UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA - PPGMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

NÉLVIA SANTANA RAMOS

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS COMO DESENCADEADORAS DO CONCEITO DE CONVERGÊNCIA: EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS

DISSERTAÇÃO

LONDRINA
2017

NÉLVIA SANTANA RAMOS

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS COMO DESENCADEADORAS DO CONCEITO DE CONVERGÊNCIA: EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

LONDRINA
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

R175s Ramos, Nélvia Santana
Sequências numéricas como desencadeadoras do conceito de convergência: episódios de resolução de tarefas / Nélvia Santana Ramos. - Londrina : [s.n.], 2017.
126 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Londrina, 2017.
Bibliografia: f. 94-97.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Sequências (Matemática). 3. Cáculo integral. 4. Cálculo diferencial. I. Trevisan, André Luis, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Cristina Benedeti Guilhem - CRB: 9/911

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina/Cornélio Procópio
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

TERMO DE APROVAÇÃO

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS COMO DESENCADEADORAS DO CONCEITO DE CONVERGÊNCIA: EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS

por

NÉLVIA SANTANA RAMOS

Esta dissertação foi apresentada às 14h00min horas do dia 13 de dezembro de 2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Londrina. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho APROVADO.

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Prof. Dr. André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

____
Profª. Drª. Marcele Tavares Mendes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

____
Profª. Drª. Andréia Büttner Ciani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

____
Profª. Drª. Claudete Cargnin
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Londrina, 13 dezembro de 2017.

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática”.

Dedico este trabalho a minha família e amigos, pelo apoio durante minha caminhada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por permitir e me guiar no transformar de um sonho em realidade.

À minha família por todo o amparo durante o processo, entendendo meus momentos de angústia. Este apoio foi fundamental no decorrer do processo desta pesquisa.

Ao meu amado marido Sandro por seu apoio incondicional em todos os momentos do mestrado, me confortando e incentivando diante das dificuldades apresentadas no caminho. Agradeço ainda pela compreensão de minha ausência ao morar em outra cidade, durante o primeiro ano do mestrado e, claro, por me confortar em todos os momentos em que as lágrimas se desprendiam de meus olhos.

Aos meus amados filhos Josten e Ingrid por todo amor e carinho a mim dedicado nos momentos de angústia.

Ao professor Dr. André Luis Trevisan, por estar sempre presente me apoiando e orientando no decorrer da pesquisa, por acreditar em minha competência para a realização do trabalho, mesmo sabendo de minhas dificuldades e limitações.

Às professoras Drª. Marcele Tavares Mendes, Drª. Andréia Büttner Ciani, Drª. Claudete Cargnin e Drª. Pamela Emanueli Alves Ferreira por terem aceitado fazer parte da minha banca de defesa.

Aos meus amigos e docentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT, pelos momentos de discussões e trocas de experiências.

Aos professores Douglas e Josimar pelos momentos dedicados a conversarem sobre minha pesquisa.

Aos amigos que não mediram esforços para me auxiliarem durante toda a caminhada.

Ao projeto de edital Universal do CNPq - Processo 457765/2014-3.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram em minha caminhada de pesquisa.

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.

Paulo Freire.

RESUMO

RAMOS, Nélvia Santana. **Sequências Numéricas como desencadeadoras do Conceito de Convergência: episódios de resolução de tarefas.** 2017. 126 fls. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2017.

A presente dissertação resulta do processo de elaboração de uma proposta de um conjunto de tarefas para o estudo inicial de sequências numéricas e critérios de convergência em episódios de resolução de tarefas, como desencadeadoras do ensino de limite no contexto de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) 1. Elencou-se como objetivo geral da pesquisa a proposição de tarefas que oportunize aos estudantes a exploração de ideias necessárias à compreensão do conceito de limite, em especial tarefas que possibilite a exploração intuitiva de elementos necessários à formulação do conceito de convergência de uma sequência numérica. Adota pressupostos da metodologia conhecida como *Design Research* e da Educação Matemática Realística *RME*, tomamos na análise do processo a Reinvenção Guiada enquanto norteadora do trabalho provenientes da aplicação dessa proposta em turmas regulares de um curso de Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) do campus Londrina e Cornélio Procópio. Após a aplicação dos ciclos de pesquisa e análise retrospectiva, elencaram-se três tarefas para compor o produto final. Por se tratar de um mestrado no âmbito profissional intencionou-se a elaboração de um caderno de tarefas (produto educacional) que após seu redesenho e aplicação, disponibilizamos como resultado de nossa proposta de pesquisa.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas Matemáticas. Sequências Numéricas.

ABSTRACT

RAMOS, Nélvia Santana. **Numerical Sequences as triggers of the Convergence Concept: episodes of task resolution**.. 2017. 126 fls. Dissertation (Professional Master's in Mathematics Teaching) - Federal Technology University - Paraná. Londrina, 2017.

The present dissertation results from the process of elaborating a proposal of a set of tasks for the initial study of numerical sequences and convergence criteria in episodes of task resolution, as triggers of limit teaching in the context of Differential and Integral Calculus (CDI) 1. The general objective of the research was to propose tasks that would allow students to explore ideas necessary to understand the concept of limit, especially tasks that allow the intuitive exploration of elements necessary to formulate the concept of convergence of a sequence numerical value. It adopts assumptions of the methodology known as Design Research and RME Realistic Mathematics Education. In the analysis of the process, Guided Reinvention as the guiding principle of the work from the application of this proposal in regular classes of an Engineering course of the Federal Technological University of Paraná (UTFPR) of the Londrina campus and Cornelio Procopio. After the application of the research cycles and retrospective analysis, three tasks were included to compose the final product. Because it is a master's degree in the professional field, the intention was to prepare a workbook (educational product) that after its redesign and application; we made available a result of our research proposition.

Keywords: Mathematics Teaching. Differential and Integral Calculus Teaching. Mathematical Tasks. Numerical Sequences.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa está envolvida em um projeto maior de edital Universal do CNPq - Processo 457765/2014-3, que se intitula "Investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino", sob a coordenação do orientador deste trabalho.

A aprendizagem da Matemática, para muitos estudantes, se mostra um processo "árduo", fazendo que limitem suas ações a apenas reproduzir processos em vez de aplicar conceitos. Não é diferente no caso do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), diversas são as dificuldades dos estudantes nessa disciplina uma vez que serem "expostos" a conceitos, demonstrações e aplicações não é garantia de que estejam aprendendo ou se sentindo motivados/interessados pela disciplina.

Lima (2014) ressalta que "por muito tempo acreditou-se que os alunos ao chegarem ao Ensino Superior teriam motivação em relação às disciplinas do curso por eles escolhidos". Bastava que "o professor tivesse domínio para que os alunos aprendessem e a ideia de conhecimento acabado e de que basta o transmitir para os estudantes aprenderem pouco a pouco foi abandonada" (p. 128). No entanto, nem a motivação dos estudantes quanto o "domínio" dos professores não podem garantir o sucesso na sua aprendizagem. Aos estudantes deve ser oportunizado um ambiente educacional que contribua com o desenvolvimento de conceitos e também com uma participação ativa nesse processo.

Em uma espécie de "crítica ácida", Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014, p.508) apontam que "muito já se sabe sobre as dificuldades apresentadas por estudantes na disciplina de Cálculo" e, diante disso, questionam: "em que direção precisamos ir?". Os autores destacam a importância de pesquisas sobre a disciplina, visto que, no mundo, milhares de estudantes que iniciam o curso a cada ano não o completam de forma exitosa, embora, nas últimas décadas, a pesquisa em CDI venha contribuindo para melhorar a compreensão da aprendizagem de conceitos, como limite, derivada e integral, mas pouco disso efetivamente chega à sala de aula.

O presente trabalho procura de algum modo, contribuir nesse sentido. Nosso objetivo é discutir o processo de organização de tarefas elaboradas/adaptadas de livros didáticos que possam ser trabalhadas em ambientes reais para o ensino de CDI, que contribuam para a aprendizagem dos estudantes e possam ser utilizadas/adaptadas por docentes em suas aulas.

Inspirados nos trabalhos de Palha (2013), de Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e de Palha, Dekker e Gravemeijer (2015), propomos a organização de ambientes educacionais pautados em *episódios de resolução de tarefas* (adaptação do termo em inglês *shift problem lessons*, cunhado por esses autores). Quando nos referimos à organização de um ambiente que leve em conta as condições reais de ensino, estamos considerando *ambiente* não a “lugar” apenas, mas um contexto que circunscreve nosso trabalho (os estudantes e suas expectativas, os materiais didáticos, o espaço físico e a infraestrutura, o professor e suas concepções) e suas condições reais. Embora tenhamos uma sala de aula heterogênea (tanto em termos do conhecimento “trazido” pelo nosso estudante, quanto das suas expectativas frente à disciplina de CDI) e um plano de ensino bastante extenso a cumprir – condições com as quais, em geral, todo professor se depara – intentamos que nossos estudantes tenham participação ativa no desenvolvimento do trabalho pedagógico, envolvam-se com as tarefas propostas e elaborem conhecimento matemático inerente ao curso.

Nossa organização segue na contramão da forma tradicional de um curso de CDI, na qual é apresentado um novo conceito, seguido de demonstrações, exemplos e listas de exercícios. O que realizamos em nosso ambiente de ensino de CDI em condições reais de ensino é um “arranjo” de tarefas que antecedem alguns pontos-chave da disciplina em episódios de resolução de tarefas. Entendemos que uma reorganização dessa estrutura não compromete a ementa do curso, visto que o plano de ensino será organizado em conformidade a ela.

Nessa perspectiva, iniciamos o curso com o estudo de sequências respaldado nas ideias de Weingand (2014). O autor defende a reestruturação dos cursos de CDI, partindo do estudo de funções de domínio discreto (sequências), o que possibilita o estudo de sequências de diferenças (base intuitiva para derivada) e somas parciais (base intuitiva para integral), as possibilidades destacadas não são o foco desta pesquisa e sim elementos que justificam nossa proposta e tomamos como ponto de partida na organização de nossa pesquisa partindo do estudo de sequências numéricas e sua convergência para depois se estender os conceitos para funções de domínio contínuo, abordagem que, na concepção do autor, pode minimizar as dificuldades apresentadas pelos estudantes, uma vez que, em geral, chegam ao Ensino Superior pensando “de forma discreta”.

O autor ressalta, ainda, o estudo de sequências como precursor do ensino de limites, derivada e integral, o que viabiliza que um novo conteúdo possa ser explorado de forma intuitiva, sem que o professor precise apresentar uma definição formal, deixando a sistematização para um segundo momento.

Concordamos com Weigand (2014) que explicações de novos conceitos não precedam nossas tarefas, dessa forma os estudantes são convidados a desenvolver ideias e elaborar estratégias para a resolução, mobilizando diferentes representações. Assim, em nossa proposta, elaboramos uma sequência de tarefas que, quando possível, integrem recursos tecnológicos, como o uso do *software* Geogebra, "possibilitando a elaboração de novos tipos de tarefas, o uso de diferentes terminologias, o surgimento ou aprimoramento de perspectivas teóricas, possibilitando ou reorganizando as dinâmicas em sala de aula" (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015, p. 37).

No intuito de pensar em que "direção podemos ir" tomamos como objetivo geral desta pesquisa a elaboração de tarefas que oportunize aos estudantes a exploração de ideias necessárias à compreensão do conceito de sequência e sua convergência que anteceda o estudo de limite de funções em nosso ambiente de aprendizagem em episódios de resolução de tarefas. Em outras palavras, que a exploração dessas tarefas envolvendo sequências numéricas seja desencadeadora do ensino de limite de funções reais de variável real. A questão de investigação da pesquisa partiu de nossa própria inquietação enquanto professores de CDI: *o trabalho com episódios de resolução de tarefas pode possibilitar aos estudantes problematizar ideias que circunscrevem o conceito de convergência de sequências numéricas?* Especificamente pretendemos:

- Realizar um estudo sobre tarefas e ambiente de aprendizagem.
- Selecionar/criar/adaptar tarefas para aulas de CDI que antecedam o estudo de limite.
- Apresentar, na forma de um caderno, as tarefas e o material de apoio aos estudantes, ou seja, uma proposta de ensino por meio dessas tarefas.

Com vistas a alcançar esses objetivos, o trabalho está assim estruturado: no segundo capítulo, apresentamos o referencial teórico da abordagem para o ensino de matemática sobre competências que emergem da resolução de tarefas, seus elementos organizadores e sua contribuição em nosso ambiente. A reorganização das aulas de CDI 1 será iniciada com o estudo de sequências, respaldada em Weigand (2014), suas contribuições para o ensino de Cálculo e apresentamos nossas tarefas como elementos organizadores de nossa pesquisa e uma apresentação de sequências numéricas e seu ensino.

O terceiro capítulo apresenta nossa abordagem metodológica em *Design Research* de caráter cíclico embasado em Van Eerde (2013) em sua Pesquisa de Desenvolvimento, traduzida para a língua portuguesa por Barbosa e Oliveira (2015), Matta, Silva e Boaventura (2014), Mestre e Oliveira (2016), Molina, Castro e Castro (2007). Os autores a tomam como uma metodologia de pesquisa que aproxima o professor e pesquisador do ambiente de sala de aula por envolver delineamento, desenvolvimento e avaliação de todo o processo de elaboração, contribuindo para o desenvolvimento de novos artifícios de ensino que visem à aprendizagem dos envolvidos. Apresentamos a coleta de dados e as ideias que circunscrevem o conceito de sequências e critérios de convergência.

O quarto capítulo está estruturado na apresentação e discussão dos episódios e análise das tarefas propostas. No quinto capítulo, organizamos uma análise retrospectiva dos episódios e, no sexto capítulo, apresentamos nossas considerações referentes à finalização do trabalho.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA (E DE CDI)

Este trabalho baseia-se nos princípios da Educação Matemática Realística (RME[1]), abordagem de ensino que teve origem na Holanda no final da década de 1960, inspirada nas ideias do matemático Hans Freudenthal. Opondo-se ao formalismo da Matemática Moderna, Freudenthal entende Matemática como uma atividade natural e social, cuja evolução acompanha o indivíduo e as necessidades de um mundo em expansão, uma atividade de organização ou matematização (TREVISAN, BURIASCO, 2015; FERREIRA, CIANI, OLIVEIRA, 2014). Portanto, na perspectiva da RME,

> [...] a Matemática nunca deve ser apresentada aos estudantes como um produto pronto e acabado; ao contrário, precisa ser conectada à realidade, próxima aos estudantes e relevante para a sociedade, a fim de tornar-se um valor humano. Nessa perspectiva, os estudantes devem ser tomados como participantes ativos do processo educacional. A eles devem-se propor situações que demandam organização matemática, da qual emergirão os conceitos; deve ser dada a oportunidade de reinventar a Matemática por meio de um processo de matematização da realidade (TREVISAN; BURIASCO, 2015, p.170).

Relacionar a Matemática com a realidade proporciona que os estudantes participem da organização de estratégias para a confecção das tarefas, e a sistematização auxilia a elaborar os conceitos matemáticos da disciplina. Essa abordagem da matemática refere-se a situações que sejam “imagináveis”. Não é aplicada apenas a situações cotidianas, pois nem sempre uma situação real tem esse sentido para os estudantes. Situação realística é entendida como algo imaginável na qual aprender faz sentido E ao estudante, na concepção da RME elaborar e aplicar matemática em situações nas quais esta matemática se faça necessária.

Silva (2015), embasado na RME, apresenta em sua pesquisa que um trabalho pautado na *reinvenção guiada* oportuniza aos estudantes a participação

---

[1] Do inglês, *Realistic Mathematics Education*.

ativa na elaboração do conhecimento matemático, não no sentido de "inventar" uma nova matemática, mas de tornarem-se parte do processo. Busca-se, assim, que alcancem níveis mais elaborados de entendimentos a partir de seus conhecimentos, informais ou não. Desse modo, o papel do professor é o de orientá-los (guiar), não fornecendo respostas prontas, mas indagações que os auxiliem no processo de elaboração, uma vez que:

> [...] cabe ao estudante, além de outras atividades, justificar suas estratégias de resolução e escutar com atenção os outros estudantes, tentar entender as diferentes estratégias, pedir esclarecimentos nas resoluções, participar das discussões, participação ativa, reflexão e interesse em novas estratégias de resolução (SILVA, 2015, p. 46).

Por meio da reinvenção guiada, os estudantes têm a oportunidade de organizar seus pensamentos e estratégias para o desenvolvimento da tarefa. Assim, um novo conceito é elaborado a partir de suas representações, ao contrário do processo inverso, no qual o conceito é apresentado, demonstrado e aplicado em lista de exercícios para fixação (esquema de uma aula de CDI "usual"). Os estudantes, nesse contexto, são participantes ativos na organização do novo conhecimento matemático. As tarefas devem oportunizar condições de explicitarem suas estratégias para a resolução de modo que essa interação possibilite a elaboração/organização de conceitos referentes à disciplina. Os estudantes

> "[...] devem aprender a analisar, organizar e aplicar Matemática de forma flexível em situações que sejam significativas para eles, e os problemas devem ser acessíveis, convidativos, e que "valham a pena" serem resolvidos". Também devem ser desafiadores, deixando claro para os estudantes por que algo está sendo perguntado (TREVISAN; BURIASCO, 2015, p.177).

O papel do professor é elaborar boas tarefas e relacioná-las com seu objetivo. Na proposição, elaboração e aplicação de uma tarefa, deve-se levar em conta o que se pretende com sua aplicação, bem como as estratégias que possam ser utilizadas pelos estudantes. Nesse sentido, o professor elenca antecipadamente estratégias/direcionamentos que possam ser abordadas pelas tarefas, em que os conteúdos não componham uma lista rígida, mas possibilidades a serem desenvolvidas a partir dela. Desse modo, com base nas representações dos estudantes ao trabalharem com a tarefa, o professor pode explorar os conteúdos matemáticos partindo de seus conhecimentos prévios (SILVA, 2015) e das definições que elaboraram provisoriamente.

Nossa proposta de pesquisa visa à elaboração de uma sequência de tarefas que propicie aos estudantes que cursam a disciplina de CDI 1 desenvolver conceitos sobre sequências numéricas e sua convergência, que, no decorrer do curso, serão refinados para o conceito de limite infinito de uma função e, mais tarde, limite de uma função em um ponto.

Na organização de episódios de resolução de tarefas, os estudantes são convidados a participar do desenvolvimento de estratégias de resolução em pequenos grupos de trabalho. A dinâmica de sala de aula é voltada para suas justificativas e, perante suas conjecturas, o conceito formal é elaborado e gradativamente sistematizado em conjunto (professor e estudantes). Desse modo, "parte-se do pressuposto de que as tarefas podem funcionar como pontos de ancoragem na reinvenção da matemática pelos estudantes, auxiliando a estabelecerem relações entre o conhecimento informal e a matemática formal" (MENDES; TREVISAN, 2014, p.2).

Assim,

> [...] novos pontos de vista a respeito da disciplina de CDI pedem por tarefas que favoreçam ao estudante o desenvolvimento de competências de conexão e reflexão, para além da mera reprodução e memorização. Tais tarefas devem ter como pressuposto o fato de que o conhecimento matemático mostra-se "dinâmico e construído a partir das relações, justificativas, análise e validações estabelecidas pelos envolvidos e não como algo pronto e acabado". Os estudantes devem ser incentivados a justificarem seus pensamentos por meio da exploração de situações, questionamentos e conjecturas (TREVISAN; MENDES, 2013, p. 137).

Com vistas a subsidiar a organização de episódios de resolução das tarefas, elas devem ser planejadas para que não sejam precedidas de exemplos, ou seja, não se espera que o estudante aplique conceitos similares a enunciados já resolvidos nem procure exemplos semelhantes apresentados pelos livros didáticos. Buscamos tarefas não rotineiras que oportunizem encaminhamentos para a elaboração de conceitos que, no decorrer do curso, são sistematizados e uma definição formal é construída, partindo das representações desenvolvidas.

A proposição de tarefas cria situações que favorecem o desenvolvimento matemático, na proposta de pesquisa a respeito do conceito de convergência de uma sequência (como fornecendo uma base intuitiva para a futura compreensão do conceito de limite) e do desenvolvimento de competências que provenham de sua exploração.

2.2 SOBRE TAREFAS MATEMÁTICAS

As tarefas que compõem o *corpus* desta pesquisa, desenvolvidas em nosso ambiente pautado em episódios de resolução de tarefas, devem proporcionar aos estudantes a elaboração/organização do conhecimento matemático inerente à disciplina, auxiliando no desenvolvimento de conceitos a partir delas. Apresentam em nosso ambiente um papel primordial na organização e na dinâmica das aulas de CDI 1, visto que novos conceitos são sistematizados partindo delas. Nesta sessão, apresentamos uma breve revisão de literatura com as perspectivas de diferentes autores no intuito de caracterizar tarefas com indicativos de elementos para sua elaboração e análise de dados.

Para Ponte (2014, p.14), as “tarefas são elementos organizadores de quem aprende, sendo em sua maioria propostas por professores e, uma vez propostas, devem ser interpretadas pelos alunos podendo originar atividades diversas”. Assim sendo, o autor afirma que

> Uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a atividades diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior (PONTE, 2014, p.16).

Ponte (2014) ressalta que a noção de tarefa não apresenta muito interesse quando baseada na exposição magistral do professor e que, em contrapartida, a valorização do papel ativo do aluno na aprendizagem é fundamentada nessa noção, sendo as tarefas o elemento organizador da atividade de quem aprende. Nessa perspectiva, para o autor, a elaboração de tarefas é um processo fundamental no ensino de Matemática. Sua construção deve priorizar a formulação e o raciocínio matemático, valorizando a experiência dos alunos e possibilitando o pensamento, não como algo pronto e acabado, mas sim inerente à atividade humana.

No desenvolver das tarefas, os alunos têm a possibilidade de relacionar suas experiências anteriores, apresentar uma linha de raciocínio, organizar sua resolução de modo autônomo ou em grupo. Nesse contexto, cabe ao professor a proposição de boas tarefas (FERREIRA; BURIASCO, 2015, p.461):

> [...] as tarefas devem ser pensadas quanto aos possíveis métodos de resolução, os conceitos envolvidos, a múltiplas respostas que emergem dos estudantes, bem como sua familiaridade com a tarefa, o que lhe é solicitado em relação a conteúdo/competências, sendo um recurso necessário que o professor precisa conhecer.

A ideia de trabalhar com tarefas de matemática respaldam-se no argumento de que

> [...] elas podem propiciar, mais fortemente, aos estudantes produzir conhecimentos a partir de situações já conhecidas, familiares, imagináveis, com as quais possam produzir significado e, consequentemente, aprender "matemática". Nesse sentido, ao aluno é oportunizado um contato mais íntimo com a matemática (FERREIRA; CIANI; OLIVEIRA, 2014, p. 121-122).

Assim, as tarefas propostas devem oportunizar aos estudantes a participação ativa na construção de seu conhecimento matemático, de forma que eles tenham a oportunidade de explicitar seus encaminhamentos de resolução tanto em grupos como para a sala. Em especial, em nosso trabalho buscamos a organização e a análise de tarefas de modo que, a partir delas, possam emergir conceitos referentes à disciplina de CDI 1.

2.3 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E SEU ENSINO

Nos cursos que têm em sua grade curricular a disciplina de CDI, são inúmeros os relatos referentes ao alto índice de reprovação. Tal percepção também faz parte da experiência da autora enquanto docente da disciplina, enquanto professora do "chão da sala de aula", o que gera certa inquietação e a busca por meios que favoreçam a aprendizagem dos estudantes.

Para o desenvolvimento da proposta que dá origem a este trabalho, apoiamo-nos nas ideias de Weigand (2014, p. 603). Segundo o autor,

> [as] dificuldades que os alunos apresentam sobre a definição formal de limite e derivada já são sabidas. Eles até conseguem utilizar a definição em um dado contexto, resolver problemas de um nível formal, mas falta uma avançada compreensão dos conceitos.

Essa falta acarreta dificuldades que são “carregadas” pelos estudantes ao longo do curso, estes buscam incessantemente a aplicação de modelos prontos, de reprodução. Quando lhes é proposta uma tarefa para a qual somente a reprodução não dá conta, a falta da compreensão da definição formal é evidenciada.

Nas últimas décadas, Weigand (2014) sintetizou vários resultados de pesquisas sobre ensino, aprendizagem e compreensão do conceito de limite, dos quais destacamos dois.

- A compreensão formal do conceito de limite é um desafio para os alunos, pois exige visualizações e explicações que utilizam diferentes representações, indo além da representação simbólica.
- Compreender o processo de construção numérica e gráfica e de cálculo de limites torna-se essencial para a compreensão do conceito além de uma definição formal, o que pode ser conduzido por visualizações no computador.

O autor propõe uma abordagem discreta para trabalhar com derivadas, que decorre do estudo de sequências de diferenças, combinada com uma ideia intuitiva de convergência de sequências. Defende um trabalho inicial do CDI partindo do estudo de sequências (que são funções cujo domínio é o conjunto dos naturais) para depois ser apresentado o estudo de funções nos reais e enfatiza algumas razões para revitalizar o conceito de sequência na matemática escolar:

- Muitos problemas da vida real permitem sua representação matemática por meio de sequências.
- Problemas matemáticos podem ser resolvidos com sequências especiais.
- Algoritmos de aproximação, como o método de Newton no cálculo de zeros de funções, são baseados em iterações com sequências.
- As sequências são ferramentas para o desenvolvimento de processos em domínios contínuos, tais como o quociente de diferenças que pode ser tomado como base para o conceito de diferencial, ou as

> somas parciais de termos de uma sequência como contexto para o cálculo integral.

Apresenta, assim, uma abordagem para o ensino de CDI partindo do discreto para o contínuo, desenvolvendo o conceito de variação a partir de uma discussão de representações de sequências como funções discretas. Nesta abordagem,

> [...] o conceito de limite não é apresentado no início, o conceito de taxa de variação é desenvolvido usando exemplos discretos. Alterando gradualmente as ações discretas, os processos de limite são compreendidos por ações passo a passo, portanto tornando mais fácil entender seu conceito (WEIGAND, 2014, p. 607).

Destaca a importância da utilização de recursos tecnológicos, uma vez que possibilitam aos estudantes transitarem entre diferentes representações, como simbólicas, numéricas e gráficas. Isto auxilia na representação de sequências particulares definidas tanto pelo seu termo geral quanto recursivamente. Apoiados na abordagem apresentada por Weigand (2014) buscamos tarefas que oportunizassem o desenvolver do estudo de sequências numéricas, partindo de uma abordagem discreta, cuja definição de convergência pudesse ser construída formalmente em um segundo momento.

Na elaboração de nossas tarefas, levamos em conta que “não precisamos apresentar uma definição formal do conceito com antecedência e sim, partindo do estudo de sequências, pode sistematizar conceitos centrais da disciplina; desta forma podemos revitalizar os cursos de Cálculo” (WEIGAND, 2014, p. 605). Desse modo, iniciamos o curso com o estudo de sequências e sua convergência que, no decorrer as aulas de CDI, são tomadas como ponto de partida no estudo de limite de uma função, da derivada e da integral.

Usualmente, o estudo de limite é proposto nos livros de CDI[2] no início do curso, logo após um estudo sobre funções. Segue-se o trabalho com as derivadas, partindo de uma exploração inicial do problema da reta tangente a uma curva e, por

---

[2] Conforme Leithold (1994), Stewart (2006), Anton (2007), Hugges-Hallet (2008), literaturas usualmente citadas nos planos de ensino da UTFPR.

fim, o estudo de integrais, problematizadas a partir do cálculo da área sob uma curva.

Stewart (2006) apresenta uma característica diferenciada em relação aos demais livros, pois "resvala" no estudo de sequências, antecedendo a abordagem de funções. Aborda o "Paradoxo de Zenon", com o problema de Aquiles e a tartaruga. O fato de a tartaruga ter uma vantagem inicial em uma corrida com Aquiles e a discussão daí gerada desafiar o senso comum, pois parece que, indefinidamente, a tartaruga estaria à frente. Se Aquiles começasse na posição a_1 e a tartaruga em t_1, quando ele chegasse em $a_1 = t_1$, ela estaria em t_2, ou seja, sempre estaria uma posição à frente.

Esse exemplo, que envolve um caso particular de sequência (monótona[3]), é utilizado pelo autor para generalizar o conceito de limite de uma sequência, sem problematizar aspectos importantes do estudo, o que pode gerar obstáculos à sua compreensão. Um equívoco bastante frequente cometido por estudantes, que pode ser reforçado por esse exemplo, é associar a convergência de uma sequência à condição de monotonicidade. Outro fato é ter limite igual a 0, sendo esse um número que não pertence à imagem dessa sequência.

Em continuidade, apresenta discussões nas quais o cálculo de limite surge, seja no problema de encontrar a área de uma região, a tangente a uma curva, a velocidade de um carro ou a soma de uma série infinita. Destaca, ainda, que "poderíamos definir o cálculo como aquele ramo da matemática que trata de limites" (STEWART, 2006, p. 9). Assim, mesmo, historicamente, o conceito de limite tendo surgido para a sistematização de derivadas e integrais, os cursos de CDI 1 iniciam-se com seu estudo, ou seja, há uma inversão histórica de conceitos, o rigor e a formalização são apresentados no início do curso quando, historicamente, acontece como uma conclusão de todo o processo.

A definição de convergência de sequências e o conceito de limite de uma função envolvem ideias sofisticadas, as quais precisam ser problematizadas com os estudantes, tais como: (i) a distância entre os termos da sequência que se tornam menores à medida que tomamos valores maiores de n; (ii) a notação modular que

---

[3] Uma sequência é dita monótona quando apresenta um único comportamento, crescente ou decrescente.

representa essa distância, entre os termos consecutivos ; (iii) a arbitrariedade de n_0, a partir da qual garantimos que a distância entre os termos de uma sequência e um número "*L*" torna-se menores que um "épsilon"; (iv) o fato de que podemos "desconsiderar" uma quantidade finita de pontos da sequência se garantirmos que, a partir de certa posição, seus termos tenham um comportamento que garanta a convergência.

Concordamos com Nunes (2001), Santos e Przenioslo (2005), Roh (2008) e Weigand (2014) que o desenvolver de tarefas que abordem o conceito de sequência pode auxiliar na disciplina de CDI 1. Resultados dessas pesquisas, que embasam as formulações das nossas tarefas, são descritos sucintamente a seguir, finalizando o referencial teórico deste trabalho.

Uma proposta envolvendo o estudo de sequências é apresentada por Nunes (2001). A autora apresenta um conjunto de tarefas envolvendo sequências numéricas que visam auxiliar os estudantes no desenvolver de relações entre o comportamento de uma sequência e sua convergência; e ressalta que "os estudantes focam apenas na aplicação de procedimentos matemáticos e preferem estes em lugar de abordagens mais teóricas, pela dificuldade em dar significado ao conceito" (NUNES, 2001, p.11).

As tarefas abordadas pela autora visam à análise do comportamento das sequências, cálculo infinitesimal e critérios de convergência. A proposta de trabalhar com um conjunto de tarefas representam uma ruptura na prática pedagógica tradicional, favorecendo uma nova dinâmica de sala de aula, exigindo, assim, uma mudança de atitude tanto dos professores quanto dos alunos. A autora conclui que

> [...] o modelo *dinâmico monótono* que os alunos apresentam quanto ao critério de convergência como um único comportamento e com movimento está muito presente nas descrições dos alunos onde supõem que uma sequência constante não converge devido a seus termos não se aproximarem de nenhum número (NUNES, 2001, p.77).

Santos (2005) descreve em sua pesquisa as dificuldades apresentadas por estudantes ao conceberem a convergência de uma sequência, somente a partir de exemplos que se restringem a casos monótonos, com isso desprezam as sequências não monótonas. Ressalta as dificuldades epistemológicas relacionadas à noção de limite existente em alunos que já haviam cursado a disciplina de CDI, justamente ao não conceberem processos infinitos e somente finitos. Estas dificuldades evidenciam a associação que os alunos fazem do conceito de limite a um movimento físico de “aproximação”, enquanto na comunidade científica, o conceito é concebido de maneira estática.

Prezenioslo (2005) apresenta uma proposta de abordagem didática envolvendo o estudo de sequências, buscando auxiliar no desenvolvimento de conceitos incompletos, e, em alguns casos, equivocados, apresentados pelos estudantes sobre limites de uma sequência, tais como:

(i) admitem o limite de uma sequência em termos de “aproximação”;
(ii) comportamento monótono no critério de convergência;
(iii) a garantia de finitos termos da sequência “aproximarem-se de um valor”.

Analisando os conceitos apresentados pelos estudantes e ressaltados na pesquisa de Prezenioslo (2005), podemos destacar a exclusão de uma sequência constante apresentada no item (i), pois, se não se aproxima não converge; sequência que tem comportamento oscilatório, ou seja, não monótona, também é descartada; em (ii); bem como uma sequência definida por partes, com subsequências convergentes em que a sequência diverge, não é contemplada na descrição (iii).

Ao encontro dessas ideias, Roh (2008) ressalta que muitos conceitos matemáticos dependem da noção de limite e os equívocos apresentados pelos estudantes, ao não conceberem processos infinitos, somente finitos, na resolução de tarefas que envolvam o conceito, acarreta na falta de compreensão do processo de infinito, o que gera uma confusão quanto ao limite de uma sequência ou função apenas como processos de aproximação.

Respaldados na literatura apresentada, nossas tarefas foram elaboradas, aplicadas, redesenhadas para a disciplina de CDI 1 e desenvolvidas partindo do estudo de sequências com diferentes comportamentos e representações, bem como critérios de convergência.

Caminhamos ao encontro de Prezenioslo (2005), o qual propõe que o estudo de sequências cria possibilidades para os alunos compreenderem o conceito de limite, permitindo elaborar um conceito mais bem fundamentado, desmistificando processos dinâmicos de “aproximar-se” ao processo estático, destacando as sutilezas da definição formal.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA: DESIGN RESEARCH

Nossa pesquisa é uma investigação de cunho qualitativo, permitindo a flexibilidade do pesquisador. A questão fundamental é a descrição detalhada e a interpretação de todo o processo, do que aconteceu, não sendo definida de antemão a busca de um “resultado final”. Nesse sentido,

> a existência de um produto final que preencha as exigências de um trabalho competente depende muito mais da forma como o estudo é executado e da facilidade relativa à expressão conceptual e à escrita parte do investigador do que da especificidade do plano de investigação. Não admira que os avaliadores de propostas qualitativas tendam a dar muito peso ao trabalho anterior de autores para a avaliação das possibilidades de sucesso do projeto proposto (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p.107).

Esta pesquisa faz parte de em um projeto maior, intitulado “Investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino”, sob a coordenação do orientador deste trabalho. Conta também com a participação de outros docentes pertencentes ao Programa de Mestrado no qual este trabalho foi desenvolvido. Adota pressupostos da metodologia conhecida como *Design Research,* a qual tem sua tradução para a língua portuguesa como *Pesquisa de Desenvolvimento* por Matta, Silva e Boaventura (2014) e Barbosa e Oliveira (2015), que assim a descrevem:

> [...] podemos dizer que uma pesquisa de desenvolvimento refere-se àquelas investigações que envolvem delineamento, desenvolvimento e avaliação de artefatos para serem utilizados na abordagem de um determinado problema, à medida que se busca compreender/explicar suas características, usos e/ou repercussões (BARBOSA, OLIVEIRA, 2015, p. 527).

Além disso,

> [...] *design research* conduz similarmente a um plano de aula, pois ordena e avalia as aulas. Assim, o *design research* pode ser um ponto de referência para pesquisas de professores, levando em conta que eles têm menos tempo que pesquisadores profissionais. No entanto expomos uma combinação de pesquisa de pesquisadores no lugar de teorias de instrução, e a pesquisa de professores na elaboração e adaptação de algumas teorias,

> o que torna a pesquisa mais prática e o ensino mais científico (GRAVEMEIJER; VAN EERDE, 2009, p.511, tradução nossa).

Uma pesquisa de desenvolvimento procura entrelaçar a elaboração de materiais educacionais em paralelo ao desenvolvimento da teoria de ensino por ele subsidiada. Aqui representada por um conjunto de idéias que circunscrevem o conceito de convergência e que, por meio da análise a ser apresentada no capítulo 4, traz elementos para se expressar o ensino de limite. Barbosa e Oliveira (2015) entendem por delineamento a elaboração do artefato em sua primeira versão e, por sua vez, o desenvolvimento refere-se ao processo contínuo de seu refinamento por meio da avaliação sistemática. Assim, nossa escolha justifica-se por buscarmos, mediante a elaboração de nossa sequência de tarefas para um ambiente de aprendizagem em condições reais de ensino em CDI, não apenas uma análise e quantificação de dados, mas também refletir acerca de seu papel na aprendizagem de conceitos, e que, ao mesmo tempo, as tarefas que integram nosso ambiente de aprendizagem possam ser trabalhadas em salas de aulas regulares do curso.

Em nossa elaboração de tarefas buscamos constituir um material que possa servir como ponto de partida para professores que ministram a disciplina de CDI 1, em que os estudantes sejam convidados a compartilhar suas ideias em grupos, bem como para a sala, criando situações que favoreçam a exploração intuitiva de conceitos relacionados a sequências numéricas e convergência. Desenvolvemos e aplicamos nossas tarefas para que, ao serem trabalhadas em sala de aula, visem não somente a respostas imediatas, mas também contribuam para a reflexão, promovendo situações de ensino em que os estudantes não necessitem que uma explicação, ou definição prévia, seja apresentada. Própria tarefa traz os elementos necessários à exploração intuitiva de ideias, de modo que a sistematização de conceitos seja feita num segundo momento.

Um primeiro desenho de tarefas é elaborado e aplicado a uma turma, para que, a partir do que se observa durante a aplicação, possa ser redesenhado.

> Nessa hipótese de aprendizagem, os alunos são testados continuamente durante o experimento. Se a aprendizagem observada é diferente da esperada, isso implica que as atividades de aprendizagem têm que ser mudadas durante ou depois de uma aula, e que as hipóteses têm de ser adaptadas para a nova situação (VAN EERDE, 2013, p. 3).

Van Eerde (2013) explica o caráter cíclico desse tipo de pesquisa, ilustrado na Figura 1: o pesquisador, com base no conhecimento atual (K- *Knowledge*), realiza experimentos de pensamento ”antecipação” e *design* de tarefas (em nosso contexto, nossa sequência de tarefas) (D- *design*), realiza um experimento (E- *experiment*) (nossa aplicação de tarefas) com as tarefas propostas e reflete sobre sua aplicação e experiência (R- *reflection*), o que resulta em um novo conhecimento (K) e um ciclo inicia-se.

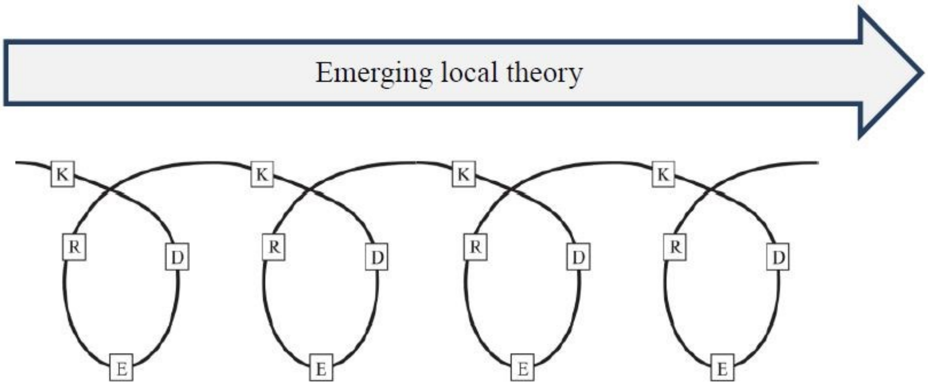


Figura 1 - Ciclos do Design Research
Fonte: Van Eerle (2013)

A pesquisa em *Design* possibilita, por sua metodologia, as análises no decorrer de todo o processo bem como de sua reaplicação após um novo *Design*. Em nossa pesquisa os ciclos foram entrelaçados, como realizamos quatro aplicações os descrevemos em contextos, sendo o entrelaçamento do contexto A como “antecipação” com o contexto B de análise e avaliação que gerou um redesenho das tarefas. As novas tarefas aplicadas entrelaçadas num processo contínuo nos contextos C e D, analisadas, avaliadas e validadas constituem o *Design* final apresentado em nossa pesquisa. Sintetizando sua abordagem, apresentamos na Figura 2 os ciclos de aplicação, análise, avaliação e validação e na Figura 3 nossos ciclos entrelaçados.

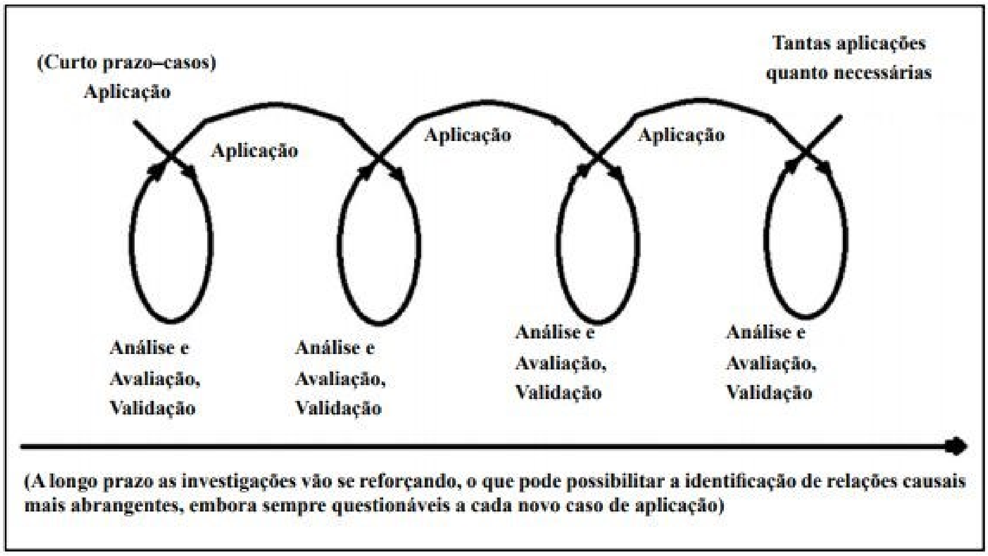


Figura 2 - Ciclos do Design- Based Research
Fonte: Matta, Silva e Boaventura (2014)

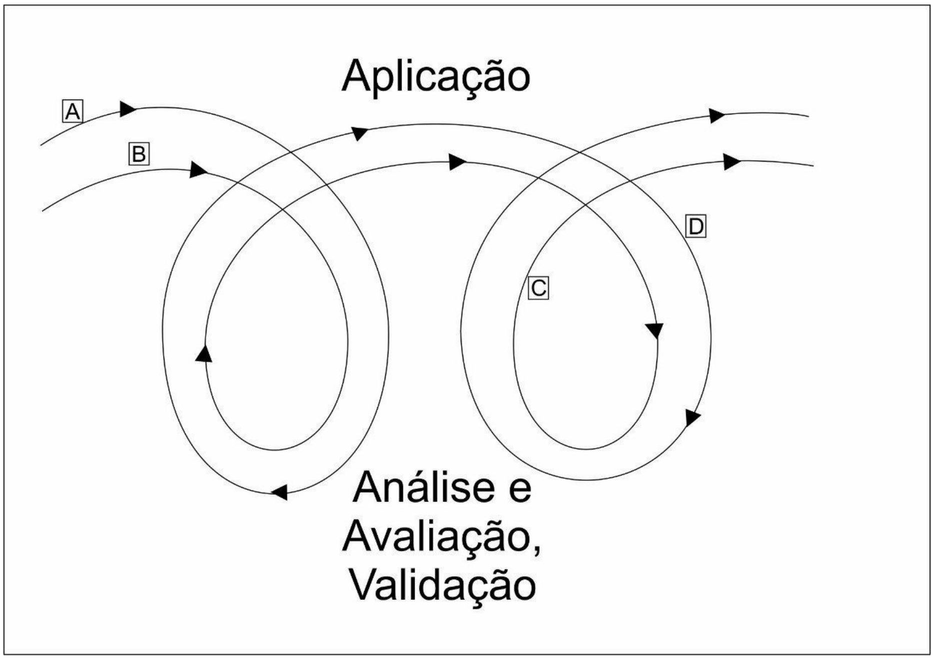


Figura 3- Ciclos da Pesquisa
Fonte: autores

As Figuras 1 e 2 sintetizam a descrição dos ciclos em *Design*. Em nosso trabalho, houve os episódios de resolução de tarefas passando pelos ciclos, elaboramos/adaptamos as tarefas e as aplicamos. Quando necessário, as tarefas foram refinadas com os conhecimentos apresentados pelos estudantes e reaplicadas em um novo momento nossas aplicações são apresentadas na Figura 3. Em seguida a cada aplicação, buscamos sistematizar o conteúdo proposto pela tarefa. Partimos das representações e estratégias apresentadas pelos estudantes e delineamos as definições apresentadas e a sistematização dos conceitos partindo delas. Ao final de cada ciclo de aplicações, as tarefas foram reformuladas segundo os objetivos elencados durante sua elaboração.

> Em um macro ciclo, o novo conhecimento resulta em um redesenho da THL [trajetória hipotética de aprendizagem] no final de um conjunto de aulas. Este pode ser o início de um novo estudo, um novo macro ciclo. Em um microciclo, o novo conhecimento resultante das atividades em uma aula pode causar a necessidade de pequenas mudanças no desenho de uma tarefa. Nesse caso, o redesenho ocorre entre aulas. A necessidade de redesenho pode se mostrar um evento imprevisto na sala de aula, por exemplo, quando as atividades mostram ser muito difíceis para os alunos. Tanto durante os macros quanto durante os microciclos ocorre o desenvolvimento de uma teoria local de ensino (VAN EERDE, 2013, p. 3).

A autora descreve que, no processo de *Design Research,* o papel do professor não é fornecer respostas aos estudantes. Ao invés disso, é o elaborar propostas que os levem à construção de conhecimentos. Esse processo oportuniza que novos conceitos possam emergir da atividade de trabalhar com as tarefas. Durante todo o processo de aplicação, são levantadas hipóteses sobre a tarefa, e as respostas não são analisadas somente como certas ou erradas. O processo de construção dos estudantes é analisado como um todo, pois parte-se das representações dos estudantes para a reformulação e aplicação das demais tarefas, a fim de que os auxiliem na construção de conceitos.

Molina, Castro e Castro (2007) apresentam os *experimentos de ensino* como modalidades particulares da pesquisa de desenvolvimento. O desenho de tais experimentos contempla o desenvolvimento de processos de planejamento e ensino, assim como a investigação sobre tais processos em um contexto educacional (a sala de aula). Sua análise ocorre tanto no decurso da implementação da proposta (quando as tarefas são formuladas e aplicadas – o que dificulta uma análise sistemática) quanto após o término da intervenção (análise retrospectiva).

Por meio de um experimento de ensino, os papéis de pesquisador e professor são “aproximados” e se inter-relacionam. Mestre e Oliveira (2016) descrevem o experimento de ensino como uma metodologia que tem o potencial de fazer uma ponte entre a teoria e a prática, a qual integra uma sequência de episódios, um professor/pesquisador e os estudantes visando à compreensão do processo de ensino e aprendizagem.

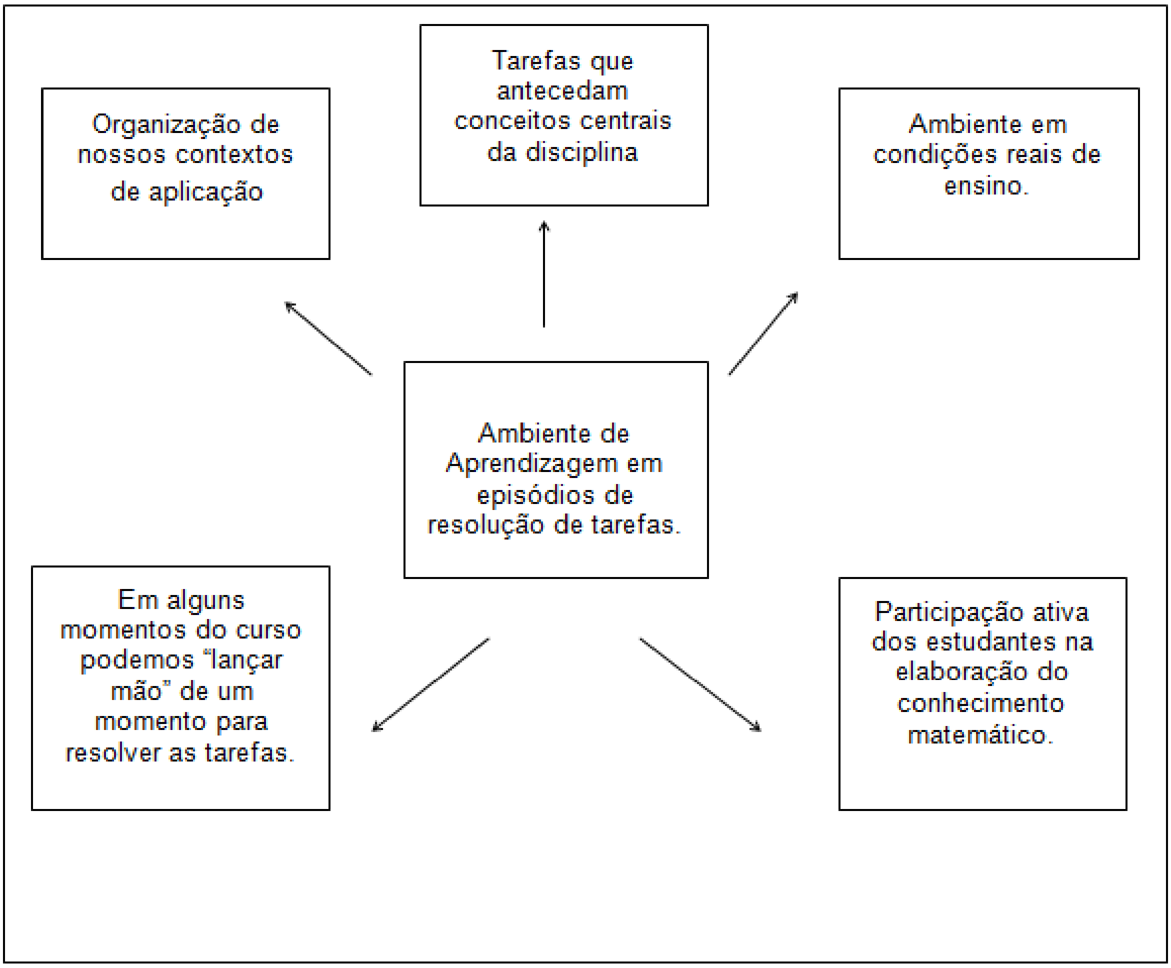
Um fator importante, que emerge do experimento de ensino, segundo Mestre e Oliveira (2016), é o papel do professor-investigador que contempla a avaliação do processo como um todo e o raciocínio dos estudantes, podendo interferir nos episódios com vistas a subsidiar todo o processo. Em nosso contexto, assumimos tal papel e podemos ressaltar que o estar inserido em nossa pesquisa, tanto como professor quanto como pesquisador, contribuiu para o seu desenvolvimento.

3.2 NOSSO AMBIENTE DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Nossa proposta de tarefas que constituem o ambiente de ensino e aprendizagem em CDI 1, é resultado da configuração de um trabalho em desenvolvimento que resulta de pesquisas de um grupo e caminha ao encontro das literaturas que fundamentam nossa pesquisa. Alguns elementos da pesquisa são explicitados a seguir: (i) nosso ambiente de aprendizagem; (ii) nosso contexto real de ensino; (iii) e a reestruturação do curso em termos das tarefas propostas.

Como ambiente de ensino e aprendizagem, não nos referimos ao lugar físico, mas à organização de nosso contexto e à proposição de tarefas que ele integra. Devem proporcionar aos estudantes da disciplina interação com a turma e com o docente, ser convidativo à sua participação, para que possam explicitar suas dúvidas e estratégias, auxiliando no desenvolvimento de conceitos.

Contexto real de ensino é o conjunto de todos os elementos que o constitui, o ambiente de aprendizagem, a estrutura, a organização, uma sala com no mínimo 44 estudantes e suas possíveis dificuldades com os conceitos trabalhados na disciplina, o desinteresse por parte de alguns, um plano de ensino a cumprir, avaliações, correções, enfim, tudo o que realmente compõe o dia a dia de sala de aula. O Quadro 1 apresenta a estrutura de nosso ambiente.



Quadro 1 - Esquema da proposta de ensino
Fonte: autores

Nossos experimentos de ensino têm como contexto a Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Uma descrição detalhada desse contexto e de suas condições reais foi feita de forma detalhada por Ramos, Fonseca e Trevisan (2016), a qual detalha o contexto real de ensino e pesquisa, com suas limitações. Alguns elementos são destacados a seguir.

As turmas iniciam-se com 44 alunos regulares, além de 6 a 8 estudantes na modalidade especial[4] (alunos que não obtiveram aprovação anterior na disciplina). A seleção dos estudantes ocorre pelo Sistema de Seleção Unificado (SISU/MEC). O Sisu é o sistema informatizado, gerenciado pelo Ministério da Educação (Mec), pelo

[4] Em geral, alunos que foram reprovados com média inferior a 4,0 e/ou frequência inferior a 75%. Aos alunos reprovados com média superior a 4,0 (e inferior a 6,0), e que apresentaram pelo menos 75% de frequência nas aulas, é permita a matrícula em turma sem presença obrigatória, ou seja, não precisam assistir às aulas e somente realizarem as avaliações.

qual as instituições públicas de educação superior oferecem vagas a candidatos participantes do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem)[5]. A seleção acontece duas vezes ao ano, no primeiro e no segundo semestres. Muitos alunos ingressam no curso de engenharia mesmo não sendo o pretendido inicialmente e buscam posteriormente a transferência interna e/ou externa para o curso almejado. Em termos de infraestrutura, as salas de aulas seguem a estrutura usual, quadro-negro, mesa do professor, carteiras dos alunos em disposição de filas e data show.

Destacamos que nossa pesquisa ocorreu em um ambiente real, pois nossas tarefas são desenvolvidas para esse fim; em ambientes reais de ensino que têm as seguintes características: i) uma sala heterogênea de estudantes; ii) plano de ensino a cumprir; iii) que o desenvolver de tarefas, que é o objetivo da pesquisa, não implique em muitas alterações da sala. A mudança que ocorre em nosso ambiente de aprendizagem em episódios de resolução de tarefas é a abordagem de novos conceitos partindo das representações dos estudantes no desenvolver das tarefas, quando são convidados a se organizarem em grupos e a exporem suas estratégias para a resolução. Porém, tais episódios são pontuais (cerca de 20 a 25% da carga horária da disciplina), o restante do tempo ocorre aulas expositivas dialogadas.

A cada tarefa aplicada, a produção escrita, áudios e vídeos foram coletados e analisados, podendo ocorrer, quando necessário, um redesenho da tarefa e um levantamento de indícios para a elaboração de uma nova. A disciplina de CDI tem uma ementa a ser cumprida durante o curso, e a organizamos de forma que assim possa ser feito. Em termos de organização curricular, algumas alterações foram feitas (em relação ao usual) em nossa abordagem. Iniciamos nosso curso com o estudo de sequência e demos continuidade em conformidade com nosso plano de ensino e a ementa do curso. O Quadro 2 apresenta a ementa do curso e sua organização. Destacamos, conforme apresentado no Quadro 3, que o estudo formal de sequências é previsto em nossa instituição apenas na disciplina de CDI 3. A disciplina de CDI 1 tem uma carga horária de 6 horas/aulas semanais, e as disciplinas de CDI 2 e 3 têm quatro aulas semanais. Ambas são ofertadas semestralmente.

---

[5] http://sisu.mec.gov.br/

EMENTA DA DISCIPLINA DE CDI 1	
Conjuntos numéricos. Funções reais de variável real. Limites e continuidade. Derivadas, diferenciais e aplicações. Integrais definidas e indefinidas. Técnicas de integração e integrais impróprias.	
ORGANIZAÇÃO TRADICIONAL DOS CONTEÚDOS	**NOSSA ORGANIZAÇÃO DE CONTEÚDOS**
1. Conjuntos Numéricos; 2. Funções reais, de uma variável real; 3. Limites e Continuidade. 4. Derivadas, diferenciais e aplicações; 5. Integrais definidas e indefinidas; 6. Técnicas de Integração; 7. Aplicações de integrais; 8. Integrais impróprias.	1. O estudo de funções particulares (sequências); 2. Uma extensão para o estudo de função; 3. Conceito de convergência; 4. Sequências de diferenças; 5. Funções de domínio real; 6. Taxa de variação média e instantânea (Derivada); 7. Variação Acumulada (Integral); 8. Limite de uma função; 9. Ampliação dos conceitos e técnicas (técnicas de derivação e integração).

Quadro 2 - Ementa dos cursos de CDI 1 e nossa proposta
Fonte: autores

EMENTA DAS DISCIPLINAS DE CDI 2 E 3	
CDI 2	**CDI 3**
Sistemas de coordenadas polares e integrais; Integrais impróprias; Tópicos de topologia dos espaços reais n-dimensionais; Relações e funções em espaços reais n-dimensionais; Limite e continuidade de funções de n-variáveis reais; Derivadas parciais; Derivadas de funções compostas, implícitas e homogêneas; Diferenciais de funções de n-variáveis; Máximos e mínimos de funções de n-variáveis reais; Integrais múltiplos; Aplicações geométricas dos integrais múltiplos.	Funções vetoriais. Cálculo vetorial. Sequências e séries numéricas. Séries de potências. Variáveis complexas

Quadro 3 - Ementa dos cursos de CDI 2 e 3 e nossa proposta
Fonte: autores

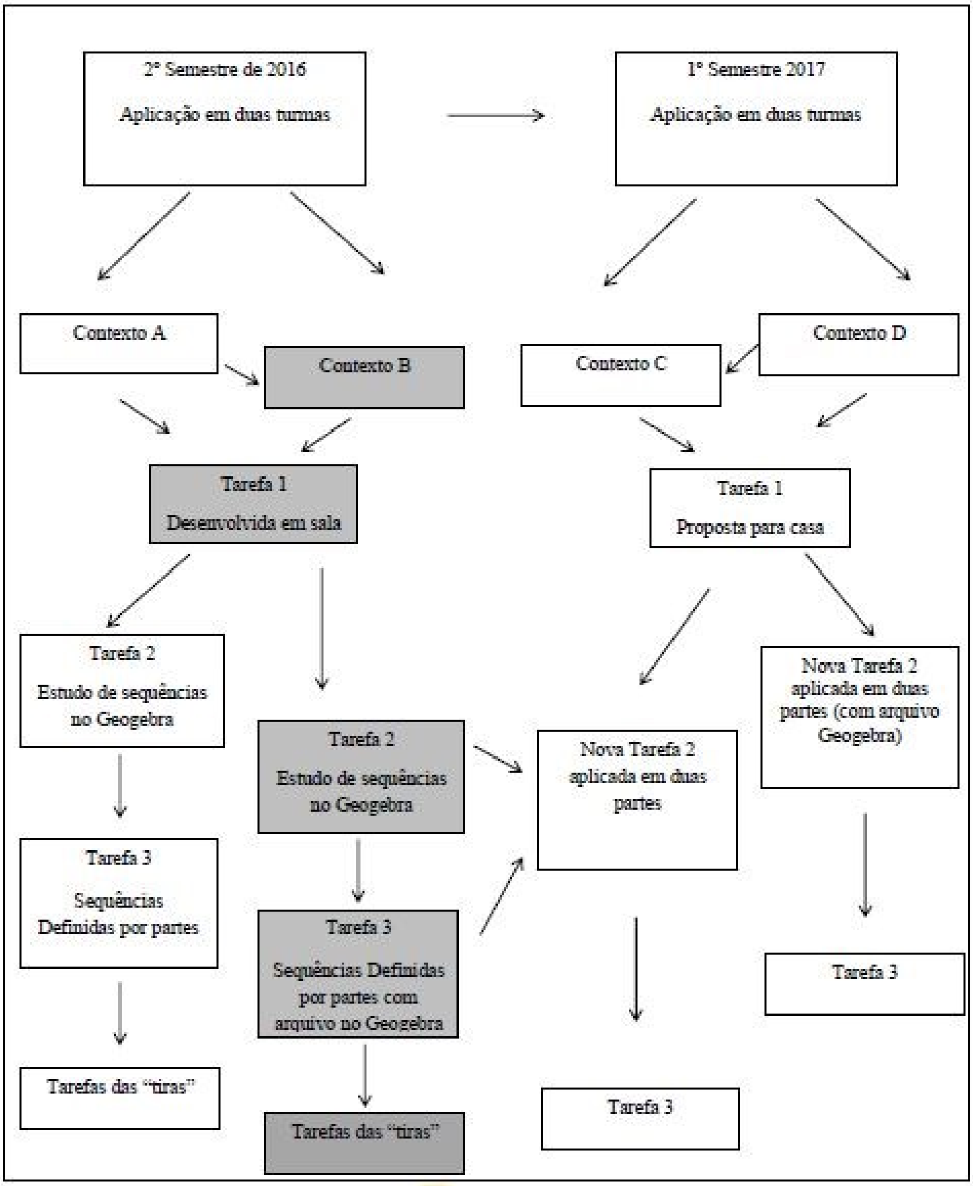
3.3 COLETA DE DADOS

Adotando pressupostos da pesquisa de desenvolvimento, as tarefas que constituem o *corpus* desta pesquisa foram desenvolvidas e aplicadas em ciclos e envolveram dois momentos de aplicação.

Para melhor organização dos dados, visto que desenvolvemos enquanto experimento de ensino, apresentamos algumas siglas que são relacionadas às turmas que estamos relatando. No segundo semestre de 2016, foram aplicadas em duas turmas: (i) na turma do orientador, em que a aplicação foi conduzida em conjunto pela pesquisadora e pelo docente responsável pela turma (contexto A- antecipação); (ii) na turma da autora, que assume o duplo papel de pesquisadora e docente da turma (contexto B- análise e avaliação), sendo este o contexto selecionado para apresentação e análise de dados nesta dissertação.

Essa dinâmica também ocorreu no primeiro semestre de 2017; porém, diferentemente do ocorrido no segundo semestre de 2016, em 2017 a autora não participou diretamente da aplicação na turma de seu orientador (contexto C- validação), mas conduziu novamente o trabalho em sua turma (contexto D- validação). Ambos reaplicaram as tarefas em suas turmas, de forma independente, no intuito apenas de refinar algumas formulações para a constituição da versão final do produto educacional. As turmas tinham a autora deste trabalho e seu orientador como docentes da disciplina de CDI 1, sendo 2 turmas do curso de Engenharia Eletrônica (câmpus Cornélio Procópio) em cada semestre (2016/2017) com aulas ministradas pela autora e 2 turmas de Engenharia de Materiais (câmpus Londrina) pelo orientador no mesmo período. O esquema mostrado no Quadro 4 ilustra esses contextos.

Elencamos, para fins de organização desta dissertação, o contexto B, visto que a autora ministrou a disciplina durante todo o semestre (diferentemente do ocorrido no contexto D, em que sua atuação ocorreu apenas no primeiro mês de aula).



Quadro 4 - Mapa das Tarefas
Fonte: autores

Em nosso planejamento, destinamos 25 horas-aulas, no decorrer do semestre, para desenvolver episódios de resolução de tarefas com os estudantes (cerca de 25% da carga horária). As tarefas que compõem a pesquisa foram aplicadas em 6 dias de aula (18 h/a). Em todas as aplicações, os estudantes foram organizados em grupos de três a quatro, totalizando 14 grupos, em média 44 estudantes da turma, o que possibilitou a troca de ideias na elaboração de estratégias para a resolução de cada tarefa proposta.

Na aplicação da tarefa, a turma foi dividida em grupos de três estudantes. A distribuição dos grupos apresentados na análise, segundo a estratégia adotada na resolução, não é excludente. Em alguns momentos, identificamos mais de uma estratégia adotada pelo grupo. Em nossa análise, os grupos são apresentados como G1, G2,..., código utilizado de forma independente para cada tarefa analisada.

Na análise, muitos elementos importantes foram observados no decorrer das aplicações, visto que nem todas as estratégias para resolução podem ser evidenciadas na produção escrita. Os áudios gravados dos grupos nos forneceram suas estratégias para a resolução das tarefas propostas. Durante a aplicação da tarefa, foi solicitado aos grupos que todas as estratégias tomadas para a resolução deveriam constar em sua produção escrita (folha da tarefa). Destacamos que as gravações foram de suma importância na análise das tarefas, pois, como dito anteriormente, nos fornecem muitos indícios das estratégias dos estudantes.

Em nossa análise, não visamos quantificar resultados, portanto o número de grupos que apresentam a produção por nós destacada não faz parte da análise. Ao selecionar a produção escrita a ser apresentada e analisada, buscamos as representações, que mais aparecem no decorrer das análises, e que contribuam para discutir de que modo o trabalho com episódios de resolução de tarefas pode possibilitar aos estudantes problematizar ideias que circunscrevem o conceito de convergência de sequências numéricas.

Para coleta de dados, utilizamos a produção escrita dos estudantes, gravações de áudios e vídeos. No início do semestre, foi exposto aos estudantes que, em alguns momentos de aula, tarefas seriam aplicadas e que os materiais por eles produzidos fariam parte de uma pesquisa em desenvolvimento. Eles assinaram um termo de autorização. A pesquisa é adaptada ao contexto real de trabalho do professor (e não o contrário). Com isso algumas limitações[6] podem aparecer: i) materiais de produção escrita e áudios que se perdem; ii) o tempo destinado à tarefa, em alguns momentos, fora reorganizado; iii) utilização de *notebook* em sala para a realização da tarefa, que não contempla o número de estudantes e ,em alguns momentos de aula a ausência do *notebook*.

No decorrer de cada aplicação de tarefa e de sua sistematização em conjunto com os estudantes, um material de apoio sempre foi lhes proporcionado no

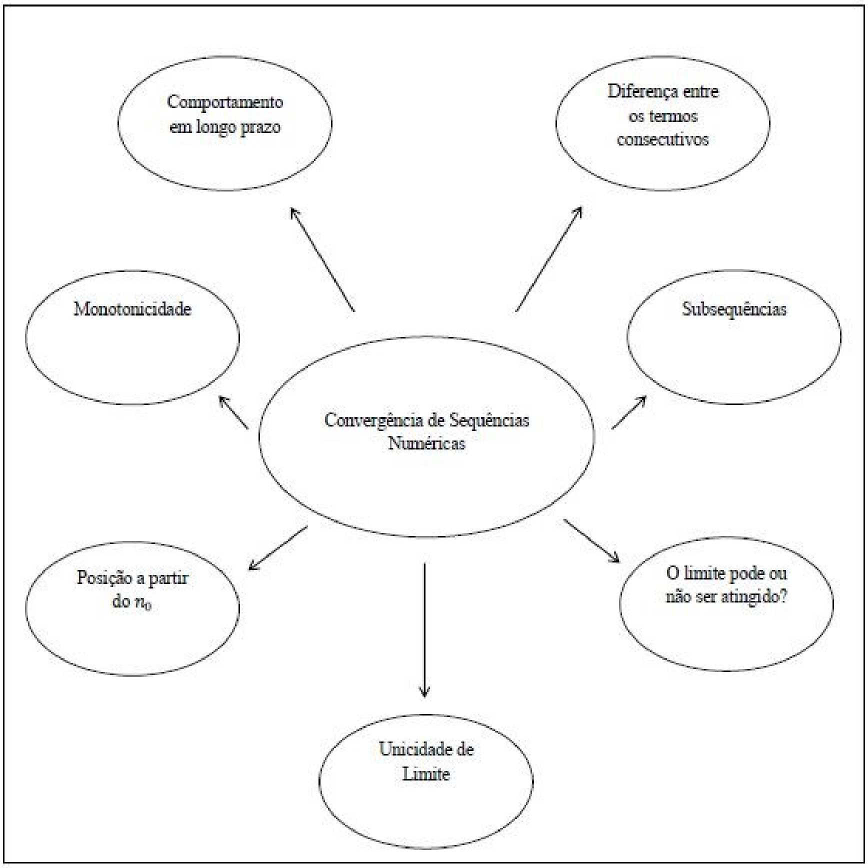
---

[6] As limitações aqui apresentadas não comprometem a análise das tarefas; apenas ressaltamos que, como trabalhamos em ambientes reais de ensino, a descrição dela é a mais fiel possível e que, em momento algum, a sala foi adaptada à pesquisa. A pesquisa é que desenvolvida considerando nosso contexto real.

ambiente Moodle ou *site*. Os arquivos foram disponibilizados com explicações e definições já sistematizadas em sala de aula. Todo o material era postado num momento posterior às tarefas, para servir como apoio ao estudo e no trabalho com novas tarefas propostas para serem realizadas fora de sala de aula.

3.4 SOBRE AS “IDEIAS” PARA ELABORAÇÃO DAS TAREFAS

Nosso objetivo neste trabalho é investigar de que maneira o trabalho com episódios de resolução de tarefas possibilita aos estudantes problematizar ideias que circunscrevem o conceito de convergência de sequências numéricas. Para tal, destacamos no Quadro 5 algumas dessas “ideias” que buscamos problematizar no processo de elaboração das tarefas: (i) diferença entre os termos da sequência; (ii) monotonicidade; (iii) comportamento em longo prazo; (iv) limite pode ser ou não atingido; (v) subsequências; (vi) proposição a partir do n_0; (vii) unicidade de limite.



Quadro 5 - Mapa sobre convergência de sequência
Fonte: autores

Na organização dos elementos de uma sequência apresentados em nossa pesquisa e abordados nas tarefas, nos apoiamos em Leithold (1994), Ávila (2001) e Stewart (2013) e sintetizaremos descrições de cada elemento abordado nas tarefas, conforme segue.

Monotonicidade: Dizemos que uma sequência (a_n) é estritamente crescente, se $a_1 < a_2 < \ldots a_n < \ldots$, e estritamente decrescente, se $a_1 > a_2 > \ldots a_n > \ldots$ Uma sequência é decrescente, se $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n \leq \ldots$, e crescente se $a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_n \geq \ldots$ Uma sequência é monótona, se satisfaz qualquer uma dessas condições. Toda sequência monótona e limitada é convergente, bem como toda sequência convergente é limitada. Mas nem toda sequência limitada é convergente. Tomemos como exemplo a sequência $a_n = (-1)^n$, que assume valores alternados -1 e +1, é limitada inferiormente e superiormente por esses valores, mas não converge para nenhum desses valores.

Comportamento em longo prazo: Na definição de convergência de uma sequência a analisamos para $n \to \infty$. Dessa forma, tomamos valores para n grandes, tão grandes quanto queiramos e, com isso, analisamos em longo prazo. Tomamos em nossa análise seu comportamento para valores "tão grandes quanto quisermos", analisando a sequência como um todo, buscando observar seu comportamento para os infinitos valores que n possa assumir, pois, ao assumir valores grandes para nosso índice, também tomamos os valores arbitrariamente pequenos para ε que compõe a definição formal de convergência de uma sequência.

Um ponto crucial em nossas tarefas é a proposição da seguinte questão: se o limite pode ser atingido ou não. A descrição de limite por aproximação descarta uma sequência constante $(a_n) = 2$ em que o limite é 2, por exemplo,e que não precisa aproximar-se de um valor e sim é o próprio.

Subsequências: Uma subsequência é uma restrição imposta a uma dada sequência (a_n) de um subconjunto $\mathbb{N}'$ do conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais. Podemos tanto escrever uma sequência em subsequências ou tomarmos uma sequência definida por partes. Tomemos como exemplo, uma sequência definida por partes:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ é múltiplo de } 10 \\ 1 + \dfrac{1}{n}, & \text{para qualquer outro valor de } n \end{cases}$$

A sequência apresenta suas restrições para os valores assumidos por n, sendo múltiplo de 10, assume imagem 2 e, para os demais valores de n, segue o comportamento descrito por $1+\frac{1}{n}$ .Temos uma sequência definida por partes, e cada restrição define uma subsequência da sequência com comportamento diferente.

Proposição a partir do n_0: A definição formal de convergência de sequências numéricas nos diz que dado $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 > 0$ tal que, para todo $n > n_0$, $|a_n - L| < \varepsilon$. Assim, precisamos garantir nosso n_0 e a arbitrariedade de nosso ε para a existência de nosso limite L. A arbitrariedade do ε diz respeito a tomarmos valores tão pequenos quanto quisermos para que possamos garantir a partir de que ponto n_0 da sequência, possa garantir a proximidade de a_n e o limite L. Tomemos como exemplo, a sequência $a_n = \frac{1}{n}$. Quando tomamos valores suficientemente grandes para n podemos escrever que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Desse modo, precisamos garantir que:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow 1 < \varepsilon_n \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Tomemos, então, $n = \frac{1}{\varepsilon} + 1$. Assim, se tomarmos nosso ε, por exemplo, $0{,}25$, podemos garantir as condições para convergência a partir do seu 5º termo.

Unicidade de limite: A unicidade de limite é outro fator importante da definição formal, visto que, para garantir n_0 e a arbitrariedade de ε, o limite tem que ser único.

Na literatura de Stewart (2006), o autor toma como exemplo, uma sequência, $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$ que pode ser descrita pela fórmula $a_n = \frac{1}{n}$ (o *n-ésimo* termo). Em seguida, aponta que os termos da sequência tornam-se “mais próximos” de 0 à medida que n cresce. Isso nos possibilita encontrar termos tão pequenos quanto desejarmos, bastando que tomemos n suficientemente grande. Afirma que o limite da sequência é 0, representado por

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

O autor destaca que essa notação será usada se os termos de a_n tenderem a um número L quando n se torna grande. Ou seja, se pudermos tornar os números a_n tão próximos de L quanto quisermos, escolhendo n suficientemente grande (STEWART, 2006), o que é representado por:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L\ ,$$

Definimos uma sequência como uma função que tem seu domínio constituído de todos os números inteiros positivos $(1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$ Os números que representam a imagem de uma sequência são chamados de elementos da sequência.

Podemos representar uma sequência por um a_n, com $n \in \mathbb{N}$ e chamado de termo geral, ou *n-ésimo termo* da sequência. Este associa, a cada termo no conjunto dos naturais, uma imagem no conjunto dos reais.

As sequências numéricas apresentam comportamentos distintos, tais como, crescentes, decrescentes, constantes, alternados e oscilatórios. Podem ser definidas por subsequências, como uma sequência definida por partes sendo que cada subsequência tem seu comportamento distinto. Uma sequência é dita convergente quando apresenta limite, e sua definição formal é enunciada:

Dizemos que um número real L é limite de uma sequência (a_n) para valores tão grandes quanto queiramos de n. Os termos a_n tornam-se e se mantêm próximos a L, o que significa dizer que $|a_n - L|$ tornam-se inferiores a qualquer número positivo ε, por menor que seja desde que façamos n suficientemente grande.

Definimos, pois, uma sequência como convergente. Caso não possamos garantir sua convergência, dizemos que a sequência diverge. Uma sequência convergente é representada

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

E a definimos formalmente, quando enunciamos que uma sequência (a_n) converge a L, ou tem limite L, se dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um n_0, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Variação entre os termos da sequência: A variação entre os termos de uma sequência pode ser analisada tomando $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.

Quando analisamos as variações entre termos consecutivos, podemos perceber quanto menores essas se tornam quando uma sequência converge.

4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS EPISÓDIOS

Os conceitos apresentados anteriormente servirão como base para as discussões sobre os conceitos de convergência de uma sequência a partir da análise das tarefas propostas nas aulas de CDI 1. Iniciaremos a discussão seguindo a ordem de aplicação. Em todas as tarefas, os estudantes foram divididos em grupos heterogêneos. O único pedido que fora feito é que, em cada grupo, pelo menos um *notebook* fizesse parte da organização. Cada grupo teve um responsável por gravar toda a discussão na resolução da tarefa. Ao final de cada aula, o áudio foi repassado à docente.

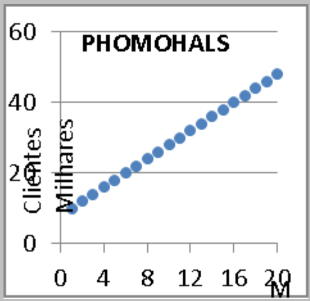
4.1 TAREFA 1

A Tarefa 1, Quadro 6, foi tomada como ponto de partida no estudo de sequências e desenvolvida no primeiro dia de aula com a turma de CDI 1. Para isso, o arquivo contendo a tarefa foi enviado aos estudantes num momento que antecedeu sua aplicação em sala de aula. Disponibilizamos a tarefa em um arquivo Excel, acreditando que poderia ser familiar aos estudantes e que sua manipulação não seria objeto de limitações no desenvolver da tarefa.

O uso de recursos tecnológicos na organização dessa tarefa possibilita a utilização de diferentes terminologias, o surgimento ou aprimoramento de perspectivas teóricas, novas possibilidades de reorganização de dinâmicas de sala de aula (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015, p. 37). Manipular a tarefa no programa facilita a organização de gráficos, novas tabelas e análise do comportamento das empresas que a compõem.

A empresa COMPUNET fornece conexões de Internet para seus atuais 10.000 consumidores. A COMPUNET está interessada na contratação de uma agência de publicidade para desenvolver uma campanha, para aumentar o número de consumidores. A empresa tem três agências de publicidade diferentes para escolher: PROMOHALS, H & G publicidade e SCHLEICH & Co. Cada empresa garante um aumento do lucro para COMPUNET, mas em ritmos diferentes. Seu trabalho é investigar qual agência é melhor para COMPUNET.

A campanha desenvolvida pela **PROMOHALS** promete um crescimento nos negócios, conforme mostrado no gráfico.



H & G Adversiting

A campanha da Agência de publicidade H & G Adversiting promete um crescimento mensal a uma taxa 10%. Ou seja, o lucro de cada mês é 10% maior que do mês anterior.

Schleich & Co promete o crescimento mostrado na Tabela.

Tempo (meses)	Clientes (Milhares)
1	10
2	15
3	19
4	23
5	27
6	30
7	32
8	34
9	36
10	38
11	39
12	40
13	41
14	42
15	42
16	43
17	43
18	44
19	44

Quadro 6 - Tarefa 1: O caso Compunet
Fonte: Adaptado de Weigand (2014).

Nosso objetivo com a tarefa, como dito, é discutir sequências. A tarefa nos proporciona uma discussão sobre progressão aritmética, no caso da primeira empresa, progressão geométrica, na segunda empresa, e, na terceira empresa, fornece indícios de certa "estabilização" em seu comportamento. A partir daí, podemos iniciar uma discussão sobre convergência de sequência. Acreditamos que, ao explorar a tarefa, os estudantes possam "contar com suas experiências anteriores, esboçar uma linha de raciocínio, arquitetar uma resolução de modo autônomo ou com seus pares" (FERREIRA; BURIASCO, 2015, p.461).

Desenvolver uma tarefa requer de nós, professores, reconhecerem oportunidades que dela podem emergir, ou seja, os possíveis métodos de resolução, conceitos por ela abordados, a não unicidade de resposta que decorre das estratégias dos estudantes durante sua realização e a familiaridade deles com a tarefa e, além de tudo, que sejam convidativas.

A resolução dessa tarefa exige a manipulação de procedimentos não rotineiros, conforme preconizado pela RME, e destacado por Ferreira e Buriasco

(2015). Nela, o estudante lançará mão de seu conhecimento prévio, bem como de suas estratégias para a organização dos elementos da tarefa proposta. Nesse sentido, apresentam-se para os estudantes como situações não rotineiras, não frequentes em sala de aula e/ou em livros didáticos. Nossa tarefa busca mobilizar junto aos alunos uma análise que contemple os seguintes elementos: identificação de diferentes tipos de sequências, sua organização de forma recursiva ou por meio do termo geral, observação quanto ao crescimento (porém, com taxas diferentes), variação entre os termos da sequência e uma análise de seu comportamento em curto e longo prazo. Uma análise inicial dessa tarefa foi discutida em Ramos, Fonseca e Trevisan (2016). Apresentamos aqui uma versão mais detalhada das representações dos estudantes em sua resolução e indícios da mobilização de ideias que circunscrevem o conceito de convergência.

Nessa apresentação, tomamos como possíveis questões norteadoras das discussões a serem realizadas após as equipes trabalharem na tarefa: Qual empresa seria mais vantajosa? Com a indagação, queremos ressaltar a proposta do enunciado da tarefa. Como poderíamos representar algebricamente cada empresa? Tal questão buscava que os estudantes levassem em conta a representação de cada sequência. Independentemente do prazo de análise, em meses sempre teriam a mesma empresa como a mais vantajosa? A análise a curto e em longo prazo nos fornece indícios do que queremos levantar sobre o comportamento da terceira empresa.

Em relação à familiaridade da sequência, almejamos que os grupos reconhecessem o comportamento das empresas na organização de suas resoluções e as relacionassem com conceitos por eles trabalhados na Educação Básica. Dessa forma, não foi preciso apresentar-lhes um novo conceito. A conversa entre alguns grupos também pode ser destacada para a análise.

Em um grupo, referido aqui como G4, a discussão sobre o comportamento das empresas nos fornece indícios da identificação que fizeram em relação a uma progressão aritmética, que pode descrever a primeira empresa. A seguir, apresentamos um trecho desta discussão.

- Estudante A: Gente é... a primeira empresa....traz um comportamento de uma P.A. tem a razão de crescimento constante...podemos escrever uma fórmula que a represente aí fica mais fácil analisá-la.

- Estudante B: Sim, claro e a segunda uma P.G.! A terceira é estranha...

A descrição e o reconhecimento do comportamento das empresas fornecem elementos importantes para a exploração de ideias que circunscrevem o conceito de convergência de sequências. A distância entre os termos consecutivos, que os estudantes identificaram, são indícios do que ocorre na variação entre os termos de uma sequência. Outro fator de destaque foi relacionarem a primeira empresa a uma progressão aritmética e a segunda a uma progressão geométrica. A “estranheza” com a terceira empresa pode ser tomada como ponto de discussão inicial de ideias relacionadas aos critérios de convergência.

A discussão sobre a representação das empresas aparece nos áudios dos grupos G1, G2, G4, G6, G7, G8 e G13. A afirmação em relação à empresa mais vantajosa necessita dessa análise para compreender o padrão de crescimento para poder indicar a empresa mais vantajosa. Em todos os grupos mencionados, a conversa entre os estudantes é similar à apresentada pelo G4. Na Figura 4, temos a produção escrita fornecida pelo G9. Este grupo identificou a primeira e a segunda empresa como uma P.A. e uma P.G, respectivamente, bem como a descrição da terceira empresa com um padrão de crescimento constante em longo prazo. O G10 descreveu a segunda empresa como uma P.G., (Figura 5), relacionando-a com juros compostos, o que a indica como a mais vantajosa em longo prazo.

Nossas tarefas proporcionaram aos estudantes participar ativamente na elaboração de estratégias e conceitos para que sejam resolvidas. Nesse sentido, entendemos que a tarefa mostrou-se ser convidativa e acessível aos estudantes, permitindo que revelassem sua abordagem na resolução (FERREIRA; BURIASCO, 2015). As estratégias apresentadas pelos grupos, ao participarem da tarefa, foram exitosas, no sentido de conceitos mobilizados pelos estudantes no desenvolver da tarefa. Em todos os momentos, eles puderam explicitar suas resoluções e apresentá-las para a sala em momentos de discussão.

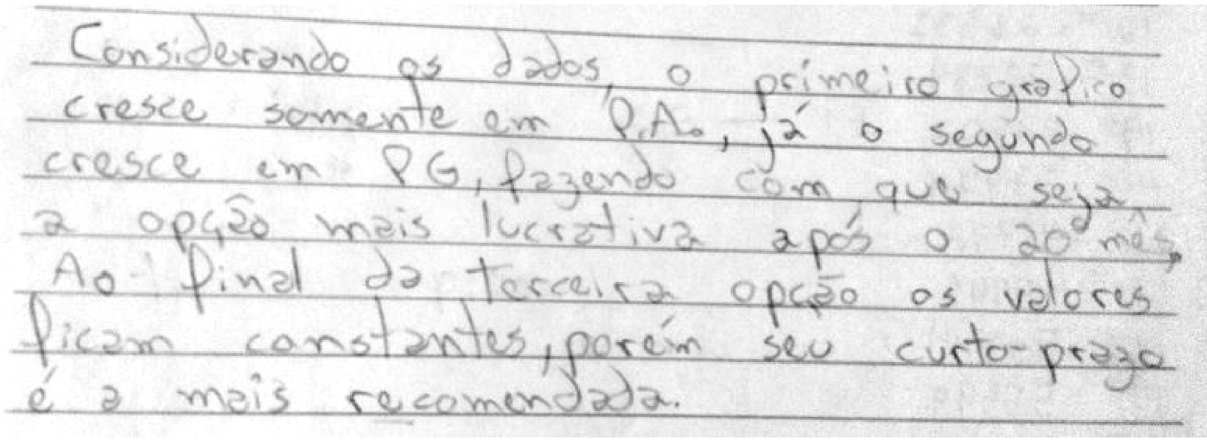

Considerando os dados, o primeiro gráfico
cresce somente em P.A., já o segundo
cresce em P.G, fazendo com que seja
a opção mais lucrativa após o 20º mês.
Ao final da terceira opção os valores
ficam constantes, porém seu curto-prazo
é a mais recomendada.

Figura 4 - Tarefa 1: Produção do G9
Fonte: autores

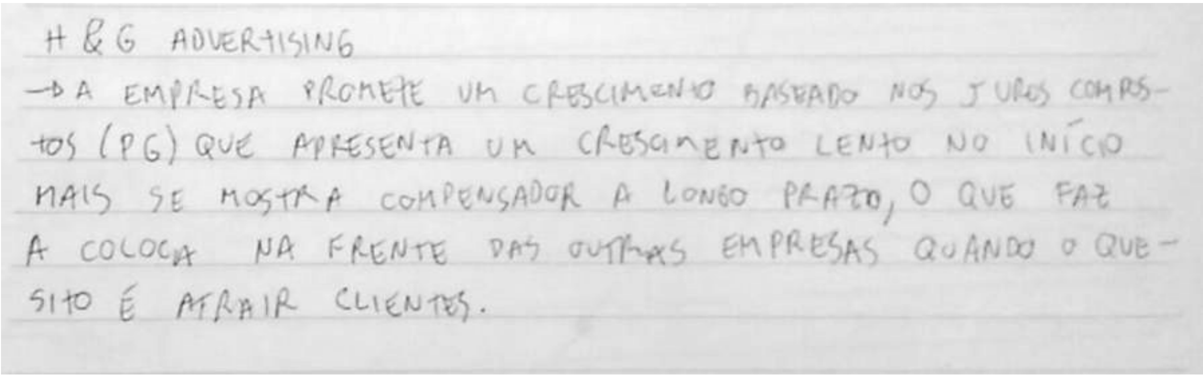

H & G ADVERTISING
→ A EMPRESA PROMETE UM CRESCIMENTO BASEADO NOS JUROS COMPOS-
TOS (PG) QUE APRESENTA UM CRESCIMENTO LENTO NO INÍCIO
MAIS SE MOSTRA COMPENSADOR A LONGO PRAZO, O QUE FAZ
A COLOCA NA FRENTE DAS OUTRAS EMPRESAS QUANDO O QUE-
SITO É ATRAIR CLIENTES.

Figura 5 - Tarefa 1: Produção do G10
Fonte: autores

A diferença entre os termos consecutivos das sequências que representam as duas primeiras empresas nos fornece uma análise que se relaciona com a razão de uma P.A e uma P.G. Portanto, podemos descrever matematicamente as empresas. Os grupos apresentaram em suas conversas indícios do reconhecimento do padrão de crescimento das empresas. Com exceção de dois grupos, os demais, ou seja, doze grupos apresentaram, em suas discussões, a análise da diferença entre os termos que representam as empresas. Destacamos uma transcrição de falas ocorridas no G8 e ressaltamos que as conversas nos demais grupos foram similares. A seguir, um trecho desta.

- Estudante B: Se fizer o cálculo entre um valor e outro encontrou o tanto que cresce a cada mês.

- Estudantes A: mas dá certo?

- Estudante C: Sim... Verdade... É claro... A primeira cresce 2000 a cada mês.

- Estudante A: Ah, sim, isso eu tinha percebido... Verdade, vamos organizar isso...

- Estudante B: Sim, podemos escrever a razão da primeira empresa que é 2000 e da segunda, como cresce a uma taxa percentual constante, é P.G. e usamos um "q" para representar sua razão... Alguém lembra a fórmula da P.G?

- Estudante C: Ah, dá pra escrever nossa razão de 1,1 e nosso primeiro termo é o número inicial 10.000 aí elevamos o número de meses.

- Estudante A: Gente, se elevarmos a t =1, não temos os 10.000.

- Estudante C: Então elevamos a t-1, aí dá certo.

- Estudante A e B: Sim, vamos fazer... Mas... E a terceira empresa...

- Estudante C: Ela parece que cresce de depois para vamos terminar essas depois vemos a outra.

A transcrição das conversas nos grupos fornecem elementos que se relacionam com o esquema de convergência de sequências numéricas apresentado no Quadro 5. Os estudantes analisaram a diferença entre os termos consecutivos, o que lhes permitiu descrever a sequência de forma recursiva e analisaram as empresas em longo prazo. Essa análise é essencial para o estudo de convergência de sequências, visto que a estudamos para valores de n "grandes" garantindo um dos aspectos da definição formal.

Na disposição de estratégias diversificadas para a resolução da tarefa, verificamos que os grupos transitaram entre diferentes representações, que lançaram mão de análise gráfica, tabelas e formularam representações algébricas que descreviam o comportamento das empresas. Todos os grupos usaram desses artifícios em suas produções escritas, o que nos remete ao interesse deles na realização da tarefa. Inferimos que a tarefa parece ter contribuído para a superação de "um dos maiores desafios nas aulas de matemática que parece ser fazer... que os estudantes se envolvam nas tarefas propostas pelo professor" (FERREIRA; CIANI; OLIVEIRA, 2014, p.121). As Figuras 6 e 7 trazem algumas estratégias adotadas pelos grupos.

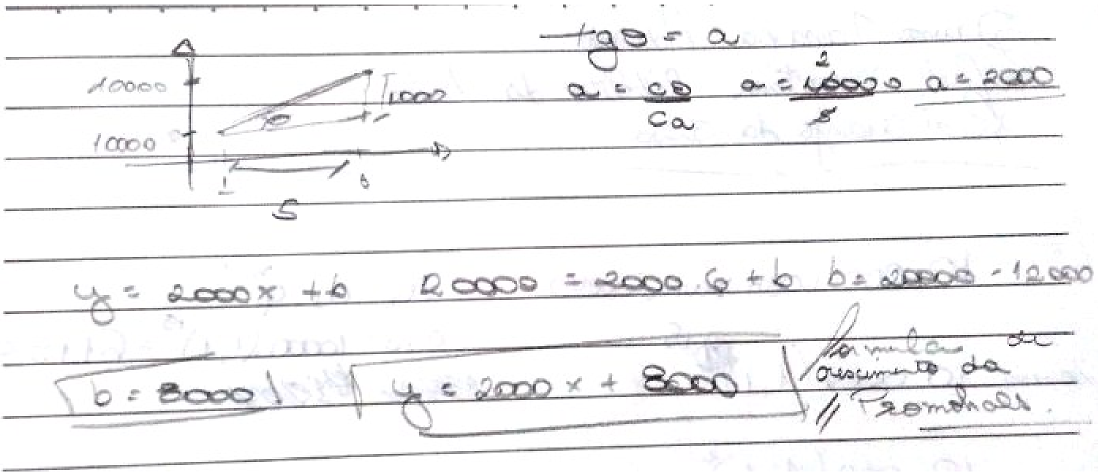


Figura 6 - Tarefa 1: Representação algébrica dos estudantes para a primeira empresa
Fonte: autores

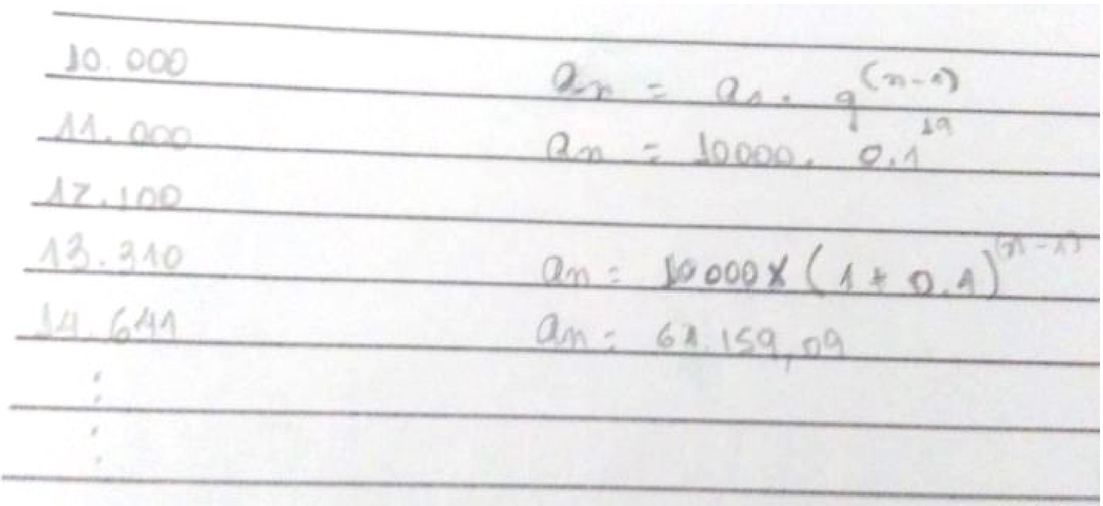


Figura 7 - Tarefa 1: Representação algébrica dos estudantes para a segunda empresa
Fonte: autores

A utilização do recurso tecnológico, no caso o *software* Excel, mostrou-se promissora para o trabalho com diferentes representações e caminhamos, assim, ao encontro dos pressupostos apontados por Borba, Silva e Gadanidis (2015). Na perspectiva de um trabalho de *experimentação com tecnologias*, a tarefa possibilitou a utilização de diferentes terminologias, uma vez que organizou graficamente no programa o comportamento das empresas, ou construiu tabelas a partir de uma representação gráfica, ou, ainda, buscou uma representação algébrica para as situações. Apresentamos na Figura 8 uma plotagem que exemplifica o que foi desenvolvido nos grupos na resolução da tarefa.

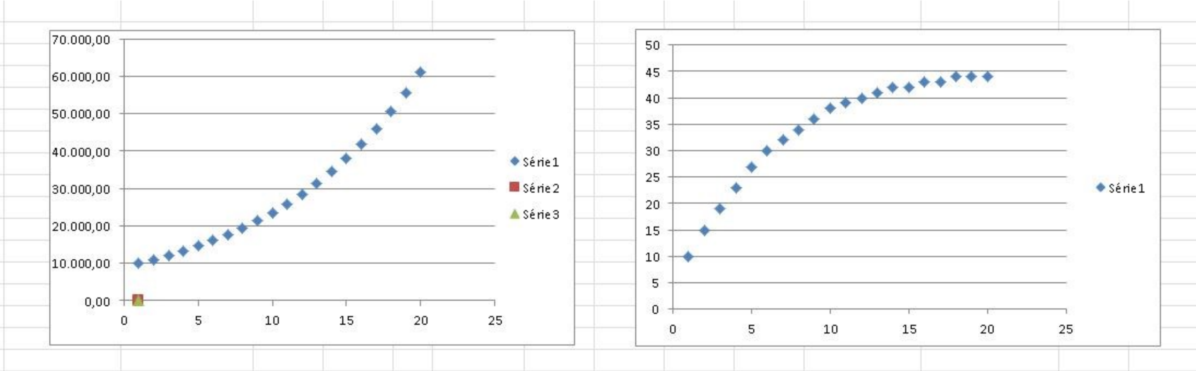


Figura 8- Tarefa 1: Produção dos estudantes no Excel
Fonte: autores

A análise a curto e longo prazo forneceu elementos para uma conclusão a respeito do comportamento das empresas. Algumas podem ser mais vantajosas se o que prioriza é um resultado imediato; mas, se o importante for a rentabilidade, independentemente do prazo, nossa escolha pode ser diferente, ou seja, a vantagem da proposta depende da necessidade de quem contrata a empresa.

Após a análise das produções escritas dos grupos quanto à vantagem das empresas com seu prazo (tempo), destacamos que, de quatorze grupos que realizaram a tarefa, onze apresentaram esta descrição: identificaram a partir de qual mês uma empresa se destaca em relação à outra ou destacaram que a vantagem depende do que a empresa precisa, no caso a Compunet.

Na Figura 9, apresentamos a produção de um dos grupos para exemplificar as descrições que aparecem, tais como: padrão de crescimento rápido, comportamento apresentado pela terceira empresa; crescimento em longo prazo, padrão em que a segunda empresa foi mais vantajosa. Na produção dos demais grupos, também aparece alguma análise em curto e longo prazo. A Figura 10 apresenta algumas estratégias elencadas pelos grupos.

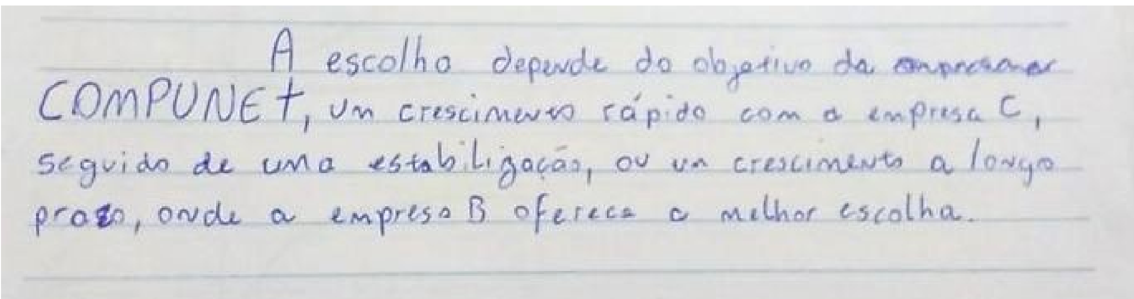

A escolha depende do objetivo da ~~empresa~~ COMPUNET, um crescimento rápido com a empresa C, seguido de uma estabilização, ou um crescimento a longo prazo, onde a empresa B ofereça a melhor escolha.

Figura 9 - Tarefa 1: Análise a curto e longo prazo
Fonte: autores

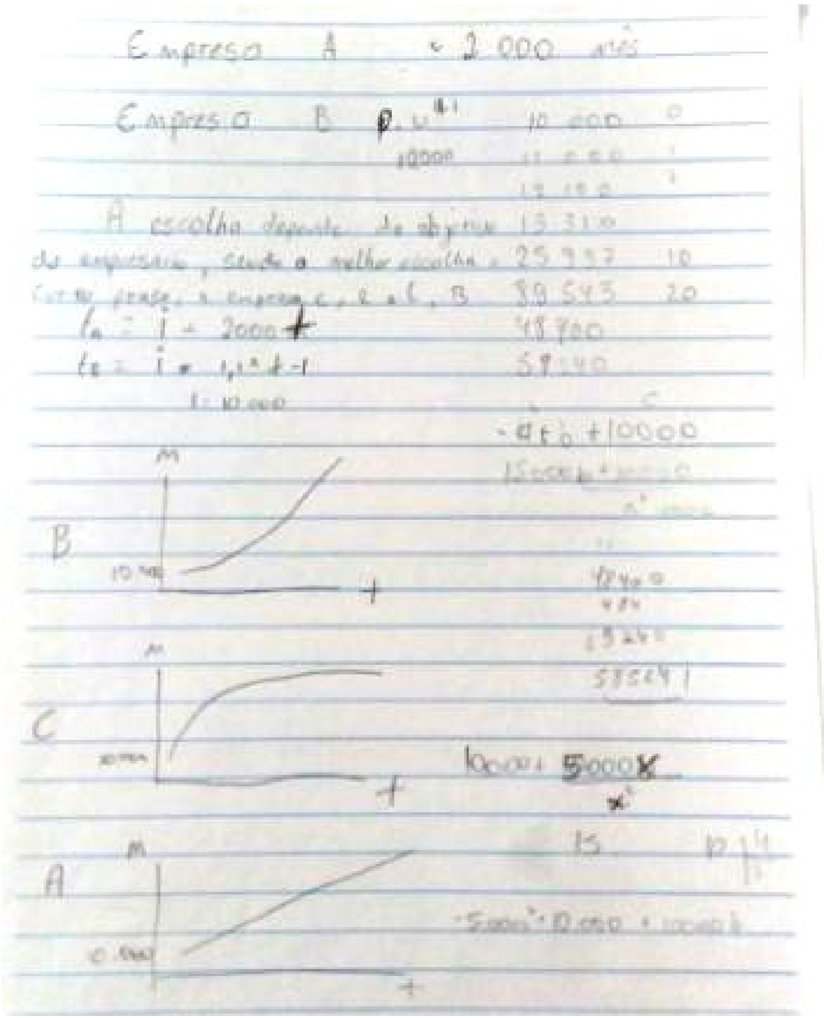


Figura 10 - Tarefa 1: Exemplo de estratégias dos grupos
Fonte: autores

O comportamento da empresa Schleich & Co (terceira empresa) foi tomado como ponto de partida para o estudo de convergência. As descrições feitas por diversos grupos na resolução da tarefa e a análise da terceira empresa direcionaram o olhar para a "estabilização", descrita em seu comportamento gráfico e apresentada por dez dos quatorzes grupos. Em suas produções escritas, alguns grupos apresentaram descrições de seu comportamento como uma "baixa em seu crescimento", outros, como "torna-se constante". Houve, ainda, descrição em suas produções indicando que a empresa "estabiliza" seu crescimento. Apresentamos duas produções escritas nas Figuras 11 e 12 que representam os grupos acima que se refere a certa "estabilização" no crescimento dos lucros ao longo do tempo.

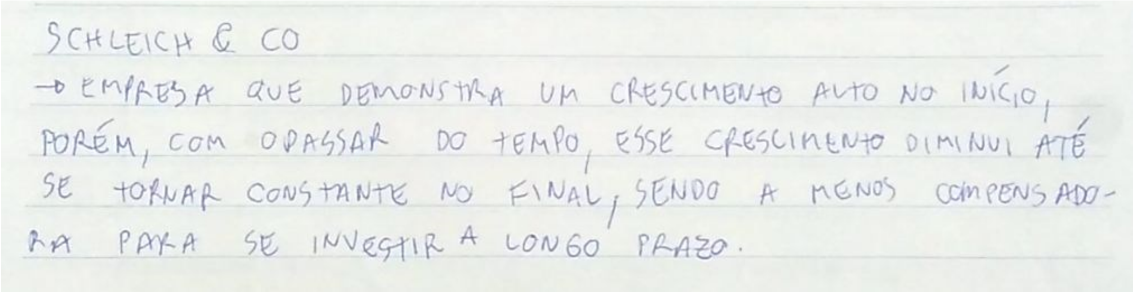

SCHLEICH & CO
→ EMPRESA QUE DEMONSTRA UM CRESCIMENTO ALTO NO INÍCIO, PORÉM, COM OPASSAR DO TEMPO, ESSE CRESCIMENTO DIMINUI ATÉ SE TORNAR CONSTANTE NO FINAL, SENDO A MENOS COMPENSADORA PARA SE INVESTIR A LONGO PRAZO.

Figura 11 - Tarefa 1: Diferença entre os termos da sequência
Fonte: autores

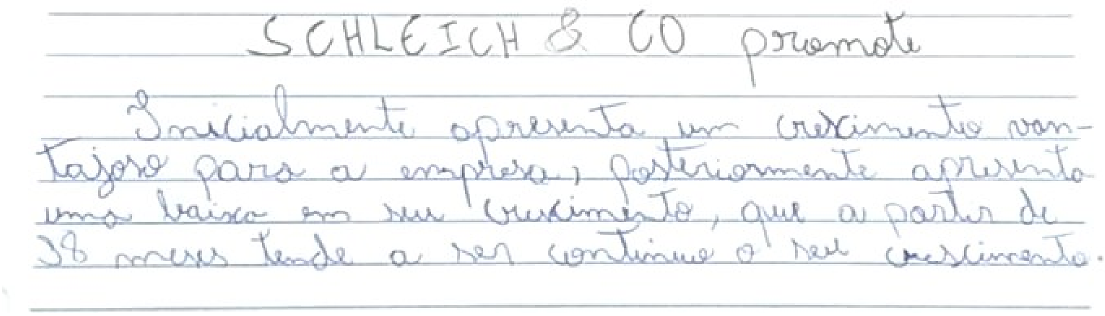

SCHLEICH & CO promete
Inicialmente apresenta um crescimento vantajoso para a empresa, posteriormente apresenta uma baixa em seu crescimento, que a partir de 38 meses tende a ser contínuo o seu crescimento.

Figura 12 - Tarefa 1: Análise da empresa mais vantajosa
Fonte: autores

Na organização de nosso ambiente em episódios de resolução de tarefas, a Tarefa 1 forneceu elementos, tais como: diferença entre termos consecutivos, comportamento em longo prazo e posição a partir do n_0 para iniciarmos uma discussão com os grupos sobre o estudo de sequências numéricas que será abordada num segundo momento, quando formos tratar do assunto convergência. Destacamos que, dentre os elementos necessários ao estudo de convergência e elencados no Quadro 5, a tarefa possibilitou intuitivamente o estudo de três deles:

- Diferença entre termos consecutivos, quando se analisa a variação entre os termos para estudo do comportamento da empresa.
- Comportamento de longo prazo, quando se faz necessário analisar a rentabilidade da proposta da empresa.
- Posição a partir do n_0: intuitivamente, ao analisar a partir de qual mês a empresa seria mais rentável, reconhece-se uma posição n_0 (mês), a partir da qual certo comportamento ocorre.

Após os grupos executarem a resolução, uma sistematização de conceitos foi abordada em conjunto entre docente e estudantes em sala de aula. Nesse momento, representaram recursivamente cada empresa, e uma conversa sobre o estudo de sequências pôde ser iniciado. As discussões foram encaminhadas em conjunto com os estudantes, em nossa abordagem com a finalidade de sistematização dos conceitos oriundos da tarefa. A partir dessas questões, ocorre uma sistematização que é detalhada a seguir.

- Como poderíamos representar algebricamente o crescimento das empresas?

- Suas representações gráficas parecem conhecidas?

- Qual a variação entre os termos?

- O que acontece com o comportamento da terceira empresa?

Sistematização da primeira empresa:

$$a_1 = 10$$
$$a_2 = 10 + 2$$
$$a_3 = 12 + 4$$

Que é 12?

$$(12 = a_2) \rightarrow a_2 = a_1 + 2$$

Então, $a_3 = a_2 + 2 = a_1 + 2 + 2 \rightarrow a_1 + 2.\,2 = a_1 + 4$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1).\,2\,,$$

Desse modo, podemos analisar a empresa em qualquer mês que queiramos, bastando, para isso, uma substituição numérica. Organizamos seu termo geral em:

$$a_n = 10 + (n - 1).2\,,$$

Recursivamente:

$$a_{n+1} = a_n + 2\,,$$

O comportamento da segunda empresa pode ser associado a uma função exponencial (P.G.), uma vez que seu crescimento ocorre a uma taxa percentual constante, podendo ser tomada como ponto de partida no estudo de sequência de diferenças.

$$n\,(1+i) \rightarrow n\,(1+\frac{10}{100}) = n\,.(1{,}1)$$

$$a_1 = 10.000 \rightarrow 10.000(1+\frac{10}{100})^t \text{ , } t = tempo$$

$$\therefore a_n = a_1.(1{,}1)^{n-1} \text{ , com } n \geq 1$$

Termo geral:

$$a_n = 10.1{,}1^{(n-1)} \text{ ,}$$

Recursivamente:

$$a_{n+1} = a_n.1{,}1$$

Com a análise da diferença entre os termos consecutivos das sequências sistematizamos a representação de uma sequencia de diferenças:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

A terceira empresa apresenta um crescimento a uma taxa decrescente, ou seja, a variação entre os termos consecutivos começa a diminuir aproximando-se de um valor, o que pode ser representado pela expressão a seguir.

$$a_n = Kln(n)$$

A partir desse episódio de resolução de tarefas, o desenvolvimento da aula possibilitou aos estudantes elencar ideias que circunscrevem o conceito de convergência de sequências numéricas.

4.2 TAREFA 2

Nossa segunda tarefa teve por objetivo possibilitar que os estudantes explorassem diferentes conceitos associados ao comportamento de uma sequência: crescimento, decrescimento, alternância, sequência limitada e subsequências. Objetivamos, além da exploração desses conceitos, a identificação de indícios da compreensão de convergência por meio da exploração de diferentes tipos de sequências. A tarefa foi organizada para que sua aplicação ocorresse em um único encontro de três aulas. Porém, visto que em nosso ambiente, em condições reais de ensino, as aulas não são adaptadas para a pesquisa e sim o contrário, sua aplicação demandou um tempo de dois encontros (6 h/a). Buscamos priorizar que, no encaminhamento, as tarefas não fossem precedidas de explicações e sim que os estudantes fossem convidados à resolução, a fim de que uma sistematização pudesse ocorrer posteriormente. Partindo das representações por eles elencadas. Deste modo, a tarefa apresentada foi trabalhada em dois momentos na turma de CDI 1, a qual separamos em parte 1 e 2 e que serão apresentadas como P1 e P2.

Os estudantes foram divididos em grupos com três integrantes cada um, sendo a disposição e a quantidade de estudantes que participaram na resolução da tarefa a mesma da Tarefa 1 (14 grupos no total de 44 estudantes), mas não a disposição dos estudantes por grupo. Destacamos que não temos como objetivo um acompanhamento de um mesmo grupo durante todo o processo de aplicação das tarefas. A organização dos grupos para a resolução das tarefas propostas fica a critério dos alunos. Solicitamos apenas que, pelo menos, um notebook compusesse o grupo, tendo um responsável em gravar toda a discussão e repassá-la a docente ao final de cada aula.

Na sistematização da Tarefa 1, na descrição relativa à terceira empresa, “estabilização”, foi descrito que quando uma sequência apresenta comportamento similar àquela, podemos dizer que ela converge. Em um estudo de sequências desenvolvido no curso de CDI 1, apresentado nas pesquisas de Santos (2005) e Nunes (2001), as autoras partem da abordagem de sequências para o estudo de limite de uma função, o que difere é o fato de a primeira autora tomar como base o estudo de sequência no desenvolvimento de sua pesquisa com estudantes que já haviam cursado CDI1 e a segunda, estudantes que não tiveram contato com a disciplina. Na mesma perspectiva, Weigand (2014) desenvolve o estudo de sequências e sua convergência para, depois, explorar o conceito de sequência de diferença como precursor ao estudo de derivadas.

Neste trabalho, alguns itens que compõem a Tarefa 2 foram baseados nessas pesquisas, porém foram adaptados para proporcionar aos estudantes reinventar[7] a matemática, isto é, que as estratégias utilizadas em suas resoluções servissem como base para a elaboração de novos conceitos da disciplina de CDI 1. Em nosso contexto, o professor pode guiar os estudantes a estabelecerem relações entre suas ideias e os conceitos formais envolvidos em cada tarefa. Apresentamos no Quadro 7 a primeira parte – P1 da tarefa desenvolvida com a turma.

1. Levante algumas hipóteses sobre o comportamento de cada uma das sequências a seguir, buscando analisar:
   i) se os termos serão números positivos ou negativos;
   ii) se ela é crescente ou decrescente (ou ainda nenhuma dessas opções);
   iii) se, graficamente, será côncava para baixo ou côncava para cima.

   Apresente justificativas.

   a) $a_n = 20 - 5n$ b) $a_n = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ c) $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$

   d) $a_n = n^3 - 3n^2 + 1$

Quadro 7 - Tarefa 2 : Estudo de Sequências
Fonte: adaptado de Nunes (2001) e Santos (2005)

Uma discussão foi apresentada por Ramos e Trevisan (2016) a partir de um “piloto” desenvolvido em uma turma de engenharia no primeiro semestre de 2016. Analisamos aqui mais detalhadamente, as representações feitas pelos estudantes da turma que participou de nossa pesquisa, na resolução da tarefa, após um redesenho[8] dela. Atendemos, assim, aos fundamentos da pesquisa de desenvolvimento, refletindo seu caráter cíclico, em que o professor pode adaptar suas tarefas a partir de experiência anterior, iniciando um novo ciclo. Esse tipo de pesquisa possibilita uma aproximação entre as pesquisas científicas e o contexto

---

[7] Reinventar não significa “criar” uma nova matemática e sim que tomem parte desta construção, que faça sentido seu desenvolvimento e suas estratégias auxiliem no desenvolver de novos conceitos.

[8] A nova tarefa comtempla mais sequências para análise de seu comportamento, bem como elementos norteadores desta análise.

real de sala de aula, permitindo que as tarefas possam ser resenhadas e adaptadas por professores em suas turmas.

A parte 1 da tarefa (P1) foi entregue aos grupos. Na questão 1, foram convidados a analisar o comportamento da sequência em termos de: (i) se os termos são números positivos ou negativos; (ii) se ela é crescente ou decrescente (ou ainda nenhuma dessas opções); (iii) se, graficamente, será côncava para baixo ou para cima (a análise de sua possível concavidade nos fornece elementos para o estudo da variação entre os termos consecutivos). Tais indagações buscavam que os estudantes analisassem o comportamento da sequência, bem como familiarização com seu gráfico, pois o gráfico de uma sequência é constituído por um conjunto de pontos, e normalmente os estudantes utilizam a representação gráfica de funções como um “traçado”.

Os grupos organizamram suas resoluções utilizando substituição numérica e esboço manual do gráfico. Nesse momento, o Geogebra ainda não havia sido formalmente apresentado aos grupos, mas, no decorrer da tarefa, eles foram convidados a representar as sequências dessa primeira parte neste *software*. Durante toda a aplicação da tarefa, puderam explicitar suas indagações sobre a resolução, tanto em grupo quanto em conjunto, com a docente responsável pela turma.

A Tarefa 2 permitiu que ideias que circunscrevem o conceito de convergência de sequências fossem trabalhadas. O comportamento gráfico dos estudantes traz subsídios de sequências que oscilam e podem tanto convergir quanto divergir, colocando em “xeque” o critério de convergência usualmente relacionado à monotonicidade, elemento apresentado nas pesquisas de Santos (2005), Nunes (2001), Roh (2008) e Prezenioslo (2005) como obstáculo à compreensão do conceito de limite. A exploração da ideia de que a partir de certo termo a sequência pode mudar seu comportamento é um fator importante na compressão da definição formal, associado ao termo n_0.

A tarefa possibilitou a problematização de elementos essenciais do conceito de convergência de sequências. Alguns exemplos de resolução dos grupos são analisados a seguir.

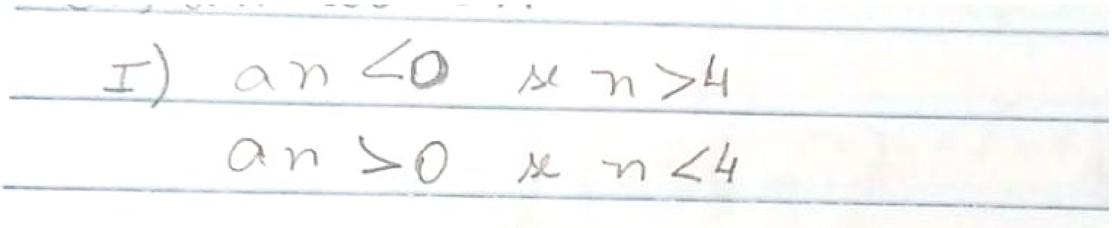


Figura 13 - Análise a partir de um termo da sequência
Fonte: autores

Na Figura 13, percebemos que o grupo analisa o comportamento da sequência bem como indica a partir de que termo determinado comportamento ocorre. Tal representação será explorada nas tarefas posteriores, pois, para a organização formal da definição de convergência, precisamos garantir a existência de um n_0. Essa resolução forneceu elementos para o estudo de uma sequência e sua convergência visto que temos de garantir a arbitrariedade de nosso ε tão pequeno quanto quisermos e, dessa forma, identificar, a partir de que termo a convergência é garantida.

O processo de substituição numérica para análise do comportamento é verificado na Figura 14, neste exemplo, eles organizaram um esboço gráfico para auxiliar o estudo da sequência.

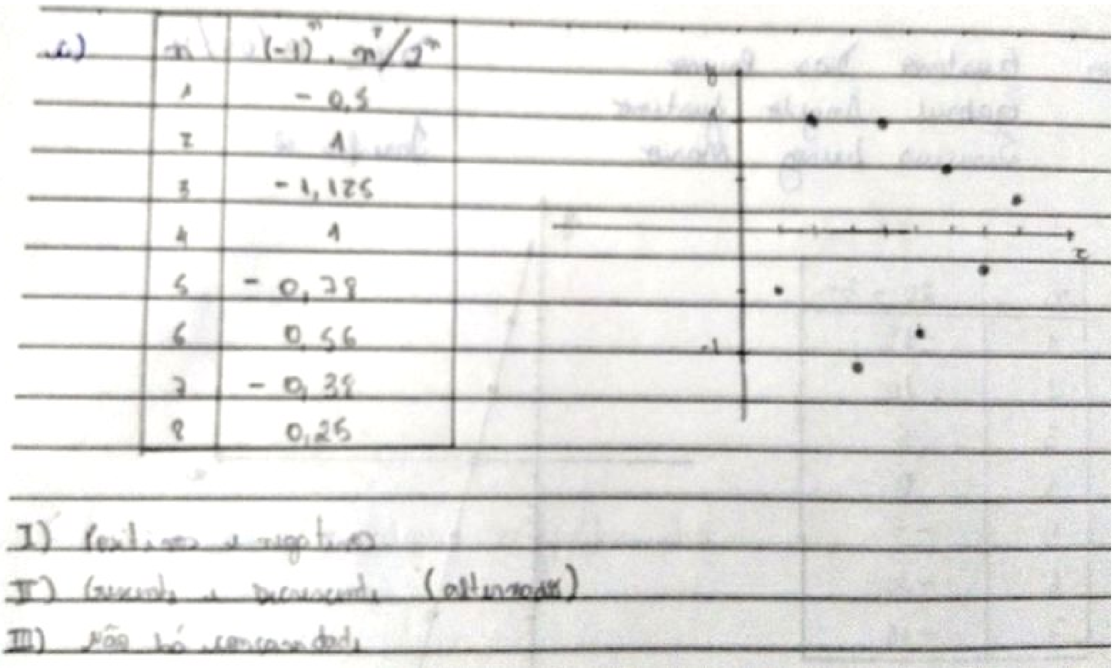


Figura 14 – Análise gráfrica da variação entre os termos da sequência
Fonte: autores

Uma análise da variação entre os termos da sequência é também apresentada pelos grupos que reconhecem uma sequência que cresce a uma taxa decrescente, bem como decresce a uma taxa crescente. Esses indícios do padrão de crescimento foram elencados na discussão da Tarefa 1, e, no momento da aplicação, alguns elementos foram postos em discussão.

Aluno C: Isso é estranho...

Aluno A: O quê?

Aluno C: Parece que ela cresce, mas a variação entre seus termos decresce...

Aluno B: Sim, parece aquela... aquela empresa 3.... lembra? Ela ficava estabilizada, crescia, mas não aumentava seus clientes.

Aluno C: Verdade, ela crescia e decrescia...

Aluno A: Ela cresce a uma taxa decrescente...

Docente: Sim, isso pode acontecer?

Aluno D: Parece que sim...

Docente: Como podemos apresentar isso?

Aluno C: Analisando o que acontece... acontece entre seus termos consecutivos, algumas crescem e sua variação diminuem, outras decrescem e sua variação aumentam.

Docente: Sim, isso pode acontecer!

A produção escrita apresentada na Figura 15 exemplifica a análise da variação entre os termos da sequência apresentada nos grupos. Destacamos que o Δ apresentado na análise da Tarefa 2 foi também utilizado na Tarefa 1. O uso do símbolo foi iniciativa deles, (possivelmente associado a conceitos físicos nos quais analisamos a diferença entre duas grandezas). Partindo dessa resolução, convencionamos que o símbolo seria utilizado na definição formal da variação entre os termos de uma sequência.

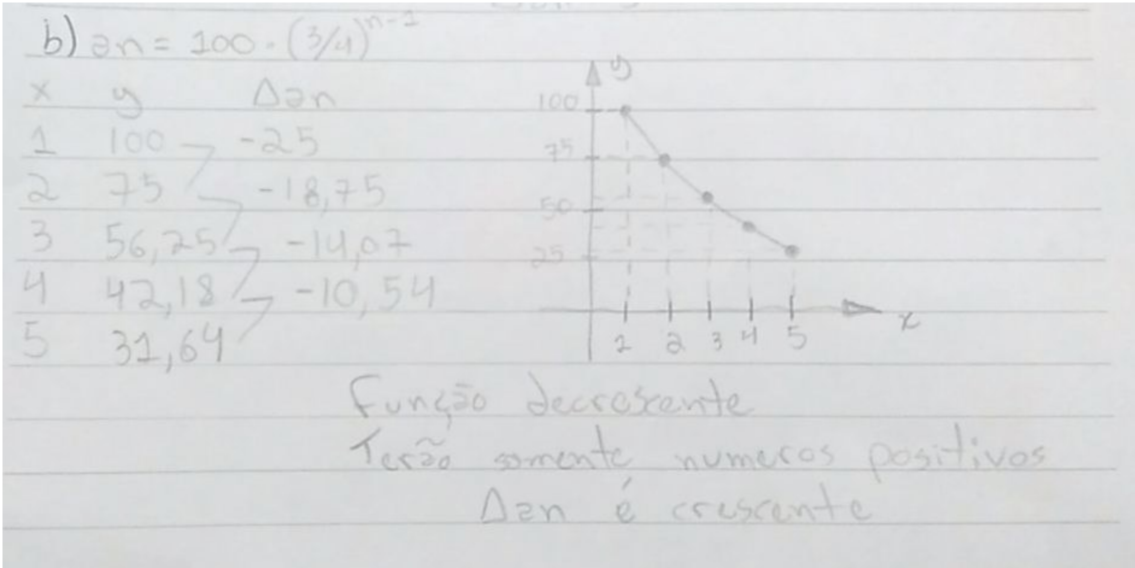


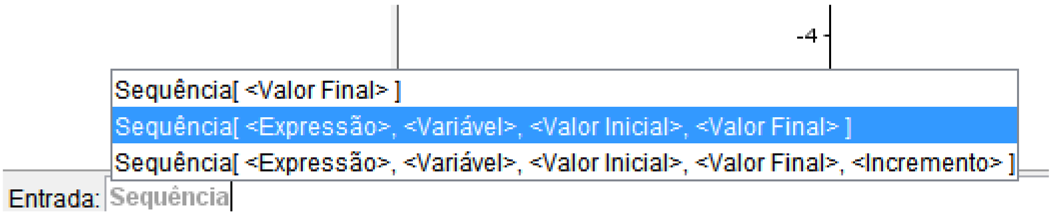
Figura 15 - Análise da variação entre os termos da sequência
Fonte: autores

Na primeira parte da tarefa, os estudantes analisaram o comportamento das sequências. Essa análise possibilitou a indexação de n_0 quando analisaram a partir de que ponto o comportamento da sequência se modifica ou não. A variação entre os termos consecutivos nos forneceu elementos do comportamento da sequência e com isso, também perceberam padrões entre a diferença de seus termos.

A segunda parte da tarefa – P2, Quadro 8, foi proposta num segundo momento e os convidava para uma análise do comportamento de sequências. Agora com o auxílio do *software Geogebra,* tendo sido escolhido por ser um *software* livre e possuir muito material disponibilizado *online* que ensina os comandos do programa. Além disso, a própria tarefa continha uma breve explicação de como construir tais comandos.

Utilizamos o *software* na perspectiva de possibilitar aos estudantes a manipulação de sequências e observar seu comportamento gráfico por meio de um recurso tecnológico, o que poderia otimizar o tempo de análise e, ao mesmo tempo, possibilitar o desenvolvimento de diferentes estratégias para a resolução da tarefa. Na primeira parte utilizaram substituições numéricas, tabelas e gráficos manuais para a resolução. Diante dessa diversidade de estratégias, o *Geogebra* amplia tais possibilidades.

2. Vamos agora analisar esses comportamentos com auxílio do **Geogebra**. Como exemplo, tome a sequência $a_n = n^3 - 3n^2 + 1$. No campo de entrada, digite **Sequência** e escolha a segunda opção, conforme abaixo:



Consideremos nossa variável sendo **n.** Em <Expressão>, coloque o seguinte par ordenado: (n,n^3-3n^2+1).

Dessa forma, teremos pontos plotados no plano cartesiano obedecendo à sequência informada. Substitua <Variável> por **n.** Substitua <Valor Inicial> por **1.** Por fim, substitua <Valor final> por **um valor de sua escolha.** Para melhor visualizar a tela e o comportamento da sequência, segure a tecla "Ctrl" e, com o botão esquerdo do mouse, re-escale o eixo y.

a) Utilize essa ferramenta para avaliar suas respostas na questão (1).

b) Investigue também as sequências a seguir:

i) $a_n = \frac{n}{n+1}$ ii) $a_n = \frac{n+20}{5n}$ iii) $a_n = \sqrt{n}$ iv) $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

v) $a_n = \sqrt[n]{a}$ (Automaticamente o programa irá lhe pedir para criar um controle deslizante para o número a)

c) Para cada uma das sequências investigadas até agora, descreva o que acontece quando tomamos valores "muito grandes" para **n**.

Quadro 8 - Parte 2: Tarefa 2
Fonte: adaptado de Santos (2005) e Nunes (2001)

Um fator a ser destacado é que a utilização dos comandos do Geogebra demandou certo tempo na aplicação da tarefa. Por isso, sugerimos que, para a sua inserção na versão final do produto educacional, os comandos do *software* possam ser trabalhados com os estudantes em um momento que anteceda a tarefa ou que um arquivo contendo as sequências devidamente organizadas possa ser a eles entregue, para sua utilização no desenvolver da tarefa.

Os estudantes foram novamente organizados em grupos heterogêneos, com três estudantes, agora, com integrantes diferentes dos da primeira parte da tarefa, mantendo-se o número de integrantes em cada grupo e o total de estudantes que participaram da tarefa.

Com a análise das resoluções, pudemos destacar algumas das descrições apresentadas pelos grupos: (i) analisam o crescimento de uma sequência, bem como o "padrão" de ocorrência, se cresce a uma taxa decrescente, por exemplo; (ii) apresentam descrições tais como: "tende/converge a" e (iii) fornecem indícios a partir de que ponto é possível garantir a convergência.

Alguns grupos descrevem a primeira sequência com as expressões: "parece que a sequência aproxima-se de 1", "tende a 1", "na verdade converge a 1". Este fato foi perceptível tanto nos áudios quanto na produção escrita dos grupos. A Figura 16 exemplifica uma resolução que representa as descrições das sequências feitas por sete dos quatorze grupos.

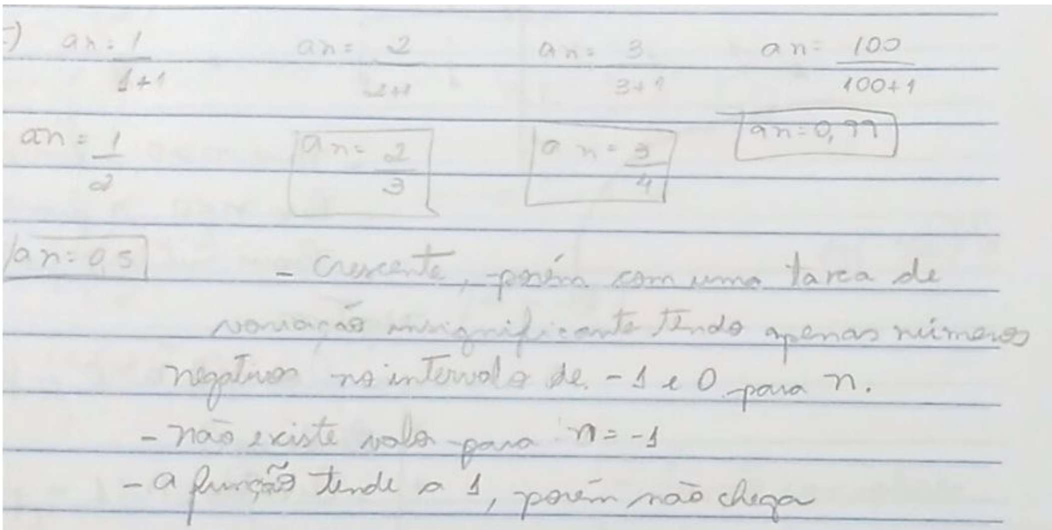


Figura 16 - Convergência de Sequência
Fonte: autores

Em relação à sequência (ii), uma conversa em G1 pode ser destacada. Na discussão sobre o comportamento das sequências, os integrantes do referido grupo analisaram a taxa de variação e apresentaram indícios do critério de convergência de uma sequência. Reproduzimos a transcrição do áudio da conversa, a seguir, a fim de ilustrar a ocorrência de tais indícios.

- Estudante A: Olhem só, a primeira sequência vai para 1....

- Estudante B: Verdade, e a segunda... parece...não vai pra zero..

- Estudante C: Acho que a segunda num é zero... ela chega perto de 0,2 mas não cai mais..

- Estudante C e A: A terceira é uma log... Será que tem limite?

- Estudante B: Sim, é log... Acho... que sim... Não sei, será que tem?

- Estudante A: A quarta chega perto de 1, vai alternando mas chega à quinta, acho que num chega em nada...

- Estudantes B e C: Sim, também acho...

A conversa do grupo forneceu elementos que ilustram a descrição de como os estudantes discutiram a variação entre os termos da sequência e descreveram seu comportamento. A descrição deles é um fator que podemos tomar como ponto de partida para a definição formal de convergência de sequência.

Outro fator importante é que, durante o desenvolvimento das tarefas em sala, fomentou-se a discussão e o compartilhamento de estratégias entre os grupos, conversas tanto com o próprio grupo quanto a exposição de estratégias para a sala como um todo. Nesse momento, os estudantes tinham a liberdade de ir ao quadro e apresentar para a sala seu desenvolvimento. Esse fato contribuiu com a organização de nosso ambiente de episódios de resolução de tarefas e com a sistematização de conceitos, sendo momentos de interação nas aulas. Na Figura 17, apresentamos uma resolução do G11, a qual exemplifica uma produção similar às apresentadas por outros nove grupos na resolução da tarefa proposta.

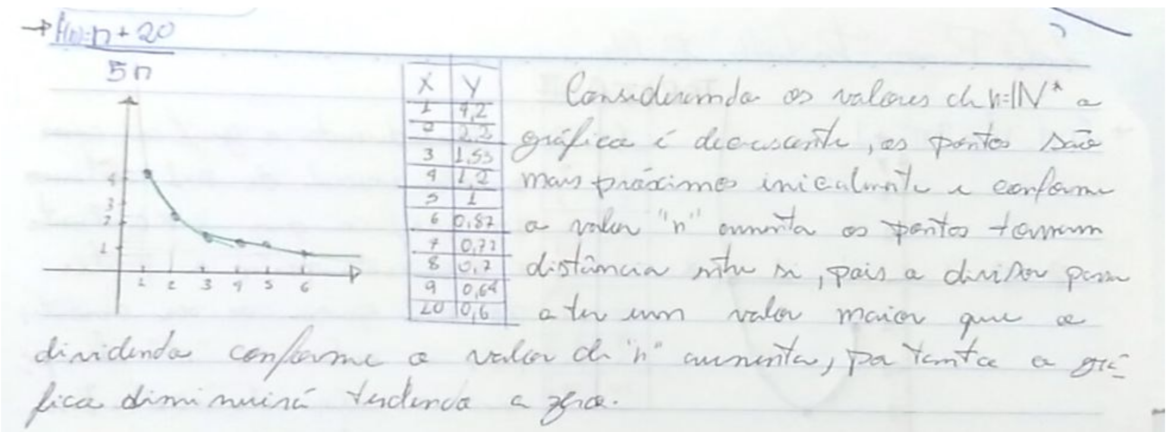


Figura 17 - Critérios de Convergência
Fonte: autores

Essa descrição de limite por aproximação, associada à ideia de “tende, mas não atinge”, é apresentada, nos trabalhos de Prezenioslo (2005) e Roh (2008) como um obstáculo à compreensão do conceito de limite, uma vez que esse fato não se aplica a qualquer sequência convergente (no caso de uma sequência constante, o limite não se aproxima de um valor, é o próprio valor). Descrições apresentadas pelas equipes durante a resolução dessa tarefa, como a mostrada na Figura 17, permitiram que esse aspecto fosse problematizado em momento de discussão coletiva com a turma.

Outro fato associado à ideia de limite por aproximação, também ilustrada na Figura 17, é atribuir a uma sequência convergente um limite igual a zero, o que é colocado em xeque naquele exemplo, em que a sequência converge a 0,2. Todos os indícios apresentados pelos grupos (os que circunscrevem o conceito de convergência no sentido de refiná-los e conceitos equivocados a serem desmistificados) na resolução foram tomados como ponto de partida na elaboração da tarefa posterior a essa.

No decorrer da aula, após os grupos terem finalizado a tarefa, um momento de discussão foi desenvolvido. A condução foi iniciada pela docente e a participação dos estudantes nas análises das sequências contribuiu para a sistematização do estudo de convergência de sequências numéricas, conforme destacado no trecho a seguir:

Docente: O que acontece com os termos de uma sequência quando tomamos valores para nosso n tão grande quanto quisermos?

Grupo 1 : Depende...

Docente: Se depende, depende de algo. Do que depende?

Grupo 1: Da sequência, tem umas que ficam próximas a um valor, outras não.

Docente: Hum, me explique melhor...

Grupo 2: Professora, a primeira sequência chega perto de 1, mas não atinge.

Grupo 1, 3, 4 e 5: Sim, verdade tende a 1.

Docente: esse comportamento pode descrever como convergência de sequência, mais elementos são necessários para que possamos garantir a convergência.

Grupo 6: E quando não tende a um valor

Docente: Podemos dizer que quando uma sequência não converge ela diverge.

Grupo 9: Então não tem limite é dito divergente...

Docente: Sim

Docente: E quanto ao comportamento das sequências trabalhadas na tarefa podemos ressaltar mais algum detalhe.

Grupo 12: Por mais estranho que pareça...

Docente: Diga

Grupo 12: É estranho dizer que alguma coisa cresce a uma taxa decrescente.

Grupo 13: Verdade, mas acontece cara!

Docente: Gente! Vamos fazer um combinado, para a próxima aula tentem apresentar uma descrição para esse comportamento das sequências, esse tende a deve ser apresentado em definição provisória de convergência, ou seja, procurem pensar sobre o seguinte: matematicamente falando, o que significa dizer que $lim_{n \to \infty} a_n$.

A sistematização da tarefa ocorreu em conjunto, envolvendo professora e estudantes. A transcrição apresentada relata esse momento. As sequências foram todas analisadas em termos de comportamento, variação entre termos consecutivos e convergência. Todo o desenvolvimento partiu das representações dos estudantes no desenvolver da tarefa, e a utilização do *Geogebra* auxiliou na análise das sequências, possibilitando a visualização de seu comportamento, não somente por meio de substituição numérica termo a termo, estratégia essa utilizada quando o estudante não tem um recurso tecnológico disponível. Foram discutidos com os estudantes conceitos que aparecem na resolução das tarefas por eles apresentadas e a sistematização de conceitos foram realizadas em conjunto com a professora e estudantes.

- diferença entre os termos consecutivos: possibilita analisar a variação entre os termos e a percepção do que acontece com essa variação quando uma sequência converge.
- comportamento a longo prazo: fornece elementos para analisar se uma sequência converge ou diverge.
- monotonicidade: as sequências possibilitaram que os estudantes percebessem que uma sequência pode oscilar e convergir ou até ser monótona e divergir.
- proposição a partir do n_0: quando analisam o comportamento e indexam a partir de que ponto o comportamento da sequência muda ou não.

Nesse momento, a descrição do significado do limite para n assumindo valores grandes (infinito) foi apresentada como proposta de uma nova tarefa para ser feita em casa, o que não tinha sido por nós pensado até o momento. Diante, porém, das representações dos estudantes, mostrou-se pertinente. Intentamos que a definição provisória por eles a ser organizada, nos forneça mais elementos para a organização da terceira tarefa visando a definição de limite não somente em termos de aproximação.

4.3 TAREFA INTERMEDIÁRIA

Na aula em que foi entregue a tarefa intermediária e que antecedeu a próxima aplicação, organizamos uma discussão sobre as descrições por eles apresentadas em sua resolução. Nesse momento, nossa intenção era exatamente tentar “sanar” algumas dúvidas que ainda pudessem ter em relação ao comportamento das sequências. Ocorreu também uma discussão sobre as definições provisórias por eles apresentadas referentes ao limite de uma sequência (convergência).

Analisando as produções, percebemos que os estudantes destacaram que, ao assumir valores suficientemente grandes $(n \to \infty)$ a sequência chegará a seu limite, ou seja, quando forem assumidos “valores grandes” para n , é possível que um limite seja encontrado para a sequência.

Na Figura 18, uma descrição desse comportamento é apresentada por um estudante: "Significa que n pode assumir qualquer valor e assume um valor tão grande quanto se quiser". Uma produção de um estudante toma o limite como sendo quase zero e, sem atingi-lo, ele descreve o comportamento de uma sequência $a_n = \frac{1}{n}$.

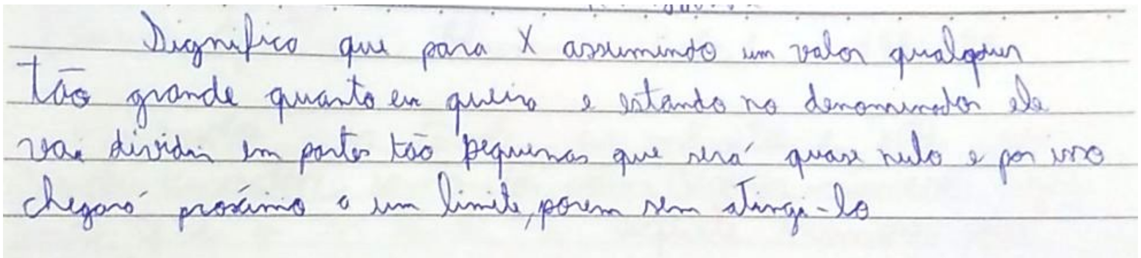

Significa que para X assumindo um valor qualquer
tão grande quanto se queira e estando no denominador ele
vai dividir em partes tão pequenas que será quase nulo e por isso
chegará próximo a um limite, porem sem atingi-lo

Figura 18 - Convergência de Sequência
Fonte: autores

Produções com descrições similares são apresentadas por outros estudantes da sala. Acreditamos que esta descrição é considerada como exemplo de limite de uma sequência. Analisam que quanto maior for o denominador da sequência (Figura 18), seu limite é zero. Os estudantes apresentam, neste momento uma definição provisória, sem citar uma aproximação, mas assumindo um valor para seu limite. Na Figura 19, temos outra descrição similar apresentada por um dos estudantes.

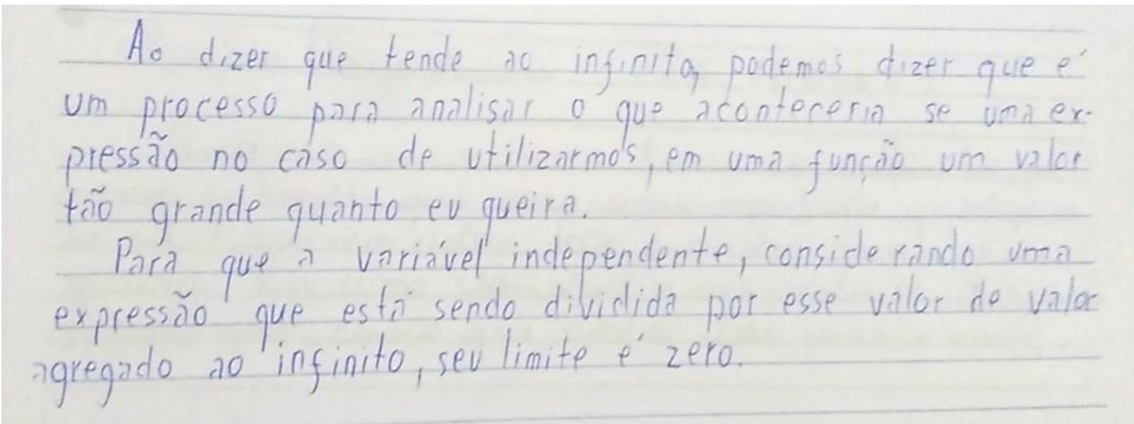

Ao dizer que tende ao infinito, podemos dizer que é
um processo para analisar o que aconteceria se uma ex-
pressão no caso de utilizarmos, em uma função um valor
tão grande quanto eu queira.
Para que a variável independente, considerando uma
expressão que está sendo dividida por esse valor do valor
agregado ao infinito, seu limite é zero.

Figura 19- Definição provisória de convergência de sequências
Fonte: autores

Outra produção nos chamou a atenção, visto que esta nos fornece indícios de que o estudante analisou o comportamento em longo prazo, assumindo valores para n suficientemente grande e tomando como exemplo a sequência $a_n=\frac{1}{n}$. Ainda descreve uma sequência na qual temos um valor grande, porém, dessa vez, multiplicando qualquer número, assim não haveria limite (diverge). A produção é apresentada na Figura 20.

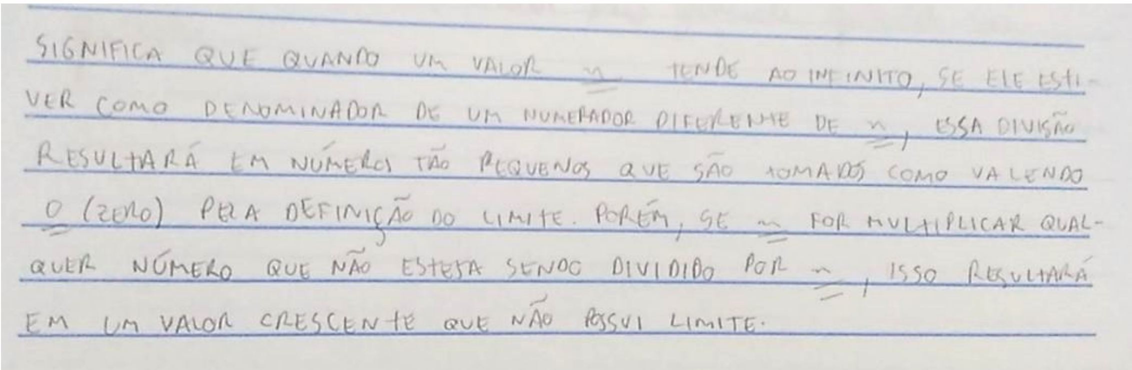

SIGNIFICA QUE QUANDO UM VALOR n TENDE AO INFINITO, SE ELE ESTI-
VER COMO DENOMINADOR DE UM NUMERADOR DIFERENTE DE n, ESSA DIVISÃO
RESULTARÁ EM NÚMEROS TÃO PEQUENOS QUE SÃO TOMADOS COMO VALENDO
0 (ZERO) PELA DEFINIÇÃO DO LIMITE. PORÉM, SE n FOR MULTIPLICAR QUAL-
QUER NÚMERO QUE NÃO ESTEJA SENDO DIVIDIDO POR n, ISSO RESULTARÁ
EM UM VALOR CRESCENTE QUE NÃO POSSUI LIMITE.

Figura 20 - Convergência de sequência
Fonte: autores

Após um momento de discussão sobre as definições provisórias apresentada pelos estudantes, sistematizamos alguns conceitos já apresentados e trabalhados no desenvolver das tarefas anteriores.

4.4 TAREFA 3

A aplicação da terceira tarefa contou com a participação de 13 grupos, totalizando 39 estudantes, e sua aplicação se deu em um encontro (3 horas-aula). A tarefa foi elaborada levantando em conta, equívocos apresentados pelos grupos na tarefa anterior e objetivou que mais elementos sobre convergência de sequências pudessem ser problematizados, em especial: (i) unicidade de limite, (ii) análise da convergência levando em conta os termos “a partir de certo ponto” e (iii) estudo de subsequências.

Como objetivo geral, a tarefa buscou possibilitar uma (re) elaboração da definição “provisória” de convergência que englobasse elementos já mencionados, bem como colocar concepções “prévias” em “xeque”, no sentido de perceber a necessidade de estabelecer um “combinado” com relação a isso, partindo para a sistematização da definição formal. A tarefa proposta trazia sequências definidas por partes, o que resultava em subsequências com comportamentos distintos, além de sequências que convergem e outras que divergem, provocando a necessidade de estabelecer alguma discussão sobre unicidade do limite.

Destacamos que, mesmo a tarefa contendo as explicações de como elaborar as sintaxes no *software* Geogebra, um arquivo contendo as sequências devidamente plotadas foi entregue aos grupos (nossa decisão se deu pelo fato de que a aplicação da tarefa no (Contexto A) demandou muito tempo para a plotagem). A entrega do arquivo pronto auxiliou os grupos em suas análises, podendo substituir seus comandos para valores tão grandes quanto quisessem. Analisando assim a sequência, em longo prazo, a lista que aparece ao lado esquerdo da Figura 21 contém as sequências, os estudantes podem selecionar uma a uma para sua visualização. Apresentamos na Figura 21 uma representação gráfica no software.

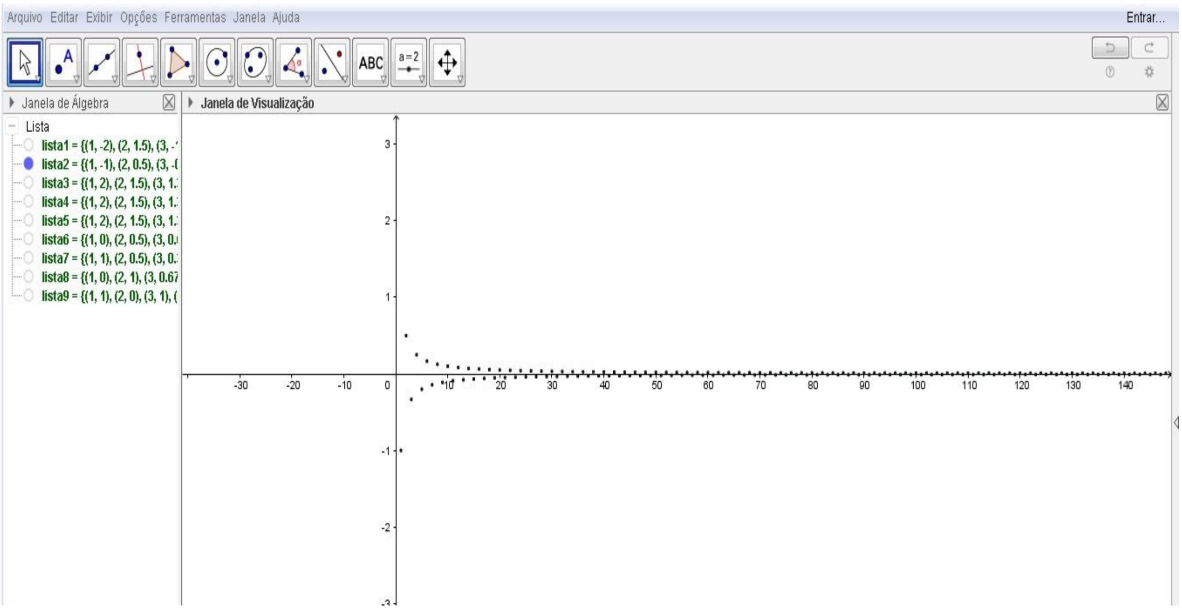


Figura 21 - Tarefa 3: Arquivo Geogebra
Fonte: autores

Nossa tarefa fora adaptada da pesquisa de Roh (2008). O autor desenvolveu uma tarefa com sequências definidas por mais de uma expressão e a utilizou para que os estudantes direcionassem um “olhar” às sequências que apresentam um comportamento não monótono e, mesmo assim, convergem. Indo de encontro com o comportamento de sequências convergentes que possuem comportamento único. Apresentamos no Quadro 9 a tarefa 3.

1.Vamos investigar agora sequências definidas por mais de uma expressão. Um exemplo é:

$$a_n = \begin{cases} 2, & é \quad múltiplo \quad de \quad 10 \\ 1+\dfrac{1}{n}, & para \quad qualquer \quad outro \quad valor \end{cases}.$$

No Geogebra, utilize o mesmo comando “Sequência” já apresentado. No campo <Expressão>, coloque o par ordenado **(n, Se[Resto[n, 10] == 0, 2, 1+1/n]).** Dessa forma, teremos pontos plotados no plano cartesiano obedecendo à sequência informada. Note que a imagem da sequência é 2 se da divisão do número n por 10 restar 0. Caso contrário, a imagem é 1+1/n.]

Investigue essa sequência e também as apresentadas abaixo, levando em conta os aspectos pedidos na questão (1) e descrevendo o que acontece quando tomamos valores “muito grandes” para **n**.

i) $$a_n = \begin{cases} 1, & é \quad múltiplo \quad de \quad 10 \\ 1+\dfrac{1}{n}, & para \quad qualquer \quad outro \quad valor \end{cases}$$

ii) $$a_n = \begin{cases} 2, & se \quad n = 1000 \\ 1+\dfrac{1}{n}, & para \quad qualquer \quad outro \quad valor \end{cases}$$

iii) $$a_n = \begin{cases} 2, & se \quad 1000 \le n \le 10000 \\ 1-\dfrac{1}{n}, & para \quad qualquer \quad outro \quad valor \end{cases}$$

iv) $$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & se\ n < 100 \\ 1, & se\ n > 100 \end{cases}$$

v) $$a_n = \begin{cases} 1, & se \quad n \quad é \quad par \\ 1-\dfrac{1}{n}, & se \quad n \quad é \quad ímpar \end{cases}$$

vi) $$a_n = \begin{cases} 1, & se \quad n \quad é \quad par \\ 0, & se \quad n \quad é \quad ímpar \end{cases}$$

Quadro 9 - Tarefa 3
Fonte: adaptado de Roh (2008)

Os grupos foram convidados a discutir o comportamento das sequências. Durante a passagem pelos grupos, pudemos destacar alguns elementos apresentados por eles na discussão da unicidade de limite:

Grupo 2: Mas.. professora se converge ..tem limite, certo?

Docente: Sim... Uma sequência convergente apresenta limite.

Grupo 2: Podemos ter dois limites?

Docente: Como assim? Explique-me melhor!

Grupo 2: Então... a primeira sequência do exemplo de construção do Geogebra tem dois limites, converge a 2 e a 1.

Docente: Hum! Será que podemos ter dois limites?

Grupo 1: Professora, podemos ter dois pontos de convergência?

Docente: Então, podemos?

Grupo 5: Não adianta perguntar....Ela sempre faz uma nova pergunta!

Grupo 6: Sim! Mas a construção deve ser nossa!

Grupo 9: É isso aí! Temos que organizar nossa sistematização!

Docente: Então precisamos definir isso! Pode ter dois limites?

Grupo 10: Se existe um limite, tem que ser único.

Docente: Fale mais sobre...

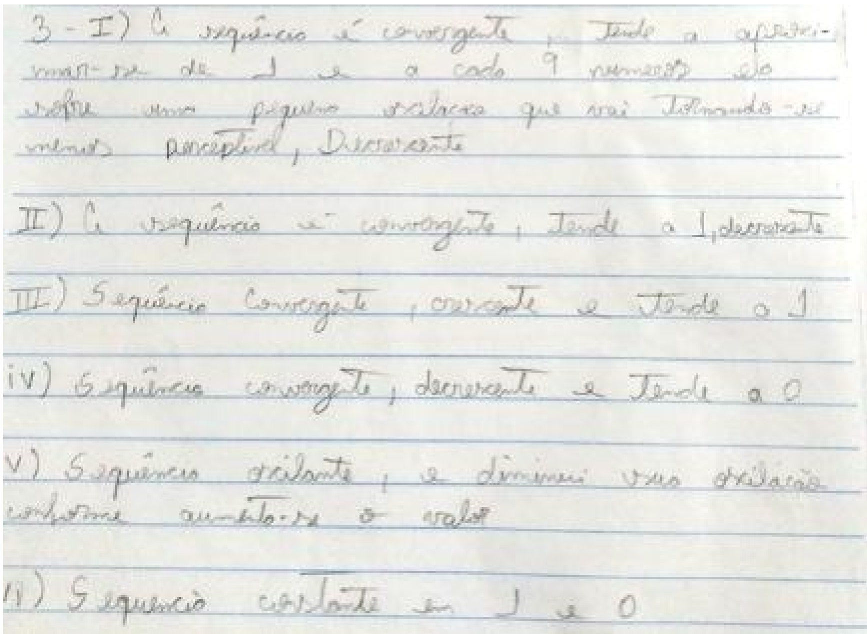
Grupo 10: Então, é... que.. tudo que tem limite tem um só, por isso achamos que tem que ser único.

Grupo 8 , 7 e 6 : Sim! Verdade... tem que ser!

Docente: Precisamos "refinar" nosso critério de convergência!

Esse diálogo ocorreu entre os grupos. Aqui se tornou perceptível a indagação dos grupos quanto à unicidade ou não de um limite, ou seja, se converge, pode ser para dois valores? Nesse momento, "passeando" e conversando com os grupos, percebemos que alguns tomavam o limite como único e outros grupos não garantiam a unicidade, a garantia é um momento crucial para o estabelecimento da definição formal.

Destacou-se, pela conversa entre os estudantes e os grupos, que, naquele momento, eles gostariam de uma resposta pronta, embora também fosse perceptível que o processo não seria assim. Identificavam que uma sistematização partiria de suas estratégias/representações para uma formulação como já se tornara costume na turma. Apresentamos, na Figura 22, uma resolução de alguns grupos quanto à "dupla" convergência e, na Figura 23, a garantia de sua unicidade.



3 - I) A sequência é convergente, tende a aproximar-se de 1 e a cada 9 números ela sofre uma pequena oscilação que vai tornando-se menos perceptível, Decrescente

II) A sequência é convergente, tende a 1, decrescente

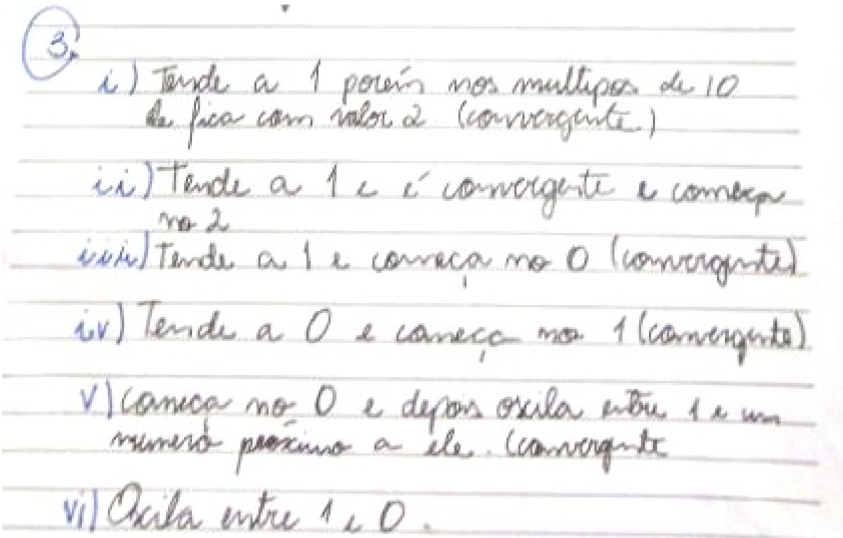
III) Sequência Convergente, crescente e Tende a 1

iv) Sequência convergente, decrescente e Tende a 0

V) Sequência oscilante, e diminui sua oscilação conforme aumenta-se o valor

VI) Sequência constante em 1 e 0

Figura 22 - Tarefa 3: Convergência de Sequências
Fonte: autores



3

i) Tende a 1 porém nos multiplos de 10 ~~de~~ fica com valor 2 (convergente)

ii) Tende a 1 e é convergente e começa no 2

iii) Tende a 1 e começa no 0 (convergente)

iv) Tende a 0 e começa no 1 (convergente)

V) começa no 0 e depois oscila entre 1 e um numero próximo a ele. (convergente

vi) Oscila entre 1 e 0.

Figura 33 - Tarefa 3: Convergência de Sequências
Fonte: autores

Os grupos também analisaram o que acontece com a variação entre os termos em uma sequência convergente e divergente, identificando um fator importante para garantirmos a convergência ou não de uma sequência. Apresentamos nas Figuras 24 e 25 uma produção escrita que exemplifica a descrição dos grupos em termos de variação.

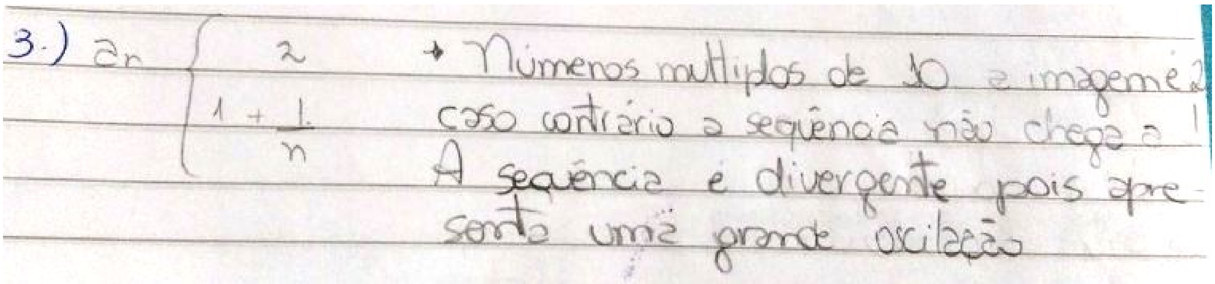


Figura 24 - Tarefa 3: Variação entre os termos
Fonte: autores

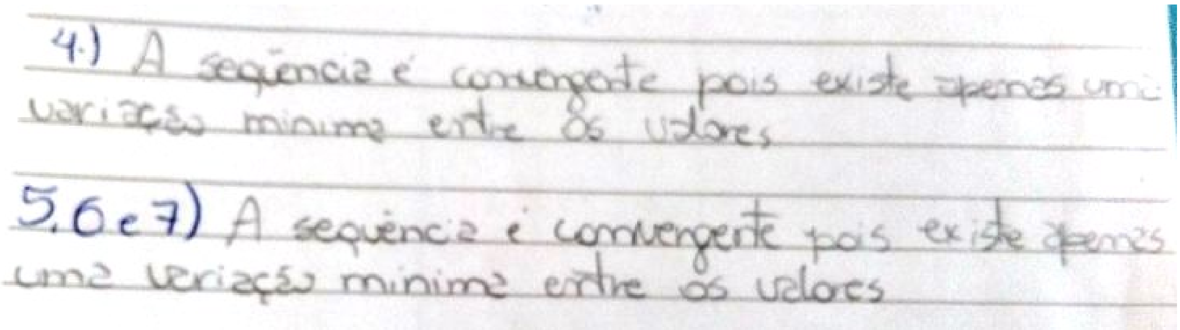


Figura 25 - Tarefa 3: Variação entre os termos
Fonte: autores

Na definição formal de convergência, a diferença entre termos consecutivos fornece elementos para sua análise, que envolve a distância entre os termos e o limite da sequência, para n suficientemente grande. Os grupos não apresentaram em suas produções escritas essa ideia. Acreditamos que a tarefa foi produtiva, mas não alcançamos em sua aplicação o que também tínhamos como objetivo.

Após o desenvolvimento da tarefa nos grupos, estes foram convidados a sistematizar em conjunto com a docente. Para isso, utilizamos as plotagens do Geogebra no *Datashow,* e transcrevemos todo o processo a seguir.

Docente: Vamos analisar juntos os comportamentos de cada sequência?

Grupos: Vamos!

Docente: O que acontece na primeira sequência quando tomamos valores grandes?

Grupo 3: Ela aproxima-se de dois pontos.

Grupo 4: Teria dois limites?

Grupos 13: Ela converge a dois pontos?

Docente: Então... Isso pode acontecer?

Grupo 7: Acho que não, tem que ter um só.

Docente: E a segunda sequência?

Grupo 1: Parece a primeira...mas, converge só para 1.

Grupo 2: Sim, ela é convergente!

Docente: E a terceira sequência?

Grupo 6: Convergente! Só tem um ponto fora!

Grupo 7: Sim, isso aí!

Docente: E a quarta sequência?

Grupo 8 : Essa tem mais pontos fora, mas converge!

Docente: Podemos descartar alguns pontos da sequência e garantir sua convergência?

Grupo 12 e 13: Então, acho que não! Ou podemos?

Docente: Então precisamos saber o que acham.

Grupo 5: Achamos que se for pouco ....podemos!

Docente: E a última sequência?

Grupo 7: Ela apresenta dois valores, não converge!

Docente: Mas algum grupo gostaria de me explicar o comportamento dessa sequência?

Grupo 5: Então, ela não apresenta uma variação mínima entre os termos, sabe quando vai diminuindo?

Docente: Explique-me melhor!

Grupo 5: É que percebemos que quando uma sequência converge, a variação entre os termos diminui!

Grupo 7: Verdade!

Docente: Hum, então isso deve ser uma garantia?

Grupo 5: Sim!

Docente: Sim, em uma sequência convergente, a variação entre os termos consecutivos realmente diminui!

Grupo 6: Na última sequência temos duas? Como podemos chamar?

Docente: Todas são sequências definidas por mais de uma expressão e chamamos de subsequências.

Após a sistematização, destacamos alguns aspectos da definição formal que a tarefa potencializou:

- diferença entre termos consecutivos;
- o estudo de subsequências;
- monotonicidade;
- comportamento a longo prazo;
- uma discussão sobre a unicidade de limite.

Esses elementos são necessários para a organização de nossa definição provisória de convergência rumo a definição formal. Tomamos então uma nova tarefa, intermediária para casa, para que os estudantes pudessem pensar mais ainda sobre estes aspectos da definição, de maneira pontual: (i) o limite é único? (ii) quantidade finita de termos pode ser desprezada?, (iii) uma sequência constante tem limite?

4.5 TAREFA INTERMEDIÁRIA

A nova tarefa intermediária foi proposta no momento de aula da aplicação da Tarefa 3 devido à necessidade de garantir alguns aspectos de critério de convergência . Foi solicitado aos estudantes que a tarefa deveria ser entregue na seguinte aula. Na entrega, destinamos um tempo para conversarmos sobre as definições que eles apresentaram. O enunciado da tarefa sugeriu: Definir uma sequência convergente respondendo as seguintes perguntas:

(i) O limite pode ser atingido?
(ii) O limite é único?
(iii) Uma quantidade finita de termos pode ser desprezada?
(iv) Uma sequência constante tem limite?

As novas indagações lançadas para os estudantes buscaram “refinar” as suas definições para convergência de uma sequência somente em termos de aproximação, o que não acontece em uma sequência constante. Foi realizada pelos mesmos grupos da Tarefa 3. A escolha partiu deles, visto que já haviam discutido em grupo a tarefa e a nova trazia indagações, buscando recolher as idéias dos estudantes sobre convergência de sequência. Apresentamos nas Figuras 26 e 27 as descrições de grupos que consideramos representativos da produção da turma.

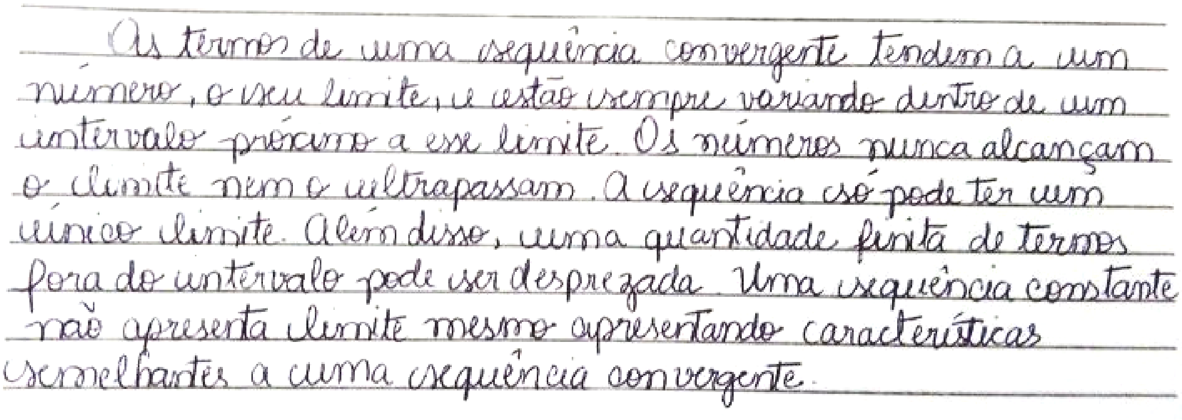

Os termos de uma sequência convergente tendem a um número, o seu limite, e estão sempre variando dentro de um intervalo próximo a esse limite. Os números nunca alcançam o limite nem o ultrapassam. A sequência só pode ter um único limite. Além disso, uma quantidade finita de termos fora do intervalo pode ser desprezada. Uma sequência constante não apresenta limite mesmo apresentando características semelhantes a uma sequência convergente.

Figura 26 - Sequência Convergente
Fonte: autores

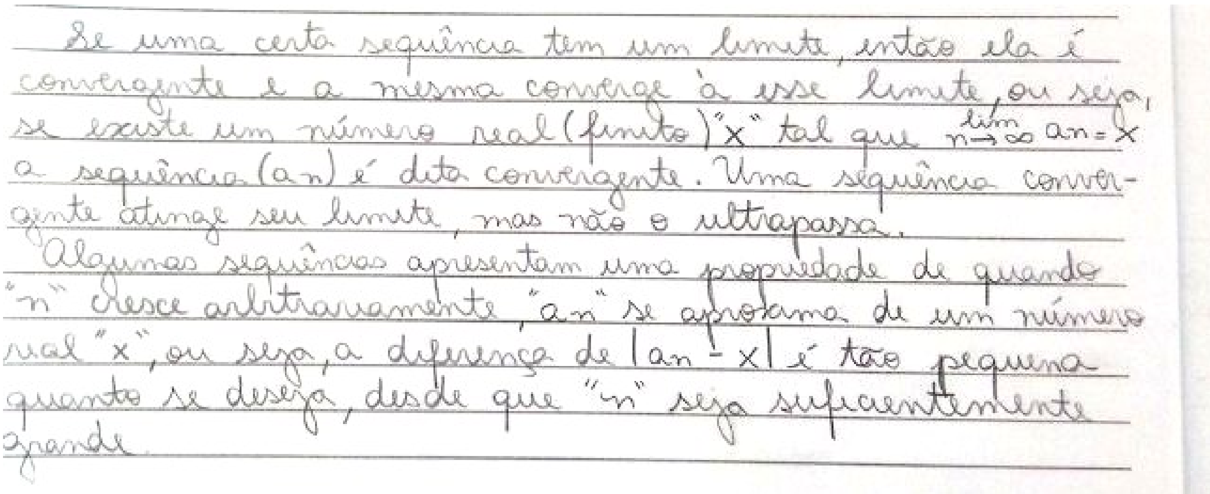

Se uma certa sequência tem um limite, então ela é convergente e a mesma converge à esse limite, ou seja, se existe um número real (finito) "x" tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ a sequência (a_n) é dita convergente. Uma sequência convergente atinge seu limite, mas não o ultrapassa.
Algumas sequências apresentam uma propriedade de quando "n" cresce arbitrariamente "a_n" se aproxima de um número real "x", ou seja, a diferença de $|a_n - x|$ é tão pequena quanto se deseja, desde que "n" seja suficientemente grande

Figura 27 - Sequência Convergente
Fonte: autores

A produção escrita retratada na Figura 26 indica que os estudantes garantem a unicidade de limite, desprezam uma sequência constante como sendo convergente e descartam uma quantidade finita de pontos para garantir a convergência. No outro exemplo de produção escrita dos estudantes, Figura 27, é apresentada uma representação modular para explicar a convergência em termos de diferença, bem como garante o limite a ser atingido é garantido, mesmo assim, é desprezada uma sequência constante, com a justificativa de que ela não atinge o limite e, sim, é determinado valor, o que aparece em mais grupos.

A tarefa proposta para ser realizada fora de sala de aula forneceu elementos para uma nova discussão em sala, que antecedeu a aplicação da Tarefa 4. Nesse momento, os estudantes perceberam que o limite deve ser único, que podemos desprezar finitos pontos da sequência desde que infinitos garantam sua convergência.

4.6 TAREFA 4

A Tarefa 4 foi aplicada no mesmo dia da discussão da tarefa realizada em casa. Nesse momento, buscamos que os estudantes pudessem manipular algebricamente as sequências em busca de uma definição formal a ser construída. Para isso, disponibilizamos as sequências devidamente plotadas em uma folha impressa. Como a definição de convergência precisa garantir a arbitrariedade de nosso ε, entregamos aos grupos "tiras" confeccionadas em material transparente, com semi-larguras para que pudessem analisar as sequências.

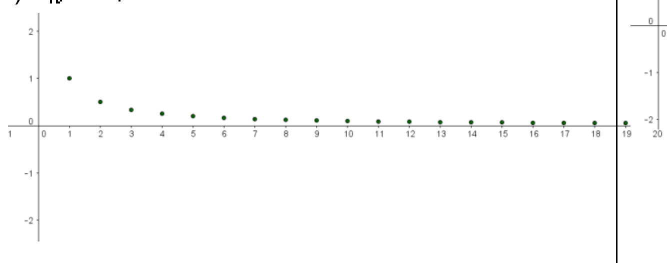
Nosso objetivo central com a tarefa foi que os estudantes estabelecessem uma relação entre o n_0 e ε (dependência mútua) e a arbitrariedade do ε. Apresentamos no Quadro 10 a tarefa proposta.

1.Você está recebendo algumas "tiras" de largura constante, com uma linha ao centro para marcar um suposto "limite", no caso da sequência ser convergente.

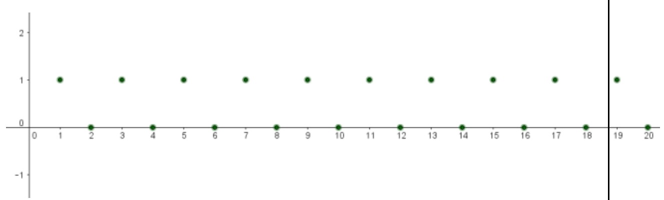
a)Para cada sequência a seguir, e para cada tira que receber, analise como se distribuem os pontos do gráfico da sequência, em relação à tira (se estão dentro ou fora).

b)O que significa dizer que uma sequência é convergente, em termos do comportamento observado no item anterior?

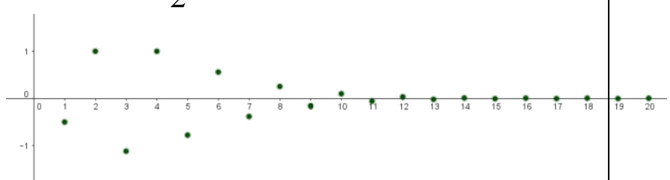
i) $a_n = 1/n$

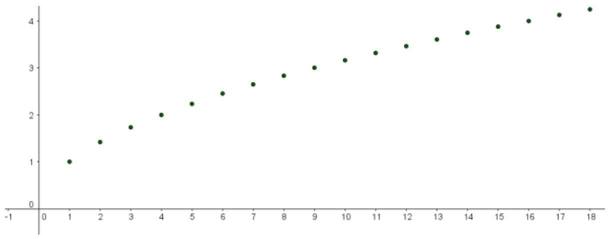
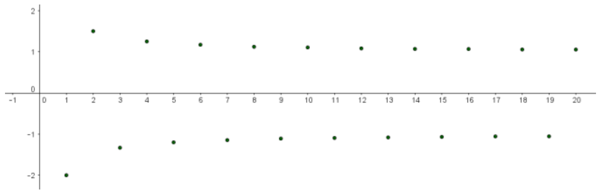


iv) $a_n = \begin{cases} 1, & se \quad n \quad é \quad par \\ 0, & se \quad n \quad é \quad ímpar \end{cases}$



v) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{2^n}$



ii) $a_n = \sqrt{n}$  iii) $a_n = (-1)^n(1+1/n)$ 	2. Considere a sequência $a_n = 1/n$. a)Tomando uma tira de semi-largura 0,25, a partir de qual termo da sequência podemos garantir que todos os termos subsequentes fiquem dentro da tira? b)Tomando uma tira de semi-largura 0,10, a partir de qual termo da sequência podemos garantir que todos os termos subsequentes fiquem dentro da tira? c)Tomando uma tira de semi-largura 0,01, a partir de qual termo da sequência podemos garantir que todos os termos subsequentes fiquem dentro da tira? 3. Refaça a questão anterior para as sequências $a_n = 10/n$ e $a_n = 1 + 3/n^2$.

Quadro 10 - Tarefa 4
Fonte: autores

A tarefa objetivou trazer elementos que permitissem realizar uma sistematização de conceitos anteriores, e aproximar os conceitos provisórios de convergência de uma sequência numérica de sua definição formal. Para sua realização, os 45 estudantes foram divididos em 15 grupos. Como de costume, na aplicação das tarefas na turma, destinou-se um tempo para os grupos analisarem as sequências e indicassem a partir de qual termo os subsequentes ficariam dentro das “tiras”. O desenvolvimento da tarefa auxiliou os grupos em sua análise, bem como ressaltou a unicidade, pois as tiras não “dariam conta” de englobar dois limites. Nossas tiras, como especificado na tarefa, eram de diferentes espessuras, e quanto mais fina fossem, maior seria o índice da posição para a qual garantiríamos que todos os termos subsequentes fossem por ela cobertos (no caso da sequência convergente). Apresentamos, na Figura 28, uma representação dos grupos ao trabalharem com as tiras na resolução da tarefa.

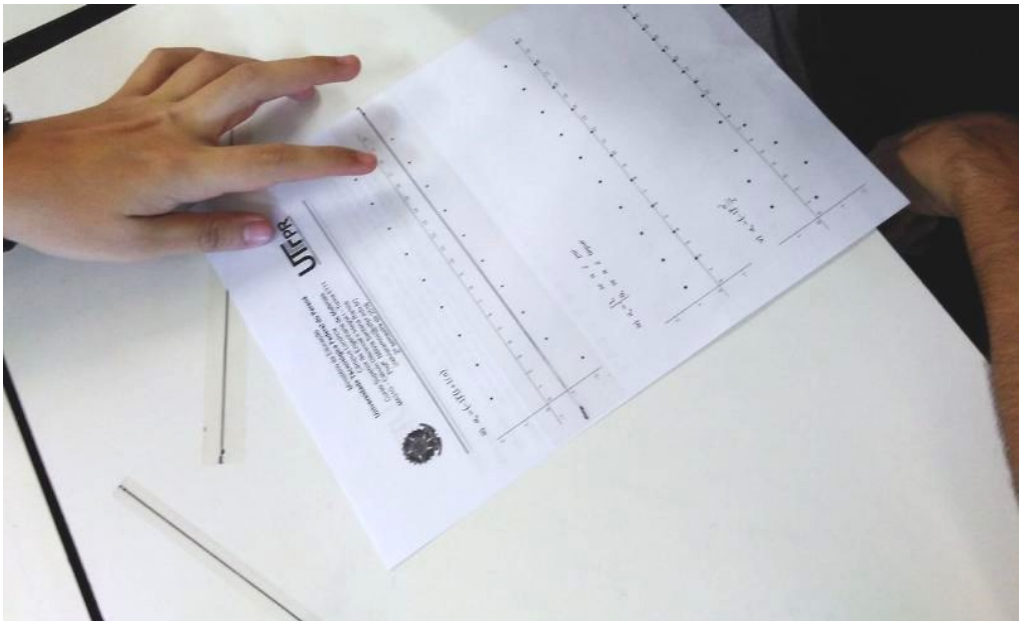
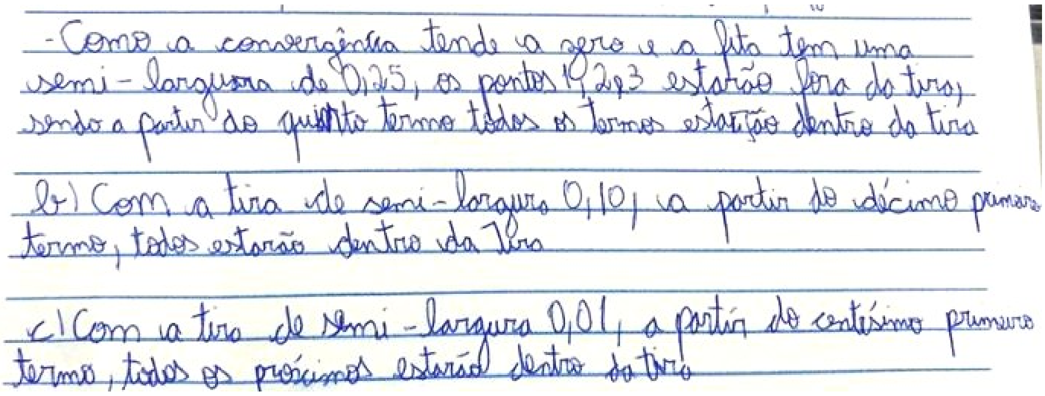


Figura 28 - Tarefa 4: Tiras
Fonte: autores

Pensamos em algo que fosse manipulável (palpável), com o qual os grupos pudessem “testar” suas diferentes larguras no “candidato” a limite, pois o traçado central em cada uma tem esse objetivo. A definição desenvolvida *a priori* com a turma enunciava:

Uma sequência é convergente se a partir de um n positivo todos os termos ficam dentro de uma tira de qualquer largura.

Ressaltamos que ainda precisávamos refinar nossa definição. Ela não dava conta de abranger todas as possíveis sequências numéricas. Nesse momento pudemos destacar algumas produções escritas apresentadas pelos grupos, nas quais apareceu a indicação de n_0. Apresentamos na Figura 29 uma produção que exemplifica o pensamento e as produções escritas dos demais grupos.


- Como a convergência tende a zero e a fita tem uma semi-largura de 0,25, os pontos 1, 2 e 3 estarão fora da tira, sendo a partir do quinto termo todos os termos estarão dentro da tira

b) Com a tira de semi-largura 0,10, a partir do décimo primeiro termo, todos estarão dentro da tira

c) Com a tira de semi-largura 0,01, a partir do centésimo primeiro termo, todos os próximos estarão dentro da tira

Figura 29 - Tarefa 4
Fonte: autores

Depois de um tempo destinado às discussões entre os grupos e à exploração de todos os itens da tarefa e partindo de suas representações/estratégias na resolução, a notação para a garantia da convergência foi apresentada à turma, como segue:

Uma sequência é convergente, ou seja, existe $lim_{n \to \infty} a_n = L$, se, para qualquer tamanho de tira, existe uma posição tal que, para todos os pontos após n_0, todos os pontos fiquem dentro da tira.

Simbolizando nossa definição, temos: existe $lim_{n \to \infty} a_n = L$ se, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que, para todo $n > n_0$, temos $|a_n - L| < \varepsilon$, ou seja, $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

Neste momento, os grupos continuaram com a manipulação algébrica das sequências, indexando n_0·Apresentamos Figura 30, uma produção escrita que exemplifica o comportamento dos demais grupos na resolução do item 3 da tarefa.

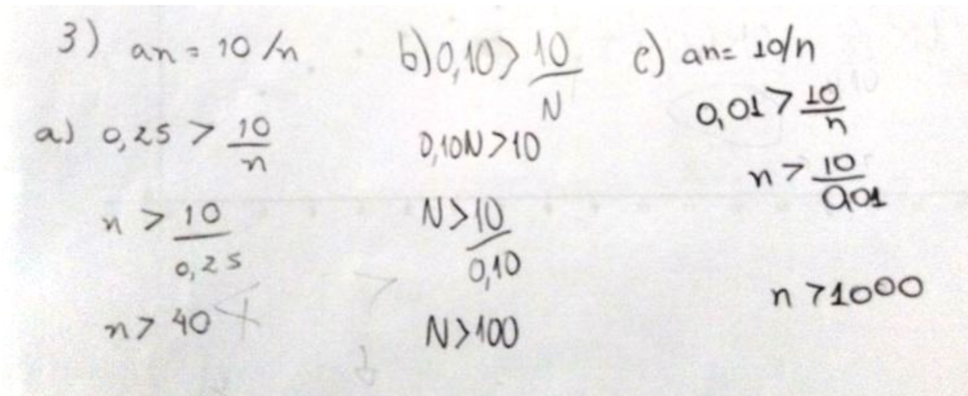


Figura 30 - Tarefa 4: Indexação do n_0
Fonte: autores

Os grupos tiveram sua participação ativa em todo o processo de elaboração das definições desenvolvidas em decorrência das tarefas. Um momento que antecede a sistematização formal da definição é evidenciado por meio dos recortes nos diálogos, conforme segue.

Docente: Grupos! Vamos conversar um pouco antes da sistematização!

Grupos: Vamos sim!

Docente: O que a sequência de tarefas propiciou a vocês?

Grupo 2: Então... no começo era meio estranho, todas as suas perguntas e a falta de respostas.

Grupo 3 e 4: Sim, verdade!

Docente: Certo, falem mais!

Grupo 2: Só que entendemos que fazia parte do processo e isso foi bom! Pois pudemos aprender muito, questionar, e organizar nossa matemática.

Grupo 7: É... parece que ela não é tão difícil assim!

Docente: Quem, a matemática?

Grupo 7: Sim, quando começamos o curso nos falaram que íamos sofrer bastante. Mas a forma trabalhada auxiliou no desenvolvimento de conceitos que normalmente são apenas apresentados. E, no nosso caso, pudemos construí-lo sem respostas prontas e únicas.

Grupo 15: Parece que nós descobrimos a matemática!

Docente: Então, o processo que trabalhamos com nossas tarefas demorou mais de um "século" para ficar no formato rigoroso que temos hoje. O que vocês puderam sentir foi "um gostinho" de como tudo isso aconteceu.

Nesse momento, organizamos em conjunto a definição formal de uma sequência numérica convergente. Para exemplificar o que foi desenvolvido em conjunto, tomemos a sequência $a_n = \frac{10}{n^2}$.

Então

$$\lim_{n \to \infty} \frac{10}{n^2} = 0$$

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{10}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{10}{n^2} < \varepsilon$$

$$10 < \varepsilon n^2$$

$$\frac{10}{\varepsilon} < n^2$$

$$\sqrt{\frac{10}{\varepsilon} < n}$$

Basta tomar $n_0 = \sqrt{\frac{10}{\varepsilon}}$. A partir deste n_0, todos os pontos da sequência estarão dentro da tira de largura ε. O desenvolver das tarefas propiciou aos estudantes total interação entre grupos e docente. A cada nova descoberta na resolução das tarefas, esse fato se tornava mais notório. A Tarefa 4 possibilitou que todos os elementos que circunscrevem o conceito de convergência apresentados no Quadro 5 fossem explorados, e organizamos a definição formal de convergência de sequências numéricas, bem como a tomamos como base para a elaboração formal da definição de limite.

5 ANÁLISE RETROSPECTIVA E REFLEXÕES SOBRE A EXPERIÊNCIA

A organização de nosso ambiente de aprendizagem em episódios de resolução de tarefas envolveu a elaboração e aplicação de tarefas nas aulas de CDI 1, em um contexto no qual assumi o duplo papel de professora e pesquisadora (contexto B). Inicialmente a aplicação das tarefas aconteceria em ambas às turmas, com planos de ensino distintos, ou seja, o plano de ensino do (contexto B) seria no formato usual dos cursos de CDI 1, enquanto no (contexto A) seria reestruturado pelo orientador desta pesquisa conforme apresentado no Quadro 2. No entanto, a proposta da reestruturação do plano de ensino como um todo fora realizada, nesse momento a “insegurança” em aceitar ou não a proposta, gerou certa “inquietação” na decisão a ser tomada.

Toda a organização das aulas de CDI 1, partindo de tarefas que visavam a reestruturação do curso, na qual os estudantes tornam-se participantes ativos no desenvolver de conceitos da disciplina, exige do professor responsável pela turma muita dedicação em todo o processo. A insegurança mencionada e relacionada ao aceite da proposta se deu no sentido de que: será que “daria conta” de desenvolver o mesmo trabalho que tive a oportunidade de presenciar em algumas aulas que participei na turma de meu orientador?

Enfim, após reflexão, a proposta foi aceita. Acreditei naquele momento que a mudança de atitude em relação ao trabalho a ser desenvolvido contribuiria no desenvolvimento dos estudantes no decorrer do curso, bem como, na minha prática enquanto docente.

Nossa proposição de tarefas representa uma ruptura na prática pedagógica tradicional descrita por Nunes (2001). Esta autora aponta para uma nova dinâmica de sala de aula, a qual exige uma mudança de atitude tanto de professores quanto de estudantes.

O duplo papel na pesquisa contribuiu para elencar fatos que somente poderiam ser notados por alguém que estivesse convivendo no dia a dia de sala de aula. Toda a interação descrita e analisada contribuiu com a mudança de comportamento dos estudantes nas aulas de CDI 1, no que diz respeito às atitudes na busca do desenvolver de conceitos da disciplina. Estes inicialmente, esperavam apresentação e demonstrações de conceitos novos, para depois resolver exercícios de aplicação. Agora se tornaram participantes ativos na elaboração de um conceito.

Ele não veio pronto. Sua flexibilidade aos expressar estratégias para a sala pôde ser evidenciada. Em consonância com essa perspectiva, Mestre e Oliveira (2016) afirmam que, “ao interagir com os alunos, o professor-investigador procura criar um ambiente de harmonia, motivando-os a explicarem seus raciocínios e ouvindo-os atentamente” (p.28).

A reestruturação na dinâmica do curso, respaldada em Weigand (2014), exigiu uma mudança de atitude no desenvolver das aulas. Antes, seguia-se um plano de ensino usual: um novo conceito era apresentado aos estudantes, demonstrações apresentadas, exemplos eram trabalhados e, posteriormente, buscava-se a “fixação” e “aplicação” com listas de exercícios. Agora é organizado por meio de tarefas e, parte das representações dos estudantes apresentadas em suas resoluções, que, sistematizadas, seguem rumo a os conceitos da disciplina, culminando com a definição formal.

Nossa mudança da dinâmica do curso requer do professor um repensar de sua prática de ensino no desenvolver de conceitos, em especial, requer um identificar potencialidades que possam decorrer da aplicação das tarefas e possíveis adaptações, se necessário, para alcançar seu objetivo. Em nosso contexto, partimos das tarefas para o estudo de sequências convergentes como desencadeadoras de limite de uma função. A organização em episódios de resolução de tarefas difere em sua abordagem de uma aula tradicional. As tarefas propostas são o “ponto chave” para a elaboração de conceitos de CDI 1, e os estudantes as desenvolvem em grupos, o que possibilita a troca de estratégias. Nesse sentido, o professor, ao propor uma tarefa, deve identificar conceitos que possam ser primeiramente explorados pelos estudantes de forma intuitiva para, posteriormente, serem sistematizados.

Em nosso ambiente, não estamos “banindo” as listas de exercícios, mas introduzindo uma proposta de tarefas, as quais são realizadas tanto em sala de aula quanto fora dela. No decorrer das aulas, novas tarefas são abordadas e propostas, também para serem realizadas em momentos fora da sala e entregues posteriormente. As tarefas “para serem realizadas em casa” visam contribuir para solucionar possíveis dúvidas, assim como listas com enunciados usuais foram propostas para exploração e aprofundamento de conceitos já sistematizados em aula.

Ressaltamos ainda que, para cada tarefa proposta a ser realizada fora da sala de aula, ocorre uma discussão, entre docente e estudantes, sobre o seu desenvolvimento e sobre os procedimentos que poderão ser utilizados para sua execução. Cada tarefa por eles realizada num momento posterior às aulas contribui no desenvolvimento de conceitos que serão sistematizados nas tarefas em sala.

Destacamos que, em nosso ambiente, pautado em episódios de resolução de tarefas, a atitude do docente em sala é direcionada a não fornecer respostas prontas e sim a novas indagações inseridas no desenvolver de tarefas. Não intentamos que os estudantes forneçam uma única resposta, mas sim estratégias de resolução que direcionem o desenvolver de novos conceitos da disciplina e a elaboração de novas tarefas; que "deem conta" da sistematização, conceitualização, e, posteriormente, da elaboração de uma definição formal.

Nossa metodologia de pesquisa auxiliou em todo o processo. Pode-se identificar um caráter cíclico que se estende de nossa metodologia de pesquisa às aulas. O *Design Research* carrega esta característica, engloba um conjunto de metodologias que auxiliam no desenvolver, aplicar, analisar e, se necessário, no redesenho da tarefa proposta.

Um aspecto das aulas de CDI 1 merece ser destacado, o de que os estudantes chegam à disciplina de CDI 1 acostumados à apresentação de novos conceitos seguidos de exercícios de aplicação, o que acaba sendo reforçado pela prática pedagógica usual dos professores do Ensino Superior. Quando questionados, na resolução das tarefas, sobre as estratégias utilizadas em sua resolução e se suas definições provisórias dariam conta de abarcar a amplitude dos conceitos envolvidos, sempre buscavam uma resposta direta a lhes ser devolvida pela docente. Porém, em vez disso, recebiam novos questionamentos para continuarem a tarefa.

Outro fator importante foi a liberdade de discussão desenvolvida ao longo do semestre entre os estudantes e de apresentação de suas estratégias para a sala. Inicialmente era perceptível certo receio em propor a discussão em aberto para todos, o que não durou muito tempo. Após a aplicação da primeira tarefa, logo no desenvolver da segunda, percebemos uma mudança de atitude por parte dos estudantes.

As discussões em sala sobre o comportamento das sequências abordadas pelas tarefas fizeram parte dessas primeiras aulas e a sistematização foi realizada em conjunto: professor e estudantes. De modo geral, essa mudança de paradigma, em que os estudantes trabalhavam em grupos e eram convidados a explicitar suas estratégias de resolução, tornou a aula mais dinâmica e favoreceu o desenvolvimento de conceitos durante a disciplina como um todo.

O estudo de sequências numéricas e de sua convergência foge um pouco das aulas de CDI 1 usuais de um curso semestral, já que é um tema abordado em CDI 3. No nosso caso, ao invés de se iniciar o curso com o estudo de funções e limite, a organização de nosso ambiente iniciou com o estudo de sequências. Assim, no decorrer da disciplina, o estudo de convergência foi tomado como ponto de partida para o estudo de limite de uma função. Assim, a intenção é que nossas tarefas não precisem ser precedidas de explanações teóricas prévias, mas que seja um instrumento que possibilite um “levantamento de ideias” a partir das quais se possa organizar uma definição formal.

Acreditamos que o sucesso ou não de uma tarefa está intrinsecamente relacionado com sua abordagem em sala com os estudantes. Uma boa tarefa pode ser simplesmente vista como uma atividade de aplicação quando o docente direciona um caminho para a resolução que visa a uma única resposta. Esse não foi nosso objetivo, buscamos que trouxessem elementos essenciais no desenvolver de conceitos (no caso, convergência de sequências numéricas).

Em todas as tarefas propostas destinamos um tempo para os grupos organizarem suas estratégias de resolução. No decorrer desse tempo, o papel do professor foi de conversar com os grupos em separado e, nesse momento, a cada pergunta, nossa resposta foi no sentido de “instigá-los” a “novos olhares”. Como não almejamos respostas únicas e sim que possamos partir de suas estratégias para uma sistematização de conceitos, acabamos, de alguma forma, “guiando-os” com novas indagações. Nesse momento é que se destacou a participação dos estudantes na elaboração de novos conceitos. Nessa perspectiva, embasado na RME, Silva (2015) descreve a reinvenção guiada como um processo que preenche uma lacuna entre a matemática informal e a formal, potencializando a participação ativa dos estudantes em todo o processo.

O desenvolver do curso, digamos, com uma abordagem diferenciada, na qual ocorreu a mudança de atitude dos envolvidos, oportunizou a ambos, um repensar: aos estudantes, que sua participação ativa no desenvolver das aulas auxilia o desenvolvimento de conceitos; aos professores, que podemos em alguns momentos do curso, “perder” certo tempo para trabalhar de um modo que contribua para nosso ambiente de aprendizagem, isto é, pautados em episódios de resolução de tarefas.

Salientamos que toda mudança de atitude exige dedicação, ou seja, demanda certo tempo de organização, o que professores e pesquisadores tem limitado. Porém, isso não deve inviabilizar que novas estratégias possam ser repensadas. Vários fatores englobam nossa mudança, e cada tarefa elaborada, adaptada e aplicada exige uma análise tanto em seu desenvolvimento (enquanto os grupos trabalham com ela) quanto na sua retrospectiva, por meio da qual analisamos as potencialidades que dela emergem em relação a possíveis, redesenhos que contemplem elementos por elas não desenvolvidos.

Ressaltamos que, dependendo dos dias letivos com a turma e do plano de ensino, entre uma aplicação e outra, em nossa pesquisa, disponibilizamos de no máximo 5 dias corridos de intervalo entre as aplicações das tarefas propostas. No contexto analisado (contexto B), as aulas aconteciam nas segundas e quartas-feiras Cada tarefa proposta era antecedida por uma análise retrospectiva, o que acarreta em tempo destinado para analisar as produções escritas dos grupos que antecedam a nova aplicação.

No decorrer do curso de CDI 1, algumas tarefas foram aplicadas para a sistematização de quociente de diferenças (derivada), e algumas delas são apresentadas e discutidas na pesquisa de Fonseca (2017), que as tomou como ponto de partida para o estudo de sequências (quociente de diferenças), que antecede o conceito de derivada de uma função. Este autor apresenta uma experiência exitosa com o desenvolver das tarefas desencadeou nas aulas de CDI 1 no ensino de derivadas, tendo como produto educacional uma sequência de tarefas que pode ser utilizadas/adaptadas por docentes em suas turmas. O estudo de sequências numéricas também pode ser tomado como ponto de partida para análise e sistematização de pontos de acumulação (integral). Todo o desenvolver do curso partindo das tarefas propostas contribui para a sistematização de conceitos.

Os conceitos apresentados, que podem emergir do estudo de sequências numéricas, possibilitam desenvolver conceitos centrais da disciplina. Não as analisamos como um todo devido ao tempo destinado à pesquisa. Ressaltamos, porém, que os episódios de resolução de tarefas em nosso ambiente de aprendizagem, em condições reais de ensino, não se limitaram apenas ao estudo de convergência, que antecede limite de uma função de domínio contínuo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retomamos neste momento a pergunta de nossa pesquisa: *de que maneira o trabalho com episódios de resolução de tarefas pode possibilitar aos estudantes problematizar ideias que circunscrevem o conceito de convergência de sequências numéricas*?

O trabalho com episódios de resolução de tarefas possibilitou aos estudantes problematizar conceitos que circunscrevem o conceito de convergência de sequências numéricas que engloba a variação entre termos consecutivos, subsequências, o limite pode ou não ser atingido? Unicidade de limite, monotonicidade, comportamento em longo prazo e a posição a partir de n_0 potencializaram sua participação ativa na resolução das tarefas propostas, com as quais os estudantes puderam lançar mão de estratégias para sua resolução, bem como para sistematização de conceitos da disciplina. Outro fator evidenciado foi a interação entre os estudantes e a docente no decorrer das tarefas e a liberdade de expressar suas estratégias de resolução, contribuindo para um ambiente de aprendizagem.

Na elaboração e aplicação das tarefas, alguns fatores foram surgindo, tais como: o tempo despendido para a organização das sintaxes no Geogebra, o que acarretou a entrega dos arquivos devidamente organizados aos grupos; alguns conceitos que ficaram “soltos”, a partir dos quais surgiram as tarefas intermediárias (até então não pensadas por nós) e elementos que as tarefas poderiam contemplar em seu contexto, caracterizando, assim, seu redesenho na apresentação do caderno de tarefas (produto educacional), as quais diferem das analisadas na pesquisa.

As modificações feitas visam sintetizar em cada tarefa conceitos que dela podem emergir para o estudo de sequências numéricas. A primeira tarefa e suas potencialidades não foram alteradas; as tarefas 2 e 3 foram redesenhadas, buscando trazer sequências de diferentes comportamentos em um única tarefa, ampliando as possibilidades do desenvolver de conceitos que circunscrevem convergência de sequências numéricas (nova tarefa 2), ao invés de material palpável, as “tiras”, os grupos puderam trabalhar diretamente no Geogebra.

Como proposta para a nova Tarefa 3, buscamos que a notação de módulo, que é apresentada na definição formal, pudesse ser trabalhada com os estudantes e não somente apresentada. Nosso caderno de tarefas está constituído com essa nova organização. As tarefas que o constituem foram aplicadas no início do semestre de 2017 e, ao analisarmos sua aplicação, através das produções escritas dos grupos e áudios gravados, evidenciamos sua potencialidade no desenvolver de conceitos que circunscrevem uma sequência convergente. Tal aplicação não faz parte da análise desta pesquisa devido à exiguidade do tempo. As tarefas finais apresentam um *Design* mais próximo do que esperamos em nossa proposta.

Nossa proposta nas aulas de CDI 1 possibilitaram uma mudança de atitude da docente responsável pela turma. Neste momento, torna-se perceptível que o simples fato de ensinar isoladamente não garante a aprendizagem dos estudantes. Essa garantia ocorre quando eles interagem na elaboração de novos conhecimentos. Nossas tarefas possibilitaram esse processo de construção em que os conceitos centrais da disciplina foram organizados em conjunto, professora e estudantes.

O pleno domínio de conteúdo do docente não garante sozinho o sucesso ou não de uma turma. Sua abordagem no decorrer das aulas pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes e a eles podemos oportunizar uma participação ativa em todo o processo de elaboração de novos conceitos, contribuindo, assim, para seu desenvolvimento no decorrer do curso por ele escolhido. Não apresentamos “uma receita” pronta de abordagem na disciplina de CDI 1, mas indícios de que podemos destinar certo tempo a novas dinâmicas que estimulem o desenvolvimento exitoso da disciplina.

Em nossa proposta, a atitude da turma tornou-se dinâmica em todas as tarefas propostas. A interação entre estudantes e docente pode ser destacada; pois, no desenvolver de cada aula, eles puderam explicitar suas indagações a respeito do conceito sistematizado. Nesse contexto, destaca-se a mudança de atitude dos estudantes, pois, a cada aula sua participação ativa na elaboração de conceitos da disciplina ficou evidenciada.

Nessa perspectiva, nosso ambiente em episódios de resolução de tarefas possibilitou que o desenvolver do trabalho abordasse alguns conceitos que circunscrevem o conceito de convergência de sequência numérica, tomando-as ponto de partida para a sistematização de conceitos centrais da disciplina. O desenvolver dos episódios contribuiu para a participação ativa dos estudantes na elaboração de cada conceito. Partimos das tarefas para a elaboração de conceitos.

Sendo elaboradas e adaptadas sobre o estudo de sequências, possibilitaram que não fossem precedidas de explicação.

Nosso desenvolver de tarefas nos cursos de CDI 1 e o estudo de sequências numéricas como desencadeadoras de limite de uma função respaldados nas pesquisas de Weigand (2014), Roh (2008), Prezenioslo (2005), Santos (2005) e Nunes (2001) auxiliaram no pensar e repensar de tarefas que dessem conta de abranger todos os elementos que circunscrevem o conceito de convergência. Com sua organização de episódios de resolução de tarefas, Palha (2013) nos auxiliou a organizar o curso, podendo partir das tarefas propostas e caminhar para uma análise global de todo o desenvolvimento. O *Desing Research* por Van Eerde (2013), que apresenta sua tradução para língua portuguesa como *Pesquisa de Desenvolvimento* pelos autores Barbosa e Oliveira (2015), Matta, Silva e Boaventura (2014), Mestre e Oliveira (2016), Molina, Castro e Castro (2007) contemplou todo o processo.

Acreditamos, em nossa proposta de um ambiente de aprendizagem, pautado em episódios de resolução de tarefas, que possamos partir destas para a elaboração de conceitos, em nosso caso na disciplina de CDI 1. Toda organização de um ambiente requer dedicação, fundamentação e estratégias em sua proposição. Nem todos os elementos que foram pensados inicialmente na pesquisa foram totalmente contemplados, como a sistematização de limite de uma função pontual (elemento elencado pelos autores no inicio dos estudos e organização da pesquisa).

O tempo destinado a tarefas e ao plano de ensino da disciplina deve ser fator pensado antes do início do curso, bem como a atitude do professor no desenvolver das tarefas, que pode ou não ser potencializado dentro da proposta pensada.

Ressaltamos que a mudança de atitude do professor, perante a disciplina e sua abordagem no desenvolver das tarefas, contribui para a proposta de ensino de nosso ambiente, pautado em episódios de resolução de tarefas. Contribuiu ainda para uma mudança de atitude dos estudantes nele inseridos, auxiliando em sua participação no desenvolvimento de conceitos. Salientamos que toda mudança requer dedicação e tempo despendido para estudos e fundamentação de uma nova proposta de ensino. Enquanto professores e pesquisadores no dia a dia da sala de aula acreditamos que toda mudança que possa contribuir no desenvolvimento de conceitos, mesmo que inicialmente em pequenas proporções, merece ser pensada e desenvolvida.

Por fim, o desenvolver de nosso ambiente e a aplicação das tarefas apresentadas potencializaram o desenvolvimento do curso de CDI 1 como um todo e apresentamos como produto educacional um caderno de tarefas que circunscrevem o conceito de convergência e um material de apoio aos estudantes.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H.; BIVENS et al., I.; DAVIS, S. **Cálculo.** 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ÁVILA, G.S.S. **Análise Matemática para licenciatura.** 3. ed. São Paulo: Edgard Bucher Ltda, 2001.

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Porque a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática? **Perspectivas em Educação Matemática**. v. 8, p. 527-546, 2015.

BOGDAN, R., BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Alegre: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; SILVA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática:** Sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

EERDE, D. Van. Design Research: Looking Into the Heart of Mathematics Education. 1st SEA-DR Proceeding. **Proceeding The First South East Asia Design/Development Research (SEA-DR) International Conference**, Sriwijaya University, Palembang, p. 1-11, 2013.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO. R. L. C. Enunciados de Tarefas de Matemática Baseados na Perspectiva da Educação Matemática Realística. **Bolema**. v. 29, n. 52, p. 452-472, 2015.

FERREIRA, P. E. A; CIANI, A. B; OLIVERIA, R. C.. Educação Matemática Realística: uma abordagem para o ensino. In: BURIASCO, R. L. C. de (Org.). **GEPEMA**: espaço e contexto de aprendizagem. 1. ed. Curitiba: CRV, 2014, p. 113-141.

FONSECA, M. O. S. **Propostas de tarefas para um estudo inicial de derivada.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Londrina, 2017.

GRAVEMEIJER, K. P. E., EERDE, D. Van. Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. **Elementary School Journal**. 109, 510–524, 2009.

LIMA, G. L. Contextualizando momentos da trajetória de ensino de cálculo na graduação em matemática da USP. **Educação Matemática e Pesquisa**. v. 16, n. 1, p. 125-149, 2014.

LEITHOLD.L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. vol. 2, São Paulo: Harbra, 1994.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. vol.1, 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

HUGHES-HALLETT, D. et al. **Cálculo de uma variável**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

MATTA, A. E. R.; DA SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa metodologia para pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século xxi. **Revista da FAEEBA** - Educação e Contemporaneidade, v. 23, n. 42, 2014.

MENDES, M. T.; TREVISAN, A.L. Competência de conexão e reflexão em aulas de cálculo. XII Encontro Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão – PR, 2014. **Anais...** XII EPREM, 2014.p.1-12.

MESTRE, C.; OLIVERIA, H.M. Uma experiência de ensino no 4.º ano conduzida no duplo papel de professora-investigadora A teaching experiment in the 4th grade conducted in the dual role of teacher and researcher. **Quadrante,** v. xxv, nº2. 2016.

NUNES, M. de N. F. **Sequências Numéricas: um Estudo da Convergência através de Atividades**. 124.f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica - São Paulo, 2001.

PALHA, S. A. G. Shift-Problem Lessons: Fostering Mathematical Reasoning in Regular Classrooms. **Research Institute of Child Development and Education**, University of Amsterdam, The Netherlands, v. 32, p. 142-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K.; VAN HOUT-WOLTERS, B. Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. **The Journal of Mathematical Behavior**. Springer, v. 32, p. 141-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K. The effect of shift-problem lessons in the mathematics classroom. **Internacional Journal os Science and Mathematics Education**. Ministry of Science and Technology, Taiwan, v. 13, p. 1589-1623, 2015.

PONTE, J. P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. PONTE, J. P. da (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014.

PRZENIOSLO, M. Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. **Educational Studies in Mathematics**, v. 60, p. 71-93, 2005.

RAMOS, N. S.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Ambiente de aprendizagem de cálculo diferencial e integral pautado em episódios de resolução de tarefas. V Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, Ponta Grossa - PR, p. 1-12. **Anais...** V SINECT: UTFPR, 2016.

RAMOS, N.S.; TREVISAN, A.L. Sequências Numéricas: Significados atribuídos por estudantes em um Curso de Engenharia. III Simpósio Nacional de Ensino e Aprendizagem. Londrina/PR, 2016. **Anais...** III SEA. Londrina, 2016.

RASMUSSEN, C; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go?. **ZDM**. v. 46, p. 507-515, 2014.

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. In: II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2003, Santos. **Anais...** Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. p. 1-20. Santos, SBEM. 2003

ROH, H.K. Students' images and their understanding of definitionsof the limit of a sequence. **Educational Studies in Mathematics**, v. 69, n. 3, p. 217–233, 2008.

SANTOS, M. G. **Um estudo sobre convergência de sequências numéricas com alunos que já tiveram o primeiro contato com a noção de limite**. 118.f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2005.

SILVA, G. S. **Uma configuração da reinvenção guiada**. Dissertação (Ensino de Ciência e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina - Londrina, 2015.

STEWART, J. **Cálculo**. vol. 1. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

STEWART, J. **Cálculo**. vol. 2. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TREVISAN, A. L.; BURIASCO, R. L. C.. Reflexões a respeito da própria prática avaliativa. **Revista Iberoamericana de Educación (Online)**. v. 69, p. 27-42, 2015.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T.. Possibilidades para matematizar em aulas de Cálculo. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. v. 6, p. 129-138, 2013.

WEIGAND, H. G. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM,** v.46, p. 603-619, 2014.

APÊNDICE A - Produto Educacional

APENDICE A - CADERNO DE TAREFAS - SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS COMO DESENCADEADORAS DO ENSINO DE LIMITE: UMA PROPOSTA EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1

1 INTRODUÇÃO

A aprendizagem da Matemática, para muitos estudantes, se mostra um processo "árduo", fazendo que limitem suas ações a apenas reproduzir processos em vez de aplicar conceitos. Não é diferente no caso do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), diversas são as dificuldades dos estudantes nessa disciplina uma vez que serem "expostos" a conceitos, demonstrações e aplicações não é garantia de que estejam aprendendo ou se sentindo motivados/interessados pela disciplina.

Lima (2014) ressalta que "por muito tempo acreditou-se que os alunos ao chegarem ao Ensino Superior teriam motivação em relação às disciplinas do curso por eles escolhidos". Bastava que "o professor tivesse domínio para que os alunos aprendessem e a ideia de conhecimento acabado e de que basta o transmitir para os estudantes aprenderem pouco a pouco foi abandonada" (p. 128). No entanto, nem a motivação dos estudantes quanto o "domínio" dos professores não podem garantir o sucesso na sua aprendizagem. Aos estudantes deve ser oportunizado um ambiente educacional que contribua com o desenvolvimento de conceitos e também com uma participação ativa nesse processo.

Das pesquisas em Educação Matemática, especificamente as que se refere ao ensino na disciplina de CDI, podemos destacar a de Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014) por ter contribuído para melhor compreensão da aprendizagem de conceitos como limite, derivada e integral, mas que pouco disso chega efetivamente sala de aula. Nesse sentido, em uma espécie de "crítica ácida" apontam que "muito já se sabe sobre as dificuldades por estudantes na disciplina de "Cálculo" e diante disso questionam "em que direção precisamos ir?"(p.508).

Inspirados nos trabalhos de Palha (2013), Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e Palha, Dekker e Gravemeijer (2015), propomos a organização de ambientes educacionais pautados em *episódios de resolução de tarefas* (adaptação do termo em inglês *shift problem lessons*, cunhado por esses autores). Consideramos a organização de um ambiente que leve em conta as condições reais de ensino, por ambiente nos referimos não a "lugar" físico apenas, sim a todo contexto que circunscreve nosso trabalho (os estudantes e suas expectativas, os materiais didáticos, o espaço físico e a infraestrutura, o professor e suas concepções) e suas condições reais.

Embora, de uma maneira geral, tenhamos uma sala de aula heterogênea (tanto em termos do conhecimento “trazido” pelo nosso estudante, quanto suas expectativas frente à disciplina de CDI) e um plano de ensino bastante extenso a cumprir – condições essas que, em geral, todo professor depara-se - intentamos que os estudantes tenham a participação ativa no desenvolver do trabalho pedagógico, envolvam-se com as tarefas propostas e, assim, elaborem conhecimento matemático inerente ao curso.

Nossos episódios não substituem outros presentes no contexto de uma sala de aula regular, como os que envolvem a apresentação de conceitos, demonstrações e exercícios de aplicação pelo professor. Constituem um ambiente de aprendizagem que possamos em alguns momentos do curso “perder” [9] certo tempo para a elaboração de conceitos centrais da disciplina nesse sentido difere significativamente de uma aula expositiva usual, tendo como pressupostos:

- O fato de um novo conteúdo não precisar preceder as tarefas, pois, partimos do desenvolver delas para a elaboração de conceitos de CDI 1.
- A participação ativa dos estudantes, a partir da resolução das tarefas desenvolvidas em grupos, estimulando sua reflexão e elaboração de raciocínio conceitual partindo do intuitivo para a definição formal.
- O papel do docente, que ao invés de apresentar conceitos e/ou fornecer explicações/ caminhos para a resolução, torna-se um mediador das apresentações e explicações dos estudantes na resolução.

O desenvolvimento de nossa sequência de tarefas, sendo ela o produto educacional de nossa pesquisa, se desenvolveu em um processo cíclico embasados em Barbosa e Oliveira (2015), Matta, Silva e Boaventura (2014), Mestre e Oliveira

[9] Em nossa proposta “perder” tem sinônimo de “ganhar”. O tempo destinado aos episódios tem como resposta o ganho na participação ativa dos estudantes o que auxilia na elaboração de conceitos.

(2016), Molina, Castro e Castro (2007) e Van Eerde (2013), que tomam o *Design Research* como uma metodologia de pesquisa, tal que aproxima o professor e pesquisador do ambiente de sala de aula, envolvendo delineamento, desenvolvimento e avaliação de todo o processo de elaboração, contribuindo ao desenvolvimento de novos artifícios no ensino que favorecem a aprendizagem dos envolvidos.

2 APLICAÇÃO DE NOSSA PESQUISA

Nossa pesquisa se efetuou, em termos de aplicação, em dois momentos (2016/2017), em cada aplicação participaram duas turmas de engenharias uma ministrada pelo orientador desta e uma pela autora. Desenvolvemos com nossas aplicações uma sequência de tarefas que mais se aproximam do que pensamos para a abordagem do estudo de sequências numéricas e sua convergência que trabalhadas com estudantes do curso de CDI 1 possamos partir de suas representações para a sistematização de conceitos centrais da disciplina (convergência de sequência como antecessora de limite de uma função) na qual delineamos três tarefas para compor este trabalho e apresentamos uma propostas de duas tarefas intermediárias, baseados nas análises feitas das tarefas.

3 OBJETIVO GERAL

Nossa sequência de tarefas se destina a estudantes do Ensino Superior que cursam Cálculo Diferencial e Integral (CDI) 1. Tem como objetivo desencadear uma discussão sobre limite de funções reais de variável real partindo do estudo de convergência de sequências numéricas e, desta forma, contribuir na compressão de conceitos que circunscrevem essa temática.

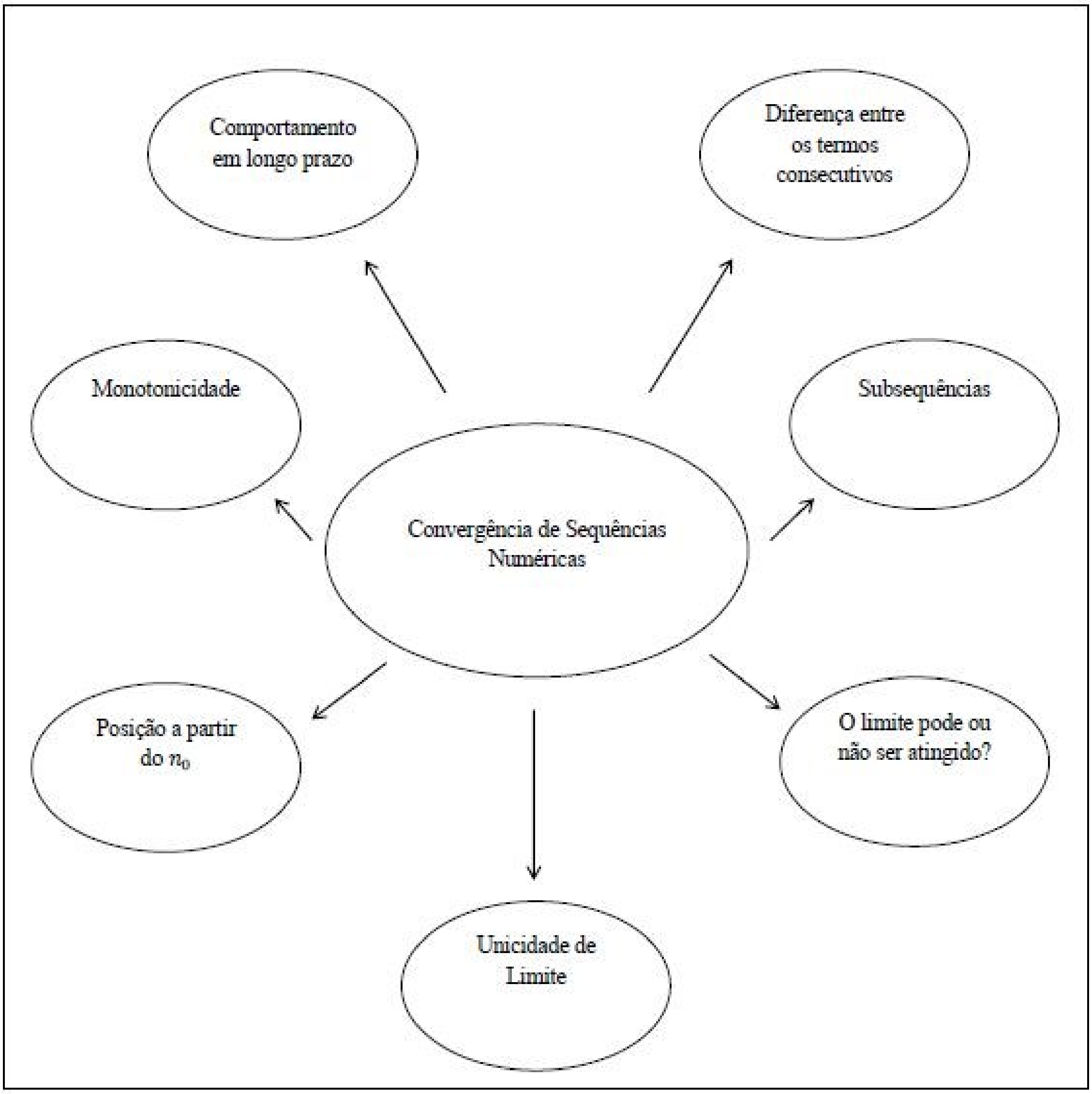
Deve ser buscado que os estudantes, ao trabalhar com as tarefas, explorem ideias básicas necessárias à compreensão do conceito de convergência de uma sequência numérico, que será tomado como ponto de partida para definir limites envolvendo uma função de variável real. Mais especificamente, objetiva-se que o estudante, ao lidar com essas tarefas, realize as seguintes ações:

- Analisar e compreender o estudo de sequências;
- Reconhecer sequências em diferentes situações;
- Analisar o comportamento de uma sequência convergente e de uma sequência divergente.
- Identificar a variação entre termos consecutivos de uma sequência e suas implicações no critério de convergência.
- Partir da exploração intuitiva e a, a partir dela, caminhar rumo à elaboração de uma definição formal.

4 TAREFAS

A proposta apresenta três tarefas após nossas aplicações e refinamento realizados entre os anos de 2016/2017, duas tarefas intermediárias, bem como o material de apoio que disponibilizamos aos estudantes no decorrer das aplicações. No Quadro 1 apresentamos um esquema das ideias que circunscrevem o conceito de convergência que compõem as tarefas, e que podem ser explorados partindo das estratégias apresentadas pelos grupos em sua resolução para a sistematização e organização da definição formal de uma sequência convergente.

Os elementos que circunscrevem o conceito de convergência de sequências numéricas fornecem indícios de seu comportamento e seu estudo. Parte das tarefas, podendo auxiliar a elaboração e organização da disciplina, como auxiliou os autores.



Quadro 1 - Mapa sobre convergência de sequência
Fonte: autores

4.1 TAREFA 1

Nossa primeira tarefa e sua abordagem em sala de aula possibilita ao professor iniciar uma discussão sobre o estudo de sequências numéricas, tomando como ponto de partida, nas aulas de CDI 1, o estabelecimento da comparação entre diferentes tipos de sequências . Seu enunciado contribui no direcionar de diferentes “olhares”, traz como potencialidades a possibilidade de sistematizar conceitos como:

- Uma sequência recursiva;
- Diferença entre termos consecutivos;

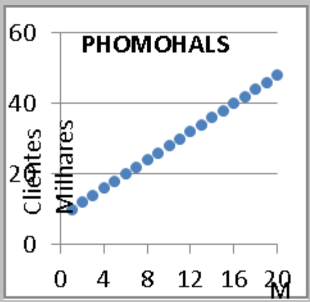
- Comportamento em longo prazo;
- Crescimento/decrescimento;
- Intuitivamente indexação do n_0 quando analisamos a partir de que mês possamos garantir o maior número de clientes.

As potencialidades destacadas podem ser tomadas como ponto de partida em conceitos centrais de CDI 1, em nossa proposta partimos delas para o estudo de sequências e sua convergência. Apresentamos no Quadro 2 a tarefa proposta como desencadeadora do estudo de sequências.

Tempo previsto: 3 aulas de 50 minutos.
Conteúdo da aula: definição de uma sequência numérica e estudo de sequências particulares.
Recursos Didáticos: quadro-negro, giz, projetor multimídia, *notebook* com software Excel.
Objetivo específico: Reconhecer diferentes tipos de sequência e seu comportamento.
Metodologia e Estratégia: Para a exploração de conceitos envolvidos na tarefa disponibilizamos um arquivo no software Excel, sua escolha remete a familiaridade que os estudantes possam ter com as ferramentas disponibilizadas no programa possibilitando a manipulação de objetos tais como: construção de gráficos, tabelas, leis de formação entre outras.

A empresa COMPUNET fornece conexões de Internet para seus atuais 10.000 consumidores. A COMPUNET está interessada na contratação de uma agência de publicidade para desenvolver uma campanha, para aumentar o número de consumidores. A empresa tem três agências de publicidade diferentes para escolher: PROMOHALS, H & G publicidade e SCHLEICH & Co. Cada empresa garante um aumento do lucro para COMPUNET, mas em ritmos diferentes. Seu trabalho é investigar qual agência é melhor para COMPUNET.

A campanha desenvolvida pela **PROMOHALS** promete um crescimento nos negócios, conforme mostrado no gráfico.



H & G Adversiting

A campanha da Agência de publicidade H & G Adversiting promete um crescimento mensal a uma taxa 10%. Ou seja, o lucro de cada mês é 10% maior que do mês anterior.

Schleich & Co promete o crescimento mostrado na Tabela.

Tempo (meses)	Clientes (Milhares)
1	10
2	15
3	19
4	23
5	27
6	30
7	32
8	34
9	36
10	38
11	39
12	40
13	41
14	42
15	42
16	43
17	43
18	44
19	44

Quadro 2 - Tarefa 1: O caso Compunet
Fonte: Adaptado de Weigand (2014).

Tomamos como ponto de partida, na disciplina, a aplicação de uma tarefa embasada em Weigand (2014) que, em sua pesquisa, visou o estudo de quociente de diferenças (derivada). Apresenta em sua proposta, uma reestruturação dos cursos de Cálculo partindo do estudo de sequências, Sequências são funções cujo domínio é o conjunto dos números naturais. O estudo de sequências é revitalizado primeiramente, para depois ser apresentado o estudo de funções nos reais e, tomamos como organização de nossa proposta.

A tarefa deve ser proposta em grupos auxiliando os estudantes a discussão e organização de estratégias de resolução. Após tempo destinado aos grupos, o professor pode lançar questões para a exploração dos itens da tarefa, tais como:

- Qual empresa será mais vantajosa?
- Como poderíamos representar algebricamente cada empresa?
- Independente do prazo em meses de análise sempre teremos a mesma empresa como mais vantajosa?

As indagações para os grupos auxiliam no desenvolvimento da tarefa, nesse momento o papel do professor não se resume a fornecer respostas prontas e sim questionamentos que contribuam para que os grupos direcionem novos pontos de exploração. O professor deve conversar com os grupos durante a resolução da tarefa, pois, deste modo, pode perceber as estratégias por eles adotadas e, se necessário, guiar a novos olhares.

A sistematização é realizada, em conjunto, professor e estudantes tomando como ponto de partida as estratégias apresentadas nas resoluções dos grupos e da representação recursiva das sequências. Deste modo, pode ser lançada uma indagação:

- *Suas representações gráficas nos parecem conhecidas?*

Nesse momento pode surgir uma discussão sobre o comportamento das empresas e sobre sua representação. A primeira e segunda como sendo uma Progressão Aritmética e Geométrica, respectivamente. A terceira pode ser descrita em termos de uma função de crescimento rápido inicial, seguida de uma “estabilização”.

Sistematização que descreve o crescimento nos negócios propostos pela primeira empresa. Ressaltamos que toda sistematização deve ser realizada em conjunto, professor e estudantes, cada termo matemático aqui apresentado fora organizado em sala segundo as indagações dos estudantes, ou seja, a escrita apresentada na sistematização foi elaborada pelos grupos e disposta no quadro pela docente para a sala como um todo.

$$a_1 = 10$$
$$a_2 = 10 + 2$$
$$a_3 = 12 + 4$$

Que é 12?

$$(12 = a_2) \rightarrow a_2 = a_1 + 2$$

Então, $a_3 = a_2 + 2 = a_1 + 2 + 2 \rightarrow a_1 + 2.\ 2 = a_1 + 4$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1).\ 2\ ,$$

Deste modo podemos analisar a empresa para qualquer mês o qual queiramos, bastando para isso uma substituição numérica. E organizamos seu termo geral:

$$a_n = 10 + (n - 1).2\ ,$$

Recursivamente:

$$a_{n+1} = a_n + 2\ ,$$

Segunda empresa, função exponencial (P.G.) apresenta seu crescimento a uma taxa percentual constante, podendo ser tomada como ponto de partida no estudo de sequência de diferenças.

$$n\ (1 + i) \rightarrow n\ (1 + \tfrac{10}{100}) = n\ .(1{,}1)$$

$$a_1 = 10.000 \rightarrow 10.000(1 + \frac{10}{100})^{t}\ ,\ t = tempo$$

$$\therefore a_n = a_1.(1{,}1)^{n-1}\ ,\ \text{com } n \geq 1$$

Termo geral:

$$a_n = 10.1{,}1^{(n-1)}\ ,$$

Recursivamente:

$$a_{n+1} = a_n.1{,}1$$

Com a análise da diferença entre os termos consecutivos das sequências sistematizamos a representação de uma sequencia de diferenças:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

A terceira empresa apresenta um crescimento a uma taxa decrescente, ou seja, sua variação entre os termos consecutivos começa a diminuir aproximando-se de um valor, pode ser representada pela expressão abaixo e direcionemos um olhar para seu comportamento gráfico:

$$a_n = Kln(n)$$

O comportamento gráfico da terceira empresa possibilita o direcionar para certa “estabilização” por ela apresentada com o objetivo do estudo de uma sequência convergente.

4.2 TAREFA 2

Na tarefa 2 apresentamos o software Geogebra permitindo que os grupos trabalhem com diferentes representações em sua resolução. As sequências que as compõem possibilitam o estudo de diferentes comportamentos que uma sequência possa apresentar, auxiliando em seu estudo e destacando elementos essências para a sistematização da definição formal de convergência.

Nossas tarefas não buscam respostas únicas dos estudantes em seu desenvolver, o que almejamos em cada aplicação é que possibilitem o desenvolver de conceitos de CDI 1 e que possam ser organizados partindo das resoluções apresentadas pelos em sua realização.

Tempo previsto: 6 aulas de 50 minutos.

Conteúdo da aula: conceito sobre sequências e critérios de convergência,

Recursos Didáticos: quadro-negro, giz, projetor multimídia, *notebook* com software Geogebra.

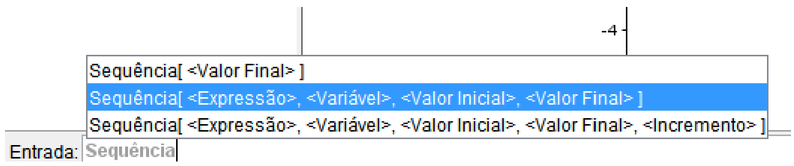
Objetivo específico: Reconhecer diferentes tipos de sequência e seu comportamento e sua relação com convergência de uma sequência.

Metodologia e Estratégia: Para a organização da tarefa disponibilizamos um arquivo no software Geogebra contendo as sequências devidamente plotadas. A tarefa possibilita o estudo do comportamento de uma sequência como crescimento / decrescimento através da análise da variação entre termos consecutivos e indicativos do comportamento de uma sequência convergente e divergente e sua organização no software possibilita a manipulação das sequências.

A tarefa deve ser proposta em grupos possibilitando aos estudantes uma discussão sobre conceitos envolvidos e troca de estratégias para sua resolução. O professor deve caminhar entre os grupos e, conversando com eles, sobre suas estratégias de resolução, possibilitando direcionar seu olhar para as potencialidades que possam emergir da tarefa. Destinado o tempo para discussão uma abordagem em termos de conceitos deve ser realizada com os grupos e, nesse momento, a sistematização de conceitos é conduzida partindo das estratégias dos grupos na resolução da tarefa.

Apresentamos no Quadro 3 a tarefa proposta:

1. Vamos agora o comportamento de algumas sequências com auxílio do **Geogebra**. Como exemplo, tome a sequência $a_n = n^3 - 3n^2 + 1$. No campo de entrada, digite **Sequência** e escolha a segunda opção, conforme abaixo:



Consideremos nossa variável sendo **n.** Em <Expressão>, coloque o seguinte par ordenado: (n, n^3-3n^2+1). Dessa forma, teremos pontos plotados no plano cartesiano obedecendo à sequência informada. Substitua <Variável> por **n.** Substitua <Valor Inicial> por **1.** Por fim, substitua <Valor final> por **um valor de sua escolha.** Para melhor visualizar a tela e o comportamento da sequência, segure a tecla "Ctrl" e, com o botão esquerdo do mouse, re-escale o eixo y.

d) Investigue o comportamento das sequências a seguir. Descreva.

i) $a_n = \frac{n}{n+1}$ ii) $a_n = \frac{n+20}{5n}$ iii) $a_n = \sqrt{n}$

iv) $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n$

v) $a_n = \sqrt[n]{a}$ (Automaticamente o programa irá lhe pedir para criar um controle deslizante para o número *a*)

2. Sem auxílio do Geogebra, procurem "prever" o comportamento das sequências a seguir. Descreva.

i) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ii) $b_n = (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$

iii) $c_n = \begin{cases} 2, & é \quad múltiplo \quad de \quad 10 \\ 1 + \frac{1}{n}, & para \quad qualquer \quad outro \quad valor \end{cases}$

iv) $d_n = \begin{cases} 1, & é \quad múltiplo \quad de \quad 10 \\ 1 + \frac{1}{n}, & para \quad qualquer \quad outro \quad valor \end{cases}$

v) $e_n = \begin{cases} 2, & se \quad 100 \le n \le 150 \\ 1 - \frac{1}{n}, & para \quad qualquer \quad outro \quad valor \end{cases}$

v) $f_n = \begin{cases} 1, & se \quad n \quad é \quad par \\ 1 - \frac{1}{n}, & se \quad n \quad é \quad ímpar \end{cases}$

vii) $g_n = \begin{cases} 1, & se \quad n \quad é \quad par \\ 0, & se \quad n \quad é \quad ímpar \end{cases}$

3. Confronte suas respostas à questão anterior com as representações gráficas apresentadas no arquivo disponibilizado pelo professor

4. Ativando as opções **L**, **semi**, **tira** e **Limite**, você visualizará uma "tira" de semi-largura constante, com uma linha ao centro para marcar um suposto "limite". Para cada sequência anterior, analise como se distribuem os pontos do gráfico da sequência, em relação à tira (se estão dentro ou fora). Discuta.

Quadro 3 - Tarefa 2: Convergência de Sequência
Fonte: autores.

A tarefa traz em seu primeiro item o comportamento de algumas sequências a serem investigadas com o auxílio do software Geogebra, algumas sequências convergentes (i, ii e iv) e outras divergentes. Seus comportamentos distintos visam que estudantes possam reconhecer sequências e seus diferentes gráficos contribuindo na organização da definição provisória do conceito de convergência.

No item 2 da tarefa, apresentamos algumas sequências representadas por mais de uma expressão (definida por partes) só que agora sua análise deverá ser feita sem o auxilio do software. A escolha neste formato auxilia que os grupos possam desenvolver a tarefa trabalhando com diferentes representações, que possam partir tanto da análise visual, quanto de processos de substituições numéricas, para a sistematização da tarefa.

A terceira questão da tarefa solicitou uma análise das respostas sem o auxílio do Geogebra buscando que os estudantes possam confrontar suas análises tanto pela visualização gráfica, quanto pela manipulação algébrica (quando substituem valores para análise do comportamento da sequência). Como último elemento da tarefa e a ativação das opções limite e tira no software surgem elementos essenciais à sistematização da definição formal de convergência. Para a realização da tarefa fora disponibilizado o arquivo pronto no Geogebra, o disponibilizamos em Convergência de Sequências.

A tarefa apresenta como potencialidades a exploração de diferentes ideias que circunscrevem o conceito de convergência:

- Variação entre termos consecutivos e sua relação com critérios de convergência;
- Diferentes comportamentos gráficos;
- Sequências definidas por partes;
- Trabalhar com diferentes representações;
- Sistematização de conceitos que circunscrevem convergência de sequências numéricas.

Após sistematização da tarefa um material de apoio pode ser destinado aos estudantes, apresentamos o material que destinamos em nossa proposta de pesquisa e que pode ser tomado como ponto de partida para uma nova elaboração.

MATERIAL DE APOIO

Sequências

Pode ser descrita como uma função com comandos de entrada “domínio” nos números naturais e seus comandos de saída “imagem” nos números reais, matematicamente sua representação é dada por, f: IN→ R. Como a utilizaremos para descrever comportamentos em estudo, ao invés de $f(n)$a tomemos em alguns momentos por (a_n) para todo $n \in$ IN, e chamado o termo geral, ou n-ésimo termo da sequência.

Ex:

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

Teríamos uma sequência com termos $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \ldots\right)$

Analise o comportamento das sequências algebricamente e graficamente, respondendo as questões que seguem.

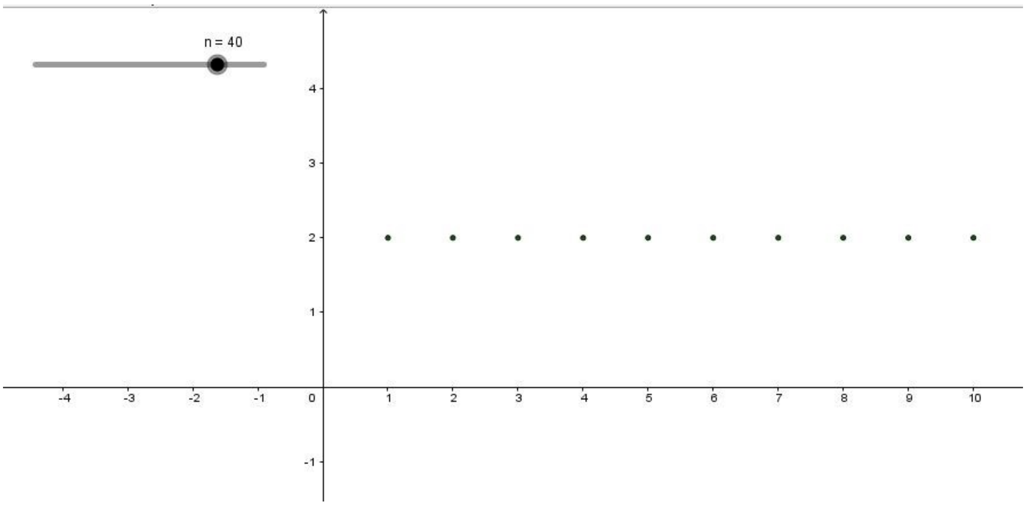
Existe alguma semelhança em seu esboço gráfico, qual a lei de formação que descreve a sequência e qual o seu comportamento gráfico.

a) $(2,2,2, \ldots)$

Aqui a sequência nos representa um comportamento constante, descrito por:

$$a_n = 2$$

Graficamente

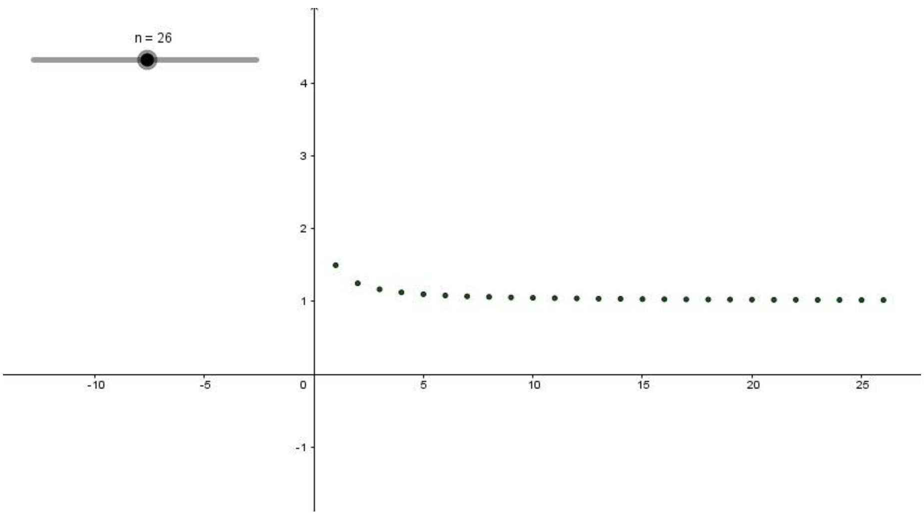


b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \ldots\right)$

Uma sequência decrescente que, conforme tomamos n suficientemente grande quanto queiramos converge a 1.

$$a_n = 1 + \frac{1}{2n}$$

Graficamente,



c) $\left(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\right)$

Trata-se de uma sequência crescente, algebricamente:

$$a_n = \frac{1+n}{2}$$

Percebemos que cada sequência analisada tem comportamentos distintos. Uma sequência pode ter comportamento crescente, decrescente, estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Uma sequência (a_n) é denominada:

estritamente crescente se $a_1 < a_2 < \ldots a_n < \ldots$,

crescente se $a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_n \geq \ldots$

estritamente decrescente se $a_1 > a_2 > \ldots a_n > \ldots$

decrescente se $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n \leq \ldots$,

Devemos dar uma atenção ao comportamento de uma sequência, seu esboço gráfico pode nos representar o fato ao qual buscamos uma resposta.

Alguns casos particulares

Dada uma sequência ela pode ter comportamentos que não são ultrapassados pelo comando de saída de seus termos de entrada, podemos dizer que ela tem certa limitação.

Podemos dizer que uma sequência será limitada se a "imagem" de seus termos fica dentro do intervalo de limitação. Tomemos a sequência como exemplo e analisemos seu comportamento:

$$a_n = (-1)^n$$

Tomemos valores para o expoente tais como 1, 2, 3, 4, 5,... Podemos analisar que com valores pares teremos um comando de saída o (1) e atribuindo valores ímpares o comando fica em (-1). Trata-se de uma sequência alternada, para valores de n pares temos uma subsequência com limitante 1 e valores ímpares uma subsequência com o limitante é -1.

Essas limitações às quais foram mencionadas podem ser identificadas tanto graficamente como algebricamente e nos mostra que temos uma sequência formada por duas subsequências cada uma com sua limitação “pois percebemos que para valores tão grandes quanto queiramos o esboço gráfico não ultrapassa seu limitante”

Em outras palavras uma sequência (a_n) é dita limitada superiormente se existir um valor real β que para todo numero natural n, a_n não ultrapassa β. Assim teremos:

$$a_n \leq \beta$$

De forma análoga dizemos que a sequência é limitada inferiormente se existir um valor real α, que para todo número natural n, a_n não ultrapassa α. Assim teremos:

$$a_n \geq \alpha$$

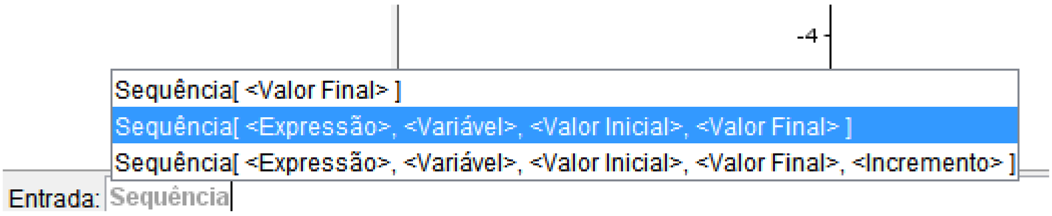
Com isso podemos dizer que, se existirem valores reais α e β, tais que para todo número natural n temos:

$$\alpha \leq a_n \leq \beta$$

E dizemos assim, que a sequência é limitada, pois está contida no intervalo $[\alpha, \beta]$. Uma sequência será limitada se e somente se, for limitada inferiormente e superiormente.

Para a construção desta sequência no Geogebra usamos os seguintes comandos:

No campo de entrada, digite **Sequência** e escolha a segunda opção, conforme abaixo:



Consideremos nossa variável sendo **n.** Em <Expressão>, coloque o seguinte par ordenado: (n, ((-1)^ n)). Dessa forma, teremos pontos plotados no plano cartesiano obedecendo à sequência informada;

Substitua <Variável> por **n;**

Substitua <Valor Inicial> por **1;**

Por fim, substitua <Valor final> por **um valor de sua escolha.**

A sintaxe ficará da seguinte forma:

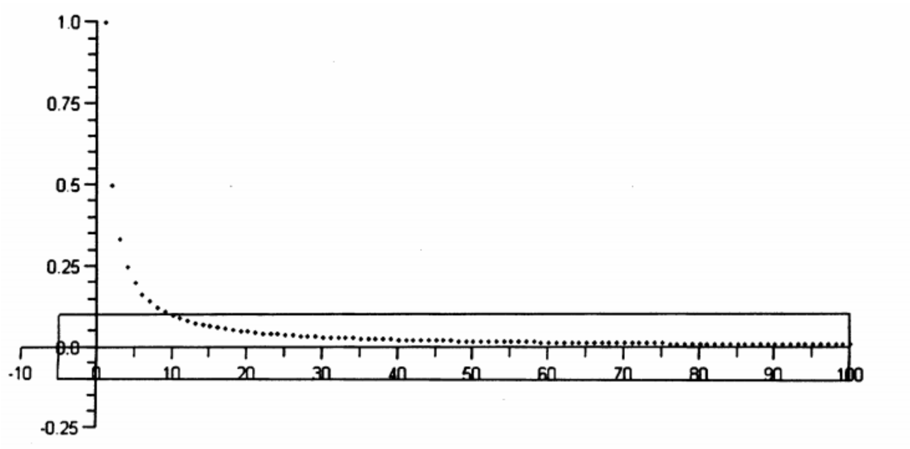
Sequência [(n, ((-1) ^ n)), n, 1, 100]

Crie um controle deslizante com início em 1, final em um número grande e incremento de 1 para o número n (o programa irá lhe informar para essa etapa).

Clicando em cima da sequência de pontos e marcando “habilitar rastro” faz com que você possa modificar o controle deslizante e não perder o caminho que ela está tomando

Sequências Convergentes

Uma sequência converge a um determinado valor se, a partir de certa posição, todos os seus termos estiverem tão próximos quanto queiramos desse valor. Visualmente, seria como se pegássemos um conjunto de réguas, daquelas que utilizamos na escola e, para qualquer largura da régua, por menor que ela seja, existe uma posição a partir do qual todos os pontos ficassem “dentro” da região delimitada pela régua, como ilustrado a seguir.



Analisemos a sequência como exemplo:

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

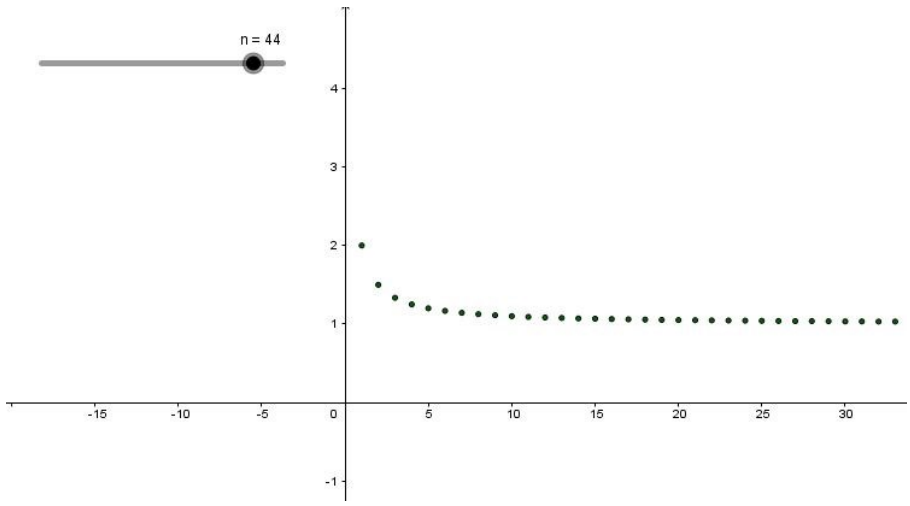
Como vimos no material anterior, tomando o valor de n tão grande quanto queiramos, nossa sequência em questão “aproxima-se”, converge para 1. Uma definição provisória para convergência de uma sequência pode então ser formulada:

Dada uma sequência a_n, dizemos que seus termos convergem a um determinado valor L, se ao tomarmos valores para n “bem grande” (o que indicaremos por $n \to \infty$, existe uma posição, que aqui vamos chamar de n_0, a partir da qual posso garantir que a distância entre os termos da sequência e o número L torna-se tão pequena quanto queiramos.

Matematicamente podendo ser representado:

$$\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

Graficamente



Nossos pontos centrais seriam a representação da convergência da sequência a 1, a sequência de pontos superiores (os quais não ultrapassam 1,5) e inferiores (nas proximidades de 1) seriam a representação de nossa “régua”.

A sequência a_n converge para o número L se para todo número positivo ε existe um inteiro n_0 natural tal que, para todo $n > n_0$ temos que $| a_n - L | < \varepsilon$.

Se esse número L não existe, dizemos que a_n diverge. Se a_n converge para L, escrevemos:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

e chamamos L de limite da sequência.

Uma sequência convergente será limitada superiormente e inferiormente, ou seja, uma sequência para ser convergente sempre será limitada. Com isso podemos acrescentar um item a nossa definição:

Toda sequência convergente é limitada, mas, nem toda sequência limitada é convergente.

O material de apoio apresentado pode ser disponibilizado em partes, conforme o desenvolver das tarefas e a sistematização de conceitos que derivem de sua aplicação e resolução. Em nossa pesquisa surgiram duas tarefas intermediárias, as quais inicialmente não haviam sido pensadas. No desenvolver das tarefas, se o professor perceber a necessidade de aprofundar definições provisórias apresentadas pelos estudantes pode solicitar uma tarefa intermediária para ser resolvida em momento posterior a aula (ser feita em casa). Todas as tarefas ditas “para casa” e que visam exploração de definições rumo à definição formal devem ser discutidas em sala em momento de aula, ou seja, as explicações das resoluções dos estudantes podem servir como ponto de partida para sistematizações de conceitos.

Apresentamos a seguir nossas tarefas intermediárias, fruto de nossa pesquisa, fatores que nos levaram a propor-la a e objetivos.

Tarefas intermediárias

Tarefa Intermediária 1

A primeira tarefa intermediária foi proposta aos estudantes visando que a definição provisória de limite de uma sequência não seja definida somente em termos de aproximação. O conceito de limite é visto por muitos como um processo dinâmico, enquanto que na comunidade científica é um processo estático. A definição de limite somente em termos de aproximação descarta uma sequência constante, pois, se não se aproxima não terá limite e qual o significado matemático de limite.

Nossa tarefa proposta para ser realizada em casa enunciava:

Tentem apresentar uma descrição para esse comportamento das sequências, esse tende a deve ser apresentado em definição provisória de convergência, ou seja, procurem pensar sobre o seguinte: matematicamente falando, o que significa dizer que $lim_{n \to \infty} a_n$.

No momento de entrega da tarefa o professor pode propor uma discussão com a sala sobre as definições por eles apresentadas, buscando trazer elementos que auxiliem na elaboração da definição provisória. A primeira tarefa intermediária pode ser proposta após o desenvolver da Tarefa 2, buscando que os estudantes tragam mais elementos para sua definição de limite.

Tarefa Intermediária 2

A nova tarefa intermediária pode ser proposta após o momento de aula da aplicação da primeira parte da Tarefa 2 devido à necessidade de garantir alguns aspectos de critério de convergência . A tarefa pode ser solicitada a sua entre na próxima aula, que anteceda o desenvolver da segunda parte da Tarefa 2. Na entrega, será destinado um tempo para uma conversa sobre as definições que eles apresentaram. Em nossa pesquisa o enunciado da tarefa sugeriu: Definir uma sequência convergente respondendo as seguintes perguntas:

(i) O limite pode ser atingido?
(ii) O limite é único?
(iii) Uma quantidade finita de termos pode ser desprezada?
(iv) Uma sequência constante tem limite?

As novas indagações lançadas para os estudantes buscaram "refinar" as suas definições para convergência de uma sequência somente em termos de aproximação, o que não acontece em uma sequência constante. Pode ser realizada pelos mesmos grupos da Tarefa 2, por viabilizar as definições organizadas por eles, buscando recolher as idéias dos estudantes sobre convergência de sequência e que serão sistematizadas no desenvolver da segunda parte da Tarefa 2.

4.3 TAREFA 3

Como terceira tarefa propõe que a notação modular seja trabalhada pelos grupos, que a organização em intervalos seja desenvolvida com o auxilio da tarefa possibilitando aos estudantes sua participação ativa na elaboração de conceitos que envolvem a definição formal de convergência de sequências numéricas.

O desenvolver da tarefa em termos de aproximação auxiliará os estudantes a perceberem a distância (valor absoluto) entre um número e um valor aproximado, trabalhando com intervalos que garantam a arbitrariedade de ε bem como a analisando e relacionando com n_0 que é a posição que a partir dela podemos garantir a convergência de uma sequência. Apresentamos no Quadro 4 a tarefa proposta.

Tempo previsto: 3 aulas.
Conteúdo da aula: convergência de sequência,
Objetivo específico: Elaboração da definição formal de convergência.
Metodologia e Estratégia: A tarefa deve ser proposta em grupos, durante a aplicação da tarefa a atitude do docente como na aplicação das que esta antecedeu é de conversar como os grupos e se necessário criar novas indagações para suas representações, deste modo os auxiliando no desenvolvimento.

Possibilita que todos os elementos trabalhados no desenvolvimento das tarefas anteriores possam ser sistematizados em termos da definição formal de convergência.
Recursos Didáticos: quadro-negro, giz, projetor multimídia, *notebook* com software Geogebra.

Estamos habituados a considerar representações de números reais na notação decimal: 1/100 = 0,01; $\pi = 3{,}14159$...; 1/3 = 0,3333... Estas notações costumam ser denominadas dízimas. Em alguns casos há um algarismo ou grupo de algarismos que se repete indefinidamente(0 em 1/100 a partir da 3ª casa decimal; 3 em 1/3 a partir da 1ª casa decimal); tais dízimas dizem-se periódicas e pode demonstrar-se que são as que representam números racionais (quocientes de dois inteiros) e só essas. Os números $\sqrt{5}$ e π são irracionais e como tal, a sucessão de algarismos presente na dízima não obedece a um padrão de repetição de um grupo de algarismos.

Quando trabalhamos com números como $\sqrt{2}$, é frequente referirmo-nos a "valores aproximados". Por exemplo, 1,4 e 1,41 do mesmo modo quando usamos para $\sqrt{5}$ uma aproximação 2,23. O conceito não se aplica somente a números iracionais: também podemos dizer que 0,33 é valor aproximado de 1/3, ou mesmo que 1 é valor aproximado de 2... De fato, o que é importante ao usar o conceito de "valor aproximado" é referir o "grau de aproximação " de que se trata. Assim, podemos afirmar :

- 2,2 é valor aproximado de $\sqrt{5}$ com um erro menor que 0,1 =10^{-1}
- 2,24 é valor aproximado de $\sqrt{5}$ com um erro menor que 0,01 =10^{-2}

E o que essas frases significam, simplesmente é que a distância (valor absoluto da diferença) entre o número e a aproximação indicada é menor que a quantidade mencionada. Por exemplo:

- $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ ou, de forma equivalente, $|\sqrt{5} - 2{,}2| = \sqrt{5} - 2{,}2 < 2{,}3 - 2{,}2 =$ 0,01
- $2{,}24 < \sqrt{5} < 2{,}23$ ou, de forma equivalente $|\sqrt{5} - 2{,}24| = 2{,}24 - \sqrt{5} < 2{,}24 -$ 2,23 = 0,01

De um modo geral adotaremos a seguinte definição: um número real x é um valor aproximado ou (aproximação) de outro número real L, com um erro menor que ε, se $|x - L| < \varepsilon$. Aqui ε é um número real positivo dado. Os valores aproximados de um número L com erro menor que ε são exatamente os elementos do intervalo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ centrado em L.

1. Os números da forma $\frac{5}{n}$, com n não-nulo, podem ser tomados como aproximações do número 0.

a) A partir de qual valor de n esse erro de aproximação será menor que 0,1?

b) E menor que 0,0001?

2. Considere agora a sequência $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

a) Tomando uma tira de semi-largura 0,25, a partir de qual termo da sequência podemos garantir que todos os termos subsequentes fiquem dentro da tira?

b) E se a semi-largura for 0,01?

3. O trabalho com as tiras permite analisarmos os termos da sequência a partir de determinada posição, com aproximação de um número L com erro menor que ε. Utilizando essa ideia proponha uma definição de sequência convergente.

4. Considere agora a sequência $a_n = 1 + 3/n^2$.

a) Seus termos podem ser tomados como aproximações para um número L. Qual é esse número?

b) Há alguma posição a partir da qual posição podemos garantir que os termos aproximam L com um erro menor que ε? Explique.

Essa sequência é convergente? Justifique

Quadro 4 - Tarefa 3: Convergência de Sequência
Fonte: autores.

A tarefa traz elementos para a organização da definição formal de convergência, visto que para sua elaboração precisamos garantir $|a_n - L| < \varepsilon$. Para sua resolução os estudantes devem se organizar em grupos podendo assim discutir entre os pares a organização e resolução dos enunciados. Como potencialidades destaca-se:

- a organização dos intervalos para a garantia de ε ;
- a proposição do n_0;
- a elaboração da definição formal de convergência.

Nossa sequências de tarefas visa à elaboração da definição formal de convergência de sequência numérica, no desenvolver das tarefas elementos que circunscrevem o conceito são abordados, após a aplicação da última tarefa temos elementos que emergiram do desenvolver das tarefas rumo a definição formal.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência de tarefas apresentada trabalha elementos essenciais na organização da definição formal de convergência de sequências numéricas. Seu desenvolver destaca o papel ativo dos estudantes nas resoluções e do docente como mediador durante a aplicação e sistematização da tarefa, contribuindo para o processo de ensino e aprendizagem no qual a compreensão de convergência (limite) não precise ser previamente apresentada para os estudantes/grupos e sim sistematizada no decorrer das aplicações e aulas.

O desenvolvimento dos episódios de resolução de tarefas em nosso ambiente em condições reais de ensino propiciou uma ruptura no formato tradicional das aulas de CDI 1, em que a mudança de atitude tanto da docente, quanto dos estudantes contribuíram no desenvolvimento da disciplina. Nossa organização dos episódios, bem como a elaboração/adaptação de tarefas, requer do docente responsável pela turma uma análise prévia do que pretendemos ao propor-la para a sala. Tais episódios podem abranger temas centrais do curso de CDI 1, buscando que os estudantes tenham uma participação ativa no desenvolver de conceitos partindo da resolução das tarefas.

Acreditamos que em alguns momentos do curso podemos “perder certo tempo” para a aplicação de tarefas que visam à elaboração de conceitos da disciplina. O tempo destinado a resolução das tarefas contribui no desenvolvimento e aprendizagem de conceitos, auxiliando os estudantes no decorrer do curso.

Salientamos por fim, que a proposta apresentada é uma sugestão para o professor, podendo ser adaptada e/ou aplicada conforme seu ambiente real de ensino. Espera-se que a sequência de tarefas possa contribuir com o trabalho docente e na elaboração/organização de conceitos iniciais da disciplina de CDI 1 partindo do estudo de sequências numéricas.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, G.S.S. **Análise Matemática para licenciatura.** 3º ed. Ed. São Paulo: Edgard Bucher Ltda, 2001.

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Porque a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática? **Perspectivas em Educação Matemática**, v. 8, p. 527-546, 2015.

EERDE, D. Van. Design Research: Looking Into the Heart of Mathematics Education. 1st SEA-DR Proceeding. **Proceeding The First South East Asia Design/Development Research (SEA-DR) International Conference**, Sriwijaya University, Palembang, p. 1-11, 2013.

LIMA, G. L. Contextualizando momentos da trajetória de ensino de cálculo na graduação em matemática da USP. **Educação Matemática e Pesquisa**, v. 16, n. 1, p. 125-149, 2014.

MATTA, A. E. R.; DA SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa metodologia para pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século xxi. Revista da FAEEBA - Educação e Contemporaneidade, v. 23, n. 42, 2014.

MESTRE, C; OLIVERIA, H.M. Uma experiência de ensino no 4.º ano conduzida no duplo papel de professora-investigadora A teaching experiment in the 4th grade conducted in the dual role of teacher and researcher. **Quadrante,** v. xxv, nº2.2016.

MOLINA, M., CASTRO, E. & CASTRO, E. (2007). Teaching experiments within design research. The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences, 2(4), 435-440.

PALHA, S. A. G. Shift-Problem Lessons: Fostering Mathematical Reasoning in Regular Classrooms. **Research Institute of Child Development and Education**, University of Amsterdam, The Netherlands, v. 32, p. 142-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K.; VAN HOUT-WOLTERS, B. Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. **The Journal of Mathematical Behavior**. Springer, v. 32, p. 141-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K. The effect of shift-problem lessons in the mathematics classroom. **Internacional Journal os Science and Mathematics Education**. Ministry of Science and Technology, Taiwan, v. 13, p. 1589-1623, 2015.

RASMUSSEN, C; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM**, v. 46, p. 507-515, 2014.

WEIGAND, H. G. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM,** v.46, p. 603-619, 2014.