UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TALITA BRESCHILIARE PIFFER FREIRE

UMA UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA PARA O ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

DISSERTAÇÃO

LONDRINA

2017

TALITA BRESCHILIARE PIFFER FREIRE

UMA UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA PARA O ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Profa. Dra. Adriana Helena Borssoi

LONDRINA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

F866u Freire, Talita Breschiliare Piffer
Uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de equações diferenciais ordinárias / Talita Breschiliare Piffer Freire. - Londrina : [s.n.], 2017.
187 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Adriana Helena Borssoi.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Londrina, 2017.
Bibliografia: f. 170-175.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Aprendizagem. 3. Equações diferenciais ordinárias. 4. Modelos matemáticos. I. Borssoi, Adriana Helena, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Cristina Benedeti Guilhem - CRB: 9/911

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Ponta Grossa

Nome da Diretoria
Nome da Coordenação
Nome do Curso

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

TERMO DE APROVAÇÃO

UMA UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA PARA O ESTUDO DE EQUAÇÃOES DIFERENCIAS ORDINÁRIAS

por

TALITA BRESCHILIARE PIFFER FREIRE

Esta Dissertação foi apresentada em 01 de Dezembro de 2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

____
Adriana Helena Borssoi
Profa. Orientadora

____
Lourdes Maria Werle de Almeida
Membro titular

____
Karina Alessandra Pessoa da Silva
Membro titular

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Agradeço com muito carinho a meu marido e minhas filhas pela compreensão nos momentos de ausência. Dedico este trabalho à toda minha família pelo auxílio que todos dispuseram em me ajudar.

AGRADECIMENTOS

Certamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço a minha orientadora, Profa Dra Adriana Helena Borssoi, pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória, pela oportunidade de trabalhar ao seu lado, por acreditar e valorizar a profissão de professor de Matemática, por confiar na minha capacidade, pela amizade, cuidado e, sobretudo, sua paciência em todos os momentos. Muito obrigada!

Às professoras Lourdes Maria Werle de Almeida e Karina Alessandra Pessoa da Silva que aceitaram compor minha banca de qualificação e defesa, pelas sugestões e análises significativas.

À professora Simone Luccas, por ter participado da minha banca de qualificação e pela contribuição na orientação quanto ao processo de análise por meio da Análise Textual Discursiva.

Em especial às professoras Karina Alessandra Pessoa da Silva e Elaine Cristina Ferruzzi, pelas contribuições no Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática, Investigação Matemática e Tecnologias (GEPMIT), assim como meus colegas de estudo no grupo.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) Câmpus Londrina, por me oportunizar um aperfeiçoamento gratuito e de excelência.

À todos os professores do PPGMAT, pelo incentivo e dedicação prestados nesta caminhada e a Secretaria do Curso, pela cooperação.

Aos meus colegas de sala, pelos momentos que passamos juntos.

À Secretaria de Educação do Estado do Paraná, pela oportunidade de aperfeiçoamento através da licença de estudo a mim concedida.

À Faculdades Integradas do Vale do Ivaí por ter me concedido a permissão de realizar minha pesquisa na instituição.

À turma do sexto semestre de Licenciatura em Matemática das Faculdades Integradas do Vale do Ivaí 2016, por ter me concedido a honra de trabalhar com vocês e de poder analisar todas as suas produções.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha família, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Ao meu marido, Hélio da Silva Freire Júnior, meu porto seguro, companheiro de todas as horas, exemplo de ser humano. Pela compreensão, respeito, tolerância, empenho, por presentear-me com a família que sempre sonhei e por todas as atitudes que o faz merecedor de meu amor.

Às minhas filhas, Lavínia Piffer Freire e Lívia Piffer Freire, que tanto amo, que sempre estão em primeiro lugar em minha vida, pela compreensão de não ter a mamãe em muitos momentos nestes dois últimos anos.

Aos meus pais, Aparecida Breschiliare Piffer e José Roberto Canonicci Piffer, pelo exemplo de dignidade e perseverança, pela confiança na minha capacidade e sólida formação que me proporcionou a continuidade nos estudos até a chegada a este mestrado, pelo apoio nos momentos difíceis e auxílio no cuidado com as netas. Meus eternos agradecimentos.

A toda a minha família e a família de meu esposo, que muito me auxiliaram para que eu pudesse demandar tempo aos meus estudos. Muito Obrigada.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isso: O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos.

(AUSUBEL, David, 1980)

RESUMO

FREIRE, Talita Breschiliare Piffer. **Uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias.** 2017. 187. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2017.

Esta dissertação é resultado de uma pesquisa que objetivou propor, implementar e analisar uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias no contexto de uma turma do sexto semestre de um curso de Licenciatura em Matemática. A unidade de ensino constitui o Produto Educacional vinculado à pesquisa, o qual associa o uso de recursos tecnológicos, assim como atividades de Modelagem Matemática como parte das atividades componentes do material. Assim, os referenciais teóricos deste trabalho remetem a Teoria da Aprendizagem Significativa concebida por David Ausubel, onde a proposta de Unidades de Ensino Potencialmente Significativa está alicerçada. Além disso, discute alternativas pedagógicas como a Modelagem Matemática e o uso de Tecnologia no Ensino de Matemática, em especial, na estruturação da UEPS. Os dados que compõem o *corpus* de análise consistem em registros produzidos pela pesquisadora e pelos alunos decorrentes da implementação da referida unidade de ensino em uma disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. As análises dos dados fundamentam-se na metodologia qualitativa da Análise Textual Discursiva e tiveram a contribuição do *software* de análise qualitativa ATLAS TI 8.0 durante o processo de desmontagem dos textos e de estabelecimento de relações. Neste processo foram identificadas três categorias de análise (Modelagem Matemática, Recursos Tecnológicos e Aprendizagem Significativa) que permitiram identificar evidências sobre a Aprendizagem Significativa dos alunos e a concluir que a proposta se consolidou como uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa exitora, no sentido considerado na literatura que a fundamenta.

Palavras-chave: Unidade de Ensino Potencialmente Significativa. Ensino de Matemática. Equações Diferenciais Ordinárias. Modelagem Matemática. Tecnologias.

ABSTRACT

FREIRE, Talita Breschiliare Piffer. **A Potentially Meaningful Teaching Unit for the study of Ordinary Differential Equations**. 2017. 187. Dissertation (Master's Degree in Mathematics Education) - Federal Technology University - Parana. Londrina, 2017.

This dissertation is the result of a research that aimed to propose, implement and analyze a Potentially Meaningful Teaching Unit (PMTU) for the study of Ordinary Differential Equations in the context of a sixth semester class of a Mathematics Degree course. The teaching unit is the Educational Product linked to the research, which associates the use of technological resources, as well as Mathematical Modeling activities as part of the component activities of the material. Thus, the theoretical references of this work refer to the Theory of Meaningful Learning proposed by David Ausubel, where the proposal of Potentially Meaningful Teaching Units is based. In addition, it discusses pedagogical alternatives such as Mathematical Modeling and the use of Technology in Teaching Mathematics, especially in the structure of the PMTU. The data that composes the analysis corpus consists of records produced by the researcher and the students resulting from the implementation of the referred unit of teaching in a discipline of Ordinary Differential Equations. The analysis of the data is based on the qualitative methodology of Discursive Textual Analysis and had the contribution of the qualitative analysis software ATLAS TI 8.0 during the process of disassembling the texts and establishing relations. In this process, three categories of analysis (Mathematical Modeling, Technological Resources and Meaningful Learning) were identified that allowed to identify evidences about the Meaningful Learning of the students and to conclude that the proposal was consolidated as a successfull Potentially Meaningful Teaching Unit, in the sense considered in the literature which supports it.

Keywords: Potentially Meaningful Teaching Unit (PMTU), Ordinary Differential Equations, Mathematical Modeling, Mathematical Teaching, Technology.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

ATD	Análise Textual Discursiva
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
IMC	Índice de Massa Corporal
IML	Instituto Médico Legal
UEPS	Unidade de Ensino Potencialmente Significativa

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa parte da experiência da pesquisadora, atuando como professora de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) do curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade privada, em problematizar a sua dificuldade em desenvolver os conceitos relacionados com as EDO no Ensino Superior, a partir de suas vivências.

Com base na inquietação da pesquisadora, percebemos que o formato da disciplina mencionada para o curso de licenciatura permite aos professores uma forma particular de se trabalhar, tendo em vista que a ementa considera que a disciplina deve apresentar e estudar os conceitos e propriedades das Equações Diferenciais Ordinárias conhecendo resultados importantes desta teoria e aplicando-os em outras áreas da Matemática. O que possibilitou um ambiente propício, observando que estamos preocupados com a formação do licenciado, e que em um curso de licenciatura é importante que os futuros professores vivenciem diferentes perspectivas de ensino no contexto da Educação Matemática.

Considerando que, na instituição de ensino em que atuamos há apenas a disciplina de Tópicos em Educação Matemática voltada para o estudo dos temas de Educação Matemática, de forma geral e teórica, e que não há disciplinas específicas sobre tendências em Educação Matemática, pensamos em realizar uma ação a favor da vivência de diferentes perspectivas em Educação Matemática na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. Pois, entendemos que é importante que os alunos possam conhecê-las do ponto de vista de aluno, docente em formação, para que se sinta familiarizado de modo a utilizar tais perspectivas em suas práticas docentes futuras.

Em um contexto escolar, seja ele uma sala de aula regular ou um ambiente não formal de ensino, o conteúdo a ser ensinado pode ser apresentado ao aluno de diferentes formas, quer pelo uso de um livro didático, através da explicação e cópia por parte dos alunos ou até mesmo como uma videoaula. Interessados em estudar uma maneira na qual seja possível apresentar ao aluno um material que possa evidenciar relevância para o estudante e para o próprio professor, fomos buscar fundamentação teórica nas áreas de Ensino e Educação Matemática.

O uso de materiais curriculares, entendidos como materiais que além dos projetados para os estudantes devem conter materiais de apoio complementares para os professores (BARBOSA; OLIVEIRA, 2014) tem sido desafiador. Segundo Ball e Cohen (1996), existem três razões pelas quais os materiais curriculares desempenham um papel desigual na prática dos professores, entre elas:

1) As pessoas que desenvolvem os materiais curriculares não consideram o professor em sua prática educativa, ignorando a necessidade do professor em aprender a utilizar os materiais curriculares;

2) Os materiais são formulados de maneira substancial, o que implica em uma necessidade de orientação muito grande, favorecendo que os professores selecionem e adaptem o material a ser utilizado;

3) Existe uma idealização de que um bom professor é aquele que não segue o material educativo, assim uma grande parte dos professores repudia o material curricular, não o utilizando, pois considera que o material limita e controla o conhecimento e o ensino.

Consideramos que, se os materiais curriculares fossem criados com uma atenção maior, os mesmos poderiam contribuir para o crescimento educacional do aluno e para a prática do professor. Para isso o desenvolvimento dos materiais curriculares deveria ser pautado na apresentação do conteúdo e no ensino. Na literatura, os materiais curriculares desenvolvidos para apoiar a aprendizagem de aluno e professor são denominados “materiais curriculares educativos” (SCHNEIDER; KRAJCIK, 2002; REMILLARD, 2005, apud BARBOSA; OLIVEIRA, 2014).

Esses materiais devem apresentar, além da versão voltada ao aluno, um suporte para o professor, seja ele na forma de um relato, de um vídeo, instruções ou da narrativa de uma aula. Esta sustentação do material voltado para o professor pode oferecer ao professor novas abordagens e possibilidades de organização das aulas.

Observando a proposta de um material curricular educativo, surgiu, então, a oportunidade de realizar um trabalho diferenciado para o ensino de EDO, não baseado apenas em técnicas de resolução,

> Conforme afirma Hubbard (1994), em acordo com nossa prática docente, conhecemos as técnicas de resolução analítica para um número bastante

> reduzido de EDO. De fato, a maioria dos problemas a serem modelados por tais equações não apresenta resolução analítica. O interessante é que, mesmo nestas condições, na disciplina de EDO, em geral, enfatizamos justamente as técnicas de resolução algébricas, sem ressaltar que são apenas alguns tipos de EDO com as quais podemos lidar analiticamente (SOARES; JAVARONI, 2013, p. 202).

A ênfase dada às técnicas de resolução era um forte motivo de nossa insatisfação e colaboraram para que o enfoque dado na disciplina passasse a ser voltado não apenas para a aprendizagem de métodos de resolução, colocando foco na reorganização do ensino de Equações Diferenciais Ordinárias.

Diversas pesquisas apontam para a necessidade de se melhorar o processo de ensino e aprendizagem das EDO. Dullius, Araujo e Veit (2011, p. 19) destacam

> o trabalho de Habre (2000) que abordou o campo de direções como um meio para resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de primeira ordem. Em estudo posterior, esse autor investigou também a aceitação dos estudantes em resolver Eds geometricamente (HABRE, 2003). De forma similar Rasmussen (2001) realizou uma investigação sobre as dificuldades de aprendizagem dos estudantes em abordar equilibradamente, métodos analíticos, gráficos e numéricos para a análise de Eds. Ainda sobre o mesmo tema, podemos citar os trabalhos de: Stephan e Rasmussen (2002) focado na abordagem de funções-solução; Almeida e Borssoi (2004) que desenvolveram uma proposta para o estudo de EDOs fundamentada nos pressupostos teóricos da modelagem matemática na perspectiva da Educação Matemática e da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

No intuito de orientar a elaboração do material de ensino teoricamente fundamentado, levou-nos a considerar a pesquisa de Borssoi (2013) e as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) caracterizadas por Moreira (2011b, 2016) como sequências de ensino voltadas para a aprendizagem significativa.

Baseados nessas considerações, nos preocupamos em propor, implementar e analisar uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, que associa o uso de recursos tecnológicos e propõe atividades de Modelagem Matemática como parte das atividades componentes da UEPS, sendo essa nossa questão de pesquisa.

O que se apresenta positivamente, pois como aluna de um curso de mestrado profissional, segundo documento da CAPES, o trabalho de conclusão de curso de um Mestrado Profissional deve ser efetivado com um produto educacional, sendo que

> O mestrando deve desenvolver um processo ou produto educativo e utilizá-lo em condições reais de sala de aula ou espaços não-formais ou informais de ensino, em formato artesanal ou em protótipo. Esse produto pode ser, por exemplo, uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, um conjunto de vídeo-aulas, um equipamento, uma exposição etc. O trabalho final deve incluir necessariamente o relato fundamentado desta experiência, no qual o produto educacional desenvolvido é parte integrante (CAPES, 2013, p. 24).

Para Leodoro e Blakins (2010, p.7), o produto educacional do Mestrado Profissional deve ser participativo, tendo em vista que ao produzir os mestrandos se dispõem a “se apropriarem de suas experiências de ensino e confrontá-las com referências teóricas em educação”. Ou seja, os mesmos devem ser protagonistas da prática pedagógica, agindo ativamente sobre todo o processo, desde a elaboração, coleta de dados, análise de dados e conclusões.

Intencionamos elaborar o produto educacional no formato de um caderno pedagógico que abriga a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, as atividades que formam essa UEPS e os *links* para acesso aos vídeos e programas utilizados na UEPS, com o propósito de que outros profissionais da educação possam se valer desse material e fazer uso em suas próprias aulas.

Este caderno pedagógico foi elaborado durante a pesquisa no segundo semestre de 2016 na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias no sexto período do curso de Licenciatura em Matemática. Os alunos receberam uma pasta com presilha e anexavam nesta pasta as atividades que recebiam. Estas atividades eram cuidadosamente elaboradas observando os conhecimentos dos alunos e as avaliações parciais da pesquisadora que ocorriam no transcorrer da aplicação.

Com esta breve apresentação da pesquisa passamos a anunciar a estrutura desta dissertação quanto aos capítulos que se seguem a esta introdução.

No segundo capítulo apresentaremos os aspectos relacionados à pesquisa, seu *corpus* de análise e a metodologia de análise utilizada, a Análise Textual Discursiva**,** bem como o ambiente educacional investigado.

O terceiro capítulo apresenta a teoria que fundamenta a pesquisa, expondo o conceito de Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, a teoria de aprendizagem em que está fundamentada e a estrutura dessa unidade de ensino.

No capítulo quatro resgatamos a natureza das atividades que compõem a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, destacando conceitos importantes da Modelagem Matemática e do uso de tecnologia em sala de aula.

O quinto capítulo ficou destinado à constituição da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa elaborada e a apresentação do Produto Educacional.

No sexto capítulo, a análise é realizada fundamentada na Análise Textual Discursiva, apresentando a análise de cada uma das três categorias: Modelagem Matemática, Recursos Tecnológicos e Aprendizagem Significativa. Enquanto no sétimo capítulo trazemos as considerações finais da pesquisa.

2 Delineamento da Pesquisa e Aspectos Metodológicos

Os encaminhamentos metodológicos seguem os pressupostos da pesquisa qualitativa (LÜDKE; ANDRÉ, 1986) em que se pretende aprofundar a compreensão dos fenômenos que serão investigados a partir de uma análise rigorosa e criteriosa das informações.

A intenção com pesquisas que assim se caracterizam, segundo Moraes e Galiazzi (2007), é a compreensão e a reconstrução dos conhecimentos existentes sobre os temas investigados. Segundo os autores, este tipo de pesquisa movimenta-se no sentido de leituras de maior profundidade, de interpretações mais sutis, de desocultação do oculto.

O foco de nossa investigação está em *propor, implementar e analisar uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, que associa o uso de recursos tecnológicos e propõe atividades de Modelagem Matemática como parte das atividades componentes da UEPS*.

A pesquisa em questão constitui-se como uma pesquisa em ensino, pois pretende averiguar o produto produzido pela pesquisadora, a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa. No entanto, Moreira e Rosa (2013) consideram que não faz sentido falar apenas em ensino desconsiderando a atividade de aprender, apesar de não haver uma relação de causa e efeito dessas duas componentes. Sendo assim, consideram que o ensino é preparado a fim de que se possibilite a aprendizagem, mesmo que essa não ocorra. Para averiguar o ensino, faz-se então necessário saber se houve aprendizagem, assim é preciso avaliá-la. Moreira e Rosa (2013) consideram que a avaliação da aprendizagem pode, em princípio, prover evidências não só sobre o que foi aprendido, mas também sobre até que ponto o ensino foi responsável por isso. Contudo, é possível também avaliar o ensino de outras formas como, por exemplo, a opinião do aluno (MOREIRA; ROSA, 2013).

Para os autores, a pesquisa em ensino necessita levar em consideração o ensino, a aprendizagem, o currículo e o que denominam de condições de contorno (regras como horário, calendário, salas de aula, padrões hierárquicos de comportamento e o código disciplinar, por exemplo) (MOREIRA; ROSA, 2013, p.14).

2.1 Caracterização do ambiente educacional investigado

A pesquisa foi realizada com uma turma do sexto período do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias durante o segundo semestre de 2016, período em que a pesquisadora atuava como professora. O curso constituía 60 horas/aula, dispostas em três horas semanais que ocorriam em um mesmo dia de aula durante o período noturno. Foi realizado o registro em vídeo ou áudio de uma grande parte dessas aulas, assim, nem todas elas serão motivo de análise, pois o *corpus* de análise se constituiria em um material muito extenso.

A turma era composta por 21 alunos que já haviam cursado as disciplinas de Cálculo Diferencial Integral I e II, mas não tinham feito uso de tecnologia durante essas aulas. Esses alunos, 13 do sexo feminino e 8 do sexo masculino, tinham entre 20 e 30 anos de idade e não possuíam experiência em Modelagem Matemática.

Os alunos trabalhavam, em todas as aulas, em cinco equipes formadas pelos próprios alunos, a partir das suas afinidades. Cada aluno era identificado por um número, assim, a Equipe A era representado pelos alunos A1, A2 e A3, a Equipe B, pelos alunos B1, B2, B3 e B4, a Equipe C, pelos alunos C1, C2, C3 e C4, a Equipe D, pelos alunos D1, D2, D3, D4, D5 e D6 enquanto a Equipe E era representado pelos alunos E1, E2, E3 e E4, para que houvesse a identificação, ao mesmo tempo o anonimato dos mesmos.

É importante salientar que a faculdade onde a pesquisa foi realizada e todos os alunos consentiram com a pesquisa. A autorização da instituição de ensino consta no Apêndice 1 e o termo de consentimento no Apêndice 2.

2.2 Sobre os dados da pesquisa e procedimentos de Análise

Levando em consideração a natureza dos dados e a questão de investigação, nos alicerçamos na Análise Textual Discursiva, pautados em trabalhos como Moraes (2003), Moraes e Galiazzi (2006), Luccas (2011), Galiazzi e Ramos (2013), Moraes e Ramos (2013) e Silva (2017). Assim, o encaminhamento da análise seguiu um processo auto-organizado de construção e compreensão onde novos entendimentos podem emergir de uma sequência recursiva de três componentes: a desconstrução e unitarização do *corpus* de análise, o estabelecimento de relações ou processo de categorização e a elaboração do metatexto (MORAES, 2003).

Levando esses fatos em consideração, houve uma delimitação dos dados que seriam analisados, constituindo-se o *corpus* de análise em nove atividades, que ocorreram durante a disciplina. Essas atividades foram registradas pelos alunos em um caderno e através de arquivos digitais, foram utilizados também questionários pré e pós-pesquisa e avaliação final. Para a composição desses documentos foram gravados vídeos das aulas, focalizando toda a turma e vídeos ou áudios das equipes separadamente, pois em alguns momentos nem todas as equipes conseguiram filmar suas ações, mas puderam gravar o áudio das mesmas. Esses dados da pesquisa formam um total de 115 documentos e foram coletados mediante observações estruturadas, participante e natural (LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

Para a presente pesquisa, o processo de análise, baseado na Análise Textual Discursiva, foi realizado com o suporte do *software* de análise qualitativa Atlas TI 8.0, por considerarmos um recurso com potencial para a organização dos dados e para o processo analítico. Silva (2017) relata que não encontrou nenhuma pesquisa que fizesse o uso desse recurso computacional aliado à Análise Textual Discursiva.

Esse *software* possibilita ao pesquisador analisar uma grande quantidade de dados e realizar agrupamentos entre as categorias definidas, o que apresentou grande auxílio na inserção do *corpus* da pesquisa e na categorização desses dados. O uso desse mecanismo de análise será descrito na seção destinada à análise dos dados.

2.2.1 A ANÁLISE TEXTUAL DISCURSIVA

Nessa seção faremos a caracterização dos procedimentos metodológicos da Análise Textual Discursiva, no Capítulo 6 faremos a descrição de como se deu esse processo a partir do contexto de pesquisa.

Moraes e Galiazzi (2007, p.7) definem a Análise Textual Discursiva (ATD) como uma metodologia de análise de dados e informações de natureza qualitativa com a finalidade de produzir novas compreensões sobre os fenômenos e discursos, representando um movimento interpretativo e de caráter hermenêutico.

Para Moraes, a ATD está organizada em quatro focos:

1°) Desmontagem dos textos

Também denominado de desconstrução e unitarização, esta primeira etapa de análise “consiste num processo de desmontagem ou desintegração dos textos, destacando seus elementos constituintes. Significa colocar o foco nos detalhes e nas partes componentes dos textos num processo de decomposição que toda análise requer” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 18).

Nesta etapa, o pesquisador decide em que medida fará a fragmentação dos seus textos, o que pode resultar em unidade de análise de tamanhos distintos, não perdendo de vista a relação entre a unidade de análise e o texto em que a mesma foi embasada, para isso utilizam-se códigos referentes à origem da unidade. Essas unidades de análise devem ser identificadas sempre com o propósito da pesquisa e geram categorias que podem ser estabelecidas previamente ou não, neste caso as categorias são ditas emergentes.

Outras características que são relevantes e que não podem ser perdidas durante esse processo são a codificação e a finalidade, nesse sentido, o pesquisador deve fazer uso de um sistema de código que seja capaz de identificar seus textos originais, suas unidades de significado, assim como outros elementos constituintes da análise, nunca se esquecendo de sua finalidade maior que é a organização de uma estrutura que lhe permite a construção de um metatexto, onde serão apresentadas as suas conclusões e compreensões sobre os documentos que foram analisados.

Durante esse processo, o pesquisador deve fazer uso de recortes dos textos de análise, levando sempre em consideração a relação entre a citação e o fenômeno que está sendo estudado, assim como as referências à teoria em que está fundamentado, sendo sempre pertinente e não negligenciando os objetivos de sua pesquisa. Essas características são imprescindíveis para que a pesquisa seja válida.

É necessário que haja um grande envolvimento e impregnação por parte do pesquisador com o processo analítico, tendo em vista que uma análise rigorosa se constitui em ir além de uma leitura superficial, o que ocasiona uma desorganização e desconstrução inicial do texto e uma posterior reconstrução e reorganização de novas compreensões.

Segundo Moraes e Galiazzi (2007) a desmontagem do texto pode ser fragmentada em três momentos distintos:

- Fragmentação dos textos e codificação de cada unidade: que é caracterizada por várias leituras do texto analisado, a identificação e codificação dos elementos que são destacados.
- Reescrita de cada unidade de modo que assuma um significado, o mais completo possível da mesma: com a codificação realizada na etapa anterior, o texto se apresentará descontextualizado das ideias fundadoras. Assim, é necessário que o pesquisador reescreva cada uma das unidades de modo que consigam expressar com clareza os sentidos construídos a partir do contexto em que foram produzidos, o que pode incluir elementos de unidades anteriores ou posteriores, tendo em vista que cada uma das unidades é estabelecida isoladamente.
- Atribuição de um nome ou título para cada unidade assim produzida: este título deve ser definido levando-se em consideração a ideia principal de cada unidade

O processo de unitarização, mesmo sendo caracterizado pela desmontagem de um texto, não pode ser realizado excessivamente, segundo Moraes e Galiazzi (2007, p. 49),

> A fragmentação sempre necessita ter como referência o todo. Mesmo que se recortem os textos, a visão do fenômeno em sua globalidade precisa estar sempre presente como pano de fundo. O limite das desmontagens coincide com o limite de sentidos que podem ser construídos a partir dos textos objeto de análise.

2°) Estabelecimento de relações

A segunda etapa do processo de análise a partir da ATD é caracterizada de forma inversa à primeira, pois o pesquisador deve estabelecer relações, reunir semelhanças e construir categorias para sua análise. Para Moraes e Galiazzi (2007), esse processo é caracterizado pela constante comparação entre as unidades definidas no momento inicial da análise, levando a agrupamentos de elementos semelhantes, as categorias, que serão nomeadas e definidas com maior precisão conforme são construídas. A construção de categorias ocorre por meio de movimentos hermenêuticos em espiral, a partir da retomada de cada um dos fenômenos envolvidos.

No processo de categorização as categorias podem ser definidas *a priori* ou de maneira emergente. As categorias definidas *a priori* estão relacionadas ao método dedutivo, onde as unidades de análise serão situadas em "caixas" previamente estabelecidas e orientadas conforme a teoria em que estão fundamentadas, enquanto as categorias emergentes, relacionadas ao método indutivo, são organizadas a partir de um conjunto de elementos semelhantes organizados pelo pesquisador. Não há impedimentos que restringem que esses dois processos existam concomitantemente, para esse caso, o processo de análise será dito misto.

O processo de categorização pode, também, assumir a possibilidade da existência de subcategorias. Quando este se caracteriza pela construção inicial de categorias e posteriormente de subcategorias, o movimento está associado à categorização *a priori*, enquanto o movimento contrário, onde primeiro são construídas as subcategorias está relacionado às categorias emergentes, neste caso, o movimento se dá de categorias mais específicas e de menor amplitude para as mais gerais e mais amplas.

Para a construção das categorias de análise, algumas propriedades devem ser consideradas: validade ou pertinência, homogeneidade e não exclusão mútua. Dessa forma a validade das categorias caracteriza a capacidade de propiciar uma nova compreensão sobre o fenômeno que está sendo estudado, a homogeneidade garante que as categorias foram estabelecidas a partir de um mesmo contínuo conceitual e o critério da não exclusão mútua garante que "uma mesma unidade pode ser lida de diferentes perspectivas, resultando em múltiplos sentidos, dependendo do foco ou da perspectiva em que seja examinada", o que "representa um movimento positivo no sentido de superação da fragmentação, em direção a descrições e compreensões mais holísticas e globalizadas" (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 27).

3°) Captando o novo emergente: expressando as compreensões atingidas

Após a construção de categorias e subcategorias resultantes da análise, a ATD intenciona a construção de metatextos, que "são constituídos de descrição e interpretação, representando o conjunto de um modo de teorização sobre os fenômenos investigados” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 32).

Nesta etapa, o pesquisador deve produzir um metatexto que evidencie suas compreensões iniciais e parciais referentes a cada uma das categorias de análise. Esta construção pode ocorrer a partir de “argumentos centralizadores” ou “teses parciais”, visando à construção de um texto que valide e defenda a sua tese principal.

Para isso, deve-se valer de uma boa descrição e interpretação dos dados analisados. Descrever é conseguir mostrar ao leitor, de uma maneira organizada, os sentidos e significados que foram construídos pela análise. É por meio da descrição que o pesquisador expõe os elementos que são suportes aos fenômenos e relações existentes. Para

> uma descrição densa, recheada de citações dos textos analisados, sempre selecionadas com critério e perspicácia, é capaz de dar aos leitores uma imagem fiel dos fenômenos que descreve. Essa é uma das formas de sua validação (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 35).

Enquanto a interpretação atinge novas camadas de sentido que são construídas a partir da estrutura de categorias produzidas anteriormente. Para Moraes e Galiazzi (2007, p.36),

> interpretar é construir novos sentidos e compreensões, afastando-se do imediato e exercitando uma abstração. Interpretar é um exercício de construir e de expressar uma compreensão mais aprofundada, indo além da expressão de construções obtidas a partir de textos e de um exercício meramente descritivo.

A interpretação pode ocorrer de duas formas: a partir de referenciais teóricos definidos *a priori*, onde o pesquisador procura evidências, correspondências e associações de uma teoria nos dados que possui o que, eventualmente, pode ocasionar em um avanço de uma teoria já constituída, caracterizado como o processo de teorização; ou pode ocorrer através de teorias emergentes, onde a partir da análise dos dados o pesquisador identifica a teoria envolvida, para este caso, o pesquisador deve explicitar inter-relações entre as categorias emergentes e a sua análise.

A partir da descrição e da teorização, o pesquisador é capaz de produzir, inicialmente, pequenos textos, exercitando sua escrita e impregnando-se dos fenômenos investigados. Esses dois processos ocorrem de maneira espiral, tendo em vista que o texto nunca está completamente concluído e que novas camadas de sentido e compreensão podem ser construídas a partir da retomada incessante com os dados da pesquisa.

A escrita de pequenos trechos de textos conduz ao metatexto, que deve apresentar as conclusões do pesquisador perante as suas descrições e interpretações. Para isso, é necessário que se faça uma teorização sobre os dados analisados. Para Moraes (2003, p. 205), "a teorização implica um movimento de afastamento do material empírico, um exercício de abstração e descontextualização em que se procura expressar compreensões que a análise possibilitou". Ela pode ocorrer a partir da construção de uma nova teoria ou pela ampliação de teorias já existentes.

4°) Um processo auto-organizado

O processo descrito anteriormente pode ser tido como auto-organizado, pois é constituído de um ciclo de análise de onde emergem novas compreensões a partir do caos (desconstrução das ideias) e da reconstrução sobre o *corpus* de análise. Esse conjunto de movimentos espiralados deve culminar em um texto que seja capaz de explicitar e argumentar a teoria (que pode ser nova ou o complemento de algo já existente) em que a tese do pesquisador está sustentada.

3 UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS: UMA POSSIBILIDADE PARA ENCAMINHAMENTO DAS AULAS

Interessados em elaborar uma nova proposta de material de ensino para a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, buscamos referenciais teóricos que pudessem nos alicerçar. Necessitávamos conhecer a teoria que envolvia as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas, mas também era preciso encontrar uma teoria de aprendizagem em que nos identificássemos e que fosse capaz de justificar as ações que seriam realizadas na própria unidade de ensino.

Após pesquisas bibliográficas, pudemos perceber que muitas teorias de aprendizagem tem substanciais implicações no ensino. Começemos pelos *comportamentalistas*, Wundt criador da *psicologia experimental,* este autor considerava que “a educação passou a ser o processo de expor o estudante a experiências “significativas” para assegurar reações desejadas” (MOREIRA, 2016, p. 56), enquanto Watson, fundador do *behaviorismo* associava o ensino ao condicionamento clássico desenvolvido por Pavlov. Outro *behaviorista*, Thorndike acreditava que “a aprendizagem consistia na formação de ligações estímulo-resposta que assumem a forma de conexões neurais” (MOREIRA, 2016, p. 59). Mais tarde, Skinner considera que

> o condicionamento era o operante, pois através dele, [...], podia ser adquirida a maior parte da conduta humana e, na prática, esse condicionamento passou a ser confundido com aprendizagem e teve enorme influência no processo ensino-aprendizagem em todos os níveis de escolarização (MOREIRA, 2016, p. 62).

Frente aos *comportamentalismo*, onde o comportamento é controlado pelas consequências, surge o *representacionismo* cuja “suposição básica é a de que o ser humano não capta o mundo diretamente, mas sim o representa em sua mente” (MOREIRA, 2016, p. 92). Esta teoria de aprendizagem tem como representante Johnson-Laird, criador da teoria dos Modelos Mentais, que tem como enfoque a mente computacional representacional.

No mesmo momento, o *humanismo* tem como pressuposto que no ser humano pensamentos, sentimentos e ações estão integrados. Esta teoria tem como representantes Carl Rogers (Aprendizagem Significante) onde o ensino é centrado no aluno, no aprender a aprender; George Kelly, autor da psicologia dos construtos pessoais; Paulo Freire (Pedagogia da Autonomia) que considera que o ensinar inexiste sem o aprender; e Moreira, autor da Aprendizagem Significativa Crítica, que considera que além da aprendizagem necessitar ser significativa, esta também precisa ser crítica.

Observamos também que os *cognitivistas* consideram que o próprio ser humano é quem constrói o seu conhecimento. Dentre estes se destacam Piaget, muito reconhecido pelos quatro períodos de desenvolvimento mental (sensório motor, pré-operacional, operacional-concreto e operacional-formal); Bruner reconhecido por sua famosa frase “é possível ensinar qualquer assunto de uma maneira honesta, a qualquer criança em qualquer estágio de desenvolvimento (MOREIRA, 2016, p. 69).

Dentre os *cognitivista*s, Vygotsky propõe que o desenvolvimento não pode ser entendido sem referência ao meio social onde o indivíduo se encontra, enquanto Vergnaud, criador da teoria dos Campos Conceituais, considera que “o conhecimento está organizado em *campos conceituais* cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período de tempo, com rupturas e continuidades, pela experiência, maturidade e aprendizagem” (VERGNAUD, 1982, p. 40, apud., MOREIRA, 2016, p. 79). À medida que Ausubel focava sua preocupação na aprendizagem e no ensino em sala de aula, propondo uma teoria de aprendizagem que propõe que o aluno se aproprie do conteúdo de ensino de maneira significativa.

Assim, o que seria necessário para que se efetivasse a aprendizagem de forma significativa? Quais seriam as condições para a sua ocorrência? Moreira (2011a) relata a necessidade de que duas condições sejam satisfeitas para que a aprendizagem possua potencial para ser significativa. A primeira condição diz respeito ao material de ensino, este deve ser potencialmente significativo, ou seja, deve ter significado lógico para o aprendiz, fazer relações com conhecimentos preexistentes em sua estrutura cognitiva, considerando-se que este aprendiz possua ideias âncoras para que seja possível fazer essas relações. Já a segunda condição para a potencialidade de aprendizagem significativa é referente ao próprio aprendiz, que deve apresentar predisposição para aprender.

No contexto escolar o professor pode oferecer condições que instiguem o aluno à aprendizagem, mas não consegue garantir que este esteja predisposto. Logo, uma das maneiras que pode gerar a potencialidade de aprendizagem é a utilização de um material adequado. Neste sentido, passaremos a discutir a potencialidade do material de ensino, para isso, necessitamos entender a teoria em que este está respaldado.

3.1 A APRESENTAÇÃO DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A teoria da Aprendizagem Significativa está alicerçada na concepção de David Paul Ausubel (1918-2008), que em 1963 apresenta uma primeira tentativa de propor uma teoria de aprendizagem oposta à aprendizagem por memorização. Para este autor,

> A aprendizagem é dita significativa quando uma nova informação (conceito, ideia, proposição) adquire significados para o aprendiz através de uma espécie de ancoragem em aspectos relevantes da estrutura cognitiva preexistente do indivíduo, isto é, em conceitos, ideias, proposições já existentes em sua estrutura de conhecimentos (ou de significados) com determinado grau de clareza, estabilidade e diferenciação (MOREIRA, 2011a, p. 129).

Nesta proposta, a aprendizagem escolar caracterizada pela memorização de um conteúdo para a realização de uma prova ou exame deve ser revista e repensada, observando que existem fatores relevantes que devem ser considerados no decorrer do processo de aprendizagem. Um desses fatores, que Ausubel considera como principal, são os conhecimentos que o aluno já possui, a esses conhecimentos o autor dá o nome de subsunçor ou ideia-âncora.

Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a aprendizagem seria concedida pela interação entre os subsunçores presentes na estrutura cognitiva do aprendiz e o novo conhecimento. Nesse processo dinâmico os conhecimentos existentes se modificam produzindo novos significados ou corroborando significados já existentes. No entanto, essa interação entre os conhecimentos preestabelecidos no aprendiz e os novos conhecimentos não ocorre de qualquer maneira, ela não segue princípios lógicos e muito menos possui uma forma rigorosa e sistemática de ocorrer, cada indivíduo realiza interações entre os conhecimentos que possui e os novos conhecimentos de maneira que estes sejam integrados e modifiquem os conhecimentos existentes, deixando-os mais complexos, estáveis e diferenciando-os.

Sendo assim, esta teoria de aprendizagem se sustenta nas ideias e conhecimentos que o aprendiz já possui, os subsunçores, que de acordo com Moreira (2011a, p.14) “é o nome que se dá a um conhecimento específico, existente na estrutura de conhecimento do indivíduo, que permite dar significado a um novo conhecimento que lhe é apresentado ou por ele descoberto”, o mesmo autor acrescenta que,

> A clareza, a estabilidade e a organização do conhecimento prévio em um dado corpo de conhecimentos, em um certo momento, é o que mais influencia a aquisição significativa de novos conhecimentos nessa área, em um processo interativo no qual o novo ganha significados, se integra e se diferencia em relação ao já existente que, por sua vez, adquire novos significados fica mais estável, mais diferenciado, mais rico, mais capaz de ancorar novos conhecimentos (MOREIRA, 2011a, p. 26).

Estes conhecimentos que são extremamente imprescindíveis para a possível ocorrência da Aprendizagem Significativa podem ser, por exemplo, um símbolo já significativo, um conceito, uma proposição, um modelo mental, uma imagem (MOREIRA, 2011a, p. 14).

Logo, os conhecimentos que o aprendiz já possui serão alterados, melhorados, ampliados, ou até mesmo corroborados conforme a aprendizagem vai se concretizando. O termo corroborados destaca-se, pois, segundo Moreira (2011a) os conhecimentos podem estar organizados de maneira incorreta e não satisfazer a realidade aceita pela comunidade científica. Por exemplo, a falsa ideia de que é o peso que representa quantos quilogramas ou gramas um objeto possui. O aprendiz pode acreditar ser verdadeira esta suposição se ainda não compreendeu a distinção entre a massa de um corpo e a força peso.

Este subsunçor, depois de modificado poderá acoplar novos conhecimentos, dessa forma a ancoragem, segundo Moreira (2011a) não é realizada de maneira estática, no sentido de estar ancorado, mas no sentido de que o novo conhecimento está ligado/associado/intimamente atrelado ao conhecimento que já era existente. Para Moreira (1999, p. 12),

> há, pois, um processo de interação no qual conceitos mais relevantes e inclusivos interagem com o novo material, servindo de ancoradouro, incorporando-o e assimilando-o; porém, ao mesmo tempo, modificando-se em função dessa ancoragem.

No entanto, o que ocorre quando o aprendiz não possui conhecimentos prévios, não possui subsunçores? Para essa questão Ausubel (2003) propõe o uso os organizadores prévios (ou antecipatórios), que fariam a ligação entre algo que o aprendiz já sabe que esteja relacionado com o que ele precisaria saber, ou seja, é necessário procurar subsunçores próximos que possam servir de ponte para os novos conhecimentos. Para Moreira (2013, p.16) "os organizadores prévios podem, e devem ser usados para explicitar ao aluno a relacionabilidade do novo material com conhecimentos que estão na estrutura cognitiva, mas o aprendiz não percebe que estão relacionados com o novo".

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) consideram que este tipo de organizadores devem ser introduzidos antes do próprio material de aprendizagem, de maneira que sejam usados para facilitar o estabelecimento de uma disposição significativa para aprendizagem. Os mesmos autores discorrem que "organizadores antecipatórios ajudam o aluno a reconhecer que elementos dos novos materiais de aprendizagem podem ser significativamente aprendidos relacionando-os com aspectos especificamente relevantes da estrutura cognitiva existente" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 143).

Os autores apresentam duas funções primordiais para o uso de organizadores prévios, uma é "oferecer uma armação ideativa para a incorporação estável e retenção do material mais detalhado e diferenciado que se segue no texto a aprender" e outra é "aumentar a discriminabilidade entre este último material e ideias similares ou ostensivamente conflitantes na estrutura cognitiva" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 144).

Os processos cognitivos que proporcionam a Aprendizagem Significativa estão associados a dois princípios que acontecem dinâmica e simultaneamente na estrutura cognitiva: a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integradora (ou Reconciliação Integrativa).

Na Diferenciação Progressiva os conceitos gerais são inicialmente apresentados e, a partir deles, serão construídos os novos conhecimentos, assim haverá a modificação dos subsunçores envolvidos a partir das sucessivas utilizações desse subsunçor. Para Moreira (2011a, p. 20)),

> [...] a aprendizagem significativa decorre da interação não-arbitrária e não-literal de novos conhecimentos com conhecimentos prévios (subsunçores) especificamente relevantes. Através de sucessivas interações, um dado subsunçor vai, de forma progressiva, adquirindo novos significados, vai ficando mais rico, mais refinado, mais diferenciado, e mais capaz de servir de ancoradouro para novas aprendizagens significativas.

Como, por exemplo, quando um aluno que já conhece o significado de grama ou quilograma e passa a entender sobre a massa e o peso de corpos, o subsunçor existente, grama ou quilograma, adquire novos significados e estabelece-se de forma mais rica e sistematizada nos pensamentos do aprendiz.

Para a Reconciliação Integradora ocorre uma recombinação de informações na estrutura cognitiva, havendo a produção de novos significados e eliminação das diferenças que anteriormente não existiam, a integração desses novos significados e a superordenação das informações. Quando o aprendiz efetiva a Reconciliação Integradora consegue visualizar as semelhanças e diferenças existentes. Para Moreira (2011a), relembrando o exemplo dado anteriormente, é a partir da Reconciliação Integradora que o aprendiz destaca as diferenças entre massa e a força peso de um corpo.

Moreira (2011a, p.22) considera que

> Quando aprendemos de maneira significativa temos que progressivamente diferenciar significados dos novos conhecimentos adquiridos a fim de perceber diferenças entre eles, mas é preciso também proceder a reconciliação integradora. Se apenas diferenciarmos cada vez mais os significados, acabaremos por perceber tudo diferente. Se somente integrarmos os significados indefinidamente, terminaremos percebendo tudo igual. Os dois processos são simultâneos e necessários à construção cognitiva, mas parecem ocorrer com intensidades distintas.

Ausubel (2003) considera que a aprendizagem ocorre de maneira hierárquica, onde conceitos e proposições são incluídos à estrutura cognitiva alterando, modificando, estabilizando e obliterando conceitos pré-existentes. O ensino deve ser organizado de maneira que os conteúdos sejam apresentados partindo-se dos aspectos mais gerais para os mais inclusivos, sendo posteriormente exemplificados e diferenciados, trabalhados sob a perspectiva da Diferenciação Progressiva e da Reconciliação Integradora. Conforme os conceitos se tornam mais inclusivos a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integradora estabelecem-se de maneira mais consistente e forte, possibilitando que o conteúdo se apresente mais específico, sistematizado e com mais exemplos.

A Figura 1 estabelece esta relação existente entre a Diferenciação Progressiva, a Reconciliação Integradora e a apresentação do conteúdo de ensino, do mais geral para o mais específico. Pode-se visualizar que conforme a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integradora vão ficando mais consistentes para o aprendiz, o conteúdo vai se estruturando, de maneira que algo que anteriormente se apresentava de forma mais geral se estabelece na estrutura cognitiva de modo mais específico.

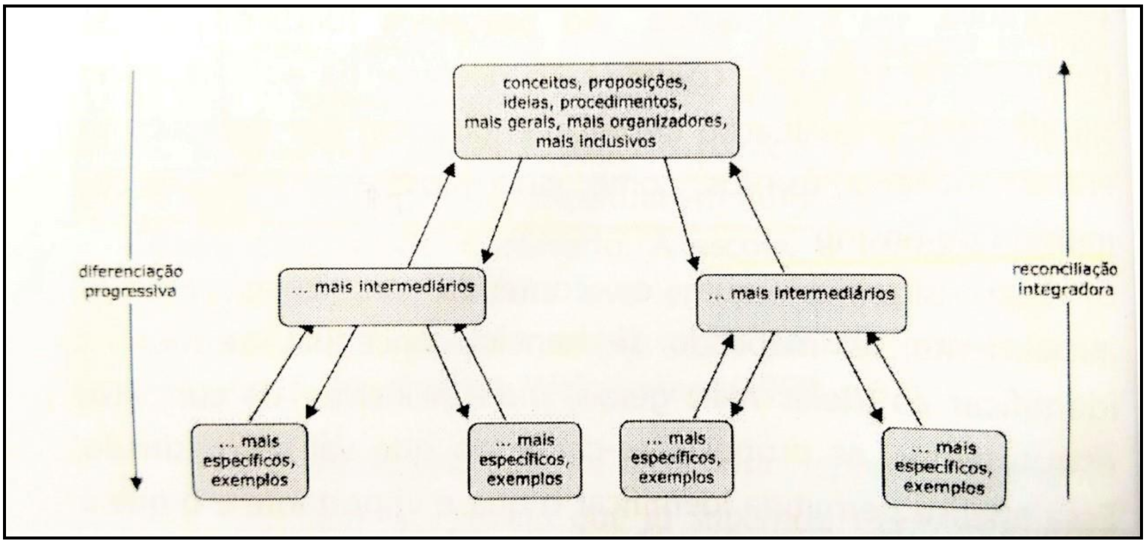


Figura 1- A interação entre a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integradora
Fonte: Moreira, 2011a, p. 44

Uma maneira que poderia agir sobre o processo de aprendizagem para que a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integradora fossem consolidadas seria o uso dos organizadores prévios na introdução do material de ensino. Para Moreira (2013, p. 16)

> Os organizadores prévios podem ajudar a diferenciação progressiva na medida em que são usados no início de cada novo tópico, ou cada nova unidade didática mostrando como este tópico ou essa unidade se diferencia de tópicos e unidades anteriores. Podem também facilitar a reconciliação integrativa quando delineiam, explicitamente, as principais similaridades e

> diferenças entre novos conhecimentos e aqueles já existentes na estrutura cognitiva de quem aprende.

Da mesma maneira que existem princípios da Diferenciação Progressiva e da Reconciliação Integradora que podem desencadear a Aprendizagem Significativa, esta pode ser diferenciada por três formas de aprendizagem: por subordinação, por superordenação e por combinação. Na aprendizagem por subordinação o aprendiz associa os novos conhecimentos a subsunçores que são mais gerais e inclusivos num processo de ancoragem cognitiva. Enquanto que na aprendizagem por superordenação exige-se um processo de abstração sobre os novos conhecimentos e os subsunçores existentes na estrutura cognitiva, assim os novos conceitos passam a subordinar os subsunçores que lhe deram origem, pois uma síntese das ideias foi estabelecida no processo de aprendizagem. À medida que na aprendizagem por combinação o aprendiz necessita fazer interações entre vários subsunçores existentes atribuindo novos significados que não são nem mais inclusivos nem mais específicos que os já existentes.

Concomitante às três formas de aprendizagem são descritos três tipos de aprendizagem. A aprendizagem representacional acontece quando um símbolo passa a representar logicamente um objeto, não existe apenas a associação entre o objeto e o símbolo, este começa a ter significado para o aprendiz. Na aprendizagem conceitual o aprendiz passa a representar um objeto por um símbolo percebendo regularidades no mesmo, sem a dependência de um referente concreto. Enquanto que na aprendizagem proposicional o aprendiz passa a dar significado às ideias que foram expressas na forma de uma proposição.

Portanto, a teoria da Aprendizagem Significativa pressupõe que o aprendiz realizará as ligações necessárias entre os conhecimentos que lhe estão sendo apresentados e os subsunçores presentes em sua estrutura cognitiva. Ausubel (2003, p. 56) considera

> [...] que os aprendizes empreguem quer um mecanismo de aprendizagem significativa, quer que o material que apreendem seja potencialmente significativo para os mesmos, ou seja, passível de se relacionar com as ideias relevantes ancoradas nas estruturas cognitivas dos mesmos

3.2 O Material Potencialmente Significativo

Com essas considerações entendemos que é muito importante salientar a potencialidade do material ser significativo, pois se o mesmo já se caracterizasse como significativo a aprendizagem estaria confirmada apenas com a existência do material, o que não se pode garantir, observando que este não é um requisito isolado para a consolidação da aprendizagem. Para Moreira (2011b, p. 51),

> O significado está nas pessoas e não nas coisas. Então, não há, por exemplo, um livro significativo ou aula significativa; no entanto, livros, aulas, materiais instrucionais de um modo geral, podem ser potencialmente significativos e para isso devem ter significado lógico (ter estrutura, organização, exemplos, linguagem adequada, enfim, serem aprendíveis) e os sujeitos devem ter conhecimentos prévios adequados para dar significado aos conhecimentos veiculados por esses materiais.

Como a teoria da Aprendizagem Significativa se alicerça nos subsunçores presentes na estrutura cognitiva do aprendiz, o material deve estar relacionado a aspectos que são relevantes a esse aprendiz em especial, permitindo que sejam realizadas incorporações nas relações existentes na estrutura cognitiva de forma não arbitrária e não literal. Ou melhor, o material deve estabelecer relações de maneira não aleatória, deve estar sustentado por pressupostos adequados, tentando relacionar o conteúdo que está apresentando a subsunçores presentes no aprendiz e mais ainda, deve realizar estas relações sem alterar o significado de forma significativa.

Dessa maneira, tomando a Aprendizagem Significativa como asserção central para a proposta de material de ensino, Moreira (2011b) apresenta o que ele chama de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), e as caracteriza como “sequências de ensino fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, não mecânica, que podem estimular a pesquisa aplicada em ensino, aquela voltada diretamente à sala de aula” (MOREIRA, 2011b, p. 44).

3.3 Estrutura de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa

Estas Unidades de Ensino são guiadas por alguns princípios norteadores que muito se assemelham aos princípios da Aprendizagem Significativa. Primeiramente, elas devem estar pautadas nos conhecimentos prévios dos aprendizes, criando situações-problema que relacionem os novos conhecimentos a esses conhecimentos prévios e dando sentido aos novos conhecimentos. Essas situações-problema devem ser propostas em nível crescente de complexidade e necessitam organizar o ensino de forma que a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integradora sejam levadas em consideração.

O princípio da Diferenciação Progressiva reitera que a aprendizagem e sua retenção, assim como a organização do conteúdo escolar, devem obedecer a certa ordem hierárquica, partindo sempre do mais geral para o mais específico, procedendo de maneira vertical em termos de generalização, abstração e inclusão. Enquanto o princípio da Reconciliação Integradora mostra que o professor com seu material de instrução deve ser capaz de apontar e singularizar as diferenças e semelhanças das ideias subsumidas e novas no aprendiz.

Moreira (2011b) também propõe aspectos sequenciais, o que ele chama de passos, para essas unidades de ensino. Observando esses passos para a elaboração de uma UEPS o professor deve:

1) Primeiramente definir qual o tópico de ensino irá abordar: todo o conteúdo de ensino deve ser previamente estabelecido pelo professor, assim como a identificação dos aspectos declarativos e procedimentais que são determinantes neste contexto de ensino.
2) Instigar discussões e situações em que os alunos possam externalizar seus entendimentos a fim de reconhecer os conhecimentos prévios de cada aprendiz: o professor necessita identificar os subsunçores estabelecidos por seus alunos, mesmo estes sendo aceitos ou não pela comunidade científica, levando em conta que para a Aprendizagem Significativa o conhecimento pré-estabelecido pelo aluno é relevante.
3) Propor situações-problema em nível introdutório de complexidade, levando em conta o conhecimento prévio do aluno: após o reconhecimento dos subsunçores, o professor deve propor situações-problema em nível introdutório, para que os alunos reavivem os subsunçores presentes e estejam preparados para a introdução de um novo conhecimento, ou caso não existam subsunçores, esta atividade seja capaz de funcionar como

organizador prévio. É importante salientar que esta primeira atividade deve ser vista como um problema a ser solucionado de maneira acessível por parte do aluno, não apenas como um problema de aplicação ou como a simples solução por meio de um algoritmo.

4) Apresentar o conhecimento a ser ensinado/aprendido, levando em conta a Diferenciação Progressiva: o novo conhecimento deve ser apresentado inicialmente de maneira mais geral e globalizante, mostrando ao aluno os conceitos mais importantes na unidade de ensino, posteriormente aspectos mais específicos devem ser abordados de maneira que a Diferenciação Progressiva se faça presente, ou seja, que o aluno comece a visualizar as características próprias do conteúdo de ensino.
5) Apresentar novamente o conteúdo de ensino num formato mais complexo que a primeira apresentação, de forma a promover a Reconciliação Integradora: o professor embasado na teoria da Aprendizagem Significativa não deve apenas distinguir os conhecimentos, mas também reconhecer as características próprias de cada conteúdo, assim é necessário que o mesmo facilite a ocorrência da Reconciliação Integradora, retomando os aspectos gerais e estabelecendo um nível mais alto de complexidade, dando novos exemplos e promovendo a negociação dos significados e a ação do professor como mediador.
6) Dar seguimento ao processo de Diferenciação Progressiva retomando as características mais relevantes do conteúdo, porém de uma perspectiva integradora, buscando a Reconciliação Integrativa: para a conclusão da UEPS o processo da Diferenciação Progressiva deve ser retomado, o professor deve propor novas situações-problema como atividades colaborativas, que obedeçam a níveis de complexidade cada vez mais altos e que possam ser discutidas em um grande grupo a fim de que os alunos sejam capazes de estabelecer a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integradora concomitantemente.
7) Avaliação: para avaliar uma UEPS o professor deve realizar registros de tudo o que considerar evidência de Aprendizagem Significativa durante todas as etapas (avaliação formativa), verificando a captação de significados, a compreensão, a capacidade de explicar e aplicar o conhecimento que possivelmente aprendeu em novas situações-problema.

No entanto, após o sexto passo, Moreira sugere que o mesmo comece a se realizar uma avaliação somativa individual, onde deverão ser propostas atividades que impliquem na compreensão e que evidenciem a captação de significados a partir das atividades que foram propostas anteriormente. A avaliação somativa e a avaliação formativa juntas representarão a avaliação da UEPS.

8) As evidências registradas fortificam a UEPS como exitosa: após os registros e análises realizados por parte do professor, a UEPS poderá ser considerada bem-sucedida se forem encontradas evidências de Aprendizagem Significativa. Deve-se enfatizar que as evidências de aprendizagem são muito importantes, devem predominar em relação aos resultados de avaliações finais, pois a Aprendizagem Significativa é progressiva.

No intuito de elaborar uma UEPS para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, levando em consideração os pressupostos teóricos apresentados anteriormente optamos por trabalhar com situações-problema cujos encaminhamentos levem em conta diferentes tendências da Educação Matemática. O capítulo seguinte trata de tendências que serviram como suporte para a elaboração das atividades que compõem a UEPS.

4 NATUREZA DAS ATIVIDADES QUE COMPÕEM A UEPS: CONTRIBUIÇÕES DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O ensino de Matemática sofreu várias transformações desde a forte influência da “matemática moderna” até as décadas de 1960 e 1970. Com o intuito de retirar o enfoque teórico do ensino de Matemática e voltá-lo à prática, novas discussões curriculares ocorreram em nível mundial. Também no Brasil, discussões que possibilitaram a reflexão e a constituição de novas propostas sobre o ensino e a aprendizagem se fizeram presentes. Segundo Zorzan (2007, p. 79),

> O surgimento de propostas alternativas para a ação pedagógica do ensino matemático constitui o movimento da educação matemática, ou, ainda, as tendências em educação matemática. Nesse sentido, é significativo destacar as tendências em Educação Matemática que estão sendo alvo de discussões e produções teóricas e práticas, as quais são: a etnomatemática, a modelagem, a resolução de problemas, a tecnologia e a Educação Matemática, a filosofia da Educação Matemática.

A unidade de ensino proposta,foi elaborada e aplicada em uma turma de sexto semestre do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, para tanto houve uma preocupação com a formação inicial desses futuros professores. Ponte (2002) considera que existem cinco questões que são de cunho fundamental quando se analisa a proposta de ensino para a formação inicial de professores.

i) A formação pessoal, social e cultural dos futuros professores;
ii) A formação científica, tecnológica, técnica ou artística na respectiva especialidade;
iii) A formação no domínio educacional;
iv) As competências de ordem prática;
v) As capacidades e atitudes de análise crítica, de inovação e de investigação pedagógica.

Observando a quarta questão sugerida por Ponte (2002, p. 2), onde ele discute as competências de ordem prática,

> Não basta ao professor conhecer teorias, perspectivas e resultados de investigação. Tem que ser capaz de construir soluções adequadas para os diversos aspectos da sua ação profissional, o que requer não só a capacidade de mobilização e articulação de conhecimentos teóricos, mas também a capacidade de lidar com situações concretas, competências que se têm de desenvolver progressivamente ao longo da sua formação - durante a etapa da formação inicial e ao longo da carreira profissional.

Podemos, portanto, consentir com a fala de Ponte (2002) e acrescentar que acreditamos que essas competências de ordem prática surgem, quando o futuro professor, além de ter conhecimentos teóricos, aprende a partir da sua própria prática em sala de aula ainda como aluno. Fato considerado importante, se observarmos que ainda, enquanto aluno, ele deve conhecer/experimentar diferentes tendências para que esse fato desperte o interesse em se utilizar as mesmas em sua prática futura.

Para elaboração da UEPS, algumas tendências se apresentaram de maneira mais significativa e se consolidaram em vários momentos de aprendizagem, tanto por parte consciente da docente no momento de elaboração da atividade, como por parte dos alunos durante a resolução das mesmas. Discutiremos, assim, a seguir as duas tendências que se consolidaram neste trabalho: Modelagem Matemática e Tecnologias.

4.1 A MODELAGEM MATEMÁTICA

De acordo com o exposto no Capítulo 3, Ausubel identifica que um dos fatores de grande importância para a consolidação da Aprendizagem Significativa é a predisposição positiva do aluno para aprender. Para Almeida, Silva e Vertuan (2016),

> Uma hipótese subjacente à proposta de Modelagem na Educação Matemática é que a abordagem de questões reais, oriundas do âmbito de interesses dos alunos, pode motivar e apoiar a compreensão de métodos e conteúdos da matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimentos bem como pode servir para mostrar aplicações da Matemática em outras áreas do conhecimento.
>
> Uma justificativa importante para a visualização da aplicação dos conceitos diz respeito aos aspectos motivacionais. Esse é, provavelmente, um dos aspectos mais evocados na literatura para justificar a inclusão de atividades de Modelagem Matemática na prática escolar, ancorando-se em argumentos que defendem que situações de ensino que proporcionam ao aluno contato com o contexto real podem motivá-lo para o envolvimento nas

> atividades e para a construção de conhecimento (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 30).

Pesquisas como a de Borssoi e Almeida (2015) mostram que uma atividade de modelagem pode ser capaz de agir sobre a predisposição do aluno em aprender, motivando o mesmo a se envolver mais ativamente com a atividade para a construção do seu próprio conhecimento. Considerando-se que uma atividade de Modelagem Matemática tem como característica evidenciar aspectos externos à matemática presentes no cotidiano do aluno, ressaltando a matemática presente em contextos não matemáticos, onde são os alunos quem definem as estratégias de ação sobre o problema que será enfrentado.

Trataremos a Modelagem Matemática, com a visão de Almeida, Silva e Vertuan (2016), em que esta se apresenta como uma alternativa pedagógica para o professor de matemática. Segundo esses autores,

> [...] uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Nesse sentido, relações entre realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados), servem de subsídio para que os conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam adicionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 12).

Neste contexto, consideramos que o aluno tem a função de ator sobre o próprio aprendizado, pois precisa agir sobre a situação inicial (situação real), identificar quais serão suas ações e as conduções que deverá realizar para o desenvolvimento da atividade, tentando atingir a situação final (ou uma resposta para o seu problema).

É importante salientar, que não existe uma ordem rígida para a condução da atividade de Modelagem Matemática, no entanto, alguns autores sugerem um ciclo de modelagem. (BLØMHOJ; HOFFKJELDSEN, 2006; BORROMEO, FERRI, 2006; KAISE; SCHWARTS, 2006; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016).

Almeida, Silva e Vertuan (2016) propõem seis fases da Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos relacionadas a cada uma dessas fases (Figura 2).

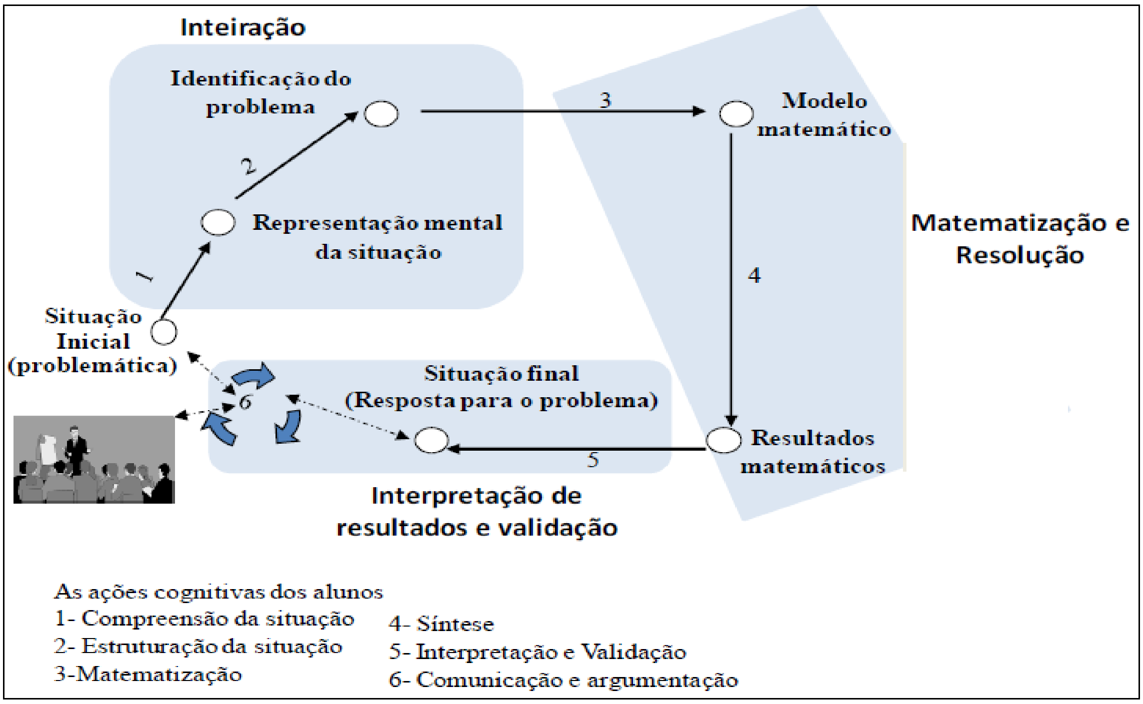


Figura 2 - Fases da Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos
Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 19)

Neste processo de Modelagem Matemática, de maneira inicial o aluno reconhece a situação-problema, observando as características e especificidades de cada situação, realizando a coleta de dados quantitativos e qualitativos, e efetivando a formulação do problema e metas que possam solucioná-lo, a esta fase Almeida, Silva e Vertuan (2016) denominam Inteiração.

No momento seguinte, ocorrem a formulação de hipóteses, a seleção de variáveis e as simplificações necessárias para que a solução do problema possa ser encontrada. Para essa segunda fase, denominada de Matematização, "a busca e elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 16)

A Resolução definida pela terceira fase

> consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da

> situação, responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação e até mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 16).

No entanto, deve ocorrer uma análise para a resposta encontrada para o problema, a esta fase, os autores denominam Interpretação de Resultados e Validação,

> a análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 16).

Estas quatro fase caracterizam o ciclo de modelagem proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2016). A Figura 3 apresenta um ciclo de modelagem segundo a visão de Blum e Leiβ (2006) que consideram que a situação real, onde o problema se encontra, está situada em um mundo não matemático, por eles denominado *Resto do mundo*. Esta situação, após passar por uma fase de interpretação, será vista como uma situação modelo que, por sua vez, será transformada em um problema real pelas simplificações necessárias. Este problema, ainda presente no mundo não matemático, é então "matematizado" e passa a fazer parte do mundo matemático, onde terá um resultado, também matemático.

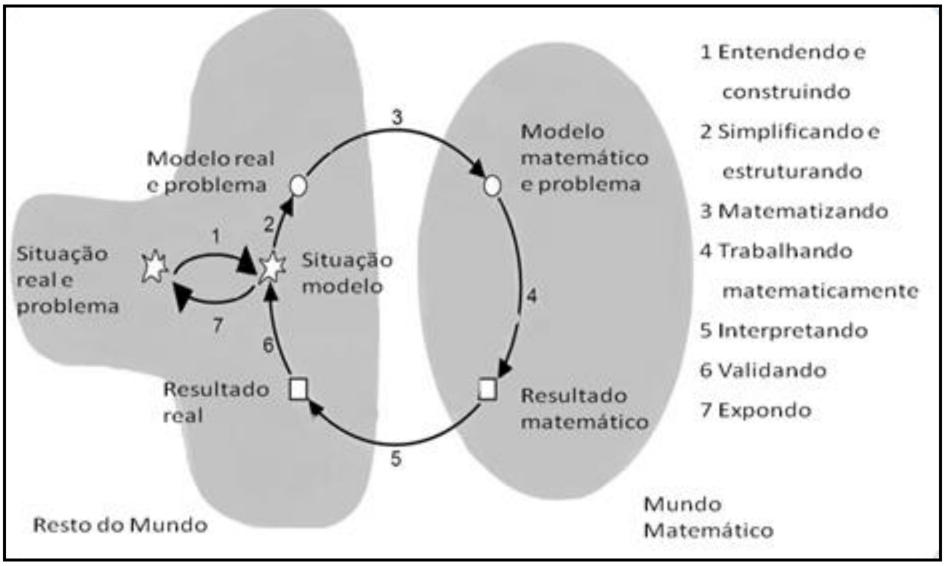


Figura 3 - Ciclo de Modelagem segundo Blum e Leiβ
Fonte: Blum e Leiβ (2006, apud PERRENET; ZWANEVEL, 2012, p. 2)

Porém, entendemos que, como o problema pertence ao mundo não matemático, sua(s) solução(ões) deve(m) pertencer ao mundo não matemático, ou seja, os resultados matemáticos precisam validar a situação a que pertencem para responder a situação-problema. Caso os resultados matemáticos não sejam satisfatórios para o problema real, pode-se retomar o ciclo a qualquer instante e realizar as etapas que se tornarem necessárias.

Assim, ao resolver o problema matemático, supostamente, o aluno encontra um modelo para a situação estudada, o que pode ser uma tabela, um gráfico, uma equação, uma maquete, etc, apresentando diferentes sistemas de representações para uma solução. Esse modelo seria capaz de expressar matematicamente possíveis soluções para os problemas que circundam os alunos, incentivando-os a pensar sobre a realidade que os cerca, ou seja, inserindo-os no seu próprio mundo.

Por modelo matemático, entendemos que seja

> um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre outro sistema. Um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema (LERSH, 2010, apud BORSSOI, 2013, p. 49).

Os mesmos autores comunicam a necessidade de o professor estar atento às três características em que a Modelagem Matemática está fundamentada: “a) envolve um conjunto de ações cognitivas do indivíduo; b) envolve representação e manipulação de objetos matemáticos; c) é direcionada para objetivos e metas estabelecidas e/ou reconhecidas pelo aluno” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p.17).

Evidenciando, ainda mais fortemente a ação do aluno no processo de construção do conhecimento. Almeida e Silva (2015) consideram que a prática dos professores com Modelagem Matemática é tímida, o que implica em um grande número de alunos e em uma grande parte dos professores, estar despreparada para trabalhar com essa alternativa pedagógica. Assim Almeida, Silva e Vertuan (2016), apresentam um processo de familiarização dos alunos com a Modelagem

Matemática, onde a inserção dessa alternativa é realizada de forma gradativa, caracterizada pelo que denominam de *momentos*:

> - Em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que ações como definição de variáveis e hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para a análise da situação, são em certa medida, orientadas e avalizadas pelo professor.
> - Posteriormente, em um segundo momento, uma situação-problema é sugerida pelo professor aos alunos, e estes, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação de hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. O que muda, essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência do estudante no que se refere à definição de procedimentos extramatemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação.
> - Finalmente, no terceiro momento, os alunos, distribuídos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema, a coleta de dados, as transições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação. Bem como a comunicação desta investigação para a comunidade escolar (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 26).

Dessa forma, o aluno pode ganhar autonomia e perder o medo de experimentar o novo, enquanto o professor aprende a ser o mediador entre o conhecimento científico acumulado e os seus alunos, passando a ser mais um ator na construção do conhecimento, e não mais o ator principal. Outra forma de consolidar a autonomia do aluno é inserir em suas atividades o uso de tecnologias que possam auxiliá-lo tanto nos momentos de pesquisa, de visualização de gráficos e soluções, de auxílio em resolução de problemas, como nos momentos de verificação de resultados.

4.2 A INSERÇÃO DA TECNOLOGIA NO ENSINO E APRENDIZAGEM

Nas últimas décadas, tem-se discutido como o computador e outros meios tecnológicos estão ou deverão ser incluídos no processo de aprendizagem. Segundo Borssoi (2017, p.143) “inúmeras pesquisas apontam que ambientes de ensino e de aprendizagem não devem ser dissociados das tecnologias de informação e comunicação, pois estas podem promover experiências positivas de aprendizagem".

Esta nova visão sobre o uso da tecnologia durante o processo de ensino considera que a mente humana pode se assemelhar a um sistema computacional, onde recebe informações do sistema sensorial e é capaz de processá-las, representando internamente o mundo externo. Segundo Moreira (2011a, p.171)

> a ideia é a mesma proposta por Ausubel há mais de quarenta anos, porém ao invés de falar-se em subsunçores, que muitas vezes são interpretados como conhecimentos puntuais, fala-se em representações mentais que decorrem de computações mentais não consistentes.

Moreira (2011a) ainda sugere que a relação triádica, proposta por D. Bob Gowin na década de 1980, onde o conhecimento é construído a partir da interação entre professor, aluno e materiais educativos (Figura 4), passe a ser quádrica, onde haveria não apenas a interação entre os três elementos citados anteriormente, mas também existiria a interação com o computador.

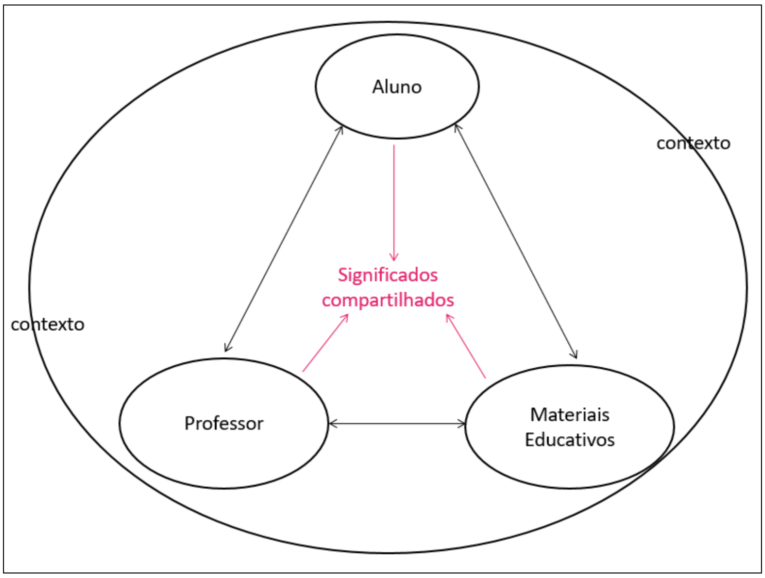


Figura 4 - A Aprendizagem Significativa na visão interacionista social de Gowin (1981)
Fonte: Moreira (2011a, p.163)

Nesta nova representação (Figura 5), o modelo de inter-relação entre o material educativo, professor e aluno, é complementado pelo uso da tecnologia, aqui configurada pelo computador, em que esta expõe e medeia os significados para que se possibilite a aprendizagem significativa.

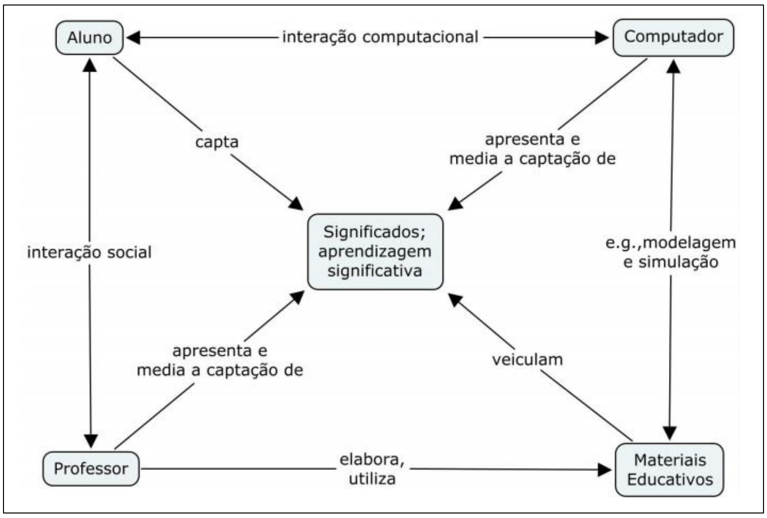


Figura 5 - A Aprendizagem Significativa (captação de significados) na visão computacional
Fonte: Moreira (2011a, p. 172)

Portanto, oferecer recursos auxiliares como a tecnologia, é uma das maneiras de orientar nossos alunos para um processo de ensino e aprendizagem, em que eles sejam corresponsáveis pela construção de conhecimentos. Esta tem como potencialidade, dentre outras, permitir diferentes representações para um objeto matemático.

Borssoi (2017, p.147) argumenta que

> As novas tecnologias oferecem oportunidades para a criação de ambientes de aprendizagem que ampliam as possibilidades das tecnologias mais clássicas como: a lousa, o giz e o livro, disponíveis desde muito tempo em espaços formais de ensino. O rápido desenvolvimento tecnológico das últimas décadas nos apresenta diversos recursos provenientes das novas tecnologias, como é o caso das tecnologias digitais, de modo que o desafio tem sido a implementação do ensino visando proporcionar condições mais favoráveis à aprendizagem dos estudantes.

A mesma autora ainda complementa que “as tecnologias podem e devem se tornar ferramentas de aprendizagem significativa” (BORSSOI, 2017, p.149). Sendo assim, é um fator de considerável importância no ensino e aprendizagem no atual contexto educacional.

Autores como Blum e Leiβ (2006), Borssoi (2013), Almeida, Silva e Vertuan (2016), consideram que o uso de tecnologias em atividades de Modelagem Matemática vem ancorado em algumas justificativas importantes:

> a) Possibilita lidar com situações-problema mais complexas e fazer uso de dados reais, ainda que estes sejam em grande quantidade ou assumam valores muito grandes;
> b) Permite que a maior parte dos esforços se concentre nas ações cognitivas associadas ao desenvolvimento da atividade de modelagem, considerando que a realização de cálculos, aproximações e representações gráficas é mediada pelo uso do computador;
> c) Possibilita lidar com as situações-problema por meio de simulações numéricas ou gráficas, variando a parâmetros nas representações gráficas e (ou) algébricas (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 32).

Na literatura, encontramos resultados de pesquisas que apontam a aproximação entre a Modelagem Matemática e o uso de tecnologias como desejável. A esse respeito, citamos Malheiros e Franchi (2013), para as quais, a Modelagem Matemática

> pode ser considerada um enfoque pedagógico em sinergia com as TIC, já que, ao fazer Modelagem, a partir da escolha de um tema de interesse deles, os estudantes, com computadores e outras mídias, procuram soluções para determinados problemas por eles propostos, num processo de investigação no qual o professor se configura como orientador ao longo de todo o processo (MALHEIROS; FRANCHI, 2013, p. 178).

Borssoi e Almeida (2015, p.44) indicam que

> a modelagem de situações-problema associada a disponibilidade de recursos tecnológicos pode ser facilitadora da aprendizagem significativa e é adequada para compor ambientes favoráveis ao despertar da intencionalidade para aprender.

Para Greefrath et al. (2011, p. 302), "... o uso das ferramentas digitais não somente cria um apêndice para o ciclo de modelagem, mas também influencia cada parte do ciclo". O mesmo autor considera que o uso de ferramentas tecnológicas pode ser feito em etapas diferentes durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Uma das propostas, como mostra a Figura 6, é utilizar as ferramentas tecnológicas apenas após o entendimento e tradução do problema matemático e expressões matemáticas, como uma possibilidade de solução de um modelo que não poderia ser solucionado se a ferramenta não estivesse disponível.

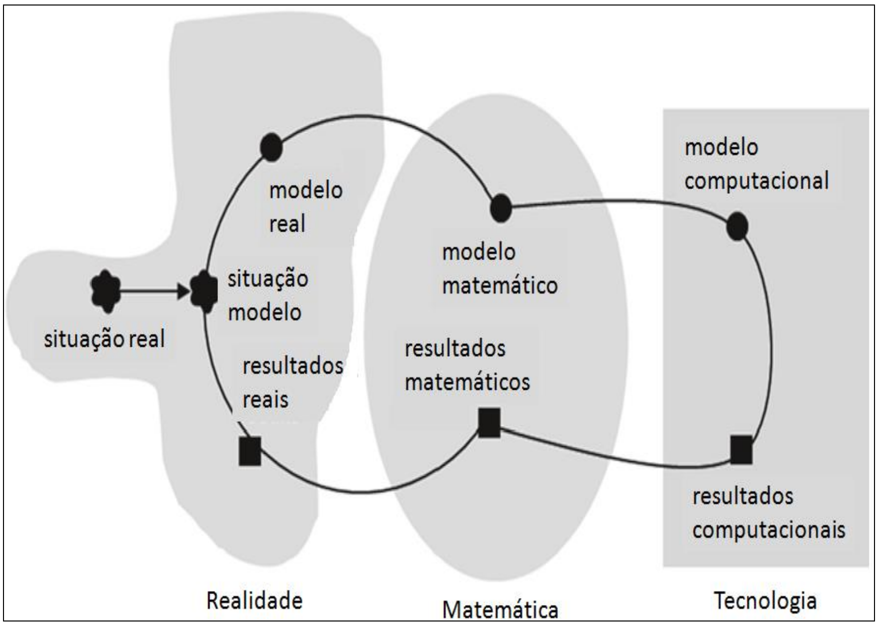


Figura 6 - Ciclo de Modelagem segundo Blum e Leiβ (2006) com adição do modelo computacional
Fonte: Greefrath et. al. (2011, p.302)

A segunda proposta está representada na Figura 7, e utiliza as ferramentas tecnológicas em várias fases da Modelagem Matemática podendo auxiliar na investigação de informações e na conexão com o problema real. Portanto, segundo Greefrath et al. (2011, p.302), "As diferentes funções das ferramentas digitais nas aulas de Matemática são importantes para problemas de modelagem em diferentes fases do ciclo de modelagem[1]" (tradução nossa).

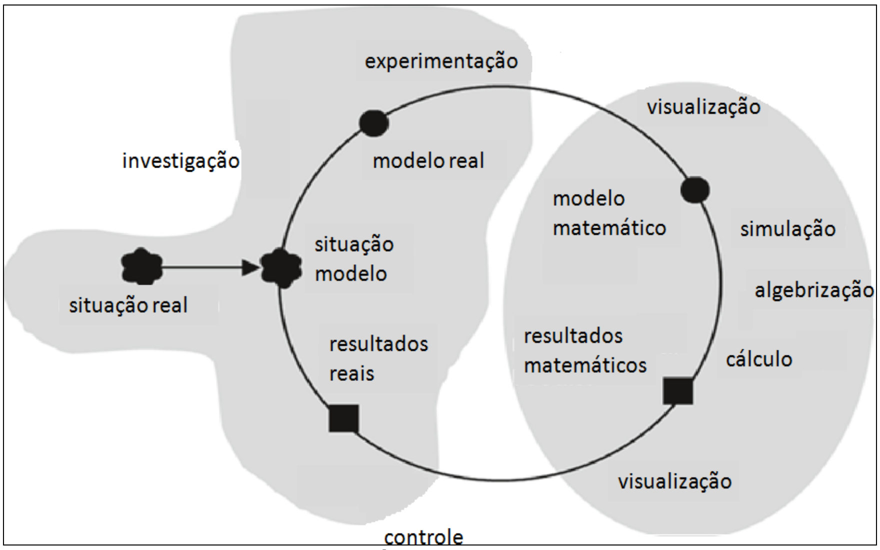


Figura 7 - Ciclo de Modelagem com a influência de ferramentas digitais segundo Blum e Leiβ, (2006)
Fonte: Greefrath et. al. (2011, p.303)

[1]The different functions of the digital tools in mathematics lessons are important for modelling problems in different phases in the modelling cycle.

No entanto, pesquisadores como BlomhØj e Kjeldsen (apud SOARES; JAVARONI, 2013, p. 210), consideram que o processo de modelagem não tem uma sequência rígida de passagens, apresentam ciclos que não necessariamente se iniciam com a compreensão da situação e do problema, de modo que poderiam ter início em qualquer etapa, inclusive pelo modelo matemático.

Assim, Soares e Javaroni (2013) apresentam uma alternativa para se iniciar um trabalho com Modelagem Matemática a partir do estudo de um modelo, denominado Análise de Modelos, que

> [...] se configura como uma possibilidade de encaminhar o trabalho com modelos matemáticos em sala de aula, cuja ideia central é propor a análise de um modelo para um fenômeno de uma área científica ou do dia a dia como pano de fundo para a introdução de conceitos matemáticos novos para os alunos. O modelo proposto pode ser um modelo clássico da literatura, ou então um modelo derivado de pesquisas e que ainda não é tão conhecido (SOARES; JAVARONI, 2013, p. 197).

Uma característica importante da Análise de Modelos, verificada por Deprez (2011) e por trabalhos desenvolvidos pelo GPIMEM[2], é que ela assume a possibilidade de serem trabalhados conteúdos matemáticos da área de interesse dos alunos e que ainda não foram estudados por eles. Para esse intento algumas atividades devem ser realizadas para que exista compreensão do modelo matemático,

> (i) estudo do fenômeno em questão;
> (ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo;
> (iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno;
> (iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas;
> (v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções o fenômeno;
> (vi) análise das limitações do modelo (SOARES; JAVARONI, 2013, p. 199).

Essa nova possibilidade de utilização do ciclo de modelagem traz a tecnologia como uma aliada em potencial, tendo em vista que quando se é apresentado aos

[2] Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Rio Claro/SP. Estuda questões ligadas às tecnologias na Educação Matemática refletindo sobre as mudanças que trazem a inserção das Tecnologias Digitais na Educação. Disponível em: http://igce.rc.unesp.br/#!/gpimem. Acesso: 04 de maio de 2017.

alunos um modelo sobre um assunto ainda não estudado, a visualização do que ocorre com esse modelo é de grande importância.

O exposto neste capítulo orienta parte da concepção do material de ensino que passamos a apresentar na sequência.

5 CONSTITUIÇÃO DA UEPS: O PRODUTO EDUCACIONAL

Neste capítulo apresentamos a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, a qual está pautada nos pressupostos teóricos que apresentamos no Capítulo 3 e no Capítulo 4. O resultado da articulação entre orientações para organização do ensino com potencial para promover a aprendizagem significativa dos alunos e a disponibilização de atividades que atendam diferentes tendências discutidas pela área da Educação Matemática resultou no Produto Educacional que passamos a apresentar.

Além da elaboração do Produto Educacional o trabalho de pesquisa consistiu na aplicação do mesmo em condições reais de ensino e na análise dos dados que resultaram deste trabalho, que será apresentado no Capítulo 6.

A elaboração da UEPS, desde o início, levou em conta o ambiente educacional para a qual se destinava: uma turma de Licenciatura em Matemática, cuja ementa da disciplina prescreve que a disciplina deve apresentar e estudar conceitos e propriedade das Equações Diferenciais Ordinárias, conhecendo resultados importantes desta teoria e aplicando-os em outras áreas da Matemática.

Como a disciplina ministrada possui uma ementa flexível, o professor tem a possibilidade de escolher os conteúdos e a forma com que vai trabalhar. Assim a UEPS foi elaborada pensando na formação dos alunos de Licenciatura em Matemática, que eram conhecidos pela pesquisadora, pois a mesma já havia lecionado na turma no semestre anterior, e havia percebido que os conhecimentos prévios desses alunos exigiam uma atenção não apenas para conteúdos voltados para equações diferenciais, mas também para conteúdos que deveriam ser considerados como já aprendidos.

Assim, estávamos preocupados em não somente aprofundar os conhecimentos sobre equações diferenciais, mas em trabalhar em um curso de formação de professores em que os alunos não haviam vivenciado diferentes situações de ensino, a não ser o que podemos chamar de aula tradicional.

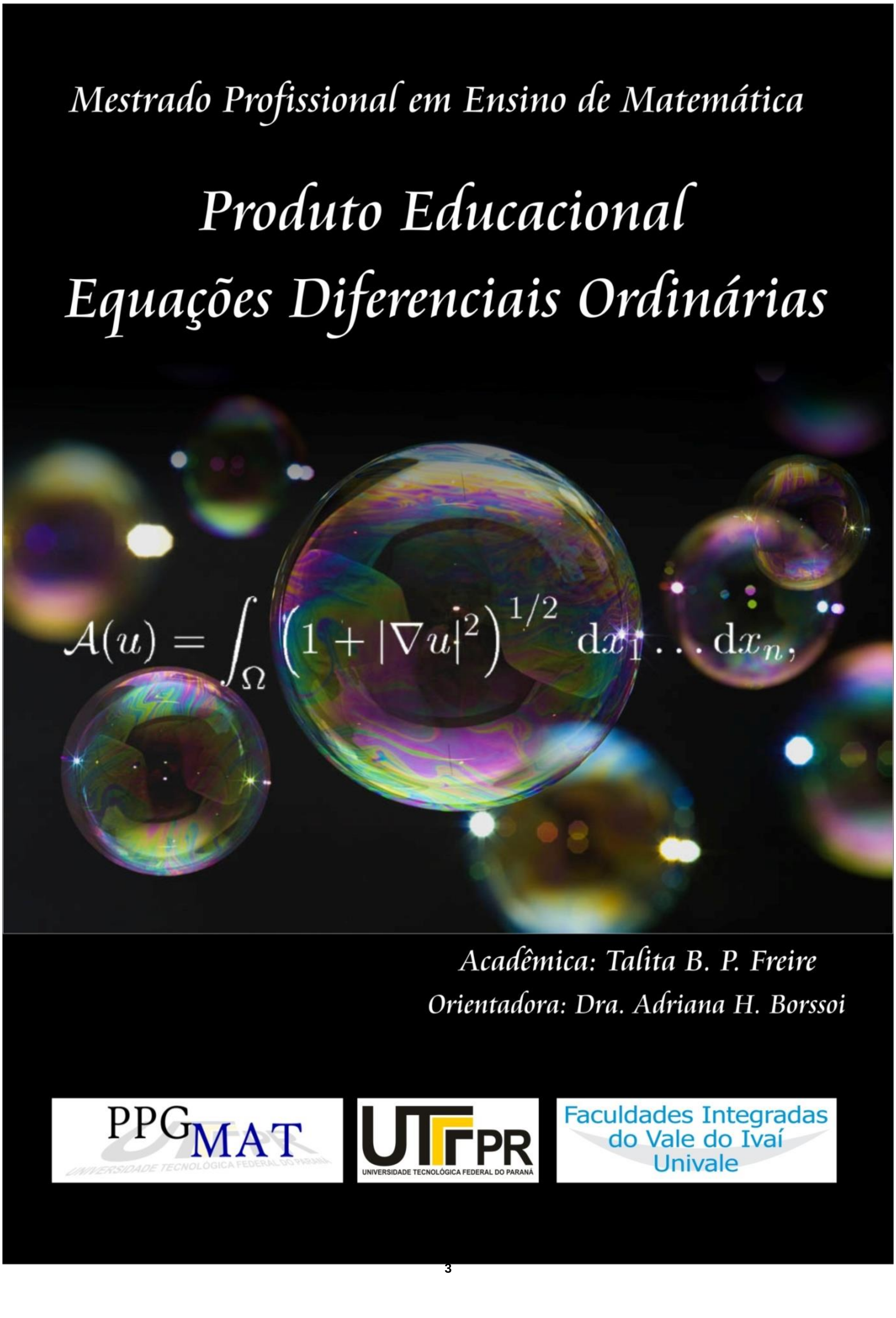
As atividades que compõem a unidade de ensino foram elaboradas ao longo do desenvolvimento do semestre, pois realizávamos uma avaliação formativa a cada encontro, anotando as dificuldade e facilidades dos alunos. Estes mantinham um caderno pedagógico, uma pasta com presilha, onde anexavam suas anotações e as atividade que realizavam.

O nível de complexidade das atividades, relacionado tanto ao conteúdo quanto as exigências durante a realização da própria atividade, levava em consideração a aprendizagem dos alunos e a necessidade de realizar pontes entre os conteúdos que eles deveriam saber, mas que ainda apresentavam falhas, esperando enriquecer determinados subsunçores.

O Quadro 1 mostra o cronograma da disciplina, bem como a distribuição das atividades da UEPS. Em seguida, apresentamos o Produto Educacional.

Aula	Data	Conteúdo ministrado/ Atividade
1	02/08/2016	Apresentação da disciplina. **Atividade 1**: Questionário Inicial/ Eficiência de um operador de Máquinas
2	09/08/2016	**Atividade 2**: Estudo da obesidade como fator de risco da diabetes tipo 2
3	16/08/2016	Introdução: definição, ordem, grau e existência de uma EDO
4	23/08/2016	Solução de uma EDO, intervalo de existência
5	30/08/2016	Lista de exercícios (modelo livro didático)
6	03/09/2016	(Sábado Letivo) Classificação de EDO de primeira ordem.
7	06/09/2016	Palestra ministrada ao curso de Licenciatura em Matemática pelo prof. Dr. Sérgio Carrazedo Dantas. “O uso da tecnologia como uma possibilidade para produção de significados”
8	13/09/2016	(Sábado Letivo) Lista de exercícios (modelo livro didático)
9	17/09/2016	Lista de exercícios (modelo livro didático)
10	20/09/2016	**Atividade 3**: Ritalina
11	27/09/2016	Avaliação Bimestral
12	04/10/2016	**Atividade 4**: Campo de Direções
13	11/10/2016	Teoria sobre campo de direções
14	18/10/2016	**Atividade 5**: É possível afirmar o horário da morte de uma pessoa com precisão?
15	25/10/2016	Análise dos campos de direções dos modelos já estudados
16	01/11/2016	**Atividade 6**: Movimento Uniforme
17	08/11/2016	Métodos de resolução de EDO exatas. **Atividade 7**: Apresentação do trabalho de pesquisa (Equipes A, B e C)
18	22/11/2016	Métodos de resolução de EDO por fator integrante. **Atividade 7**:Apresentação do trabalho de pesquisa (Equipes D e E)
19	29/11/2016	Métodos de resolução de EDO linear, Bernoulli e Homogênea Neste período os alunos responderam ao Questionário Final (**Atividade 8**)
20	06/12/2016	**Atividade 9**: Avaliação Final

Quadro 1- Cronograma das atividades
Fonte: A própria autora



[3]

[3] A capa ilustrada foi reformulada para a versão final do produto.

SUMÁRIO

EFICIÊNCIA DE UM OPERADOR DE MÁQUINAS

(Adaptado de: Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. Rodney Carlos Bassanezzi. 4. ed.São Paulo, Contexto, 2014, p. 126, exemplo 2.15)

A eficiência E (em porcentagem) de um operador de máquinas varia com o tempo de trabalho realizado durante um dia (8horas). Suponhamos que a eficiência seja crescente nas 4 primeiras horas de trabalho e depois decresça nas 4 horas restantes, isto é,

$$\frac{dE}{dt} = 40 - 10t$$

onde t é o número de horas de trabalho do operador.

Determine E = E(t), isto é, a eficiência em qualquer instante t.

Suponhamos que, para uma tarefa específica, um operador tenha eficiência de 72% depois de haver trabalhado 2 h, determine a equação da eficiência deste operador particular realizando esta tarefa específica: https://ggbm.at/MJzqYfPV

Qual é a eficiência do operador do exemplo anterior após ter trabalhado 8 horas?

Verifique o instante em que a eficiência será máxima.

ESTUDO DA OBESIDADE COMO FATOR DE RISCO DA DIABETES TIPO 2

(Adaptado de: A aprendizagem Significativa em Atividades de Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino (BORSSOI, 2004, p. 89))

O risco de um indivíduo desenvolver Diabetes do tipo 2 em função da obesidade, está associada ao seu índice de massa corporal (IMC). Como mostrado na tabela abaixo.

IMC	Risco (%)
23,95	5,7
25,95	8,57
27,95	17,14
29,95	25,71
31,95	38,57
33,95	57,14
35,95	91,43

Tabela 1 - Indicativo de risco para Diabetes tipo 2 em função do IMC
Fonte: Revista Veja, edição 1787, ano 36 – n° 04, p. 77, publicada em 29/01/2003

A avaliação do risco, baseado no índice de massa corporal - IMC é justificado devido o mesmo indicar a taxa de gordura no organismo de uma pessoa. Sendo as taxas de gordura no sangue elevadas, a ação da insulina fica comprometida, indicando risco de desenvolver algumas complicações à saúde.

O IMC é obtido pela expressão $IMC = \frac{massa\ (Kg)}{(altura\ (m))^2}$ e a classificação em termos do “peso” é apresentada pela tabela.

Resultado do IMC	Significado
Menor que 20	Abaixo do peso
Entre 20 e 25	Peso Normal
Entre 25 e 30	Acima do Peso
Acima de 30	Obesidade

Tabela 2 - Avaliação do IMC
Fonte: http:// www.planetanatural.com.br

Observando os dados anteriores, proponha um problema e obtenha sua solução.

OBSERVAÇÕES HISTÓRICAS[4]

Sem conhecer um pouco as equações diferenciais, e os métodos de resolvê-las, é difícil apreciar a história deste importante ramo da matemática. Além disso, o desenvolvimento das equações diferenciais está intimamente entrelaçado com o desenvolvimento da matemática e não pode dele ser dissociado.

Isaac Newton

O estudo das equações diferenciais inaugurou-se no início do cálculo, com Issac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), no século XVII. Newton cresceu no campo inglês, foi educado no Trinity College, Cambridge, e aí se tornou professor de matemática em 1969. Suas históricas descobertas no cálculo e das leis fundamentais da mecânica datam de 1665. Essas descobertas circulam entre seus amigos, pois Newton era muito sensível a críticas, e não principiou a publicar seus resultados até 1687, com o aparecimento do seu livro mais famoso, *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

Embora Newton tenha trabalhado relativamente pouco no campo estrito das equações diferenciais, o desenvolvimento que proporcionou ao cálculo e à elucidação dos princípios básicos de mecânica constituíram a base para as aplicações que se fizeram no século XVIII, notavelmente por Euler. A carreira de pesquisa ativa de Newton terminou, em grande parte, no início da década de 1690, exceto quanto à resolução de alguns problemas apresentados como desafio. Foi nomeado Diretor da Casa da Moeda Britânica, em 1696, e renunciou ao cargo de professor alguns anos mais tarde. Foi enobrecido em 1705 e, depois de morto, sepultado na Abadia de Westminster.

[4] Esta nota histórica foi adaptada do livro n° 2 da citação, páginas 8, 9 e 10.

Leibniz nasceu em Leipzig e completou seu doutorado em filosofia com 20 anos, na Universidade de Altdorf. Ao longo da sua vida dedicou-se a trabalhos acadêmicos em muitos campos diferentes. Era, no fundamental, um autodidata em matemática, pois seu interesse no campo desenvolve-se quando estava nos seus 20 anos.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Leibniz chegou aos resultados fundamentais do cálculo por via independente, embora um pouco posterior a Newton, mas foi o primeiro a publicá-los, em 1684. Leibniz tinha plena consciência do poder de uma boa notação matemática e a notação que usamos para a derivada (dy/dx), e para a integração, foram introduzidas por ele.

Descobriu o método de separação de variáveis em 1691, a redução de equações homogêneas a equações separáveis em 1691, e o procedimento de resolução de equações lineares de primeira ordem em 1694. Passou a vida como embaixador e conselheiro de muitas famílias germânicas reais, o que lhe permitiu viagens extensas e ampla correspondência com outros matemáticos, especialmente com os irmãos Bernoulli. Durante esta correspondência, muitos problemas de equações diferenciais foram resolvidos na segunda metade do século XVII.

Os irmãos Jakob (1654 - 1705) e Johan (1667 – 1748) Bernoulli, da Basiléia, contribuíram muito para o desenvolvimento de métodos de resolução de equações diferenciais para ampliar o campo de aplicação destas equações. Jacob tornou-se professor de matemática na Basiléia, em 1687, e Johan foi nomeado para a mesma posição depois da morte do irmão, em 1705. Com o auxílio do cálculo os dois irmãos formularam como equações diferenciais muitos problemas de mecânica e os resolveram.

Jakob Bernoulli

Johann Bernoulli

Daniel Bernoulli (1700 – 1782), filho de Johann, migrou jovem para São Petersburgo, a fim de juntar-se à recém-fundada Academia de São Petersburgo, mas retornou à Basiléia em 1733 como professor de botânica e, depois, de física. Seu interesse residia, principalmente, nas equações diferenciais parciais e respectivas aplicações. Por exemplo, é o seu nome o associado à famosa equação de Bernoulli da mecânica dos fluidos. Foi também o primeiro a encontrar as funções que, um século depois, tornaram-se conhecidas como funções de Bessel.

Daniel Bernoulli

O maior matemático do século XVIII, Leonard Euler (1707 – 1783), cresceu nas vizinhanças da Basiléia e foi aluno de Johann Bernoulli. Com seu amigo Daniel Bernoulli foi para São Petersburgo em 1727. Durante o resto de sua vida continuou associado à Academia de São Petersburgo (1727 – 1741 e 1766 – 1783) e à Academia de Berlim (1741 – 1766). Euler foi o matemático mais prolífero de todos os tempos; suas obras enchem mais de 70 grandes volumes.

Leonard Euller

O seu interesse cobria todas as áreas das matemáticas e muitos campos de aplicação. Embora ficasse cego durante os últimos 17 anos de vida continuou a trabalhar até o dia de sua morte. Têm especial interesse as formulações de problemas de mecânica em linguagem matemática e o desenvolvimento de métodos de resolução destes problemas matemáticos. Lagrange afirmou que o trabalho de Euler em mecânica era “a primeira grande obra na qual a análise se aplica à ciência do movimento”. Entre outras coisas, Euler identificou a condição de exatidão das equações diferenciais de primeira ordem em 1734 – 1735, desenvolveu a teoria dos fatores integrantes neste mesmo artigo e apresentou a solução geral das equações lineares com coeficientes constantes e 1743. Aplicou os últimos resultados a equações não-homogêneas em 1750 – 1751, Euler passou a usar séries de potência para resolver equações diferenciais. Propôs também um procedimento numérico em 1768 – 1769, fez importantes contribuições às equações diferenciais parciais e deu o primeiro tratamento sistemático ao cálculo das variações.

Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) tornou-se professor de matemática na cidade de Turim, onde nasceu, com a idade de 19 anos. Sucedeu a Euler na cadeira de matemática da Academia de Berlim, em 1766, e foi para a Academia de Paris em 1787. A sua fama provém, em grande parte, de sua obra monumental *Mécanique analytique*, publicada em 1788, que é um tratado elegante e abrangente da mecânica newtoniana.

Joseph-Louis Lagrange

No que se refere às equações diferenciais elementares, Lagrange mostrou em 1762 – 1765 que a solução de uma equação diferencial homogênea de ordem n é uma combinação linear de *n* soluções independentes. Depois, em 1774 – 1775, publicou o desenvolvimento completo do método da variação de parâmetros. Lagrange também é conhecido pelo seu tratamento fundamental nas equações diferenciais parciais e no cálculo das variações.

Pierre-Simon de Laplace (1749 – 1827) viveu na Normandia quando menino, mas mudou-se para Paris em 1768 e logo deixou sua marca nos círculos científicos, sendo eleito para a Académie des Sciences em 1773. Destacou-se no campo da mecânica celeste; seu maior trabalho, *Traité de mécanique celeste*, foi publicado em cinco volumes entre 1799 e 1825. A equação de Laplace é fundamental em muitos ramos da física matemática, e Laplace estudou profundamente em suas investigações da atração gravitacional.

Pierre-Simon de Laplace

A transformada de Laplace também recebeu o nome em sua abordagem, embora sua utilidade para a solução de equações diferenciais só tenha sido reconhecida muito mais tarde.

As equações diferenciais parciais começaram a ser intensamente estudadas depois que seu papel crucial para a física matemática se tornou claro. Várias funções que surgiram como soluções de equações diferenciais ordinárias também ocorriam repetidamente e foram estudadas exaustivamente. Conhecidas coletivamente como funções transcendentais superiores, muitas delas receberam os nomes de matemáticos, como as funções de Bessel, Hermite, Chebyshev e Hankel.

INTRODUÇÃO

Muitos problemas importantes e significativos da engenharia, das ciências físicas e das ciências sociais, formulados em termos matemáticos, exigem a determinação de uma função que obedece a uma equação que contém uma ou mais derivadas da função desconhecida. Estas equações são **equações diferenciais**.

Talvez o exemplo mais conhecido seja o da lei de Newton $F = m.a$ .Se $u(t)$ é a posição no instante t de uma partícula de massa m submetida a uma força F, temos

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = F\left[t, u, \frac{du}{dt}\right], \qquad (1)$$

Onde a força F pode ser função de t, u e da velocidade $du/_{dt}$. A fim de determinar o movimento da partícula sob a ação da força F é necessário encontrar uma função u que obedeça à Eq. (1).[5]

DEFINIÇÃO 1: Uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial (ED)[6]**.

OBSERVAÇÃO 1: Uma equação diferencial é chamada ordinária (EDO) se a função incógnita depende de apenas uma variável independente. Se a função incógnita depende de mais de uma variável independente, temos uma equação diferencial parcial (EDP) ou equação de derivadas parciais[7].

EXEMPLO 1: As seguintes equações são equações diferenciais envolvendo a função incógnita y.[8]

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \qquad (1.1)$$

$$e^y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \qquad (1.2)$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3} + (senx)\frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0 \qquad (1.3)$$

---

[5] Adaptado da citação n° 2, página 1.
[6] Adaptado da citação n° 6, página 2.
[7] Adaptado da citação n° 4, página 15.
[8] Adaptado da citação n° 4, página 15.

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad (1.5)$$

As equações 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4 são exemplos de EDO, pois a função incógnita y depende unicamente da variável x.

A equação 1.5 é uma EDP pois y depende das duas variáveis independentes t e x.[9]

NOTAÇÕES:[10]

LEIBNIZ: explicita claramente as variáveis dependentes e independentes.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 156x = 0$$

x: Variável dependente;

t: Variável independente.

LINHA: é usada somente para denotar as três primeira derivadas (y', y'', y''').

$$y'' - y' + 6y = 0$$

A quarta derivada é escrita como $y^{(4)}$ em vez de y''''.

PONTO DE NEWTON: (Sujeira de Mosca) é usada em Física e Engenharia para denotar derivadas em relação ao tempo.

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -32 \text{ corresponde a } \ddot{s} = -32$$

EM SUBSCRITO: encontradas em derivadas parciais.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2} - 2\frac{du}{dt} \text{ corresponde a } u_{xx} = u_{tt} - 2u_t$$

DEFINIÇÃO 2: A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que nela comparece.[11]

---

[9] Adaptado da citação n° 4, página 15.
[10] Adaptado da citação n° 6, página 3.

EXERCÍCIO 1: Observando os exemplos de 1.1 a 1.4, determine a ordem de cada um deles, quando possível.

DEFINIÇÃO 3: O **grau** de uma equação diferencial, que pode ser escrita como um polinômio na função incógnita e suas derivadas, é a potência a que se acha elevada a derivada de ordem mais alta.

OBSERVAÇÃO 2: Nem toda equação diferencial pode ser classificada segundo o grau.

EXERCÍCIO 2: Ainda observando os exemplos de 1.1 a 1.4, determine, quando possível, o grau de cada uma das equações.

DEFINIÇÃO 4: Uma EDO de ordem *n* na função incógnita *y* e na variável independente x é **linear** se tem a forma:

$$b_n(x).\frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-1}(x).\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ \dots + \ b_1(x).\frac{dy}{dx} + b_0(x).y = g(x)$$

As funções $b_j(x)(j = 0, 1, 2, \dots, n)$ e $g(x)$ supõem-se conhecidas e dependem apenas da variável x . As equações diferenciais que não podem ser postas sob essa forma dizem-se **não lineares**.[12]

EXEMPLO 2:

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \qquad (2.1)$$

É uma EDO de 1ª ordem, onde $b_1(x) = \ 1$ e $g(x) = 5x + 3$

$$4.\frac{d^3 y}{dx^3} + sen(x).\frac{d^2 y}{dx^2} + 5xy = 0 \qquad (2.2)$$

É uma EDO de 3ª ordem, onde $b_3 = 4, b_2 = sen(x), b_1 = 0, b_0 = 5x \ e \ g(x) = \ 0$

Enquanto as EDO (2.3)

$$e^y.\frac{d^2 y}{dx^2} + 2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

---

[11] Adaptado da citação n° 4, página 15.
[12] Adaptado da citação n°6, página 4.

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y.\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x$$

Não são lineares.

EXERCÍCIO 3: Nas equações que seguem, classifique cada uma delas quanto a ordem, o grau (quando possível) e a linearidade. Depois determine a função incógnita e a variável independente.

$$y''' - 5xy' = e^x + 1$$

Ordem:

Grau:

Linearidade:

Função Incógnita:

Variável Independente:

$$s^2.\frac{d^2t}{ds^2} + st.\frac{dt}{ds} = s$$

Ordem:

Grau:

Linearidade:

Função Incógnita:

Variável Independente:

$$5.\left(\frac{d^4b}{dp^4}\right)^5 + 7.\left(\frac{db}{dp}\right)^{10} + b^7 - b^5 = p$$

Ordem:

Grau:

Linearidade:

Função Incógnita:

Variável Independente:

$$y.\frac{d^2x}{dy^2} = y^2 + 1$$

Ordem:

Grau:

Linearidade:

Função Incógnita:

Variável Independente:

SOLUÇÃO DE UMA EDO

DEFINIÇÃO 1: Toda função ϕ, definida em um intervalo I, as quais quando substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem *n* reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma solução da equação diferencial no intervalo.
Em outras palavras, uma solução de uma equação diferencial ordinária de ordem *n* é uma função ϕ que tem pelo menos *n* derivadas e para a qual
$F\left(x, \emptyset(x), \emptyset'(x), \dots, \emptyset^n(x)\right) = 0 \ \ \forall x \in \mathrm{I}$
Assim, dizemos que ϕ satisfaz a equação diferencial em I.[13]
EXEMPLO 1: Verifique se a função indicada é uma solução da equação diferencial dada no intervalo $(-\infty, \infty)$.
$y = \frac{1}{16}x^4$ para a EDO: $\frac{dy}{dx} = x.y^{1/2}$.

$y(x) = \ c_1.sen(2x) + c_2.\cos(2x)$ para a EDO: $y'' + 4y = 0$.

$y = x.e^x$ para a EDO: $y'' - 2y' + y = 0$.

$y = \ x^2 - 1$ para a EDO: $(y1)^4 + y^2 \ = -1$

OBSERVAÇÃO 1: Não se pode pensar em solução de uma equação diferencial ordinária sem, simultaneamente, pensar em intervalo. O intervalo I da definição de

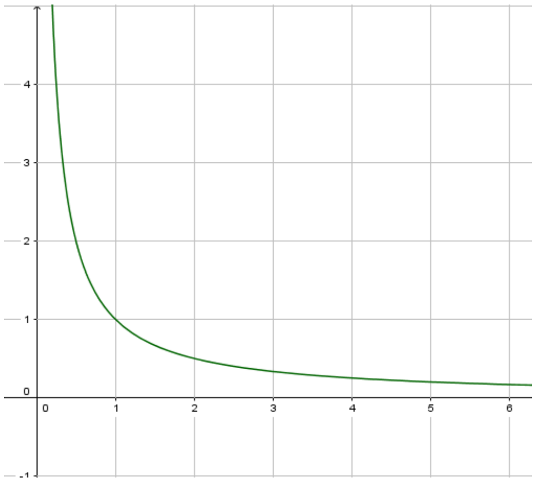
[13] Adaptado da citação n°6, páginas 4 e 5.

solução de uma EDO é alternativamente conhecido por intervalo de definição, intervalo de existência, intervalo de validade ou domínio da solução e pode ser um intervalo aberto (a, b), um intervalo fechado $[a, b]$, um intervalo infinito (a, ∞) e assim por diante.[14]

DEFINIÇÃO 2: Um gráfico de uma solução ϕ de uma EDO é chamado de **curva integral.** Uma vez que ϕ é uma solução diferenciável, ela é contínua no seu intervalo de definição I. Assim sendo, pode haver uma diferença entre o gráfico da função ϕ e o gráfico da solução ϕ. Posto de outra forma, o domínio da função ϕ não precisa ser igual ao intervalo I de definição (ou domínio) da solução ϕ.[15]

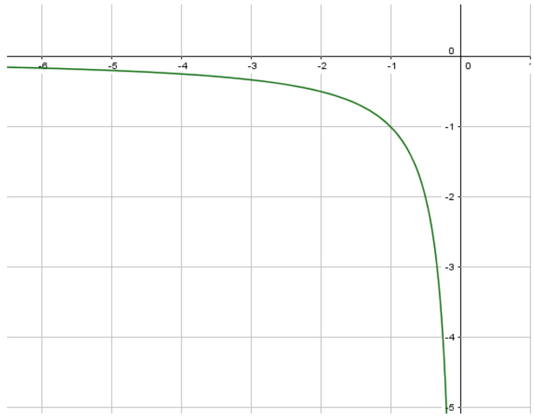
EXEMPLO 2: Observe a solução ϕ, sendo $y = \frac{1}{x}$ da EDO $x.y' + y = 0$ analisando os seus gráficos:[16]

$$f(x) = \frac{1}{x}, para\ x \in (-\infty, \infty)$$



$$f(x) = \frac{1}{x}, para\ x \in (0, \infty)$$

[14] Adaptado da citação n° 6, página5.
[15] Adaptado da citação n° 6, página5.
[16] Adaptado da citação n° 6, página6.



$$f(x) = \frac{1}{x}, para\ x \in (-\infty, 0)$$

OBSERVAÇÃO 2: Quando a solução na qual a variável dependente é expressa somente em termos da variável independente e das constantes é chamada de **solução explícita**. Como por exemplo, $y = \frac{1}{16}x^4$. Ou seja, a solução é da forma

$y = \phi(x)$.

Uma **solução** será **implícita** quando ela for uma relação ou uma expressão $G(x,y) = 0$, que define implicitamente uma solução de ϕ. Como por exemplo, $x^2 + y^2 = 25$.

EXEMPLO 2: Verifique se as funções a seguir são solução da EDO e para aquelas que encontrar resultado positivo, diga se esta solução é explícita ou implícita.

2.1) A função $y = e^x$ para a EDO $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$.

2.2) As funções $y = c.e^{3x}$ e $y = c.\cos(x)$ para a EDO $y' - 3y = 0$..

2.3) A função $y = 1$ para a EDO $y'' + 2y' + y = x$.

2.4) A função$x^2 + y^2 = 25\ onde\{-5, x < 5\}$ para a EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

LISTA DE EXERCÍCIOS nº 1

1- Determine a ordem, a função incógnita e a variável independente em cada uma das seguintes equações diferenciais:

a) $y''' - 5xy' = e^x + 1$

b) $t\ddot{y} + t^2\dot{y} - (sent)\sqrt{y} = t^2 - t + 1$

c) $y\frac{d^2x}{dy^2} = y^2 + 1$

d) $17y^{(4)} - t^6y^{(2)} - 4{,}2y^5 = 3\cos t$

2- Determine para cada uma das equações diferenciais, (a) ordem, (b) grau (se possível), (c) linearidade, (d) função incógnita, (e) variável independente.

a) $(y'')^2 - 3yy' + xy = 0$

b) $x^4y^{(4)} + xy''' = e^x$

c) $t^2\ddot{s} - t\dot{s} = 1 - sent$

d) $y^{(4)} + xy''' + x^2y'' - xy' + seny = 0$

e) $\frac{d^nx}{dy^n} = y^2 + 1$

f) $\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right)^2 + \frac{d^2r}{dy^2} + y\frac{dr}{dy} = 0$

3- Determinar a ordem da equação diferencial, e dizer se a equação é linear ou não:

a) $t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 2y = sent$

b) $\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$

c) $\frac{d^2y}{dt^2} + sen(t + y) = sent$

d) $(1 + y^2)\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = e^t$

e) $\frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$

f) $\frac{d^3y}{dt^3} + t\frac{dy}{dt} + (cos^2t)y = t^3$

4- Verifique se a função, ou as funções dadas, constituem solução da equação diferencial.

a) $y'' - y = 0$ $\quad y(t) = e^t$

b) $y'' + 2y' - 3y = 0$ $\quad y(t) = e^{-3t}$ $\quad y(t) = e^t$

c) $ty' - y = t^2$ $\quad y = 3t + t^2$

d) $y'''' + 4y''' + 3y = t$ $\quad y(t) = t/3$ $\quad y(t) = e^{-t} + t/3$

e) $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, t > 0$ $\quad y(t) = t^{1/2}$ $\quad y(t) = t^{-1}$

f) $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0,\ t > 0$ $\quad y(t) = t^{-2}$

CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM[17]

FORMA PADRÃO E FORMA DIFERENCIAL

A forma padrão de uma equação diferencial de primeira ordem na função incógnita $y(x)$ é

$$y' = f(x, y)$$

Onde a derivada y' aparece apenas no membro esquerdo da equação. Muitas (porém não todas) equações diferenciais de primeira ordem podem ser escritas na forma padrão.

O membro direito pode ser escrito como o quociente de duas outras funções $M(x, y)$ e $-N(x, y)$. Assim, $y' = f(x, y)$ se torna $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{-N(x,y)}$, que equivale à forma diferencial

$$M(x, y).dx = -N(x, y).dy.$$

EXEMPLO 1: Escreva a equação diferencial $xy' - y^2 = 0$ na forma padrão.

EXEMPLO 2: $(y' + y)^5 = sen\left(\frac{y}{x}\right)$ não pode ser escrita na forma padrão.

EQUAÇÕES LINEARES

Dado uma equação diferencial na forma padrão $y' = f(x, y)$, se $f(x, y)$ puder ser escrita como $f(x, y) = -p(x).y + q(x)$ então a equação diferencial é linear.

Equações diferenciais lineares de primeira ordem podem sempre ser expressas como

$$y' + p(x).y = q(x) .$$

EXEMPLO 3: $y' = (senx).y + e^x$ é linear tendo $p(x) = -senx$ e $q(x) = e^x$.

EXEMPLO 4: $y' = x.sen(y) + e^x$ não é linear, em virtude do termo $sen(y)$.

---

[17] Adaptado da citação n° 4, páginas 28 e 29.

EXEMPLO 5: $y' = y^2 + x$ não é linear, em virtude da presença do termo y^2.

EQUAÇÕES DE BERNOULLI

Uma equação diferencial de Bernoulli é uma equação da forma

$y' + p(x).y = q(x).y^n$

Onde n é um número real.

OBSERVAÇÃO 1: Quando $n = 1$ ou $n = 0$, a equação de Bernoulli se reduz a uma equação linear.

EXEMPLO 6: A equação $y' = 5$ é linear e de Bernoulli tendo $p(x) = 0$ e $q(x) = 5$.

EXEMPLO 7: A equação $y' + x.y^5 = 0$ não é linear devido ao termo y^5, no entanto, é de Bernoulli pois pode ser escrita como $y' = x.y^5$, assim $p(x) = 0$, $q(x) = -x$ e $n = 5$.

EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Uma equação diferencial na forma padrão $y' = f(x, y)$ é homogênea se

$f(tx, ty) = f(x, y)$

Para todo número real t.

EXEMPLO 8: Verifique se equação diferencial $y' = \frac{y+x}{x}$ é homogênea.

EXEMPLO 9: Verifique se a equação diferencial $\mathrm{y}' = \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{x}}$ é homogênea.

EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

Seja uma equação diferencial na forma $M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0$. Se $M(x,y) = A(x)$ (função somente de x) e $N(x,y) = B(y)$ (função somente de y), a equação diferencial se diz separável, ou de variáveis separáveis.

EXEMPLO 10: Verifique se a equação diferencial $\mathrm{sen(x).dx + y^2.dy = 0}$ é separável.

EQUAÇÕES EXATAS

Uma equação diferencial da forma $M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0$ é exata se

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

EXEMPLO 11: Verifique se a equação diferencial $3x^2y.dx + (y + x^3).dy = 0$ é exata.

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 2

1- Escreva a equação diferencial $(ay+3)dx+(2x-y^2+1)dy=0$ na forma padrão.

2- Determine se as seguintes equações diferenciais são lineares:

a) $y` + xy^5 = 0$

b) $y` + xy = e^x y$

c) $y` + \frac{x}{y} = 0$

3- Determine se as equações diferenciais são equações de Bernoulli:

a) $xy` + y = \sqrt{y}$

b) $y` + \frac{x}{y} = 0$

4- A equação diferencial $y` = \frac{x^2+y}{x^3}$ é homogênea?

5- A equação diferencial $xy^2dx - x^2y^2dy = 0$ é separável?

6- A equação diferencial $xydx + y^2dy = 0$ é exata?

7- As equações diferenciais abaixo são separáveis e/ou exatas?

a) $y` = xy + 1$

b) $y` = xy$

c) $-x^2dx + y^2dy = 0$

d) $xy^2dx + (x^2+y^2)dy = 0$

SOLUÇÃO DE EDO SEPARÁVEL

A solução de uma equação diferencial de primeira ordem separável

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

é

$$\int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy = \mathrm{c}$$

Onde c representa uma constante arbitrária.

OBS: Essas integrais nem sempre podem ser calculadas efetivamente.

EXEMPLO 1: Solucione $xdx - y^2dy = 0$.

EXEMPLO 2: Solucione $y' = y^2x^3$.

OBS: A solução para o problema de valor inicial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, y(x_0) = y_0$ pode ser obtida usualmente e depois deve ser aplicado a condição inicial diretamente para determinar a constante c.

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 3

1- Encontre a solução das equações diferenciais abaixo:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2}{y}$

b) $y` = \frac{x+1}{y^4+1}$

c) $xdx + ydy = 0$

d) $dx + \frac{1}{y^4}dy = 0$

e) $xdx - y^3dy = 0$

f) $(t+1)dt - \frac{1}{y^2}dy = 0$

g) $\frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy = 0$

2- Determine a solução das equações diferenciais com problemas de valor inicial:

a) $x^2dx + 8ydy = 0$ $\quad y(2) = 1$

b) $3xdx - ydy = 0$ $\quad y(6) = 0$

SOLUÇÃO DE EDO EXATA

TEOREMA: Se $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é uma equação diferencial exata, então existe uma função F de x e y, tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \ e \ \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

TEOREMA: Uma equação diferencial exata $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tem uma solução da forma $F(x,y) = c$, onde c é uma constante e F é uma função de x e y, tal que $F_x = M$ e $F_y = N$.

EXEMPLO 1: Resolva a equação diferencial

$$(3x^2y - 2y^3 + 3)dx + (x^3 - 6xy^2 + 2y)dy = 0$$

EXEMPLO 2: Determine se a EDO $2xydx + (1 + x^2)dy = 0$ é exata, em caso positivo resolva-a.

EXEMPLO 3: Resolva a EDO $(x + seny)dx + (x\cos y - 2y)dy = 0$

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 4

1- Determine se as equações diferenciais ordinárias abaixo são exatas, em caso positivo, encontre a solução.

a) $(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0$

b) $y^2dt + (2yt + 1)dy = 0$

c) $ydx - xdy = 0$

d) $(2x + y)dy + (2y + x)dy = 0$

e) $(x^2 + 2xy - y^2)y` = -y^2 - 2xy + x^2$

2- Determine a solução da equação diferencial ordinária com problema de valor inicial.

$(2xy^3 + 8x)dx + (3x^2y^2 + 5)dy = 0 \qquad y = -1 \ \ para \ x = 2$

FATORES INTEGRANTES

Em geral, a equação diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ não é exata. Por vezes, entretanto, é possível transformá-la em uma equação diferencial exata, mediante a multiplicação de um fator adequado, o fator integrante.

DETERMINAÇÃO DO FATOR INTEGRANTE

Conhecem-se fatores integrantes quando $M(x, y)$ e $N(x, y)$ satisfazem certas condições:

Se $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(x)$ (função somente de x), então

$I(x, y) = e^{\int g(x)dx}$

Se $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = h(y)$ (função somente de y), então

$I(x, y) = e^{-\int h(y)dy}$

EXEMPLO 1: Resolva $(y^2 - y)dx + xdy = 0$

EXEMPLO 2: Resolva a equação diferencial ordinária $(y + 1)dx - xdy = 0$

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 5

1- Determine a solução das Equações Diferenciais Ordinárias abaixo:

a) $y' + 3x^2y = 0$

b) $ydx + (1-x)dy = 0$

c) $y' - 3x^4y = 0$

d) $2xydx + y^2dy = 0$

e) $y' + x^2y = x^2$

2- Encontre o fator integrante das seguintes Equações Diferenciais:

a) $(3x^2y - x^2)dx + dy = 0$

b) $y' + \frac{2}{x}y = 0$

c) $y' - 7y = 14x$

d) $xy^2dx + (x^2y^2 + x^2y)dy = 0$

e) $(y + x^3 + xy^2)dx - xdy = 0$

SOLUÇÃO DE EDO LINEAR

Uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem tem a forma

$y' + P(x)y = q(x)$

Um fator integrante para esse tipo de equação é:

$I(x) = e^{\int P(x)dx}$

Que depende apenas de x, sendo independente de y. Quando multiplicarmos ambos os membros da EDO por $I(x)$, a equação resultante

$y'.I(x) + P(x)y.I(x) = q(x).I(x)$

se torna exata.

EXEMPLO 1: Resolva a EDO $y' - 3y = 6$

OBSERVAÇÃO: Após algumas operações na EDO linear com seu fator integrante obtemos a solução

$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int q(x).e^{\int P(x)dx}dx + c\right]$

EXEMPLO 2: Encontre a solução da EDO $y' - 2xy = x$

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 6

Determine a solução das Equações Diferenciais Ordinárias abaixo:

a) $y' - 3y = 6$

b) $y' - 2xy = x$

c) $y' + \frac{4}{x}y = x^4$

d) $y' + y = senx$

e) $y' - 5y = 0$

SOLUÇÃO DE EDO DE BERNOULLI

Uma equação diferencial de Bernoulli tem a forma

$y' + P(x)y = q(x).y^n$

Onde n é um número real. Neste caso devemos fazer a substituição $z = y^{1-n}$, que transforma a equação diferencial em uma equação diferencial linear e função da incógnita $z(n)$.

EXEMPLO 1: Encontre a solução de $y' + xy = xy^2$.

EXEMPLO 2 Encontre a solução da EDO $y' = xy^3$.

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 7

Determine a solução das Equações Diferenciais Ordinárias abaixo:

a) $y' + y = y^2$

b) $y' + \ y = y^2 e^x$

c) $y' + y = y^{-2}$

d) $y' + xy = xy^2$

e) $y' - \frac{3}{4}y = x^4 y^{1/3}$

SOLUÇÃO DE EDO HOMOGÊNEA

Uma equação diferencial na forma padrão $y' = f(x,y)$ é homogênea se $f(tx,ty) = f(x,y)$ para todo número real t.

Para equações homogêneas também devemos usar uma substituição fazendo $y = ux$ ou $u = \frac{y}{x}$ com $y' = u'x + u$ o que transformará a equação em uma EDO separável de incógnita u.

EXEMPLO 1: Encontre a solução de $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$.

EXEMPLO 2: Encontre a família de soluções de $2ydx - xdy = 0$.

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 8

Determine a solução das Equações Diferenciais Ordinárias abaixo:

a) $y' = \frac{x+y}{x}$

b) $y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{2x-y}$

d) $y' = \frac{x^2-3y^2}{2xy}$

e) $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$

RITALINA NO ORGANISMO

(Adaptado de: SILVA, K. A. P. Aspectos cognitivos em aulas com Modelagem Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. *Experiências em Ensino de Ciências*, v. 12, n. 2, p. 156-170, abr. 2017. Disponível em: http://if.ufmt.br/eenci/artigos/Artigo_ID355/v12_n2_a2017 pdf Acesso: 15/05/2017.)

O cloridrato de metilfenidato que é da família das anfetaminas disponível no mercado sob a forma de cápsulas, é muito indicado para crianças e adultos, principalmente em idade escolar, que são detectados portadores de Transtorno de Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH).

Ritalina é o nome comercial de um medicamento no qual cada cápsula contém 10 mg de metilfenidato. Médicos neurologistas, de forma geral, receitam para crianças de 6 anos um comprimido de 10 mg de ritalina duas vezes por dia. Esse tratamento pode se estender até a adolescência, ou até mesmo à fase adulta. Na fase adulta a posologia do medicamento é alterada.

Segundo informações da bula do medicamento, o metilfenidato é eliminado do plasma com meia-vida média de 2 horas, ou seja, a cada duas horas o efeito químico do medicamento reduz-se pela metade.

Na atividade, o que se pretende investigar é a concentração do medicamento no organismo de crianças de 6 anos que recebem a posologia na qual a cada 12 horas ingere um novo medicamento.

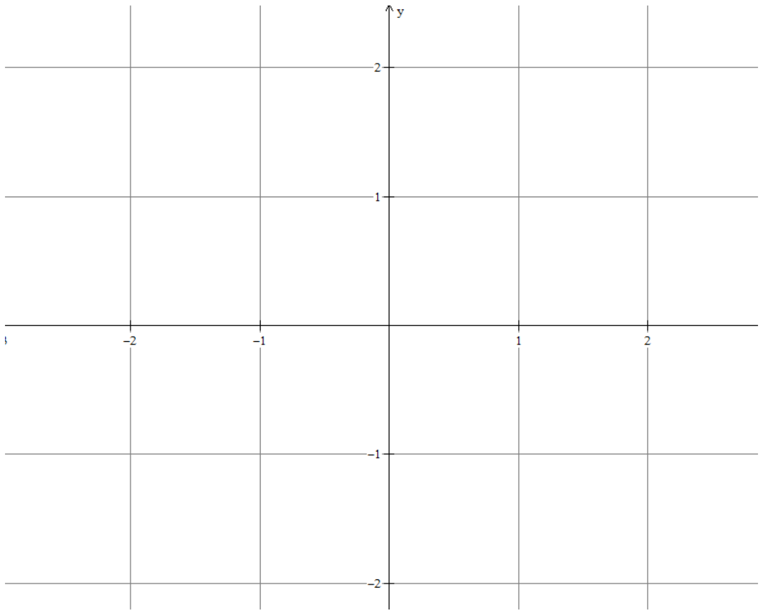
Problemas:

Qual a concentração do medicamento, com o passar do tempo, ao se ingerir 1 comprimido de 10 mg? Quando ele praticamente vai sumir do organismo?

Qual a concentração do medicamento no organismo em determinado tempo, tomando 1 comprimido de 10 mg a cada 12 horas?

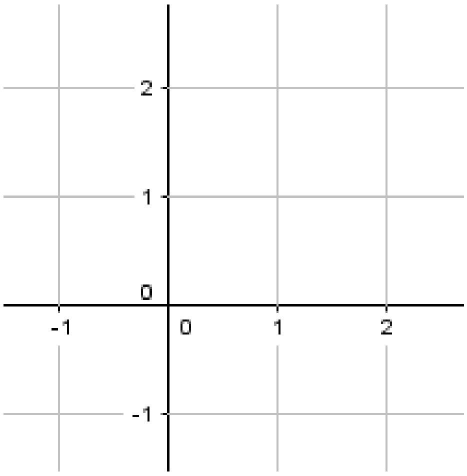
CAMPO DE DIREÇÕES

EXERCÍCIO 1: Esboce, no plano quadriculado abaixo, a inclinação da reta tangente à equação diferencial $y' = 2y - x$ nos pontos $(1,1);\ (1,2);\ (2,1);\ (2,2);\ (1,-1);\ (-2,-1)$.



EXERCÍCIO 2: A partir, do que você pode observar sobre os valores da reta tangente no exercício anterior, esboce a inclinação da reta tangente à equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x - y$, no plano quadriculado, para os pontos (-1,-1); (0,-1); (1,-1);(2,-1); (-1,0); (0,0); (1,0); (2,0); (-1,1); (0,1); (1,1); (2,1); (-1,2); (0,2); (1,2); (2,2). E anote se você percebe alguma relação entre os pontos e as suas inclinações.

(x,y)	$\frac{dy}{dx} = x - y$



Agora, utilizando o *software* GeoGebra a partir do Link: https://ggbm.at/xnUGM9sC , insira a equação diferencial $f'(x) = x^2$ no campo f(x,y), deixando o campo “visualizar EDO” marcado e o campo “visualizar a solução da EDO” desmarcado.

Analise as informações que aparecem movimentando os controles deslizantes e responda às questões propostas.
Descreva o que os cursores (controles deslizantes) a, A, b, B, n fazem/alteram na tela do programa.

O que o desenho tracejado representa?

Você percebe alguma relação entre o desenho tracejado e a EDO? Comente.

Agora marque o campo “visualizar a solução da EDO” para responder às perguntas que seguem:
Você percebe alguma relação entre a EDO e a sua solução? Comente.

Você percebe alguma relação entre o desenho tracejado e a solução da EDO?

Manipulando o controle deslizante K, você percebe em que ele influencia? O que ele representa?

Clicando com o botão direito do mouse sobre a curva visível na primeira janela, selecione a opção “habilitar rastro”, após movimente o controle K e interprete o que é exibido na primeira janela.

Agora, realize a mesma atividade explorando as Equações Diferenciais abaixo e faça suas novas considerações, sem apagar o que você já anotou anteriormente, tentando reunir as informações encontradas a a partir da análise de mais de uma EDO.

$f'(x) = x^2 + 2$

$f'(x) = x^2 + 2x + 5$

$f'(x) = sen(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

O que o desenho tracejado representa?

Você percebe alguma relação entre o desenho tracejado e a EDO? Comente.

Agora marque o campo “visualizar a solução da EDO” para responder às perguntas que seguem:
Você percebe alguma relação entre a EDO e a sua solução? Comente.

Você percebe alguma relação entre o desenho tracejado e a solução da EDO?

Manipulando o controle deslizante K, você percebe em que ele influencia? O que ele representa?

Clicando com o botão direito do mouse sobre a curva visível na primeira janela, selecione a opção “habilitar rastro”, após movimente o controle K e interprete o que é exibido na primeira janela.

EXERCÍCIO 2: Relembrando as Equações Diferenciais que foram sistematizadas nas atividades de Modelagem Matemática sobre “Estudo da obesidade como fator de risco da Diabetes tipo 2” e “Ritalina no organismo” represente-as no *software* GeoGebra e tente caracterizar algumas relações entre a atividade realizada anteriormente e o traçado das retas tangentes à curva em pontos específicos.

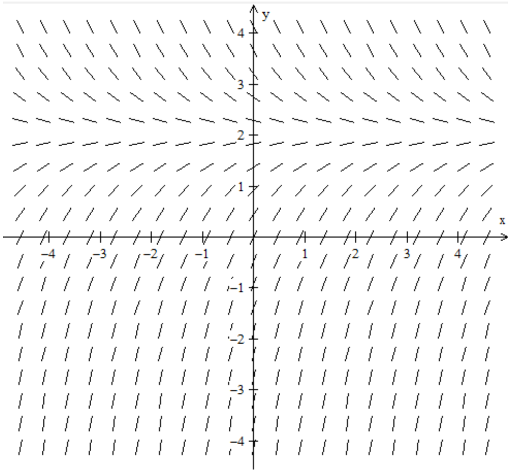
EXERCÍCIO 3: Observando o comportamento das equações diferenciais dadas abaixo, relacione-as com o seu respectivo campo de direções. Justifique sua resposta.

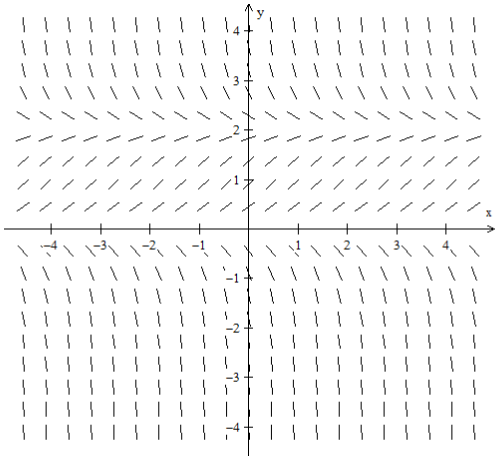
$$\frac{dy}{dx} = 2 - y$$

( )

$$\frac{dy}{dx} = y.(2 - y)$$

( )





Justificativa:

Uma das maneiras de analisarmos equações diferenciais é a partir de métodos qualitativos, ou seja, utilizando técnica que são aplicadas quando soluções analíticas são difíceis de serem obtidas.

Métodos gráficos permitem grafar soluções de equações diferenciais de primeira ordem da forma

$y' = f(x, y)$

Onde a deriva aparece apenas no membro esquerdo da equação.[18]

Esta equação define o coeficiente angular da curva solução $y(x)$ em um ponto arbitrário (x, y) do plano. Um **elemento linear** é um pequeno segmento de linha que se inicia no ponto (x, y) e possui um coeficiente angular especificado por $y' = f(x, y)$. Ele representa uma aproximação da curva solução que passa por aquele ponto. Uma coleção de elementos lineares é um **campo direcional**.

Visualmente, o campo de direções sugere a aparência ou forma de uma família de curvas integrais de equação diferencial e, consequentemente, pode ser possível vislumbrar determinados aspetos qualitativos das soluções – por exemplo, regiões do plano nas quais uma solução exibe um comportamento não usual. Uma única curva integral que segue seu caminho em um campo de direções deve acompanhar o padrão de fluxo do campo; ela é tangente a um elemento linear quando intercepta um ponto da malha.

EXEMPLO 1: A figura 1 foi obtida usando o *software* winplot e mostra um campo de direções para $\frac{dy}{dx} = 0{,}2xy$. Observe que em qualquer ponto ao longo do eixo $x\ (y = 0)$ e do eixo $y\ (x = 0)$ as inclinações são $f(x, 0) = 0$ e $f(0, y) = 0$, respectivamente, de tal forma que os elementos lineares são horizontais. Além disso, observe no primeiro quadrante que, para um valor fixo de x, os valores de $f(x, y) = 0{,}2xy$ crescem à medida que y cresce; da mesma forma, para um valor fixo de y, os valores de $f(x, y) = 0{,}2xy$ aumentam à medida que x aumenta. Isso significa que, quando x e y aumentam, os elementos lineares ficam quase verticais e têm inclinação positiva $(f(x, y) = 0{,}2xy > 0\ para\ x > 0, y > 0)$.

No segundo quadrante, $|f(x, y)|$ aumenta à medida que o $|x|$ e y aumentam e, portanto, os elementos lineares novamente ficam quase verticais, mas têm

[18] Adaptado da citação n° 4, página 171.

inclinação negativa $(f(x,y) = 0{,}2xy < 0 \; para \; x < 0, y > 0)$. Olhando da esquerda para a direita, imagine uma curva integral que comece em um ponto no segundo quadrante, move-se abruptamente para baixo, torna-se achatada quando passa pelo eixo y e daí se move abruptamente para cima à medida que entra no primeiro quadrante – em outras palavras, tem um formato côncavo para cima semelhante a uma ferradura. Disso tudo pode-se presumir que $y \to \infty$ quando $x \to \pm\infty$.

Agora no terceiro e quarto quadrante, uma vez que $f(x,y) = 0{,}2xy > 0$ e $f(x,y) = 0{,}2xy < 0$, respectivamente, a situação é inversa; uma curva integral cresce e depois decresce à medida que vamos da esquerda para a direita. Alguns gráficos representativos de membros da família de soluções dessa equação diferencial são apresentados na Figura 2 e permitem uma comparação com a Figura 1.

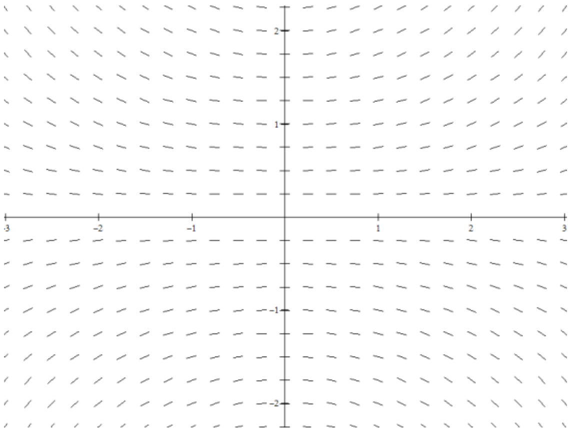


Figura 1

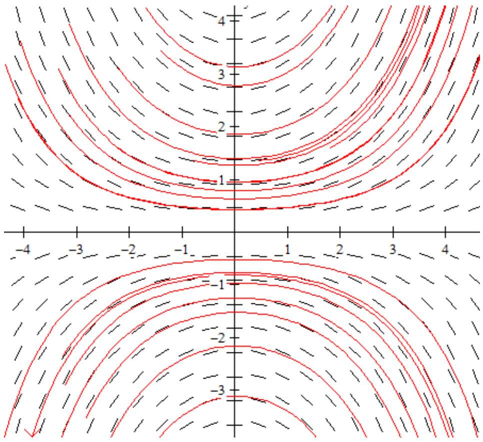


Figura 2

É POSSÍVEL AFIRMAR O HORÁRIO DA MORTE DE UMA PESSOA COM PRECISÃO?[19]

Você provavelmente já viu, em filmes ou seriados, um médico dizer, com voz austera: "hora da morte: 15h02". Segundo o legista Dionísio Andreoni, o tempo de morte pode ser calculado pela comparação da temperatura do cadáver com a temperatura do ambiente ou pela composição química de alguns dos tecidos do corpo, especialmente do humor vítreo, parte interna do olho. Ainda assim, não será dada com uma precisão de minutos.

No dia 30/05/12 na cidade de Ji-Paraná/RO, ocorreu um homicídio de um homem de 38 anos, causado por arma de fogo. A chegada da perícia ocorreu às 19h45min, sendo medida a temperatura do cadáver que apresentava temperatura corporal de 36,3°C, às 20h45min o corpo estava com 35,4°C. Considerando que e a temperatura ambiente no dia era de 30°C, qual seria o procedimento adotado por você para prever o horário da morte deste homem.

[19] As informações foram baseadas em: https://www.terra.com.br/noticias/educacao/infograficos/vc-sabia-morte/morte-02.htm e no Trabalho de Conclusão de Curso: Equações Diferenciais Aplicadas na definição da hora da morte de um indivíduo e estimativa populacional da Arara-azulde-lear, de Cleidson Bruno de Abreu Colelho Barreto

Movimento Uniforme

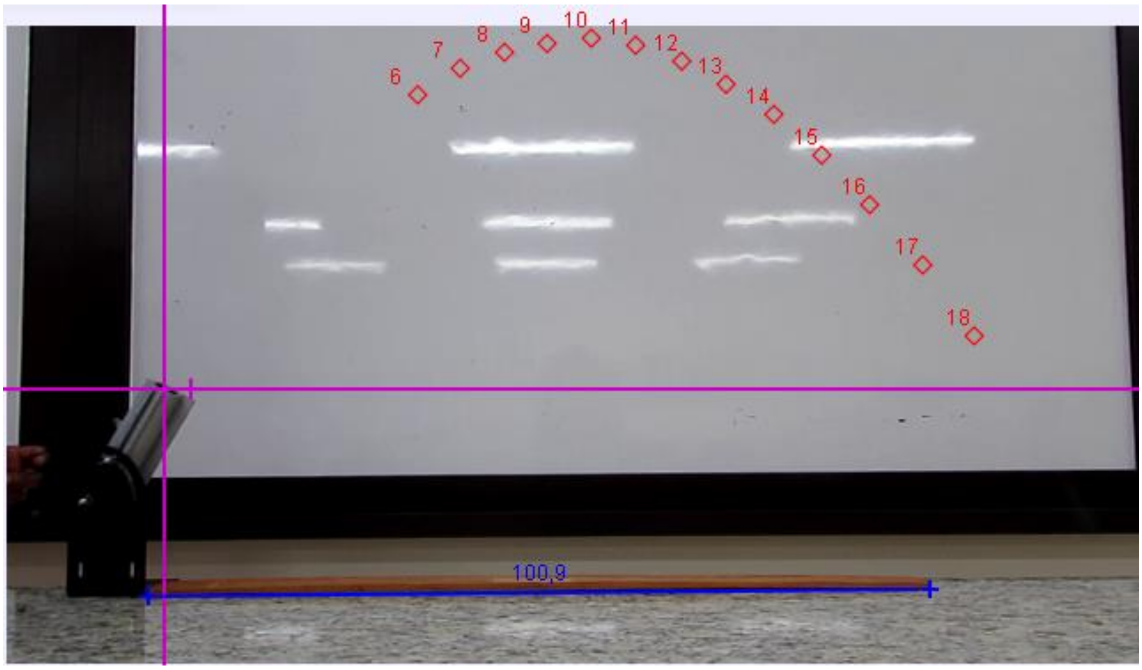
Após análise do filme Trilho de Ar[20], através do *software* de videoanálise[21] Tracker, determine a equação horária da posição do corpo em relação ao tempo.

[20] https://youtu.be/9jYJjEHN_oc
[21] Segundo Martins (2013) em um experimento com videoanálise "um experimento é realizado em frente a uma câmera digital convencional com capacidade de filmar toda a ação realizada, e esse vídeo contendo informações espaciais e temporais é transferido para o computador. [...] O vídeo é analisado quadro a quadro, de tal forma que é possível obter dados como velocidades, acelerações, movimentos oscilatórios harmônicos e anarmônicos, colisões, rotações, etc."

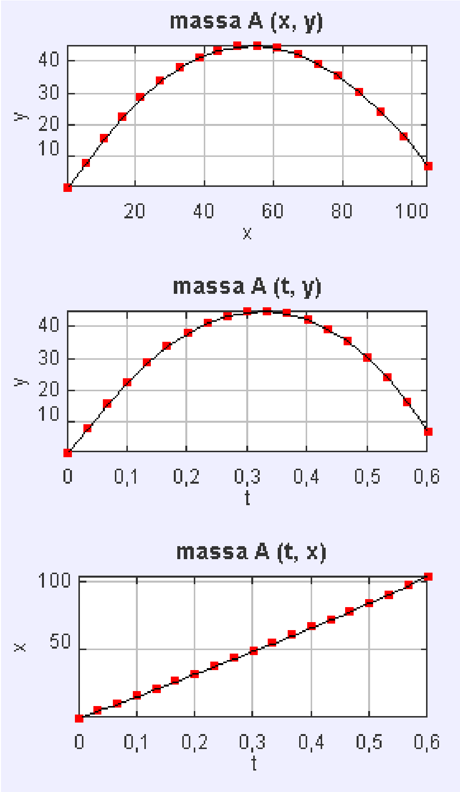
AVALIAÇÃO FINAL

ATIVIDADE 1: Após assitir ao vídeo "Lançamento Oblíquo[22]", responda aos questionamentos abaixo justificando suas respostas.

Quando colocado no programa Tracker, o vídeo "Lançamento Oblíquo" é representado pela foto abaixo. O movimento, neste caso, acontece em dois eixos, x e y.



[22] https://youtu.be/zPOUNSXzN58



A análise desse movimento gera três gráficos, eles estão representados na esquerda.

Qual é o tipo de movimento de cada eixo?

Expresse esses movimentos na forma de equações diferenciais ordinárias.

Identique a ordem de cada uma dessas equações.

t	x	y
0	0,002	0,052
0,033	5,395	7,629
0,067	10,532	15,462
0,1	15,926	22,397
0,133	21,448	28,561
0,167	26,97	33,955
0,2	32,62	38,064
0,234	38,271	41,403
0,267	43,793	43,586
0,3	49,315	44,742
0,334	55,094	45,256
0,367	60,873	44,357
0,4	66,78	42,431
0,434	72,559	39,348
0,467	78,595	35,496
0,5	84,759	30,231
0,534	91,052	23,81
0,567	97,73	16,104
0,601	104,408	6,858

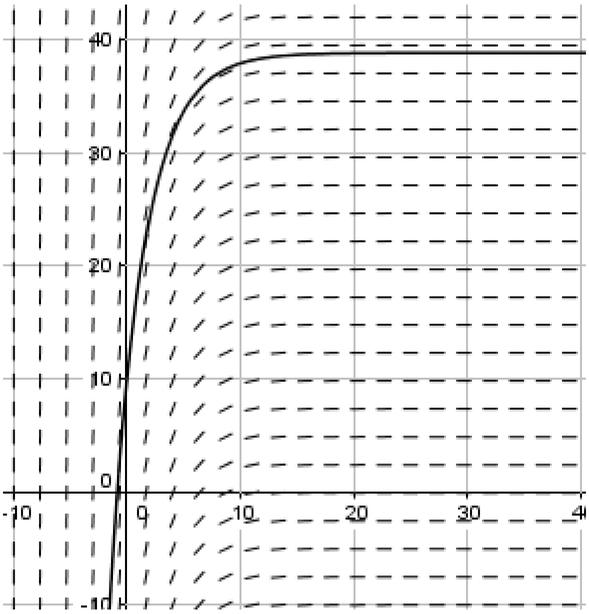
Os dados obtidos por meio do programa estão apresentados no quadro ao lado. A partir das equações diferenciais encontradas no exercício anterior, escreva a função horária da posição em relação ao tempo para o eixo x e para o eixo y.

Qual foi o alcance do projétil?

ATIVIDADE 2: Defina o que é um problema de valor inicial e dentre as diferentes atividades desenvolvidas na disciplina identifique ao menos três situações que envolvam problemas de valor inicial e diga quais foram esses valores iniciais.

ATIVIDADE 3: As equações diferenciais ordinárias podem também ser representadas por um campo de direções.

Umas das primeiras atividades realizadas na disciplina de EDO foi a “Ritalina no Organismo”, esta atividade foi analisada em sala de aula e resultou em uma equação diferencial, o campo de direção dessa equação diferencial está representado abaixo.

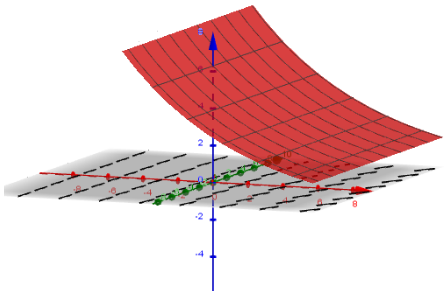


Observando esse campo de direção, responda:

O que a curva mais escura representa na situação?

O que representa a intersecção entre a curva mais escura e o eixo y?

ATIVIDADE 4: Utilizando o objeto de aprendizagem sobre campo de direções que foi disponibilizado no email da turma, responda as questões abaixo sobre a modelagem realizada em sala de aula sobre o horário da morte de uma pessoa.



Qual foi o modelo matemático obtido para essa situação?

Represente esse modelo matemático no arquivo do objeto de aprendizagem (GeoGebra) e salve-o no *pendrive* da pesquisadora com o nome de todos os integrantes da sua equipe.

Este modelo matemático pode ser utilizado apenas para alguns valores em um certo intervalo. Qual seria um possível intervalo para esses valores?

Na situação estudada a temperatura é uma das variáveis. Indique se ela é a variável dependente ou independente.

Para este caso específico a temperatura estabiliza? Em caso positivo, qual o valor da estabilidade? Por quê?

Onde essa possível estabilidade está representada graficamente e como no modelo é possível identificá-la?

REFERÊNCIAS

1) BASSANEZZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

2) BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução de Horacio Macedo. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

3) BORSSOI, Adriana Helena. **A Aprendizagem Significativa e, Atividades e Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino.** 2004. 140 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina

4) BRONSON, Richard. COSTA, Gabriel. **Equações Diferenciais**. Tradução Fernando Henrique Silveira. 3. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

5) JAVARONI, Sueli L. **Possibilidades para o Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias: Abordagem Geométrica**. Disponível em: www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Comunicacao.../CC14946729879T.doc. Acesso em: 07 de julho de 2016.

6) ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. Tradução Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Pioneira Thomson Learning 2003.

7) SILVA, K. A. P. Aspectos cognitivos em aulas com Modelagem Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. Experiências em Ensino de Ciências**, v. 12, n. 2, p. 156-170, abr. 2017. Disponível em: http://if.ufmt.br/eenci/artigos/Artigo_ID355/v12_n2_a2017.pdf Acesso: 26/12/2017.

6 APRESENTAÇÃO DOS DADOS E ANÁLISES

A análise dos dados coletados durante a pesquisa é baseada na Análise Textual Discursiva, seguindo orientações de Moraes (2003). Embora subsidiada pelos referenciais teóricos que fundamentam a pesquisa, expostos nos capítulos anteriores, a análise é compreendida de um metatexto, que vem cercado de nossa compreensão e entendimento. O intuito dessa abordagem é discutir de forma sistematizada como se desenvolveu, no ambiente educacional a implementação de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, que associa o uso de recursos tecnológicos e propõe atividades de Modelagem Matemática como parte das atividades componentes da UEPS.

O *corpus* de análise é composto pelo registro dos alunos no caderno pedagógico (Figura 8), por áudios e vídeos realizados durante as aulas, atividades salvas em arquivos digitais e a avaliação final dos alunos, além dos documentos gerados pelo aplicativo (Formulário Google) onde os questionários (Apêndices 3 e 4) foram realizados. Como esse *corpus* é composto por 115 documentos, fizemos o uso do *software Atlas TI 8.0* como auxílio na codificação, identificação de semelhanças e diferenças. Esse *software* de análise de dados qualitativos facilita a análise sistemática de vários formatos de arquivos, como textos, áudios, vídeos e figuras. Neste sentido, o *software* se mostrou importante na desconstrução e na sistematização dos códigos, característica da primeira das etapas da Análise Textual Discursiva.

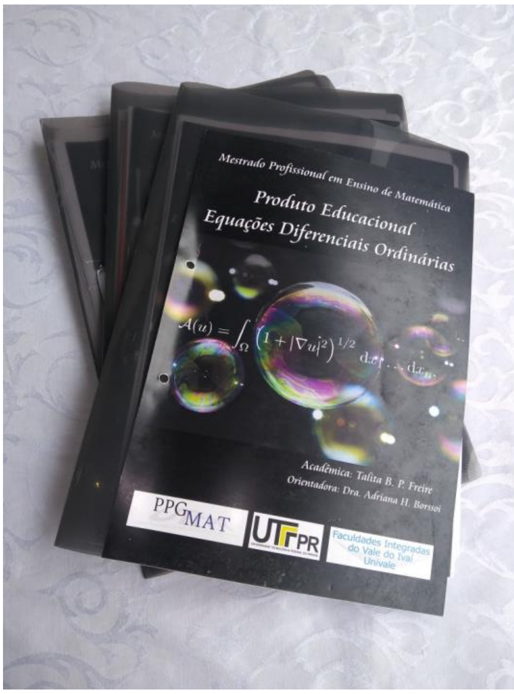


Figura 8 – Cadernos Pedagógicos
Fonte: A própria autora

Para que esta etapa de análise pudesse ser realizada, os documentos foram inseridos no programa *Atlas TI 8.0*. Como inicialmente a pesquisadora não havia definido quais atividades deveriam ser analisadas, procuramos atividades que pudessem expressar dados importantes e que foram significativas para a pesquisadora. Assim, a inserção dos dados no programa começou pelo material elaborado (Unidade de Ensino Potencialmente Significativa ou Produto Educacional[23]), pelos questionários (Apêndices 3 e 4) que foram aplicados, pelo caderno pedagógico de um dos alunos de cada uma das equipes, pela avaliação de cada uma das equipes e pela atividade de Campo de Direções.

Neste momento pudemos identificar as atividades que seriam analisadas com precisão, assim as próximas atividades foram inseridas de maneira sequencial, obedecendo a ordem cronológica dos acontecimentos, como pode ser observado no Quadro 1 (Capítulo 5).

Cada documento recebeu um nome associado à atividade a que se relacionava e à equipe a quem pertencia. A Figura 9 apresenta a tela desse programa exibindo em sua lateral esquerda os documentos que foram inseridos.

[23] É possível notar diferenças sutis se comparado o material apresentado no Capítulo 5 a algumas figuras da tela do Atlas TI trazidas para compor a análise. No entanto, estas se referem a formatação do material (fonte dos títulos, espaçamentos, etc.), não ao conteúdo.

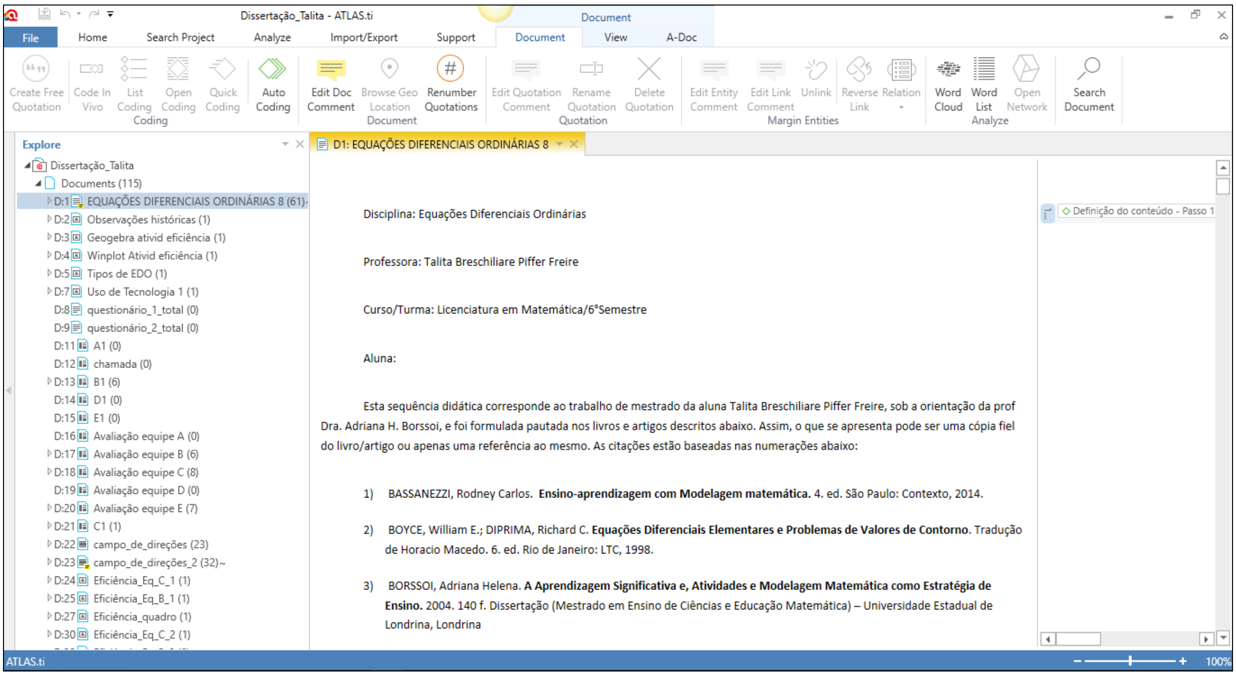


Figura 9 - Tela dos documentos, *software Atlas TI 8.0*
Fonte: A própria autora

Depois da inserção de um documento no *software*, o mesmo era codificado conforme a pesquisadora encontrava indícios de dados considerados importantes. Essa codificação gera no programa uma informação na lateral esquerda e um nome para o código identificado, sendo que esse pode ser elaborado pelo próprio programa, se escolhida a opção de criação de “código em vivo”, ou pelo próprio pesquisador, se escolhida a opção de criação de “código livre”. Para a codificação dos dados da pesquisa todos os códigos criados foram códigos livres, ou seja, criados pela própria pesquisadora. A Figura 10 mostra alguns dos códigos na lateral esquerda e a marcação desses códigos na lateral direita da tela.

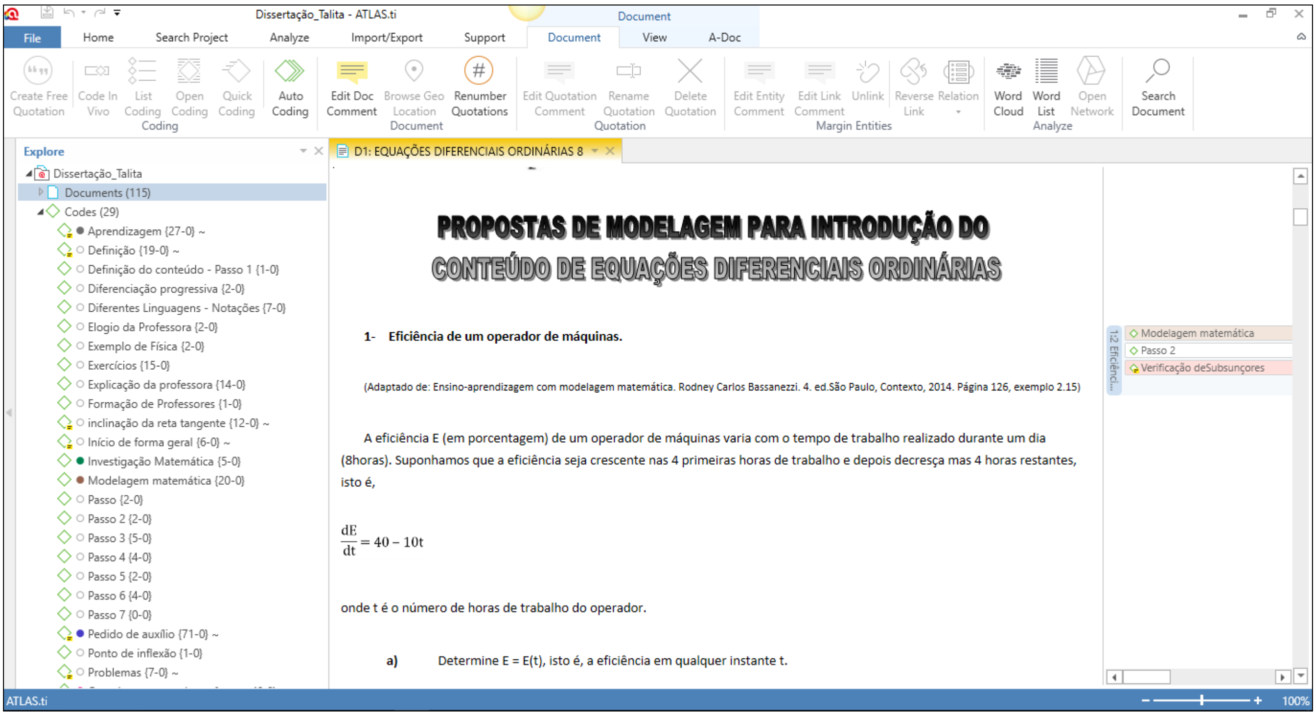


Figura 10 - Tela dos códigos, *software* Atlas TI 8.0
Fonte: A própria autora

Após a realização de todas as atividades no final do semestre e a inserção dessas atividades no *software* Atlas TI 8.0, as primeiras impressões sobre a unidade de ensino proposta, mediante a observação da pesquisadora sobre o crescimento pessoal de todos os alunos e da turma, foram de que a mesma se configurava como uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa.

No entanto, não podemos fazer uma afirmação somente sobre as impressões pessoais e suposições da pesquisadora. Existem princípios e aspectos transversais sugeridos por Moreira (2011b) que devem ser observados na composição de uma UEPS. Um dos aspectos transversais que estão relacionados à composição do material de ensino relata que “em todos os passos, os materiais e as estratégias de ensino devem ser diversificados, o questionamento deve ser privilegiado em relação às respostas prontas e o diálogo e a crítica devem ser estimulados” (MOREIRA, 2011b, p. 46).

Quanto aos princípios que norteiam a construção de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, verificamos que é necessário que se procurem evidências de que houve crescimento dos alunos, da Diferenciação Progressiva, da Reconciliação Integradora e do êxito da UEPS. Para tanto, os dados da pesquisa foram analisados mediante a Análise Textual Discursiva, conforme orientações já apresentadas no Capítulo 2.

A análise está focada em elementos que pudessem mostrar evidências de que a unidade de ensino proposta se constituía como uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, para tanto nos pautamos nas atividades que a constituíram. Todas as atividades foram propostas de forma que pudessem atender aos conteúdos da disciplina em que estávamos inseridos, a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias em um curso de Licenciatura em Matemática.

Os conteúdos contemplados nesta disciplina, que podem ser verificados no Produto Educacional, foram introduzidos após uma breve retrospectiva histórica dos matemáticos importantes para o desenvolvimento dessa teoria, logo após apresentamos a definição de conceitos como a diferenciação entre uma equação diferencial ordinária e uma equação diferencial parcial, assim como os conceitos de ordem, grau, solução de uma EDO, curva integral, solução implícita e explícita. Relembramos as notações de derivada e introduzimos a classificação das EDO (forma padrão, linear, de Bernoulli, homogêneas, separáveis e exatas), assim como os métodos de solução de cada uma delas e o estudo de fator integrante. Finalmente realizamos um estudo sobre o campo de direções das EDO.

As atividades propostas foram elaboradas de forma que atendessem a diferentes alternativas pedagógicas como a Modelagem Matemática e o uso de Tecnologia, no entanto, concomitante a essas atividades houveram momentos em que as aulas foram caracterizadas pela resolução de listas de exercícios. Como todos os registros contidos no *corpus* de análise foram obtidos durante as aulas da disciplina de EDO, esperava-se que as resoluções das atividades fossem realizadas mediante o conteúdo que estava sendo estudado, sendo assim consideraremos que os conteúdos que envolviam EDO eram conteúdos matemáticos adequados para a resolução das atividades.

A primeira etapa de análise segundo a Análise Textual Discursiva é referente a codificação dos dados existentes e categorização desses dados. A segunda etapa do processo de análise se constitui na descrição e interpretação dos dados que emergiram durante a codificação, nessa etapa de análise, o pesquisador deve produzir pequenos textos que descrevam seus dados e que levam em consideração suas primeiras impressões e a identificação de dados relevantes, observando que estes serão suporte para as análises posteriores, caracterizadas pela produção de um metatexto.

Foram identificadas três categorias de análise: Modelagem Matemática, Recursos Tecnológicos e Aprendizagem Significativa, conforme Quadro 2, que se referem a diferentes atividades. Essas categorias foram subdividas em subcategorias ou não, dependendo do contexto analisado. Cada categoria ou subcategoria apresentou unidades de análise, que também foram subdivididas em subunidades de análise.

A definição de cada categoria se deu *a priori* observando as alternativas pedagógicas utilizadas nas atividades e pautadas na teoria em que a UEPS está inserida, a teoria da Aprendizagem Significativa.

CATEGORIA	SUBCATEGORIA	UNIDADE DE ANÁLISE	SUBUNIDADE DE ANÁLISE
Modelagem Matemática	Hipóteses	Estabeleceu	
		Não estabeleceu	
	Matematização	Estabeleceu adequadamente	
		Estabeleceu parcialmente	
	Resolução[24]	Adequada	
		Inadequada	
	Interpretação e Validação	Estabeleceu	
		Não estabeleceu	
Recursos Tecnológicos		Quando solicitado	
		Como auxílio para realizar contas	
		Como fonte de pesquisa	
Aprendizagem Significativa	Subsunçores	Cálculo Diferencial Integral	Apresentou subsunçores sobre Cálculo Diferencial integral
			Não apresentou subsunçores sobre Cálculo Diferencial integral
		Recursos Tecnológicos	Apresentou subsunçores sobre Recursos Tecnológicos
			Não apresentou subsunçores sobre Recursos Tecnológicos
		Modelagem Matemática	Apresentou subsunçores sobre Modelagem Matemática

[24] Consideramos, para este contexto, que uma Resolução adequada se refere àquela concernente ao conteúdo de Equações Diferenciais Ordinárias.

			Não apresentou subsunçores sobre Modelagem Matemática
	Diferenciação Progressiva	Ocorreu	
		Não ocorreu	
	Reconciliação Integradora	Ocorreu	
		Não ocorreu	
	Aprendizagem do conteúdo	Ocorreu	
		Não ocorreu	

Quadro 2 – Categorias, Subcategorias e Unidades de Análise
Fonte: A própria autora

A seguir apresentamos as análises de cada uma dessas categorias separadamente. Essas análises, pautadas na ATD mostram a desconstrução do *corpus* de análise e, portanto são compostas de quadros que apresentam trechos das falas ou dos cadernos de registros dos alunos. Para cada quadro escolhemos apenas dois documentos que expressassem o contexto que estava sendo analisado, esses documentos estão identificados pela numeração de sua atividade e pela identificação do aluno ou equipe responsável pelo registro, sendo assim (AT1, B2) é referente à Atividade 1 do Aluno B2, ou seja, o aluno 2 da Equipe B.

6.1 CATEGORIA: MODELAGEM MATEMÁTICA

Na categoria Modelagem Matemática foram analisadas duas atividades que se caracterizaram como atividades de Modelagem Matemática (Atividade 3 (AT3): Ritalina e Atividade 5 (AT5): É possível afirmar o horário da morte de uma pessoa com precisão?), nestas atividades foram evidenciadas quatro subcategorias que possuem duas unidades cada uma, o Quadro 3 apresenta essas subcategorias e suas unidades de análise.

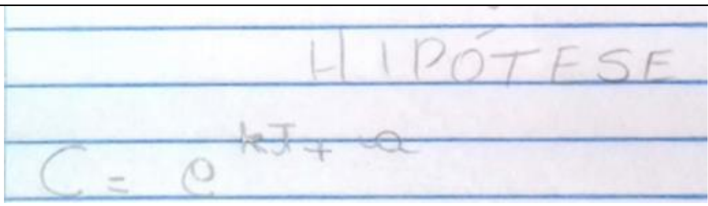
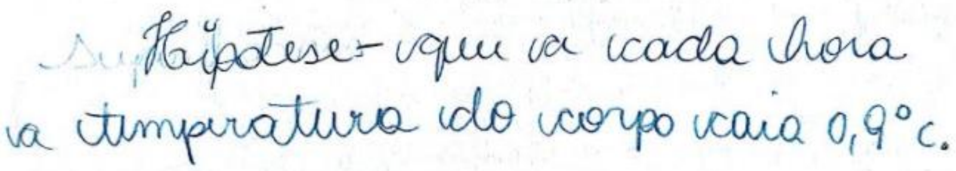
Modelagem Matemática	Hipóteses	Estabeleceu hipóteses
		Não estabeleceu hipóteses
	Matematização	Estabeleceu adequadamente
		Estabeleceu parcialmente
	Resolução	Adequada
		Inadequada
	Interpretação e Validação	Estabeleceu
		Não estabeleceu

Quadro 3 – Subcategorias e Unidades de Análise referentes à Categoria Modelagem Matemática
Fonte: A própria autora

A primeira subcategoria de análise evidencia a elaboração de hipóteses. Fase considerada importante no ciclo de Modelagem Matemática, e abrange duas unidades de análise, apresentadas no Quadro 4.

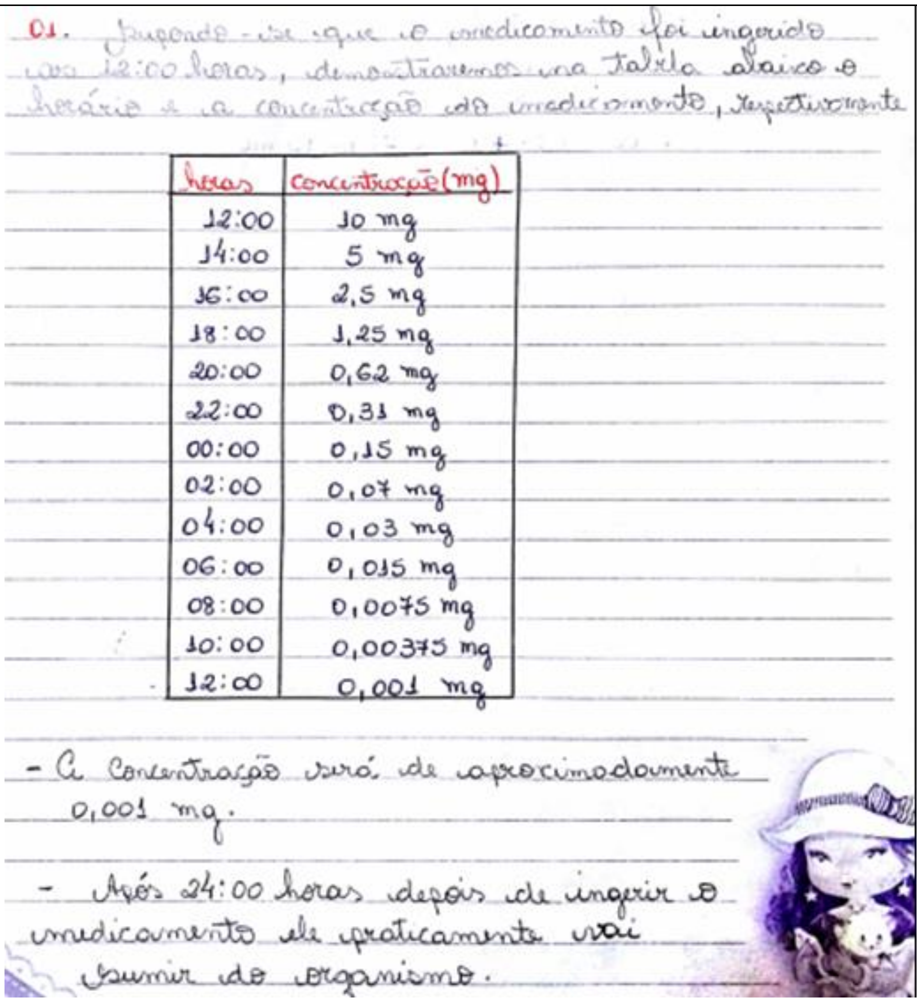
SUBCATEGORIA	UNIDADES DE ANÁLISE
Hipóteses	Estabeleceu
	Não estabeleceu

Quadro 4 – Subcategoria Hipóteses e suas Unidades de Análise
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Modelagem Matemática SUBCATEGORIA: Hipóteses UNIDADE DE ANÁLISE: Estabeleceu
 (AT3, B1, B2, B3, B4)
 (AT5, B2)
Foram consideradas hipóteses explicitamente estabelecidas, de forma que os alunos realizassem o registro por escrito. Nas duas atividades analisadas, quatro documentos apresentaram o registro explicitamente, portanto foram consideradas como hipóteses estabelecidas. Esses documentos estavam relacionados à: (AT3, B1, B2, B3, B4); (AT5, B2); (AT5, D2) e (AT5, D5).

Quadro 5 – Estabelecimento de hipóteses
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Modelagem Matemática SUBCATEGORIA: Hipóteses UNIDADE DE ANÁLISE: Não estabeleceu



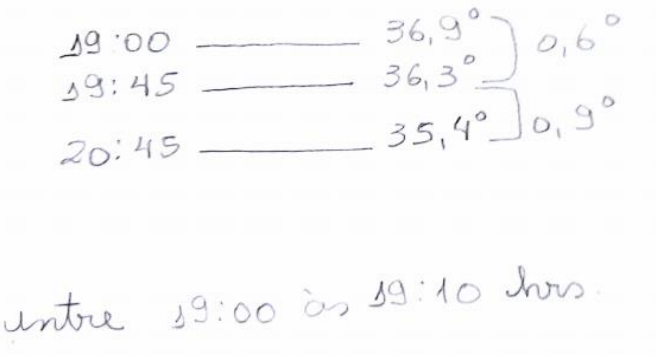
01. Supondo-se que o medicamento foi ingerido às 12:00 horas, demonstraremos na tabela abaixo o horário e a concentração do medicamento, respectivamente

horas	concentração (mg)
12:00	10 mg
14:00	5 mg
16:00	2,5 mg
18:00	1,25 mg
20:00	0,62 mg
22:00	0,31 mg
00:00	0,15 mg
02:00	0,07 mg
04:00	0,03 mg
06:00	0,015 mg
08:00	0,0075 mg
10:00	0,00375 mg
12:00	0,001 mg

- A concentração será de aproximadamente 0,001 mg.

- Após 24:00 horas depois de ingerir o medicamento ele praticamente vai sumir do organismo.

(AT3, C1, C3)



19:00 —— 36,9°] 0,6°
19:45 —— 36,3°] 0,9°
20:45 —— 35,4°

entre 19:00 às 19:10 hrs.

(AT5, C3)

Dos 28 documentos analisados, 24 não apresentaram o estabelecimento de hipóteses de forma explícita, os documentos continham apenas a solução da situação-problema proposta. Nesta categoria de análise não nos atemos em observar as resoluções somente a apresentação de hipóteses.

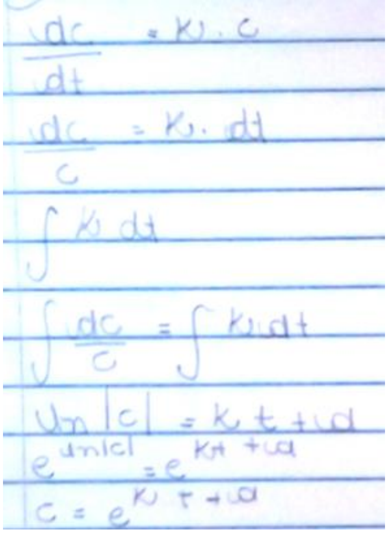
Quadro 6 – Não estabelecimento de hipóteses
Fonte: A própria autora

A segunda subcategoria de análise evidencia a Matematização, fase que deve ocorrer em uma atividade de Modelagem Matemática, essa subcategoria abrange duas unidades de análise apresentadas no Quadro 7.

SUBCATEGORIA	UNIDADES DE ANÁLISE
Matematização	Estabeleceu adequadamente
	Estabeleceu parcialmente

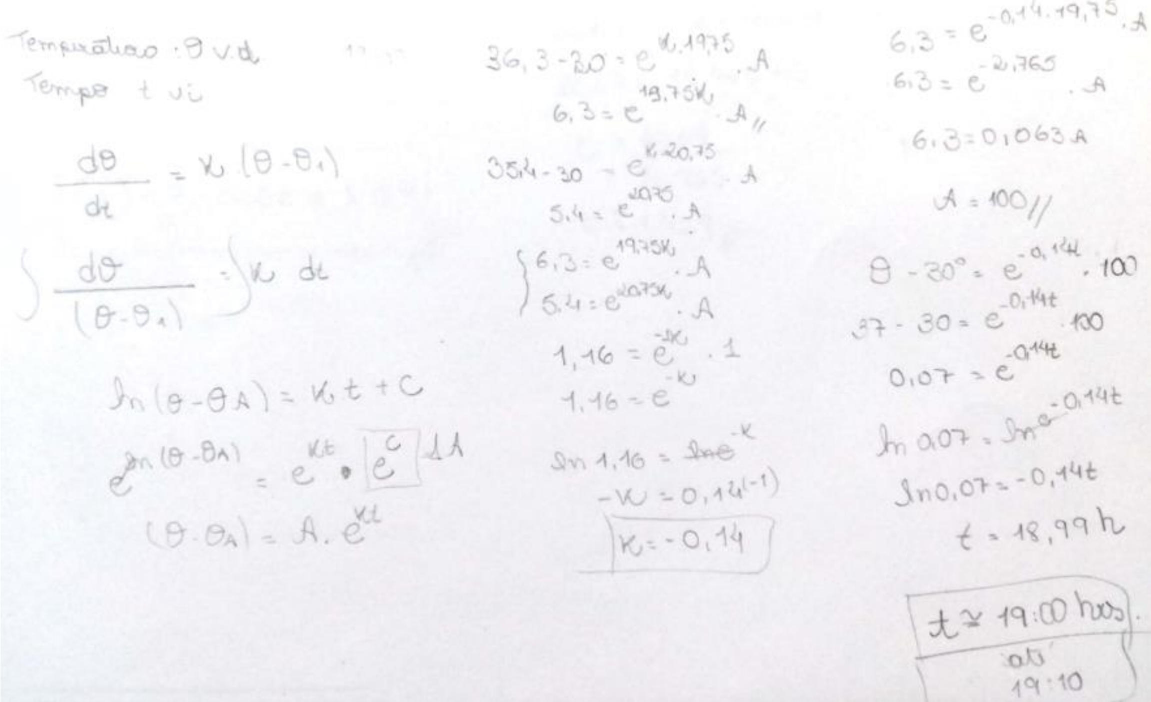
Quadro 7 – Subcategoria Matematização e suas Unidades de Análise
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Modelagem Matemática
SUBCATEGORIA: Matematização
UNIDADE DE ANÁLISE: Estabeleceu adequadamente



$$\frac{dc}{dt} = k_1 . c$$
$$\frac{dc}{c} = k_1 . dt$$
$$\int k_1 \, dt$$
$$\int \frac{dc}{c} = \int k_1 dt$$
$$\ln|c| = k t + c_1$$
$$e^{\ln|c|} = e^{kt + c_1}$$
$$c = e^{k t + c_1}$$

(AT3, D1, D4, D6)



Temperatura: θ v.d.
Tempo: t v.i.

$$\frac{d\theta}{dt} = k(\theta - \theta_A)$$
$$\int \frac{d\theta}{(\theta - \theta_A)} = \int k \, dt$$
$$\ln(\theta - \theta_A) = kt + C$$
$$e^{\ln(\theta - \theta_A)} = e^{kt} \bullet \boxed{e^{C}} \; A$$
$$(\theta - \theta_A) = A . e^{kt}$$

$$36,3 - 30 = e^{k.19,75} . A$$
$$6,3 = e^{19,75k} . A$$
$$35,4 - 30 = e^{k.20,75} . A$$
$$5,4 = e^{20,75} . A$$
$$\begin{cases} 6,3 = e^{19,75k} . A \\ 5,4 = e^{20,75k} . A \end{cases}$$
$$1,16 = e^{-1k} . 1$$
$$1,16 = e^{-k}$$
$$\ln 1,16 = \ln e^{-k}$$
$$-k = 0,14 (-1)$$
$$\boxed{k = -0,14}$$

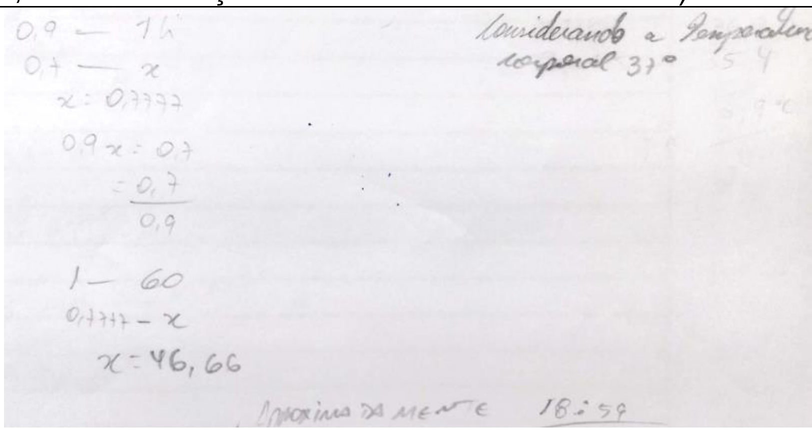
$$6,3 = e^{-0,14 . 19,75} . A$$
$$6,3 = e^{-2,765} . A$$
$$6,3 = 0,063 A$$
$$A = 100$$
$$\theta - 30° = e^{-0,14t} . 100$$
$$37 - 30 = e^{-0,14t} . 100$$
$$0,07 = e^{-0,14t}$$
$$\ln 0,07 = \ln e^{-0,14t}$$
$$\ln 0,07 = -0,14t$$
$$t = 18,99 h$$
$$\boxed{t \cong 19{:}00 \text{ hrs}}$$
ou 19:10

(AT5, C10)

Os alunos conseguiram estabelecer relações matemáticas entre a situação-problema que estava sendo analisada e conteúdos matemáticos adequados que pudessem solucionar de alguma forma essa situação. Foram encontrados seis documentos na Atividade 3 e sete documentos na Atividade 5 que apresentaram o

processo da matematização de forma adequada.

Quadro 8 – Estabelecimento de Matematização Adequadamente
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Modelagem Matemática SUBCATEGORIA: Matematização UNIDADE DE ANÁLISE: Estabeleceu parcialmente
B1: *A gente não conseguiu fazer!* B4: *Conseguiu você lembra aqui que a gente pegou e analisou, que, por exemplo, qual que era o padrão? O padrão é aqui ó! Lembra que agente analisou que de tanto em tanto aparecia um padrão?* B1: *Hunhun, mas desenvolver uma PG a gente não conseguiu escrever uma fórmula.* (AT3, B1, B2, B3, B4 – transcrição do áudio 44 de 4’42’’ à 4’58’’)
 (AT5, D2)
A matematização foi estabelecida parcialmente por dois motivos: 1) porque os alunos sabem qual o conteúdo matemático em que a situação-problema está inserida, mas não conseguem solucionar o problema associado; 2) porque não reconheceram a função associada à situação-problema e fizeram uso de uma função que não satisfazia as necessidades da atividade, no entanto apresentam uma solução.

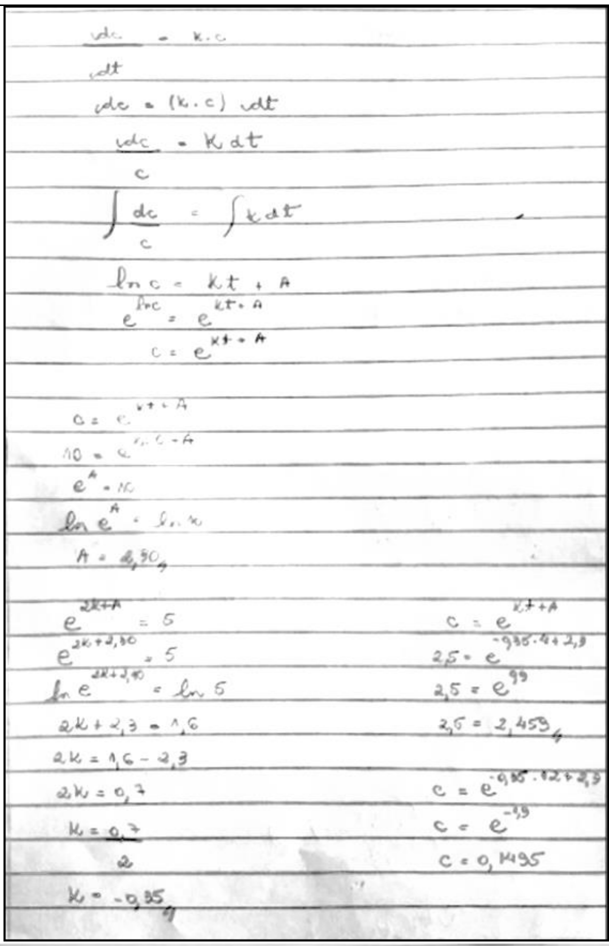
Quadro 9 – Estabelecimento de Matematização Parcialmente
Fonte: A própria autora

A terceira subcategoria de análise é referente ao processo de resolução presente em uma atividade de Modelagem Matemática, essa subcategoria abrange duas unidades de análise, apresentadas no Quadro 10.

SUBCATEGORIA	UNIDADES DE ANÁLISE
Resolução	Adequada
	Inadequada

Quadro 10 - Subcategoria Resolução e suas Unidades de Análise
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Modelagem Matemática SUBCATEGORIA: Resolução UNIDADE DE ANÁLISE: Adequada



$$\frac{dc}{dt} = k \cdot c$$

$$dc = (k \cdot c)\, dt$$

$$\frac{dc}{c} = k\, dt$$

$$\int \frac{dc}{c} = \int k\, dt$$

$$\ln c = kt + A$$

$$e^{\ln c} = e^{kt + A}$$

$$c = e^{kt + A}$$

$$c = e^{kt + A}$$

$$10 = e^{k \cdot 0 + A}$$

$$e^{A} = 10$$

$$\ln e^{A} = \ln 10$$

$$A = 2{,}30$$

$$e^{2k + A} = 5$$

$$e^{2k + 2{,}30} = 5$$

$$\ln e^{2k + 2{,}30} = \ln 5$$

$$2k + 2{,}3 = 1{,}6$$

$$2k = 1{,}6 - 2{,}3$$

$$2k = 0{,}7$$

$$k = \frac{0{,}7}{2}$$

$$k = -0{,}35$$

$$c = e^{kt + A}$$

$$2{,}5 = e^{-0{,}35 \cdot 4 + 2{,}3}$$

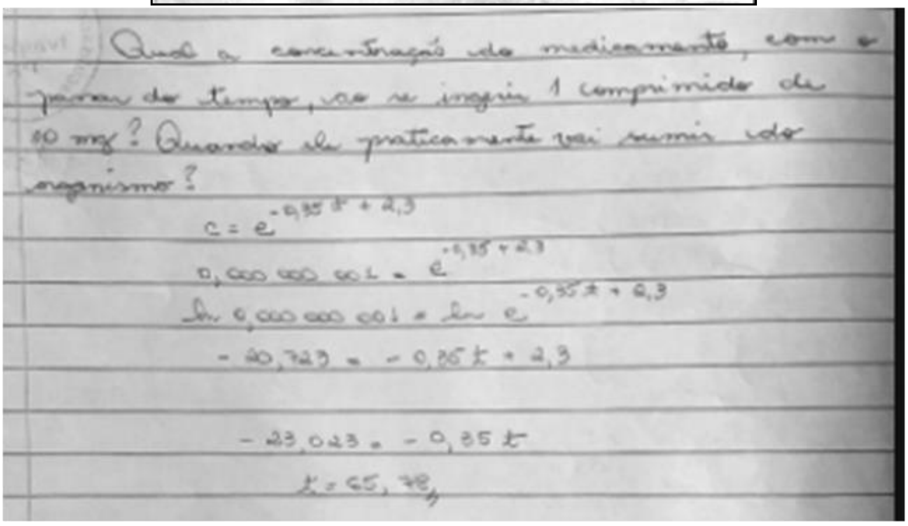
$$2{,}5 = e^{0{,}9}$$

$$2{,}5 = 2{,}459$$

$$c = e^{-0{,}35 \cdot 12 + 2{,}3}$$

$$c = e^{-1{,}9}$$

$$c = 0{,}1495$$



Qual a concentração do medicamento, com o passar do tempo, ao se ingerir 1 comprimido de 10 mg? Quando ele praticamente vai sumir do organismo?

$$c = e^{-0{,}35t + 2{,}3}$$

$$0{,}000\,000\,001 = e^{-0{,}35 + 2{,}3}$$

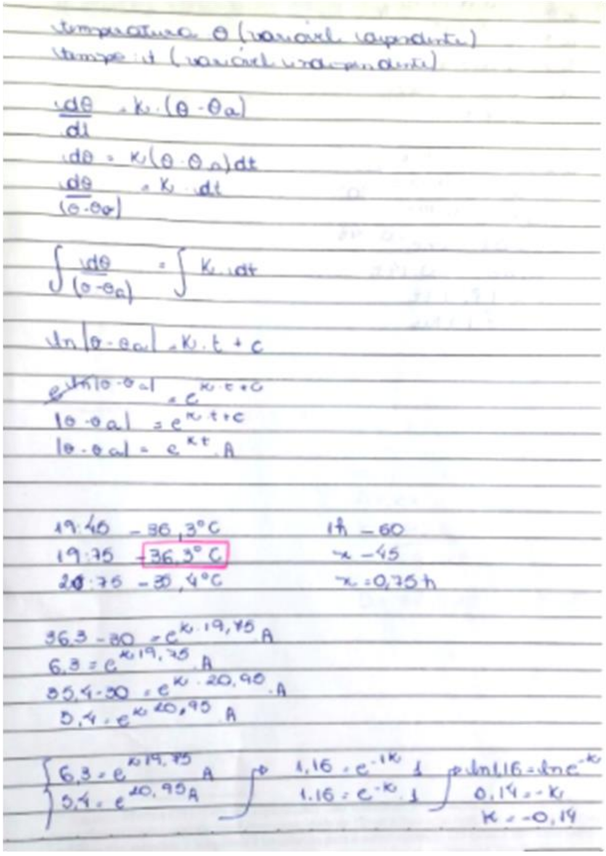
$$\ln 0{,}000\,000\,001 = \ln e^{-0{,}35t + 2{,}3}$$

$$-20{,}723 = -0{,}35t + 2{,}3$$

$$-23{,}023 = -0{,}35t$$

$$t = 65{,}78$$

(AT3, E1, E2, E3, E4)



temperatura: θ (variável dependente)
tempo: t (variável independente)

$\frac{d\theta}{dt} = k.(\theta - \theta_a)$

$d\theta = k(\theta - \theta_a)dt$

$\frac{d\theta}{(\theta - \theta_a)} = k\ dt$

$\int \frac{d\theta}{(\theta - \theta_a)} = \int k\ dt$

$\ln|\theta - \theta_a| = k.t + c$

$e^{\ln|\theta - \theta_a|} = e^{k.t + c}$

$|\theta - \theta_a| = e^{k.t+c}$

$|\theta - \theta_a| = e^{kt}.A$

19:45 – 36,3°C   1h – 60
19:75 – 36,3°C   x – 45
20:75 – 35,4°C   x = 0,75h

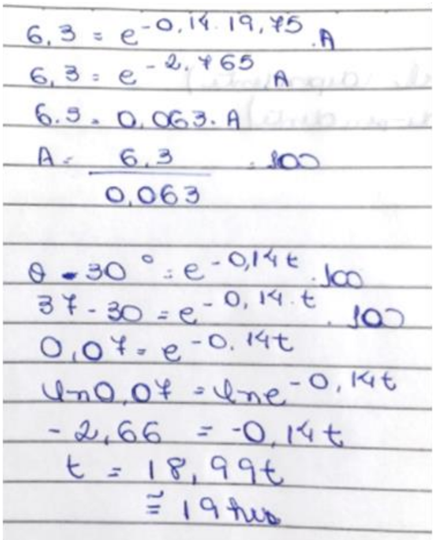
$36,3 - 30 = e^{k.19,75}.A$

$6,3 = e^{k.19,75}.A$

$35,4 - 30 = e^{k.20,75}.A$

$5,4 = e^{k.20,75}.A$

$\begin{cases} 6,3 = e^{k.19,75}.A \\ 5,4 = e^{k.20,75}.A \end{cases} \rightarrow 1,16 = e^{-1k}.1 \quad 1,16 = e^{-k}.1 \rightarrow \ln 1,16 = \ln e^{-k} \quad 0,14 = -k \quad k = -0,14$



$6,3 = e^{-0,14 \cdot 19,75}.A$

$6,3 = e^{-2,765}.A$

$6,3 = 0,063.A$

$A = \frac{6,3}{0,063} = 100$

$\theta - 30° = e^{-0,14t}.100$

$37 - 30 = e^{-0,14.t}.100$

$0,07 = e^{-0,14t}$

$\ln 0,07 = \ln e^{-0,14t}$

$-2,66 = -0,14t$

$t = 18,99t$

$\cong 19$ hrs

(AT5, D5)

Foram consideradas adequadas as soluções que tiveram uma resolução satisfatória matematicamente, ou seja, aquelas soluções corretas que se valeram do conteúdo de EDO. Foram encontrados seis documentos na Atividade 3 e sete documentos na Atividade 5 que apresentaram o processo da matematização de forma adequada

Quadro 11 - Resolução Adequada
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Modelagem Matemática
SUBCATEGORIA: Resolução

UNIDADE DE ANÁLISE: Inadequada

Tempo (T) → V.I.

Concentração C(t) → V.D.

$$\frac{dC}{dT} = K \cdot C$$

$$\frac{dC}{C} = K(dT)$$

$$\int \frac{dC}{C} = \int K(dT)$$

$$\ln C = e^{K \cdot T + A}$$

$$e^{\ln C} = e^{K \cdot T + A}$$

$$C = e^{K \cdot T + A}$$

$$\begin{cases} 5 = e^{K \cdot 2 + A} \\ 2,5 = e^{K \cdot 4 + A} \end{cases}$$

$$2 = e^{-2 \cdot K}$$

$$\ln 2 = \ln e^{-2K}$$

$$0,693 = -2K$$

$$K = -0,347$$

$$5 = e^{-0,347 \cdot 2 + A}$$

$$5 = e^{-0,694 + A}$$

$$5 = e^{-0,694} \cdot e^{A}$$

$$\ln 5 = \ln e^{-0,694} \cdot \ln e^{A}$$

$$1,609 = -0,694 \cdot A$$

$$A = +2,319$$

$$C = e^{-0,347t + 2,319}$$

$$0,0000001 = e^{-0,347t + 2,31}$$

$$0,0000001 = e^{-0,347T} \cdot e^{2,319}$$

$$\ln 0,0000001 = e^{-0,347T} \cdot 10$$

$$-165,78 = \ln e^{-0,347T}$$

$$16,578 = -0,347t$$

$$t = 47 \text{ horas}$$

(AT3, A1, A2, A3)

19:00 ——— 36,9°

19:45 ——— 36,3°] 0,6°

20:45 ——— 35,4°] 0,9°

entre 19:00 às 19:10 hrs.

(AT5, C3)
Consideramos inadequadas as soluções em que os alunos apresentam uma solução insatisfatória matematicamente, ou porque existem erros na resolução que apresentou o conteúdo matemático adequado, ou porque a resolução está matematicamente correta, no entanto fez uso de um conteúdo matemático inadequado para a situação. Nesta categoria obtemos oito documentos na Atividade 3 e seis documentos na Atividade 5.

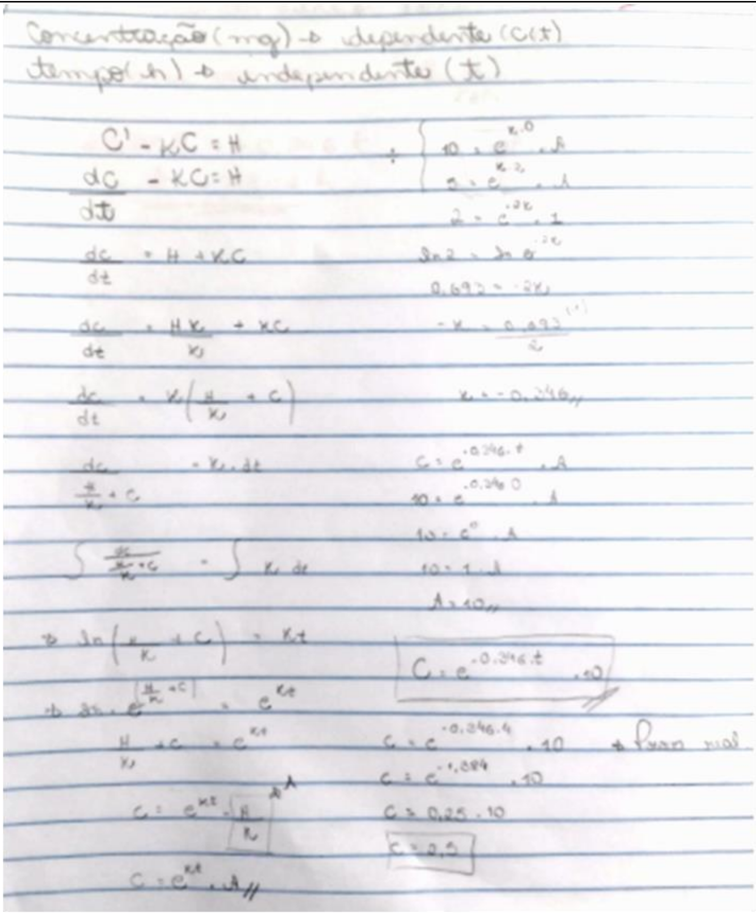
Quadro 12 - Resolução Inadequada
Fonte: A própria autora

A última subcategoria de análise para a categoria de Modelagem Matemática é referente ao processo interpretação e validação da situação-problema, essa subcategoria abrange duas unidades de análise, apresentadas no Quadro 13.

SUBCATEGORIA	UNIDADES DE ANÁLISE
Interpretação e Validação	Estabeleceu
	Não estabeleceu

Quadro 13 - Subcategoria Interpretação e Validação e suas Unidades de Análise
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Modelagem Matemática SUBCATEGORIA: Interpretação e Validação UNIDADE DE ANÁLISE: Estabeleceu
Concluímos que para encontrar a função do problema, deveríamos primeiramente ter uma noção de como era a curva do nosso gráfico e posteriormente através da lei de formação e os dados do problema tentar achar a função. Depois de a algumas tentativas, no tamos que não se tratava de uma função do 1° grau e nem do 2° grau. Quando utili zamos o geogebra para montar o gráfico, então percebemos que se tratava de uma função exponencial. (AT3, E1, E2, E3, E4)



(AT3, C1, C2, C3, C4)
A interpretação e validação da atividade de Modelagem Matemática levou em consideração se os alunos registraram indícios desses fatos, cinco documentos na Atividade 3 e três documentos na Atividade 5 evidenciaram tal fato.

Quadro 14 - Estabelecimento de Interpretação e Validação
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Modelagem Matemática SUBCATEGORIA: Interpretação e Validação UNIDADE DE ANÁLISE: Não estabeleceu

Tempo é a variável independente T

Concentração é a variável dependente = C

$y = C(t)$

$$\frac{dc}{dT} = k \cdot C$$

$$\frac{dC}{C} = k \cdot dT$$

$$\int \frac{dc}{C} = \int k \cdot dt$$

$$\ln C = k \cdot T + a$$

$$e^{\ln C} = e^{kT + a}$$

$$C = e^{kT + a}$$

Pergunta: Qual a concentração do medicamento, ao passar do tempo, ao se ingerir um comprimido de 10 mg? Quando ele praticamente vai sumir do organismo?

HIPÓTESE

$$C = e^{kT + a}$$

$5 = e^{2k + a}$ $\quad t = 2 \quad C = 5$

$1,25 = e^{6k + a}$ $\quad t = 6 \quad C = 1,25$

$$\frac{5}{1,25} = e^{(2k+a) - (6k+a)}$$

$$\frac{5}{1,25} = e^{-4k}$$

$$e^{-4k} = 4$$

$$\cancel{\ln} \, e^{-4k} = \ln 4$$

$$-4k = 1,386294361$$

$$k = -0,34657359$$

$$5 = e^{2 \cdot (-0,34657359) + a}$$

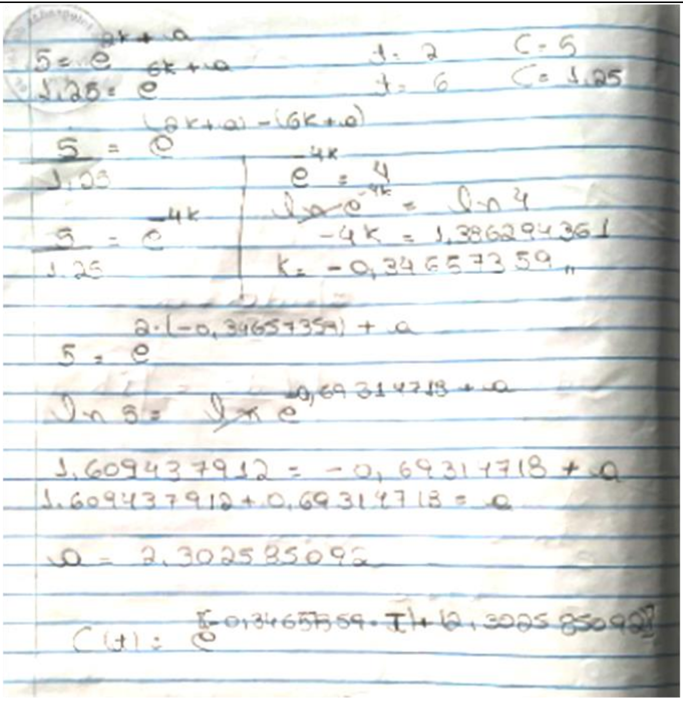
$$\ln 5 = \cancel{\ln} \, e^{-0,6931471 8 + a}$$

$$1,609437912 = -0,6931471 8 + a$$

$$1,609437912 + 0,69314718 = a$$

$$a = 2,302585092$$

$$C(t) = e^{[-0,34657359 \cdot T] + [2,302585092]}$$



$5 = e^{2k+a}$ $t = 2$ $C = 5$

$1,25 = e^{6k+a}$ $t = 6$ $C = 1,25$

$\frac{5}{1,25} = e^{(2k+a)-(6k+a)}$

$\frac{5}{1,25} = e^{-4k}$

$e^{-4k} = 4$

$\ln e^{-4k} = \ln 4$

$-4k = 1,386294361$

$k = -0,34657359$

$5 = e^{2\cdot(-0,34657359)+a}$

$\ln 5 = \ln e^{-0,69314718+a}$

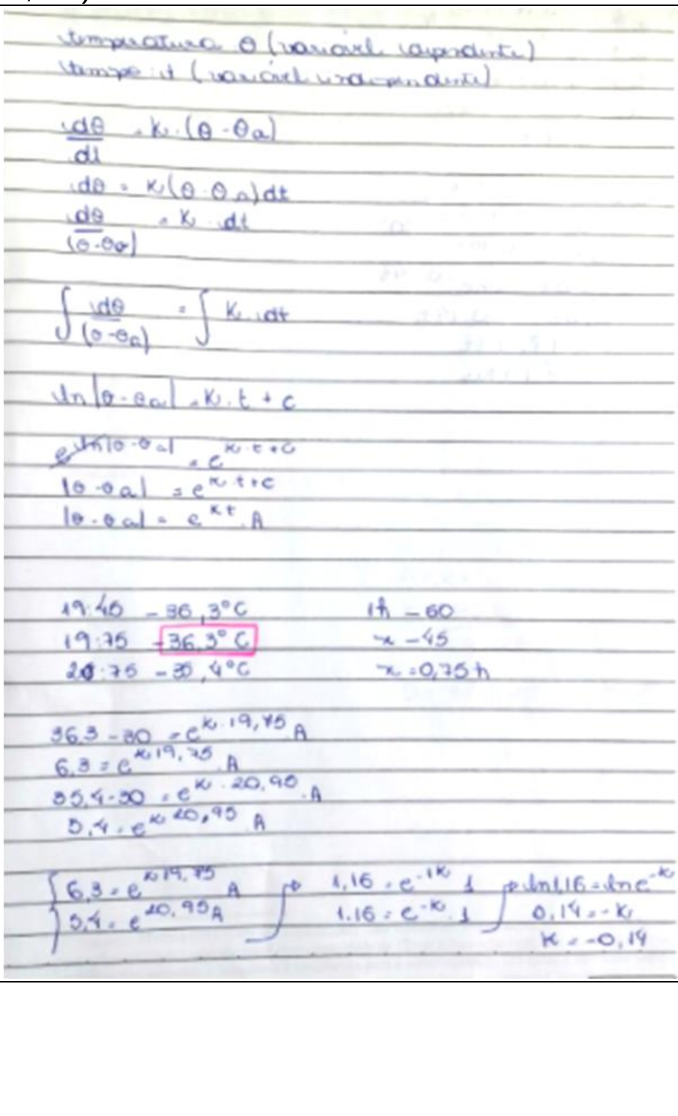
$1,609437912 = -0,69314718 + a$

$1,609437912 + 0,69314718 = a$

$a = 2,302585092$

$C(t) = e^{[-0,34657359\cdot T]+[2,302585092]}$

(AT3, B1, B2, B3, B4)



temperatura θ (variável dependente)

tempo t (variável independente)

$\frac{d\theta}{dt} = k\cdot(\theta - \theta_a)$

$d\theta = k(\theta - \theta_a)dt$

$\frac{d\theta}{(\theta-\theta_a)} = k\, dt$

$\int \frac{d\theta}{(\theta-\theta_a)} = \int k\, dt$

$\ln|\theta - \theta_a| = k\cdot t + c$

$e^{\ln|\theta-\theta_a|} = e^{k\cdot t + c}$

$|\theta - \theta_a| = e^{k\cdot t + c}$

$|\theta - \theta_a| = e^{kt}\cdot A$

19:45 – 36,3°C 1h – 60

19:75 – $\boxed{36,3°C}$ x – 45

20:75 – 35,4°C x = 0,75 h

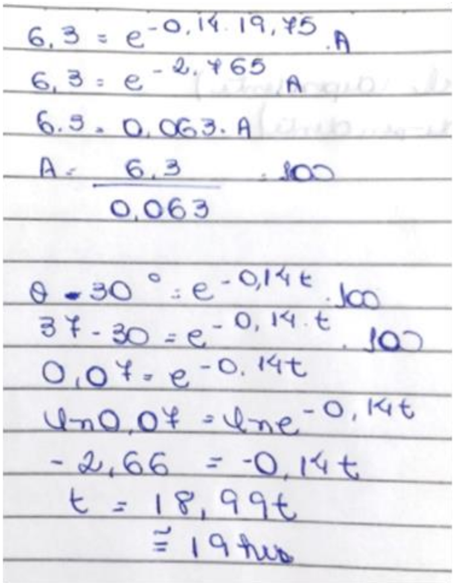
$36,3 - 30 = e^{k\cdot 19,75}A$

$6,3 = e^{k19,75}A$

$35,4 - 30 = e^{k\cdot 20,95}\cdot A$

$5,4 = e^{k20,95}A$

$\begin{cases} 6,3 = e^{k19,75}A \\ 5,4 = e^{20,95}A \end{cases} \rightarrow 1,16 = e^{-1k}\cdot 1 \quad 1,16 = e^{-k}\cdot 1 \quad \ln 1,16 = \ln e^{-k} \quad 0,14 = -k \quad k = -0,14$



$6,3 = e^{-0,14 \cdot 19,75} . A$

$6,3 = e^{-2,765} A$

$6.3 = 0,063 . A$

$A = \frac{6,3}{0,063} . 100$

$\theta - 30^{\circ} = e^{-0,14t} . 100$

$37 - 30 = e^{-0,14 . t} . 100$

$0,07 = e^{-0,14t}$

$\ln 0,07 = \ln e^{-0,14t}$

$-2,66 = -0,14t$

$t = 18,99t$

$\cong 19 hrs$

(AT5, D5)

O não estabelecimento da interpretação e validação foi considerado a partir das soluções que não apresentaram de maneira explícita a interpretação e validação de sua solução, ou porque a resposta encontrada não satisfazia situação-problema, ou porque não haviam registros dessa etapa. Nesta unidade de análise encontramos nove documentos na Atividade 3 e dezessete documentos na Atividade 5.

Quadro 15 - Não estabelecimento de Interpretação e Validação
Fonte: A própria autora

A categoria de análise sobre Modelagem Matemática está alicerçada no pressuposto de que a Modelagem Matemática se trata de uma alternativa pedagógica válida no processo de ensino e aprendizagem em que se pretende evidenciar a Aprendizagem Significativa.

Essa alternativa está pautada em um ciclo de acontecimentos, que não necessariamente, ocorrem de uma maneira rígida. Para a análise realizada, focamos no ciclo proposto por Blum e Leiβ (2006), onde visualizamos uma sequência de sete etapas (Figura 11) que permeiam entre o mundo matemático e o não-matemático, chamado pelos autores de *Resto do mundo*. Essas etapas podem ser descritas por: entendendo e construindo; simplificando e estruturando; matematizando; trabalhando matematicamente; interpretando; validando; expondo.

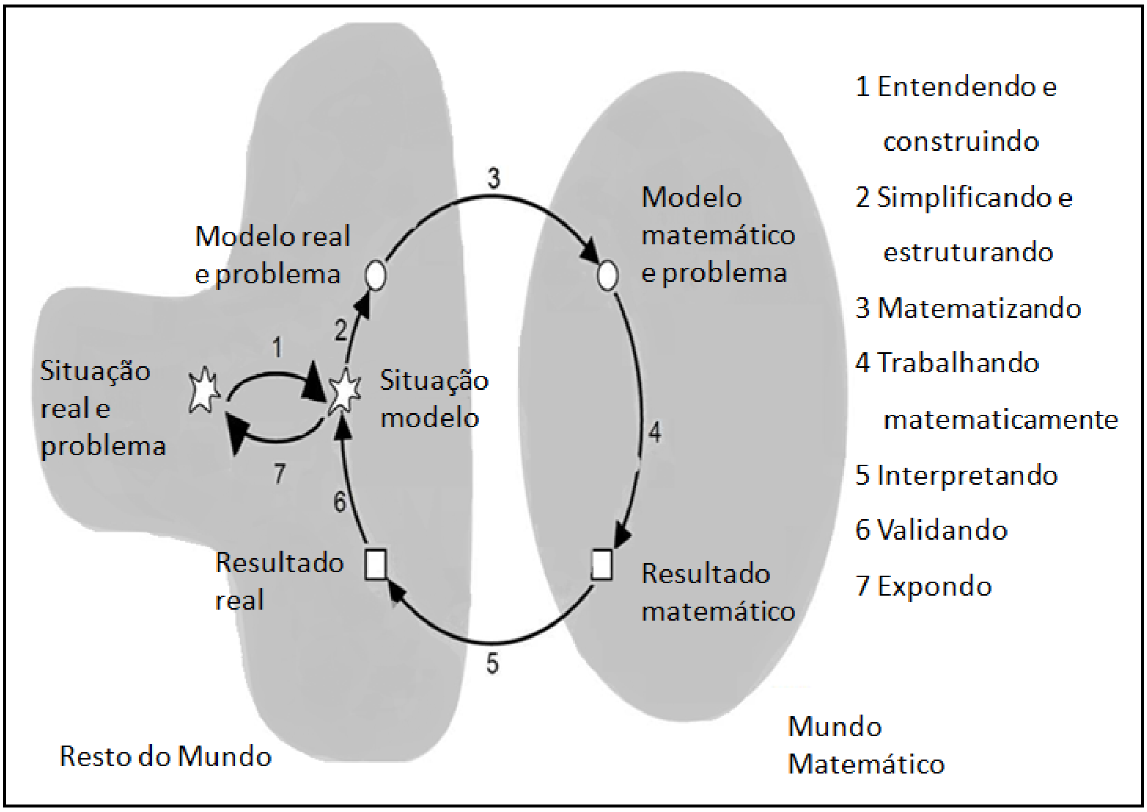


Figura 11 - Ciclo de Modelagem segundo Blum e Leiβ
Fonte: Blum e Leiβ (2006, apud PERRENET, ZWANEVEL, 2012, p.2, tradução nossa)

Durante a análise das atividades de Modelagem Matemática (Atividades 3 e 5) presentes no Produto Educacional, as sete etapas propostas por Blum e Leiβ (2006) foram sintetizadas formando um conjunto de cinco subcategorias, onde as sete anteriores estão presentes. As etapas entendendo e construindo, simplificando e estruturando foram denominadas de Hipóteses, a etapa matematizando foi chamada de Matematização, trabalhando matematicamente denominou-se Resolução, enquanto as etapas interpretando e validando receberam o nome de Interpretação e Validação, a etapa expondo não foi caracterizada como unidade de análise observando que, em ambas as atividades, todas as equipes envolvidas realizaram a exposição das suas resoluções perante a sala de aula.

Para a subcategoria de Hipóteses nos pautamos em Almeida, Silva e Vertuan (2016), onde os autores denominam de inteiração a primeira fase da Modelagem Matemática. Esta fase

> Conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução. Essa formulação é orientada pela falta de compreensão, de entendimento da situação. Todavia, ao mesmo tempo, essa formulação também requer que alguns aspectos já sejam conhecidos e é justamente

> esta a função da interação – tornar alguns aspectos conhecidos (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 15).

No material de análise, esta subcategoria foi estruturada por duas unidades de análise (Quadro 4), que permearam entre o estabelecimento de hipóteses de forma explícita e o não estabelecimento de hipóteses. Em quatro documentos analisados os alunos apresentaram de maneira declarada que estabeleceram hipóteses para a resolução da situação-problema proposta, nos demais documentos consideramos que não houve estabelecimento de hipóteses tendo em vista que estes apresentam apenas a resolução. Tanto os documentos que apresentaram o estabelecimento de hipóteses quanto os que não apresentaram faziam parte das duas atividades que estavam sendo analisadas, portanto, em ambas as atividades houveram alunos que estabeleceram e que não estabeleceram as hipóteses para solucionar a situação-problema que havia sido proposta.

Para a subcategoria Matematização sustentamos o proposto por Almeida, Silva e Vertuan, que trata do "processo de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas" em que "a busca e elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características" (2016, p. 16).

Enquanto Blum e Borromeo Ferri (2016, p. 66, tradução nossa) consideram que a matematização "transforma o modelo real em um modelo matemático, que consiste aqui de certas equações, talvez com variáveis"[25], nesta etapa o modelo e o problema reais são trazidos para o mundo matemático através de ações matemáticas.

Durante o processo de análise, foram observadas três unidades de análise em que o processo de matematização foi estabelecido adequadamente, parcialmente ou não foi estabelecido, Quadro 7.

Na resolução da Atividade 3, os alunos D1, D4 e D6, bem como o aluno C10 na Atividade 5, realizaram a escrita matemática adequada da Equação Diferencial Ordinária que representava a situação estudada, assim o processo da

---

[25] Transforms the real model into a mathematical model, which consists here of certain equations, perhaps with variables.

matematização foi estabelecido adequadamente, de tal modo como os dois exemplos apresentados no Quadro 8.

O trecho da conversa da equipe B, transcrita da gravação em áudio,

> B1: *A gente não conseguiu fazer!*
> B4: *Conseguiu você lembra aqui que a gente pegou e analisou, que, por exemplo, qual que era o padrão? O padrão é aqui ó! Lembra que agente analisou que de tanto em tanto aparecia um padrão?*
> B1: *Hunhun, mas desenvolver uma PG a gente não conseguiu escrever uma fórmula.*
> (AT3, B1, B2, B3, B4 – transcrição do áudio 44 de 4’42’’ à 4’58’’)

evidencia que os alunos reconhecem uma progressão geométrica como um padrão para a solução da atividade proposta, no entanto, não conseguem escrever essa progressão, apontando que os alunos não realizam por completo o processo de matematização. Enquanto o aluno D2, em sua solução para a Atividade 5 (Quadro 9) escreve contas soltas e sem uma ordem matemática correta, como na primeira regra de três apresentada no canto superior esquerdo da figura do Quadro 9 onde podemos perceber que o aluno reconheceu uma variação de temperatura de 0,9 graus em uma hora e que deveria encontrar o tempo correspondente para uma variação de 0,7 graus, mas posteriormente ele coloca a resposta desse raciocínio e logo embaixo coloca a sua resolução.

Em ambas as situações consideramos que a etapa da matematização foi estabelecida parcialmente tendo em vista que, ou os alunos sabem qual o conteúdo matemático que está envolvido na situação-problema e não expressam matematicamente esse conteúdo não solucionando a situação proposta, ou os alunos apresentam uma solução sem relacionar corretamente um conteúdo matemático para a mesma.

Para a primeira situação, em que os alunos reconhecem o conteúdo matemático, no entanto não solucionam a situação-problema, foi encontrado um documento na Atividade 3, enquanto na situação em que os alunos apresentam solução, mas não relacionam corretamente o conteúdo matemático foram encontrados um documento na Atividade 3 e seis na Atividade 5.

A subcategoria de análise seguinte segue o ciclo de modelagem de Blum e Leiβ (2006) onde a ação trabalhando matematicamente é discutida. Esta ação, por nós denominada Resolução, é considerada por Blum e Borromeo Ferri (2016) a produção de resultados matemáticos, enquanto Almeida, Silva e Vertuan (2016, p.16) evidenciam que

> consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação e até mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo.

Para essa subcategoria foram associadas duas unidades de análise, onde a solução foi encontrada adequadamente ou inadequadamente, Quadro 10.

Os alunos E1, E2, E3 e E4 na Atividade 3, assim como o aluno D5 na Atividade 5, Quadro 11, solucionam adequadamente a situação-problema proposta, encontrando a EDO e sua família de soluções, resolvendo o problema de valor inicial e obtendo como resposta o tempo que o medicamento leva para praticamente sumir do organismo ou para o momento em que a pessoa foi morta. Para esta subcategoria de análise foram encontrados quatro documentos na Atividade 3 e quatorze documentos na Atividade 5.

Foram consideradas inadequadas as soluções em que os alunos apresentam uma resolução incorreta matematicamente, havendo erros em todo o processo de resolução ou pontualmente durante o processo, como os exemplos citados no Quadro12, onde os alunos A1, A2 e A3 apresentam erros durante o processo de resolução da Atividade 3, e o aluno C3 apresenta uma solução insatisfatória matematicamente, ou seja, sem resolução com cálculos matemáticos para a Atividade 5.

A última subcategoria de análise de Modelagem Matemática foi denominada de Interpretação e Validação e consiste na

> Interpretação dos resultados indicados pelo modelo implica a análise de uma resposta para o problema. A análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação. Essa fase visa, para além da capacidade de construir e aplicar modelos, ao desenvolvimento, nos alunos, da capacidade de avaliar esse processo de construção de modelos e os diferentes contextos e aplicações (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 16).

Blum e Borromeo Ferri (2016, p. 66, tradução nossa), em seu ciclo de modelagem consideram a Validação como a sexta etapa, que “pode mostrar ser apropriado ou mesmo necessário recorrer ao ciclo de modelagem uma segunda vez[26]", observando que se a solução encontrada se apresenta inadequada, não caracterizando a situação-problema estudada corretamente, é necessário retornar ao ciclo e verificar em qual(is) passo(s) houve(ram) problema(s).

Esta subcategoria de análise foi estabelecida com duas unidades de análise em que o processo de Interpretação e Validação foi estabelecido ou não foi estabelecido (Quadro13). Consideramos que a interpretação e validação da situação-problema proposta foi estabelecida quando os alunos registram explicitamente indícios desses fatos, como pode ser observado no Quadro 14 onde os alunos E1, E2, E3 e E4 relatam a ordem cronológica dos acontecimentos que ocorreram durante a realização da Atividade 3 e a posterior confirmação dos resultados obtidos fazendo uso de um *software*. Enquanto, analogamente, os alunos C1, C2, C3 e C4 registram sua verificação escrevendo no documento referente à Atividade 5 "Prova real".

Para a subcategoria de análise onde a Interpretação e a Validação não foram estabelecidas foram consideradas: as situações que não apresentavam uma resposta que satisfizesse a situação-problema, como apresentado no Quadro 15 onde os alunos B1, B2, B3 e B4 determinam uma função que relaciona a concentração de medicamento e o tempo transcorrido a partir do momento da ingestão deste medicamento, no entanto não respondem ao questionamento sobre quando esse medicamento iria praticamente sumir do organismo; assim como as situações em que os alunos apresentam solução, mas não verificam se a solução encontrada é adequada à situação-problema proposta, como observado no Quadro 15, onde o aluno D5 apresenta como solução da Atividade 5 (19 horas) mas não realiza a validação desta solução de forma explícita.

6.2 CATEGORIA: RECURSOS TECNOLÓGICOS

Na categoria Recursos Tecnológicos foram observados todos os documentos que fazem parte do *corpus* de análise, obtendo-se três unidades de análise, como apresentado no Quadro 16.

CATEGORIA	UNIDADES DE ANÁLISE
Recursos Tecnológicos	Quando solicitado

[26]"May show that it is appropriate or even necessary to go around the described modeling cycle a second time".

	Como auxílio para realizar cálculos
	Como fonte de pesquisa

Quadro 16 - Unidades de Análise referentes à Categoria Recursos Tecnológicos
Fonte: A própria autora

A primeira unidade de análise evidencia quando houve uso de recursos tecnológicos por solicitação da pesquisadora

CATEGORIA: Recursos Tecnológicos UNIDADE DE ANÁLISE: Quando solicitado
Agora, utilizando o software GeoGebra a partir do Link: https://ggbm.at/bWneJWVS , insira a equação diferencial $f'(x) = x^2$ no campo f (x,y), deixando o campo "visualizar EDO" marcado e o campo "visualizar a solução da EDO" desmarcado. Analise as informações que aparecem movimentando os controles deslizantes e responda às questões propostas. (AT 4)
Após analise do filme Trilho de Ar, que foi enviado no email da turma, através do software de videoanálise [18] Tracker, determine a equação horária da posição do corpo. (AT 6)
Em alguns momentos houve a solicitação, por parte da pesquisadora, que os alunos utilizassem recursos tecnológicos para realizar algumas atividades, como as Atividade 4 (AT4: Campo de Direções) e Atividade 6 (AT6: Movimento Uniforme), que deveriam fazer uso de um objeto de aprendizagem e do programa *Tracker* em seu processo de resolução.

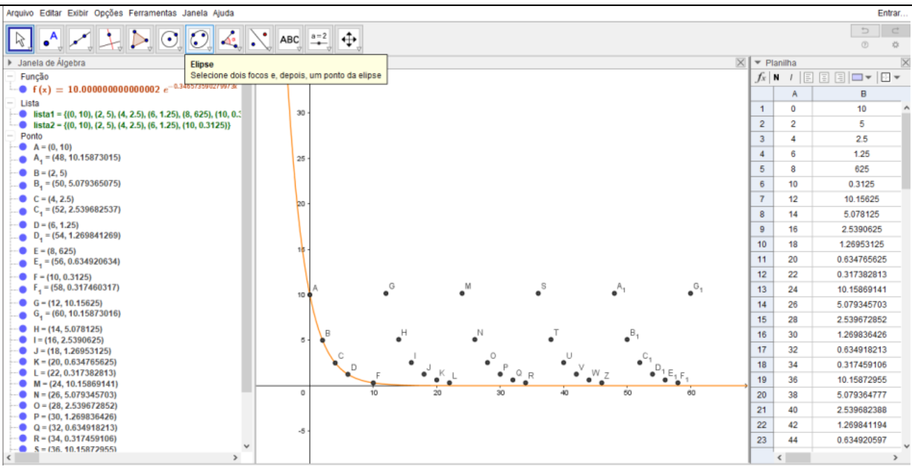
Quadro 17 - Uso de Recursos Tecnológicos quando solicitado
Fonte: A própria autora

A segunda unidade de análise evidencia quando os alunos fizeram uso de recursos tecnológicos como auxílio para realizar cálculos.

CATEGORIA: Recursos Tecnológicos
UNIDADE DE ANÁLISE: Como auxílio para realizar cálculos

C2 f_x

	A	B	C	D	E	F	G
2	10	0				10	0
3	5	2				5	2
4	2,5	4				2,5	4
5	1,25	6				1,25	6
6	0,625	8				0,625	8
7	0,3125	10				0,3125	10
8	0,15625	12				10,15625	12
9	0,078125	14				5,078125	14
10	0,0390625	16				2,5390625	16
11	0,01953125	18				1,26953125	18
12	0,009765625	20				0,634765625	20
13	0,004882813	22				0,317382813	22
14	0,002441406	24				10,15869141	24
15	0,001220703	26				5,079345703	26
16	0,000610352	28				2,539672852	28
17	0,000305176	30				1,269836426	30
18	0,000152588	32				0,634918213	32
19						0,317459106	34
20						10,15872955	36
21						5,079364777	38
22						2,539682388	40
23						1,269841194	42
24						0,634920597	44
25						0,317460299	46
26						10,15873015	48
27						5,079365075	50
28						2,539682537	52
29						1,269841269	54
30						0,634920634	56
31						0,317460317	58
32						10,15873016	60



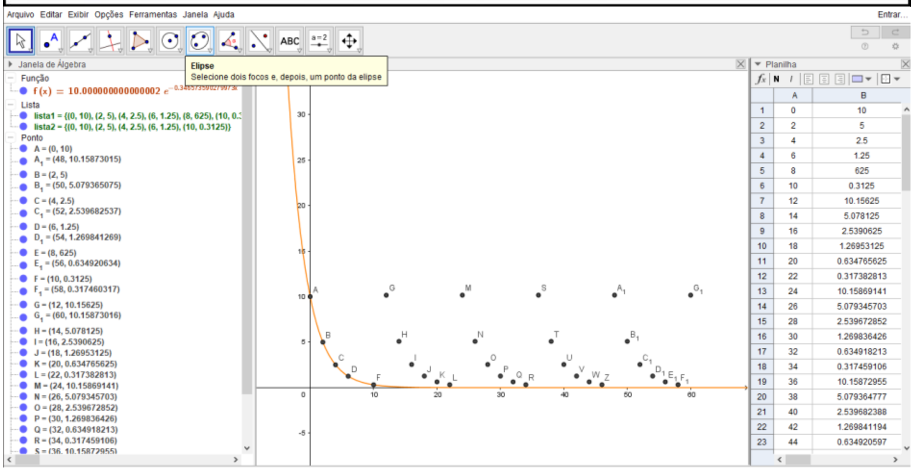
(AT3, B1, B2, B3 e B4)

Inicialmente fizemos uma tabela com os dados do exercício utilizando o programa Excel. Depois, ao analisarmos o problema, tentamos desenvolver uma Progressão geométrica pelo decaimento de concentração do remédio no organismo da criança numa razão de 1/2 a cada duas horas a partir do momento que o comprimido foi inserido no organismo.

Para acharmos os valores da tabela, montamos uma equação nas células, por exemplo, a fórmula da segunda célula seria a anterior multiplicado pela razão de ½. A cada 12 horas, além de fazer a multiplicação pela razão de 1/2 acrescentamos 10 mg. A partir de então, continuará caindo metade de duas em duas horas até a próxima hora de ingerir o remédio. Com a tabela pronta nós percebemos que de 12 em 12 horas, há um padrão aproximado de mg contida no orgamismo.

No geogebra, através da tabela do Excel, criamos um gráfico. Através deste, nós encontramos a formula:

f(x) = 10.000000000000002*e*^(-0.346573590279973x)



(AT3, B1, B2, B3 e B4)

B1: *Eu lembro que dá um valor quase igual a esse daqui no GeoGebra.*

B2: É *elevado lá, que fala?*

B1: *É! Abre aí pra nós ver lá! Pra analisar no GeoGebra.*

B4: *A! No GeoGebra, o GeoGebra tá aqui.*

(Trecho de conversa entre B1, B2, B3 e B4, transcrito do vídeo 44 de 47' a 48", Atividade 3).

Os alunos estão comparando a resolução da situação-problema que obtiveram no documento 48.

Os alunos fazem uso do Excel para montar tabelas, realizando cálculos que deveriam ser feitos repetidas vezes. Também utilizam o GeoGebra para plotar gráficos e encontrar suas funções.

Quadro 18 - Uso de Recursos Tecnológicos como auxílio para realizar cálculos
Fonte: A própria autora

A terceira unidade de análise evidencia o uso de recursos tecnológicos como fonte de pesquisa.

CATEGORIA: Recursos Tecnológicos UNIDADE DE ANÁLISE: Como fonte de pesquisa
C4: *A temperatura é de trinta e sete vírgula três até trinta e sete vírgula oito, febre é considerada a partir de trinta e sete vírgula oito*. (Lendo o texto encontrado na pesquisa do celular) (Trecho de conversa entre C1, C2, C3 e C4 transcrito do vídeo 116 de 4'49'' à 5', Atividade 5).
B2: *Trinta e cinco e meio até..., a sei, ta bom, ta certo então!* (Trecho de conversa de B2 ao celular, transcrito do vídeo 113 de 26'34'' à 27'05'', Atividade 5)
Os alunos utilizam o celular com fonte de pesquisa, seja falando ao telefone com alguém que possa oferecer a resposta ou realizando uma busca na *internet*.

Quadro 19 - Uso de Recursos Tecnológicos como fonte de pesquisa
Fonte: A própria autora

A categoria de Recursos tecnológicos corrobora com o propósito apontado por Borssoi (2017) de que "inúmeras pesquisas apontam que ambientes de ensino e aprendizagem não devem ser dissociados das tecnologias de informação e comunicação, pois estas podem promover experiências positivas de aprendizagem" (BORSSOI, 2017, p. 143)

Considerando esse pressuposto, o uso de tecnologia em sala de aula, esteve associado a vários códigos que foram considerados importantes para a análise. Observando a Figura 12 elaborada pelo *software Atlas TI 8.0* podemos classificar o uso de tecnologia em três situações (quando solicitado, como auxílio para realizar cálculos, como fonte de pesquisa). Essas três situações corroboram com a pesquisa de Javaroni (2007, p. 164), que observa

> o papel que o computador assumiu no desenvolvimento das atividades. Em determinadas situações, ele pode desempenhar um papel de facilitador de contas, em outras, ele surge como ampliador de memória dos alunos e, em outras situações, ele possibilita a reorganização do pensamento dos alunos.

Para nossa pesquisa, a reorganização do pensamento dos alunos ocorre quando a atividade solicita que estes utilizem recursos tecnológicos, como alternativa de observação de outras formas de solução, além da algébrica. O termo “como auxílio para realizar cálculos”, por nós utilizado, é denominado por Javaroni (2007) de facilitador de contas, enquanto o termo “como fonte de pesquisa” é considerado por Javaroni (2007) de ampliador da memória dos alunos.

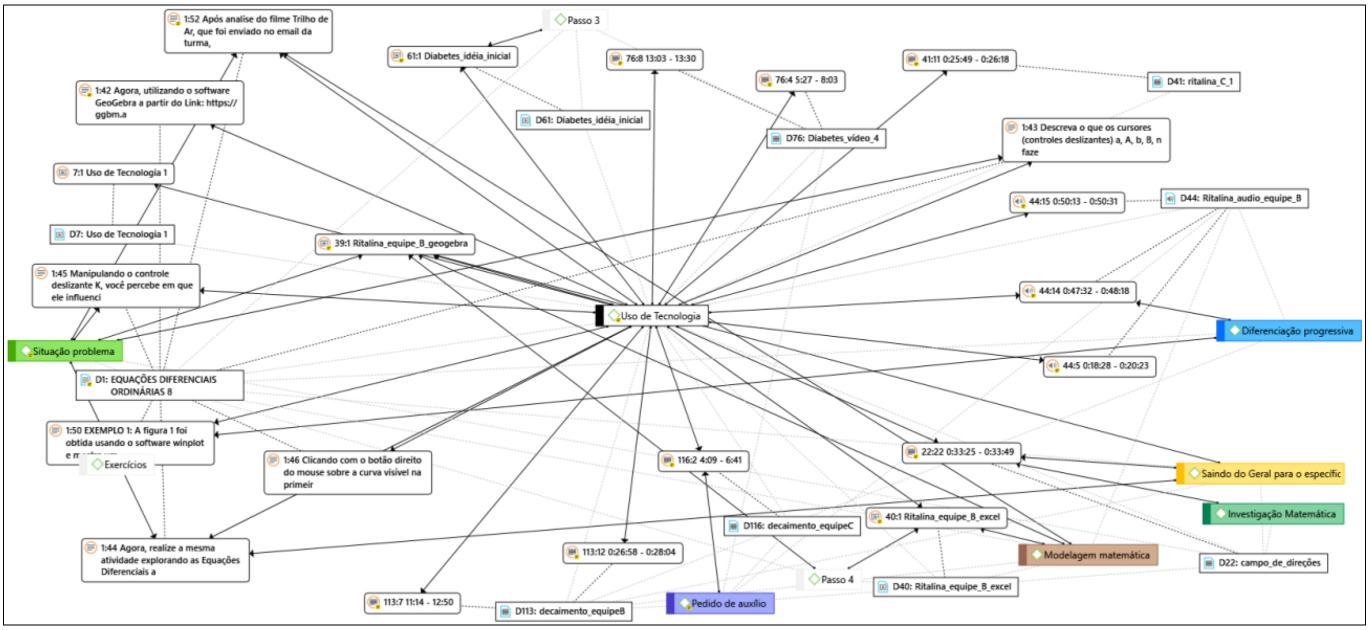


Figura 12 – Figura elaborada pelo *software Atlas TI 8.0*
Fonte: A própria autora

1) Quando solicitado

Howland, Jonassen e Marra (2011) discorrem que “as tecnologias devem ser pensadas como ferramentas de aprendizagem com as quais os alunos possam representar o que sabem ao invés de reproduzirem o que os professores e livros didáticos trazem” (HOWLAND; JONASSEN; MARRA, 2011, apud BORSSOI, 2017, p. 148)

Como a proposta de ensino está pautada na Aprendizagem Significativa, esse fato deve ser considerado importante, se observarmos que em vários momentos as atividades do Produto Educacional necessitam do uso de tecnologia para serem desenvolvidas (Quadro 17), seja na forma de um objeto de aprendizagem a ser manipulado para que os alunos investiguem uma situação-problema; na obtenção de um gráfico; ou até mesmo para coleta de dados, como ocorreu na Atividade 6 (Movimento Uniforme), onde os dados foram coletados pelo *software Tracker.*

Borssoi (2017) intensifica o discurso de Howland, Jonassen e Marra (2011), relatando que

> Esses autores entendem que o ensino deve agir no sentido de que os alunos aprofundem e ampliem os significados que constroem ou adquirem por meio da participação nas atividades de aprendizagem. Assim, a natureza das tarefas melhor determina a natureza da aprendizagem do aluno, sendo que as tecnologias podem e devem se tornar ferramentas de aprendizagem significativa (BORSSOI, 2017, p. 149).

Podemos observar que o uso de um objeto de aprendizagem foi fato intencional, pois o mesmo foi desenvolvido pela pesquisadora para que a Atividade 4 (Campo de Direções) fosse desenvolvida, sendo assim houve preocupação com a natureza da aprendizagem do aluno. Fato considerado importante por Borssoi (2017), assim como Javaroni e Soares (2012, p. 266), "ao observarmos esse campo de direções podemos fazer deduções acerca do comportamento da solução, que é função da velocidade do objeto, sem necessariamente determiná-la algebricamente".

Consideramos, portanto, que a elaboração de atividades que fizessem uso de tecnologia como suporte para a aprendizagem se constituiu em fator essencial para a unidade de ensino, pois essas atividades têm potencial para favorecer a aprendizagem.

2) Como auxílio para realizar cálculos

Podemos observar no Quadro 18 que uso de programas computacionais ocorreu em várias situações, para elaborar tabelas, para plotar gráficos, até mesmo para exibir funções que os alunos não conseguiam encontrar. No mesmo sentido, algumas vezes os alunos utilizavam programas computacionais como o GeoGebra para realizar a verificação das respostas por eles encontradas para as situações-problema, essas verificações ocorreram na forma de plotagem de gráficos e de exibição de funções.

Percebemos nessas citações o uso da tecnologia como parceira intelectual

> as tecnologias devem ser consideradas como ferramenta de aprendizagem com a qual os alunos possam aprender como organizar e resolver problemas, compreender fenômenos novos, construir modelos desses fenômenos, e, dada uma situação nova, definir metas e regular sua própria aprendizagem, além de constituir um meio para os alunos interagirem e comunicarem suas ideias, trabalhando de modo colaborativo (BORSSOI; ALMEIDA, 2015, p. 43).

O uso da tecnologia possibilitou o trabalho colaborativo entre os alunos, como exibido no Quadro 18 quando os alunos discutem o desenvolvimento da atividade e utilizam o GeoGebra em todo esse percurso, da atividade que estava sendo realizada (uma atividade de Modelagem Matemática), desde o momento da visualização da situação-problema até a validação do modelo encontrado.

3) Como fonte de pesquisa

Os alunos, em todas as atividades, exceto na Avaliação, tiveram acesso direto à pesquisa. Muitas vezes eles utilizaram a *internet* para obterem dados para a situação-problema, assim como fizeram o uso do próprio celular, dentro de sala de aula, para obterem dados importantes, como quando o aluno B2 realiza uma ligação para saber qual é a temperatura corporal normal do ser humano, como pode ser visto no Quadro 19.

Neste sentido, a tecnologia passa a agir como o que Borssoi e Almeida (2015) denominam de um *outro* que também tem papel de colaborador,

> Esse recurso tecnológico pode ser encarado como um *outro* que tem o papel de colaborador, que integra um grupo colaborativo. Assim, para aqueles em que a tecnologia integrada à abordagem do problema tenha levado a pensar, fazer conjecturas, podemos inferir que a tecnologia atuou como uma parceira intelectual (BORSSOI, ALMEIDA, 2015, p. 43).

pois fica caracterizado que sem as informações obtidas pela internet ou pelo uso do telefone celular, o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática estaria prejudicado, tendo em vista que essas informações foram essenciais.

Observando esses fatos concordamos com Javaroni (2007, p. 164) quando esta relata que

> O computador assume tanto o papel de reorganizador quanto o papel de suplemento nas atividades dos estudantes ao aprender conteúdos matemáticos, dependendo da abordagem que eles desenvolvam nesse ambiente mediado pelas mídias informáticas, do tipo de atividades propostas, da frequência do uso e da familiaridade que se tenha com ele.

O que reitera a necessidade de elaborar as atividades embasadas em uma teoria de aprendizagem, sendo assim, passamos a discutir a categoria de análise relacionada à Aprendizagem Significativa.

6.3 CATEGORIA: APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Na categoria Aprendizagem Significativa foram observados todos os documentos que fazem parte do *corpus* de análise e obtidos quatro subcategorias de análise, sendo que a subcategoria de subsunçores apresenta três unidades de análise e estas possuem subunidades, como pode ser observado no Quadro 20.

<table>
<tr><td rowspan="12">Aprendizagem Significativa</td><td rowspan="6">Subsunçores</td><td rowspan="2">Cálculo Diferencial Integral</td><td>Apresentou subsunçores sobre Cálculo Diferencial Integral</td></tr>
<tr><td>Não apresentou subsunçores sobre Cálculo Diferencial Integral</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Recursos Tecnológicos</td><td>Apresentou subsunçores sobre Recursos Tecnológicos</td></tr>
<tr><td>Não apresentou subsunçores sobre Recursos Tecnológicos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Modelagem Matemática</td><td>Apresentou subsunçores sobre Modelagem Matemática</td></tr>
<tr><td>Não apresentou subsunçores sobre Modelagem Matemática</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Diferenciação Progressiva</td><td colspan="2">Ocorreu</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não ocorreu</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Reconciliação Integradora</td><td colspan="2">Ocorreu</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não ocorreu</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aprendizagem do conteúdo</td><td colspan="2">Ocorreu</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não ocorreu</td></tr>
</table>

Quadro 20 - Subcategorias, Unidades de Análise e Subunidades de Análise referentes à Categoria Aprendizagem Significativa
Fonte: A própria autora

Podemos observar na Figura 13, que nem todas as atividades envolvidas no Produto Educacional exerceram a função de verificação de subsunçores dos alunos, sendo assim, apenas as Atividade~~s~~ 1 (AT1: Eficiência de um operador de Máquinas) e Atividade 4 (AT4:Campo de Direções) foram analisadas.

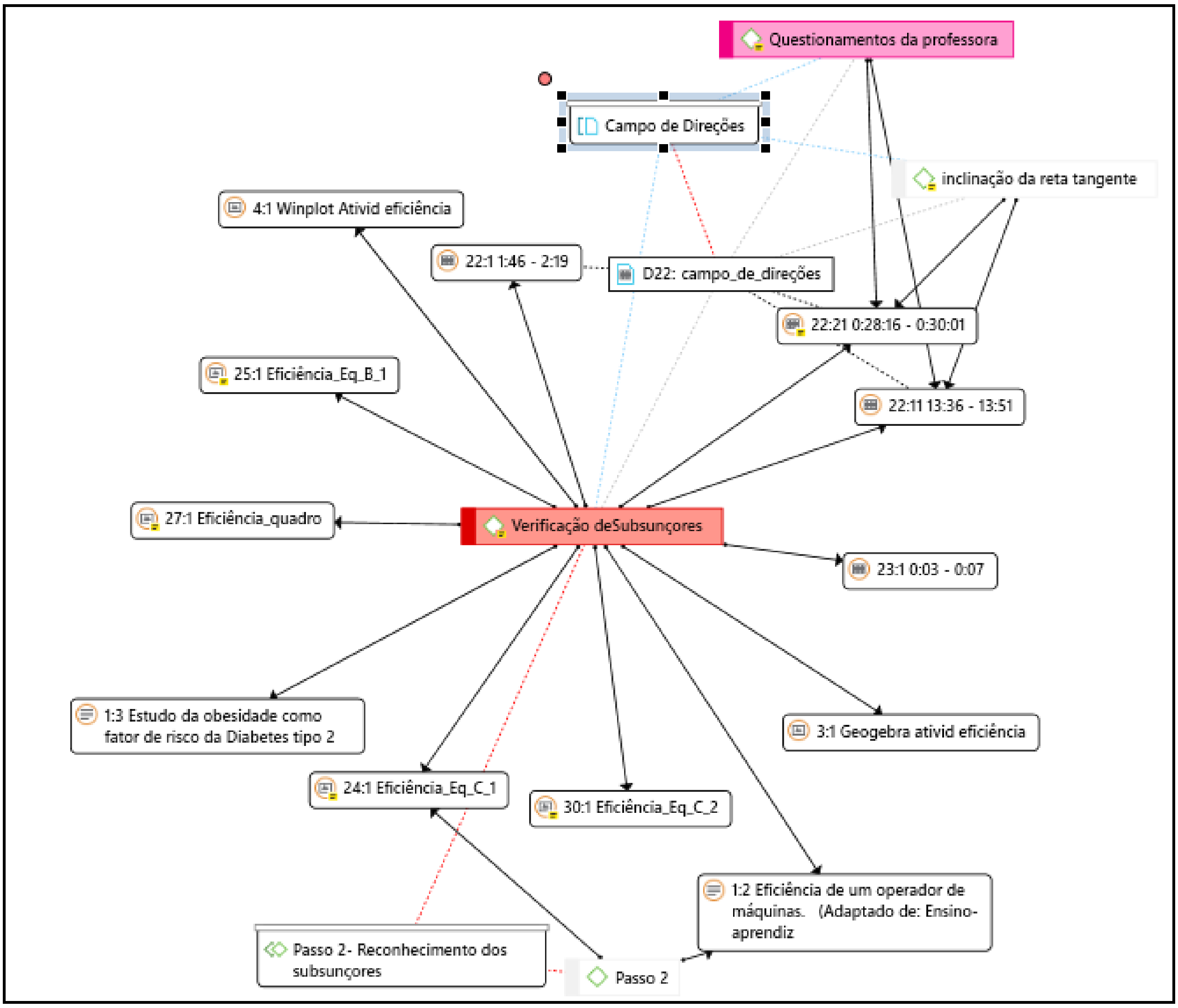


Figura 13 - Software Atlas T.I. 8.0 Verificação de Subsunçores
Fonte: A própria autora

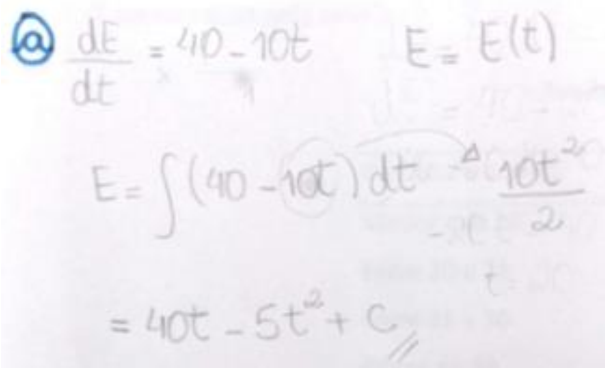
A primeira unidade de análise evidencia a existência ou não de subsunçores relacionados ao Cálculo Diferencial Integral.

SUBCATEGORIA	UNIDADES DE ANÁLISE – SUBUNIDADES DE ANÁLISE	
Subsunçores	Cálculo Diferencial Integral	Apresentou subsunçores sobre Cálculo Diferencial Integral
		Não apresentou subsunçores sobre Cálculo Diferencial Integral

Quadro 21 - Subcategoria Subsunçores sobre Cálculo Diferencial Integral e suas Unidades de Análise
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Aprendizagem Significativa SUBCATEGORIA: Subsunçores UNIDADE DE ANÁLISE: Cálculo Diferencial Integral

SUBUNIDADE DE ANÁLISE: Apresentou subsunçores sobre Cálculo Diferencial Integral

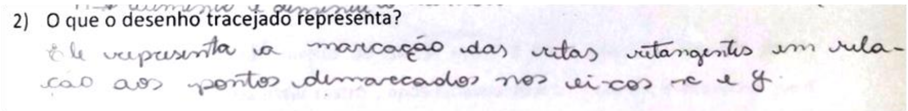


(a) $\frac{dE}{dt} = 40 - 10t \qquad E = E(t)$

$E = \int (40 - 10t)\,dt \qquad \frac{10t^2}{2}$

$= 40t - 5t^2 + C$

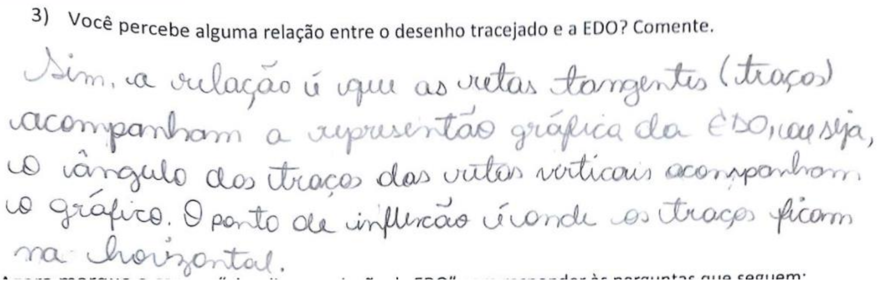
(AT1, D1)



2) O que o desenho tracejado representa?

Ele representa a marcação das retas retangentes em relação aos pontos demarcados nos eixos x e y.

(AT4, E2)



3) Você percebe alguma relação entre o desenho tracejado e a EDO? Comente.

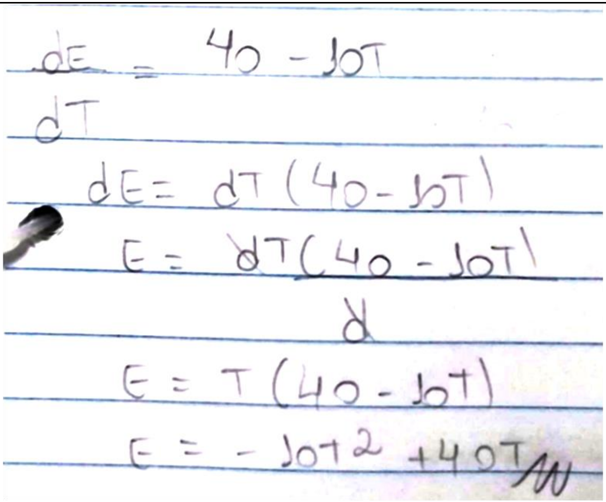
Sim, a relação é que as retas tangentes (traços) acompanham a representão gráfica da EDO, ou seja, o ângulo dos traços das retas verticais acompanham o gráfico. O ponto de inflexão é onde os traços ficam na horizontal.

(AT4, B2)

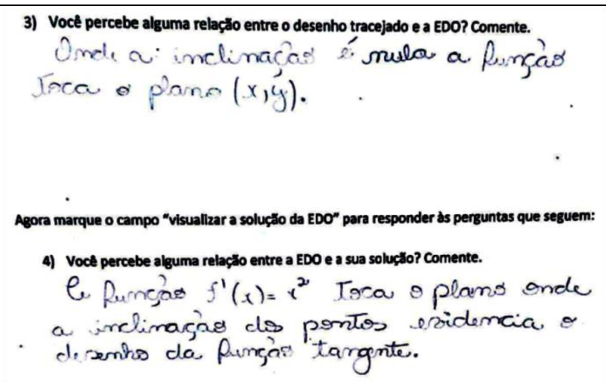
Consideramos a existência de subsunçores sobre Cálculo Diferencial Integral quando os alunos realizam operações corretamente ou descrevem conceitos matemáticos corretos.

Quadro 22 - Apresentação de Subsunçores sobre Cálculo Diferencial Integral
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Aprendizagem Significativa
SUBCATEGORIA: Subsunçores
UNIDADE DE ANÁLISE: Cálculo Diferencial Integral
SUBUNIDADE DE ANÁLISE: Não apresentou subsunçores sobre Cálculo Diferencial Integral



(AT1, D3)


3) Você percebe alguma relação entre o desenho tracejado e a EDO? Comente.

Onde a inclinação é nula a função toca o plano (x,y).

Agora marque o campo "visualizar a solução da EDO" para responder às perguntas que seguem:

4) Você percebe alguma relação entre a EDO e a sua solução? Comente.

A função $f'(x)= x^2$ toca o plano onde a inclinação dos pontos evidencia o desenho da função tangente.

(AT4, A3)

Em alguns documentos percebemos evidências de falta de subsunçores relacionados ao Cálculo Diferencial Integral, seus conceitos e técnicas de resolução, quando os alunos realizam operações incorretamente ou utilizam respostas com conceitos inadequados.

Quadro 23 - Não apresentação de Subsunçores sobre Cálculo Diferencial Integral
Fonte: A própria autora

A segunda unidade de análise evidencia a existência de subsunçores quanto ao uso de Recursos Tecnológicos.

<table>
<tr><td>SUBCATEGORIA</td><td colspan="2">UNIDADES DE ANÁLISE – SUBUNIDADES DE ANÁLISE</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Subsunçores</td><td rowspan="2">Recursos Tecnológicos</td><td>Apresentou subsunçores sobre Recursos Tecnológicos</td></tr>
<tr><td>Não apresentou subsunçores sobre Recursos Tecnológicos</td></tr>
</table>

Quadro 24 - Subcategoria Subsunçores sobre Recursos Tecnológicos e suas Unidades de Análise
Fonte: A própria autora

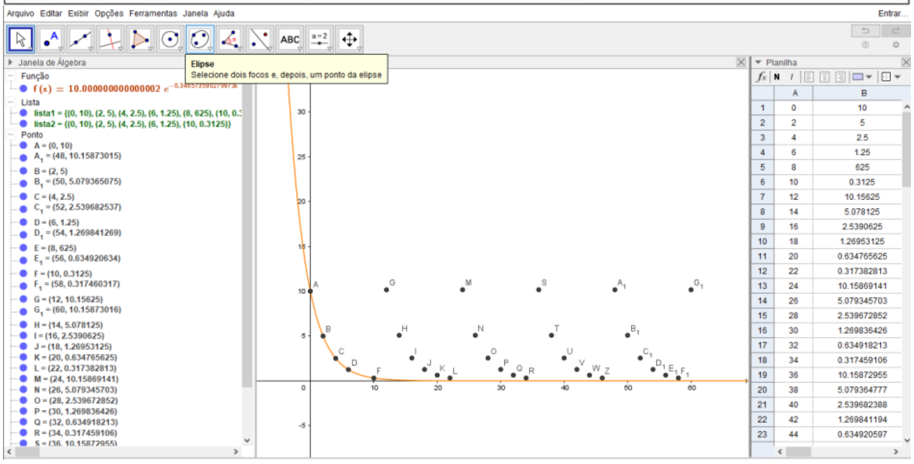
CATEGORIA: Aprendizagem Significativa
SUBCATEGORIA: Subsunçores
UNIDADE DE ANÁLISE: Recursos tecnológicos
SUBUNIDADE DE ANÁLISE: Apresentou subsunçores sobre Recursos Tecnológicos

Inicialmente fizemos uma tabela com os dados do exercício utilizando o programa Excel. Depois, ao analisarmos o problema, tentamos desenvolver uma Progressão geométrica pelo decaimento de concentração do remédio no organismo da criança numa razão de 1/2 a cada duas horas a partir do momento que o comprimido foi inserido no organismo.

Para acharmos os valores da tabela, montamos uma equação nas células, por exemplo, a fórmula da segunda célula seria a anterior multiplicado pela razão de ½. A cada 12 horas, além de fazer a multiplicação pela razão de 1/2 acrescentamos 10 mg. A partir de então, continuará caindo metade de duas em duas horas até a próxima hora de ingerir o remédio. Com a tabela pronta nós percebemos que de 12 em 12 horas, há um padrão aproximado de mg contida no orgamismo.

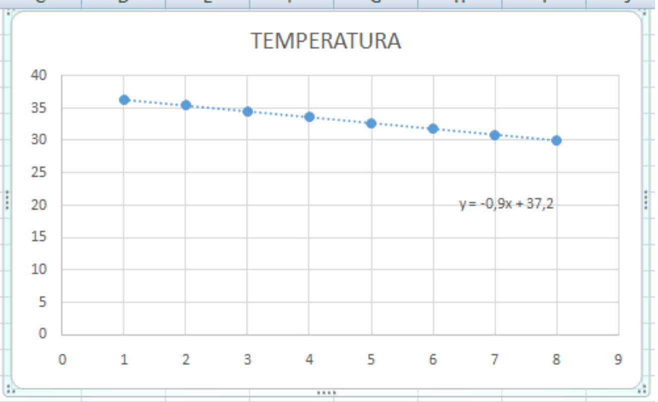
No geogebra, através da tabela do Excel, criamos um gráfico. Através deste, nós encontramos a formula:

f(x) = 10.000000000000002e^(-0.346573590279973x)



(AT3, B1, B2, B3 e B4)

	A	B
1	HORAS	TEMPERATURA
2	1	36,3
3	2	35,4
4	3	34,5
5	4	33,6
6	5	32,7
7	6	31,8
8	7	30,9
9	8	30
10		
11		
12		
13		
14		
15		



(AT5, B1, B2, B3 e B4)

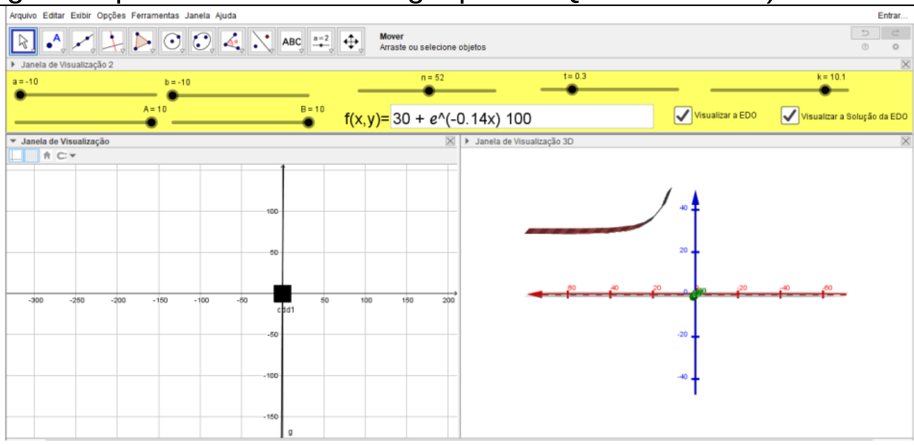
Os alunos apresentam subsunçores quanto ao uso de recursos tecnológicos quando utilizam *softwares* corretamente para realizar atividades.

Quadro 25 - Apresentação de Subsunçores sobre Recursos Tecnológicos
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Aprendizagem Significativa
SUBCATEGORIA: Subsunçores
UNIDADE DE ANÁLISE: Recursos tecnológicos
SUBUNIDADE DE ANÁLISE: Não apresentou subsunçores sobre Recursos Tecnológicos

	A	B	C	D
1	Nome do respondente	O que você sabe do programa Excel?	O que você sabe do programa Winplot?	O que você sabe do programa Geogebra?
2	A3	Usar como calculadora	Plotar gráfico de função bidimensional, Nada	Plotar gráfico de função
3	B4	Nada	Nada	Plotar gráfico de função
4	E2	Usar como calculadora, Plotar gráfico de função	Nada	Plotar gráfico de função
5	B1	Plotar gráfico de função	Nada	Ajuste de curvas, Plotar gráfico de função
6	E3	Usar como calculadora	Nada	Ajuste de curvas, Plotar gráfico de função
7	D5	Usar como calculadora	Nada	Ajuste de curvas, Plotar gráfico de função
8	A3	Usar como calculadora	Nada	Plotar gráfico de função
9	D1	Usar como calculadora	Nada	Ajuste de curvas, Plotar gráfico de função
10	C1	Nada	Nada	Nada
11	C2	Usar como calculadora, Plotar gráfico de função	Nada	Usar como calculadora, Ajuste de curvas
12	A1	Usar como calculadora, Plotar gráfico de função	Nada	Plotar gráfico de função
13	E4	Nada	Nada	Usar como calculadora, Ajuste de curvas, Plotar gráfico de função
14	C3	Usar como calculadora, Ajuste de curvas	Nada	Usar como calculadora, Ajuste de curvas
15	D4	Nada	Nada	Ajuste de curvas, Plotar gráfico de função
16	E1	Usar como calculadora	Nada	Plotar gráfico de função
17	A2	Usar como calculadora, Plotar gráfico de função	Nada	Plotar gráfico de função
18	D3	Nada	Nada	Usar como calculadora, Ajuste de curvas
19	D2	Usar como calculadora	Nada	Plotar gráfico de função
20	C4	Usar como calculadora, Plotar gráfico de função	Nada	Ajuste de curvas
21	B2	Usar como calculadora	Nada	Ajuste de curvas, Plotar gráfico de função
22	B3	Usar como calculadora	Nada	Ajuste de curvas, Plotar gráfico de função
23				

(Tabela gerada pelo Formulário Google para o Questionário 1)



(AT9, A1, A2 e A3)

Verificamos a falta da presença de subsunçores relacionados aos recursos tecnológicos observando o questionário respondido pelos alunos no primeiro dia de aula e atividades que ocorreram em sala de aula que deveriam fazer uso de tecnologia em que os alunos não alcançaram o objetivo almejado.

Quadro 26 - Não apresentação de Subsunçores sobre Recursos Tecnológicos
Fonte: A própria autora

A terceira unidade de análise evidencia a existência de subsunçores quanto a Modelagem Matemática.

<table>
<tr><td>SUBCATEGORIA</td><td colspan="2">UNIDADES DE ANÁLISE – SUBUNIDADES DE ANÁLISE</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Subsunçores</td><td rowspan="2">Modelagem Matemática</td><td>Apresentou subsunçores sobre Modelagem Matemática</td></tr>
<tr><td>Não apresentou subsunçores sobre Modelagem Matemática</td></tr>
</table>

Quadro 27 - Subcategoria de Subsunçores sobre Modelagem Matemática e suas Unidades de Análise
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Aprendizagem Significativa SUBCATEGORIA: Subsunçores UNIDADE DE ANÁLISE: Modelagem Matemática SUBUNIDADE DE ANÁLISE: Apresentou subsunçores sobre Modelagem Matemática

<table>
<tr><td>
Inicialmente fizemos uma tabela com os dados do exercício utilizando o programa Excel. Depois, ao analisarmos o problema, tentamos desenvolver uma Progressão geométrica pelo decaimento de concentração do remédio no organismo da criança numa razão de 1/2 a cada duas horas a partir do momento que o comprimido foi inserido no organismo.

Para acharmos os valores da tabela, montamos uma equação nas células, por exemplo, a fórmula da segunda célula seria a anterior multiplicado pela razão de ½. A cada 12 horas, além de fazer a multiplicação pela razão de 1/2 acrescentamos 10 mg. A partir de então, continuará caindo metade de duas em duas horas até a próxima hora de ingerir o remédio. Com a tabela pronta nós percebemos que de 12 em 12 horas, há um padrão aproximado de mg contida no orgamismo.

No geogebra, através da tabela do Excel, criamos um gráfico. Através deste, nós encontramos a formula:

f(x) = 10.000000000000002e^(-0.346573590279973x)
(AT3, B1, B2, B3 e B4)
</td></tr>
<tr><td>
Concluímos que para encontrar a função do problema, deveríamos primeiramente ter uma noção de como era a curva do nosso gráfi e posteriormente através da lei de formação e os dados do problema tentar achar a função. Depois de algumas tentativas, notamos que não se tratava de uma função do 1° grau e nem do 2° grau. Quando utilizamos o geogebra para montar o gráfico, então percebemos que se tratava de uma função exponencial.
(AT3, E1, E2, E3, E4)
</td></tr>
<tr><td>
Podemos inferir a existência de subsunçores associados à Modelagem Matemática, quando na primeira atividade de Modelagem realizada em sala de aula, os alunos são capazes de fazer inferências sobre os conteúdos matemáticos associados à situação-problema que estava sendo estudada, e quando realizam a etapa da validação e percebem que a função que escolheram para a situação-problema não é adequada e retomam suas hipóteses até alcançarem o resultado que desejavam.
</td></tr>
</table>

Quadro 28 - Apresentação de Subsunçores sobre Modelagem Matemática
Fonte: A própria autora

<table>
<tr><td>
CATEGORIA: Aprendizagem Significativa
SUBCATEGORIA: Subsunçores
UNIDADE DE ANÁLISE: Modelagem Matemática
SUBUNIDADE DE ANÁLISE: Não apresentou subsunçores sobre Modelagem Matemática
</td></tr>
</table>

1	Nome do respondente	O que você entende por "Modelo Matemático"?
2	A3	Não sei.
3	B4	não faço ideia
4	E2	É um exemplo que pode ser seguido.
5	B1	Aquilo que é escrito com uma linguagem Matemática, seguindo um modelo ou um padrão.
6	E3	Inspiração. Uma base para ter acompanhamento.
7	D5	É um modelo utilizado para explicar ou simplificar algo (a seguir).
8	A3	Um exemplo que ajudar em novas situações.
9	D1	Modelo científico que utiliza algum formulismo matemático para expressar variáveis.
10	C1	Resolver exercícios através de exemplo parecido
11	C2	Resolver exercícios através de um exemplo parecido
12	A1	UM EXEMPLO QUE PODEMOS SEGUIR PARA FACILITAR NAS RESOLUÇÕES
13	E4	Um exemplo que seguimos para obter uma resposta.
14	C3	é uma interpretação da realidade, um exemplo que seguimos para resolver exercício
15	D4	não faço ideia
16	E1	É um exemplo que pode ser seguido em outra situação.
17	A2	Um exemplo que ajuda a facilitar as resoluções
18	D3	modelo matemático é uma representação ou interpretação simplificada da realidade
19	D2	Não lembro.
20	C4	Resolver exercícios através de outro exemplo parecido
21	B2	Modelo matemático a meu ver, pode ser relacionado com o modo de um livro de matemática por exemplo, seguindo um padrão adequado.
22	B3	não conheço

(Tabela gerada pelo Formulário Google para o Questionário 1)

Observando o questionário respondido pelos alunos no primeiro dia de aula e sabendo que o curso de Licenciatura em Matemática não possui uma disciplina específica de Modelagem Matemática, podemos verificar que os alunos não apresentam subsunçores sobre Modelagem Matemática, não reconhecendo ao menos o que é um modelo matemático, segundo a concepção da Modelagem Matemática por nós adotada, associando um modelo a um exemplo feito para que possa facilitar a resolução de um exercício.

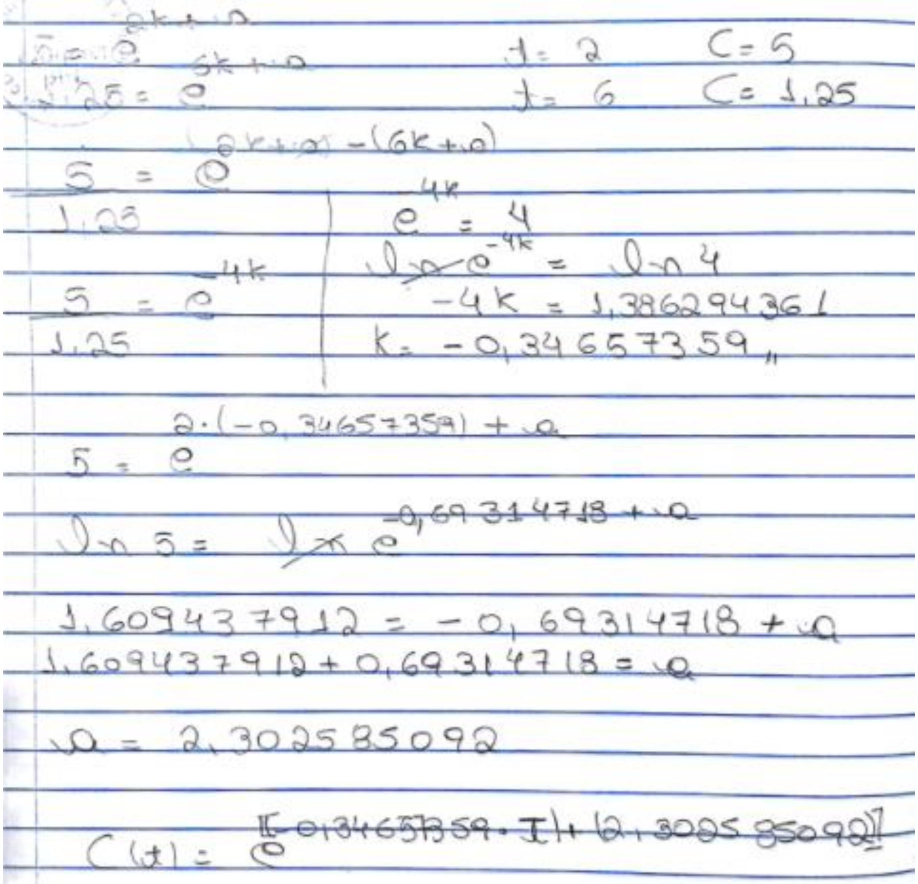
Quadro 29 - Não apresentação de Subsunçores sobre Modelagem Matemática
Fonte: A própria autora

A segunda categoria de análise evidencia a existência do processo da Diferenciação Progressiva, muito importante na Teoria da Aprendizagem Significativa.

SUBCATEGORIA	UNIDADES DE ANÁLISE
Diferenciação Progressiva	Ocorreu
	Não ocorreu

Quadro 30 - Subcategoria Diferenciação Progressiva e suas Unidades de Análise
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Aprendizagem Significativa SUBCATEGORIA: Diferenciação Progressiva UNIDADE DE ANÁLISE: Ocorreu
B1: *Eu lembro que dá um valor quase igual a esse daqui no GeoGebra.* B2: É *elevado lá, que fala?* B1: *É! Abre aí pra nós ver lá! Pra analisar no GeoGebra.* B4: *A! No GeoGebra, o GeoGebra tá aqui.* (Trecho de conversa entre B1, B2, B3 e B4, transcrito do vídeo 44 de 47' a 48", Atividade 3). Os alunos estão comparando a resolução da situação-problema que obtiveram no documento 48.



$t = 2 \quad C = 5$

$t = 6 \quad C = 1,25$

$5 = e^{2k+a}$

$1,25 = e^{6k+a}$

$\frac{5}{1,25} = e^{(2k+a)-(6k+a)}$

$\frac{5}{1,25} = e^{-4k}$

$e^{-4k} = 4$

$\ln e^{-4k} = \ln 4$

$-4k = 1,386294361$

$k = -0,34657359$

$5 = e^{2\cdot(-0,34657359)+a}$

$\ln 5 = \ln e^{-0,69314718+a}$

$1,609437912 = -0,69314718 + a$

$1,609437912 + 0,69314718 = a$

$a = 2,302585092$

$C(t) = e^{[-0,34657359 \cdot t] + (2,302585092)}$

(AT3, B1, B2, B3 e B4, documento 48)

B2: *A cada hora ele baixou zero vírgula nove?* (Se referindo à temperatura)

B3: *Mas até onde ele vai baixar? Você acha que ele vai baixar até a temperatura ambiente?*

No entanto, B4 tenta mostrar aos colegas que não é preciso saber até que temperatura ele vai baixar. Eles continuam a reflexão sobre o decaimento, relacionando que de hora em hora há uma queda de 0,9 graus, mas a dúvida sobre até que temperatura vai baixar persiste. Como ainda não encontram respostas, tentam encontrar em suas anotações alguma atividade já realizada para fazer comparações, como não encontram exercício similar, continuam com o raciocínio linear.

B2: *Se em uma hora ele decaiu zero vírgula nove, uma hora antes era pra estar...*

B3: *Trinta e sete vírgula dois.*

Ao visualizarem esse número, surge a dúvida sobre qual é a temperatura normal do corpo humano sem febre, os alunos chamam a pesquisadora, mas não responde diretamente a pergunta, dizendo que os alunos podem pesquisar. A discussão sobre o assunto continua e B1 tenta convencer os colegas que não precisa ser exato, enquanto B2 pensa que tem que ser exato.

B1: *Mas não é tão constante, não é de hora em hora, porque se passasse muito tempo o corpo ia estar gelado.* (mencionado o decaimento da temperatura).

B3: *Não sei se ele vai parar em trinta graus. Acho que quando ele chega em trinta graus ele pára.*

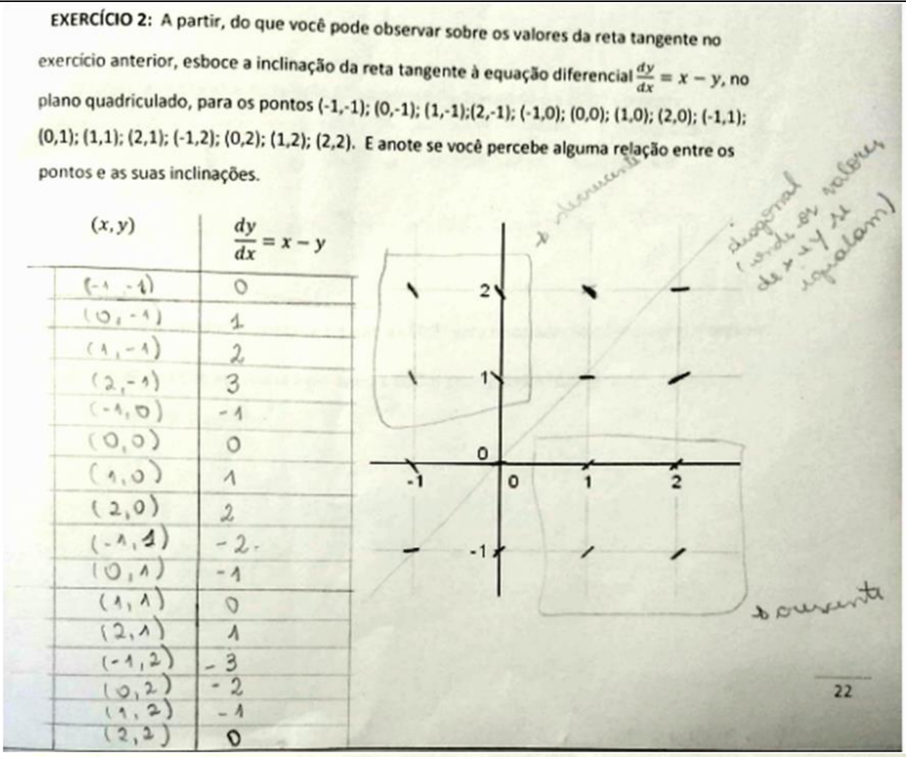
B4 tenta convencer B3 de que não importa se a temperatura irá

estabilizar. B4: *O que importa é das oito e quarenta e cinco pra traz, não pra frente, pra traz! Se a gente tá aqui a gente tem que descobrir o quanto era antes e não até aonde vai.* Enquanto isso B2 fala ao telefone celular, está conversando com alguém sobre a temperatura normal do corpo humano, que varia de 36 a 37,5 graus Celsius. A pesquisadora é solicitada para compartilhamento da ideia de decaimento da temperatura. Pesquisadora: *O corpo esfriará sempre da mesma maneira ou, começa a esfriar rápido e depois diminui ou, começa esfriar devagar e depois aumenta o resfriamento.* B1: *Não, eu acho que vai resfriar devagar e daí pára.* B3: *A mudança de temperatura, não é?* Pesquisadora: *Agora me responde. Chega num ponto que vai parando, e o B3 falou que...* B1: *Ele vai chegar nessa temperatura aqui.* (Mostrando algo no papel). A pesquisadora assente com a cabeça. Pesquisadora: *Que é a temperatura do próprio ambiente.* B4 comenta que eles conhecem o limite em que a temperatura irá chegar, mas que eles precisam saber informações sobre momentos anteriores e questionam a pesquisadora sobre o decaimento, mas ela comenta que eles terão uma estimativa. No entanto, B1 tenta convencer os amigos que não é tão simples e que eles precisam escrever uma equação que descreva a situação. A pesquisadora relata que realmente não é tão simples, que se eles tivessem um padrão, uma fórmula para cálculo, era só colocar na fórmula e encontrar a resposta. Pergunta se eles conseguem fazer isso só com aquelas informações, que se eles tivessem mais uma medição de temperatura eles conseguiriam. B1 insiste que eles têm que escrever uma função e a pesquisadora questiona *"uma função do quê"?* Ele responde que *"é da hora, uma variável só."* Pesquisadora: *Quem está variando, quem depende de quem?* B4: *A temperatura vai depender da hora.* A pesquisadora assente com a cabeça e B4 continua dizendo que chegará uma hora que ela ficará constante. Pesquisadora: *Constante igual a quanto?* B4: *Constante e igual à temperatura ambiente.* (Trecho de conversa entre B1, B2, B3 e B4, transcrito do vídeo 113 de 8' à 26', Atividade 5, combinado com descrição da pesquisadora).
O processo da Diferenciação Progressiva foi verificado comparando-se os trechos de vídeos e áudios com os registros realizados nos cadernos pedagógicos dos alunos. Verificamos que os subsunçores estão sendo alterados e modificados durante a realização das atividades, havendo uma complementação de conhecimento na estrutura cognitiva.

Quadro 31 - Ocorrência da Diferenciação Progressiva
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Aprendizagem Significativa

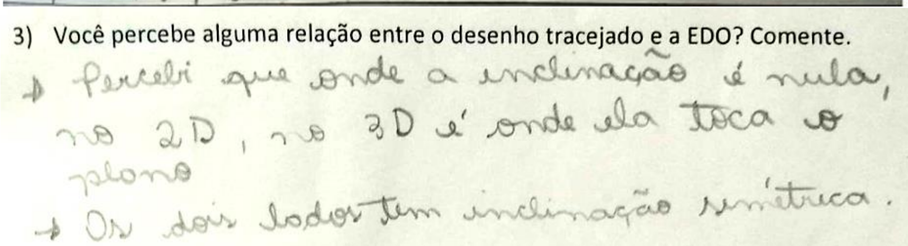
SUBCATEGORIA: Diferenciação Progressiva
UNIDADE DE ANÁLISE: Não ocorreu



EXERCÍCIO 2: A partir, do que você pode observar sobre os valores da reta tangente no exercício anterior, esboce a inclinação da reta tangente à equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x - y$, no plano quadriculado, para os pontos (-1,-1); (0,-1); (1,-1);(2,-1); (-1,0); (0,0); (1,0); (2,0); (-1,1); (0,1); (1,1); (2,1); (-1,2); (0,2); (1,2); (2,2). E anote se você percebe alguma relação entre os pontos e as suas inclinações.

(x,y)	$\frac{dy}{dx} = x - y$
(-1, -1)	0
(0, -1)	1
(1, -1)	2
(2, -1)	3
(-1, 0)	-1
(0, 0)	0
(1, 0)	1
(2, 0)	2
(-1, 1)	-2
(0, 1)	-1
(1, 1)	0
(2, 1)	1
(-1, 2)	-3
(0, 2)	-2
(1, 2)	-1
(2, 2)	0

22

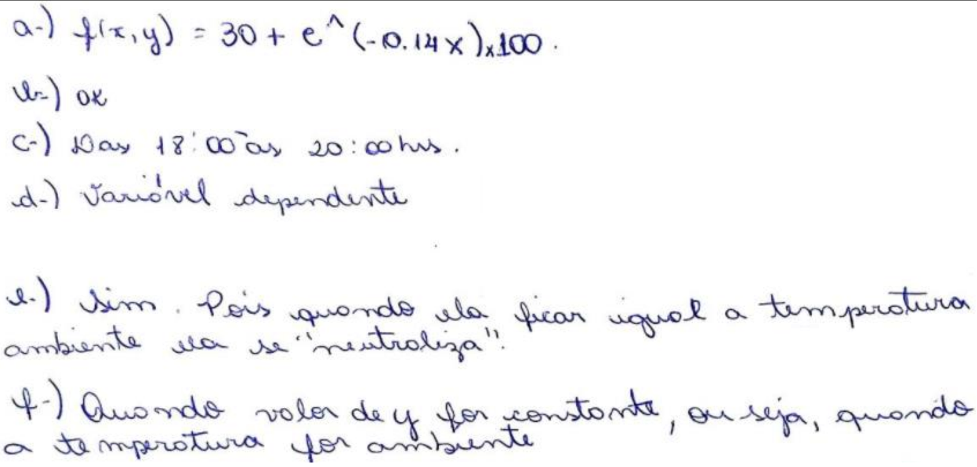


3) Você percebe alguma relação entre o desenho tracejado e a EDO? Comente.

Percebi que onde a inclinação é nula, no 2D, no 3D é onde ela toca o plano

Os dois lados tem inclinação simétrica.

(AT 4, C1)



a-) f(x,y) = 30 + e^(-0.14x)x100.

b-) ok

c-) Das 18:00 às 20:00 hrs.

d-) Variável dependente

e-) Sim. Pois quando ela ficar igual a temperatura ambiente ela se "neutraliza".

f-) Quando valor de y for constante, ou seja, quando a temperatura for ambiente

(AT9, C1, C2, C3 e C4)

A Diferenciação Progressiva não fica caracterizada quando percebemos que os alunos continuam com raciocínio semelhante ao que tinham antes de iniciar a atividade, não havendo alterações/modificações/evoluções na compreensão de conceitos matemáticos.

Quadro 32 - Não ocorrência da Diferenciação Progressiva
Fonte: A própria autora

A terceira categoria de análise evidencia a existência do processo da Reconciliação Integradora, outro processo importante na Teoria da Aprendizagem Significativa, e complementar ao processo da Diferenciação Progressiva

SUBCATEGORIA	UNIDADES DE ANÁLISE
Reconciliação Integradora	Ocorreu
	Não ocorreu

Quadro 33 - Subcategoria Reconciliação Integradora e suas Unidades de Análise
Fonte: A própria autora

<table>
<tr><td>CATEGORIA: Aprendizagem Significativa
SUBCATEGORIA: Reconciliação Integradora
UNIDADE DE ANÁLISE: Ocorreu</td></tr>
<tr><td>B3: Quando chegar perto de trinta graus vai diminuir também a..., variação.
Pesquisadora: O tanto que está diminuindo.
B3: É como se fosse uma porcentagem, de hora em hora ele vai diminuindo. Como se fosse nivelando em trinta. Agora eu entendi porque é uma EDO. Ela vai pegar de cima e quando ele começar a esfriar, vai começar a virar, só que quando ele virar vai nivelar. (Fazendo o desenho com as mãos no ar)
Pesquisadora: Isso é o gráfico de qual função B3?
B3: Uma exponencial, não é?

(Trecho de conversa entre B1, B2, B3 e B4, transcrito do vídeo 113 de 24’ à 26’, Atividade 5)</td></tr>
</table>

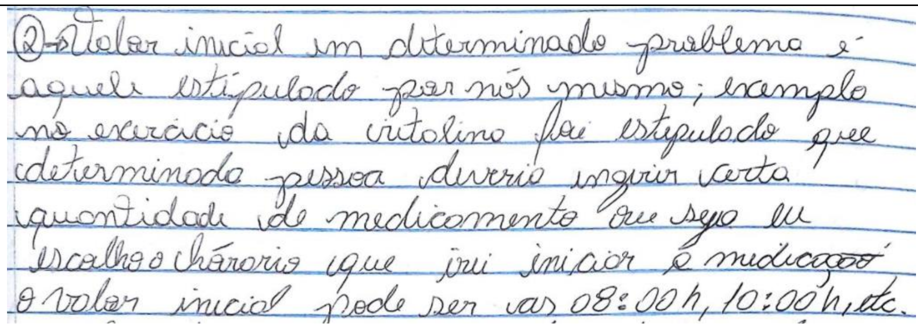
B4*: A função exponencial ela parte daqui... Por exemplo, assim ó, ela ta aqui* (apontando em cima), *a temperatura ta alta, daí ela vai descendo, daí vai chegar uma hora que ela vai estabilizando em trinta.* (Fazendo o desenho com as mãos no ar)
B2: *Isso que eu ia falar.*
B4: *Estabilizando em trinta, trinta, trinta.*
B4: *Isso.*
(...)
B4: *Não, mas aquela aqui do B1, que ele fez aqui, ela passou de trinta, entendeu?*
B2: *Mas o que ele fez aqui, foi o que a gente colocou aqueles dois pontos. Que é o que a gente tem*.
Relatando que a função não estava correta, pois eles haviam colocado dois pontos a mais.

(Trecho de conversa entre B1, B2, B3 e B4, transcrito do vídeo 113 de 1h 01' à 1h 02', Atividade 5)

O processo da Reconciliação Integradora foi evidenciado quando os alunos apresentam com clareza conceitos aprimorados sobre conteúdos matemáticos, considerados por nós já conhecidos.

Quadro 34 - Ocorrência da Reconciliação Integradora
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Aprendizagem Significativa
SUBCATEGORIA: Reconciliação Integradora
UNIDADE DE ANÁLISE: Não ocorreu



(2) o valor inicial em determinado problema é aquele estipulado por nós mesmo; exemplo no exercício da vitolino foi estipulado que determinada pessoa deveria ingerir certa quantidade de medicamento que seja eu escolho o horário que irei iniciar a medicação o valor inicial pode ser as 08:00h, 10:00h, etc.

(AT 9, D1, D2, D3, D4, D5 e D6, resposta da Atividade 2)

Pesquisadora: *Bom você sabe que o x não pode ter expoente, porque você viu que a sua função é de primeiro grau. Então sua f(x) é um número na frente do*

x. E4: *Um número na frente do x!* Pesquisadora: *É.* E4: *Esse número seria o que? Uma constante?* Pesquisadora: *É isso que você tem que descobrir. Quem é esse número que eu ponho na frente do x?* (O aluno pensa). E4: *Mais algum número.* Pesquisadora: *Mais um outro número sozinho. Dá nome pra esses números e vê se você consegue achar eles com os dados que você tem na tabela.* (O aluno pensa). E4: *Que seria nosso y.* Pesquisadora: *É. Vai substituindo pra ver o que você consegue achar. Entendeu?* E4: *Que seria a constante. Não?* Pesquisadora: *Oi? Que seria uma constante, você só tem que descobrir quem é.* E4: *Seria aquele y que a gente desmarcou ali?* Pesquisadora: *Uhh, não. Não. Tem a ver com esse t e esse x. Não tem a ver com o y. A gente desmarca o y, justamente porque a gente não quer ver quando ela vai pra cima, entendeu? Ele não vai influenciar.* (Comentando sobre o processo realizado no programa *Tracker*) E4: *Certo.* (O aluno pensa) E4: *Eu não sei como eu vou fazer isso.* Pesquisadora: *Mesmo você olhando pra tabela você não sabe como vai fazer isso?* (Trecho de conversa entre E4 e a pesquisadora, transcrito do vídeo 117 de 01'' à 1'02'', Atividade 6)
Consideramos que não houve Reconciliação Integradora quando os alunos não reconhecem os conteúdos que já foram vistos e descrevem conceitos inadequados matematicamente ou relatam dificuldades em entender o que deve ser realizado, mesmo depois de receberem auxílio.

Quadro 35 - Não ocorrência da Reconciliação Integradora
Fonte: A própria autora

A quarta categoria de análise evidencia a Aprendizagem do conteúdo durante o processo.

SUBCATEGORIA	UNIDADES DE ANÁLISE
Aprendizagem do conteúdo	Ocorreu
	Não ocorreu

Quadro 36 - Subcategoria Aprendizagem do conteúdo e suas Unidades de Análise
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Aprendizagem Significativa SUBCATEGORIA: Aprendizagem do conteúdo UNIDADE DE ANÁLISE: Ocorreu

Temperatura: θ (variável dependente)

tempo: t (variável independente)

$$\frac{d\theta}{dt} = K.(\theta - \theta_A)$$

1ª ordem

EDO → forma padrão

↓

Transformá-la em separável

$$d\theta = K.(\theta - \theta_A).dt$$

$$\frac{d\theta}{(\theta - \theta_A)} = K.dt$$

$$\int \frac{d\theta}{(\theta - \theta_A)} = \int K.dt$$

$$\ln|\theta - \theta_A| = K.t + c$$

$$\cancel{e}^{\ln|\theta - \theta_A|} = e^{Kt + c}$$

$$|\theta - \theta_A| = e^{Kt}.e^{c}$$

$$|\theta - \theta_A| = e^{Kt}.A$$

19:45 – 36,3°C

1h — 60 min

x — 45 min

x = 0,75

19,75 — 36,3°C

20,75 — 35,4°C

$$36,3 - 30 = e^{K.19,75}.A$$

$$6,3 = e^{K.19,75}.A$$

$$35,4 - 30 = e^{K.20,75}.A$$

$$5,4 = e^{K.20,75}.A$$

$$\begin{cases} 6,3 = e^{K.19,75}.A \\ 5,4 = e^{K.20,75}.A \end{cases} \div$$

$$1,16 = e^{-1K}$$

$$1,16 = e^{-K}$$

$$\ln 1{,}16 = \ln e^{-K}$$
$$0{,}14 = -K$$
$$K = -0{,}14$$

$$6{,}3 = e^{-0{,}14 \cdot 19{,}75} \cdot A$$
$$6{,}3 = e^{-2{,}765} \cdot A$$
$$6{,}3 = 0{,}063 \cdot A$$
$$A = \frac{6{,}3}{0{,}063} = 100$$

$$\theta - 30^\circ = e^{-0{,}14t} \cdot 100$$
$$37 - 30 = e^{-0{,}14t} \cdot 100$$
$$0{,}07 = e^{-0{,}14t}$$
$$\ln 0{,}07 = \ln e^{-0{,}14t}$$
$$-2{,}66 = -0{,}14t$$
$$t = 18{,}99\,h$$
$$\underline{19h}$$

(AT 5, E1)

2) $\frac{dy}{dx} = ax + b$

$$\int dy = \int (ax+b)\,dx$$
$$y = \frac{ax^2}{2} + bx + c$$

$$\frac{dx}{dt} = a$$
$$\int dx = \int a\,dt$$
$$x = at + c$$

$P/\ t = 0 \longrightarrow 0{,}002 = a \cdot 0 + c$

$c = 0{,}002$

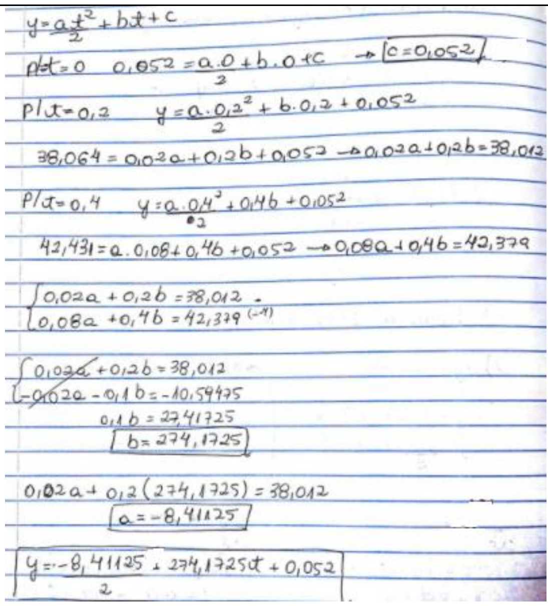
$p/\ t = 0{,}033 \rightarrow 5{,}395 = a \cdot 0{,}033 + 0{,}002$

$$a = 163{,}42$$

$$x = 163{,}42 \cdot t + 0{,}002$$

$$\frac{dy}{dt} = at + b$$
$$\int dy = \int (at+b)\,dt$$
$$y = \frac{at^2}{2} + bt + c$$

Continua . . .



$y = \frac{at^2}{2} + bt + c$

$p/t=0 \quad 0{,}052 = \frac{a.0}{2} + b.0 + c \rightarrow \boxed{c = 0{,}052}$

$p/t=0{,}2 \quad y = \frac{a.0{,}2^2}{2} + b.0{,}2 + 0{,}052$

$38{,}064 = 0{,}02a + 0{,}2b + 0{,}052 \rightarrow 0{,}02a + 0{,}2b = 38{,}012$

$p/t=0{,}4 \quad y = \frac{a.0{,}4^2}{2} + 0{,}4b + 0{,}052$

$42{,}431 = a.0{,}08 + 0{,}4b + 0{,}052 \rightarrow 0{,}08a + 0{,}4b = 42{,}379$

$\begin{cases} 0{,}02a + 0{,}2b = 38{,}012 \\ 0{,}08a + 0{,}4b = 42{,}379 \quad (-4) \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{0{,}02a} + 0{,}2b = 38{,}012 \\ \cancel{-0{,}02a} - 0{,}1b = -10{,}59475 \end{cases}$

$0{,}1b = 27{,}41725$

$\boxed{b = 274{,}1725}$

$0{,}02a + 0{,}2(274{,}1725) = 38{,}012$

$\boxed{a = -8{,}41125}$

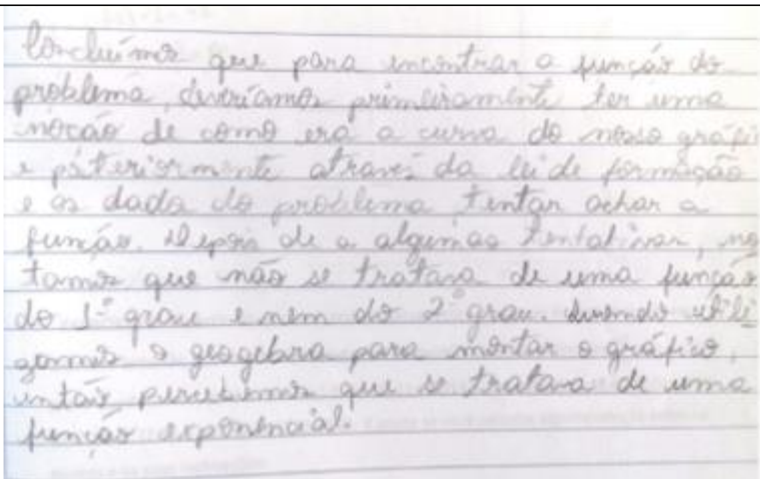
$\boxed{y = \frac{-8{,}41125}{2} + 274{,}1725t + 0{,}052}$

(AT 9, B1, B2, B3 e B4)

Consideramos que houve aprendizagem do conteúdo quando os alunos apresentam resoluções corretas e conceitos adequados as situações-problema que estão sendo estudadas naquele momento.

Quadro 37 - Ocorrência de Aprendizagem do conteúdo
Fonte: A própria autora

CATEGORIA: Aprendizagem Significativa
SUBCATEGORIA: Aprendizagem do conteúdo
UNIDADE DE ANÁLISE: Não ocorreu



Concluímos que para encontrar a função do problema, deveríamos primeiramente ter uma noção de como era a curva do nosso gráfico e posteriormente através da lei de formação e os dados do problema tentar achar a função. Depois de algumas tentativas, notamos que não se tratava de uma função do 1º grau e nem do 2º grau. Quando utilizamos o geogebra para montar o gráfico, então percebemos que se tratava de uma função exponencial.

(AT3, E1, E2, E3, E4)

E2: *A gente escreveu a equação já, mas não consegue sair daqui.*
Pesquisadora: *Tá! Você não tem a derivada?*
E2: *Sim.*
Pesquisadora: *O que você pode fazer pra "desfazer" a derivada?*
E2: *A integral!*
Pesquisadora: *Então! Então integra dos dois lados aqui ó!*
(A aluna começa a escrever)
E2: *Tá! E agora? Como que eu faço?*
E1: *Quando você integra a derivada, o d some.*

E2: *Ah, ta!* (Trecho de conversa entre E1, E2 e a pesquisadora, transcrito do vídeo 46 de 33’ à 35’, Atividade3).
Consideramos que não houve aprendizagem do conteúdo quando os alunos apresentam resoluções que podem ser consideradas por nós incorretas..

Quadro 38 - Não ocorrência de Aprendizagem do conteúdo
Fonte: A própria autora

A categoria de análise de Aprendizagem Significativa é fortificada pelos pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa que considera a aprendizagem como um processo interativo, onde um conhecimento já existente serve de ideia-âncora para que um novo conhecimento possa ser elaborado, assim um conhecimento já existente pode ser modificado adquirindo novos significados ou corroborando significados já existentes (AUSUBEL, 2003).

Consequentemente um dos fatores de grande importância para que a aprendizagem se constitua são os conhecimentos já existentes, chamados de subsunçores. Foi possível verificar que dezessete alunos apresentavam subsunçores relacionados aos conceitos de Cálculo Diferencial Integral na Atividade 1 enquanto onze alunos apresentaram subsunçores na Atividade 4. Consideramos a existência de subsunçores quando os alunos realizam operações corretamente ou quando descrevem conceitos matemáticos de forma adequada, como observado no Quadro 22, onde o aluno D1 realiza uma integração para resolver um EDO, mesmo sem este conceito ter sido apresentado anteriormente, pois esta atividade se tratava da primeira atividade que estava sendo realizada.

Na Atividade 4 (Quadro 22), o aluno E2 relaciona o desenho tracejado (campo de direções) à marcação das retas tangentes à curva em relação aos pontos demarcados, enquanto o aluno B2 relata que as retas tangentes acompanham a representação gráfica e ainda descreve que os pontos de inflexão estão presentes onde os traços ficam na horizontal, o que demonstra conhecimentos prévios sobre Cálculo Diferencial Integral.

A falta de subsunçores pode ser observada no Quadro 23, quando o aluno D3 “corta” a letra d realizando uma divisão, como se o símbolo que denota a derivada fosse uma constante na EDO, enquanto o aluno A3 relata que a inclinação nula está relacionada ao fato da função tocar o plano *xOy* e posteriormente redige uma resposta inadequada sobre a inclinação dos pontos e o “desenho da função tangente”.

Quando observamos os subsunçores relacionados aos Recursos Tecnológicos, pudemos verificar a existência de um número maior de atividades envolvidas nesta categoria de análise (Figura 14).

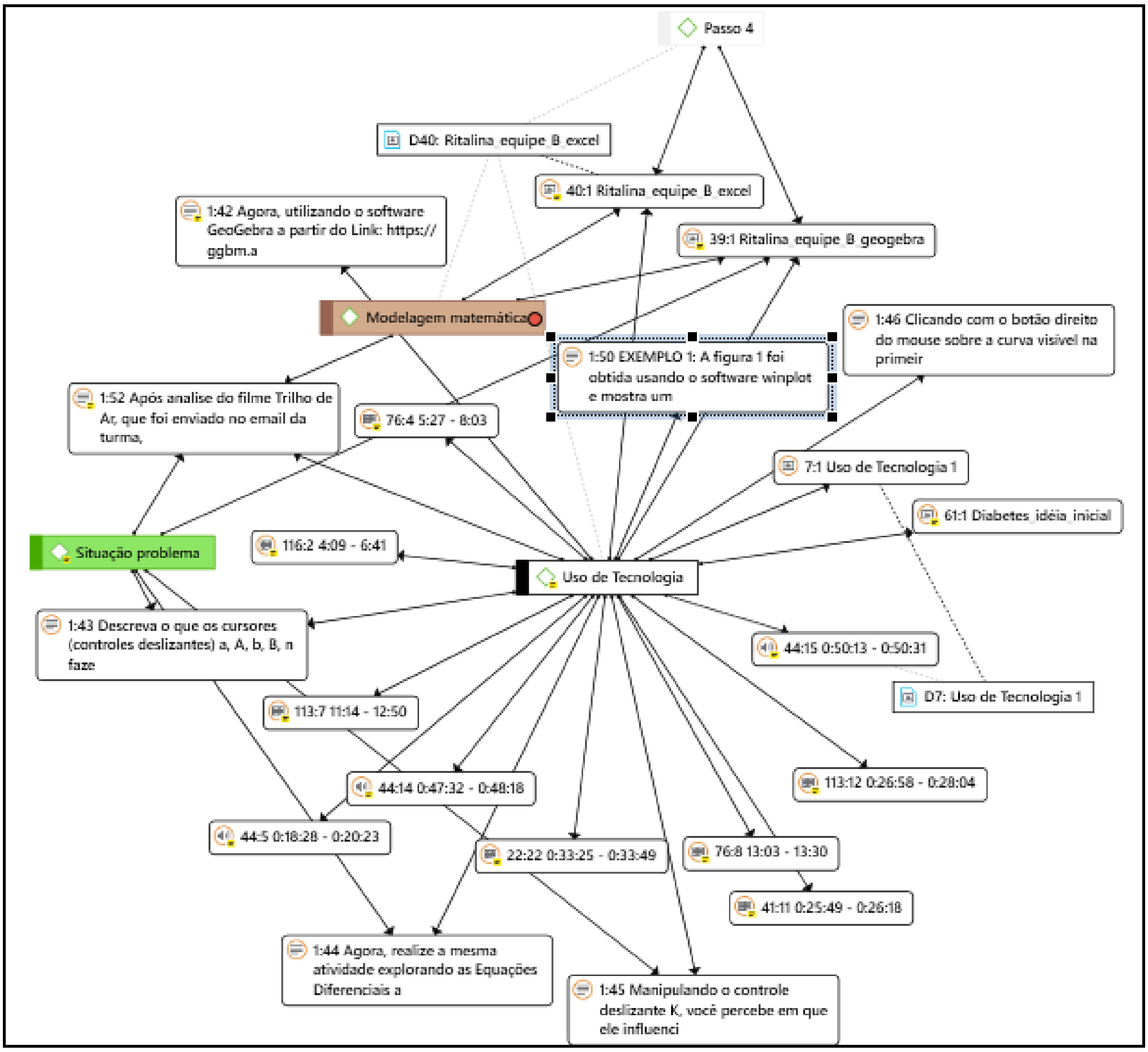


Figura 14 - ***Software Atlas T.I. 8.0*** **Uso de Tecnologia**
Fonte: A própria autora

A existência de subsunçores está relacionada ao fato dos alunos utilizarem os recursos tecnológicos corretamente para realizar atividades. No caso do primeiro exemplo do Quadro 25 para a Atividade 3 os alunos utilizaram o GeoGebra para encontrar a função e o gráfico associado a situação-problema, enquanto no segundo exemplo os mesmos alunos utilizam o programa Excel para montar uma tabela e encontrar a função associada aos seus dados. É importante salientar que nenhuma das duas atividades solicitava que os alunos utilizassem tecnologia em sua solução, como ocorria em outras situações, assim os mesmos o fizeram por iniciativa própria (JAVARONI, 2007).

Verificamos a falta da presença de subsunçores relacionados aos recursos tecnológicos observando o questionário respondido pelos alunos no primeiro dia de aula e atividades que ocorreram em sala de aula que deveriam fazer uso de tecnologia em que os alunos não alcançaram a resolução almejada.

A falta da presença de subsunçores foi confirmada quando observamos as respostas do Questionário 1 (Quadro 26), onde evidenciamos que os alunos alegam não saber utilizar o programa *Winplot* e que alguns demonstram não saber utilizar o Excel e o GeoGebra. Na segunda figura deste quadro, podemos visualizar que os alunos A1, A2 e A3, mesmo realizando a Atividade 9 (última atividade da disciplina) ainda não manipulavam o objeto de aprendizagem no *software* GeoGebra de maneira eficiente, pois não ampliaram a figura do lado esquerdo para que pudessem visualizar melhor o campo de direções no plano, obtendo assim um quadrado preto no centro da figura, ao mesmo tempo em que não giraram a figura da direita para que pudessem ficar com os eixos coordenados em uma posição mais adequada, do eixo negativo (esquerda) para o eixo positivo (direita).

Quando analisamos os subsunçores relacionados à Modelagem Matemática, verificamos que a totalidade dos alunos ainda não teve experiência com esta alternativa pedagógica, pois observando o questionário respondido pelos alunos no primeiro dia de aula (Quadro 29) e sabendo que o curso de Licenciatura em Matemática não possui uma disciplina específica de Modelagem Matemática, podemos verificar que os alunos não apresentam subsunçores sobre Modelagem Matemática

Podemos corroborar essa afirmação observando a Figura 15, fornecido pelo *software* de análise qualitativa *Atlas TI 8.0*, onde visualizamos que não existe relação direta entre a verificação de subsunçores e a Modelagem Matemática, o que implica que os alunos não apresentavam subsunçores relacionados a este conhecimento, pois atividades de Modelagem Matemática foram realizadas a partir da Atividade 3.

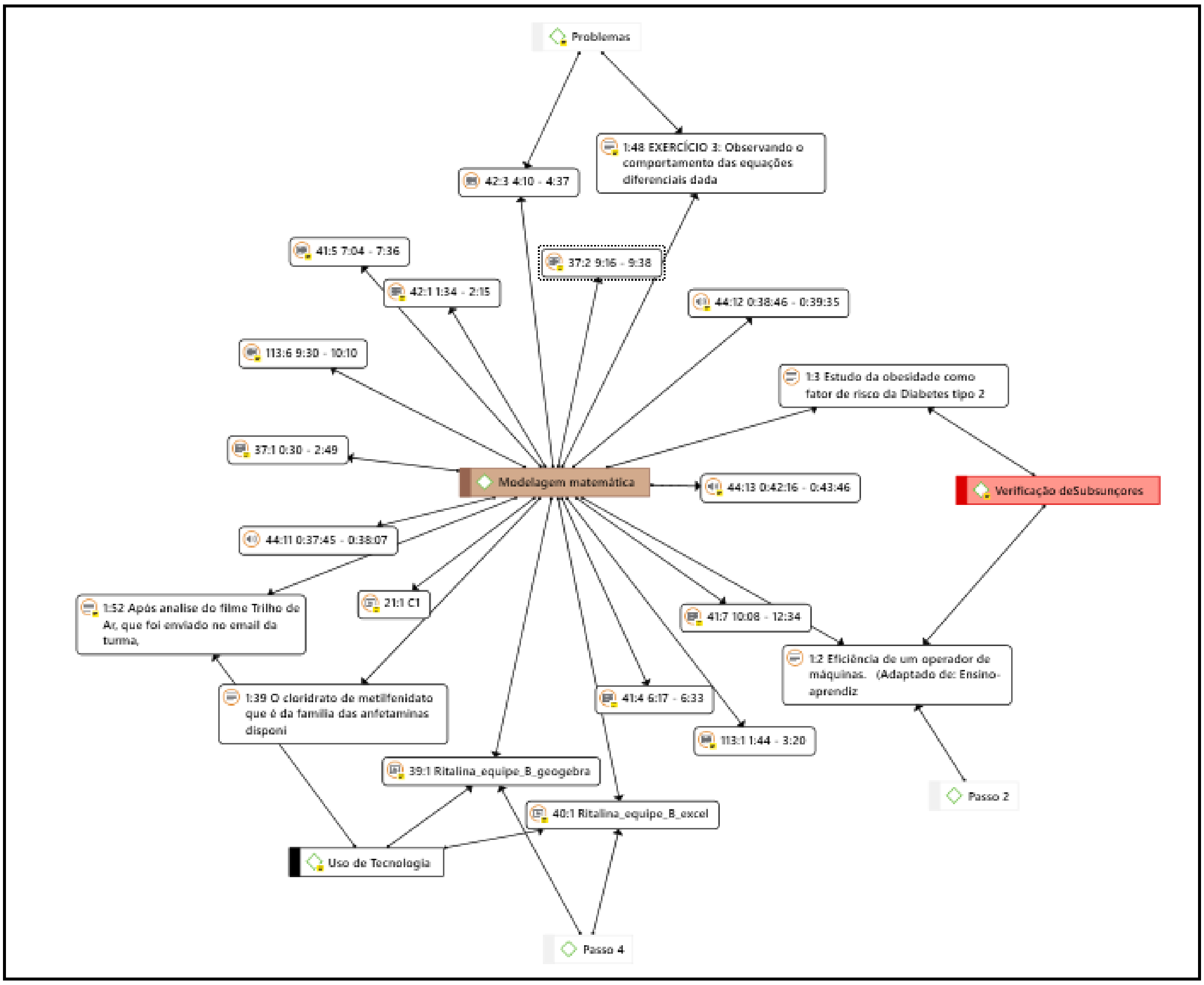


Figura 15 - ***Software Atlas T.I. 8.0*** **Verificação de Subsunçores e Modelagem Matemática**
Fonte: A própria autora

No entanto, observando a primeira atividade de Modelagem Matemática proposta, verificamos que mesmo os alunos relatando no Questionário Inicial que não conheciam tal alternativa pedagógica, realizaram a atividade fazendo inferências sobre os conteúdos matemáticos que permeavam a situação-problema e realizando a validação das funções que escolheram, verificando seus erros e retomando suas hipóteses (Quadro 28, segundo excerto).

A segunda subcategoria de análise estava relacionada ao processo de Diferenciação Progressiva, considerado por Moreira (2011a, p. 20) “o processo de atribuição de novos significados a um dado subsunçor (um conceito ou uma proposição, por exemplo) resultante da sucessiva utilização desse subsunçor para dar significado a novos conhecimentos”. Este processo é caracterizado pela alteração e modificação dos subsunçores presentes na estrutura cognitiva, no primeiro excerto do Quadro 31 podemos constatar que os alunos são capazes de comparar a atividade que realizaram em seus cadernos pedagógicos com o que encontraram quando realizaram a mesma atividade utilizando o *software* GeoGebra.

No segundo trecho do Quadro 31, verificamos a Diferenciação Progressiva durante a conversa observando a tomada de decisão dos alunos sobre o comportamento da função e sua estabilidade, percebemos que inicialmente alguns alunos não se preocupam se a função tenderá à temperatura ambiente, no entanto, posteriormente são convencidos por seus colegas de que a mesma tende a este valor e que este raciocínio é importante para a determinação da função. Percebemos também a evolução do raciocínio quando o aluno B4 percebe que a função não se trata apenas de uma variável, mas de duas (temperatura e tempo).

Para os casos em que os alunos não apresentaram o processo da Diferenciação Progressiva, caracterizamos excertos em que o raciocínio dos alunos continua semelhante ao que eles apresentavam ao iniciar a atividade, não havendo alterações/modificações/evoluções de conceitos matemáticos.

No primeiro exemplo do Quadro 32, o aluno C1 consegue visualizar que na diagonal os valores de x e y são iguais, no entanto, não relaciona o seu valor (zero) à inclinação da reta tangente à curva e o fato desse valor indicar que a função tem um ponto de inflexão naquele ponto estudado. Posteriormente, na pergunta 3, o aluno relata que o valor é nulo, mas faz menção apenas ao que visualiza no gráfico 3D, não mencionando o que acontece no gráfico 2D da equação diferencial ordinária que está sendo estudada.

No segundo excerto do Quadro 32, os alunos C1, C2, C3 e C4, escrevem a função associada à situação-problema da mesma forma com que a escreveram no objeto de aprendizagem que havia sido utilizado anteriormente, o qual deveriam analisar para responder às perguntas. Posteriormente não utilizam linguagem matemática adequada para a estabilidade da função, dizendo que a temperatura ambiente se "neutraliza". Os dois excertos mostram que os conceitos não sofreram alterações, permanecendo inalterados.

Para a terceira categoria de análise, nos focamos no fato do processo da Reconciliação Integradora estar presente nas atividades realizadas. Este processo "é um processo da dinâmica da estrutura cognitiva, simultâneo ao da Diferenciação Progressiva, que consiste em eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências, integrar significados, fazer superordenações" (MOREIRA, 2011a, p. 22).

O processo da Reconciliação Integradora esteve presente na primeira situação do Quadro 34, quando B3 relata à pesquisadora que entendeu por que a situação se trata de uma EDO, pois a taxa de variação da temperatura, naquela ocasião, iria diminuir. Enquanto na segunda situação, o aluno B2 consegue verificar que a função escrita pelo colega de equipe (B1) não estava correta, pois a curva não teria equilíbrio em trinta graus, mas em um valor inferior. Os conceitos e ideias que estavam presentes na estrutura cognitiva dos alunos são agora reorganizados e ganham clareza e estabilidade, trazendo confiança aos alunos para que possam argumentar com os colegas.

Percebemos que o Processo de Reconciliação Integradora foi falho quando os alunos apresentam respostas incorretas a conceitos matemáticos que já deveriam ter sido adquiridos, como no primeiro excerto do Quadro 35 onde os alunos D1, D2, D3, D4, D5 e D6 relatam, na Atividade 9, que um problema de valor inicial "é aquele estipulado por nós mesmos; exemplo no exercício da Ritalina foi estipulado que determinada pessoa deveria ingerir certa quantidade de medicamento ou seja escolho o horário que irei iniciar a medicação o valor inicial pode ser as 08:00, 10:00, etc". Podemos verificar que os alunos entenderam que a atividade mencionada trazia um problema de valor inicial, no entanto, o conceito matemático está inadequado. Enquanto no segundo excerto do mesmo quadro o aluno E4 apresenta dificuldades, relatando à pesquisadora que não sabe como irá trabalhar com a situação-problema que está sendo analisada.

Para a quarta categoria de análise, observamos a aprendizagem dos alunos em todos os documentos do *corpus* de análise e podemos verificar, observando a Figura 16, obtida através do *software* de análise qualitativa *Atlas TI 8.0*, que a aprendizagem esteve atrelada aos processos que foram analisados anteriormente: verificação de subsunçores, Diferenciação Progressiva, Reconciliação Integradora, Modelagem Matemática e Uso de Tecnologia.

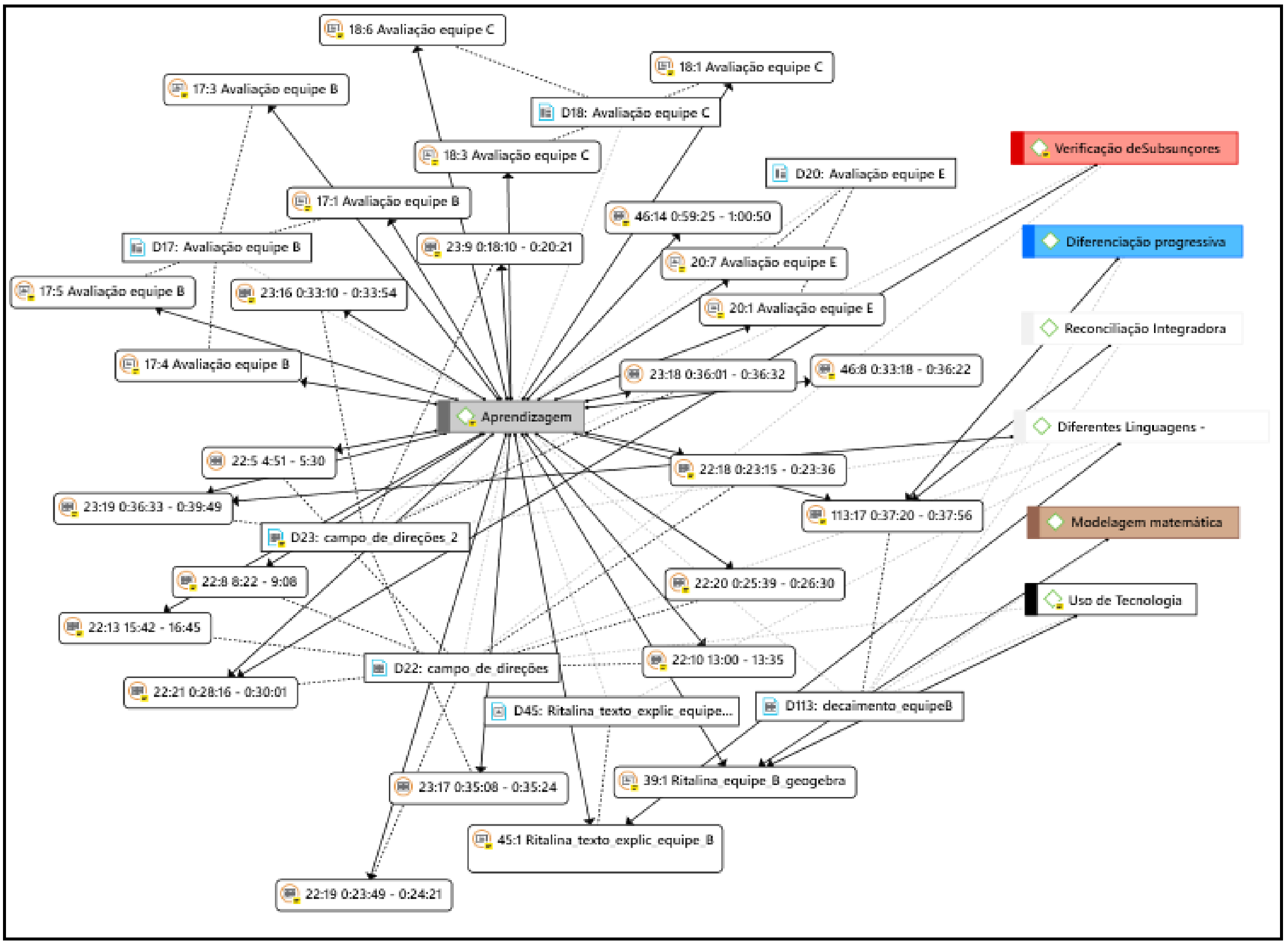


Figura 16 - Software Atlas T.I. 8.0 Relações com Aprendizagem
Fonte: A própria autora

A Aprendizagem Significativa, segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 120), está atrelada

> A incorporação substantiva e não arbitrária de uma tarefa potencialmente significativa em porções relevantes da estrutura cognitiva, até que surja um novo significado, implica que o significado recentemente adquirido torne-se uma parte integral de um sistema ideacional particular. A possibilidade desse tipo de relação e incorporação na estrutura cognitiva tem duas conseqüências importantes para os processos de aprendizagem e retenção. Primeiramente, a aprendizagem e retenção não mais dependem preferivelmente da frágil capacidade humana para fixar associações arbitrárias e literais enquanto entidades autônomas, discretas e isoladas. Consequentemente, o período de tempo de retenção é bastante dilatado. Em segundo lugar, o material recentemente adquirido torna-se sujeito a princípios organizacionais que governam a aprendizagem e retenção do sistema no qual é incorporado.

Observando os documentos analisados, podemos inferir aprendizagem do conteúdo de Equações Diferenciais Ordinárias na primeira situação apresentada no Quadro 37, pelo fato de além do aluno E1 solucionar a EDO corretamente, realizar observações em seu caderno pedagógico descrevendo que a EDO estava na forma padrão e que deveria ser escrita como uma EDO separável para que pudesse ser resolvida, posteriormente o aluno registra na lateral esquerda os valores que irá substituir no problema de valor inicial, indicando onde realizará esta substituição. Assim, este aluno está realizando os processo de Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora concomitantemente em uma mesma atividade, fato importante que está vinculado à Aprendizagem Significativa.

Enquanto, na segunda situação vista no mesmo quadro (Quadro 37), a equipe B apresenta uma resolução correta da questão número 2 da primeira atividade da Avaliação (Atividade 9), apenas se esquecendo do termo t^2 na resposta da questão, o que não nos impede de inferir aprendizagem nesta situação, observando que esta atividade foi realizada uma parcela de tempo considerável após a sua introdução, o que pode nos indicar que houve retenção de conhecimento.

Verificamos que a inferência de aprendizagem do conteúdo se consolidou em Atividades que ocorreram em momentos posteriores, e podemos observar a sua não ocorrência em Atividades que podem ser consideradas preliminares, iniciais, como o descrito no primeiro excerto do Quadro 38 onde os alunos procuram resolver a situação-problema por tentativa e erro, testando qual a função que se adequava na situação estudada, não realizando raciocínio matemático para tal. No segundo excerto do mesmo quadro, o aluno E2 demonstra não compreender conceitos de Cálculo Diferencial Integral e de solução de EDO separável que já haviam sido vistos na disciplina, no entanto, podemos observar que ambas as situações foram observadas na Atividade 3.

A análise das três categorias apresentadas anteriormente (Modelagem Matemática, Recursos Tecnológicos e Aprendizagem Significativa) possibilitou a compreensão da unidade de ensino proposta como um todo.

6.4 METATEXTO

A desconstrução, a descrição e a produção de algumas considerações relacionadas a cada categoria de análise, permite-nos avançar para uma análise global da pesquisa considerando o desenvolvimento da proposta como um todo e as constatações de cada categoria de análise.

A proposta de um material de ensino que pudesse ser caracterizado com potencialidade para aprendizagem é tema de pesquisa há alguns anos. Mesmo tomando nomenclaturas diversas, a preocupação com o ensino e a aprendizagem percorre as mentes de muitos estudiosos. Seja na forma de Materiais Curriculares Educacionais (BALL; COHEN, 1996; DAVIS; KRAJICK, 2005; BRANDALISE; TROBIA, 2011; BARBOSA; OLIVEIRA, 2014; BOAS; BARBOSA, 2016; OLIVEIRA; BARBOSA, 2016) ou no formato de Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (MOREIRA, 1999; MOREIRA, 2011; BORSSOI, 2013) os olhares estão voltados na aprendizagem dos alunos.

Preocupados com o ensino e a aprendizagem dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, propomos a elaboração de uma unidade de ensino para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias que associasse o uso de recursos tecnológicos e atividades de Modelagem Matemática como parte das atividades componentes.

Esta unidade de ensino se constituiria de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa e portanto, deveria respeitar os oito passos propostos por Moreira (2011b). Sendo assim, observando as análises parciais apresentadas anteriormente, assim como a sequência cronológica das atividades apresentadas na Quadro 13, faremos um exercício no sentido da Reconciliação Integradora, que em nosso entendimento permite concluir sobre o êxito da unidade de ensino proposta.

PASSOS	O QUE DEVE ACONTECER	PRODUTO EDUCACIONAL
1	Definição do tema de ensino	• Equações Diferenciais Ordinárias
2	Reconhecimento de Subsunçores	• Questionário inicial (Atividade 1) • Eficiência de um operador (Atividade 1)
3	Situações problema em nível introdutório de complexidade	• Estudo da obesidade como fator de risco da Diabetes tipo 2 (Atividade 2)
4	Diferenciação progressiva (Forma mais geral)	• Observações Históricas (Respostas do Moodle) • Definições, teoremas e listas de exercícios

5	Reconciliação Integradora (Forma mais complexa)	• Ritalina no organismo (Atividade 3) • Campo de Direções (Atividade 4)
6	Diferenciação progressiva + Reconciliação Integradora	• É possível afirmar o horário da morte de uma pessoa com precisão? (Atividade 5) • Movimento Uniforme (Atividade 6) • Apresentação do trabalho de pesquisa (Atividade 7) • Questionário Final (Atividade 8) • Avaliação Final (Atividade 9)
7	Avaliação	Ocorreu em todos os momentos de aula, a partir dos registros realizados
8	Êxito	

Quadro 39 - Sequência cronológica das atividades
Fonte: A própria autora

Passo 1) Definição do tópico de ensino: para o caso específico dessa dissertação o conteúdo de ensino já estava previamente estabelecido, pois a pesquisadora deveria trabalhar com a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. Assim, apesar de ter o conteúdo definido, deveria organizá-lo de forma que este fosse trabalhado durante todo um semestre em uma turma de Licenciatura em Matemática. O tema de ensino, foi respeitado na elaboração das atividades e mesmo que alguma solução que fizesse uso de outro conteúdo matemático fosse apresentada pelas equipes, posteriormente houve a discussão da solução da situação-problema estudada via EDO.

Passo 2) O segundo passo de uma UEPS diz respeito ao reconhecimento dos subsunçores que os alunos apresentam. Para o estudo em questão, em um momento inicial foi realizado um questionário *online*, (Apêndice 3) que tinha como objetivo identificar além do perfil dos acadêmicos, as suas dificuldades de compreensão em relação às disciplinas já cursadas, suas capacidades e habilidades com programas computacionais e os conhecimentos relativos à derivada e integral.

Este questionário apresentava 15 perguntas abertas, onde os alunos podiam expressar a sua opinião e relatar seus conhecimentos sem limite de espaço, tinha como objetivo caracterizar os alunos que participavam da pesquisa e reconhecer os subsunçores que esses alunos apresentavam.

Em seguida foi proposta a Atividade 1 para que os alunos pudessem se expressar mesmo que intuitivamente. Nessa atividade eles deveriam determinar a eficiência de um operador de máquinas.

Nesta atividade foram encontradas soluções corretas e incorretas matematicamente, sendo assim, haviam alunos que possuíam subsunçores (Quadro 22) e alunos que não possuíam (Quadro 23).

Passo 3) O terceiro passo é composto pela atividade sobre o Estudo da obesidade como fator de risco da diabetes tipo 2. A atividade trazia duas tabelas que relacionavam o índice de massa corpórea (IMC) e o percentual de uma pessoa ter diabetes, o resultado do IMC e o seu significado. Esta atividade foi proposta de forma aberta, pois não apresentava uma pergunta explícita para o problema sugerido, seriam os alunos que encaminhariam a pergunta conforme as suas necessidades e questionamentos. Como os alunos ainda não haviam tido contato com equações diferenciais, a pesquisadora utilizou esta atividade para introduzir o conteúdo de equações diferenciais ordinárias com um grau introdutório de complexidade, o que completa o terceiro passo proposto por Moreira (2011b).

Passo 4) No quarto passo o conteúdo deve ser apresentado aos alunos de forma geral para que os mesmos possam começar a identificar as diferenças existentes, ou seja, identificando as particularidades de cada assunto. Para isso, foi elaborado um texto intitulado Observações Históricas, que trazia um pouco da história das equações diferenciais, ressaltando os principais matemáticos que se dedicaram ao estudo desse conteúdo. Depois da leitura deste texto os alunos deveriam responder a um questionário presente no ambiente virtual *Moodle*.

Analisando as respostas dos alunos podemos perceber que a grande maioria realizou a leitura integral do texto, pois, com relação às questões objetivas, 50% dos alunos acertou todas as questões, 8% dos alunos acertou 3 questões, 16% acertou 2 questões e 8% acertou 1 questão.

Quanto à questão dissertativa, inferimos que os alunos se preocuparam em responder, elaborando textos que realmente expressavam suas opiniões e que colocavam elementos do texto indicado à leitura e suas justificativas.

Posteriormente foram apresentadas aos alunos as definições, teoremas, observações, exemplos e exercícios relacionados às equações diferenciais.

Passo 5) Para que o quinto passo ficasse caracterizado, deveriam ocorrer momentos em que o objeto de estudo pudesse ser visto de forma mais complexa, assim a reconciliação integradora seria realizada por parte dos alunos. Com essa intenção foram efetivadas duas atividades: Ritalina no organismo (Atividade 3) e Campo de Direções (Atividade 4), que apresentam, respectivamente, um problema de valor inicial e o estudo de campo de direções a partir de um objeto de aprendizagem.

Passo 6) Tentando aproximar as relações existentes entre diferenciação progressiva e a reconciliação integradora, fazemos a moção de quatro atividades que se complementam e que retomam os conceitos apresentados anteriormente: É possível afirmar o horário da morte de uma pessoa com precisão? (Atividade 5), Movimento Uniforme (Atividade 6), Avaliação Final (Atividade 9) e Questionário 2 (Apêndice 4). Sendo que as duas primeiras se encontram no Produto Educacional, a terceira foi proposta com um maior grau de comprometimento e a última os alunos deveriam responder na forma de um questionário *online* (Apêndice 4).

Portanto, houveram indícios positivos dos processos de Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora, durante a realização das Atividades, o que pode ser visto nos Quadros 31 e 34. Assim, as atividades desenvolvidas durante a disciplina concretizam os seis primeiros passos de uma UEPS propostos por Moreira (2011b).

Passo 7) Os dois últimos passos de uma UEPS estão relacionados à verificação de êxito da mesma. Para isso, todas as atividades foram registradas, seja na forma de vídeo, áudio, registro escrito ou por arquivos digitais e avaliações constantes ocorriam quando os alunos apresentavam as suas soluções para as demais equipes, ou quando postavam as respostas no ambiente *Moodle*.

Observando as atividades propostas, podemos inferir que os materiais e as estratégias de ensino foram diversificados e compostos por vários instrumentos. O diálogo e a crítica foram estimulados observando que os alunos trabalharam quase que todo o semestre em equipes, que foram formadas por eles mesmos para que houvesse afinidade entre os seus integrantes, característica que facilitaria o diálogo. Em vários momentos percebemos que todos os alunos das equipes se expressam e que eles discutem quando precisam tomar decisões, assim a crítica também estava presente nas atividades.

Quanto à perspectiva voltada ao questionamento ao invés de respostas prontas, podemos perceber nas atitudes da pesquisadora essa característica, que se tornou presente e marcante nas atividades. Em muitas atividades percebemos que a fala da pesquisadora é feita no sentido de repetir a pergunta do aluno na forma de uma afirmação e realizar uma nova pergunta, não respondendo diretamente à pergunta que lhe foi feita, mas dando encaminhamento para que os próprios alunos pudessem responder. Este fato é um marco importante, pois a pesquisadora passa do papel de professora para o papel de orientadora das atividades (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016).

Passo 8) O êxito da UEPS proposta, implementada e analisada está no fato de que surgiram indícios de aprendizagem, como pode ser observado no Quadro 38.

As atividades componentes principais da unidade de ensino foram de grande relevância. Desde o uso de textos de apoio às clássicas listas de exercícios, às quais os alunos estavam acostumados, ao uso de tecnologia e Modelagem Matemática, tiveram, cada uma, em seu devido momento, a importância merecida. Pois favoreceram os principais aspectos de uma UEPS (Diferenciação Progressiva, Reconciliação Integradora, nível crescente em complexidade no desenvolvimento do conteúdo).

As análises dessas atividades em três categorias (Modelagem Matemática, Recursos Tecnológicos e Aprendizagem Significativa) trouxeram evidências de aprendizagem e dos processos de Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora. Este fato pode ser observado na Figura 17, onde essas três categorias de análise se integram na composição das atividades que compreendem a UEPS. Nesta figura podemos verificar que as três categorias juntas sustentam uma grande parte das atividades da UEPS, sendo que em alguns momentos as atividades concebem mais de uma categoria, como a atividade AT3: Ritalina, que caracteriza as três categorias, esta atividade se mostrou de grande importância e fez parte da análise dessas categorias em diferentes momentos como pode ser observado nos Quadros: 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 18, 25, 28, 31 e 38.

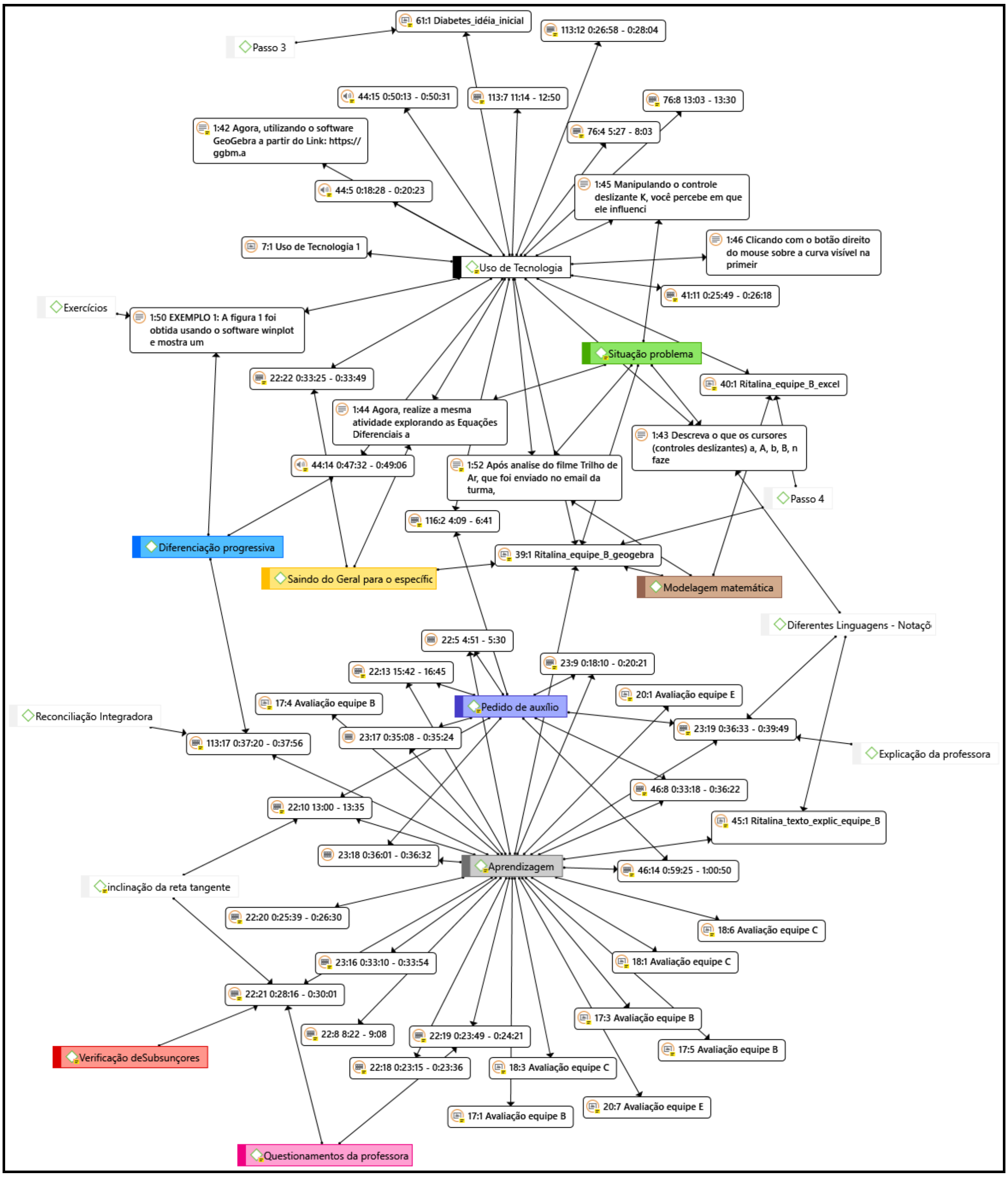


Figura 17 - Software Atlas T.I. 8.0 As categorias Modelagem Matemática, Uso de Recursos Tecnológicos, Aprendizagem Significativa
Fonte: A própria autora

O fato das categorias de análise mostrarem indícios dos processos necessários na composição de uma UEPS fortifica a hipótese inicial de que a proposta do material de ensino se concretiza como tal.

As atividades baseadas no uso de recursos tecnológicos foram pautadas no fato que as “tecnologias de informação e comunicação são importantes aliadas na promoção da educação que visa desenvolver nos estudantes habilidade para a construção do conhecimento, colaboração e pensamento crítico” (HOWLAND;

JONASSE; MARRA, 2011; apud BORSSOI, 2013, p.41). Essa ocorrência pode ser considerada de grande importância no estabelecimento de relações nos processos de Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora, circunstâncias que caracterizam uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa.

As atividades de Modelagem Matemática estão alicerçadas nos entendimentos de (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p.24)

> No âmbito de formação, é fundamental que seja estruturada uma formação docente em Modelagem Matemática a partir da tríade "aprender sobre", "aprender por" e "ensinar usando" Modelagem Matemática. Só assim é possível ultrapassar a visão estritamente empirista e pragmatista da prática do professor em relação à modelagem, migrando para um terreno em que se aceita que o "como fazer" é impregnado de teoria e que a teoria e prática é que orientam o movimento do "conforto" para o "risco".

Essas atividades foram responsáveis pelo crescimento dos alunos e da própria pesquisadora, que fazia uso dessa alternativa pedagógica pela primeira vez em sala de aula. Portanto, a tríade proposta por Almeida, Silva e Vertuan (2016), de fato se concretizou se levarmos em conta o experimentado pela pesquisadora e, parcialmente quando relacionada aos alunos que estavam sendo investigados.

Sendo assim, indícios de Aprendizagem Significativa ficam registrados em vários momentos, caracterizados pela verificação de subsunçores, pela crescente ordem do nível de dificuldade das atividades e pelos processos da Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora, que foram confirmados nas atividades de Modelagem Matemática e nas atividades que fizeram uso de Recursos Tecnológicos, tanto nas situações em que os alunos os utilizam por necessidade própria, quanto nos momentos em que foram solicitados a usar.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tomar como conceito primordial a Aprendizagem Significativa implica que o professor, agindo como mediador de situações, deve planejar o material de ensino de maneira mais disciplinada, procurando oferecer ambientes de ensino que possibilitem a Aprendizagem Significativa. O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou a elaboração de uma unidade de ensino voltada para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias buscando que a mesma se configurasse como uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa.

A escolha de uma UEPS surge no sentido de orientar a estruturação de uma unidade de ensino que possibilite a Aprendizagem Significativa. Com isso, nosso intuito foi *propor, implementar e analisar uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, que associa o uso de recursos tecnológicos e propõe atividades de Modelagem Matemática como parte das atividades componentes da UEPS.*

Ao fazermos a opção de análise pautada na análise Textual Discursiva, entendemos que estar próximo aos dados e realizar uma codificação dos mesmos, facilitaram a visualização de decisão pelas categorias de análise e suas unidades. Foram identificadas três categorias de análise (Modelagem Matemática, Recursos Tecnológicos e Aprendizagem Significativa) que foram substanciais para que a unidade de ensino se configurasse como exitora.

A categoria pautada na Modelagem Matemática focou os olhares sobre as atividades que foram propostas considerando-se uma alternativa pedagógica distinta daquela caracterizada pela resolução de listas de exercícios. Nesta categoria pudemos verificar que as suas atividades componentes foram essenciais na incorporação de atividades com diferentes graus de dificuldades, bem como, nos processos da Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora.

O uso de Recursos Tecnológicos foi caracterizado por atividades formuladas para esse objetivo, mas também encontrou momentos em que os alunos fizeram uso de *softwares* específicos em atividades que não foram elaboradas para esse propósito. Mostrando que a tecnologia tem agido a favor da construção do conhecimento, na elaboração de hipóteses e validação das conjecturas estabelecidas durante as atividades.

A categoria Aprendizagem Significativa reforça que a estrutura apresentada na unidade de ensino proposta possibilitou que os pressupostos desta teoria de aprendizagem fossem verificados, como a verificação de subsunçores, os processos da Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora, a proposta de atividades com crescente grau de dificuldade e a avaliação de forma formativa, concomitante às atividade que foram propostas.

Observando, portanto, as três categorias de análise que foram elencadas, verificamos que os oito passos propostos por Moreira (2011b) se caracterizaram na unidade de ensino elaborada, configurando a mesma como uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, o que nos permite afirmar que o objetivo da pesquisa se consolidou.

Certamente, durante o processo de coleta de dados, em muitos momentos nos deparamos com dificuldades, desde a inexperiência com as atividades de Modelagem Matemática até ao fato de estar rompendo com os próprios paradigmas relacionados às práticas docentes. Enquanto na análise dos dados, nos faltava embasamento teórico e prática para enxergar o que estava oculto. A este fato, consideremos de suma importância a utilização de uma metodologia de análise qualitativa, a Análise Textual Discursiva e o uso do *software* ATLAS TI 8.0 no auxílio para decodificação e desconstrução dos dados.

Bossoi (2013, p. 169) considera que

> Convidar os alunos a participarem das discussões e mesmo atribuir responsabilidade a eles, inicialmente em torno de uma problemática, e depois a fim de avançar pelas fases da modelagem, contribui para que os alunos verbalizem o que se passa em suas mentes ao pensarem sobre a atividade, propicia ao professor fazer inferências sobre os modelos mentais, possibilita a observação de evidências de atribuição de significados pelos alunos.

Podemos ainda complementar a fala de tal autora, pelo fato das atividades de Modelagem Matemática se sustentarem a favor do modelo de avaliação que uma UEPS necessita, procurando evidências de Aprendizagem Significativa durante todas as etapas (avaliação formativa), verificando a captação de significados, a compreensão, a capacidade de explicar e aplicar o conhecimento que possivelmente aprendeu em novas situações-problema.

Novos caminhos para o Ensino de Matemática, em especial de Equações Diferenciais Ordinárias têm sido investigados, como mencionamos em Javaroni (2007), Dullius (2011), Javaroni e Soares (2012) e Borssoi (2013). Esperamos que este trabalho traga elementos que possam auxiliar outros professores em suas práticas docentes, para que utilizem o material, uma parte deste, ou o tomem com incentivo para elaboração de sua própria proposta de ensino.

Parafraseando Javaroni (2007, p. 172)

> Certamente, minha prática docente talvez ainda não esteja totalmente alterada, porém minha visão sobre ela, sim. E, a efetiva prática da sala de aula me fará buscar respostas para essas novas inquietações. Logicamente, as atividades desenvolvidas deverão ser reelaboradas e novamente aplicadas em situações de sala de aula, muito provavelmente, de forma paulatina com o passar do tempo.

Procuramos com este texto expressar a trajetória de nossa pesquisa, bem como trazer reflexões que remetem desde a organização do ensino até as implicações decorrentes da implementação da UEPS no ambiente educacional. No entanto, reconhecemos a ocorrência de limitações, entre as quais mencionamos que o Produto Educacional ainda carece de ser complementado para que se configure como um material curricular educativo.

O produto educacional e as atividades aplicadas podem ser mais um recurso para o professor, assim como a leitura sobre Aprendizagem Significativa e UEPS podem favorecer o uso de novas abordagens dentro de sala de aula. Relatos parciais das atividades que foram discutidas no âmbito desta pesquisa foram registradas em diferentes contextos (VII EPMEM[27], XIV EPREM[28], X CNMEM) e podem servir de oportunidade para que professores possam se encorajar a realizar as mesmas atividades.

Assim, como expectativa futura almejamos a organização de um produto técnico no formato multimídia que deverá ser incorporado ao repositório institucional

[27] https://drive.google.com/file/d/0B8BG_uHbVwUIUE1JZTF6YW5hekE/view
[28] http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/schedConf/presentations

no Portal de Informação em Acesso Aberto[29] (PIAA). Um protótipo[30] desse produto pode ser encontrado em Freire, Borssoi e Silva (2017).

[29] https://portaldeinformacao.utfpr.edu.br/
[30] https://sites.google.com/alunos.utfpr.edu.br/talitapifferfreire

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W; SILVA, K. A. P. Práticas de Professores com Modelagem Matemática: Algumas Considerações. **Educação Matemática em Revista**.[S.I.] n. 46, p. 6-15, set. 2015.

ALMEIDA, L. W; SILVA, K. P; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. 1. ed., 2ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2016.

AUSUBEL, D. P; **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Plátano, 2003.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. Tradução de Eva Nick. 2 ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. Tradução de Educational Psychology.

BALL, D. L; COHEN, D. K. Reform by the Book: What Is – or Might Be – the Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform**?. Educational Researcher**, S.L., v. 25, n. 9, p. 6-14, dez. 1996.

BARBOSA, J, C; OLIVEIRA, A. M. P. Supporting mathematics Teachers' Learning with Educative Curricular Materials, **Journal of Mathematics Education**, S.L., v. 7, n. 2, p. 161-169, dez. 2014.

BASSANEZZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BORSSOI, A. H. **A Aprendizagem Significativa e, Atividades e Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino.** 2004. 140 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina

BORSSOI, A. H. **Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias: articulações em diferentes Contextos Educacionais**. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BORSSOI, A. H. Tecnologias Digitais como componentes de Ambientes Educacionais voltados à Aprendizagem do Aluno. In: SILVA, A. P; DALTO, J. O, Org(s)**. Educação Matemática e Pesquisa: algumas perspectivas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 143-164.

BORSSOI, A. H; ALMEIDA, L. W. Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias** (En línea), v. 10, p. 36-45, 2015.

BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno***.* Tradução de Horacio Macedo. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998

BRONSON, R. COSTA, G. **Equações Diferenciais.** Tradução Fernando Henrique Silveira. 3. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

BLUM, W; FERRI, R, B. Advancing the Teaching of Matehmatical Modeling: Research-Based Concepts and Examples. In: **Annual Persspective in Mathematics Education: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics**, edited by Christian R. Hirsch; Amy Roth McDuffie. NCTM. Printed in the United States of America, 2016.

BLUM, W; LEIβ, D. How do Students and Teachers deal with Modeling Problems?. In: **Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics,** edited by Christopher Haines; Peter Galbraith; Werner Blum; Sanwar Khan. Printed in the United Kingdom, 2005.

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior; 2013. Documento de área 2013. Disponível em https://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacaotrienal/Docs_de_area/Administra%C3%A7%C3%A3o_doc_area_e_comiss%C3%A3o_16out.pdf. Acessado em: 08/05/2017.

DEPREZ, J; Modelling the Evolution of the Belgian Population Using Matrices, Elgenvalues and Elgenvestors. In: **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14),** edited by Gabriele Kaise, Werner Blum, Rita Borromeo Ferri, Gloria Stillman. Springer, 2011.

DULLUIS, M. M; ARAUJO, I. S; VEIT, E. A. Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais com Abordagem Gráfica, Numérica e Analítica: uma experiência em cursos de Engenharia. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 17-42, abr. 2011. Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291222086003. Acesso 03/11/2017.

FREIRE, T. B. P.; BORSSOI, A. H. Atividade de Modelagem matemática como proposta para integrar uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa. **X Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação matemática**, 2017.

FREIRE, T. B. P.; BORSSOI, A. H. Recursos Tecnológicos no Desenvolvimento de uma atividade: abordagem de conceitos de Física em dois níveis de escolaridade. **XIV Encontro Paranaense de Educação Matemática**, 2017. Disponível em : http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/schedConf/presentations . Acesso em: 26/12/2017.

FREIRE, T. B. P.; BORSSOI, A. H. Modelagem matemática em uma sala de aula de Física: Relato de experiência. **VII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática**, 2016, p. 769 – 780. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0B8BG_uHbVwUIUE1JZTF6YW5hekE/view . Acesso em: 26/12/2017.

GALIAZZI, M. C; RAMOS, M. G. Aprendentes do aprender: um exercício de análise textual discursiva. In: CONGRESSO LUSO BRASILEIRO EM INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA, 2., 2013, S.L., 2013. **Indagatio Didactica**: vol. 5 (2), out. 2013.

GREEFRATH, et al., EDS. Using Technologies: New Possibilities of Teachinh and Learning Modelling - Overview: In: **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14),** edited by Gabriele Kaise, Werner Blum, Rita Borromeo Ferri, Gloria Stillman. Springer, 2011.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. Tese de Doutrorado em Educação Matemática. 230 f. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

JAVARONI, S. L. **Possibilidades para o Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias: Abordagem Geométrica**. 2012. Disponível em: www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Comunicacao.../CC14946729879T.doc. Acesso em: 07 de julho de 2016.

JAVARONI, S.L; SOARES, D. da S. Modelagem matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. **Acta Scientiae**. Canoas, v. 14, n. 2, p. 260-275, maio/ago. 2012.

LEODORO, M. P; BALKINS, M. A. A. S. Problematizar e participar: elaboração do produto educacional no Mestrado Profissional em Ensino. **II Simpósio Nacional de Ensino em Ciência e Tecnologia**. Artigo número 84, outubro de 2010.

LUCCAS, S. **O ensino introdutório de Matemática em cursos de administração: construção de uma proposta pedagógica.** Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

LÜDKE, M. ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EDU,1986.

MALHEIROS, A. P. S; FRANCHI, R. H. O. L. As tecnologias da Informação e Comunicação nas produções sobre Modelagem no GPIMEM. In: BORBA, M. C; CHIARI, A, Org(s**). Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013, p. 175-193.

MARTINS, M. M; et al. Proposta de ensino interdisciplinar de química e ciências com o software osp tracker. **ENCONTRO DE DEBATES SOBRE O ENSINO DE QUÍMICA**, Cerro Largo, v. 1, n. 01, 2013.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. A storm of light: comprehension made possible by discursive textual analysis. **Ciência e Educação,** Bauru, v.9, n.2, 191-211, out. 2003.

MORAES, R; GALIAZZI, M. C. Análise Textual Discursiva: processo reconstrutivo de múltiplas faces. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 12, n. 1, p. 117-128, abr. 2006.

MORAES, R; GALIAZZI, M. C. **Análise textual Discursiva**. Ijuí. Ed. Unijuí, 2007.

MORAES, R; RAMOS, M. G. Aprendentes do aprender: um exercício de análise textual discursiva. In: **Congresso Luso-Brasileiro de Investigação Qualitativa**, 2, 2013, [S.I.]

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, c1999.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa: a teoria e textos complementares**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MOREIRA, M. A. Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas-UEPS. **Aprendizagem Significativa em Revista**, Porto Alegre, v. 2, n. 1, p.43-63, ago. 2011. Quadrimestral. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID10/v1_n2_a2011.pdf. Acesso: 15/05/2017.

MOREIRA, M. A. MASSONI, N. T.**Noções Básicas de Epistemologias e Teorias de Aprendizagem** como subsídios para a organização de Sequências de Ensino-Aprendizagem em Ciências/Física. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

MOREIRA, M. A; ROSA, P. R. S. **Uma introdução à pesquisa quantitativa em ensino**. 1. ed. Campo Grande: Editora da UFMS, 2013.

PERRENET, J; ZWANEVEL, B. The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, [S.l.], v. 1, n. 6, p. 3-21, 2012.

PONTE, J. P. da. A vertente profissional da formação inicial de professores de matemática. **Educação Matemática em Revista,** S. L, n. 11ª, p. 1-10, 2002. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte%20(SBEM).pdf. Acesso: 03/11/2017.

PORTAL DE INFORMAÇÃO EM ACESSO ABERTO (PIAA). Disponível em: https://portaldeinformacao.utfpr.edu.br/. Acesso: 12/12/2017.

SILVA, K. A. P. Aspectos cognitivos em aulas com Modelagem Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. **Experiências em Ensino de Ciências**, v. 12, n. 2, p. 156-170, abr. 2017. Disponível em: http://if.ufmt.br/eenci/artigos/Artigo_ID355/v12_n2_a2017.pdf Acesso: 26/12/2017.

SILVA, A. P. **A modalidade EDS e semipresencial e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado em Educação para a Ciências, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Bauru, 2017.

SOARES, D. S; JAVARONI, S. L. Análise de Modelos: possibilidades de trabalho com Modelos Matemáticos em sala de aula. In: BORBA, M. C; CHIARI, A, Org(s). **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013, p. 195-219.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. Tradução Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Pioneira Thomson Learning 2003.

ZORZAN, A. S. L. Ensino-aprendizagem: Algumas tendências na Educação Matemática. ***Revista Ciências Humanas***. [S.I.], v.8, n.10, p. 77-98, jun. 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE 1: AUTORIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO

AUTORIZAÇÃO

Eu, Magda Hirata Vanzela, abaixo assinado, responsável pelas FACULDADES INTEGRADAS DO VALE DO IVAÍ, autorizo a realização do estudo "Unidades de Ensino Potencialmente Significativas: planejar o Ensino com vistas na aprendizagem", a ser conduzido pelas pesquisadoras Adriana Helena Borssoi e Talita Breschiliare Piffer Freire. Fui informada pelo responsável do estudo sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

Declaro ainda estar ciente que essa pesquisa será realizada após o parecer ético emitido pelo CEP da UTFPR.

Ivaiporã, 14 de setembro de 2016.

Assinatura e carimbo do responsável institucional

Magda Hirata Vanzela
Diretora Acadêmica
R.G. 3.269.125-0/PR

APÊNDICE 2: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Título da pesquisa: Unidades de Ensino Potencialmente Significativas: planejar o Ensino com vistas na aprendizagem

Pesquisadora: Talita Breschiliare Piffer Freire

Discente Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT)

E-mail: talitapfreire@gmail.com

Orientadora: Adriana Helena Borssoi

Professora adjunta da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Londrina.

E-mail: adrianaborssoi@utfpr.edu.br

Local de realização da pesquisa:

Faculdades Integradas do Vale do Ivaí.

Av. Minas Gerais, 651 – CEP 86870-000

Ivaiporã – Paraná - Brasil

A) INFORMAÇÕES AO PARTICIPANTE DA PESQUISA

1. Apresentação da pesquisa.

A preocupação com a aprendizagem foi a essência do trabalho de pesquisadores como Vygotsky, Piaget, David Ausubel, Joseph Novak, Marco Antônio Moreira, e Paulo Freire. Portanto, estudar como e quando ocorre a aprendizagem, quais as melhores condições para que ela aconteça, o que é necessário para que ocorra, são perguntas frequentes no meio acadêmico e inquietam parte dos professores, e mesmo não sendo um questionamento moderno, ainda se faz necessário o seu estudo.

Considerando a necessidade de estruturar as aulas de maneira favorável a uma possibilidade de aprendizagem significativa, ao crescente desenvolvimento da tecnologia e a oportunidade de aliá-la ao ensino, e tendo em vista as dificuldades vivenciadas pela pesquisadora em sala de aula, percebe-se a imprescindibilidade de intervenção na situação descrita.

Neste sentido, nosso trabalho propõe o uso de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (MOREIRA, 2011b), que são fundamentadas na Teoria da Aprendizagem Significativa Ausubeliana. O intuito é propor e investigar UEPS que considerem atividades apoiadas por recursos tecnológicos, dentre os quais destacamos a videoanálise. A coleta de dados para análise será feita por meio de registro escrito, áudio e vídeo no decorrer das aulas. Após esse período, acredita-se que se verificará que o uso de uma metodologia diferenciada aliada à tecnologia possibilita um aprendizado mais satisfatório, um maior interesse por parte dos alunos, mais dedicação nos momentos de realizar as atividades dentro e fora da sala de aula, uma possível relação entre a matemática ensinada em sala de aula e sua aplicação, seja em um meio científico ou no seu cotidiano.

2. Objetivo da pesquisa.

Propor, implementar e analisar a utilização de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas, no ensino da Matemática

3. Participação na pesquisa.

Alunos do sexto semestre do curso de licenciatura em Matemática das Faculdades Integradas do vale do Ivaí, na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias.

4. Confidencialidade.

A identidade do participante tem garantia de sigilo e será mantida sua privacidade.

5. Desconfortos e/ou Riscos:

Conforme a Resolução nº 466 de dezembro de 2012, toda pesquisa que envolva seres humanos, apresenta a possibilidade de riscos e danos à dimensão física, psíquica, moral, intelectual, social, cultural e espiritual. Desta forma, nessa pesquisa, os riscos são,mesmo que mínimos, de dimensão, intelectual, social e cultural. Logo, frente a qualquer desconforto por parte do participante, o pesquisador responsável suspenderá a pesquisa imediatamente, principalmente se perceber algum risco ou dano à saúde do sujeito participante da pesquisa, não previstos neste termo. Os participantes não pagarão e nem serão remunerados por sua participação e poderão, sem qualquer ônus, desistir a qualquer momento da pesquisa.

6. Benefícios:

O projeto de pesquisa foi elaborado pensando em verificar as contribuições da Unidades de Ensino Potencialmente Significativas : Planejar o Ensino com vistas na Aprendizagem.

Como a pesquisa tem abordagem qualitativa pode não haver benefícios direto, no entanto, tem a possibilidade de gerar conhecimento sem afetar o bem-estar dos participantes de pesquisa e seus grupos ou coletividade.

7. Critérios de inclusão:

Não se aplica.

8. Critérios de exclusão:

Não se aplica.

9. Ressarcimento e indenização:

Subsidiada pelo item II.7, a indenização se dará por meio da cobertura material para reparação a dano, causado pela pesquisa ao participante da pesquisa e o ressarcimento, pelo item II.21 por meio compensação material, exclusivamente de despesas do participante e seus acompanhantes, quando necessário, tais como transporte e alimentação.

10. Direito de sair da pesquisa e a esclarecimentos durante o processo.

O participante da pesquisa tem o direito a deixar o estudo a qualquer momento e também o direito a receber esclarecimentos em qualquer etapa da pesquisa. Liberdade de recusar ou retirar o consentimento sem penalização.

11. Ressarcimento ou indenização.

O participante pesquisa não terá nenhuma despesa e será indenizado por qualquer dano que venha sofrer com a sua participação.

B) CONSENTIMENTO

Eu declaro ter conhecimento das informações contidas neste documento e ter recebido respostas claras às minhas questões a propósito da minha participação (direta ou indireta) na pesquisa e, adicionalmente, declaro ter compreendido o objetivo, a natureza, os riscos e benefícios deste estudo.

Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo, permitindo que os pesquisadores relacionados neste documento obtenham fotografia, filmagem ou gravação de voz de minha pessoa para fins de pesquisa científica/ educacional.

Concordo que o material e as informações obtidas relacionadas a minha pessoa possam ser publicados em aulas, congressos, eventos científicos, palestras ou periódicos científicos. Porém, não devo ser identificado por nome ou qualquer outra forma.

As fotografias, vídeos e gravações ficarão sob a propriedade do grupo de pesquisadores pertinentes ao estudo e sob sua guarda.

E, estou consciente que posso deixar o projeto a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

Nome completo:____

RG:________________________ CPF: _______________________ Data de Nascimento:___/___/______

Endereço:____

Telefone:______________________________ CEP: ________________________________

Cidade:_______________________________ Estado: ______________________________

Assinatura: ____ Data: ____/____/_______

APÊNDICE 3: QUESTIONÁRIO 1

Questionário 1 EDO 2016

Este é o primeiro questionário da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, ele servirá para levantamento de alguns conhecimentos prévios. Responda a partir do que se lembra, sem fazer consultas.

*Obrigatório

Perfil do Acadêmico

1. **Nome do respondente** *

____

2. **Idade** *
Marcar apenas uma oval.

- ◯ Menos de 20 anos de idade
- ◯ Entre 20 e 25 anos de idade
- ◯ Entre 25 e 30 anos de idade
- ◯ Mais de 30 anos de idade

3. **Sexo** *
Marcar apenas uma oval.

- ◯ Masculino
- ◯ Feminino

Quanto à disciplina

4. **Já cursou a disciplina de Cálculo I?** *
Marcar apenas uma oval.

- ◯ Sim
- ◯ Não

5. **Já cursou a disciplina de Cálculo II?** *
Marcar apenas uma oval.

- ◯ Sim
- ◯ Não

6. **Suas maiores dificuldades de compreensão, em relação à essas disciplinas, caso as tenha, estão relacionadas a quê?** *

7. **Considera que tenha tido uma aprendizagem significativa dos conceitos e técnicas do Cálculo I?** *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

8. **Considera que tenha tido uma aprendizagem significativa dos conceitos e técnicas do Cálculo II?** *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

9. **Suas aulas de Cálculo I ou II, ocorreram em ambiente informatizado (laboratório de informática, uso de computador ou calculadora gráfica):** *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Nunca
- [ ] Algumas vezes
- [ ] Muitas vezes

10. **O que você sabe do programa Excel?** *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Usar como calculadora
- [ ] Ajuste de curvas
- [ ] Plotar gráfico de função
- [ ] Nada

11. **O que você sabe do programa Winplot?** *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Plotar gráfico de função bidimensional
- [ ] Plotar gráfico de função tridimensional
- [ ] Nada

Quanto ao conteúdo

13. **Qual o conceito (noção, ideia) que você tem de derivada? ***

14. **Qual o conceito que você tem de integral? ***

15. **Qual a relação que existe entre derivada e integral? ***

16. **Como poderia ser descrita em linguagem discursiva a expressão dx/dy ? (Se houver mais de uma interpretação descreva-as, por favor). ***

17. Você conhece alguma outra notação para a expressão dx/dy ? *

18. O que você entende por "Modelo Matemático"? *

APÊNDICE 4: QUESTIONÁRIO 2

Questionário de EDO 2

*Obrigatório

1. Nome: *

Equações Diferenciais Ordinárias

2. Descreva o que é uma EDO. *

3. Quando uma situação pode ser descrita como uma EDO? *

4. Que conhecimentos matemáticos são importantes para se trabalhar com EDO? *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Equação de 1° Grau.
- [ ] Equação de 2° Grau.
- [ ] Álgebra.
- [ ] Regra de três.
- [ ] Limite.
- [ ] Derivada.
- [ ] Integral.

Quanto à disciplina:

5. Você considera que seus conceitos/técnicas de Cálculo I estão sendo aprimorados com as aulas de EDO? *

Marcar apenas uma oval.

- ◯ Sim
- ◯ Não
- ◯ Talvez

6. **Suas maiores dificuldades de compreensão, caso as tenha, em relação a disciplina de EDO, estão relacionadas a quê** *
Marque todas que se aplicam.

- [ ] Técnicas de integração.
- [ ] Metodologia de ensino.
- [ ] Com a própria disciplina.
- [ ] Trabalho em equipe.
- [ ] Problemas com a álgebra.
- [ ] Visualização do que se quer com as atividades.
- [ ] Visualização da atividade com a realidade.
- [ ] Explicação do professor.
- [ ] Com os momentos de exposição no quadro por parte dos alunos.

Quanto à condução da professora em sala de aula.

7. **Considera que a utilização de tecnologia em sala de aula:** *
Marque todas que se aplicam.

- [ ] Dificulta a aprendizagem.
- [ ] Não faz diferença.
- [ ] Melhora a aprendizagem
- [ ] Tenho dificuldades com o uso da tecnologia.
- [ ] Acho que fica muito mais fácil de aprender.

8. **Considera que a as aulas com Modelagem Matemática:** *
Marque todas que se aplicam.

- [ ] Dificulta a prendizagem.
- [ ] Não faz diferença.
- [ ] Melhora a aprendizagem.
- [ ] Ainda tenho dificuldades, pois gosto que o professor realize as explicações primeiro.

9. **Quanto aos programas/softwares que estão sendo utilizados em sala de aula, você:** *
Marque todas que se aplicam.

- [ ] Não aprendeu a utilizar.
- [ ] Ainda está aprendendo a utilizar.
- [ ] Já tinha aprendido a utilizar antes das aulas de EDO.
- [ ] Aprendeu a utilizar nas aulas da professora regente.

Quanto ao encaminhamento da disciplina:

10. Relacionado as maneiras como um professor pode conduzir a sua aula, marque a(s) resposta(s) que mostra(m) as sua preferência: *
Marque todas que se aplicam.

- [ ] Aula expositiva.
- [ ] Aula convencional.
- [ ] Leitura de textos.
- [ ] Resolução de exercícios.
- [ ] Trabalho individual em sala de aula.
- [ ] Trabalho em equipe em sala de aula.
- [ ] Resolução de problemas.
- [ ] Uso de Modelagem Matemática.
- [ ] Aula de investigação.

Seção sem título

11. **Certo material radioativo decai a uma taxa proporcional de material, e se, após duas horas, o material perdeu 10% de sua massa original, determine a Equação Diferencial Ordinárias que pode expressar essa situação.** *

____

Seção sem título

12. **Sabe-se que uma cultura de bactérias cresce a uma taxa proporcional à quantidade de bactérias presentes em cada instante. Sabendo-se que um cientista analisou certa cultura e identificou que em 1h de experimento haviam 1000 núcleos de bactéria e em 4h haviam 3000 núcleos. Qual era a quantidade de núcleos de bactérias no início do experimento deste cientista?** *

____