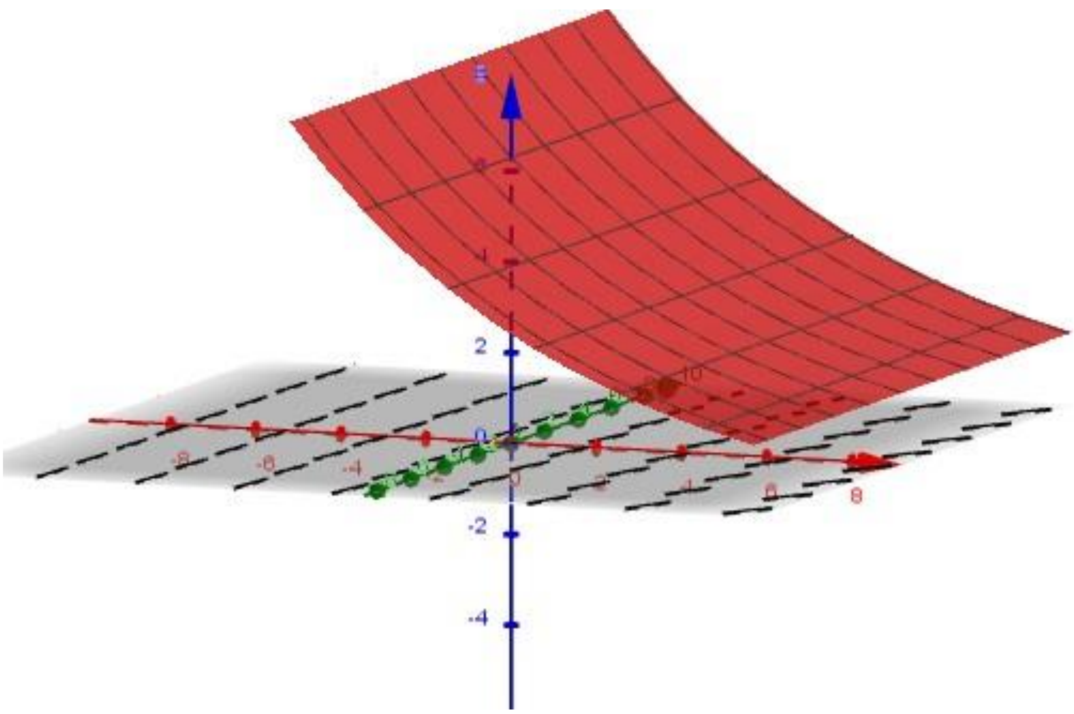
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias



Acadêmica: Talita Breschiliare Piffer Freire

Orientadora: Dra. Adriana Helena Borssoi

TALITA BRESCHILIARE PIFFER FREIRE

UMA UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA PARA O ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Orientadora: Profa. Dra. Adriana Helena Borssoi

LONDRINA

2017

TERMO DE LICENCIAMENTO

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Caro colega,

Este é o Produto Educacional do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, associado à dissertação *Uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias*.

As Unidades de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) se caracterizam por serem "sequências de ensino fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, não mecânica, que podem estimular a pesquisa aplicada em ensino, aquela voltada diretamente à sala de aula" (MOREIRA, 2011b, p. 44).

Preocupados com o ensino e a aprendizagem dos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, em nossa pesquisa, propusemos a elaboração de uma UEPS para o estudo de tópicos de Equações Diferenciais Ordinárias que associasse o uso de recursos tecnológicos e atividades de Modelagem Matemática como parte das atividades componentes.

Originalmente o produto educacional foi concebido no formato de um caderno pedagógico que abrigava a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa. Em nossa pesquisa, o caderno pedagógico foi se estruturando durante o segundo semestre letivo de 2016, na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias de um curso de Licenciatura em Matemática. Na ocasião os alunos receberam uma pasta com presilha e anexavam nesta pasta as atividades que recebiam e desenvolviam no decorrer das aulas. Esta é uma sugestão que deixamos como forma de trabalhar com o produto educacional e de organizar o material de ensino.

A concepção deste produto educacional se fundamenta na Teoria da Aprendizagem Significativa (MOREIRA, 1999, 2011a, 2011b). Por isso, além de levar em conta os subsunçores presentes na estrutura cognitiva do aprendiz, o material de ensino deve ter potencial para ser relacionado a aspectos que são relevantes a esse aprendiz em especial, permitindo que sejam realizadas incorporações nas relações existentes na estrutura cognitiva de forma não arbitrária e não literal. Sendo assim, algumas atividades têm como objetivo principal a verificação de subsunçores nos aprendizes, enquanto outras utilizam esses conhecimentos prévios para que os processos da Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora possam acontecer. Esses aspectos são apresentados e discutidos em Freire (2017) que o leitor é convidado a conhecer para ter uma visão ampla da proposta.

Destacamos que os links das atividades estão disponíveis no formato multimídia[1] que em breve será incorporado ao repositório institucional no Portal de Informação em Acesso Aberto[2] (PIAA)..

Abraços!

Talita Breschiliare Piffer Freire

Adriana Helena Borssoi

---

[1] https://sites.google.com/alunos.utfpr.edu.br/talitapifferfreire

[2] https://portaldeinformacao.utfpr.edu.br/

Eficiência de um Operador de Máquinas[3]

A eficiência E (em porcentagem) de um operador de máquinas varia com o tempo de trabalho realizado durante um dia (8horas). Suponhamos que a eficiência seja crescente nas 4 primeiras horas de trabalho e depois decresça nas 4 horas restantes, isto é,

$$\frac{dE}{dt} = 40 - 10t$$

onde t é o número de horas de trabalho do operador.

Determine E = E(t), isto é, a eficiência em qualquer instante t.

Suponhamos que, para uma tarefa específica, um operador tenha eficiência de 72% depois de haver trabalhado 2 h, determine a equação da eficiência deste operador particular realizando esta tarefa específica: https://ggbm.at/MJzqYfPV

Qual é a eficiência do operador do exemplo anterior após ter trabalhado 8 horas?

Verifique o instante em que a eficiência será máxima.

[3] Adaptado de: BASSANEZZI, 2014, p. 126.

ESTUDO DA OBESIDADE COMO FATOR DE RISCO DA DIABETES TIPO 2[4]

O risco de um indivíduo desenvolver Diabetes do tipo 2 em função da obesidade, está associada ao seu índice de massa corporal (IMC). Como mostrado na tabela abaixo.

IMC	Risco (%)
23,95	5,7
25,95	8,57
27,95	17,14
29,95	25,71
31,95	38,57
33,95	57,14
35,95	91,43

Tabela 1 - Indicativo de risco para Diabetes tipo 2 em função do IMC
Fonte: Revista Veja, edição 1787, ano 36 – n° 04, p. 77, publicada em 29/01/2003

A avaliação do risco, baseado no índice de massa corporal - IMC é justificado devido o mesmo indicar a taxa de gordura no organismo de uma pessoa. Sendo as taxas de gordura no sangue elevadas, a ação da insulina fica comprometida, indicando risco de desenvolver algumas complicações à saúde.

O IMC é obtido pela expressão $IMC = \frac{massa\ (Kg)}{(altura\ (m))^2}$ e a classificação em termos do "peso" é apresentada pela tabela.

Resultado do IMC	Significado
Menor que 20	Abaixo do peso
Entre 20 e 25	Peso Normal
Entre 25 e 30	Acima do Peso
Acima de 30	Obesidade

Tabela 2 - Avaliação do IMC
Fonte: http:// www.planetanatural.com.br

Observando os dados anteriores, proponha um problema e obtenha sua solução.

[4] Adaptado de: BORSSOI, 2004, p. 89

OBSERVAÇÕES HISTÓRICAS[5]

Sem conhecer um pouco as equações diferenciais, e os métodos de resolvê-las, é difícil apreciar a história deste importante ramo da matemática. Além disso, o desenvolvimento das equações diferenciais está intimamente entrelaçado com o desenvolvimento da matemática e não pode dele ser dissociado.

O estudo das equações diferenciais inaugurou-se no início do cálculo, com Issac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), no século XVII. Newton cresceu no campo inglês, foi educado no Trinity College, Cambridge, e aí se tornou professor de matemática em 1969. Suas históricas descobertas no cálculo e das leis fundamentais da mecânica datam de 1665. Essas descobertas circulam entre seus amigos, pois Newton era muito sensível a críticas, e não principiou a publicar seus resultados até 1687, com o aparecimento do seu livro mais famoso, *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

Isaac Newton

Embora Newton tenha trabalhado relativamente pouco no campo estrito das equações diferenciais, o desenvolvimento que proporcionou ao cálculo e à elucidação dos princípios básicos de mecânica constituíram a base para as aplicações que se fizeram no século XVIII, notavelmente por Euler. A carreira de pesquisa ativa de Newton terminou, em grande parte, no início da década de 1690, exceto quanto à resolução de alguns problemas apresentados como desafio. Foi nomeado Diretor da Casa da Moeda Britânica, em 1696, e renunciou ao cargo de professor alguns anos mais tarde. Foi enobrecido em 1705 e, depois de morto, sepultado na Abadia de Westminster.

[5] Adaptado de: BOYCE; DIPRIMA, 1998, p. 8, 9, 10

Leibniz nasceu em Leipzig e completou seu doutorado em filosofia com 20 anos, na Universidade de Altdorf. Ao longo da sua vida dedicou-se a trabalhos acadêmicos em muitos campos diferentes. Era, no fundamental, um autodidata em matemática, pois seu interesse no campo desenvolve-se quando estava nos seus 20 anos.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Leibniz chegou aos resultados fundamentais do cálculo por via independente, embora um pouco posterior a Newton, mas foi o primeiro a publicá-los, em 1684. Leibniz tinha plena consciência do poder de uma boa notação matemática e a notação que usamos para a derivada dy/dx), e para a integração, foram introduzidas por ele.

Descobriu o método de separação de variáveis em 1691, a redução de equações homogêneas a equações separáveis em 1691, e o procedimento de resolução de equações lineares de primeira ordem em 1694. Passou a vida como embaixador e conselheiro de muitas famílias germânicas reais, o que lhe permitiu viagens extensas e ampla correspondência com outros matemáticos, especialmente com os irmãos Bernoulli. Durante esta correspondência, muitos problemas de equações diferenciais foram resolvidos na segunda metade do século XVII.

Os irmãos Jakob (1654 - 1705) e Johan (1667 – 1748) Bernoulli, da Basiléia, contribuíram muito para o desenvolvimento de métodos de resolução de equações diferenciais para ampliar o campo de aplicação destas equações. Jacob tornou-se professor de matemática na Basiléia, em 1687, e Johan foi nomeado para a mesma posição depois da morte do irmão, em 1705. Com o auxílio do cálculo os dois irmãos formularam como equações diferenciais muitos problemas de mecânica e os resolveram.

Jakob Bernoulli

Johann Bernoulli

Daniel Bernoulli (1700 – 1782), filho de Johann, migrou jovem para São Petersburgo, a fim de juntar-se à recém-fundada Academia de São Petersburgo, mas retornou à Basiléia em 1733 como professor de botânica e, depois, de física. Seu interesse residia, principalmente, nas equações diferenciais parciais e respectivas aplicações. Por exemplo, é o seu nome o associado à famosa equação de Bernoulli da mecânica dos fluidos. Foi também o primeiro a encontrar as funções que, um século depois, tornaram-se conhecidas como funções de Bessel.

Daniel Bernoulli

O maior matemático do século XVIII, Leonard Euler (1707 – 1783), cresceu nas vizinhanças da Basiléia e foi aluno de Johann Bernoulli. Com seu amigo Daniel Bernoulli foi para São Petersburgo em 1727. Durante o resto de sua vida continuou associado à Academia de São Petersburgo (1727 – 1741 e 1766 – 1783) e à Academia de Berlim (1741 – 1766). Euler foi o matemático mais prolífero de todos os tempos; suas obras enchem mais de 70 grandes volumes.

Leonard Euller

O seu interesse cobria todas as áreas das matemáticas e muitos campos de aplicação. Embora ficasse cego durante os últimos 17 anos de vida continuou a trabalhar até o dia de sua morte. Têm especial interesse as formulações de problemas de mecânica em linguagem matemática e o desenvolvimento de métodos de resolução destes problemas matemáticos. Lagrange afirmou que o trabalho de Euler em mecânica era “a primeira grande obra na qual a análise se aplica à ciência do movimento”. Entre outras coisas, Euler identificou a condição de exatidão das equações diferenciais de primeira ordem em 1734 – 1735, desenvolveu a teoria dos fatores integrantes neste mesmo artigo e apresentou a solução geral das equações lineares com coeficientes constantes e 1743. Aplicou os últimos resultados a equações não-homogêneas em 1750 – 1751, Euler passou a usar séries de potência para resolver equações diferenciais. Propôs também um procedimento numérico em 1768 – 1769, fez importantes contribuições às equações diferenciais parciais e deu o primeiro tratamento sistemático ao cálculo das variações.

Joseph-Louis Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) tornou-se professor de matemática na cidade de Turim, onde nasceu, com a idade de 19 anos. Sucedeu a Euler na cadeira de matemática da Academia de Berlim, em 1766, e foi para a Academia de Paris em 1787. A sua fama provém, em grande parte, de sua obra monumental *Mécanique analytique*, publicada em 1788, que é um tratado elegante e abrangente da mecânica newtoniana.

No que se refere às equações diferenciais elementares, Lagrange mostrou em 1762 – 1765 que a solução de uma equação diferencial homogênea de ordem n é uma combinação linear de *n* soluções independentes. Depois, em 1774 – 1775, publicou o desenvolvimento completo do método da variação de parâmetros. Lagrange também é conhecido pelo seu tratamento fundamental nas equações diferenciais parciais e no cálculo das variações.

Pierre-Simon de Laplace

Pierre-Simon de Laplace (1749 – 1827) viveu na Normandia quando menino, mas mudou-se para Paris em 1768 e logo deixou sua marca nos círculos científicos, sendo eleito para a Académie des Sciences em 1773. Destacou-se no campo da mecânica celeste; seu maior trabalho, *Traité de mécanique celeste*, foi publicado em cinco volumes entre 1799 e 1825. A equação de Laplace é fundamental em muitos ramos da física matemática, e Laplace estudou profundamente em suas investigações da atração gravitacional.

A transformada de Laplace também recebeu o nome em sua abordagem, embora sua utilidade para a solução de equações diferenciais só tenha sido reconhecida muito mais tarde.

As equações diferenciais parciais começaram a ser intensamente estudadas depois que seu papel crucial para a física matemática se tornou claro. Várias funções que surgiram como soluções de equações diferenciais ordinárias também ocorriam repetidamente e foram estudadas exaustivamente. Conhecidas coletivamente como funções transcendentais superiores, muitas delas receberam os nomes de matemáticos, como as funções de Bessel, Hermite, Chebyshev e Hankel.

INTRODUÇÃO[6]

Muitos problemas importantes e significativos da engenharia, das ciências físicas e das ciências sociais, formulados em termos matemáticos, exigem a determinação de uma função que obedece a uma equação que contém uma ou mais derivadas da função desconhecida. Estas equações são **equações diferenciais**.

Talvez o exemplo mais conhecido seja o da lei de Newton $F = m.a$. Se $u(t)$ é a posição no instante *t* de uma partícula de massa m submetida a uma força F, temos

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = F\left[t, u, \frac{du}{dt}\right], \qquad (1)$$

Onde a força F pode ser função de t, u e da velocidade ${du}/{dt}$. A fim de determinar o movimento da partícula sob a ação da força F é necessário encontrar uma função u que obedeça à Eq. (1).

DEFINIÇÃO 1: Uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial (ED)**.

OBSERVAÇÃO 1: Uma equação diferencial é chamada ordinária (EDO) se a função incógnita depende de apenas uma variável independente. Se a função incógnita depende de mais de uma variável independente, temos uma equação diferencial parcial (EDP) ou equação de derivadas parciais.

EXEMPLO 1: As seguintes equações são equações diferenciais envolvendo a função incógnita y.

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \qquad (1.1)$$

$$e^y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \qquad (1.2)$$

[6] Adaptado de: BOYCE; DIPRIMA, 1998, p. 1; BRONSON; COSTA, 2008, p. 15; ZILL, 2003, p. 2, 3, 4, 5, 6

$$4\frac{d^3y}{dx^3} + (senx)\frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0 \qquad (1.3)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad (1.5)$$

As equações 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4 são exemplos de EDO, pois a função incógnita y depende unicamente da variável x.

A equação 1.5 é uma EDP, pois y depende das duas variáveis independentes t e x.

NOTAÇÕES:

LEIBNIZ: explicita claramente as variáveis dependentes e independentes.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 156x = 0$$

x: Variável dependente;

t: Variável independente.

LINHA: é usada somente para denotar as três primeira derivadas y', y'', y''').

$$y'' - y' + 6y = 0$$

A quarta derivada é escrita como $y^{(4)}$ em vez de y''''.

PONTO DE NEWTON: (Sujeira de Mosca) é usada em Física e Engenharia para denotar derivadas em relação ao tempo.

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -32 \text{ corresponde a } \ddot{s} = -32$$

EM SUBSCRITO: encontradas em derivadas parciais.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2} - 2\,\frac{du}{dt} \text{ corresponde a } u_{xx} = u_{tt} - 2u_t$$

DEFINIÇÃO 2: A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que nela comparece.

EXERCÍCIO 1: Observando os exemplos de 1.1 a 1.4, determine a ordem de cada um deles, quando possível.

DEFINIÇÃO 3: O **grau** de uma equação diferencial, que pode ser escrita como um polinômio na função incógnita e suas derivadas, é a potência a que se acha elevada a derivada de ordem mais alta.

OBSERVAÇÃO 2: Nem toda equação diferencial pode ser classificada segundo o grau.

EXERCÍCIO 2: Ainda observando os exemplos de 1.1 a 1.4, determine, quando possível, o grau de cada uma das equações.

DEFINIÇÃO 4: Uma EDO de ordem *n* na função incógnita *y* e na variável independente x é **linear** se tem a forma:

$$b_n(x).\frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-1}(x).\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ \dots + \ b_1(x).\frac{dy}{dx} + b_0(x).y = g(x)$$

As funções $b_j(x)(j = 0, 1, 2, \dots, n)$ e $g(x)$ supõem-se conhecidas e dependem apenas da variável x. As equações diferenciais que não podem ser postas sob essa forma dizem-se **não lineares**.

EXEMPLO 2:

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \qquad (2.1)$$

É uma EDO de 1ª ordem, onde $b_1(x) = 1$ e $g(x) = 5x + 3$

$$4.\frac{d^3 y}{dx^3} + sen(x).\frac{d^2 y}{dx^2} + 5xy = 0 \qquad (2.2)$$

É uma EDO de 3ª ordem, onde $b_3 = 4, b_2 = sen(x), b_1 = 0, b_0 = 5x \ e \ g(x) = 0$

Enquanto as EDO (2.3)

$$e^y.\frac{d^2 y}{dx^2} + 2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y.\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x$$

Não são lineares.

EXERCÍCIO 3: Nas equações que seguem, classifique cada uma delas quanto a ordem, o grau (quando possível) e a linearidade. Depois determine a função incógnita e a variável independente.

a)

$$y''' - 5xy' = e^x + 1$$

b)

$$s^2.\frac{d^2t}{ds^2} + st.\frac{dt}{ds} = s$$

c)

$$5.\left(\frac{d^4b}{dp^4}\right)^5 + 7.\left(\frac{db}{dp}\right)^{10} + b^7 - b^5 = p$$

d)

$$y.\frac{d^2x}{dy^2} = y^2 + 1$$

SOLUÇÃO DE UMA EDO

DEFINIÇÃO 1: Toda função ϕ, definida em um intervalo I, as quais quando substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem *n* reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma solução da equação diferencial no intervalo.
Em outras palavras, uma solução de uma equação diferencial ordinária de ordem *n* é uma função ϕ que tem pelo menos *n* derivadas e para a qual

$$F\left(x, \emptyset(x), \emptyset'(x), \ldots, \emptyset^{n}(x)\right) = 0 \;\; \forall x \in \mathrm{I}$$

Assim, dizemos que ϕ satisfaz a equação diferencial em I.

EXEMPLO 1: Verifique se a função indicada é uma solução da equação diferencial dada no intervalo $(-\infty, \infty)$.

$y = \frac{1}{16}x^4$ para a EDO: $\frac{dy}{dx} = x.y^{1/2}$.

$y(x) = c_1.sen(2x) + c_2.\cos(2x)$ para a EDO: $y'' + 4y = 0$.

$y = x.e^x$ para a EDO: $y'' - 2y' + y = 0$.

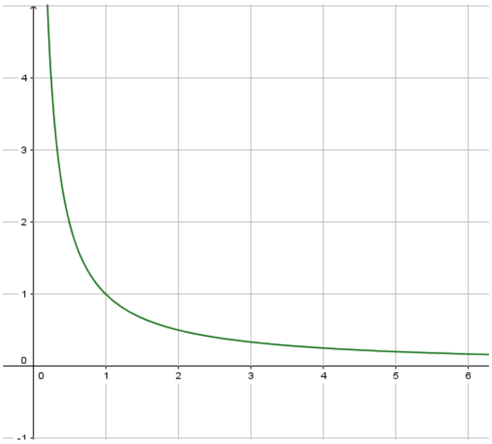
$y = x^2 - 1$ para a EDO: $(y1)^4 + y^2 = -1$

OBSERVAÇÃO 1: Não se pode pensar em solução de uma equação diferencial ordinária sem, simultaneamente, pensar em intervalo. O intervalo I da definição de solução de uma EDO é alternativamente conhecido por intervalo de definição, intervalo de existência, intervalo de validade ou domínio da solução e pode ser um intervalo aberto (a, b), um intervalo fechado $[a, b]$, um intervalo infinito (a, ∞) e assim por diante.

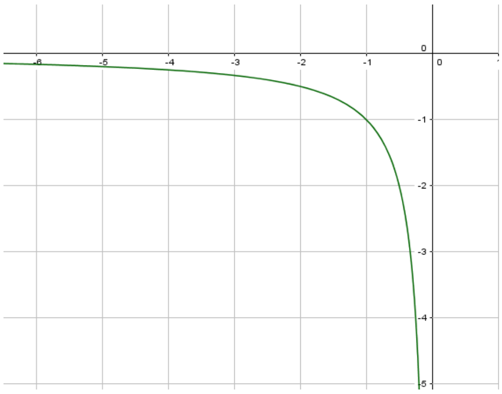
DEFINIÇÃO 2: Um gráfico de uma solução ϕ de uma EDO é chamado de **curva integral.** Uma vez que ϕ é uma solução diferenciável, ela é contínua no seu intervalo de definição I. Assim sendo, pode haver uma diferença entre o gráfico da função ϕ e o gráfico da solução ϕ. Posto de outra forma, o domínio da função ϕ não precisa ser igual ao intervalo I de definição (ou domínio) da solução ϕ.

EXEMPLO 2: Observe a solução ϕ, sendo $y = \frac{1}{x}$ da EDO $x.y' + y = 0$ analisando os seus gráficos:

$$f(x) = \frac{1}{x}, para\ x \in (-\infty, \infty)$$



$$f(x) = \frac{1}{x}, para\ x \in (0, \infty)$$



$$f(x) = \frac{1}{x}, para\ x \in (-\infty, 0)$$

OBSERVAÇÃO 2: Quando a solução na qual a variável dependente é expressa somente em termos da variável independente e das constantes é chamada de **solução explícita**. Como por exemplo, $y = \frac{1}{16}x^4$. Ou seja, a solução é da forma $y = \phi(x)$.

Uma **solução** será **implícita** quando ela for uma relação ou uma expressão $G(x,y) = 0$, que define implicitamente uma solução de ϕ. Como por exemplo, $x^2 + y^2 = 25$.

EXEMPLO 2: Verifique se as funções a seguir são solução da EDO e para aquelas que encontrar resultado positivo, diga se esta solução é explícita ou implícita.

2.1) A função $y = e^x$ para a EDO $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$.

2.2) As funções $y = c.e^{3x}$ e $y = c.\cos(x)$ para a EDO $y' - 3y = 0$..

2.3) A função $y = 1$ para a EDO $y'' + 2y' + y = x$.

2.4) A função$x^2 + y^2 = 25\ onde\{-5, x < 5\}$ para a EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

LISTA DE EXERCÍCIOS nº 1

1- Determine a ordem, a função incógnita e a variável independente em cada uma das seguintes equações diferenciais:

a) $y''' - 5xy' = e^x + 1$

b) $t\ddot{y} + t^2\dot{y} - (sent)\sqrt{y} = t^2 - t + 1$

c) $y\frac{d^2x}{dy^2} = y^2 + 1$

d) $17y^{(4)} - t^6y^{(2)} - 4{,}2y^5 = 3\cos t$

2- Determine para cada uma das equações diferenciais, (a) ordem, (b) grau (se possível), (c) linearidade, (d) função incógnita, (e) variável independente.

a) $(y'')^2 - 3yy' + xy = 0$

b) $x^4y^{(4)} + xy''' = e^x$

c) $t^2\ddot{s} - t\dot{s} = 1 - sent$

d) $y^{(4)} + xy''' + x^2y'' - xy' + seny = 0$

e) $\frac{d^nx}{dy^n} = y^2 + 1$

f) $\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right)^2 + \frac{d^2r}{dy^2} + y\frac{dr}{dy} = 0$

3- Determinar a ordem da equação diferencial, e dizer se a equação é linear ou não:

a) $t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 2y = sent$

b) $\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$

c) $\frac{d^2y}{dt^2} + sen(t + y) = sent$

d) $(1 + y^2)\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = e^t$

e) $\frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$

f) $\frac{d^3y}{dt^3} + t\frac{dy}{dt} + (cos^2t)y = t^3$

4- Verifique se a função, ou as funções dadas, constituem solução da equação diferencial.

a) $y'' - y = 0$ $\quad y(t) = e^t$

b) $y'' + 2y' - 3y = 0$ $\quad y(t) = e^{-3t}$ $\quad y(t) = e^t$

c) $ty' - y = t^2$ $\quad y = 3t + t^2$

d) $y'''' + 4y''' + 3y = t$ $\quad y(t) = t/3$ $\quad y(t) = e^{-t} + t/3$

e) $2t^2y'' + 3ty' - y = 0\,, t > 0$ $\quad y(t) = t^{1/2}$ $\quad y(t) = t^{-1}$

f) $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0,\ \ t > 0$ $\quad y(t) = t^{-2}$

CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM[7]

FORMA PADRÃO E FORMA DIFERENCIAL

A forma padrão de uma equação diferencial de primeira ordem na função incógnita $y(x)$ é

$$y' = f(x, y)$$

Onde a derivada y' aparece apenas no membro esquerdo da equação. Muitas (porém não todas) equações diferenciais de primeira ordem podem ser escritas na forma padrão.

O membro direito pode ser escrito como o quociente de duas outras funções $M(x, y)$ e $-N(x, y)$. Assim, $y' = f(x, y)$ se torna $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{-N(x,y)}$, que equivale à forma diferencial

$$M(x, y).dx = -N(x, y).dy.$$

EXEMPLO 1: Escreva a equação diferencial $xy' - y^2 = 0$ na forma padrão.

EXEMPLO $(y' + y)^5 = sen\left(\frac{y'}{x}\right)$ não pode ser escrita na forma padrão.

EQUAÇÕES LINEARES

Dado uma equação diferencial na forma padrão $y' = f(x, y)$, se $f(x, y)$ puder ser escrita como $f(x, y) = -p(x).y + q(x)$ então a equação diferencial é linear.

Equações diferenciais lineares de primeira ordem podem sempre ser expressas como

$$y' + p(x).y = q(x) .$$

EXEMPLO $y' = (senx).y + e^x$ é linear tendo $p(x) = -senx$ e $q(x) = e^x$.

---

[7] Adaptado de: BRONSON; COSTA, 2008, p. 28, 29.

EXEMPLO 4: $y' = x.sen(y) + e^x$ não é linear, em virtude do termo $sen(y)$.

EXEMPLO 5: $y' = y^2 + x$ não é linear, em virtude da presença do termo y^2.

EQUAÇÕES DE BERNOULLI

Uma equação diferencial de Bernoulli é uma equação da forma

$$y' + p(x).y = q(x).y^n$$

Onde n é um número real.

OBSERVAÇÃO 1: Quando $n = 1$ ou $n = 0$, a equação de Bernoulli se reduz a uma equação linear.

EXEMPLO 6: A equação $y' = 5$ é linear e de Bernoulli tendo $p(x) = 0$ e $q(x) = 5$.

EXEMPLO 7: A equação $y' + x.y^5 = 0$ não é linear devido ao termo y^5, no entanto, é de Bernoulli pois pode ser escrita como $y' = x.y^5$, assim $p(x) = 0$, $q(x) = -x$ e $n = 5$.

EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Uma equação diferencial na forma padrão $y' = f(x,y)$ é homogênea se

$$f(tx,ty) = f(x,y)$$

Para todo número real t.

EXEMPLO 8: Verifique se equação diferencial $y' = \frac{y+x}{x}$ é homogênea.

EXEMPLO 9: Verifique se a equação diferencial $y' = \frac{y^2}{x}$ é homogênea.

EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

Seja uma equação diferencial na forma $M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0$. Se $M(x,y) = A(x)$ (função somente de x) e $N(x,y) = B(y)$ (função somente de y), a equação diferencial se diz separável, ou de variáveis separáveis.

EXEMPLO 10: Verifique se a equação diferencial $\mathrm{sen(x).dx + y^2.dy = 0}$ é separável.

EQUAÇÕES EXATAS

Uma equação diferencial da forma $M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0$ é exata se

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

EXEMPLO 11: Verifique se a equação diferencial $3x^2y.dx + (y + x^3).dy = 0$ é exata.

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 2

1- Escreva a equação diferencial $(ay+3)dx+(2x-y^2+1)dy=0$ na forma padrão.

2- Determine se as seguintes equações diferenciais são lineares:

a) $y` + xy^5 = 0$

b) $y` + xy = e^x y$

c) $y` + \frac{x}{y} = 0$

3- Determine se as equações diferenciais são equações de Bernoulli:

a) $xy` + y = \sqrt{y}$

b) $y` + \frac{x}{y} = 0$

4- A equação diferencial $y` = \frac{x^2+y}{x^3}$ é homogênea?

5- A equação diferencial $xy^2dx - x^2y^2dy = 0$ é separável?

6- A equação diferencial $xydx + y^2dy = 0$ é exata?

7- As equações diferenciais abaixo são separáveis e/ou exatas?

a) $y` = xy + 1$

b) $y` = xy$

c) $-x^2dx + y^2dy = 0$

d) $xy^2dx + (x^2+y^2)dy = 0$

SOLUÇÃO DE EDO SEPARÁVEL

A solução de uma equação diferencial de primeira ordem separável

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é

$$\int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy = \mathrm{c}$$

Onde c representa uma constante arbitrária.

OBSERVAÇÃO 1: Essas integrais nem sempre podem ser calculadas efetivamente.

EXEMPLO 1: Solucione $xdx - y^2dy = 0$.

EXEMPLO 2: Solucione $y^{'} = y^2x^3$.

OBSERVAÇÃO 2: A solução para o problema de valor inicial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, y(x_0) = y_0$ pode ser obtida usualmente e depois deve ser aplicado a condição inicial diretamente para determinar a constante c.

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 3

1- Encontre a solução das equações diferenciais abaixo:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2}{y}$

b) $y` = \frac{x+1}{y^4+1}$

c) $xdx + ydy = 0$

d) $dx + \frac{1}{y^4}dy = 0$

e) $xdx - y^3dy = 0$

f) $(t+1)dt - \frac{1}{y^2}dy = 0$

g) $\frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy = 0$

2- Determine a solução das equações diferenciais com problemas de valor inicial:

a) $x^2dx + 8ydy = 0 \qquad y(2) = 1$

b) $3xdx - ydy = 0 \qquad y(6) = 0$

Solução de EDO Exata

TEOREMA: Se $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é uma equação diferencial exata, então existe uma função F de x e y, tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \ e \ \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

TEOREMA: Uma equação diferencial exata $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tem uma solução da forma $F(x,y) = c$, onde c é uma constante e F é uma função de x e y, tal que $F_x = M$ e $F_y = N$.

EXEMPLO 1: Resolva a equação diferencial
$(3x^2y - 2y^3 + 3)dx + (x^3 - 6xy^2 + 2y)dy = 0$

EXEMPLO 2: Determine se a EDO $2xydx + (1 + x^2)dy = 0$ é exata, em caso positivo resolva-a.

EXEMPLO 3: Resolva a EDO $(x + seny)dx + (x\cos y - 2y)dy = 0$

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 4

1- Determine se as equações diferenciais ordinárias abaixo são exatas, em caso positivo, encontre a solução.

a) $(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0$

b) $y^2dt + (2yt + 1)dy = 0$

c) $ydx - xdy = 0$

d) $(2x + y)dy + (2y + x)dy = 0$

e) $(x^2 + 2xy - y^2)y` = -y^2 - 2xy + x^2$

2- Determine a solução da equação diferencial ordinária com problema de valor inicial.

$(2xy^3 + 8x)dx + (3x^2y^2 + 5)dy = 0 \qquad y = -1 \;\; para\ x = 2$

FATORES INTEGRANTES

Em geral, a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ não é exata. Por vezes, entretanto, é possível transformá-la em uma equação diferencial exata, mediante a multiplicação de um fator adequado, o fator integrante.

DETERMINAÇÃO DO FATOR INTEGRANTE

Conhecem-se fatores integrantes quando $M(x,y)$ e $N(x,y)$ satisfazem certas condições:

Se $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(x)$ (função somente de x), então

$$I(x,y) = e^{\int g(x)dx}$$

Se $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = h(y)$ (função somente de y), então

$$I(x,y) = e^{-\int h(y)dy}$$

EXEMPLO 1: Resolva $(y^2 - y)dx + xdy = 0$

EXEMPLO 2: Resolva a equação diferencial ordinária $(y + 1)dx - xdy = 0$

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 5

1- Determine a solução das Equações Diferenciais Ordinárias abaixo:

a) $y' + 3x^2 y = 0$

b) $ydx + (1-x)dy = 0$

c) $y' - 3x^4 y = 0$

d) $2xydx + y^2 dy = 0$

e) $y' + x^2 y = x^2$

2- Encontre o fator integrante das seguintes Equações Diferenciais:

a) $(3x^2 y - x^2)dx + dy = 0$

b) $y' + \frac{2}{x} y = 0$

c) $y' - 7y = 14x$

d) $xy^2 dx + (x^2 y^2 + x^2 y)dy = 0$

e) $(y + x^3 + xy^2)dx - xdy = 0$

SOLUÇÃO DE EDO LINEAR

Uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem tem a forma

$$y' + P(x)y = q(x)$$

Um fator integrante para esse tipo de equação é:

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Que depende apenas de x, sendo independente de y. Quando multiplicarmos ambos os membros da EDO por $I(x)$, a equação resultante

$$y'.I(x) + P(x)y.I(x) = q(x).I(x)$$

se torna exata.

EXEMPLO 1: Resolva a EDO $y' - 3y = 6$

OBSERVAÇÃO: Após algumas operações na EDO linear com seu fator integrante obtemos a solução

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int q(x).e^{\int P(x)dx}dx + c\right]$$

EXEMPLO 2: Encontre a solução da EDO $y' - 2xy = x$

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 6

Determine a solução das Equações Diferenciais Ordinárias abaixo:

a) $y' - 3y = 6$

b) $y' - 2xy = x$

c) $y' + \frac{4}{x}y = x^4$

d) $y' + y = senx$

e) $y' - 5y = 0$

SOLUÇÃO DE EDO DE BERNOULLI

Uma equação diferencial de Bernoulli tem a forma

$$y' + P(x)y = q(x).y^n$$

Onde n é um número real. Neste caso devemos fazer a substituição $z = y^{1-n}$, que transforma a equação diferencial em uma equação diferencial linear e função da incógnita $z(n)$.

EXEMPLO 1: Encontre a solução de $y' + xy = xy^2$.

EXEMPLO 2 Encontre a solução da EDO $y' = xy^3$.

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 7

Determine a solução das Equações Diferenciais Ordinárias abaixo:

a) $y' + y = y^2$

b) $y' + \ y = y^2 e^x$

c) $y' + y = y^{-2}$

d) $y' + xy = xy^2$

e) $y' - \frac{3}{4}y = x^4 y^{1/3}$

SOLUÇÃO DE EDO HOMOGÊNEA

Uma equação diferencial na forma padrão $y' = f(x,y)$ é homogênea se $f(tx,ty) = f(x,y)$ para todo número real t.

Para equações homogêneas também devemos usar uma substituição fazendo $y = ux$ ou $u = \frac{y}{x}$ com $y' = u'x + u$ o que transformará a equação em uma EDO separável de incógnita u.

EXEMPLO 1: Encontre a solução de $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$.

EXEMPLO 2: Encontre a família de soluções de $2ydx - xdy = 0$.

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 8

Determine a solução das Equações Diferenciais Ordinárias abaixo:

a) $y' = \frac{x+y}{x}$

b) $y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{2x-y}$

d) $y' = \frac{x^2-3y^2}{2xy}$

e) $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$

RITALINA NO ORGANISMO[8]

O cloridrato de metilfenidato que é da família das anfetaminas disponível no mercado sob a forma de cápsulas, é muito indicado para crianças e adultos, principalmente em idade escolar, que são detectados portadores de Transtorno de Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH).

Ritalina é o nome comercial de um medicamento no qual cada cápsula contém 10 mg de metilfenidato. Médicos neurologistas, de forma geral, receitam para crianças de 6 anos um comprimido de 10 mg de ritalina duas vezes por dia. Esse tratamento pode se estender até a adolescência, ou até mesmo à fase adulta. Na fase adulta a posologia do medicamento é alterada.

Segundo informações da bula do medicamento, o metilfenidato é eliminado do plasma com meia-vida média de 2 horas, ou seja, a cada duas horas o efeito químico do medicamento reduz-se pela metade.

Na atividade, o que se pretende investigar é a concentração do medicamento no organismo de crianças de 6 anos que recebem a posologia na qual a cada 12 horas ingere um novo medicamento.

Problemas:

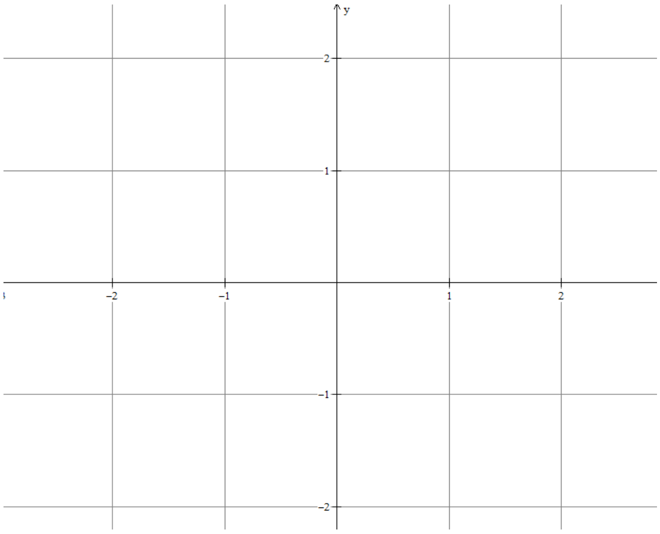
Qual a concentração do medicamento, com o passar do tempo, ao se ingerir 1 comprimido de 10 mg? Quando ele praticamente vai sumir do organismo?

Qual a concentração do medicamento no organismo em determinado tempo, tomando 1 comprimido de 10 mg a cada 12 horas?

[8] Adaptado de: SILVA, 2017.

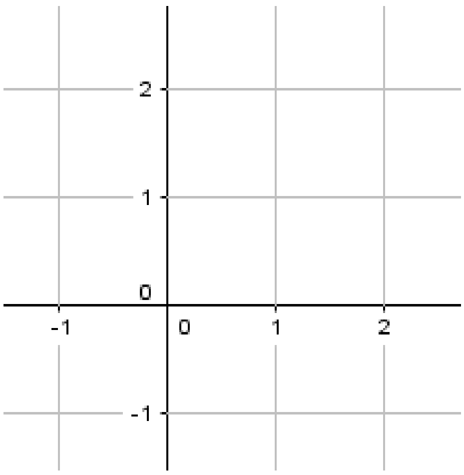
CAMPO DE DIREÇÕES

EXERCÍCIO 1: Esboce, no plano quadriculado abaixo, a inclinação da reta tangente à equação diferencial $y' = 2y - x$ nos pontos $(1,1);\ (1,2);\ (2,1);\ (2,2);\ (1,-1);\ (-2,-1)$.



EXERCÍCIO 2: A partir, do que você pode observar sobre os valores da reta tangente no exercício anterior, esboce a inclinação da reta tangente à equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x - y$, no plano quadriculado, para os pontos (-1,-1); (0,-1); (1,-1);(2,-1); (-1,0); (0,0); (1,0); (2,0); (-1,1); (0,1); (1,1); (2,1); (-1,2); (0,2); (1,2); (2,2). E anote se você percebe alguma relação entre os pontos e as suas inclinações.

(x, y)	$\frac{dy}{dx} = x - y$



Agora, utilizando o *software* GeoGebra a partir do Link: https://ggbm.at/xnUGM9sC , insira a equação diferencial $f'(x) = x^2$ no campo f(x,y), deixando o campo “visualizar EDO” marcado e o campo “visualizar a solução da EDO” desmarcado. Analise as informações que aparecem movimentando os controles deslizantes e responda às questões propostas.

Descreva o que os cursores (controles deslizantes) a, A, b, B, n fazem/alteram na tela do programa.

O que o desenho tracejado representa?

Você percebe alguma relação entre o desenho tracejado e a EDO? Comente.

Agora marque o campo “visualizar a solução da EDO” para responder às perguntas que seguem:
Você percebe alguma relação entre a EDO e a sua solução? Comente.

Você percebe alguma relação entre o desenho tracejado e a solução da EDO?

Manipulando o controle deslizante K, você percebe em que ele influencia? O que ele representa?

Clicando com o botão direito do mouse sobre a curva visível na primeira janela, selecione a opção “habilitar rastro”, após movimente o controle K e interprete o que é exibido na primeira janela.

Agora, realize a mesma atividade explorando as Equações Diferenciais abaixo e faça suas novas considerações, sem apagar o que você já anotou anteriormente, tentando reunir as informações encontradas a partir da análise de mais de uma EDO.

$f'(x) = x^2 + 2$

$f'(x) = x^2 + 2x + 5$

$f'(x) = sen(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

O que o desenho tracejado representa?

Você percebe alguma relação entre o desenho tracejado e a EDO? Comente.

Agora marque o campo “visualizar a solução da EDO” para responder às perguntas que seguem:

Você percebe alguma relação entre a EDO e a sua solução? Comente.

Você percebe alguma relação entre o desenho tracejado e a solução da EDO?

Manipulando o controle deslizante K, você percebe em que ele influencia? O que ele representa?

Clicando com o botão direito do mouse sobre a curva visível na primeira janela, selecione a opção “habilitar rastro”, após movimente o controle K e interprete o que é exibido na primeira janela.

EXERCÍCIO 2: Relembrando as Equações Diferenciais que foram sistematizadas nas atividades de Modelagem Matemática sobre “Estudo da obesidade como fator de risco da Diabetes tipo 2” e “Ritalina no organismo” represente-as no *software* GeoGebra e tente caracterizar algumas relações entre a atividade realizada anteriormente e o traçado das retas tangentes à curva em pontos específicos.

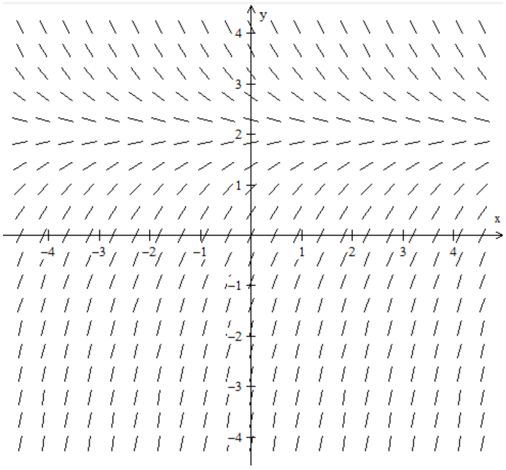
EXERCÍCIO 3: Observando o comportamento das equações diferenciais dadas abaixo, relacione-as com o seu respectivo campo de direções. Justifique sua resposta.

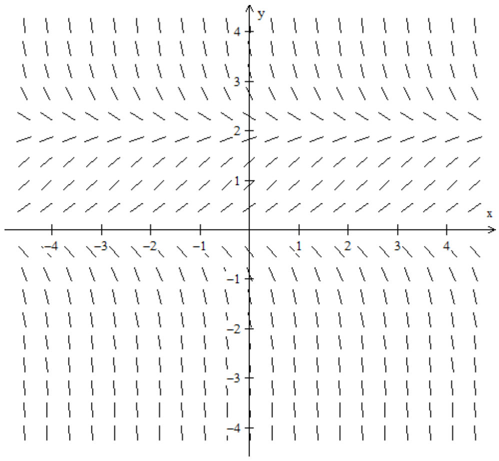
$$\frac{dy}{dx} = 2 - y$$

(   )

$$\frac{dy}{dx} = y.(2 - y)$$

(   )





Justificativa:

Uma das maneiras de analisarmos equações diferenciais é a partir de métodos qualitativos, ou seja, utilizando técnica que são aplicadas quando soluções analíticas são difíceis de serem obtidas.

Métodos gráficos permitem grafar soluções de equações diferenciais de primeira ordem da forma

$$y' = f(x, y)$$

Onde a derivada aparece apenas no membro esquerdo da equação.[9]

Esta equação define o coeficiente angular da curva solução $y(x)$ em um ponto arbitrário (x, y) do plano. Um **elemento linear** é um pequeno segmento de linha que se inicia no ponto (x, y) e possui um coeficiente angular especificado por $y' = f(x, y)$. Ele representa uma aproximação da curva solução que passa por aquele ponto. Uma coleção de elementos lineares é um **campo direcional**.

Visualmente, o campo de direções sugere a aparência ou forma de uma família de curvas integrais de equação diferencial e, consequentemente, pode ser possível vislumbrar determinados aspetos qualitativos das soluções – por exemplo, regiões do plano nas quais uma solução exibe um comportamento não usual. Uma única curva integral que segue seu caminho em um campo de direções deve acompanhar o padrão de fluxo do campo; ela é tangente a um elemento linear quando intercepta um ponto da malha.

EXEMPLO 1: A figura 1 foi obtida usando o *software Winplot* e mostra um campo de direções para $\frac{dy}{dx} = 0{,}2xy$. Observe que em qualquer ponto ao longo do eixo $x\ (y = 0)$ e do eixo $y\ (x = 0)$ as inclinações são $f(x, 0) = 0$ e $f(0, y) = 0$, respectivamente, de tal forma que os elementos lineares são horizontais. Além disso, observe no primeiro quadrante que, para um valor fixo de x, os valores de $f(x, y) = 0{,}2xy$ crescem à medida que y cresce; da mesma forma, para um valor fixo de y, os valores de $f(x, y) = 0{,}2xy$ aumentam à medida que x aumenta. Isso significa que, quando x e y aumentam, os elementos lineares ficam quase verticais e têm inclinação positiva $(f(x, y) = 0{,}2xy > 0\ para\ x > 0, y > 0)$.

---

[9] Adaptado de: BRONSON, 2008, p. 171.

No segundo quadrante, $|f(x,y)|$ aumenta à medida que o $|x|$ e y aumentam e, portanto, os elementos lineares novamente ficam quase verticais, mas têm inclinação negativa $(f(x,y) = 0{,}2xy < 0 \; para \; x < 0, y > 0)$. Olhando da esquerda para a direita, imagine uma curva integral que comece em um ponto no segundo quadrante, move-se abruptamente para baixo, torna-se achatada quando passa pelo eixo y e daí se move abruptamente para cima à medida que entra no primeiro quadrante – em outras palavras, tem um formato côncavo para cima semelhante a uma ferradura. Disso tudo pode-se presumir que $y \to \infty$ quando $x \to \pm\infty$.

Agora no terceiro e quarto quadrante, uma vez que $f(x,y) = 0{,}2xy > 0$ e $f(x,y) = 0{,}2xy < 0$, respectivamente, a situação é inversa; uma curva integral cresce e depois decresce à medida que vamos da esquerda para a direita. Alguns gráficos representativos de membros da família de soluções dessa equação diferencial são apresentados na Figura 2 e permitem uma comparação com a Figura 1.

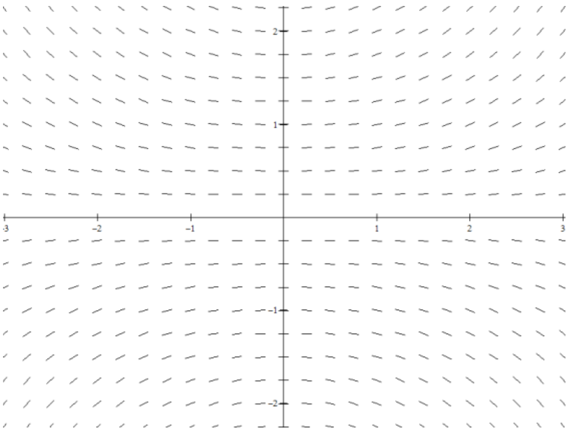


Figura 1

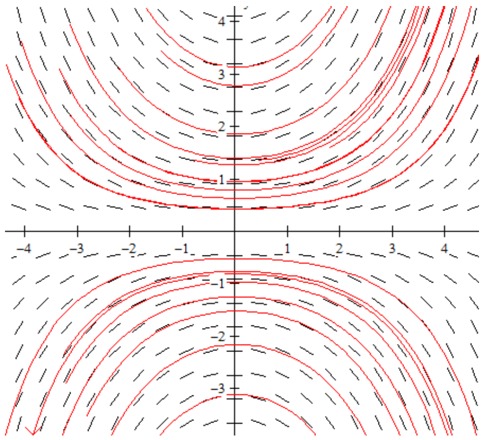


Figura 2

É POSSÍVEL AFIRMAR O HORÁRIO DA MORTE DE UMA PESSOA COM PRECISÃO?[10]

Você provavelmente já viu, em filmes ou seriados, um médico dizer, com voz austera: "hora da morte: 15h02". Segundo o legista Dionísio Andreoni, o tempo de morte pode ser calculado pela comparação da temperatura do cadáver com a temperatura do ambiente ou pela composição química de alguns dos tecidos do corpo, especialmente do humor vítreo, parte interna do olho. Ainda assim, não será dada com uma precisão de minutos.

No dia 30/05/12 na cidade de Ji-Paraná/RO, ocorreu um homicídio de um homem de 38 anos, causado por arma de fogo. A chegada da perícia ocorreu às 19h45min, sendo medida a temperatura do cadáver que apresentava temperatura corporal de 36,3°C, às 20h45min o corpo estava com 35,4°C. Considerando que e a temperatura ambiente no dia era de 30°C, qual seria o procedimento adotado por você para prever o horário da morte deste homem.

[10] As informações foram baseadas em: https://www.terra.com.br/noticias/educacao/infograficos/vc-sabia-morte/morte-02.htm e em BARRETO, 2012

Movimento Uniforme

Após análise do filme Trilho de Ar[11], através do *software* de videoanálise[12] Tracker, determine a equação horária da posição do corpo em relação ao tempo.

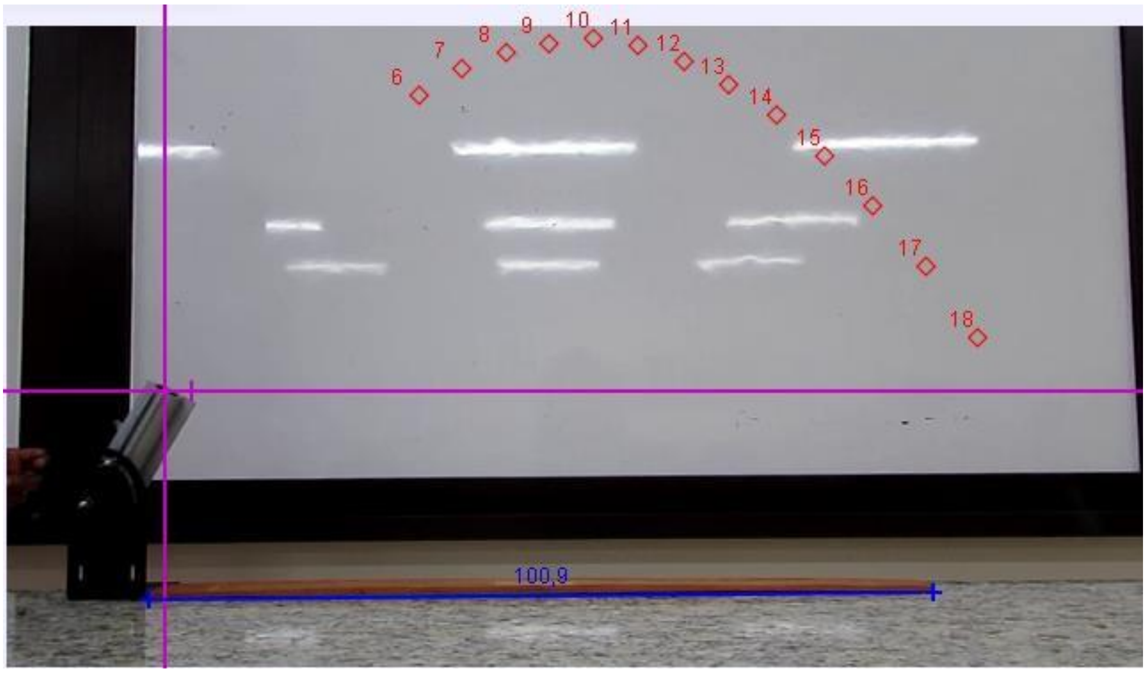
[11] https://youtu.be/9jYJjEHN_oc

[12] Segundo Martins (2013) em um experimento com videoanálise "um experimento é realizado em frente a uma câmera digital convencional com capacidade de filmar toda a ação realizada, e esse vídeo contendo informações espaciais e temporais é transferido para o computador. [...] O vídeo é analisado quadro a quadro, de tal forma que é possível obter dados como velocidades, acelerações, movimentos oscilatórios harmônicos e anarmônicos, colisões, rotações, etc."

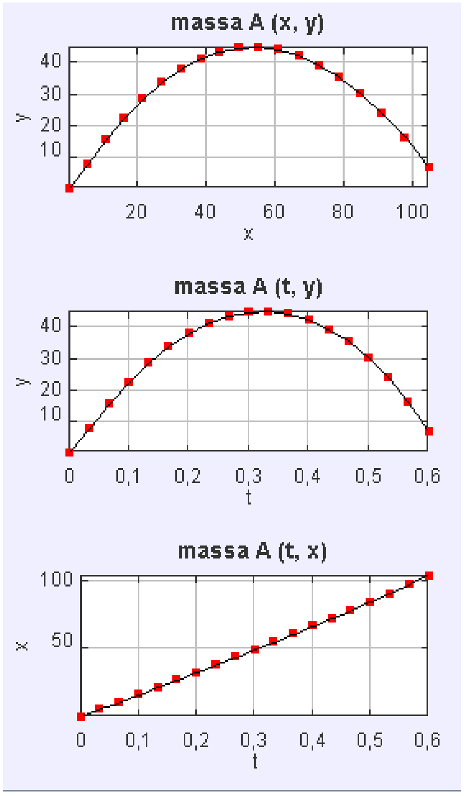
AVALIAÇÃO FINAL

ATIVIDADE 1: Após assitir ao vídeo “Lançamento Oblíquo[13]”, responda aos questionamentos abaixo justificando suas respostas.

Quando colocado no programa Tracker, o vídeo “Lançamento Oblíquo” é representado pela foto abaixo. O movimento, neste caso, acontece em dois eixos, x e y.



[13] https://youtu.be/zPOUNSXzN58



A análise desse movimento gera três gráficos, eles estão representados na esquerda.

Qual é o tipo de movimento de cada eixo?

Expresse esses movimentos na forma de equações diferenciais ordinárias.

Identique a ordem de cada uma dessas equações.

t	x	y
0	0,002	0,052
0,033	5,395	7,629
0,067	10,532	15,462
0,1	15,926	22,397
0,133	21,448	28,561
0,167	26,97	33,955
0,2	32,62	38,064
0,234	38,271	41,403
0,267	43,793	43,586
0,3	49,315	44,742
0,334	55,094	45,256
0,367	60,873	44,357
0,4	66,78	42,431
0,434	72,559	39,348
0,467	78,595	35,496
0,5	84,759	30,231
0,534	91,052	23,81
0,567	97,73	16,104
0,601	104,408	6,858

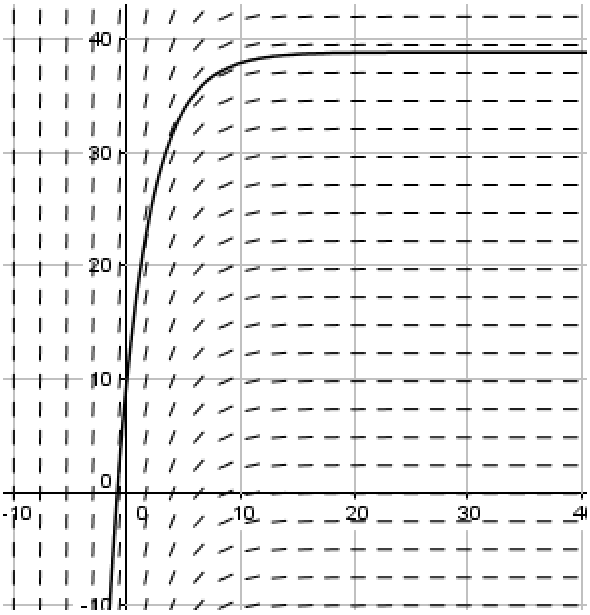
Os dados obtidos por meio do programa estão apresentados no quadro ao lado. A partir das equações diferenciais encontradas no exercício anterior, escreva a função horária da posição em relação ao tempo para o eixo x e para o eixo y.

Qual foi o alcance do projétil?

ATIVIDADE 2: Defina o que é um problema de valor inicial e dentre as diferentes atividades desenvolvidas na disciplina identifique ao menos três situações que envolvam problemas de valor inicial e diga quais foram esses valores iniciais.

ATIVIDADE 3: As equações diferenciais ordinárias podem também ser representadas por um campo de direções.

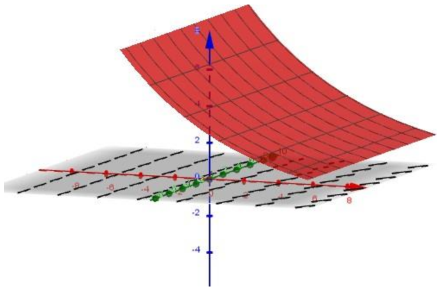
Umas das primeiras atividades realizadas na disciplina de EDO foi a “Ritalina no Organismo”, esta atividade foi analisada em sala de aula e resultou em uma equação diferencial, o campo de direção dessa equação diferencial está representado abaixo.



Observando esse campo de direção, responda:

O que a curva mais escura representa na situação?

O que representa a intersecção entre a curva mais escura e o eixo y?



ATIVIDADE 4: Utilizando o objeto de aprendizagem sobre campo de direções que foi disponibilizado no email da turma, responda as questões abaixo sobre a modelagem realizada em sala de aula sobre o horário da morte de uma pessoa.

Qual foi o modelo matemático obtido para essa situação?

Represente esse modelo matemático no arquivo do objeto de aprendizagem (GeoGebra) e salve-o no *pendrive* da pesquisadora com o nome de todos os integrantes da sua equipe.

Este modelo matemático pode ser utilizado apenas para alguns valores em um certo intervalo. Qual seria um possível intervalo para esses valores?

Na situação estudada a temperatura é uma das variáveis. Indique se ela é a variável dependente ou independente.

Para este caso específico a temperatura estabiliza? Em caso positivo, qual o valor da estabilidade? Por quê?

Onde essa possível estabilidade está representada graficamente e como no modelo é possível identificá-la?

REFERÊNCIAS

BARRETO, C. B. A. C. **Equações Diferenciais Aplicadas na Definição da Hora da Morte de um indivíduo e Estimativa Populacional da Arara-azul-de-lear.** 2012. 31f. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Rondônia, Ji-paraná.

BASSANEZZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução de Horacio Macedo. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

BORSSOI, A. H. **A Aprendizagem Significativa e, Atividades e Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino.** 2004. 140 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

BRONSON, R. COSTA, G. **Equações Diferenciais**. Tradução Fernando Henrique Silveira. 3. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

JAVARONI, S. L. **Possibilidades para o Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias: Abordagem Geométrica**. Disponível em: www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Comunicacao.../CC14946729879T.doc. Acesso em: 07 /07/2016.

MARTINS, M. M. et al. Proposta de ensino interdisciplinar de química e Ciências com o software Osp Tracker. **Encontro de Debates sobre o Ensino de Química**. n. 33, 2013. Disponível em: https://www.publicacoeseventos.unijui.edu.br/index.php/edeq/article/view/2783/2357 Acesso: 10/01/2018.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, c1999.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa: a teoria e textos complementares**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MOREIRA, M. A. Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas-UEPS. **Aprendizagem Significativa em Revista**, Porto Alegre, v. 2, n. 1, p.43-63, ago. 2011. Quadrimestral. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID10/v1_n2_a2011.pdf. Acesso: 15/05/2017.

SILVA, K. A. P. Aspectos cognitivos em aulas com Modelagem Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. **Experiências em Ensino de Ciências**, v. 12, n. 2, p. 156-170, abr. 2017. Disponível em: http://if.ufmt.br/eenci/artigos/Artigo_ID355/v12_n2_a2017.pdf Acesso: 26/12/2017.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. Tradução Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Pioneira Thomson Learning 2003.