UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

NÉLVIA SANTANA RAMOS
ANDRÉ LUIS TREVISAN

CADERNO DE TAREFAS: SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS COMO DESENCADEADORAS DO ENSINO DE LIMITE: UMA PROPOSTA EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1

PRODUTO EDUCACIONAL

LONDRINA
2017

NÉLVIA SANTANA RAMOS
ANDRÉ LUIS TREVISAN

CADERNO DE TAREFAS: SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS COMO DESENCADEADORAS DO ENSINO DE LIMITE: UMA PROPOSTA EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1

Produto Educacional apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

LONDRINA
2017

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A aprendizagem da Matemática, para muitos estudantes, se mostra um processo “árduo”, fazendo que limitem suas ações a apenas reproduzir processos em vez de aplicar conceitos. Não é diferente no caso do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), diversas são as dificuldades dos estudantes nessa disciplina uma vez que serem “expostos” a conceitos, demonstrações e aplicações não é garantia de que estejam aprendendo ou se sentindo motivados/interessados pela disciplina.

Lima (2014) ressalta que “por muito tempo acreditou-se que os alunos ao chegarem ao Ensino Superior teriam motivação em relação às disciplinas do curso por eles escolhidos”. Bastava que “o professor tivesse domínio para que os alunos aprendessem e a ideia de conhecimento acabado e de que basta o transmitir para os estudantes aprenderem pouco a pouco foi abandonada” (p. 128). No entanto, nem a motivação dos estudantes quanto o “domínio” dos professores não podem garantir o sucesso na sua aprendizagem. Aos estudantes deve ser oportunizado um ambiente educacional que contribua com o desenvolvimento de conceitos e também com uma participação ativa nesse processo.

Das pesquisas em Educação Matemática, especificamente as que se refere ao ensino na disciplina de CDI, podemos destacar a de Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014) por ter contribuído para melhor compreensão da aprendizagem de conceitos como limite, derivada e integral, mas que pouco disso chega efetivamente sala de aula. Nesse sentido, em uma espécie de “crítica ácida” apontam que “muito já se sabe sobre as dificuldades por estudantes na disciplina de “Cálculo” e diante disso questionam “em que direção precisamos ir?”(p.508).

Inspirados nos trabalhos de Palha (2013), Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e Palha, Dekker e Gravemeijer (2015), propomos a organização de ambientes educacionais pautados em *episódios de resolução de tarefas* (adaptação do termo em inglês *shift problem lessons*, cunhado por esses autores). Consideramos a organização de um ambiente que leve em conta as condições reais de ensino, por ambiente nos referimos não a “lugar” físico apenas, sim a todo contexto que circunscreve nosso trabalho (os estudantes e suas expectativas, os materiais didáticos, o espaço físico e a infraestrutura, o professor e suas concepções) e suas condições reais.

Embora, de uma maneira geral, tenhamos uma sala de aula heterogênea (tanto em termos do conhecimento “trazido” pelo nosso estudante, quanto suas expectativas frente à disciplina de CDI) e um plano de ensino bastante extenso a cumprir – condições essas que, em geral, todo professor depara-se - intentamos que os estudantes tenham a participação ativa no desenvolver do trabalho pedagógico, envolvam-se com as tarefas propostas e, assim, elaborem conhecimento matemático inerente ao curso.

Nossos episódios não substituem outros presentes no contexto de uma sala de aula regular, como os que envolvem a apresentação de conceitos, demonstrações e exercícios de aplicação pelo professor. Constituem um ambiente de aprendizagem que possamos em alguns momentos do curso “perder” [1] certo tempo para a elaboração de conceitos centrais da disciplina nesse sentido difere significativamente de uma aula expositiva usual, tendo como pressupostos:

- O fato de um novo conteúdo não precisar preceder as tarefas, pois, partimos do desenvolver delas para a elaboração de conceitos de CDI 1.
- A participação ativa dos estudantes, a partir da resolução das tarefas desenvolvidas em grupos, estimulando sua reflexão e elaboração de raciocínio conceitual partindo do intuitivo para a definição formal.
- O papel do docente, que ao invés de apresentar conceitos e/ou fornecer explicações/ caminhos para a resolução, torna-se um mediador das apresentações e explicações dos estudantes na resolução.

O desenvolvimento de nossa sequência de tarefas, sendo ela o produto educacional de nossa pesquisa, se desenvolveu em um processo cíclico embasados em Barbosa e Oliveira (2015), Matta, Silva e Boaventura (2014), Mestre e Oliveira (2016), Molina, Castro e Castro (2007) e Van Eerde (2013), que tomam o *Design Research* como uma metodologia de pesquisa, tal que aproxima o professor e pesquisador do ambiente de sala de aula, envolvendo delineamento, desenvolvimento e avaliação de todo o processo de elaboração, contribuindo ao

[1] Em nossa proposta “perder” tem sinônimo de “ganhar”. O tempo destinado aos episódios tem como resposta o ganho na participação ativa dos estudantes o que auxilia na elaboração de conceitos.

desenvolvimento de novos artifícios no ensino que favorecem a aprendizagem dos envolvidos.

2 APLICAÇÃO DE NOSSA PESQUISA

Nossa pesquisa se efetuou, em termos de aplicação, em dois momentos (2016/2017), em cada aplicação participaram duas turmas de engenharias uma ministrada pelo orientador desta e uma pela autora. Desenvolvemos com nossas aplicações uma sequência de tarefas que mais se aproximam do que pensamos para a abordagem do estudo de sequências numéricas e sua convergência que trabalhadas com estudantes do curso de CDI 1 possamos partir de suas representações para a sistematização de conceitos centrais da disciplina (convergência de sequência como antecessora de limite de uma função) na qual delineamos três tarefas para compor este trabalho e apresentamos uma propostas de duas tarefas intermediárias, baseados nas análises feitas das tarefas.

3 OBJETIVO GERAL

Nossa sequência de tarefas se destina a estudantes do Ensino Superior que cursam Cálculo Diferencial e Integral (CDI) 1. Tem como objetivo desencadear uma discussão sobre limite de funções reais de variável real partindo do estudo de convergência de sequências numéricas e, desta forma, contribuir na compressão de conceitos que circunscrevem essa temática.

Deve ser buscado que os estudantes, ao trabalhar com as tarefas, explorem ideias básicas necessárias à compreensão do conceito de convergência de uma sequência numérico, que será tomado como ponto de partida para definir limites envolvendo uma função de variável real. Mais especificamente, objetiva-se que o estudante, ao lidar com essas tarefas, realize as seguintes ações:

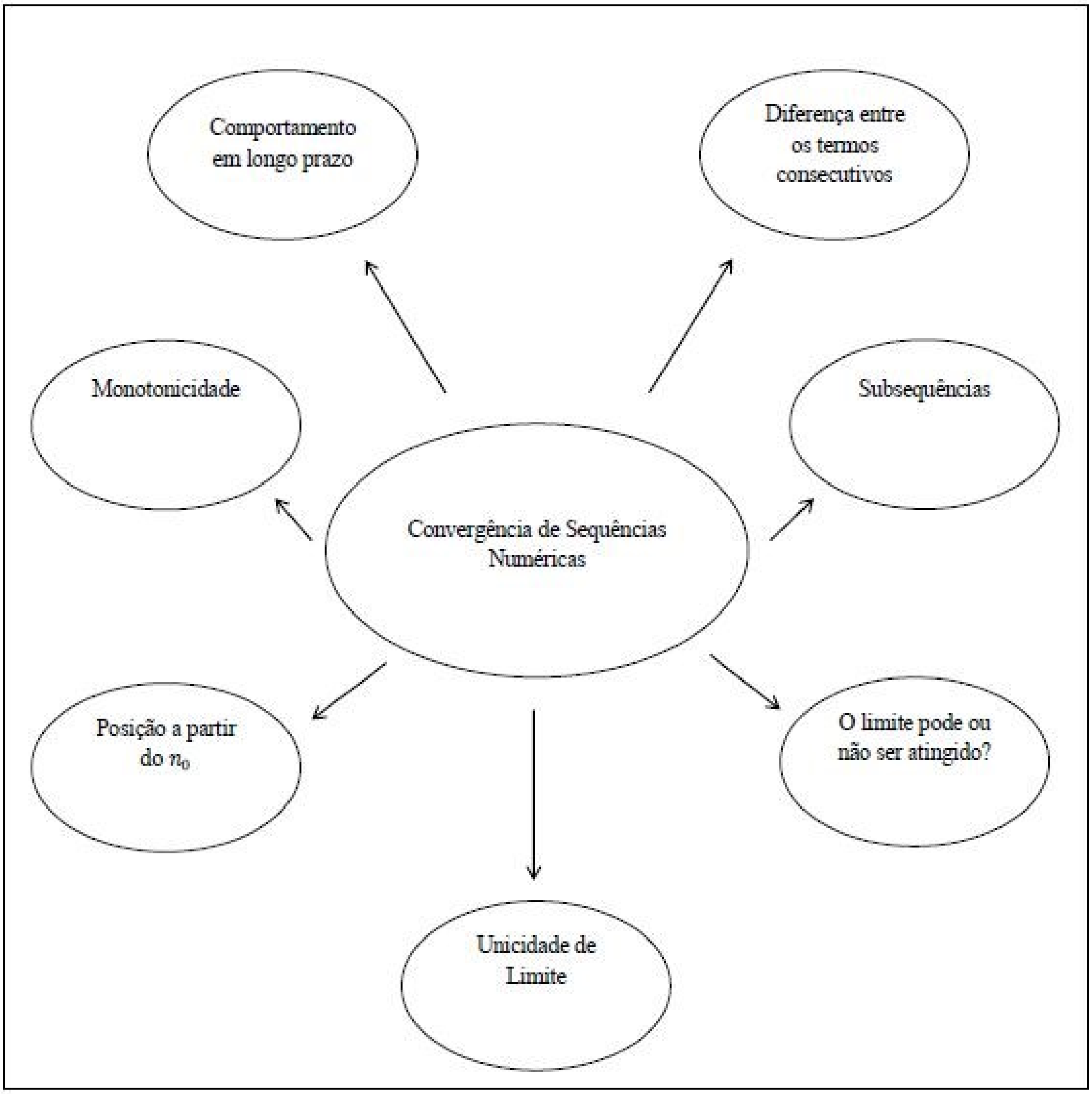
- Analisar e compreender o estudo de sequências;
- Reconhecer sequências em diferentes situações;
- Analisar o comportamento de uma sequência convergente e de uma sequência divergente.

- Identificar a variação entre termos consecutivos de uma sequência e suas implicações no critério de convergência.
- Partir da exploração intuitiva e a, a partir dela, caminhar rumo à elaboração de uma definição formal.

4 TAREFAS

A proposta apresenta três tarefas após nossas aplicações e refinamento realizados entre os anos de 2016/2017, duas tarefas intermediárias, bem como o material de apoio que disponibilizamos aos estudantes no decorrer das aplicações. No Quadro 1 apresentamos um esquema das ideias que circunscrevem o conceito de convergência que compõem as tarefas, e que podem ser explorados partindo das estratégias apresentadas pelos grupos em sua resolução para a sistematização e organização da definição formal de uma sequência convergente.

Os elementos que circunscrevem o conceito de convergência de sequências numéricas fornecem indícios de seu comportamento e seu estudo. Parte das tarefas, podendo auxiliar a elaboração e organização da disciplina, como auxiliou os autores.



Quadro 1 - Mapa sobre convergência de sequência
Fonte: autores

4.1 TAREFA 1

Nossa primeira tarefa e sua abordagem em sala de aula possibilita ao professor iniciar uma discussão sobre o estudo de sequências numéricas, tomando como ponto de partida, nas aulas de CDI 1, o estabelecimento da comparação entre diferentes tipos de sequências . Seu enunciado contribui no direcionar de diferentes "olhares", traz como potencialidades a possibilidade de sistematizar conceitos como:

- Uma sequência recursiva;
- Diferença entre termos consecutivos;

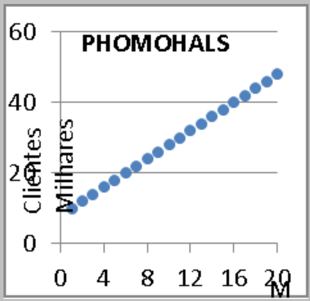
- Comportamento em longo prazo;
- Crescimento/decrescimento;
- Intuitivamente indexação do n_0 quando analisamos a partir de que mês possamos garantir o maior número de clientes.

As potencialidades destacadas podem ser tomadas como ponto de partida em conceitos centrais de CDI 1, em nossa proposta partimos delas para o estudo de sequências e sua convergência. Apresentamos no Quadro 2 a tarefa proposta como desencadeadora do estudo de sequências.

Tempo previsto: 3 aulas de 50 minutos.
Conteúdo da aula: definição de uma sequência numérica e estudo de sequências particulares.
Recursos Didáticos: quadro-negro, giz, projetor multimídia, *notebook* com software Excel.
Objetivo específico: Reconhecer diferentes tipos de sequência e seu comportamento.
Metodologia e Estratégia: Para a exploração de conceitos envolvidos na tarefa disponibilizamos um arquivo no software Excel, sua escolha remete a familiaridade que os estudantes possam ter com as ferramentas disponibilizadas no programa possibilitando a manipulação de objetos tais como: construção de gráficos, tabelas, leis de formação entre outras.

A empresa COMPUNET fornece conexões de Internet para seus atuais 10.000 consumidores. A COMPUNET está interessada na contratação de uma agência de publicidade para desenvolver uma campanha, para aumentar o número de consumidores. A empresa tem três agências de publicidade diferentes para escolher: PROMOHALS, H & G publicidade e SCHLEICH & Co. Cada empresa garante um aumento do lucro para COMPUNET, mas em ritmos diferentes. Seu trabalho é investigar qual agência é melhor para COMPUNET.

A campanha desenvolvida pela **PROMOHALS** promete um crescimento nos negócios, conforme mostrado no gráfico.



H & G Adversiting

A campanha da Agência de publicidade H & G Adversiting promete um crescimento mensal a uma taxa 10%. Ou seja, o lucro de cada mês é 10% maior que do mês anterior.

Schleich & Co promete o crescimento mostrado na Tabela.

Tempo (meses)	Clientes (Milhares)
1	10
2	15
3	19
4	23
5	27
6	30
7	32
8	34
9	36
10	38
11	39
12	40
13	41
14	42
15	42
16	43
17	43
18	44
19	44

Quadro 2 - Tarefa 1: O caso Compunet
Fonte: Adaptado de Weigand (2014).

Tomamos como ponto de partida, na disciplina, a aplicação de uma tarefa embasada em Weigand (2014) que, em sua pesquisa, visou o estudo de quociente de diferenças (derivada). Apresenta em sua proposta, uma reestruturação dos cursos de Cálculo partindo do estudo de sequências, Sequências são funções cujo domínio é o conjunto dos números naturais. O estudo de sequências é revitalizado primeiramente, para depois ser apresentado o estudo de funções nos reais e, tomamos como organização de nossa proposta.

A tarefa deve ser proposta em grupos auxiliando os estudantes a discussão e organização de estratégias de resolução. Após tempo destinado aos grupos, o professor pode lançar questões para a exploração dos itens da tarefa, tais como:

- Qual empresa será mais vantajosa?
- Como poderíamos representar algebricamente cada empresa?
- Independente do prazo em meses de análise sempre teremos a mesma empresa como mais vantajosa?

As indagações para os grupos auxiliam no desenvolvimento da tarefa, nesse momento o papel do professor não se resume a fornecer respostas prontas e sim questionamentos que contribuam para que os grupos direcionem novos pontos de exploração. O professor deve conversar com os grupos durante a resolução da tarefa, pois, deste modo, pode perceber as estratégias por eles adotadas e, se necessário, guiar a novos olhares.

A sistematização é realizada, em conjunto, professor e estudantes tomando como ponto de partida as estratégias apresentadas nas resoluções dos grupos e da representação recursiva das sequências. Deste modo, pode ser lançada uma indagação:

- *Suas representações gráficas nos parecem conhecidas?*

Nesse momento pode surgir uma discussão sobre o comportamento das empresas e sobre sua representação. A primeira e segunda como sendo uma Progressão Aritmética e Geométrica, respectivamente. A terceira pode ser descrita em termos de uma função de crescimento rápido inicial, seguida de uma "estabilização".

Sistematização que descreve o crescimento nos negócios propostos pela primeira empresa. Ressaltamos que toda sistematização deve ser realizada em conjunto, professor e estudantes, cada termo matemático aqui apresentado fora organizado em sala segundo as indagações dos estudantes, ou seja, a escrita apresentada na sistematização foi elaborada pelos grupos e disposta no quadro pela docente para a sala como um todo.

$$a_1 = 10$$
$$a_2 = 10 + 2$$
$$a_3 = 12 + 4$$

Que é 12?

$$(12 = a_2) \rightarrow a_2 = a_1 + 2$$

Então, $a_3 = a_2 + 2 = a_1 + 2 + 2 \rightarrow a_1 + 2.\,2 = a_1 + 4$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1).\,2\,,$$

Deste modo podemos analisar a empresa para qualquer mês o qual queiramos, bastando para isso uma substituição numérica. E organizamos seu termo geral:

$$a_n = 10 + (n - 1).2 \text{ ,}$$

Recursivamente:

$$a_{n+1} = a_n + 2 \text{ ,}$$

Segunda empresa, função exponencial (P.G.) apresenta seu crescimento a uma taxa percentual constante, podendo ser tomada como ponto de partida no estudo de sequência de diferenças.

$$n\ (1 + i) \rightarrow n\ (1 + \frac{10}{100}) = n\ .(1{,}1)$$

$$a_1 = 10.000 \rightarrow 10.000(1 + \frac{10}{100})^t \text{ , } t = tempo$$

$$\therefore a_n = a_1.(1{,}1)^{n-1} \text{ , com } n \geq 1$$

Termo geral:

$$a_n = 10.1{,}1^{(n-1)} \text{ ,}$$

Recursivamente:

$$a_{n+1} = a_n.1{,}1$$

Com a análise da diferença entre os termos consecutivos das sequências sistematizamos a representação de uma sequencia de diferenças:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

A terceira empresa apresenta um crescimento a uma taxa decrescente, ou seja, sua variação entre os termos consecutivos começa a diminuir aproximando-se de um valor, pode ser representada pela expressão abaixo e direcionemos um olhar para seu comportamento gráfico:

$$a_n = Kln(n)$$

O comportamento gráfico da terceira empresa possibilita o direcionar para certa "estabilização" por ela apresentada com o objetivo do estudo de uma sequência convergente.

4.2 TAREFA 2

Na tarefa 2 apresentamos o software Geogebra permitindo que os grupos trabalhem com diferentes representações em sua resolução. As sequências que as compõem possibilitam o estudo de diferentes comportamentos que uma sequência possa apresentar, auxiliando em seu estudo e destacando elementos essências para a sistematização da definição formal de convergência.

Nossas tarefas não buscam respostas únicas dos estudantes em seu desenvolver, o que almejamos em cada aplicação é que possibilitem o desenvolver de conceitos de CDI 1 e que possam ser organizados partindo das resoluções apresentadas pelos em sua realização.

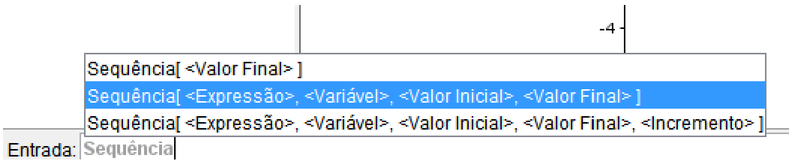
Tempo previsto: 6 aulas de 50 minutos.
Conteúdo da aula: conceito sobre sequências e critérios de convergência,
Recursos Didáticos: quadro-negro, giz, projetor multimídia, *notebook* com software Geogebra.
Objetivo específico: Reconhecer diferentes tipos de sequência e seu comportamento e sua relação com convergência de uma sequência.

Metodologia e Estratégia: Para a organização da tarefa disponibilizamos um arquivo no software Geogebra contendo as sequências devidamente plotadas. A tarefa possibilita o estudo do comportamento de uma sequência como crescimento / decrescimento através da análise da variação entre termos consecutivos e indicativos do comportamento de uma sequência convergente e divergente e sua organização no software possibilita a manipulação das sequências.

A tarefa deve ser proposta em grupos possibilitando aos estudantes uma discussão sobre conceitos envolvidos e troca de estratégias para sua resolução. O professor deve caminhar entre os grupos e, conversando com eles, sobre suas estratégias de resolução, possibilitando direcionar seu olhar para as potencialidades que possam emergir da tarefa. Destinado o tempo para discussão uma abordagem em termos de conceitos deve ser realizada com os grupos e, nesse momento, a sistematização de conceitos é conduzida partindo das estratégias dos grupos na resolução da tarefa.

Apresentamos no Quadro 3 a tarefa proposta:

1. Vamos agora o comportamento de algumas sequências com auxílio do **Geogebra**. Como exemplo, tome a sequência $a_n = n^3 - 3n^2 + 1$. No campo de entrada, digite **Sequência** e escolha a segunda opção, conforme abaixo:



Consideremos nossa variável sendo **n.** Em <Expressão>, coloque o seguinte par ordenado: (n, n^3-3n^2+1). Dessa forma, teremos pontos plotados no plano cartesiano obedecendo à sequência informada. Substitua <Variável> por **n.** Substitua <Valor Inicial> por **1.** Por fim, substitua <Valor final> por **um valor de sua escolha.** Para melhor visualizar a tela e o comportamento da sequência, segure a tecla "Ctrl" e, com o botão esquerdo do mouse, re-escale o eixo y.

a) Investigue o comportamento das sequências a seguir. Descreva.

i) $a_n = \frac{n}{n+1}$ ii) $a_n = \frac{n+20}{5n}$ iii) $a_n = \sqrt{n}$

iv) $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

v) $a_n = \sqrt[n]{a}$ (Automaticamente o programa irá lhe pedir para criar um controle deslizante para o número *a*)

2. Sem auxílio do Geogebra, procurem “prever” o comportamento das sequências a seguir. Descreva.

i) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ii) $b_n = (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$

iii) $c_n = \begin{cases} 2, & \text{é múltiplo de } 10 \\ 1 + \frac{1}{n}, & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$

iv) $d_n = \begin{cases} 1, & \text{é múltiplo de } 10 \\ 1 + \frac{1}{n}, & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$

v) $e_n = \begin{cases} 2, & se \quad 100 \le n \le 150 \\ 1 - \frac{1}{n}, & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$

v) $f_n = \begin{cases} 1, & se \quad n \text{ é par} \\ 1 - \frac{1}{n}, & se \quad n \text{ é ímpar} \end{cases}$

vii) $g_n = \begin{cases} 1, & se \quad n \text{ é par} \\ 0, & se \quad n \text{ é ímpar} \end{cases}$

3. Confronte suas respostas à questão anterior com as representações gráficas apresentadas no arquivo disponibilizado pelo professor

4. Ativando as opções **L**, **semi**, **tira** e **Limite**, você visualizará uma "tira" de semi-largura constante, com uma linha ao centro para marcar um suposto "limite". Para cada sequência anterior, analise como se distribuem os pontos do gráfico da sequência, em relação à tira (se estão dentro ou fora). Discuta.

Quadro 3 - Tarefa 2: Convergência de Sequência
Fonte: autores.

A tarefa traz em seu primeiro item o comportamento de algumas sequências a serem investigadas com o auxílio do software Geogebra, algumas sequências convergentes (i, ii e iv) e outras divergentes. Seus comportamentos distintos visam que estudantes possam reconhecer sequências e seus diferentes gráficos contribuindo na organização da definição provisória do conceito de convergência.

No item 2 da tarefa, apresentamos algumas sequências representadas por mais de uma expressão (definida por partes) só que agora sua análise deverá ser feita sem o auxilio do software. A escolha neste formato auxilia que os grupos possam desenvolver a tarefa trabalhando com diferentes representações, que possam partir tanto da análise visual, quanto de processos de substituições numéricas, para a sistematização da tarefa.

A terceira questão da tarefa solicitou uma análise das respostas sem o auxílio do Geogebra buscando que os estudantes possam confrontar suas análises tanto pela visualização gráfica, quanto pela manipulação algébrica (quando substituem valores para análise do comportamento da sequência). Como último elemento da tarefa e a ativação das opções limite e tira no software surgem elementos essenciais à sistematização da definição formal de convergência. Para a realização da tarefa fora disponibilizado o arquivo pronto no Geogebra, o disponibilizamos em Convergência de Sequências.

A tarefa apresenta como potencialidades a exploração de diferentes ideias que circunscrevem o conceito de convergência:

- Variação entre termos consecutivos e sua relação com critérios de convergência;
- Diferentes comportamentos gráficos;
- Sequências definidas por partes;
- Trabalhar com diferentes representações;
- Sistematização de conceitos que circunscrevem convergência de sequências numéricas.

Após sistematização da tarefa um material de apoio pode ser destinado aos estudantes, apresentamos o material que destinamos em nossa proposta de pesquisa e que pode ser tomado como ponto de partida para uma nova elaboração.

MATERIAL DE APOIO

Sequências

Pode ser descrita como uma função com comandos de entrada “domínio” nos números naturais e seus comandos de saída “imagem” nos números reais, matematicamente sua representação é dada por, f: IN→ R. Como a utilizaremos para descrever comportamentos em estudo, ao invés de $f(n)$a tomemos em alguns momentos por (a_n) para todo $n \in$ IN, e chamado o termo geral, ou n-ésimo termo da sequência.

Ex:

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

Teríamos uma sequência com termos $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \ldots\right)$

Analise o comportamento das sequências algebricamente e graficamente, respondendo as questões que seguem.

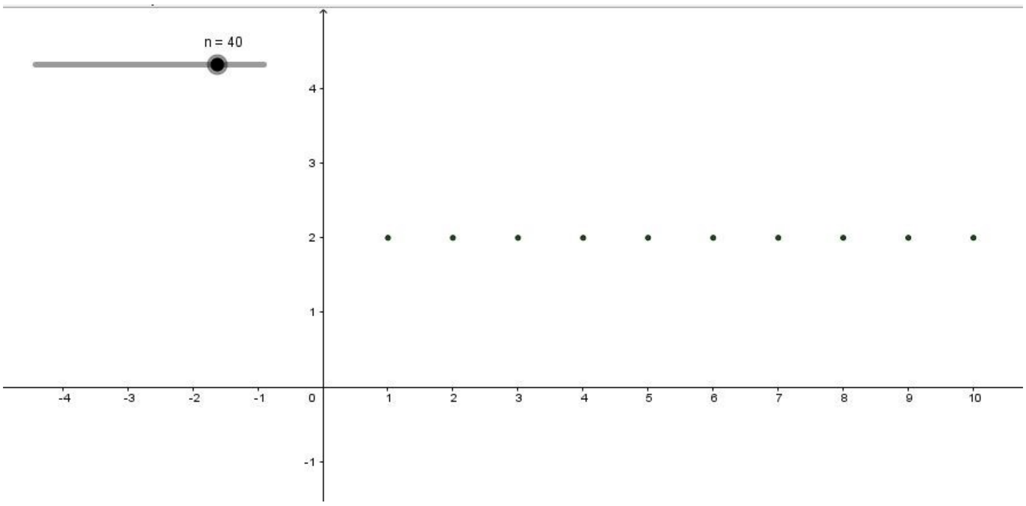
Existe alguma semelhança em seu esboço gráfico, qual a lei de formação que descreve a sequência e qual o seu comportamento gráfico.

a) $(2,2,2,\ldots)$

Aqui a sequência nos representa um comportamento constante, descrito por:

$$a_n = 2$$

Graficamente

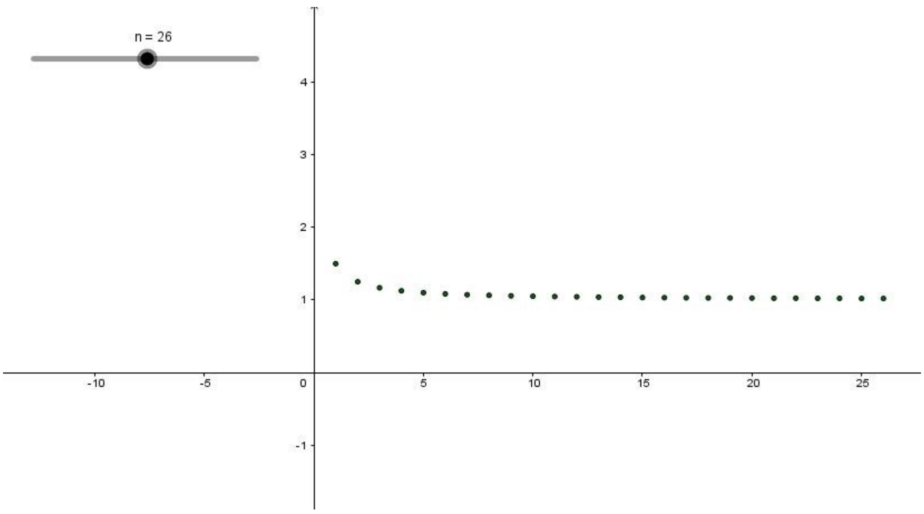


b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \dots\right)$

Uma sequência decrescente que, conforme tomamos n suficientemente grande quanto queiramos converge a 1.

$$a_n = 1 + \frac{1}{2n}$$

Graficamente,



c) $\left(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots\right)$

Trata-se de uma sequência crescente, algebricamente:

$$a_n = \frac{1+n}{2}$$

Percebemos que cada sequência analisada tem comportamentos distintos. Uma sequência pode ter comportamento crescente, decrescente, estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Uma sequência (a_n) é denominada:

estritamente crescente se $a_1 < a_2 < \ldots a_n < \ldots$,

crescente se $a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_n \geq \ldots$

estritamente decrescente se $a_1 > a_2 > \ldots a_n > \ldots$

decrescente se $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n \leq \ldots$,

Devemos dar uma atenção ao comportamento de uma sequência, seu esboço gráfico pode nos representar o fato ao qual buscamos uma resposta.

Alguns casos particulares

Dada uma sequência ela pode ter comportamentos que não são ultrapassados pelo comando de saída de seus termos de entrada, podemos dizer que ela tem certa limitação.

Podemos dizer que uma sequência será limitada se a "imagem" de seus termos fica dentro do intervalo de limitação. Tomemos a sequência como exemplo e analisemos seu comportamento:

$$a_n = (-1)^n$$

Tomemos valores para o expoente tais como 1, 2, 3, 4, 5,... Podemos analisar que com valores pares teremos um comando de saída o (1) e atribuindo valores ímpares o comando fica em (-1). Trata-se de uma sequência alternada, para valores de n pares temos uma subsequência com limitante 1 e valores ímpares uma subsequência com o limitante é -1.

Essas limitações às quais foram mencionadas podem ser identificadas tanto graficamente como algebricamente e nos mostra que temos uma sequência formada por duas subsequências cada uma com sua limitação “pois percebemos que para valores tão grandes quanto queiramos o esboço gráfico não ultrapassa seu limitante”

Em outras palavras uma sequência (a_n) é dita limitada superiormente se existir um valor real β que para todo numero natural n, a_n não ultrapassa β. Assim teremos:

$$a_n \leq \beta$$

De forma análoga dizemos que a sequência é limitada inferiormente se existir um valor real α, que para todo número natural n, a_n não ultrapassa α. Assim teremos:

$$a_n \geq \alpha$$

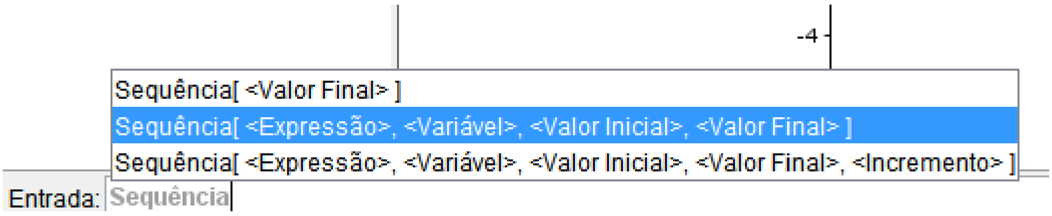
Com isso podemos dizer que, se existirem valores reais α e β, tais que para todo número natural n temos:

$$\alpha \leq a_n \leq \beta$$

E dizemos assim, que a sequência é limitada, pois está contida no intervalo $[\alpha, \beta]$. Uma sequência será limitada se e somente se, for limitada inferiormente e superiormente.

Para a construção desta sequência no Geogebra usamos os seguintes comandos:

No campo de entrada, digite **Sequência** e escolha a segunda opção, conforme abaixo:



Consideremos nossa variável sendo **n.** Em <Expressão>, coloque o seguinte par ordenado: (n, ((-1)^ n)). Dessa forma, teremos pontos plotados no plano cartesiano obedecendo à sequência informada;

Substitua <Variável> por **n;**

Substitua <Valor Inicial> por **1;**

Por fim, substitua <Valor final> por **um valor de sua escolha.**

A sintaxe ficará da seguinte forma:

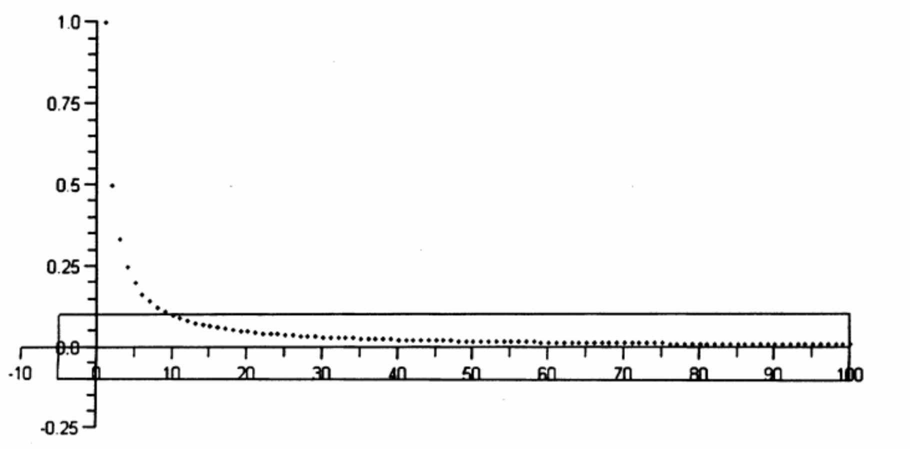
Sequência [(n, ((-1) ^ n)), n, 1, 100]

Crie um controle deslizante com início em 1, final em um número grande e incremento de 1 para o número n (o programa irá lhe informar para essa etapa).

Clicando em cima da sequência de pontos e marcando “habilitar rastro” faz com que você possa modificar o controle deslizante e não perder o caminho que ela está tomando

Sequências Convergentes

Uma sequência converge a um determinado valor se, a partir de certa posição, todos os seus termos estiverem tão próximos quanto queiramos desse valor. Visualmente, seria como se pegássemos um conjunto de réguas, daquelas que utilizamos na escola e, para qualquer largura da régua, por menor que ela seja, existe uma posição a partir do qual todos os pontos ficassem “dentro” da região delimitada pela régua, como ilustrado a seguir.



Analisemos a sequência como exemplo:

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

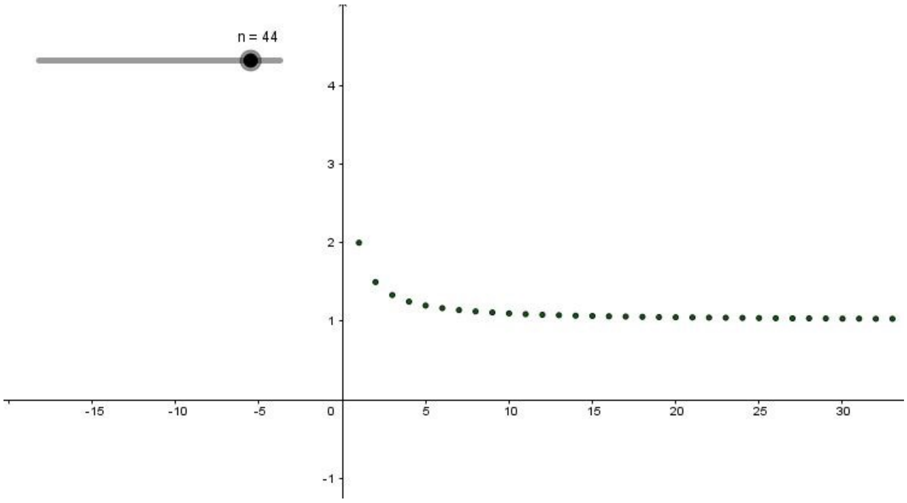
Como vimos no material anterior, tomando o valor de *n* tão grande quanto queiramos, nossa sequência em questão "aproxima-se", converge para 1. Uma definição provisória para convergência de uma sequência pode então ser formulada:

Dada uma sequência a_n, dizemos que seus termos convergem a um determinado valor L, se ao tomarmos valores para n "bem grande" (o que indicaremos por $n \rightarrow \infty$, existe uma posição, que aqui vamos chamar de n_0, a partir da qual posso garantir que a distância entre os termos da sequência e o número L torna-se tão pequena quanto queiramos.

Matematicamente podendo ser representado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

Graficamente



Nossos pontos centrais seriam a representação da convergência da sequência a 1, a sequência de pontos superiores (os quais não ultrapassam 1,5) e inferiores (nas proximidades de 1) seriam a representação de nossa “régua”.

A sequência a_n converge para o número L se para todo número positivo ε existe um inteiro n_0 natural tal que, para todo $n > n_0$ temos que $| a_n - L | < \varepsilon$.

Se esse número L não existe, dizemos que a_n diverge. Se a_n converge para L, escrevemos:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

e chamamos L de limite da sequência.

Uma sequência convergente será limitada superiormente e inferiormente, ou seja, uma sequência para ser convergente sempre será limitada. Com isso podemos acrescentar um item a nossa definição:

Toda sequência convergente é limitada, mas, nem toda sequência limitada é convergente.

O material de apoio apresentado pode ser disponibilizado em partes, conforme o desenvolver das tarefas e a sistematização de conceitos que derivem de sua aplicação e resolução. Em nossa pesquisa surgiram duas tarefas intermediárias, as quais inicialmente não haviam sido pensadas. No desenvolver das tarefas, se o professor perceber a necessidade de aprofundar definições provisórias apresentadas pelos estudantes pode solicitar uma tarefa intermediária para ser resolvida em momento posterior a aula (ser feita em casa). Todas as tarefas ditas "para casa" e que visam exploração de definições rumo à definição formal devem ser discutidas em sala em momento de aula, ou seja, as explicações das resoluções dos estudantes podem servir como ponto de partida para sistematizações de conceitos.

Apresentamos a seguir nossas tarefas intermediárias, fruto de nossa pesquisa, fatores que nos levaram a propor-la a e objetivos.

Tarefas Intermediárias

Tarefa Intermediária 1

A primeira tarefa intermediária foi proposta aos estudantes visando que a definição provisória de limite de uma sequência não seja definida somente em termos de aproximação. O conceito de limite é visto por muitos como um processo dinâmico, enquanto que na comunidade científica é um processo estático. A definição de limite somente em termos de aproximação descarta uma sequência constante, pois, se não se aproxima não terá limite e qual o significado matemático de limite.

Nossa tarefa proposta para ser realizada em casa enunciava:

Tentem apresentar uma descrição para esse comportamento das sequências, esse tende a deve ser apresentado em definição provisória de convergência, ou seja, procurem pensar sobre o seguinte: matematicamente falando, o que significa dizer que $lim_{n \to \infty} a_n$.

No momento de entrega da tarefa o professor pode propor uma discussão com a sala sobre as definições por eles apresentadas, buscando trazer elementos que auxiliem na elaboração da definição provisória. A primeira tarefa intermediária pode ser proposta após o desenvolver da Tarefa 2, buscando que os estudantes tragam mais elementos para sua definição de limite.

Tarefa Intermediária 2

A nova tarefa intermediária pode ser proposta após o momento de aula da aplicação da primeira parte da Tarefa 2 devido à necessidade de garantir alguns aspectos de critério de convergência . A tarefa pode ser solicitada a sua entre na próxima aula, que anteceda o desenvolver da segunda parte da Tarefa 2. Na entrega, será destinado um tempo para uma conversa sobre as definições que eles apresentaram. Em nossa pesquisa o enunciado da tarefa sugeriu: Definir uma sequência convergente respondendo as seguintes perguntas:

(i) O limite pode ser atingido?
(ii) O limite é único?
(iii) Uma quantidade finita de termos pode ser desprezada?
(iv) Uma sequência constante tem limite?

As novas indagações lançadas para os estudantes buscaram “refinar” as suas definições para convergência de uma sequência somente em termos de aproximação, o que não acontece em uma sequência constante. Pode ser realizada pelos mesmos grupos da Tarefa 2, por viabilizar as definições organizadas por eles, buscando recolher as idéias dos estudantes sobre convergência de sequência e que serão sistematizadas no desenvolver da segunda parte da Tarefa 2.

4.3 TAREFA 3

Como terceira tarefa propõe que a notação modular seja trabalhada pelos grupos, que a organização em intervalos seja desenvolvida com o auxilio da tarefa possibilitando aos estudantes sua participação ativa na elaboração de conceitos que envolvem a definição formal de convergência de sequências numéricas.

O desenvolver da tarefa em termos de aproximação auxiliará os estudantes a perceberem a distância (valor absoluto) entre um número e um valor aproximado, trabalhando com intervalos que garantam a arbitrariedade de ε bem como a analisando e relacionando com n_0 que é a posição que a partir dela podemos garantir a convergência de uma sequência. Apresentamos no Quadro 4 a tarefa proposta.

Tempo previsto: 3 aulas.
Conteúdo da aula: convergência de sequência,
Objetivo específico: Elaboração da definição formal de convergência.
Metodologia e Estratégia: A tarefa deve ser proposta em grupos, durante a aplicação da tarefa a atitude do docente como na aplicação das que esta antecedeu é de conversar como os grupos e se necessário criar novas indagações para suas representações, deste modo os auxiliando no desenvolvimento.

Possibilita que todos os elementos trabalhados no desenvolvimento das tarefas anteriores possam ser sistematizados em termos da definição formal de convergência.
Recursos Didáticos: quadro-negro, giz, projetor multimídia, *notebook* com software Geogebra.

Estamos habituados a considerar representações de números reais na notação decimal: 1/100 = 0,01; $\pi = 3{,}14159$...; 1/3 = 0,3333... Estas notações costumam ser denominadas dízimas. Em alguns casos há um algarismo ou grupo de algarismos que se repete indefinidamente(0 em 1/100 a partir da 3ª casa decimal; 3 em 1/3 a partir da 1ª casa decimal); tais dízimas dizem-se periódicas e pode demonstrar-se que são as que representam números racionais (quocientes de dois inteiros) e só essas. Os números $\sqrt{5}$ e π são irracionais e como tal, a sucessão de algarismos presente na dízima não obedece a um padrão de repetição de um grupo de algarismos.

Quando trabalhamos com números como $\sqrt{2}$, é frequente referirmo-nos a "valores aproximados". Por exemplo, 1,4 e 1,41 do mesmo modo quando usamos para $\sqrt{5}$ uma aproximação 2,23. O conceito não se aplica somente a números iracionais: também podemos dizer que 0,33 é valor aproximado de 1/3, ou mesmo que 1 é valor aproximado de 2... De fato, o que é importante ao usar o conceito de "valor aproximado" é referir o "grau de aproximação " de que se trata. Assim, podemos afirmar :

- 2,2 é valor aproximado de $\sqrt{5}$ com um erro menor que 0,1 =10^{-1}
- 2,24 é valor aproximado de $\sqrt{5}$ com um erro menor que 0,01 =10^{-2}

E o que essas frases significam, simplesmente é que a distância (valor absoluto da diferença) entre o número e a aproximação indicada é menor que a quantidade mencionada. Por exemplo:

- $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ ou, de forma equivalente, $|\sqrt{5} - 2{,}2| = \sqrt{5} - 2{,}2 < 2{,}3 - 2{,}2 = 0{,}01$
- $2{,}24 < \sqrt{5} < 2{,}23$ ou, de forma equivalente $|\sqrt{5} - 2{,}24| = 2{,}24 - \sqrt{5} < 2{,}24 - 2{,}23 = 0{,}01$

De um modo geral adotaremos a seguinte definição: um número real x é um valor aproximado ou (aproximação) de outro número real L, com um erro menor que ε, se $|x - L| < \varepsilon$. Aqui ε é um número real positivo dado. Os valores aproximados de um número L com erro menor que ε são exatamente os elementos do intervalo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ centrado em L.

1. Os números da forma $\frac{5}{n}$, com n não-nulo, podem ser tomados como aproximações do número 0.

a) A partir de qual valor de n esse erro de aproximação será menor que 0,1?

b) E menor que 0,0001?

2. Considere agora a sequência $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

a) Tomando uma tira de semi-largura 0,25, a partir de qual termo da sequência podemos garantir que todos os termos subsequentes fiquem dentro da tira?

b) E se a semi-largura for 0,01?

3. O trabalho com as tiras permite analisarmos os termos da sequência a partir de determinada posição, com aproximação de um número L com erro menor que ε. Utilizando essa ideia proponha uma definição de sequência convergente.

4. Considere agora a sequência $a_n = 1 + 3/n^2$.

a) Seus termos podem ser tomados como aproximações para um número L. Qual é esse número?

b) Há alguma posição a partir da qual posição podemos garantir que os termos aproximam L com um erro menor que ε? Explique.

Essa sequência é convergente? Justifique

Quadro 4 - Tarefa 3: Convergência de Sequência
Fonte: autores.

A tarefa traz elementos para a organização da definição formal de convergência, visto que para sua elaboração precisamos garantir $|a_n - L.| < \varepsilon$. Para sua resolução os estudantes devem se organizar em grupos podendo assim discutir entre os pares a organização e resolução dos enunciados. Como potencialidades destaca-se:

- a organização dos intervalos para a garantia de ε ;
- a proposição do n_0;
- a elaboração da definição formal de convergência.

Nossa sequências de tarefas visa à elaboração da definição formal de convergência de sequência numérica, no desenvolver das tarefas elementos que circunscrevem o conceito são abordados, após a aplicação da última tarefa temos elementos que emergiram do desenvolver das tarefas rumo a definição formal.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência de tarefas apresentada trabalha elementos essenciais na organização da definição formal de convergência de sequências numéricas. Seu desenvolver destaca o papel ativo dos estudantes nas resoluções e do docente como mediador durante a aplicação e sistematização da tarefa, contribuindo para o processo de ensino e aprendizagem no qual a compreensão de convergência (limite) não precise ser previamente apresentada para os estudantes/grupos e sim sistematizada no decorrer das aplicações e aulas.

O desenvolvimento dos episódios de resolução de tarefas em nosso ambiente em condições reais de ensino propiciou uma ruptura no formato tradicional das aulas de CDI 1, em que a mudança de atitude tanto da docente, quanto dos estudantes contribuíram no desenvolvimento da disciplina. Nossa organização dos episódios, bem como a elaboração/adaptação de tarefas, requer do docente responsável pela turma uma análise prévia do que pretendemos ao propor-la para a sala. Tais episódios podem abranger temas centrais do curso de CDI 1, buscando que os estudantes tenham uma participação ativa no desenvolver de conceitos partindo da resolução das tarefas.

Acreditamos que em alguns momentos do curso podemos “perder certo tempo” para a aplicação de tarefas que visam à elaboração de conceitos da disciplina. O tempo destinado a resolução das tarefas contribui no desenvolvimento e aprendizagem de conceitos, auxiliando os estudantes no decorrer do curso.

Salientamos por fim, que a proposta apresentada é uma sugestão para o professor, podendo ser adaptada e/ou aplicada conforme seu ambiente real de ensino. Espera-se que a sequência de tarefas possa contribuir com o trabalho docente e na elaboração/organização de conceitos iniciais da disciplina de CDI 1 partindo do estudo de sequências numéricas.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, G.S.S. **Análise Matemática para licenciatura.** 3º ed. Ed. São Paulo: Edgard Bucher Ltda, 2001.

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Porque a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática? **Perspectivas em Educação Matemática**, v. 8, p. 527-546, 2015.

EERDE, D. Van. Design Research: Looking Into the Heart of Mathematics Education. 1st SEA-DR Proceeding. **Proceeding The First South East Asia Design/Development Research (SEA-DR) International Conference**, Sriwijaya University, Palembang, p. 1-11, 2013.

LIMA, G. L. Contextualizando momentos da trajetória de ensino de cálculo na graduação em matemática da USP. **Educação Matemática e Pesquisa**, v. 16, n. 1, p. 125-149, 2014.

MATTA, A. E. R.; DA SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa metodologia para pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século xxi. Revista da FAEEBA - Educação e Contemporaneidade, v. 23, n. 42, 2014.

MESTRE, C; OLIVERIA, H.M. Uma experiência de ensino no 4.º ano conduzida no duplo papel de professora-investigadora A teaching experiment in the 4th grade conducted in the dual role of teacher and researcher. **Quadrante,** v. xxv, nº2.2016.

MOLINA, M., CASTRO, E. & CASTRO, E. (2007). Teaching experiments within design research. The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences, 2(4), 435-440.

PALHA, S. A. G. Shift-Problem Lessons: Fostering Mathematical Reasoning in Regular Classrooms. **Research Institute of Child Development and Education**, University of Amsterdam, The Netherlands, v. 32, p. 142-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K.; VAN HOUT-WOLTERS, B. Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. **The Journal of Mathematical Behavior**. Springer, v. 32, p. 141-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K. The effect of shift-problem lessons in the mathematics classroom. **Internacional Journal os Science and Mathematics Education**. Ministry of Science and Technology, Taiwan, v. 13, p. 1589-1623, 2015.

RASMUSSEN, C; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM**, v. 46, p. 507-515, 2014.

WEIGAND, H. G. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM,** v.46, p. 603-619, 2014.