 segue que  $\det[u', w, b] = 0$ , isto é:

$$\det[u', w, b] = \det \begin{bmatrix} u'_1 & 0 & 1 \\ u'_2 & 0 & 1 \\ u'_3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = u'_2 - u'_1 = 0 \Rightarrow u'_2 = u'_1.$$

Assim, temos que  $\bar{u}' = (u'_1 : u'_1 : u'_3)$ , e como  $\bar{u}' \neq \bar{w}$ , pois são distintos por hipótese, concluímos que  $u_1 \neq 0$ , e portanto podemos escrever

$$\bar{u}' = u'_1(1 : 1 : \frac{u'_3}{u'_1}) = (1 : 1 : \alpha'), \text{ com } \alpha' = \frac{u'_3}{u'_1} \neq 0.$$

Seguindo o mesmo processo, podemos escrever

$$\bar{w}' = (\gamma' : 1 : 1), \text{ com } \gamma' = \frac{w'_1}{w'_2} \neq 0.$$

Por enquanto, encontramos os seguintes pontos:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= (1 : 0 : 0), \quad \bar{v} = (\beta : 0 : 1), \quad \bar{w} = (0 : 0 : 1), \quad \bar{u}' = (1 : 1 : \alpha') \\ \bar{v}' &= (0 : 1 : 0), \quad \bar{w}' = (\gamma' : 1 : 1), \quad \bar{b} = (1 : 1 : 1), \end{aligned}$$

e vejamos, que falta encontrarmos os pontos  $\bar{a}$  e  $\bar{c}$ .

Sabemos que  $\bar{a} = r_{\bar{\eta}_{uv'}} \cap r_{\bar{\eta}_{u'v}}$ , e, pela Proposição 3.6, temos que  $\bar{a} = \overline{\eta_{vw'} \times \eta_{v'w}}$ . Em seguida mostraremos quem são estas normais.

Para  $\eta_{uv'}$ , que é o vetor normal da reta que passa pelos pontos projetivos  $\bar{u}$  e  $\bar{v}'$ , temos que  $\eta_{uv'} = u \times v'$ , isto é:

$$u \times v' = \det \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ j & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0)i + (0)j + (1)k,$$

logo,  $\eta_{uv'} = (0,0,1)$ .

Para  $\eta_{u'v}$ , temos que  $\eta_{u'v} = u' \times v$ , isto é:

$$u' \times v = \det \begin{bmatrix} i & 1 & \beta \\ j & 1 & 0 \\ k & \alpha' & 1 \end{bmatrix} = (1)i + (\alpha'\beta - 1)j + (-\beta)k,$$

logo,  $\eta_{u'v} = (1, \alpha'\beta - 1, -\beta)$ .

Assim,  $\bar{a} = \overline{\eta_{vw'} \times \eta_{v'w}} = \overline{(0,0,1) \times (1, \alpha'\beta - 1, -\beta)}$ , e como

$$(0,0,1) \times (1, \alpha'\beta - 1, -\beta) = \det \begin{bmatrix} i & 0 & 1 \\ j & 0 & \alpha'\beta - 1 \\ k & 1 & -\beta \end{bmatrix} = (-\alpha'\beta + 1)i + (1)j + (0)k,$$

podemos escrever  $\bar{a} = (-\alpha'\beta + 1 : 1 : 0)$ .

Igualmente, para encontrarmos  $\bar{c}$ , calculamos as normais  $\eta_{vw'}$  e  $\eta_{v'w}$ , pois  $\bar{c} = \overline{\eta_{vw'} \times \eta_{v'w}}$ , e podemos concluir que  $\bar{c} = (0 : \beta : \beta - \gamma')$ .

Por outro lado, como os pontos  $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$  são colineares, temos que  $\det[u', v', w'] = 0$ , isto é:

$$\det[u', v', w'] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma' \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha' & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 - \gamma'\alpha' = 0. \quad (3)$$

Assim, temos que  $\bar{a} = (-\alpha'\beta + 1 : 1 : 0)$ ,  $\bar{b} = (1 : 1 : 1)$  e  $\bar{c} = (0 : \beta : \beta - \gamma')$ . Agora, considerando os respectivos representantes de cada classe, calcularemos  $\det[a, b, c]$ :

$$\det[a, b, c] = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\alpha'\beta + 1 \\ \beta & 1 & 1 \\ \beta - \gamma' & 1 & 0 \end{bmatrix} = \beta - \alpha'\beta\gamma' = \beta(1 - \alpha'\gamma').$$

Pela equação (3) temos que  $\det[a, b, c] = \beta(1 - \alpha'\gamma') = 0$ .

Portanto, pela Proposição 3.7 concluímos que esses três pontos são colineares.

□

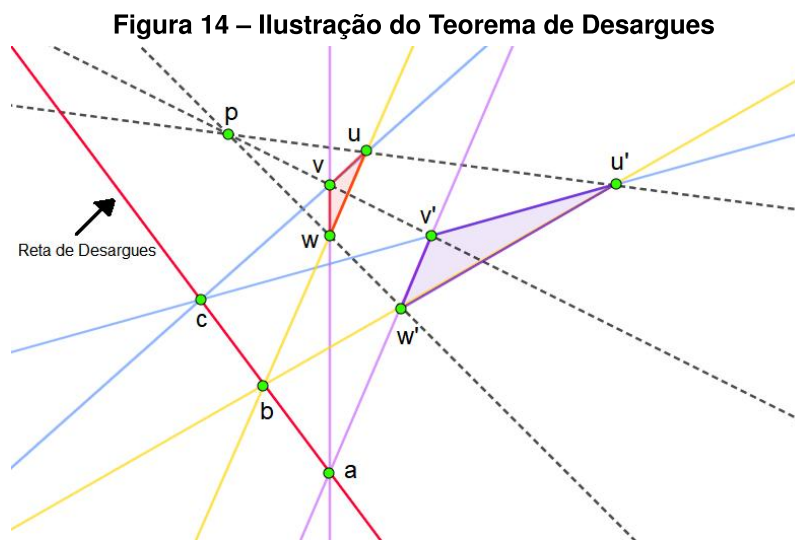
## 4.2 Teorema de Desargues

O Teorema de Desargues para dois triângulos parece ter sido publicado por Girard Desargues (1591-1661) em um trabalho sobre perspectiva em 1636, três anos antes de seu Projeto Brouillon ser publicado. Este Teorema tornou-se básico em Geometria Projetiva. (ALCARAZ, 2012)

Em resumo Desargues afirma:

*No plano projetivo, dois triângulos são projetivos de um ponto se e somente se eles são projetivos de uma linha.*

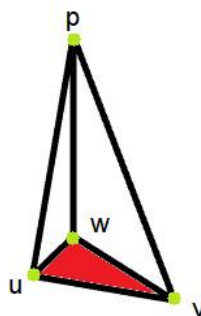
A figura abaixo ilustra o enunciado do Teorema:



Fonte: Autoria própria 2022.

Um fato interessante é que no caso da figura 14 está no Plano, pode ser pensado em outro termos. Podemos pensar que o triângulo  $uvw$  está no espaço tridimensional e o quadrilátero  $puvw$  é um tetraedro. Observe:

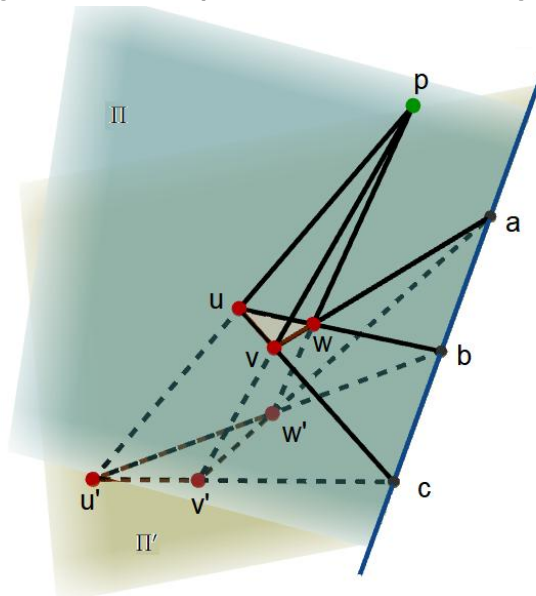
**Figura 15 – Tetraedro**



Fonte: Autoria própria 2022.

Igualmente,  $pu'v'w'$  é outro tetraedro cuja base  $u'v'w'$  estaria em perspectiva com  $uvw$  desde o ponto  $p$ , isto significa que um observador localizado no ponto  $p$  só vai perceber um triângulo, pois desde essa posição  $uvw$  vai ser visto sobreposto a  $u'v'w'$ . Isto pode ser representado como sendo que os triângulo  $uvw$  e  $u'v'w'$  estão em dois planos distintos  $\Pi$  e  $\Pi'$  como se observa na seguinte figura.

**Figura 16 – Ilustração do Teorema de Desargues**



**Fonte: Autorial própria 2022.**

O Teorema de Desargues afirma que  $a, b, c$  são colineares.

Em seguida apresentaremos o Teorema de Desargues em sua versão dada na Geometria Projetiva:

**Teorema 4.3** (Teorema de Desargues). Seja  $\Delta = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$  um conjunto de três pontos projetivos distintos e não colineares, e  $\Delta' = \{\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'\}$  outro conjunto de três pontos projetivos distintos e não colineares tais que  $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$ . Denote por:

$$\bar{p} = r_{\bar{u}u'} \cap r_{\bar{v}v'} \cap r_{\bar{w}w'}. \quad (4)$$

Então, os pontos de interseção:

$$\bar{a} = r_{\bar{v}v'} \cap r_{\bar{w}w'}, \quad \bar{b} = r_{\bar{u}u'} \cap r_{\bar{w}w'}, \quad e \quad \bar{c} = r_{\bar{u}u'} \cap r_{\bar{v}v'},$$

são colineares.

*Demonstração.* Suponhamos que  $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$  e  $\bar{p}$  são não colineares. Sendo assim, pela Proposição 3.11, a menos de uma colineação, podemos considerar:



$$\overline{u'} = (1 : 0 : 0), \quad \overline{v'} = (0 : 1 : 0), \quad \overline{w'} = (0 : 0 : 1) \quad \text{e} \quad \overline{p} = (1 : 1 : 1).$$

Por hipótese temos que  $\overline{u'}, \overline{u}, \overline{p}$  são colíneares, então denote por  $\overline{u} = (u_1 : u_2 : u_3)$  e considere os respectivos representantes  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $u' = (1, 0, 0)$  e  $p = (1, 1, 1)$ , assim, pela Proposição 3.7,  $\det [u', u, p] = 0$ , isto é:

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 1 \\ u_2 & 0 & 1 \\ u_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = u_3 - u_2 = 0.$$

Assim,  $u_2 = u_3$  e, podemos reescrever  $u = (u_1, u_2, u_2)$ , onde  $u_2 \neq 0$  pois  $\overline{u}$  e  $\overline{u'}$  são distintos. Logo,  $u = u_2(\frac{u_1}{u_2}, 1, 1)$  e podemos escrever:

$$\overline{u} = (\alpha : 1 : 1), \quad \text{com } \alpha = \frac{u_1}{u_2}$$

Usando a mesma técnica, podemos descobrir  $\overline{v}$  e  $\overline{w}$ . Denote por  $\overline{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$  e observe que os pontos  $\overline{v}, \overline{v'}, \overline{p}$  são colineares. Logo, tomando os representantes  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $v' = (0, 1, 0)$  e  $p = (1, 1, 1)$ , segue pela Proposição 3.7 que:

$$\det [v, v', p] = \det \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = v_1 - v_3 = 0.$$

Assim,  $v_1 = v_3$ , e  $v = (v_1, v_2, v_1)$  com  $v_1 \neq 0$ , pois  $v$  e  $\overline{v'}$  são distintos. Logo,  $v = v_1(1, \frac{v_2}{v_1}, 1)$ , e podemos escrever:

$$\overline{v} = (1 : \beta : 1), \quad \text{com } \beta = \frac{v_2}{v_1}.$$

Similarmente, denotando  $\overline{w} = (w_1 : w_2 : w_3)$  e pelo fato de  $\overline{w}, \overline{w'}, \overline{p}$ , serem colineares podemos escrever:

$$\overline{w} = (1 : 1 : \gamma), \quad \text{com } \gamma = \frac{w_3}{w_1}.$$

Vamos agora encontrar o ponto projetivo  $\overline{a}$ . Sabemos que  $\overline{a} = r_{\overline{\eta}_{vw}} \cap r_{\overline{\eta}_{v'w'}}$ , e, pela Proposição 3.8,  $r_{\overline{\eta}_{vw}}$  é a reta que incide em  $\overline{v} = (1 : \beta : 1)$  e  $\overline{w} = (1 : 1 : \gamma)$  e tem normal  $\overline{\eta}_{vw}$

dada por:

$$\det \begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ j & \beta & 1 \\ k & 1 & \gamma \end{bmatrix} = i(\beta\gamma - 1) + k(1 - \beta) + j(1 - \gamma).$$

Assim,  $\bar{\eta}_{vw} = (\beta\gamma - 1 : 1 - \beta : 1 - \gamma)$ .

Da mesma forma, pela Proposição 3.8, a normal da reta  $r_{\bar{\eta}_{v'w'}}$ , é a reta que incide em  $\bar{v}' = (0 : 1 : 0)$  e  $\bar{w}' = (0 : 0 : 1)$ , isto é:

$$\det \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix} = i(1) + k(0) + j(0).$$

Assim,  $\bar{\eta}_{v'w'} = (1 : 0 : 0)$ .

Como  $\bar{a} = r_{\bar{\eta}_{vw}} \cap r_{\bar{\eta}_{v'w'}}$ , segue pela Proposição 3.6, que  $\bar{a} = (0 : 1 - \beta : \gamma - 1)$ .

Analogamente, para encontrar  $\bar{b} = r_{\bar{\eta}_{uw}} \cap r_{\bar{\eta}_{u'w'}}$  descobriremos as normais das retas  $r_{\bar{\eta}_{uw}}$  e  $r_{\bar{\eta}_{u'w'}}$ , as quais são dadas por:

$$\bar{\eta}_{uw} = (\gamma - 1 : 1 - \alpha\gamma : \alpha - 1) \quad \text{e} \quad \bar{\eta}_{u'w'} = (0 : -1 : 0).$$

Portanto, como  $\bar{b} = r_{\bar{\eta}_{uw}} \cap r_{\bar{\eta}_{u'w'}}$ , segue pela Proposição 3.6, que  $\bar{b} = \overline{\eta_{uw} \times \eta_{u'w'}}$ .

Temos:

$$\eta_{uw} \times \eta_{u'w'} = \det \begin{bmatrix} i & \gamma - 1 & 0 \\ j & 1 - \alpha\gamma & -1 \\ k & \alpha - 1 & 0 \end{bmatrix} = i(\alpha - 1) + j(0) + k(1 - \gamma),$$

e portanto,  $\bar{b} = (\alpha - 1 : 0 : 1 - \gamma)$ .

Fazendo o mesmo processo para  $\bar{c} = \overline{\eta_{uv} \times \eta_{u'v'}}$ , podemos escrever  $\bar{c} = (1 - \alpha : \beta - 1 : 0)$ .

Aqui conseguimos os pontos  $\bar{a} = (0 : 1 - \beta : \gamma - 1)$ ,  $\bar{b} = (\alpha - 1 : 0 : 1 - \gamma)$  e  $\bar{c} = (1 - \alpha : \beta - 1 : 0)$  e provemos que são colineares. De fato, pela Proposição 3.7 basta calcular  $\det[a, b, c]$ . Para isso, considere os representantes:  $a = (0, 1 - \beta, \gamma - 1)$ ,  $b = (\alpha - 1, 0, 1 - \gamma)$  e

$c = (1 - \alpha, \beta - 1, 0)$ , onde

$$\det[a, b, c] = \det \begin{bmatrix} 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha \\ 1 - \beta & 0 & \beta - 1 \\ \gamma - 1 & 1 - \gamma & 0 \end{bmatrix} = (\gamma - 1)(\alpha - 1)(\beta - 1) + (1 - \beta)(1 - \gamma)(1 - \alpha) = 0.$$

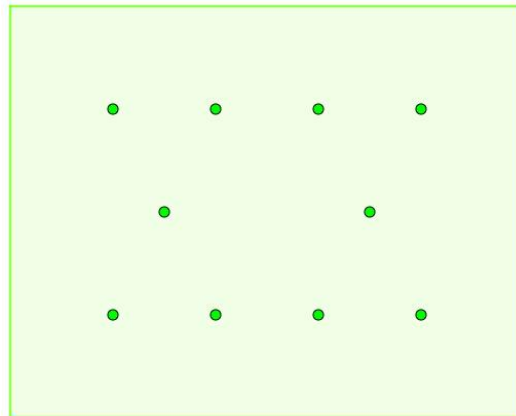
Portanto, concluímos que tais pontos são colineares.  $\square$

### 4.3 Aplicações

Iniciaremos esta seção com um problema, e em seguida apresentaremos outros, fazendo adaptações deste problema inicial. Estas são aplicações diretas dos dois teoremas estudados nas seções 4.1 e 4.2. O problema inicial e o problema 1, foram feitos com base no blog "Epsilones", disponível em <https://www.epsilones.com/material/historia/021-teorema-desargues.ggb> e, o problema 2, foi encontrado em <https://www.geogebra.org/m/a4vtnPys>, autor José Filipi.

**Problema inicial:** Como plantar dez árvores em dez filas de três árvores?

**Figura 17 – Problema inicial**



**Fonte:** Autoria própria 2022.

Link para tentar fazer: <https://www.geogebra.org/classic/fpjc95a5>

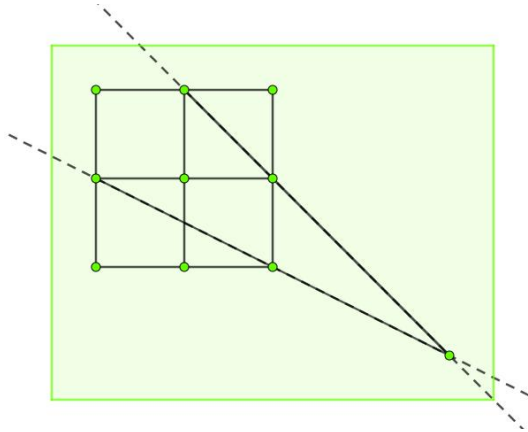
Este problema tem mais de uma solução. Abaixo apresentamos uma possível solução para este.

A solução acima encontra-se disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/xvgstqre>

Agora, adicionaremos ao problema inicial a hipótese de que cada árvore precisa estar exatamente em três filas. Ficando assim, com o seguinte:

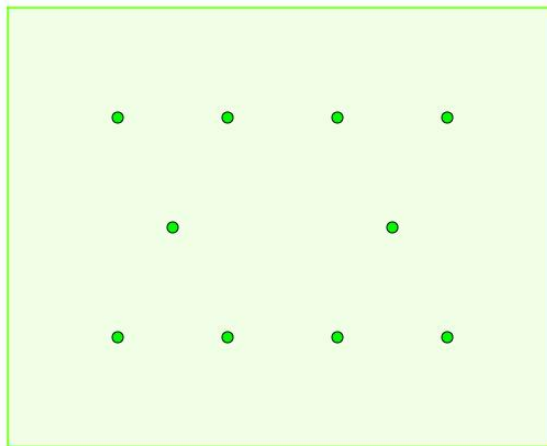
**Problema 1:** Como plantar dez árvores em dez filas de três árvores cada uma de modo que cada árvore está em exatamente três filas?

**Figura 18 – Uma solução para o problema inicial**



**Fonte: Autoria própria 2022.**

**Figura 19 – Problema 1**



**Fonte: Autoria própria 2022.**

Link para tentar fazer: <https://www.geogebra.org/classic/fpjc95a5>

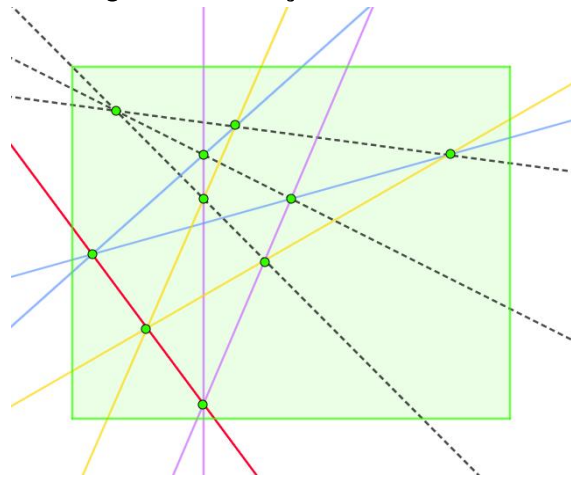
Perceba que a solução deste problema também é uma possível solução para o problema inicial, já que apenas acrescentamos uma hipótese, mas não retiramos ou modificamos as hipóteses iniciais. Este problema também tem várias soluções, porém, todas elas são consequência do Teorema de Desargues, isto é, a solução é construída a partir do referido Teorema. Segue abaixo uma resolução e em seguida um comentário explicando como construir esta solução no Geogebra a partir do Teorema de Desargues.

A solução acima encontra-se disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/pr2qwa8e>

A construção pode ser feita da seguinte maneira:

1. Escolha um ponto, e faça 3 retas distintas quaisquer passando por esse ponto (retas pontilhadas na imagem acima).
2. Posicione dois pontos em cada reta, de modo que tomados três a três (sem considerar o ponto do item anterior), não sejam colineares (isto é, formando dois triângulos).

**Figura 20 – Solução do Problema 1**



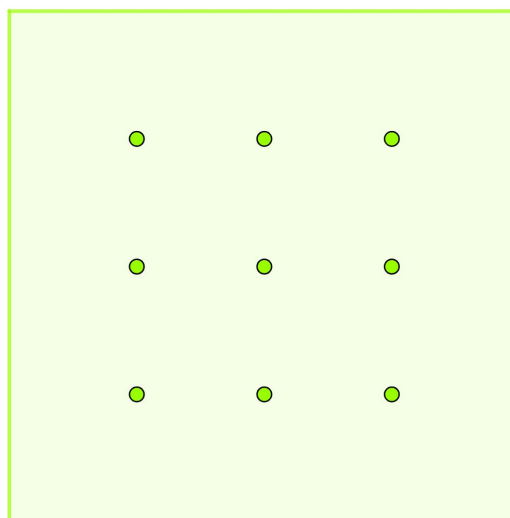
**Fonte: Autoria própria 2022.**

3. Prolongue os segmentos de cada lado do triângulo em retas (retas amarelas, azuis e roxas na figura anterior). Marque a interseção formada pelas duas retas de lados correspondentes de cada triângulo.
4. Faça uma reta com dois dos pontos das interseções (reta vermelha). O Teorema de Desargues garante que o ponto da interseção não escolhida é colinear aos outros dois, e portanto chega-se a solução.

Para o último problema, alteraremos uma hipótese do problema inicial, retiramos uma árvore. Obtendo:

**Problema 2:** Como podemos plantar 9 árvores em dez filas de três árvores?

**Figura 21 – Problema 2**

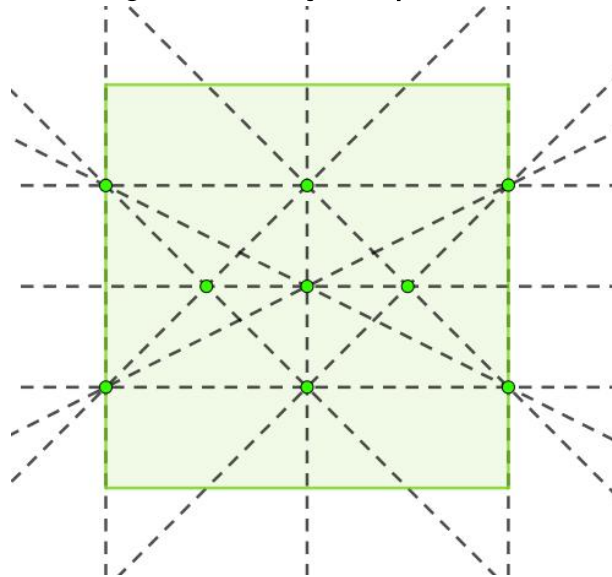


**Fonte: Autoria própria 2022.**

Link para tentar fazer: <https://www.geogebra.org/classic/epdufdqs>

Perceba que, novamente, este é um caso mais específico do problema inicial, então, esta solução também pode ser usada para resolvê-lo, acrescentando um ponto em qualquer lugar. Em contrapartida, esta resolução não se encaixa no problema 1, pois para este, não podemos exigir que cada ponto esteja em exatamente 3 filas, com apenas 9 árvores, tal resultado é impossível. Aqui, temos uma aplicação direta do Teorema de Pappus para a solução, abaixo da imagem com a solução, tem-se os passos para fazer no geogebra seguindo o Teorema mencionado.

**Figura 22 – Solução do problema 2**



**Fonte: Autoria própria 2022.**

A solução acima encontra-se disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/x8xrrhjm>

A construção pode ser feita da seguinte maneira:

1. Coloque três pontos em lugares diferentes de uma mesma reta.
2. Em uma reta distinta, posicione outros três pontos distintos.
3. Olhando da esquerda para a direita, trace as retas entre o primeiro ponto da primeira reta com o ponto do meio da segunda reta, e entre o primeiro ponto da primeira reta com o último ponto da segunda reta.
4. Repita o processo com os outros dois pontos, ligando-os sempre aos pontos não correspondentes da outra reta.
5. Marque os três pontos de interseção obtidos com o processo anterior.

6. Traçe uma reta por dois destes pontos de interseção, o Teorema de Pappus garante que o terceiro ponto de interseção está nessa reta, e por fim chegamos à solução.

## 5 CONCLUSÃO

Com este trabalho, conseguimos perceber que existem diferenças entre o mundo que vivemos e o mundo que enxergamos, e, pode-se explicar isso, com a teoria fundamentada pela Geometria Projetiva. Além disso, vimos que a Geometria Euclidiana, apesar de sua grande importância, não é única existente, já que discutimos outras geometrias diferentes, com entes distintos dos conhecidos usualmente.

Notou-se também que podemos relacionar estas três geometrias, e alguns resultados obtidos em uma geometria podem ser usufruídos nas outras, podendo ir de uma geometria à outra utilizando os conhecimentos mostrados com o decorrer do trabalho, visto que isto foi feito diretamente diversas vezes, desde encontrar a inteseção de retas euclidianas utilizando as Geometrias Afim e Projetiva, até a demonstração e aplicação dos Teoremas, que originalmente são resultados da Geometria Euclidiana e podem ser facilmente demonstrados pela Geometria Projetiva.

Pode ser dada continuidade neste trabalho, pois existem mais aplicações dos teoremas e podem apresentando mais resultados interessantes da Geometria Projetiva. Além disso pode-se explorar a Geometria Projetiva na arte, bem como em outras áreas da matemática e explorar aplicações existentes para o ensino básico, como foram mencionadas algumas no decorrer do trabalho.



## REFERÊNCIAS

ALCARAZ, C. T. ¿Qué significa “comprender el teorema de Desargues”? **Miscelánea Matemática**, 54, p. 3–23, 2012.

ANDRADE, A. F. F. **Um estudo da geometria projetiva elíptica**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”. Rio Claro p. 127. 2015.

BARROS, A.; ANDRADE, P. **Introdução à geometria projetiva**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

CHAVES, J. J. F. **Teorema de Pappus**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro p. 77. 2013.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2010.

IEZZI, G.; DOMINGUES, H. **Álgebra Moderna** 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2018