UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS PATO BRANCO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

EPERSON ALBINO FELLINI

ANALISANDO E CONTRIBUINDO COM O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA EM NÍVEL BÁSICO

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO
2017

EPERSON ALBINO FELLINI

ANALISANDO E CONTRIBUINDO COM O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA EM NÍVEL BÁSICO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Tecnológica do Paraná, Câmpus Pato Branco como requisito parcial à obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientador: Prof. Dr. Rômel da Rosa da Silva.

PATO BRANCO

2017

F319a Fellini, Eperson Albino
Analisando e contribuindo com o ensino de matemática financeira em nível básico. / Eperson Albino Fellini. -- 2017.
90 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Rômel da Rosa Silva
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2017.
Bibliografia: f. 87 - 90.

1. Matemática Financeira. 2. Educação Financeira. 3. Alfabetização Financeira. 4. Ensino Básico. I. Silva, Rômel da Rosa, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22.ed.) 510

Ficha Catalográfica elaborada por
Maria Juçara Vieira da Silveira CRB9/1359
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Câmpus Pato Branco

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 026

“*ANALISANDO E CONTRIBUINDO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA A NÍVEL BÁSICO*”

por

Eperson Albino Fellini

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 14:30hs do dia 27 de novembro de 2017. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Rômel da Rosa da Silva, Dr.
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

Prof. André Pereira Pedroso, Dr.
(UNIOESTE/Francisco Beltrão)

Prof. João Biesdorf, Dr.
(UTFPR/Branco)

Prof. Rômel da Rosa da Silva, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

Dedico este trabalho a Deus todo poderoso que me abençoou e iluminou neste caminho e à minha família que sempre me apoiou nos estudos.

AGRADECIMENTOS

- A Deus por me conceder saúde e sabedoria.
- À minha família por estar presente em todos os momentos.
- Ao meu orientador Professor Dr. Rômel da Rosa da Silva pelos conselhos prestados e auxílio no desenvolvimento do estudo.
- Aos amigos de turma do PROFMAT, pelo apoio durante o curso.
- Aos professores do PROFMAT que de grande importância foram ao meu aprendizado.
- À CAPES, pelo auxílio financeiro.

“Prefiram a minha instrução à prata, e o conhecimento ao ouro puro, pois a sabedoria é mais preciosa do que rubis; nada do que vocês possam desejar compara-se a ela.” (Provérbios 8:10-11).

RESUMO

FELLINI, Eperson Albino. **ANALISANDO E CONTRIBUINDO COM O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA EM NÍVEL BÁSICO.** 2017. 90 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2017.

Neste trabalho encontra-se uma pesquisa bibliográfica, foram consultados os Parâmetros Curriculares Nacionais, o Programa Nacional dos Livros Didáticos, artigos sobre Educação Financeira e Letramento Financeiro com o objetivo principal de apresentar uma proposta para ensino da Matemática Financeira na Educação Básica, com situações do dia a dia dos alunos, contribuindo com a sua Educação Financeira, para que eles saibam, por exemplo, a melhor opção em uma compra ou em um investimento. Mais importante do que decorar fórmulas é desenvolver uma visão contextualizada da importância da Matemática Financeira na formação do aluno como cidadão.

Palavras-chave: Matemática Financeira. Educação Financeira. Alfabetização Financeira. Ensino Básico.

ABSTRACT

FELLINI, Eperson Albino. **Analysing and Contributing to Financial Mathematics Teaching at Basic Level**. 2017. 90 f. Dissertation (Professional Masters in Mathematics in National Network - PROFMAT) - Federal Technology University - Parana. Pato Branco, 2017.

In this work, a bibliographic research was conducted, where the National Curricular Parameters, the National Textbook Program, articles on Financial Education and Financial Literacy were consulted, with the main objective of presenting a proposal for teaching Financial Mathematics in Basic Education, with situations from the day to day of the students, contributing with their Financial Education, so that they know, for example, the best option in a purchase or an investment. More important than decorating formulas is to develop a contextualized view of the importance of Financial Mathematics in the student´s formation as a citizen.

Keywords: Financial Mathematics. Financial Education. Financial Literacy . Basic Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS

AEF	Associação de Educação Financeira
BRICS	Brasil, Rússia, Índia, China e África do Sul
CONEF	Comitê Nacional de Educação Financeira
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
ENEF	Estratégia Nacional de Educação Financeira
FEBRABAN	Federação Brasileira dos Bancos
FLAT	Letramento Financeiro no Mundo
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
GAP	Grupo de Apoio Pedagógico
GFLEC	Centro de Excelência Global de Letramento Financeiro
LDB	Lei das Diretrizes Básicas
MEC	Ministério da Educação e Cultura
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PNLD	Programa Nacional de Livros Didáticos

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nossa família teve comércio no Paraná por 40 anos e ali surgiu meu interesse pelo tema Matemática Financeira. Em 2015 cursando o Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT[1] veio uma oportunidade de trabalhar com este tema que se caracteriza por ser bastante amplo e alinha a teoria à prática. A imprensa nos fornece todos os dias informações sobre taxas percentuais, e alguns impostos. As cotações das ações de empresas brasileiras, tais quais as da Petrobrás estão em destaque.

Para entender a dinâmica da atual economia, notamos que o Plano Real ocorrido na década de 90, com a estabilização da moeda, elevou a acessibilidade ao crédito fácil e aumentou o poder aquisitivo do brasileiro. Mas para uma sociedade com pouca Educação Financeira não foi um fator somente positivo pois aumentou a inadimplência e o endividamento dos cidadãos brasileiros. (ARAÚJO E CALIFE, 2014).

Segundo Correia et al:

> A necessidade de se adquirir conhecimentos financeiros não é mais só inerente aos profissionais que trabalham com a área financeira, na atualidade com o advento das diversas mudanças impostas pelo sistema capitalista, a preocupação com a educação de qualidade se faz necessário a toda pessoa que lida com dinheiro. (CORREIA et al., 2015, p.1).

Os problemas econômicos não se restringem ao Brasil, mas ao mundo. (ARAÚJO E CALIFE,2014). Alguns órgãos internacionais especialistas, como o OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico)[2] propõem soluções para promover a Educação Financeira pelo mundo.

Neste trabalho direcionaremos esforços para o estreitamento da relação entre a Educação Financeira e a Matemática Financeira, principalmente na Educação Básica. Na exposição de conteúdos de Matemática Financeira, geralmente há a preocupação de passar fórmulas para resolver exercícios deixando um pouco de lado o contexto das situações envolvidas.

---

[1]O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT é um programa de mestrado semipresencial na área de Matemática com oferta nacional, visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional.

[2] A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico é uma organização internacional de 34 países que procura fornecer uma plataforma para comparar políticas econômicas. Partilha seus conhecimentos com mais de 100 outros países como Brasil, China e Rússia.

Segundo Morgado, Wagner e Zani (2001), a Matemática Financeira não é um conjunto de fórmulas para o cálculo de juros e sim um método de decisões entre alternativas de investimentos e financiamentos. Os conteúdos de Matemática Comercial e Financeira trabalhados hoje em dia com os alunos do Ensino Básico não atendem muitas das necessidades dos estudantes. Esta questão envolve fatores mais do que metodológicos e refletimos certa insatisfação com os “métodos tradicionais” de ensino de Matemática. Uma das consequências disso é o baixo desempenho do aluno brasileiro em exames de nível nacional e internacional, como o PISA[3], que exigem mais do que memorização de fórmulas. Estes conteúdos merecem ser trabalhados de forma contextualizada conforme a demanda dos estudantes e da comunidade.

O aluno que ocupa uma cadeira na escola hoje será o mesmo que amanhã estará ativo no setor financeiro como consumidor de um eletrodoméstico, de um móvel ou imóvel, ou como investidor de renda fixa ou poupança. É preciso que um bom conhecimento de Educação Financeira por parte desses alunos para que eles façam a melhor opção nesses investimentos. Não podemos aceitar que o aluno após terminar o Ensino Básico seja incapaz de optar corretamente entre uma compra a prazo ou à vista ou de ter noções dos juros aplicados nos cartões de crédito.

O primeiro contato do aluno com este tema se dá no sétimo ano do Ensino Fundamental (no currículo de nove anos) com o estudo de razão, proporção e regra de três. Volta a abordar o conteúdo na primeira série do Ensino Médio onde aprende um conjunto de fórmulas para resolver problemas moldados para o assunto.

Nas escolas, em geral, pouca Educação Financeira vem sendo trabalhada. As pessoas têm percebido a importância do uso consciente do dinheiro e de um planejamento financeiro adequado. Infelizmente, a Educação Financeira não faz parte do Universo familiar e do escolar. Exercendo a profissão de professor, percebo na maioria dos alunos pouco interesse pela Matemática, um dos motivos disso pode ser o não entendimento dos conceitos básicos ou o fato de que a metodologia do ensino-aprendizagem esteja longe da realidade do educando. Acreditamos que as situações cotidianas podem facilitar a contextualizar o ensino e aproximar o aluno da

[3] PISA – Program for International Student Assessment – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, é feito pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) e avalia o que alunos ao final da educação obrigatória adquiriram em relação a conhecimentos e habilidades essenciais para a completa participação na sociedade moderna.

aprendizagem de Matemática Financeira. D'Ambrósio (1999) denunciava sobre o risco de desaparecimento da Matemática como disciplina autônoma dos sistemas escolares, devido ao fato de ser ensinada de maneira desinteressante com testes padronizados, listas de exercícios descontextualizadas da realidade social atual do aluno. (D'AMBRÓSIO, 1999).

O ensino de Matemática deve proporcionar ao aluno não somente sua formação no ensino regular, mas também como cidadão para que ele possa contribuir com conhecimentos, participar, intervir e modificar o mundo ao seu redor, a sua família, a sua comunidade e a sua cidade. Na sala de aula percebemos o desinteresse pela Matemática, fazendo com que muitos professores do Ensino Básico procurem práticas metodológicas diferentes no processo ensino-aprendizagem além das fórmulas padronizadas como tentativa para que os alunos aprendam os conteúdos e os usem em suas vidas. Um fato que preocupa os professores da área é o grande número de reprovação e abandono dos alunos por compreenderem pouco a Matemática, por isso tentar diminuir esse número é válido, de certa forma, melhorando a qualidade do ensino de Matemática. Segundo Fiorentini:

> Há, entretanto, diferentes modos de conceber e ver a questão da qualidade de ensino da Matemática. Alguns podem relacioná-la ao nível de rigor e formalização dos conteúdos matemáticos trabalhados na escola. Outros, ao emprego de técnicas de ensino e ao controle do processo ensino/aprendizagem com o propósito de reduzir as reprovações. (FIORENTINI, 1995, p.2).

Os PCN[4] deixam claro a importância de uma Matemática universalizada, onde todos possam usá-la em questões de seu interesse pessoal e cotidiano:

> A construção e a utilização do conhecimento matemático não são feitas apenas por matemáticos, cientistas ou engenheiros, mas, de formas diferenciadas, por todos os grupos socioculturais, que desenvolvem e utilizam habilidades para contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar, em função de suas necessidades e interesses. (BRASIL, 1998, p. 27 e 28).

Por isso existe uma necessidade do ensino voltado a realidade do aluno fazendo com que este integre a sociedade e aplique os conteúdos adquiridos em sala de aula em ambientes extraclasse.

[4] Parâmetros Curriculares Nacionais – Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – são referências de qualidade para os Ensino Fundamental e Médio do País elaboradas pelo Governo Federal/MEC. O objetivo principal é propiciar subsídios à elaboração do currículo, tendo em vista um projeto pedagógico em função da cidadania do aluno e uma escola em que se aprende melhor.

Segundo Bassanezi podemos justificar o ensino da Matemática nas escolas:

> [...]não simplesmente por ser uma ciência muito importante e que será útil mais tarde, como dizem a maioria dos professores, mas principalmente por atender as várias características, que são essenciais a formação do indivíduo: a: como ferramenta para a vida[...]; b:como instrumentadora para o trabalho. (BASSANEZI, 2011, p. 206).

A crescente relevância da Educação Financeira nos últimos anos decorre do desenvolvimento dos mercados financeiros e das mudanças políticas e sociais.

Decidimos neste trabalho realizar uma pesquisa voltada ao professor do Ensino Básico, para servir de apoio ao livro didático. Queremos caracterizar esta pesquisa pela simplicidade cuja finalidade é diminuir a diferença entre a linguagem dos especialistas financeiros e a linguagem dos alunos e/ou professores do Ensino Médio. Este trabalho está de acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná, porque segundo as Diretrizes é necessário que os alunos estejam conscientes para compreender, interpretar e dar soluções para situações que envolvam a Matemática Financeira:

> É importante que o aluno do ensino médio compreenda a matemática financeira aplicada aos diversos ramos da atividade humana e sua influência nas decisões de ordem pessoal e social. Tal importância relaciona-se ao trato com dívidas, com crediários à interpretação de descontos, à compreensão dos reajustes salariais, à escolha de aplicações financeiras, entre outras. (PARANÁ, 2008, p.61).

Focando o ensino de Matemática Financeira transversalmente à Educação Financeira, adotou-se como metodologia a pesquisa bibliográfica, onde foram consultados os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Lei das Diretrizes e Bases da Educação, livros, dissertações, periódicos, teses e monografias de Matemática Financeira. O ponto positivo da pesquisa bibliográfica é que podemos acessar vários pontos de vista diferentes. Segundo Gil (2010):

> A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. (...) A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. (GIL, 2010, p.50).

No que se refere a organização desta dissertação, os capítulos estão estruturados do seguinte modo:

No primeiro capítulo esta introdução.

No capítulo 2 falamos um pouco das leis que regem o Ensino Básico no Brasil, da trajetória da Educação Financeira e da Matemática Financeira até a atualidade. No terceiro capítulo mostramos um pouco do Letramento Financeiro das pessoas no mundo e também a carência de Letramento Financeiro no mundo em geral, mas principalmente no Brasil. No capítulo 4 falamos sobre a Estratégia Nacional de Educação Financeira, que achamos interessante para mostrar que o Brasil admite legalmente a gravidade do problema criando políticas públicas para melhorar a Educação Financeira da população, as quais são desconhecidas pela maioria dos professores do Ensino Básico.

No quinto capítulo comentamos sobre os Sistemas de Amortização e o Montante de uma Sequência Uniforme de Depósitos. No sexto capítulo registramos uma proposta para o ensino de Matemática Financeira para um público-alvo: alunos do Ensino Básico. Por fim tecemos algumas conclusões.

1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA.

O motivo de escolhermos este tema foi porque no Ensino Básico a Matemática Financeira tem sido colocada em segundo plano. Conforme Pelicioli (2011):

> Inicialmente, cabe assinalar que as publicações e pesquisas relacionadas ao tema Educação Financeira integrada à Educação Matemática, principalmente no cenário brasileiro, são escassas. O que se encontra são obras ligadas à área econômica e da administração ou de gestão financeira pessoal e familiar, não havendo interligação com ambiente escolar. Assim o conteúdo financeiro está inserido, de forma tênue em capítulos com abordagem relativamente superficial. (PELICIOLI, 2011, p. 31).

Na formação de um cidadão atuante começamos desenvolvendo sua capacidade de tomar decisões de como comprar; avaliar sobre a necessidade de fazer ou não um empréstimo. A Matemática exerce um papel importante no acesso à cidadania e a Educação Financeira, que adequadamente ensinada, tem potencial formador. Um dos maiores desafios de um educador de Matemática é tornar a Matemática que é ensinada na sala de aula em algo que possa ser percebido na sua vida.

Como apontado por Savoia, Saito e Santana: “A Educação Financeira no Brasil se encontra em estágio de desenvolvimento inferior aos Estados Unidos e Reino Unido“. (SAVOIA, SAITO E SANTANA, 2007, p.1137). Apesar da importância social-econômica o tema finanças é pouco estudado na escola. A Educação Financeira infelizmente ainda não é uma realidade nas escolas brasileiras em todos os níveis e essas deficiências muitas vezes levam o adulto a tomar decisões equivocadas no orçamento familiar. Justifica-se um olhar mais próximo a Matemática Financeira por ela estar bem próxima de nosso cotidiano, por exemplo, calculando as prestações de um móvel ou imóvel e optando pelo pagamento à vista ou parcelado. O desconhecimento de cálculos financeiros pode levar a grandes perdas financeiras. Como discernir entre a forma mais apropriada de efetuar os pagamentos: em parcelas ou de uma só vez? Responder a esta pergunta depende de vários fatores: as taxas de juros e correções cobradas, data e prazo de pagamento. São estas decisões que afetam a vida das pessoas por muito tempo, influenciando sua conduta individual, familiar e de grupo.

Neste trabalho buscamos oferecer subsídios ao professor, para que este possa motivar os alunos a se interessarem pelos conhecimentos da Matemática Financeira e que esta sirva de base para boas decisões econômicas nas práticas sociais.

1.2 OBJETIVO GERAL

O objetivo principal deste trabalho é elaborar uma sequência de atividades para auxiliar o professor no ensino da Matemática Financeira a nível Básico. Na proposta buscaremos contextualizar a Matemática Financeira a assuntos do cotidiano do aluno para que ele perceba que estes estão relacionados com a Educação Financeira, despertando o interesse dos alunos para um assunto que gera muitas dúvidas na sociedade.

Buscando atingir este objetivo realizamos um levantamento bibliográfico, levantando fatos e informações à cerca da História da Matemática Financeira, Educação Financeira, Letramento Financeiro, algumas ações a nível nacional envolvendo Educação Financeira.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção temos como objetivo:

- Mostrar de forma breve as leis que regulamentam os Ensino Básico no Brasil;
- Explanar sobre a metodologia e o livro didático usado em geral no Ensino Básico para o ensino de Matemática Financeira;
- Apresentar um pouco da história da Matemática Financeira no Brasil e da história da formação de conceitos financeiros.

2.1 OS FUNDAMENTOS DO NOVO ENSINO BÁSICO: A LDB E OS PCN.

Na década de 90 o Brasil participou da Conferência Mundial Sobre Educação Para Todos[5] e passou a elaborar novas diretrizes políticas, entre elas, eliminar o analfabetismo até o final do século. Considerando o compromisso assinado, o Brasil, incorporando a política do capital financeiro passa a organizar-se segundo as propostas dos organismos financiadores e busca a elaboração de suas propostas curriculares. A atual Lei das Diretrizes e Bases da Educação (LDB) é composta por 92 artigos que versam sobre os mais diversos temas da Educação brasileira, desde o ensino infantil até o ensino superior e define os objetivos da Educação Básica. Traz no artigo 1º, 2º parágrafo: “A educação escolar deve vincular-se ao mundo do trabalho e a prática social”. E no artigo 2º estabelece que uma nova educação: “[...]inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.” (BRASIL,1996, p. 2).

A LDB em seu artigo 26 traz o seguinte:

> Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela.. (BRASIL, 1996 p.16).

Também a LDB (1996) estabelece algumas finalidades para o Ensino Médio, para oferecer uma educação equilibrada, com funções equivalentes para todos os educandos:

---

[5] A Conferência Mundial Sobre Educação Para Todos foi realizada em Jomtiem, na Tailândia, em 1990, cujo objetivo era estabelecer compromissos mundiais para garantir a todas as pessoas os conhecimentos necessários a uma vida digna.

- A formação da pessoa, de maneira a desenvolver valores e competências necessárias a integração de seu projeto individual ao projeto da sociedade em que se situa;
- O aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
- A preparação e orientação básica para a sua integração ao mundo de trabalho, com as competências que garantam seu aprimoramento profissional e permitam acompanhar as mudanças que caracterizam a produção no nosso tempo;
- O desenvolvimento das competências para continuar aprendendo, de forma autônoma e crítica, em níveis mais complexos de estudo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são diretrizes que mostram o caminho para o ensino no Brasil. No Ensino Médio, segundo Brasil (2000), está proposta a divisão dos PCN assim: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (que abrange Língua Portuguesa, Língua Estrangeira Moderna, Educação Física, Arte e Informática), Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (Biologia, Física, Química e Matemática), e Ciências Humanas e suas Tecnologias (História, Geografia, Sociologia, Antropologia, Filosofia e Política).

Os PCN definem que os currículos e os conteúdos não podem ser trabalhados apenas como transmissão de conteúdo, mas, junto à prática docente, devem ser um instrumento para uma aprendizagem efetiva, de forma que o aluno consiga entender o conteúdo e não apenas decorá-lo. A Matemática Financeira, nos PCN, é relacionada ao cotidiano do aluno. Está no tema Álgebra:

> No trabalho com *Números e operações* deve-se proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do quotidiano, tais como: operar com números inteiros e decimais finitos; operar com frações, em especial com porcentagens; (...) ler faturas de contas de consumo de água, luz e telefone; interpretar informações dadas em artefatos tecnológicos (termômetro, relógio, velocímetro. (...) deve tornar o aluno, ao final do Ensino Médio, capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; conferir se estão corretas informações em embalagens de produto em função da quantidade; conferir se estão corretas informações em embalagens de produtos quanto ao volume; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários.(BRASIL, 2006, v.2, p. 70).

Sabemos que o ensino da Matemática Financeira na Educação Básica está longe do ideal, como apontado por Gouvea (2006):

> Alguns temas que se referem à parte financeira da Matemática são propostos a partir da 4° série do Ensino Fundamental. Entretanto, a Matemática Financeira nem sempre é trabalhada nas escolas de Ensino Fundamental e Ensino Médio, e quando é oferecida, muitas vezes, fica longe do contexto em que o aluno está inserido. (GOUVEA, 2006, p. 13).

Para alcançarmos excelência na educação é necessário investimento na formação de professores, investir nos cursos de licenciaturas e criar melhor condição de trabalho.

2.2 O LIVRO DIDÁTICO: UMA BREVE REFLEXÃO

O Programa Nacional do Livro Didático do Governo Federal distribui de forma gratuita os livros didáticos para os alunos das escolas públicas de Ensino Fundamental e Médio de todo o país. O Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)[6] é atualmente quem distribui para as escolas os livros aprovados pelo Ministério da Educação e Cultura através do Guia do Livro Didático. Este apresenta uma sinopse de cada publicação, classificada de acordo com a qualidade do conteúdo, na qual o professor pode avaliar o livro mais adequado às características de sua região, de seus alunos e ao processo pedagógico da sua escola. O programa é contínuo e seleciona anualmente livros para um dos três ciclos da Educação Básica, assim alternam-se trienalmente Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Em 2015 foi a quarta vez que o Ministério da Educação realizou a avaliação de livros didáticos voltados para o Ensino Médio, sendo a próxima em 2018.

Apesar da importância do tema verificamos através de pesquisa bibliográfica, tais como a citação acima de Gouvea (2006), que existem poucos estudos sobre aprendizagem de Matemática Financeira no Ensino Básico. Os livros didáticos em sua maioria abordam o tema de maneira pouco prática, com a aplicação direta de fórmulas exóticas. O significado financeiro não alcança profundidade necessária e dificulta o entendimento das questões matemáticas. Poucos livros ligam adequadamente o tema ao estudo de Funções e ao estudo de Séries. A inclusão do tema nos livros didáticos é pela demanda às orientações contidas nos PCN. Segundo Brasil(2014), os livros aprovados para Matemática pelo Guia em 2015 foram:

---

[6] O Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE, autarquia federal vinculada ao Ministério da Educação e Cultura é responsável pela execução de políticas educacionais do Ministério da Educação (MEC).

- Conexões com a Matemática, de Fábio Martins de Leonardo, Editora Moderna;
- Matemática: Contexto e Aplicações, de Luiz Roberto Dante, Editora Ática, 2ª edição 2013;
- Matemática : Paiva, de Manoel Rodrigues Paiva, Editora Moderna, 2ª edição 2013;
- Matemática : Ciência e Aplicações, dos autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Mauro Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze Silveira de Almeida, Editora Saraiva, 7ª edição 2013.
- Matemática : Ensino Médio, das autoras Kátia Cristina Stocco Smole e Maria Ignez de Souza Vieira;
- Novo Olhar: Matemática, de Joamir Souza, Editora FTD, 2ª edição 2013.

Os conhecimentos da área de Matemática Financeira tratados nestes livros são principalmente:

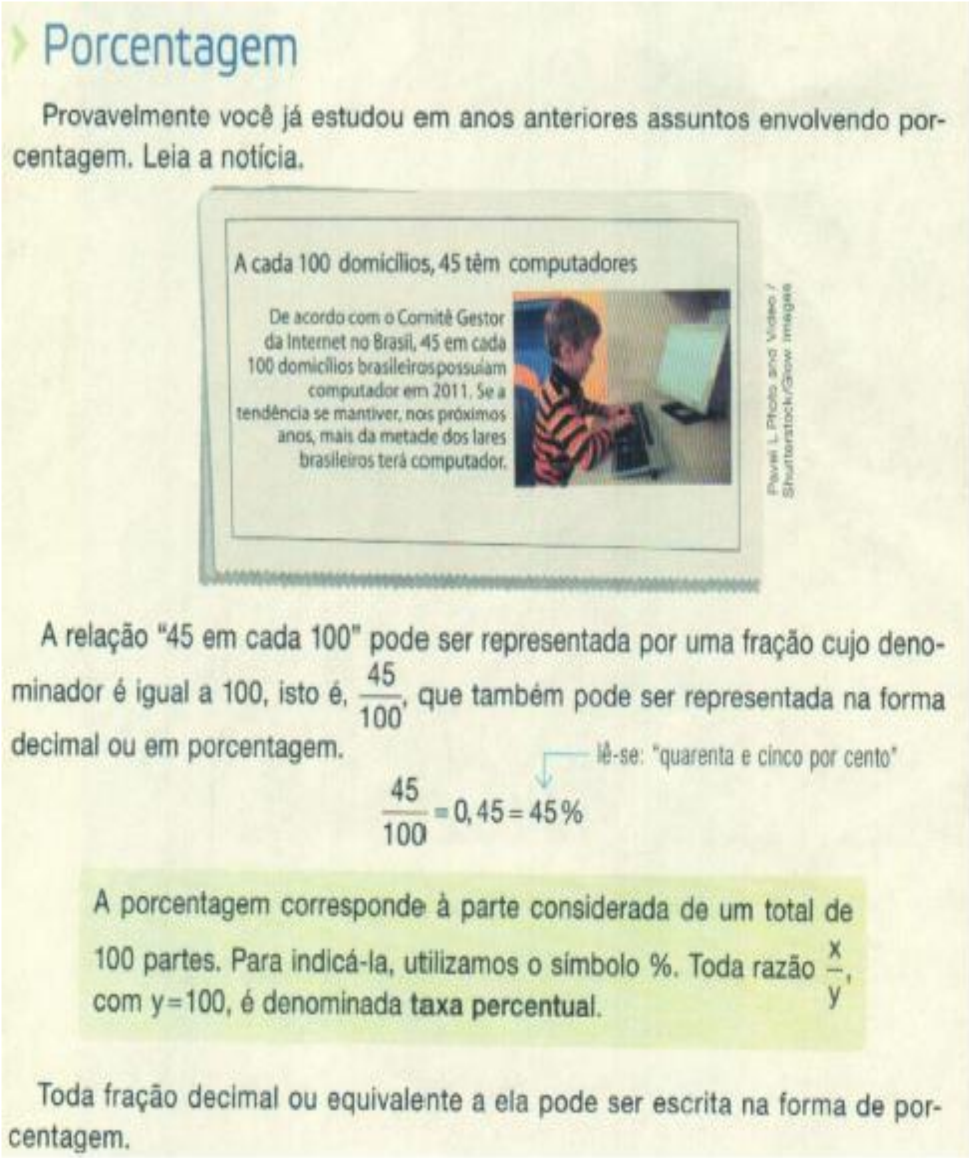
- Porcentagem;
- Descontos e Acréscimos;
- Juros Simples e Compostos.

As atividades propostas por eles são caracterizadas por problemas expressando situações próximas da realidade vivenciadas pelos alunos do Ensino Médio, por exemplo, percentuais de aumento de salário, empréstimo de Capital e aplicação de multas por atraso de pagamentos, possibilitando assim pensar em uma atitude pedagógica além das aulas expositivas ou a resolução de problemas envolvendo apenas a aplicação de fórmulas matemáticas.

Nos conceitos Razão, Proporção e Porcentagem envolvem somente operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, exercícios de aplicações e testes de vestibulares ou de concursos.

Segundo Suelen Vieira Conceição, que analisou a obra Matemática Ciência e Aplicações, de Gelson Iezzi: “Seria de grande valia se, obras de apoio didático, valessem-se de exemplos contextualizados, de maneira que o educando pudesse compreender o sentido de sua aprendizagem” (CONCEIÇÂO, 2015, p.43).

Em sua maioria os livros apresentam uma revisão de Porcentagem, com explanação de conteúdo, acompanhada de exemplos e atividades resolvidas e propostas. A título de ilustração na Figura 1 mostraremos como é abordada esta introdução.



Porcentagem

Provavelmente você já estudou em anos anteriores assuntos envolvendo porcentagem. Leia a notícia.

A cada 100 domicílios, 45 têm computadores

De acordo com o Comitê Gestor da Internet no Brasil, 45 em cada 100 domicílios brasileiros possuíam computador em 2011. Se a tendência se mantiver, nos próximos anos, mais da metade dos lares brasileiros terá computador.

Pavel L Photo and Video / Shutterstock/Glow Images

A relação "45 em cada 100" pode ser representada por uma fração cujo denominador é igual a 100, isto é, $\frac{45}{100}$, que também pode ser representada na forma decimal ou em porcentagem.

lê-se: "quarenta e cinco por cento"

$$\frac{45}{100} = 0,45 = 45\%$$

A porcentagem corresponde à parte considerada de um total de 100 partes. Para indicá-la, utilizamos o símbolo %. Toda razão $\frac{x}{y}$, com $y = 100$, é denominada **taxa percentual**.

Toda fração decimal ou equivalente a ela pode ser escrita na forma de porcentagem.

Figura 1: Introdução 1 de Porcentagem no livro didático.

Fonte: SOUZA, J. Novo Olhar – Matemática 2.ed. São Paulo: FTD, 2013, p.60

Também são trabalhados Juros simples e Juros compostos, iniciado por explanação teórica, seguida de situações-problema. Exemplificamos na Figura 2 como são abordado os Juros Compostos.

Juro composto

Considere a situação a seguir, envolvendo acréscimos sucessivos cujas taxas são iguais.

Exemplo

Talita aplicou R$ 2 580,00 a uma taxa de juro composto de 3% a.m. durante 3 meses. Podemos calcular o montante obtido ao final dessa aplicação da seguinte maneira:

Analisando essa situação, podemos notar que o sistema de juro composto corresponde a um caso particular de acréscimos sucessivos, cujas taxas de acréscimo são todas iguais. Para calcular os acréscimos sucessivos, utilizamos a seguinte fórmula:

$$P = P_0(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot(1+i_3)\cdot\ldots\cdot(1+i_n)$$

Fazendo $P=M$ e $P_0=c$, temos:

$$M = c(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot(1+i_3)\cdot\ldots\cdot(1+i_n)$$

Substituindo na fórmula c por 2 580 e $i_1=i_2=i_3$ por 0,03:

$$M = 2\,580\cdot(1+0{,}03)\cdot(1+0{,}03)\cdot(1+0{,}03) \approx 2\,819{,}24$$

Portanto, o montante obtido ao final da aplicação foi R$ 2 819,24.

De maneira geral, podemos calcular o montante obtido ao aplicar um capital a juro composto da seguinte forma:

$$M = c(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot(1+i_3)\cdot\ldots\cdot(1+i_n),\ \text{em que } i_1=i_2=i_3=\ldots=i_n=i$$

Como as taxas de acréscimos estão associadas a um período de tempo, temos que $n=t$. Logo:

$$M = c\cdot\underbrace{(1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i)\cdot\ldots\cdot(1+i)}_{t \text{ fatores iguais}}$$

$$M = c\cdot(1+i)^t$$

No juro composto, não podemos multiplicar ou dividir uma taxa dada em certo período e obter uma equivalente em outro período, como ocorre nos juro simples. No caso do juro composto, é necessário realizar outros cálculos.

Figura 2: Juros Compostos no livro didático.

Fonte: SOUZA, J. Novo Olhar – Matemática 2.ed. São Paulo: FTD, 2013, p.75.

Em alguns livros há uma relação da função afim com Juros Simples e da Função Exponencial com Juros Compostos, no entanto tal relação é pouco explorada. Na Figura 3 ilustramos como é abordado a relação entre Juros Compostos e Função Exponencial.

O montante M está em função de t e III corresponde a uma função do tipo **exponencial**. Podemos representar essa função da seguinte maneira:

$$M = 1\,200\cdot(1{,}15)^t \Rightarrow h(t) = 1\,200\cdot(1{,}15)^t,\ \text{com } h:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

t	$M=h(t)$
0	1 200
1	1 380
2	1 587
3	1 825,05

Figura 3: Relação Juros Compostos e Função Exponencial.
Fonte: SOUZA, J. Novo Olhar – Matemática 2.ed. São Paulo: FTD, 2013, p.79

Observamos no atual sistema de ensino-aprendizagem, uma grande defasagem, um método tradicional, onde o livro didático é colocado como um dos únicos objetos de estudo e fonte de pesquisa, utilizado de forma limitada e antagônica a realidade dos alunos.

Verificamos que há uma preocupação com a utilização e a importância que os livros didáticos têm para o ensino de todas as disciplinas escolares, em especial a Matemática. Mesmo com algumas transformações metodológicas implantadas a partir dos avanços tecnológicos, o livro escolar continua a ser um dos materiais didáticos mais usados nas salas de aula do Brasil.

2.3 EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Por volta do ano 1990, no Brasil, haviam altos índices de inflação, crédito escasso e pouco acesso a informação. O brasileiro da classe média dificilmente conseguia planejar sua vida financeira nem a curto e nem a longo prazo.

No Brasil, começamos a associar a necessidade de se estudar conceitos financeiros com a estabilidade da moeda a partir do Plano Real[7], este que segundo Pereira (1994) foi: “[...]o décimo terceiro plano de estabilização tentado no Brasil[...]”. (PEREIRA, 1994, p. 132).

Com a melhora da situação econômica a partir de 1999, alguns fatores importantes para o conceito e a prática da Educação Financeira começaram a mudar. Dois fatores foram importantes nesse período: o controle da inflação e a expansão do crédito por diversos setores da economia.

Segundo Araújo e Calife: “Estima-se que só durante o período entre 1993 e 2011 cerca de 60 milhões de pessoas ingressaram na nova classe média. Nesse contexto, a redução observada da pobreza leva um maior número de pessoas a consumir”. (ARAÚJO E CALIFE, 2014, p.4).

O crédito combinado com um histórico de uma população consumidora, acabou por colher resultados não muito satisfatórios para a saúde do sistema financeiro. Devido a alguns fatos observados, como: o aumento da taxa de Juros pelo Banco Central em 2006, a crise mundial em 2008 e a inadimplência dos financiamentos de veículos em 2011, tornou-se evidente uma necessidade para o

[7] Plano Real – Foi o programa brasileiro de estabilização econômica que promoveu o fim da inflação elevada no Brasil, situação que já durava aproximadamente trinta anos.

povo brasileiro: a Educação Financeira. Um agravante ainda, segundo Abramovay (2004) é que o custo de crédito no Brasil é muito alto sob qualquer parâmetro de comparação internacional. Segundo Araújo e Calife : os primeiros programas no Brasil de Educação Financeira : “tiveram suas origens na demanda do consumidor por socorro para “limpar seu nome””. (ARAÚJO E CALIFE, 2014, p.6), embora as iniciativas mencionadas tivessem incorporado a importância de preparar o consumidor para a ideia de renegociação responsável e da sustentabilidade do crédito.

A inadimplência “está muito mais ligada ao comprometimento da renda, isto é, à parcela do fluxo de renda destinada ao pagamento de dívidas, do que ao próprio endividamento” (ARAÚJO E CALIFE, 2014, p.5), que se traduz na falta de uma Educação Financeira.

A Educação Financeira, de acordo com a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE, 2009), pode ser definida como o processo pelo qual :

> [...] os indivíduos e as sociedades melhoram sua compreensão dos conceitos e dos produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientações claras, adquiram os valores e as competências necessários para se tornarem conscientes das oportunidades e dos riscos neles envolvidos e, então, façam suas escolhas bem informados, saibam onde procurar ajuda, adotem outras ações que melhorem o seu bem-estar, contribuindo, assim, de modo consistente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro. (OCDE, 2009)

Ou seja, processo pelo qual os consumidores e investidores melhoram sua compreensão sobre produtos, conceitos e riscos financeiros, de modo a ficarem mais conscientes sobre os riscos e oportunidades financeiras e assim adotarem ações para melhorar sua qualidade de vida.

Até 1990 a inflação crescia e então dificultava o bom planejamento das finanças dos brasileiros. Em 1994, teve uma mudança no mercado brasileiro com o advento da estabilidade financeira.

Deve-se estar atento ao risco da inadimplência associado à falta de conhecimento financeiro da população. A falta de planejamento das finanças pessoais pode inviabilizar que as pessoas alcancem seus objetivos. Assim a Educação Financeira pode ajudar as pessoas a tomarem boas decisões sobre suas finanças e também por outro lado a falta de informações pode levar o indivíduo a cometer erros.

A Educação Financeira revela-se instrumento necessário para preparar as pessoas para os desafios do complexo mundo financeiro atual.

2.3.1 Ações envolvendo a Educação Financeira no Brasil.

Pensando sobre Educação Financeira no Brasil, devemos analisar algumas leis, como a LDB (Lei das Diretrizes e Bases de 1996) que atrela a educação como "dever da família e do Estado, inspirado nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem como finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para exercício da cidadania e qualificação para o trabalho.". (BRASIL, 1996, p.1).

Os PCN, em relação aos temas transversais relatam que devido ao surgimento de um novo quadro econômico tanto no mundo quanto no Brasil, há a necessidade de se educar financeiramente os alunos. Segundo os PCN: "Para estar em consonância com as demandas atuais da sociedade, é necessário que a escola trate de questões que interferem na vida dos alunos e com as quais se vêem confrontados no seu dia a dia." (BRASIL, 1998, p.65). Ainda segundo os PCN, as transformações científicas e tecnológicas e a necessária discussão ético-valorizativa da sociedade apresentam para a escola a imensa tarefa de instrumentalizar os jovens para participar da cultura, das relações sociais e políticas. A escola, ao se posicionar dessa maneira, abre a oportunidade para que os alunos aprendam sobre temas normalmente excluídos. Entretanto, mesmo depois de mais de uma década da promulgação da LDB e de o termo e os conceitos sobre Educação Financeira terem sido introduzidos no país, pode-se observar que ainda existe uma carência de produção acadêmica que possa fundamentar o tema em questão.

Nota-se que o tema não tem sido tratado em destaque pelos documentos oficiais nacionais que regem as políticas educativas no Brasil, dentre eles as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação (DCN) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Segundo Saito: "[...] não há especificamente trabalhos sobre a implantação da Educação em Finanças Pessoais nos currículos nacionais e tampouco uma análise do ponto de vista de educadores sobre o tema" (SAITO, 2007, p.7), e o autor fala que apesar da relevância do assunto, o Brasil não tem planejamentos educacionais para o processo de socialização econômica.

Saito (2007, p.64) fala de alguns projetos desenvolvidos por organismos governamentais e empresas privadas, no Brasil: a Centralização de Serviços dos Bancos S/A SERASA criou o Guia Serasa de Orientação ao Cidadão; o Banco Itaú que oferece o Guia do Crédito Consciente sobre como elaborar um orçamento familiar; o Programa de Educação Financeira, do Banco Central do Brasil, que orienta a sociedade sobre economia; a Comissão de Valores Mobiliários (CVM) promove palestras e tem um *site* que orienta as pessoas sobre investimentos; o Programa Educacional BOVESPA, criado pela BM&F BOVESPA para discutir a importância da bolsa de valores em um país e como funciona o mercado de ações.

Em 2007 o governo brasileiro criou a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) que trataremos com mais detalhes no Capítulo 4.

2.4 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA FINANCEIRA.

Para que os alunos interajam mais nas aulas é interessante e importante que conheçam aspectos da História relacionados com nosso tema. Assim abordaremos nesta seção alguns fatos históricos da Matemática Financeira.

Segundo Eves (2004) as transações comerciais envolvendo juros existem desde a antiguidade com registros em tábulas:

“As tábulas mostram que os sumérios antigos estavam familiarizados com todos os tipos de contratos legais e usuais, como faturas, recibos, notas promissórias, crédito, Juros Simples e Compostos, hipotecas, escrituras de venda e endossos.” (EVES, 2004, p. 60).

Com o crescimento das civilizações os grupos humanos começaram a realizar um comércio à base de troca, com mercadoria dos produtos excedentes, sem objetivo de lucro, mas para suprir as necessidades.

“O primeiro tipo de troca comercial foi o escambo, fórmula segundo a qual se trocam diretamente (e, portanto, sem a intervenção de uma “moeda” no sentido moderno da palavra) gêneros e mercadorias correspondentes a matérias primas ou a objetos de grande necessidade.” (IFRAH, 1997, p. 145).

Com o passar do tempo essa troca não mais era suficiente, visto que alguns produtos eram mais solicitados do que outros, aqueles então assumiram a função da moeda.

“A primeira unidade de escambo admitida na Grécia pré-helênica foi o boi. No século VIII a. c., na Ilíada de Homero (XXIII, 705, 749-751 e VI, 236), uma mulher hábil para mil trabalhos é assim avaliada em 4 bois[...]”. (IFRAH, 1997, p. 146).

Na América Central, as antigas civilizações tinham como base de escambo cacau, cerâmicas e pedaços de tecidos. Na China, nos séculos XVI a XI a. c. ocorria trocas de mercadorias por dentes e chifres de animais, conchas, couros e peles. No tempo dos faraós no Egito a barganha era feita com barras ou anéis de metais semipreciosos ou preciosos, como cobre, bronze, prata e ouro.

Sabemos que o conceito de empréstimo é anterior a noção da moeda. Foram encontrados registros, em tábuas de argila, da civilização Suméria na Mesopotâmia, por volta de 3000 a. C. que indicam um sistema de crédito avançado, dentre eles recibos, penhores, duplicatas, Juros, hipotecas e outras atividades de crédito.

A Suméria ficou conhecida como o “berço da civilização” por seus avanços políticos, econômicos e sociais. Registros de contas foram feitas pelos escribas em tábuas de argila porque estas demoravam mais tempo para se deteriorar. Na Figura 4 vemos uma tabuleta de negociações dos sumérios. Representavam no pictograma da mão os “produtos a chegar”, nas marcações triangulares os números e no final itens negociados, como grãos.

Também haviam tábuas com operações matemáticas conhecidas hoje como multiplicação, divisão e exponenciais (aplicadas em Juros Compostos).

Figura 4: Escrita pictográfica de tábua suméria.
Fonte : http://minimathsmuseum.com.au/sumerian-mathematics

Segundo Gonçalves, temos outras evidências de aplicação do conceito de Juros:

> Um dos primeiros indícios apareceu já na babilônia no ano de 2000 a. C. Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou de

> outras conveniências emprestadas. Muitas das práticas existentes originaram-se dos antigos costumes de empréstimos e devolução de sementes e de outros produtos agrícolas. (GONÇALVES, 2007).

Com os centros comerciais se desenvolvendo pelo mundo, na Idade Média, as cidades estado da Itália: Veneza, Gênova, Pisa e Florença e depois com a expansão marítima de países como Portugal, Holanda, Espanha e Inglaterra, houve contribuição significativa para o crescimento das atividades comerciais, principalmente com a descoberta do caminho para Índia e para América.

Houveram muitas maneiras de comercializar produtos ao redor do mundo até se estabelecer uma moeda de troca:

> A moeda de troca no sentido moderno do termo começou a ser utilizada quando o metal passou a ser fundido em pequenos lingotes ou peças, que eram facilmente manejáveis, de peso igual e selados com a marca oficial de uma autoridade pública, a única que podia certificar o bom preço e o bom quilate. (GRANDO E SCHNEIDER, 2010, p.46).

Nas relações internacionais, os países que exerciam atividades mercantis determinaram o “padrão ouro” como moeda de valor. Trocas assim continuaram até o início do século XX, perto de 1930. (SCHNEIDER, 2008, p. 28).

Pessoas que realizavam o câmbio necessário no comércio vieram a ser conhecidos como cambistas ou banqueiros e acumulavam grandes somas financeiras armazenando moedas e tinham uma vantagem extra: o lucro sobre as moedas acumuladas. A Igreja Católica foi o primeiro organismo regulador deste comércio quando: “os cidadãos abastados confiaram a custódia do seu ouro aos sacerdotes”. (GRANDO E SCHNEIDER, 2010, p.48).

O próprio desenvolvimento do comércio já exigia a criação de uma rede de comércio mais ampla [...]. Nos séculos XIII, XIV e XV, houve a criação de toda uma rede bancária [...]. (GRANDO E SCHNEIDER, 2010, p.48).

Segundo Gonçalves (2007) com as atividades comerciais se desenvolvendo em 1157 na Itália, o duque Vitali fundou em Veneza o primeiro banco particular. Depois nos séculos XIII, XIV e XV, surgiram organizações bancárias completas.

Nos séculos XVI e XVII com o comércio intercontinental e o descobrimento da América aparecem nas casas bancárias uma nova transação chamada conta corrente que possibilitava deixar o Capital em segurança até que o dono dele precisasse o que era feito através de um impresso chamado cheque, este pode ser considerado a primeira forma de uso do papel moeda. Outros tipos de movimentações bancárias foram surgindo como as letras de câmbio em que vendedor e comprador estabelecem um prazo e o comprador se obriga a pagar em dinheiro a dívida contraída no prazo determinado.

O aparecimento dos bancos está relacionado com a aplicação de cálculos na Matemática Financeira e Comercial, que foram melhorando conforme as necessidades de cada época. (GONÇALVES, 2007). Assim a humanidade foi aos poucos desenvolvendo sua economia e originando aos poucos o que mais tarde se denominaria Matemática Financeira.

3 LETRAMENTO FINANCEIRO

Este capítulo está baseado principalmente na pesquisa realizada em 2014 pela Standard & Poor´s Rating Services[8] e em Lusardi (2015), artigo de Annamaria Lusardi, uma das maiores autoridades mundiais em Educação Financeira e Alfabetização Financeira.

A definição de Letramento Financeiro é feita no quadro de avaliação do PISA[9] 2015 como (tradução do autor): “a capacidade do estudante aplicar conhecimentos e habilidades relacionadas à Matemática, resolver e interpretar problemas em situações variadas”. E ainda no mesmo documento:

> Letramento Financeiro é conhecimento e entendimento de conceitos e riscos financeiros e as habilidades, motivações e confiança em aplicar seus conhecimentos para tomar decisões no âmbito das finanças, melhorar o bem estar financeiro dos indivíduos e da sociedade e estar habilitado a participar em vida econômica.(OECD, 2017, pg. 87)(tradução do autor).

A crescente importância do Letramento Financeiro mostra um novo panorama da economia. Sabemos de algumas mudanças no Mercado Comercial e em algumas Instituições tais como: Mudanças em Sistemas de Pensões, no Mercado de Trabalho, no Mercado Financeiro (onde há uma maior complexidade) e o aumento da expectativa de vida também está mudando a importância de alguns conceitos financeiros. Vemos na Figura 5 o aumento da expectativa no mundo.

Figura 5: Aumento da expectativa de vida no mundo.
Fonte: GFLEC (Global Financial Literacy Excellence Center).

---

[8] A Standard & Poor´s atua a mais de 150 anos com 28 escritórios no mundo e oferece inteligência de mercado de alta qualidade na forma de análise e artigos.
[9] O *Programme for International Student Assessment* (Pisa) – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – é uma iniciativa de avaliação de avaliação comparada, aplicada de forma amostral a estudantes matriculados a partir do 8º ano do Ensino Fundamental na faixa etária dos 15 anos.

Diante do exposto acima, notamos que:

- Expectativa de vida está alta e continua crescendo;
- População jovem de hoje necessitará estar habilitada a se sustentar por mais anos;
- Estas mudanças estão acontecendo globalmente.

Alguns projetos mediram o Letramento Financeiro no mundo para ver quão bem preparada está a população para estas mudanças:

- Financial Literacy around the World (FLAT world Project);
- *Programme for International Student Assessment* (PISA) que mede o Letramento Financeiro entre os jovens;
- Standard & Poor´s Global Financial Literacy Survey.

O projeto FLAT World tem provas em 14 países: Estados Unidos, Holanda, Alemanha, Itália, Rússia, Suécia, Nova Zelândia, Japão, Austrália, França. Suíça, Romênia, Canadá e Finlândia.

O PISA é o primeiro estudo internacional em larga escala para avaliar o Letramento Financeiro em estudantes de 15 anos de idade. Participaram 18 países em 2012. Os países eram: Austrália, Bélgica, China, Colômbia, Croácia, República Tcheca, Estônia, França, Israel, Itália, Letônia, Nova Zelândia, Polônia, Rússia, República Eslovaca, Eslovênia, Espanha e os Estados Unidos. Em 2015 participaram 70 países. Segundo a OCDE, 2016 os instrumentos do PISA fornecem três principais tipos de resultados:

- Indicadores que fornecem um perfil básico de habilidades e conhecimentos dos estudantes;
- Indicadores derivados dos questionários que mostram como tais habilidades são relacionadas a variáveis demográficas, sociais, econômicas e educacionais;
- Indicadores de tendências que acompanham o desempenho dos estudantes.

A pesquisa *Standard & Poor´s Global FinLit Survey* é a maior e mais abrangente medida de Letramento Financeiro no mundo. Entrevistou mais de 150.000 adultos com mais de 15 anos em 140 países. A pesquisa fornece informações importantes para os governantes políticos, o setor privado e aos setores acadêmicos. Na teoria, são questões sobre poupança e investimento cujos conceitos são aplicados em qualquer lugar do mundo e cobrem quatro tópicos:

- Aritmética;
- Juros Compostos;
- Inflação;
- Diversificação do Risco.

Considera-se Letrado Financeiramente quem responder corretamente três ou mais dos quatro tópicos. Na área de Aritmética/Juros Simples a questão foi a seguinte:

- Suponha que você precise emprestar $100 (Cem dólares). Qual o valor mais baixo para se devolver: $105 ou $100 mais três por cento? Cujas respostas poderiam ser: $105; **$100 mais três por cento**; Não sei; Em branco.(Grifo do autor)

As questões da área de Juros Compostos eram:

- Suponha que você coloque algum dinheiro por dois anos no banco e este concorde em adicionar 15 por cento ao ano à sua conta. O banco irá adicionar no segundo ano mais dinheiro à sua conta do que no primeiro ano, ou irá adicionar a mesma quantia de dinheiro em ambos os anos? Respostas: **Mais**; A mesma; Não sei; Em branco.(Grifo do autor)
- Suponha que você tenha $100 numa conta poupança e o banco adicione 10 por cento ao ano a ela. Quanto dinheiro você teria na conta após cinco anos se você não retirasse nada da conta? Possíveis respostas: **Mais do que $150**; Exatamente $150; Menos do que $150; Não sei; Em branco.(Grifo do autor)

No setor Inflação, a pergunta foi a seguinte: Suponha que nos próximos dez anos o preço das coisas que você compra dobrem. Se o seu rendimento também dobrar, você conseguirá comprar menos coisas que você compra hoje, as mesmas coisas ou mais coisas? Respostas: Menos; **As mesmas**; Mais; Não sei; Em branco.(Grifo do autor).

Por fim, no setor Diversificação do Risco: Suponha que você tenha algum dinheiro. É mais seguro você por seu dinheiro em um único negócio ou investimento, ou colocar seu dinheiro em múltiplos negócios ou investimentos? Respostas: Um negócio ou investimento; **Múltiplos negócios ou investimentos**; Não sei; Em branco.(Grifo do autor).

A S&P Global FinLit Survey analisou as questões e então notaram que:

- Somente 1 em cada 3 adultos no mundo responderam corretamente 3 ou mais dos quatro tópicos;

- No Brasil 35% das pessoas entrevistadas são alfabetizadas financeiramente.

Na Figura 6 , observamos a porcentagem de adultos letrados financeiramente no mundo.

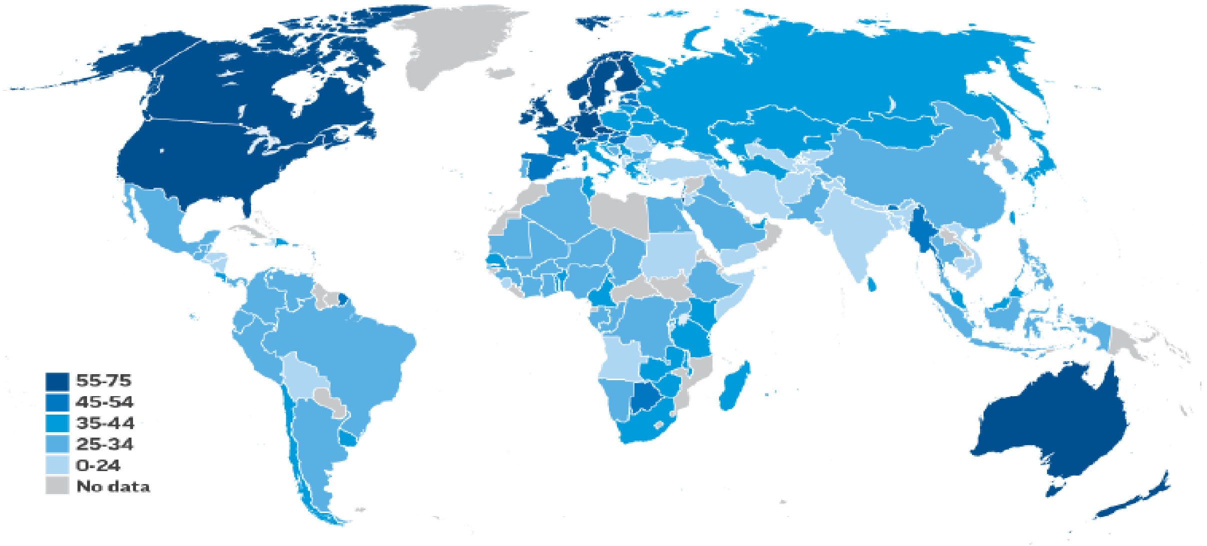


Figura 6: Adultos letrados financeiramente no mundo(%)
Fonte: GFLEC (Global Financial Literacy Excellence Center).

A Tabela 1 mostra os melhores e os piores países neste ranking:

Ranking	País	Responderam ao menos 3 dos 4 tópicos corretamente
1	Noruega	71%
2	Dinamarca	71%
3	Suécia	71%
72(mediana)	Bulgária	35%
142	Afeganistão	14%
143	Albânia	14%
144	Iémen	13%

Tabela 1: Ranking dos países no PISA.
Fonte: GFLEC (Global Financial Literacy Excellence Center).

No Figura 7 poderemos comparar o Letramento Financeiro de países avançados com os países com economia emergente, onde concluímos que o Letramento Financeiro é baixo mesmo em países desenvolvidos. No mesmo gráfico vemos a porcentagem de quem foi considerado alfabetizado financeiramente nos países do BRICS, que inclui o Brasil.

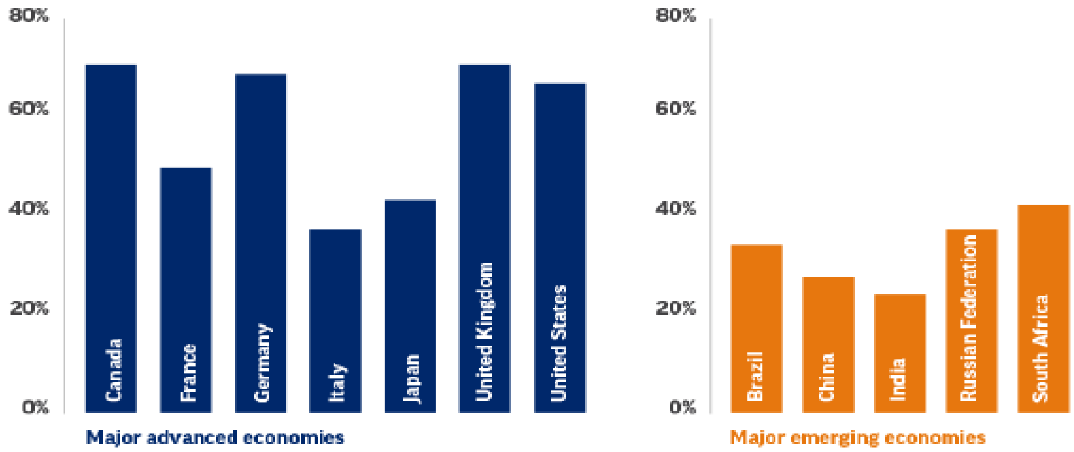


Figura 7: Let. Fin. países emergentes e em desenvolvimento.
Fonte: GFLEC (Global Financial Literacy Excellence Center).

A Figura 8 mostra a porcentagem de acertos por setores, dos considerados letrados financeiramente entre os entrevistados, no Brasil:

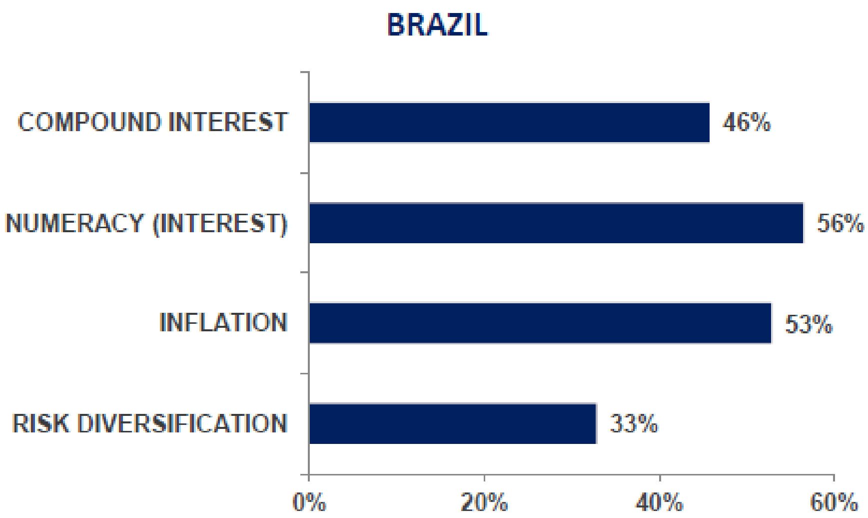


Figura 8: Percentagem de acertos por setor.
Fonte: GFLEC (Global Financial Literacy Excellence Center).

Analisando mais a fundo as respostas da pesquisa pode-se constatar que:

- Os setores Inflação e Juros Simples são o que a população mais conhece entre todos os países. Existem pequenas diferenças entre os países;
- Diversificação de risco é o que a população menos conhece. Com grandes diferenças entre os países;
- Uma constatação muito importante foi a evidência de aprendizado pela experiência, isto é, entrevistados nos países que tinham ou tiveram hiperinflação sabiam mais sobre inflação.

Entre os adultos entrevistados 35% dos homens são letrados financeiramente e 30 % das mulheres. Logo existe uma diferença de cinco pontos percentuais, em média, entre homens e mulheres e esta diferença está presente na maioria dos países. Notou-se também que as mulheres responderam mais “Eu não sei” do que homens. Na Figura 9 observamos a diferença porcentual entre os homens e as mulheres letrados financeiramente, no Brasil é 12 % (muito maior que a diferença no mundo):

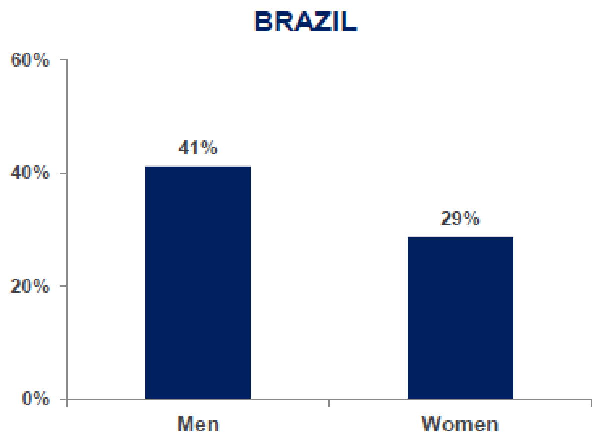


Figura 9: Desigualdades nos gêneros no Letramento Financeiro.
Fonte: GFLEC (Global Financial Literacy Excellence Center).

No gráfico comparativo da Figura 10 notamos bem o perfil das pessoas com mais noções financeiras ao longo do ciclo da vida. Enquanto que nos países em desenvolvimento jovens adultos entre 15 e 35 anos tem mais conhecimento financeiro, temos que nos países desenvolvidos a idade predominante é entre 36 a 50 anos. No Brasil estas porcentagens são: 37 % entre 15 e 34 anos; 34 % entre 35 e 54 anos e 31 % para 55 anos ou mais e no geral está com nível baixo.

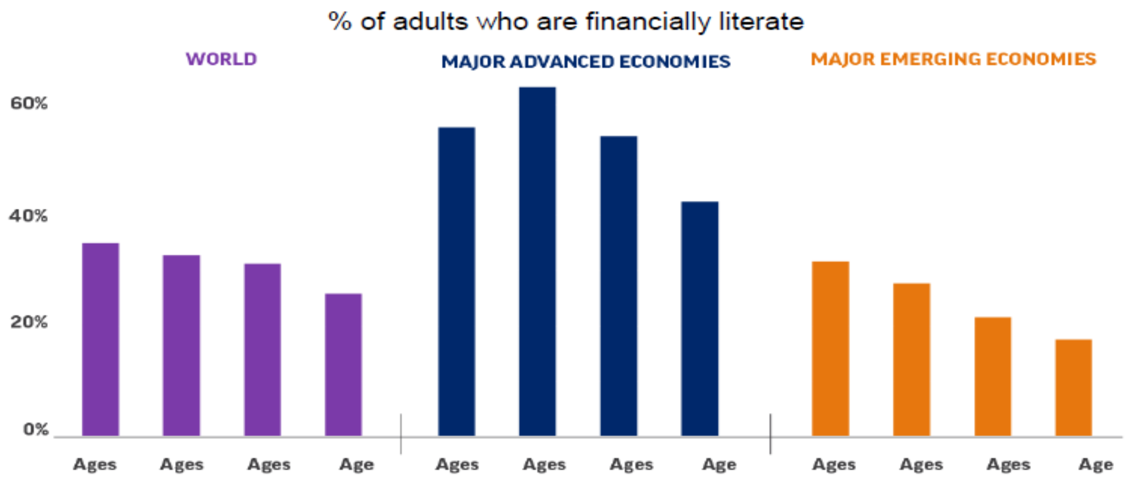


Figura 10: Perfil dos letrados financeiramente ao longo da vida no mundo.
Fonte: GFLEC (Global Financial Literacy Excellence Center).

Nos países emergentes observou-se que as 60 % famílias mais ricas tem 31 % dos adultos com conhecimentos financeiros enquanto as 40 % famílias mais pobres tem apenas 23 % alfabetizados financeiramente. A Figura 11 mostra que no Brasil, dos adultos nas 60 % famílias mais ricas existem 38 % alfabetizados financeiramente contra 29 % dos adultos nas 40 % famílias mais pobres.

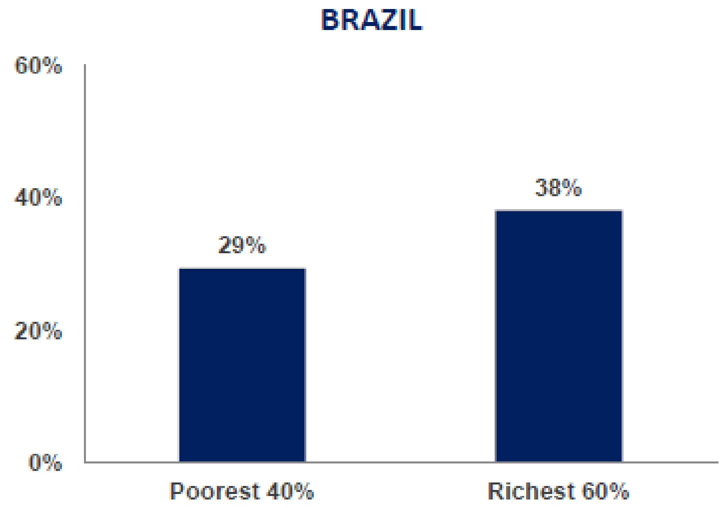


Figura 11: Letrados fin.(60% mais ricos e os 40% mais pobres no Brasil)
Fonte: Autor.

Alguns dados muito importantes para entender a alfabetização financeira através do mundo:

- As diferenças de Educação Financeira são muito amplas entre os países e dentro dos países;
- No entendimento financeiro há diferenças entre gêneros em todos os países;
- Os jovens são um grupo vulnerável;
- Existem diferenças através de classes sociais;
- Estudantes que possuíam uma conta bancária tiveram um escore maior do que estudantes com condições sócios-econômicas parecida que não possuíam conta;
- O analfabetismo financeiro está difundido no mundo;
- Diversificação de risco é o conceito mais difícil de se entender;
- Há uma ligação entre alfabetismo financeiro e inclusão social.

O que pode ser feito para melhorar o quadro analisado? Primeiro notamos que a situação é crítica. Precisamos de mais programas nesta área, particularmente para os grupos vulneráveis. O analfabetismo financeiro espalhado requer intervenção de grandes programas, como: Educação Financeira nas escolas, Educação Financeira em ambientes de trabalho, Educação Financeira nas comunidades (museus, livrarias, ambientes de aprendizagem). Como concluído por Brown et al.: “Quando expostos a programas rigorosos e professores treinados, estudantes agem melhor e estão menos propensos a ter problemas com débitos”. (BROWN et al., 2014, tradução do autor).

4 ENEF – ESTRATÉGIA NACIONAL DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA.

O Plano Real estabilizou a moeda, e desde então milhões de brasileiros estão em ascensão econômica, e colocou o cidadão em novas situações e operações pouco familiares. Também o aumento das possibilidades de consumo faz necessário que a Educação Financeira seja promovida para que a população esteja atenta às suas decisões individuais e familiares relacionadas a seus recursos.

Em 2013, 45 países com base na lista da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) já tinham criado sua Estratégia Nacional de Educação Financeira. O Brasil é um dos G-20[10] que tem uma iniciativa sendo desenvolvida denominada Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF que tem como finalidades: Fortalecer a cidadania; Aumentar a eficiência e a solidez do sistema financeiro; Disseminar a Educação Financeira; Promover a tomada de decisões financeiras conscientes por parte dos consumidores.(BRASIL, 2010a). É importante destacarmos as diretrizes da ENEF: Gratuidade das ações e prevalência do interesse público; Atuar com informação, orientação e formação. O Comitê Nacional de Educação Financeira – CONEF é responsável pela direção, supervisão e fomento da ENEF. Formado por sete órgãos e entidades de governo: Banco Central do Brasil; Comissão de Valores Mobiliários; Superintendência Nacional de Previdência Complementar; Superintendência de Seguros Privados; Ministério da Justiça e Cidadania; Ministério da Educação; Ministério da Fazenda e por quatro organizações da sociedade civil: Associação Brasileira das Entidades do Mercado Financeiro e Capitais (AMBIMA); Bolsa de Mercadorias e Futuros e a Bolsa de Valores de São Paulo (BM&F Bovespa); CNseg e FEBRABAN.

4.1 PROGRAMAS TRANSVERSAIS.

São ações de Educação Financeira da ENEF e seus objetivos requerem a conjugação de diversos temas como proteção, planejamento financeiro, poupança, investimento, crédito e defesa do consumidor. Estão sob a coordenação da

---

[10] Grupo dos 20 (G20) é um fórum que reúne os principais países industrializados e emergentes do planeta. Criado em 1999, tem o objetivo de aproximar economias desenvolvidas e em desenvolvimento e estabilizar o mercado financeiro mundial.

Associação de Educação Financeira – AEF – Brasil por meio de desenvolvimentos de tecnologias sociais e educacionais.

4.2 PROGRAMA EDUCAÇÃO FINANCEIRA NAS ESCOLAS.

O objetivo é levar a Educação Financeira para o ambiente escolar do Ensino Básico. O Programa Educação Financeira nas Escolas também apoia o desenvolvimento da cultura de planejamento, prevenção, poupança, investimento e consumo consciente do brasileiro, assim contribuindo com a construção das competências necessárias para que os estudantes enfrentem os desafios sociais e econômicos da sociedade e para o exercício da cidadania.

A escola é o ambiente onde a criança e o jovem adquirem não somente conhecimentos mas também aprendem como viver em sociedade. A Educação Financeira conversa com as diversas disciplinas dos currículos do Ensino Básico, tais como, a Geografia, a Matemática, entre outras, possibilitando o aluno compreender bem como concretizar seus sonhos e prepará-lo para a diversas fases da vida.(BRASIL, 2010b)

Para elaborar um documento norteador para o Programa Educação Financeira nas Escolas entrar nas instituições escolares foi criado o Grupo de Apoio Pedagógico – GAP que com a ENEF passou a contar com a presidência do Ministério da Educação e Cultura (MEC). Espera-se que o Tema Educação Financeira contribua com a construção das competências necessárias para que os estudantes enfrentem os desafios sociais e econômicos da sociedade. No período de 2010 a 2011 foi implantado o projeto piloto em 891 escolas públicas de Ensino Médio, em seis Unidades da Federação. Consta com uma plataforma virtual, em formato compatível com a linguagem digital feito por educadoras participantes do projeto piloto e profissionais especialistas em educação na cultura digital. A plataforma apresenta os materiais elaborados e disponibiliza seu download de forma gratuita, possibilitando que o educador escolha baixar os livros do aluno e do professor no sítio http://www.edufinanceiranaescola.gov.br.

Em relação ao Ensino Fundamental o programa foi construído para que o tema Educação Financeira atingisse os espaços escolares e contribuísse com a formação da cidadania das crianças adolescentes e jovens. A Figura 12 apresenta parte do material didático do projeto para o Ensino Fundamental:

Figura 12: Livros do Programa de Educação Financeira nas escolas.
Fonte: BRASIL, Programa de Educação Financeira nas Escolas: Materiais.

Em relação ao Ensino Médio, o Programa tem uma proposta pedagógica que foi concebida visando a articulação do tema Educação Financeira com o currículo escolar. O foco do trabalho está nas situações cotidianas da vida do educando e se baseiam em duas dimensões:

- Espacial, cujos conceitos se pautam no impacto das ações individuais sobre o contexto social;
- Temporal, com base na noção de que as decisões tomadas no presente podem afetar o futuro. Os espaços são atravessados por essa dimensão que conecta passado, presente e futuro numa cadeia de inter-relacionamentos como mostra a Figura 13.

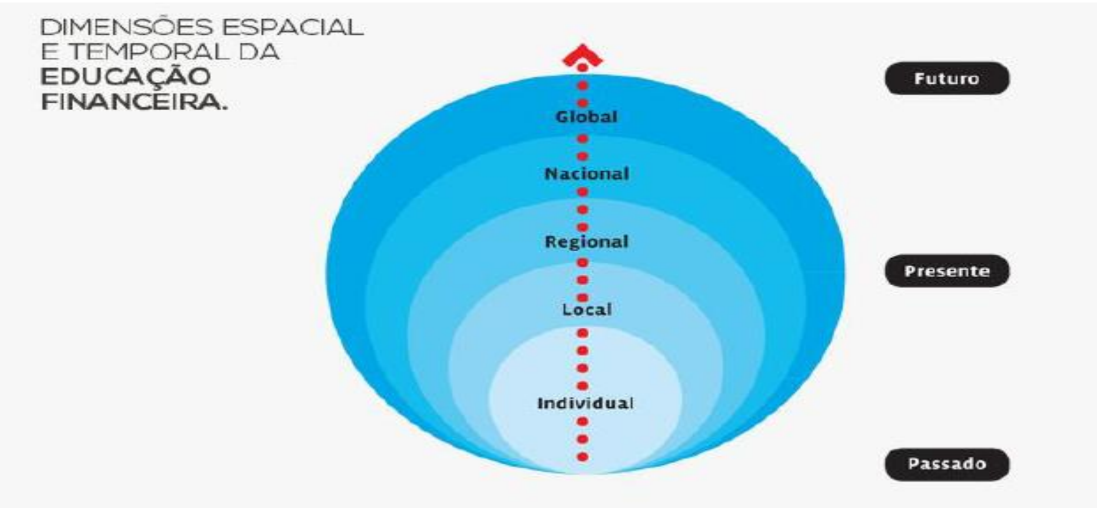


Figura 13: Dimensões espacial e temporal da Educação Financeira.
Fonte: BRASIL. Programa de Educação Financeira nas Escolas: Proposta pedagógica.

A proposta pedagógica do Programa se apoia em sete objetivos sendo quatro ligados a dimensão espacial:

1) Formar para a cidadania: direito de usufruir de liberdade, formação política, educação, saúde.
2) Ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável.
3) Oferecer conceitos e ferramentas para a tomada de decisão autônoma baseada em mudanças de atitude.
4) Formar disseminadores: crianças e jovens que possam ajudar suas famílias na determinação de seus objetivos de vida, bem como os meios adequados para alcança-los.

E três objetivos na dimensão temporal:

5) Ensinar a planejar a curto, médio e longo prazo.
6) Desenvolver a cultura de prevenção.
7) Possibilitar condições de mudança da condição atual: mobilidade social é entendida como a capacidade que uma família apresenta de aprimorar sua condição socioeconômica a partir de competências oferecidos pela Educação Financeira.

A Estratégia Nacional de Educação Financeira contribui para que os indivíduos e a sociedade melhorem sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros. Um dos objetivos da ENEF é promover um ambiente em que estudantes e jovens adquiram conhecimentos curriculares e capacidade de fazer escolhas. Os conhecimentos adquiridos com o material do ENEF podem auxiliar os jovens a construírem as competências necessárias para enfrentarem os desafios sociais e econômicos da sociedade.

5 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo introduziremos a fundamentação matemática de alguns conceitos de Matemática Financeira que geralmente não constam ou tem uma abordagem muito superficial nos livros didáticos que são o Sistema de Amortização Constante e Montante de uma Sequência Uniforme de Depósitos.

5.1 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Basicamente os Sistemas de Amortização são desenvolvidos para operações de empréstimos e financiamentos, com pagamentos periódicos do principal mais os encargos financeiros. Amortizar significa devolver o Capital que se tomou emprestado.

Os Sistemas de Amortização têm como característica utilização de Juros Compostos, estes incidindo sobre o saldo devedor ou montante. Vamos usar as seguintes notações para explicarmos estes sistemas:

- Amortização: A;
- Tempo ou período: n;
- Juros em determinado período: J_n;
- Taxa de Juros: i;
- Capital inicial ou dívida inicial: C
- Parcela em determinado período: P_n
- Saldo devedor em determinado período: SD_n;

5.1.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

O SAC tem como característica as amortizações da dívida serem sempre iguais em toda a operação. A parcela de amortização da dívida é fixa, calculada dividindo o total da dívida pelo número de prestações, sendo assim é considerado um sistema linear.

Os Juros decrescem nos períodos pois são calculados sobre o saldo devedor, este diminuindo após o pagamento de cada amortização e as prestações são decrescentes. Exemplos aproximados de aplicações do SAC são os financiamentos habitacionais e empréstimos com recursos do Banco Nacional do Desenvolvimento (BNDES).

A prestação P é dada pela soma da amortização A com os Juros J:

$$\mathrm{P} = \mathrm{A} + \mathrm{J}.$$

A amortização é calculada pelo quociente do saldo devedor pelo número de períodos, pois temos uma prestação em cada período:

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{n}}$$

As prestações são calculadas com o seguinte raciocínio:

- $\mathrm{P_1} = \mathrm{A} + \mathrm{J_1} = \mathrm{A} + \mathrm{SD} \cdot \mathrm{i};$
- $\mathrm{P_2} = \mathrm{A} + \mathrm{J_2} = \mathrm{A} + (\mathrm{SD} - \mathrm{A}) \cdot \mathrm{i} = \mathrm{A} + \mathrm{SD} \cdot \mathrm{i} - \mathrm{A} \cdot \mathrm{i}$
- $\mathrm{P_3} = \mathrm{A} + \mathrm{J_3} = \mathrm{A} + (\mathrm{SD} - 2 \cdot \mathrm{A}) \cdot \mathrm{i} = \mathrm{A} + \mathrm{SD} \cdot \mathrm{i} - 2 \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{i}$
- $\mathrm{P_4} = \mathrm{A} + \mathrm{J_4} = \mathrm{A} + (\mathrm{SD} - 3 \cdot \mathrm{A}) \cdot \mathrm{i} = \mathrm{A} + \mathrm{SD} \cdot \mathrm{i} - 3 \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{i}$
- $\vdots$
- $\mathrm{P_n} = \mathrm{A} + \mathrm{J_n} = \mathrm{A} + [\mathrm{SD} - (\mathrm{n} - 1)] \cdot \mathrm{i} = \mathrm{A} + \mathrm{SD} \cdot \mathrm{i} - (\mathrm{n} - 1) \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{i}$

As prestações periódicas e sucessivas deste sistema formam uma Progressão Aritmética decrescente cujo primeiro termo é $\mathrm{A} + \mathrm{SD} \cdot \mathrm{i}$, o número de termos é n e a razão é $-\mathrm{A} \cdot \mathrm{i}$.

Exemplo 5.1.1 Um estudante fez um empréstimo bancário de R$15000,00 usando o Sistema de Amortização Constante a uma taxa de Juros de 2,5% ao mês. Construa a planilha deste empréstimo sabendo que a dívida deve ser paga em 15 prestações mensais.

Resolução:

- Vamos calcular a amortização, sendo SD o saldo devedor e n o número de períodos:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{n}} \\ &= \frac{15000}{15} = 1000\,. \end{aligned}$$

A amortização será de R$1000,00.

- Calcularemos o saldo devedor no primeiro período, ou seja, na linha 1 de nossa tabela, sendo $\mathrm{SD_0}$ o saldo devedor inicial:

$$\mathrm{SD_n} = \mathrm{SD_{n-1}} - \mathrm{A}$$
$$\Rightarrow \mathrm{SD_1} = \mathrm{SD_0} - \mathrm{A}$$
$$= 15000 - 1000 = 14000$$

- Em seguida calcularemos os Juros do primeiro período:

$$\mathrm{J_n} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{SD_{n-1}}$$
$$\Rightarrow \mathrm{J_1} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{SD_0}$$
$$= 0{,}025 \cdot 15000 = 375\,.$$

Assim os Juros a serem pagos no primeiro período são de R$375,00.

- Agora calcularemos a primeira prestação:

$$\mathrm{P_n} = \mathrm{A} + \mathrm{J_n}$$
$$\Rightarrow \mathrm{P_1} = \mathrm{A} + \mathrm{J_1}$$
$$= 1000 + 375 = 1375\ .$$

A primeira prestação será de R$1375,00.

- Colocamos então estes valores na tabela:

Período	Prestação	Amortização	Juros	Saldo devedor
0	0	0	0	15000
1	1375	1000	375	14000

Tabela 2: Tabela SAC do primeiro mês, exemplo 5.1.1
Fonte: Autor

- Para completar a tabela utilizamos o mesmo raciocínio até a última linha da tabela, mostrando que a parcela diminuirá em uma Progressão Aritmética decrescente. Teremos ao final a seguinte tabela:

Período	Prestação	Amortização	Juros	Saldo Devedor
0	0	0	0	15000
1	1375	1000	375	14000
2	1350	1000	350	13000
3	1325	1000	325	12000
4	1300	1000	300	11000
5	1275	1000	275	10000

6	1250	1000	250	9000
7	1225	1000	225	8000
8	1200	1000	200	7000
9	1175	1000	175	6000
10	1150	1000	150	5000
11	1125	1000	125	4000
12	1100	1000	100	3000
13	1075	1000	75	2000
14	1050	1000	50	1000
15	1025	1000	25	0

Tabela 3: Tabela SAC do décimo quinto mês exemplo 5.1.1.
Fonte: Autor.

5.2 MONTANTE DE UMA SEQUÊNCIA UNIFORME DE DEPÓSITOS.

Vamos supor que uma pessoa deposite mensalmente R$ 1000,00 numa poupança que vai render Juros Compostos, à taxa de 0,6% ao mês. Para ela saber o valor que terá logo após ter feito o 12º depósito, por exemplo, podemos achar o montante de cada depósito e ao final somar para obter o resultado desejado. Esta soma dos montantes de cada depósito recebe o nome de *Montante de uma Sequência Uniforme de Depósitos.* Podemos facilitar o cálculo desse *Montante* se considerarmos o raciocínio abaixo.

Vamos considerar n depósitos periódicos iguais a V, nos periodos 1, 2, 3, …, n, rendendo Juros Compostos, a uma taxa i no periodo. Aplicando o raciocínio de Juros Compostos, que será explicado na atividade 5, levando todos os pagamentos para a data n, teremos:

- O primeiro depósito terá na data n um montante de: $\mathrm{V} \cdot (1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}-1}$;
- O segundo depósito terá na data n um montante de: $\mathrm{V} \cdot (1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}-2}$;
- O terceiro depósito terá na data n um montante de: $\mathrm{V} \cdot (1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}-3}$;
- $\vdots$
- O penúltimo depósito terá na data n um montante de: $\mathrm{V} \cdot (1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}-(\mathrm{n}-1)}$;
- O último depósito terá na data n um montante de: $\mathrm{V} \cdot (1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}-\mathrm{n}}$.

Chamando M a soma dos montantes desses depósitos na data n, temos:

$$\mathrm{M} = \mathrm{V} \cdot (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-1} + \mathrm{V} \cdot (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-2} + \mathrm{V} \cdot (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-3} + \cdots + \mathrm{V} \cdot (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-\mathrm{n}}$$

Notamos que os termos do segundo membro desta igualdade formam uma Progressão Geométrica, cujo primeiro termo é $\mathrm{a}_1 = \mathrm{V} \cdot (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-1}$ e a razão é $\mathrm{q} = \frac{1}{1+\mathrm{i}}$. Aplicamos então a formula da soma dos termos da Progressão Geométrica finita:

$$\mathrm{S} = \mathrm{a}_1 \cdot \frac{(\mathrm{q}^{\mathrm{n}} - 1)}{(\mathrm{q} - 1)} \ .$$

Obtemos:

$$\mathrm{M} = \mathrm{V} \cdot (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-1} \cdot \frac{[(\frac{1}{(1+\mathrm{i})})^{\mathrm{n}} - 1]}{[\frac{1}{(1+\mathrm{i})} - 1]}$$

$$= \mathrm{V} \cdot \frac{\frac{1}{(1+\mathrm{i})} - (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-1}}{\frac{-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})}}$$

$$= \mathrm{V} \cdot \frac{\frac{1-(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}}{(1+\mathrm{i})}}{\frac{-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})}} .$$

Por fim:

$$= \mathrm{V} \cdot \frac{[(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1]}{\mathrm{i}} \qquad (5.1)$$

Exemplo 5.2.1: Um estudante pretende fazer uma aplicação em uma poupança para poder futuramente cursar uma faculdade. Se ele depositar mensalmente $\mathrm{R\$300{,}00}$, rendendo Juros Compostos, suponhamos a uma taxa de 0,6% ao mês. Qual o valor que ele terá no instante imediatamente após completar 10 anos de depósitos?

Resolução:

Temos os seguintes dados:

- Valor depositado: $\mathrm{V} = 300$;
- Número de depósitos: $\mathrm{n} = 120$;
- Taxa mensal: $\mathrm{i} = 0{,}006$.

Aplicando a fórmula do montante de uma sequência uniforme de depósitos:

$$\mathrm{M} = 300 \cdot \frac{[(1+0{,}006)^{120} - 1]}{0{,}006}$$

$$= 52500{,}90\,.$$

Então ao final de dez anos de depósitos mensais o estudante terá $\mathrm{R\$}52500{,}90$.

Em seguida apresentamos a nossa sequência de atividades. Pela diversidade curricular do sistema brasileiro, o professor pode escolher entre trabalhar com todas as atividades ou com apenas algumas, conforme disponibilidade de horários da turma.

6 ATIVIDADES

Com o intuito de contribuir com a solução dos problemas observados nos capítulos 2, 3 e 4 e enriquecer a atividade docente na prática em sala de aula resolvemos criar uma sequência com sugestões de atividades. Na revisão bibliográfica feita para o capítulo 3 vimos que a carga horária para a matéria Matemática Financeira varia em vários Estados brasileiros, portanto realizamos uma proposta com 9 atividades proporcionando assim que o professor trabalhe com o tema conforme seu tempo para a matéria. As atividades estão numa sequência evolutiva de aprendizagem, mas nada impede que o educador altere sua ordem na aplicação e/ou as use como base para outras atividades.

Serão abordados os conceitos de porcentagem, Juros Simples e Compostos, valor atual de capitais, principais modalidades de financiamento existentes no mercado, abordando a Matemática Financeira nas atividades cotidianas, de maneira mais prática, onde será exigido do aluno habilidades para comparar questões que envolvam Juros Simples e Compostos; rendimento de aplicações financeiras; comparar compras à vista ou a prazo e financiamentos. Procuramos também nessas atividades que o aluno desenvolva competências recomendadas pelos PCN:

- Representação e comunicação:
    - ✓ Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas;
- Investigação e compreensão:
    - ✓ Identificar o problema;
    - ✓ Procurar e interpretar informações relativas ao problema.
- Contextualização sócio - cultural:
    - ✓ Aplicar conhecimentos matemáticos em situações reais.

6.1 PÚBLICO-ALVO E PRÉ-REQUISITOS

Como público-alvo para nosso trabalho temos alunos do Ensino Médio e é desejável que tenham conhecimentos de Funções, Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas.

6.2 ATIVIDADE 1 : ANÁLISE DAS PORCENTAGENS.

Geralmente ao iniciarmos o estudo de Matemática Financeira o conceito de porcentagem é apresentado de modo direto, normalmente com uma fórmula que calcula a porcentagem de uma quantia determinada. Pensamos que apesar de simples o conceito de porcentagem é fundamental no estudo de Matemática Financeira. Propomos uma abordagem diferente, buscando o real entendimento do conceito e destacando que porcentagem não é algo novo, mas apenas uma notação para assunto já conhecido.

Conteúdos:

- Razões;
- Proporções;
- Porcentagem.

Objetivos:

- Apresentar o conceito de porcentagem sem que isto pareça algo novo**;**
- Explorar porcentagem e algumas frações especiais, tais como, $\frac{1}{2}$ (metade), $\frac{1}{4}$(a quarta parte) e $\frac{1}{1}$ (o todo).

Esperamos que no final da atividade o aluno tenha clareza do conceito de porcentagem, reconheça situações que ele possa utilizar diferentes estratégias para calcular porcentagem e que o valor de algo, não é importante para respondermos algumas questões sobre porcentagem, podendo ser usado um valor genérico para facilitar os cálculos ou o raciocínio.

Procedimentos:

Dividiremos a atividade em três etapas:

1ª Etapa: Iniciaremos com um breve comentário sobre porcentagem. Quando afirmamos que 50% dos alunos da turma A são meninos, referimo-nos a $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, ou seja, metade dos alunos são meninos, o que corresponde a dizer que a cada dois alunos um é menino. Então ao falarmos 50% de certa quantidade ou valor queremos dizer que vamos fracionar em cem partes iguais e destas retiraremos 50 partes.

Assim é possível observar que há várias formas de representar uma porcentagem: com o símbolo %, como uma fração ou com um número decimal. Logo temos:

- $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5;$
- $100\% = \frac{100}{100} = 1;$
- $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25;$
- $1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01;$
- $150\% = \frac{150}{100} = 1{,}5.$

2ª Etapa: Neste momento propomos as seguintes histórias:

Primeira história: Suponha que quatro amigos compraram uma pizza de oito pedaços. Eles querem dividi-la assim: Pedro fica com a metade, Paulo com um quarto e ambos Manoel e Rubens com um oitavo da pizza. Se a pizza custa R$30,00 e este valor for dividido proporcionalmente aos pedaços recebidos, quanto cada um deverá pagar?

Após os alunos trabalharem a questão discutir a solução obtida e ou dificuldades encontradas. Podemos motivar os alunos chamando a atenção de que somando os valores de quanto cada um deverá pagar deverá ser de R$30,00, ou seja, deverá totalizar os 100% do custo da pizza.

Uma sugestão de solução:

Podemos utilizar o conceito de proporcionalidade. Teremos neste exercício as seguintes proporções a serem calculadas: metade=$\frac{1}{2}$, um quarto=$\frac{1}{4}$ e um oitavo=$\frac{1}{8}$. Primeiro vamos calcular quanto por cento corresponde a fração $\frac{1}{2}$. A pizza inteira cuja fração é $\frac{1}{1}$ corresponde a proporção de 100%, tem oito pedaços e custa $\text{R\$}30{,}00$,como ilustrado abaixo:

Porcentagem	Fração	Pedaços	Valor
100%	$1 = \frac{1}{1}$	8	$\text{R\$}30{,}00$

Se dividirmos a pizza inteira por 2, obteremos uma fração de $\frac{1}{2}$, uma porcentagem de 50%, 4 pedaços e vai custar $\text{R\$}15{,}00$, como mostrado abaixo:

Porcentagem	Fração	Pedaços	Valor
100%	$1 = \frac{1}{1}$	8	$R\$30,00$
$\downarrow \div 2$	$\downarrow \div 2$	$\downarrow \div 2$	$\downarrow \div 2$
50%	$\frac{1}{2}$	4	$R\$15,00$

Novamente, se dividirmos a metade da pizza por dois, obtemos a fração $\frac{1}{4}$, a porcentagem de 25%, 2 pedaços e vai custar $R\$7,50$, como visualizado abaixo:

Porcentagem	Fração	Pedaços	Valor
50%	$\frac{1}{2}$	4	$R\$15,00$
$\downarrow \div 2$	$\downarrow \div 2$	$\downarrow \div 2$	$\downarrow \div 2$
25%	$\frac{1}{4}$	2	$R\$7,50$

Finalmente, dividimos um quarto da pizza em dois, teremos a fração $\frac{1}{8}$, a porcentagem de $12,5\%$ e 1 pedaços, como podemos ver abaixo:

Porcentagem	Fração	Pedaços	Valor
25%	$\frac{1}{4}$	2	$R\$7,50$
$\downarrow \div 2$	$\downarrow \div 2$	$\downarrow \div 2$	$\downarrow \div 2$
$12,5\%$	$\frac{1}{8}$	1	$R\$3,75$

Temos como resposta aos alunos que Pedro teria que pagar $R\$15,00$, Paulo $7,50$ e Rubens e Manoel $R\$3,75$ cada um, totalizando R$30,00.

Seguindo o raciocínio deste exercício vai facilitar muito os alunos compreenderem questões de porcentagem. O professor pode em seguida explorar questões com outras frações e outras porcentagens, tais como 150%, 200% entre outras.

Segunda história: Manoel recebia uma mesada de R$60,00 e com este comprava na escola alguns chocolate que custavam R$5,00 cada. Certo dia o chocolate que ele comprava subiu para R$5,50. Em compensação seu pai aumentou a mesada para R$75,00. Surgiu então a dúvida para Manoel: será que com os novos valores conseguirei comprar o mesmo número de chocolates?

Inicialmente deixar os alunos discutirem a questão tentando achar uma solução para a dúvida de Manoel.

Uma solução seria calcular o percentual de aumento do chocolate e da mesada e comparar os resultados.

Inicialmente vamos calcular quantos por cento aumentou o chocolate:

Como nesta etapa os alunos já conhecem regra de três podemos montar uma. Tínhamos que $\text{R\$}5{,}00$ correspondiam a 100% do chocolate comprado e que $\text{R\$}0{,}50$ equivale a uma certa porcentagem, a qual chamaremos de X. Abaixo um esquema para a regra de três:

Valor do chocolate	Porcentagem
$\text{R\$}5{,}00$	100%
$\text{R\$}0{,}50$	$X\%$

Fazendo a multiplicação temos:

$$5 \cdot X = 0{,}50 \cdot 100$$
$$\Leftrightarrow X = 10\%\,.$$

Vemos então que o chocolate aumentou 10%.

Em seguida vamos calcular de quantos por cento aumentou a mesada. A mesada teve um aumento de $75{,}00 - 60{,}00 = 15{,}00$. Na regra de três $\text{R\$}60{,}00$ correspondem a 100% e $\text{R\$}15{,}00$ correspondem a porcentagem desconhecida, que chamaremos de Y, visualizada abaixo:

Valor do chocolate	Porcentagem
$\text{R\$}60{,}00$	100%
$\text{R\$}15{,}00$	Y

$$60 \cdot Y = 15 \cdot 100$$
$$\Leftrightarrow Y = 25\%\,.$$

Assim sanamos a dúvida de Manoel e vemos que ele saiu ganhando com os aumentos.

Solução alternativa, com os valores antigos de mesada e chocolate, Manoel conseguia comprar 12 chocolates (pois $5 \cdot 12=60$), no preço atual para comprar 12 chocolates, Manoel precisará desembolsar: $5,5 \cdot 12=66$ reais (note 60 mais 10 por cento é 66), assim Manoel saiu ganhando pois nos valores novos ele pode comprar mais chocolates ou os mesmos 6 e sobrará dinheiro. Notamos que nesta solução não conhecemos o percentual do aumento da mesada que é superior ao do chocolate.

Outra forma de pensar é a seguinte, o chocolate aumentou em 0,5 reais, que corresponde a um décimo do valor antigo, logo o aumento do chocolate foi de 10%. Manoel sairá ganhando se o aumento na mesada for superior a 10%, mas um aumento de 10% na mesada daria um novo valor para a mesada de 66 reais, logo o percentual de aumento da na mesada é superior ao aumento do chocolate, vantagem para Manoel.

O professor pode diversificar este exercício com algumas variações nas porcentagens. Acreditamos que resolvendo este exercício os alunos terão mais segurança para responder corretamente questões parecidas que são feitas em pesquisas a nível internacional para medir o Letramento Financeiro da população, como o relatado no Capítulo 4 de nossa pesquisa.

3 ª Etapa: Se o professor achar conveniente para fixar o assunto com a turma, abaixo colocamos alguns exercícios.

Exercício 6.2.1: A loja Brasileiras fez uma liquidação, valendo para todos os produtos da loja para pagamentos à vista, um desconto de 50%. Lucronildo gostaria de mais descontos, então insistiu que o vendedor fizesse um desconto de 30% e depois um desconto de 25%. O vendedor aceitou a proposta. Quem sairá ganhando: Lucronildo ou as Lojas Brasileiras?

Sugestão de resolução:

Temos que calcular o valor que o produto teria com um desconto de 50% e o valor com um desconto de 30% seguido de um desconto de 25%. Primeiro vamos fazer as contas para o desconto de 50%.

Como a promoção vale para todos os itens podemos, sem perda de generalidade, atribuir um valor X ao produto. Usando a regra de três, teremos o valor

X correspondendo a 100% e o valor do desconto de 50% sobre X, o qual chamaremos de Y, mostrado no esquema abaixo:

Valor do produto	Porcentagem
X	100%
Y	50%

$$X \cdot 50 = 100 \cdot Y$$
$$\Leftrightarrow Y = 0{,}50X\,.$$

Teremos com o desconto de 50%, o valor do produto de: $X - 0{,}50X = 0{,}50X$.

Na proposta de Lucronildo teríamos primeiro um desconto de 30%:

$$X \cdot (1 - 0{,}30) = 0{,}7X\,.$$

Depois um desconto de 25% :

$$0{,}7X \cdot (1 - 0{,}25) = 0{,}525X\,.$$

O professor pode usar que a vantagem existe independente do valor do produto escolhendo um valor conveniente para X, por exemplo, $R\$100{,}00$ teremos para o desconto de 50%, um valor final para o produto de: $0{,}50 \cdot X = 0{,}50 \cdot 100 = 50{,}00$ e para um desconto de 30% seguido do desconto de 25% o valor do produto seria de: $0{,}525 \cdot X = 0{,}525 \cdot 100 = 52{,}50$.

Nota-se que apesar de Lucronildo ter barganhado e conseguido um desconto de 30% e na sequência mais 25% isto é pior que os 50% ofertados pela loja. Assim a loja saiu ganhando.

Exercício 6.2.2: Supondo que num país da América do Sul, o *imposto de renda* (IR) seja descontado dos salários mensais, em reais, da seguinte maneira:

- Para salários até R$1903,00 o IR é zero;
- Em salários até R$2826,00 é tributado em 7,5% apenas o valor da diferença entre R$2826,00 e R$1903,00;
- Para os salários até R$3751,00, é tributado em 7,5% o valor da diferença entre R$2826,00 e R$1903,00 e é tributado em 15% o valor da diferença entre R$2826,00 e R$3751,00;
- Para os salários até R$4664,00, é tributado em 7,5% o valor da diferença entre R$2826,00 e R$1903,00, é tributado em 15% o valor da diferença entre

R$2826,00 e R$3751,00 e é tributado em 22,5% o valor da diferença entre R$3751,00 e R$4664,00;

- Em salários maiores que R$4664,00 é tributado em 7,5% o valor da diferença entre R$2826,00 e R$1903,00 é tributado em 15% o valor da diferença entre R$2826,00 e R$3751,00 e é tributado em 22,5% o valor da diferença entre R$3751,00 e R$4664,00 e os valores maiores que R$4664,00 são tributados em 27,5%.

Calcule o imposto de renda de quem ganha:

A. R$ 1900,00;

B. R$ 2500,00;

C. R$ 4000,00;

D. Se a renda for x e o imposto de renda for y, expresse y em função de x.

Resolução:

A. Como o salário é inferior a R$1903,00, o IR vale 0.

B. O IR é calculado sobre a faixa salarial compreendida entre R$1903,00 e R$2500,00, logo:

$$\mathrm{IR} = (0{,}075) \cdot (2500{,}00 - 1903{,}00) = 44{,}78.$$

C. Calcularemos primeiro o imposto sobre a faixa salarial entre R$1903,00 e R$2826,00 e é tributada em 7,5%:

$(0{,}075) \cdot (2826{,}00 - 1903{,}00) = 69{,}23.$

A faixa salarial entre R$2826 e R$3751,00 é tributada em 15%:

$(0{,}15) \cdot (3751{,}00 - 2826{,}00) = 138{,}75.$

A faixa salarial entre R$3751,00 e R$4000,00 é tributada em 22,5%:

$(0{,}225) \cdot (4000{,}00 - 3751{,}00) = 56{,}03.$

Assim, o imposto de renda de quem ganha R$4000,00 vale:

$\mathrm{IR} = \mathrm{R\$}69{,}23 + \mathrm{R\$}138{,}75 + \mathrm{R\$}56{,}03 = \mathrm{R\$}264{,}01$.

D. Chamando a renda de x e o IR de y , teremos:

- Para salários até R$1903,00:

  $\mathrm{x} \leq 1903$ então $\mathrm{y} = 0$.

- Para salários entre R$1903,00 e R$2826,00:

  $1903 < \mathrm{x} \leq 2826$ e

  $\mathrm{y} = (0{,}075) \cdot (\mathrm{x} - 1903)$

$= 0{,}075 \cdot x - 142{,}73.$

- Para salários entre R$2826,00 e R$3751,00:

  $2826 < x \leq 3751$ e

  $y = (0{,}075) \cdot (2826 - 1903) + (0{,}15) \cdot (x - 2826)$

  $= 211{,}95 - 142{,}73 + 0{,}15x - 423{,}90$

  $= 0{,}15 \cdot x - 354{,}68.$

- Para salários entre R$3751 e R$4664,00:

  $3751 < x \leq 4664$ e:

  $y = (0{,}075) \cdot (923) + (0{,}15) \cdot (3751 - 2826) + (0{,}225) \cdot (x - 3751)$

  $= 69{,}23 + 562{,}65 - 423{,}90 + 0{,}225x - 843{,}98$

  $= 0{,}225x - 636{,}00.$

- Para salários maiores que R$4664,00:

  $x > 4664$ e:

  $y = (0{,}075) \cdot 923 + (0{,}15) \cdot 925 + (0{,}225) \cdot 913 + (0{,}275) \cdot (x - 4664)$

  $= 69{,}23 + 138{,}75 + 205{,}43 + 0{,}275x - 1282{,}60$

  $= 0{,}275x - 869{,}19.$

Geralmente esses resultados são calculados com auxílio da tabela 4.

Salário(x)	Alíquota de IR	Parcela a deduzir
Até R$1903,00	Isento	0
Acima de R$1903,00 até R$2826,00	7,5%	R$142,73
Acima de R$2826,00 até R$3751,00	5%	R$354,68
Acima de R$3751,00 até R$4664,00	22,5%	R$636,00
Acima de R$4664,00	27,5%	R$869,19

Tabela 4.
Fonte: Autor.

6.3 ATIVIDADE 2 : EVOLUÇÃO NO TEMPO

Em testes que medem o nível de Letramento Financeiro, como o PISA de nível internacional, existem perguntas que analisam se o estudante tem noções do valor do dinheiro no tempo. Vamos caracterizar nesta atividade a linha do tempo, que é importante para o entendimento e resolução das atividades posteriores. Aqui não nos importaremos com valores exatos nos exercícios e sim se os valores aumentam ou diminuem no tempo.

Conteúdos:

- Noções de valorização e desvalorização do dinheiro;
- Linha do tempo.

Objetivos:

- Ensinar aos alunos como se comporta o dinheiro no tempo.
- Descrever a evolução do dinheiro no tempo através da linha do tempo.

Procedimentos:

O professor pode comentar sobre inflação. Que se deixarmos o dinheiro parado ele vai desvalorizar porque os produtos à venda no comércio aumentam de valor para acompanhar a inflação. Buscando reforçar estas noções, sugerimos que o professor introduza aos alunos o desenho da linha do tempo. A visualização da linha do tempo auxilia as pessoas que não são da área de finanças a compreenderem o funcionamento de operações financeiras do dia a dia, para que tenham conhecimento e possam avaliar estas operações.

A linha do tempo se caracteriza basicamente por dois elementos gráficos:

- Uma linha horizontal que funciona como uma escala de tempo, representando a duração da negociação. Evolui da esquerda para a direita e será dividida em períodos (dias, meses, anos, entre outros);
- Setas verticais representando valores, colocadas sobre suas respectivas datas na linha horizontal. Na direita da data de hoje existirão as datas futuras e na esquerda as datas passadas, assim o aluno pode descrever a evolução do dinheiro no tempo usando setas, sabendo que quanto mais à direita a seta é maior em proporção à da data de hoje. Para melhor entendimento as setas podem ser proporcionais aos valores por elas representados. Para efeitos didáticos, usam-se setas orientadas para cima da linha do tempo representando valores positivos ou recebidos e setas para baixo representando valores negativos ou pagamentos.

Para o professor aplicar o exposto acima podemos expor a seguinte situação:

Nosso amigo Lucronildo depositou hoje uma quantia de mil reais numa conta de poupança do banco Lucropar. Após três meses ele terá um valor maior que depositou, menor ou igual?

Podemos então explicar aos alunos que o Banco terá de pagar uma renda para Lucronildo, como se fosse um aluguel do dinheiro que ele deixou para o banco usar. Como é feito quando se aluga uma casa por exemplo. O proprietário da casa deixa o inquilino usar a casa durante certo período de tempo. Por este tempo de uso o inquilino deve pagar um valor pelo uso da casa, que é o aluguel. Da mesma maneira o dinheiro emprestado ao banco deve render um valor pelo período de tempo que ficar lá.

Em seguida o professor pode aplicar o conceito da linha do tempo para os alunos entenderem a ideia. Para isso vamos traçar uma linha horizontal. Nela desenhamos uma seta representativa dos $R\$1000{,}00$ na data que foi aplicado o dinheiro, neste caso a data de hoje. Como Lucronildo teve que desembolsar o valor, a seta é orientada para baixo. Ilustramos o conceito acima na Figura 14.

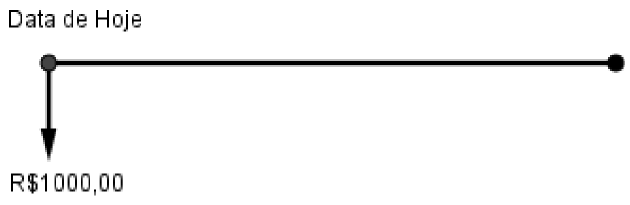


Figura 14: Linha do tempo 1.
Fonte: Autor.

Na sequência traçamos a seta representativa do valor que ele terá no final da aplicação. Este valor chamaremos de X, pois não conhecemos ainda. Esta seta será orientada para cima porque ele vai receber o valor e será maior, em relação à seta representativa dos $R\$1000{,}00$, porque renderá certos Juros pela aplicação da poupança. Nosso desenho ficará da seguinte maneira:

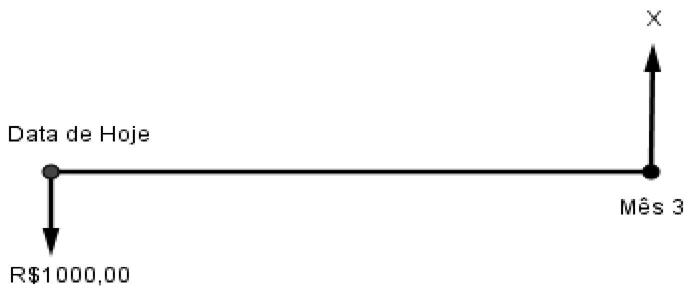


Figura 15: Linha do tempo 2.
Fonte: Autor.

Notamos que o fator principal da questão é o tempo. Aqui estamos pegando um valor hoje e transportando para uma data futura e como o dinheiro nunca fica parado em se tratando de Matemática Financeira, certamente resgataremos daqui a três meses um valor maior do que os $\mathrm{R\$1000{,}00}$. Poderá acontecer uma situação em que estaremos voltando no tempo, como o exemplo abaixo:

- Exemplo 2: Manoel tem uma dívida com o banco Lucropar de $\mathrm{R\$10.000{,}00}$, que teria que ser paga daqui a três meses, mas recebeu um bom dinheiro adiantado e pretende antecipar o pagamento desta dívida e pagá-la hoje. Conseguirá ele obter um desconto por pagar esta obrigação hoje?

Aqui temos a situação inversa e como estamos voltando no tempo, Manoel terá de pagar hoje um valor menor do que daqui a três meses porque ele está emprestando o dinheiro ao banco até o vencimento da dívida. Portanto vai pagar menos do que $\mathrm{R\$10.000{,}00}$. Da mesma maneira desenhamos a linha do tempo como proposto acima. Na data do terceiro mês colocamos a seta que representará o valor de $\mathrm{R\$10.000{,}00}$. Na data de hoje colocaremos a seta que representará o valor que seriam os $\mathrm{R\$10.000{,}00}$ com os descontos pelo pagamento antecipado, que chamaremos de X, pois ainda não sabemos quanto valerá. A linha do tempo ficará da seguinte maneira:

Figura 16: Linha do tempo 3.
Fonte: Autor.

Acreditamos que com o exposto acima os alunos vão compreender melhor os conceitos da Matemática Financeira que iremos ensinar nas próximas atividades, tais como Juros, Capital, Montante, entre outros.

6.4 ATIVIDADE 3 : INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA FINANCEIRA

A presente atividade visa introduzir noções básicas de termos relativos à Matemática Financeira., tais como Capital, Juros, Taxa e Tempo. Estas noções serão úteis para fazermos uma conexão entre esta atividade e as próximas, onde abordaremos mais a fundo conceitos tais como: Juros Simples, Juros Compostos, entre outros.

Conteúdos:

- História da Matemática Financeira;
- Conceitos de Matemática Financeira;
- Linha do tempo.

Objetivos:

- Instigar a curiosidade sobre as práticas comerciais dos povos primitivos, a origem e o desenvolvimento do dinheiro com o passar do tempo;
- Inserir a noção de Juros;
- Utilizar a atividade para inserir termos da Matemática Financeira no vocabulário dos alunos;
- Que os alunos saibam aplicar estes conceitos nas suas relações sociais, em especial de trabalho e de consumo.

Procedimento:

Como introdução podemos começar comentando sobre a história dos Juros, por exemplo, que foram encontrados indícios na Babilônia, por volta de 2000 a. C. de que Juros eram pagos sobre a forma de sementes e a prática possivelmente surgiu dos antigos costumes de empréstimo e devolução de sementes e de outros produtos agrícolas. Logo após podemos apresentar um vídeo do Youtube que poderá despertar nos alunos interesse sobre o assunto do que discorre sobre a história do dinheiro, ou seja, como surgiram as primeiras relações comerciais, as moedas e as primeiras operações com Juros, isto através do link https://www.youtube.com/watch?v=wP3ezMbr_QA.

Em seguida como desenvolvimento o professor pode apresentar a seguinte situação: Joaquim dispõe de um determinado valor em dinheiro por um período de tempo, ou seja, por alguns meses. Interagimos com os alunos perguntando quais seriam as possíveis opções para fazer com o dinheiro. Então sugerimos duas opções: esconder o dinheiro debaixo do colchão ou abrir uma conta numa agência bancária e aplicar o dinheiro pelos meses que não precisasse dele.

Provavelmente os alunos responderão que a melhor opção é aplicar na agência bancária. Depois o professor deve intervir e explicar a questão. No caso de deixar em casa, o dono vai encontrar o mesmo valor que escondeu, ou seja, o dinheiro ficou parado com o passar do tempo. Na possibilidade de deixar aplicado no banco, o dono logicamente vai retirar um valor maior do que aplicou. Desenharemos esta situação da seguinte maneira:

Figura 17: Linha do tempo 4.
Fonte: Autor.

Nesta situação dispomos de um valor inicial e desejamos saber quanto esse valor representará em uma data futura, é o que chamamos de Operação de Juros. Apresentaremos alguns elementos desta operação:

- Capital (C):Significa o valor inicial, conhecido no começo da operação. Também conhecido como: Principal, Valor Atual ou Valor Aplicado.
- Tempo (n): O tempo está envolvido nas situações de Matemática Financeira e estaremos interessados em como se comportarão os valores com o transcorrer do tempo. Designado por n;
- Montante (M): O montante é o valor que será resgatado ou retirado ao final da operação. Designado por M.
- Taxa (i): É a taxa que faz com que o dinheiro aumente de valor com o passar do tempo e ela faz com que o dinheiro diminua de valor com o retroceder do tempo. É um valor percentual seguido de um período de tempo a que se refere, por exemplo: 0,5% ao mês, 10% ao ano. A taxa será designada por i. Temos que trabalhar com taxa e períodos de tempo na mesma unidade, por exemplo, com uma taxa mensal vamos usar o período de tempo em meses.

- Juros (J): Os Juros são a remuneração pelo empréstimo do dinheiro. Ele existe porque a maioria das pessoas querem um consumo imediato, e então pagam um preço por isto. Por outro lado, quem puder emprestar um valor a alguém, deve ser recompensado por isto na proporção do tempo envolvido na operação. Já ensinamos aos alunos que aplicamos um valor chamado Capital (C) e ao final da operação retiramos o Montante (M) que é um valor maior que o Capital. Juros serão a diferença entre o Montante e o Capital, ou seja, serão o quanto rende o Capital.

O professor pode desenhar no quadro a nossa linha do tempo, vista na atividade 2, com uma seta no Capital e uma seta maior para o montante com um tracejado paralelo a linha do tempo ilustrando a diferença entre eles, como a seguinte:

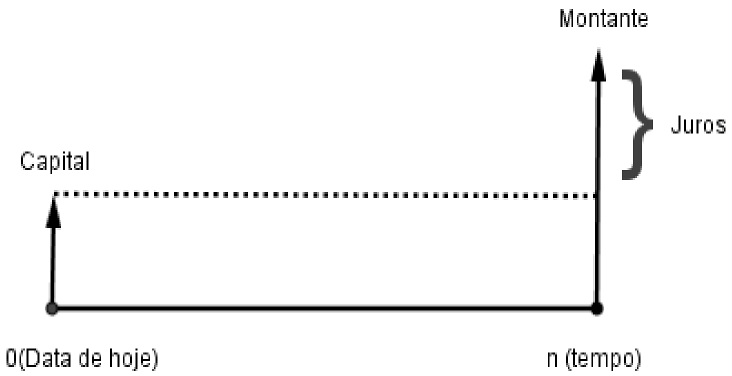


Figura 18: Linha do tempo 5.
Fonte: Autor.

Podemos identificar uma relação entre Juros, Montante e Capital (Capital Inicial):

$$J = M - C$$

Conforme quisermos, podemos calcular o Montante, que é o Capital mais os Juros ou calcular o Capital, que é o Montante menos os Juros. Em seguida o professor ensina as seguintes deduções;

$M = C + J$ e portanto $C = M - J$.

Esperamos que neste momento o aluno organize estes conceitos, e saiba diferenciar Montante, Capital Inicial e Juros, quando for usar em uma futura operação financeira. Isto servirá de base para as próximas atividades.

6.5 ATIVIDADE 4 : JUROS SIMPLES

Neste Sistema de Capitalização os Juros incidem somente sobre o Capital Inicial e é proporcional à quantidade de períodos de tempo, à taxa de porcentagem definida na operação e ao Capital Inicial. Os Juros simples servem de ponte para o estudo de Juros compostos, visto que este sistema não é muito utilizado nas operações financeiras por ser pouco lucrativo. Atualmente é utilizado em operações de curtíssimo prazo, e em processo de desconto simples de duplicatas.

Conteúdos:

- Juros Simples;
- Progressão Aritmética**;**
- Matemática Básica.

Objetivos:

- Apresentar aos alunos o Sistema de Capitalização Simples.
- A partir de um problema proposto chegar às fórmulas e mostrar sua relação com outros conceitos matemáticos.
- Que o aluno possa responder corretamente as questões do setor Juros Simples da pesquisa sobre Letramento Financeiro.

Procedimentos:

Lucronildo comprou um rádio na loja Paraná Barato, no valor de R$250,00 para pagar em um boleto bancário após dez dias. Sendo que após o vencimento seriam cobrados Juros de 0,5% ao dia, na modalidade de Juros Simples. Quando ele percebeu haviam passado 17 dias e ele não tinha pago ainda, ou seja, irá pagar o boleto com 7 dias de atraso, quanto ele deverá pagar de Juros e quanto será o valor final da conta?

Uma possível solução:

Sugerimos que a discussão em torno do tema seja iniciada utilizando-se a interpretação de “partes do todo”. É bastante tranquilo de ver que 1% de 250 reais é 2,5 reais (divida o todo em cem parte e tome uma delas), como 0,5% é metade de 1% ($0,5/100=1/2\cdot 1/100$) segue que 0,5% de 250 é 1,25 reais, metade de 2,5 reais.

Pelo exposto acima e de acordo com as informações da fatura Lucronildo deve pagar de multa 1,25 reais por dia de atraso, como ele irá pagar após 7 dias pagará de multa 8 reais e 75 centavos ($7\cdot 1,25=8,75$), isto acrescido do valor original da fatura resulta em um Montante de 258,75, que é o que Lucronildo deve desembolsar para quitar sua dívida.

Resolvida a questão convidamos o professor a continuar as discussões em torno do tema. Primeiramente podemos observar que o valor diário da multa não se altera com o passar do tempo, uma característica dos Juros Simples, desta forma o valor total em multas cobrada depende do número de dias em atraso e do valor diário da multa. O valor da multa durante todo o período pode ser calculado simplesmente multiplicando-se o valor diário da multa pelo número de períodos em atraso. Deste modo o Montante a ser pago, M_n, para quitar uma dívida inicial, M_0 , após n períodos de atraso no regime de Juros Simples é dada pela expressão:

$$M_n = M_0 + n \cdot J \qquad \text{(I)}$$

onde J são os Juros cobrados pelo período de atraso.

Caso o professor julgue prudente pode-se ainda continuar o trabalho em torno da questão. Podemos convidar os alunos a montar uma sequência, listando o saldo devedor de Lucronildo, com relação a loja Paraná Barato, a partir da data do pagamento da fatura, feito isto os aluno estarão com a lista

250; 251,25; 252,5; 253,75; 255; 256,25; 257,5; 258,75.

A sequência tem algumas propriedades importantes, é crescente, só tem termos positivos, mas vamos dar destacar o fato que a diferença entre os valores de um dos termos e seu sucessor é constante, deste modo os termos formam uma Progressão Aritmética, PA, assim ganhamos outras informações à cerca dos termos da sequência, em especial podemos facilmente calcular (utilizando os conhecimentos de PA) o valor do termo que ocupa uma certa posição, por exemplo o valor desembolsado por Lucronildo para quitar sua dívida é: $250 + (8 - 1) \cdot 1{,}25 = 258{,}75$, de acordo com a fórmula do termo geral da PA.

Podemos ampliar as discussões para o caso de Juros Simples aplicados em um Capital Inicial, C, o juro cobrado em um período (dia, mês, ano, quinzena...) é: $J = C \cdot i$; onde i é a taxa de Juros, que gera um Montante, M_1, após o primeiro período de:

$$M_1 = C + J = C + C \cdot i.$$

Sucessivamente teremos os Montantes para o segundo, terceiro e quarto períodos, M_2, M_3 e M_4, dados por:

$$M_2 = M_1 + J = M_1 + C \cdot i;$$

$$M_3 = M_2 + J = M_2 + C \cdot i;$$

$$M_4 = M_3 + J = M_3 + C \cdot i;$$

Note a diferença entre Montantes sucessivos é sempre constante, $C \cdot i$, o que ratifica que a sequência dos Montantes forma uma Progressão Aritmética de razão r igual aos Juros de um período: $J = C \cdot i$.

Identificando $C = M_0$, (Montante Inicial) como o primeiro termo da PA, M_1 como segundo e assim sucessivamente obtemos utilizando a fórmula do termo geral da PA: ($a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$) que o Montante M_n é dado por:

$$M_n = M_0 + (n) \cdot J$$

reforçando a expressão (I) calculada anteriormente.

Exercício 6.5.1: Quantos anos um Capital C, aplicado a Juros Simples leva para dobrar de valor se:

a) A taxa de Juros é de 12,5% ao ano;
b) A taxa de Juros é de 10% ao ano;
c) A taxa de Juros é de 5% ao ano.

Precisamos determinar quantos períodos devem se passar para que o Montante M_n seja igual a 2C, isto é resolver a equação

$$2C = M_n = C + n \cdot i \cdot C$$

Para o item a) obtemos 8 anos, cálculos análogos podem ser feitos para os itens b) e c).

Deixamos aqui uma forma alternativa de resolver a questão, que julgamos nos ajudar a reforçar o real entendimento do conceito de porcentagem bem como o de Juros Simples.

Vejamos, para o item a) primeiramente notemos que 12,5% é metade de 25%, que corresponde a $\frac{1}{4}$ do todo, deste modo 12,5% corresponde a $\frac{1}{8}$ do todo. Assim a cada período o Montante aumenta $\frac{1}{8}$ de C, deste modo após 8 períodos o Montante será 2C. A resposta para o item b) passa a ser imediata o Capital dobra após 10 períodos (10 anos).

Como a taxa do item c) é a metade da dada no item b) o acréscimo a cada período também será a metade, assim precisaremos o dobro do tempo para que o Capital dobre ou seja 20 anos.

A solução da questão reforça que a evolução de um Capital sobre o regime de Juros Simples é linear, para reforçar ainda mais o fato podemos passar e ou trabalhar com os discentes o seguinte:

Exercício 6.5.2: Determine uma função que nos forneça o Montante de um Capital C, sobre regime de Juros Simples. Busque relacionar com a função afim :

$$f(x) = a \cdot x + b.$$

É importante deixar bem claro para os alunos que os Juros Simples tem um uso bem limitado, atualmente raro. De certo modo o Juro Simples não faz justiça, para exemplificar podemos pensar em uma aplicação de 100 reais a Juros Simples de 1% ao mês. Após dez anos, 120 meses, teríamos na aplicação 220 reais mais do que o dobro do Capital investido no entanto mantendo o dinheiro investido por mais um mês ganharíamos o mesmo 1 real, o que não parece muito justo. Para corrigir este problema poderíamos sacar os Juros, neste caso, 1 real e depositá-lo novamente rendendo 1% de Juros ao mês, ou seja, Juros sobre juros, que seriam os Juros Compostos, foco da próxima atividade.

6.6 ATIVIDADE 5 : JUROS COMPOSTOS.

Juros Compostos também chamados Juros Cumulativos ou Juros sobre Juros são os que mais retratam a realidade nas operações de Matemática Financeira. Oferecem maior rentabilidade do que Juros Simples, são atrativos em situações de investimento e preocupante ao se fazer empréstimos ou financiamentos.

Conteúdos:

- Progressões Geométricas;
- Juros Compostos;

Objetivos:

- Introduzir aos alunos a noção do Sistema de Capitalização Composto.
- A partir da resolução de um problema proposto chegar às fórmulas comparando com a Progressão Geométrica.
- Mostrar a relação dos Juros Compostos com outros conceitos importantes da Matemática.

Procedimento:

Como motivação aos alunos o professor pode lembrar a história de como surgiram os Juros Compostos e mostrar que no nosso dia a dia são os Juros mais usados e os vemos todo dia em propagandas na televisão, internet e jornais.

Podemos exemplificar dizendo que é a situação que hoje temos quando vamos ao banco e fazemos um depósito em uma poupança. Nesta operação teremos que o valor depositado no início é o Capital (C), o qual, ficará aplicado um período de tempo(n), rendendo Juros(J) e iremos resgatar um Montante(M).

As noções de Juros, Capital, Montante vistas na atividade 2 valem tanto para Juros Simples quanto para Juros Compostos.

O que muda é em relação à taxa. Nos Juros Simples ela sempre era calculada sobre o mesmo valor, que era o Capital Inicial. Já nos Juros Compostos ela é calculada sobre o resultado do período anterior.

Seguindo o raciocínio das atividades anteriores, passar o exemplo abaixo para os alunos resolverem e dar um tempo para resolução com uma calculadora simples.

Exercício 6.6.1: O Senhor Joaquim foi a lojas Brasileiras e gostou de uma geladeira que custava R$ 1500,00. Comprou com seu cartão de crédito para pagar em uma fatura única após seis meses do dia da compra. Nesse sistema de crédito a loja cobrava 4% ao mês com Juros Compostos. Como poderíamos demonstrar ao Senhor Joaquim a evolução de sua dívida ? E qual o valor que ele deverá pagar ao final?

Uma sugestão de solução:

Utilizando a linha do tempo aprendida nas atividades anteriores colocamos na seta representativa do valor da dívida de R$1500,00, ou seja, do Capital Inicial, na data de hoje e nos meses seguintes as setas representativa das dívidas dos meses 1 a 6, sabendo que a cada mês que passa a seta é maior que a seta anterior, como na Figura 19. Poderemos usar uma escala, por exemplo, de 1:100.

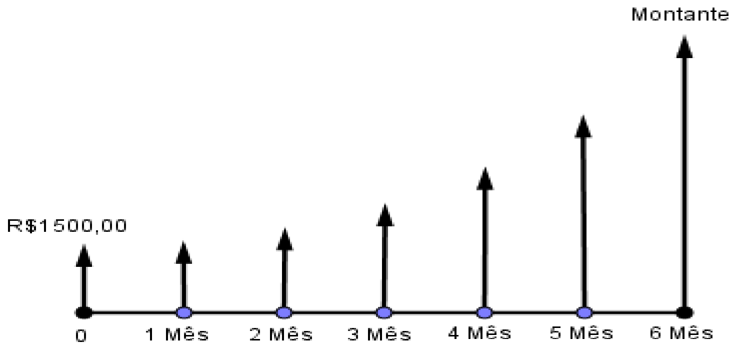


Figura 19: Linha do tempo 6.
Fonte: Autor.

Usando as noções de porcentagem vistas na primeira atividade calcularemos o valor associado a cada seta mês a mês. Para o primeiro mês temos o valor da dívida de R$1500,00 e como os Juros do cartão por mês são 4% temos:

$$\mathrm{J}_1 = 1500 \cdot \frac{4}{100} = 60\,.$$

Onde J_1 são os Juros do primeiro mês. Tomamos o cuidado agora de explicar aos alunos que no próximo mês serão calculados sobre o Capital Inicial somado com os Juros do primeiro mês, ou seja, sobre $1500 + 60 = 1560$. Como abaixo:

$$\mathrm{J}_2 = (1560) \cdot \frac{4}{100} = 62{,}4\,.$$

Onde J_2 são os Juros do segundo mês. Assim sucessivamente até o último mês, sendo $\mathrm{J}_3 = 64{,}896$, $\mathrm{J}_4 = 67{,}49$, $\mathrm{J}_5 = 70{,}19$ e $\mathrm{J}_6 = 73$, onde $\mathrm{J}_3, \mathrm{J}_4, \mathrm{J}_5$e J_6 são os Juros do terceiro, quarto, quinto e sexto mês respectivamente. Gerando $\mathrm{M}_0 = 1500{,}00; \mathrm{M}_1 = 1560{,}00; \mathrm{M}_2 = 1622{,}40; \mathrm{M}_3 = 1687{,}23; \mathrm{M}_4 = 1754{,}79; \mathrm{M}_5 = 1824{,}98$ e $\mathrm{M}_6 = 1897{,}98$.

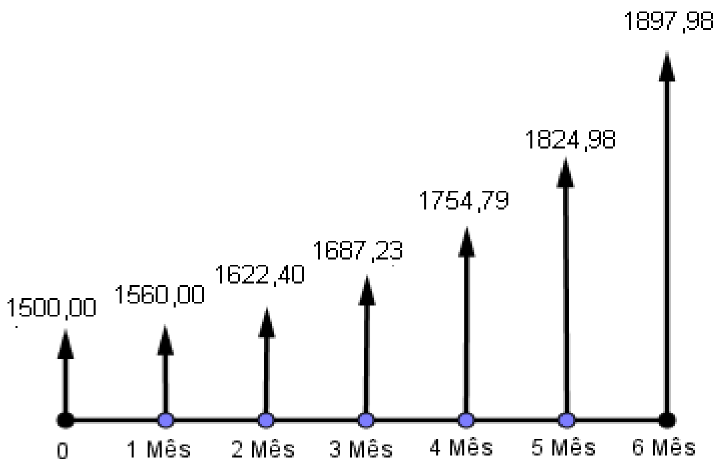


Figura 20: Linha do tempo 7.
Fonte: Autor.

No esquema acima demonstramos ao Senhor Joaquim a evolução de sua dívida, chegando ao final no valor devido de R$1897,98. Até aqui nada de novo. Resolve-se o exercício facilmente com o que foi visto nas atividades anteriores. Vamos então questionar aos alunos o seguinte: E se ó prazo para a compra de Joaquim fosse maior, por exemplo de 30 meses, teríamos que fazer as trinta contas? Ou será que conseguiríamos chegar a uma fórmula que nos desse o valor final? Podemos então buscar uma resposta pelas Progressões Geométricas, que são um facilitador para resolver problemas de Matemática Financeira.

Vamos conjecturar, montando uma sequência com alguns Montantes, como abaixo:

- $\mathrm{M_0}$;
- $\mathrm{M_1} = (\mathrm{M_0} + \mathrm{J_1}) = \mathrm{M_0} + \mathrm{M_0} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{M_0} \cdot (1 + \mathrm{i})$;
- $\mathrm{M_2} = \mathrm{M_1} + \mathrm{J_2} = \mathrm{M_1} + \mathrm{M_1} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{M_1}(1 + \mathrm{i}) = \mathrm{M_0} \cdot (1 + \mathrm{i}) \cdot (1 + \mathrm{i}) = \mathrm{M_0} \cdot (1 + \mathrm{i})^2$;
- $\vdots$
- $\mathrm{M_n} = \mathrm{M_{n-1}} + \mathrm{J_n} = \mathrm{M_{n-1}} + \mathrm{M_{n-1}} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{M_{n-1}} \cdot (1 + \mathrm{i})$;

$$= \mathrm{M_0} \cdot (1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}-1} \cdot (1 + \mathrm{i}) = \mathrm{M_0} \cdot (1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}} .$$

Provavelmente alguns alunos vão notar que os Montantes formam uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo termo, é o resultado do produto do termo anterior por $(1 + \mathrm{i})$, ou seja estão em Progressão Geométrica de razão $\mathrm{q} = (1 + \mathrm{i})$. Como o termo geral de uma Progressão Geométrica é calculado pela fórmula:

$$\mathrm{a_n} = \mathrm{a_0} \cdot \mathrm{q^n} ;$$

Onde $\mathrm{a_n}$ é o enésimo termo, $\mathrm{a_0}$ é o primeiro termo e n é o número de termos. Logo para calcular o Montante do trigésimo mês da nossa pergunta, teríamos:

$$\mathrm{M_{30}} = \mathrm{M_0} \cdot \mathrm{q}^{30} ;$$

Calculando teríamos:

$$\mathrm{M_{30}} = 1500 \cdot (1 + 0{,}04)^{30}$$
$$= 4865 .$$

Calculamos então que se comprarmos um produto no valor de R$1500,00 e fossemos pagar após 30 meses teríamos que pagar R$4865,00. Mesmo aplicando uma taxa de Juros considerada baixa em um período relativamente curto, o consumidor irá pagar mais de três vezes o valor inicial do produto, por isso devemos evitar prazos longos quando se tratam de Juros Compostos.

6.7 ATIVIDADE 6 : APRENDENDO A COMPRAR.

Na revisão bibliográfica feita no capítulo 2 vimos que os PCN, para o Ensino Básico, nos orientam a trabalhar com atividades que envolvam problemas do cotidiano e que o aluno aprenda sobre as vantagens e desvantagens de uma compra à vista ou à prazo. Em geral quando vamos às compras temos várias opções para pagamento, à vista, uma ou mais parcelas. Nesta atividade vamos tentar orientar os alunos como tomar uma decisão para uma melhor compra.

Conteúdos:

- Porcentagens;
- Descontos;
- Juros Simples;
- Juros Compostos.

Objetivos:

- Familiarizar os alunos com situações do cotidiano envolvendo Matemática Financeira;
- Apresentar aos alunos as vantagens e desvantagens de uma compra à vista ou de uma compra em parcelas.

Procedimento:

Inicialmente podemos motivar os alunos expondo que o comércio monta algumas ciladas para “fisgar” os clientes, tais como, falsas promoções e descontos com valores que não correspondem a verdade.

Em seguida vamos expor uma situação bem comum do nosso dia a dia. Manoel, filho mais velho da família, ficou responsável pela compra do refrigerador para a casa. Joaquim, pai de Manoel, disse a ele que poderia usar o dinheiro que eles tinham numa aplicação que rendia 5% de Juros ao mês. Chegando à loja Macropato, Manoel observou três opções de pagamento na compra do refrigerador:

1. À vista, com 10% de desconto.
2. Pagamento em duas parcelas mensais iguais, sem desconto, a primeira com vencimento um mês após a compra.
3. Pagamento em três parcelas mensais iguais, sem desconto, a primeira sendo paga no ato da compra.

Qual das opções será a melhor para Manoel?

Sugestão de resolução: Note que o valor do produto não influencia nas vantagens ou desvantagens do pagamento pois estas independem do valor atribuído mas dependem do prazo e das taxas de Juros ou descontos. Cabe ao professor atribuir um valor ao produto de modo a facilitar os cálculos, em nossa resolução escolhemos $\text{R\$}100{,}00$. Inicialmente vamos calcular as parcelas e representar as três situações na linha do tempo, ensinada na atividade 3:

Opção 1: Nesta opção teremos para pagamento na data 0 o valor de $100 - \frac{10}{100} \cdot 100 = 90$. Na linha do tempo teremos uma seta com o valor de $\text{R\$}90{,}00$ na data 0, como abaixo:

Figura 21: Linha do tempo para opção 1.
Fonte: Autor.

Opção 2: Vamos colocar na linha do tempo, desta opção, duas setas com valores iguais de $\text{R\$}50{,}00$ nos meses 1 e 2, como abaixo:

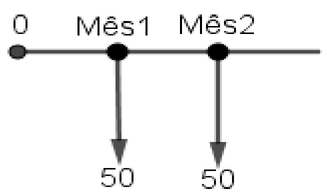


Figura 22: Linha do tempo para opção 2.
Fonte: Autor.

Opção 3: Como as parcelas serão iguais teremos na linha do tempo três setas representativas de R$33,33, sendo uma na entrada, outra em um mês e outra em dois meses, da seguinte maneira:

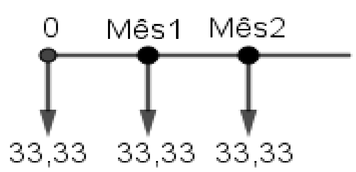


Figura 23: Linha do tempo para opção 3.
Fonte: Autor.

É importante notar que o valor de uma quantia depende da época à qual ela se refere. Um erro muito comum em raciocínios financeiros é pensar que $\text{R\$}100{,}00$ tem sempre o mesmo valor. Na verdade, $\text{R\$}100{,}00$ hoje valem mais que $\text{R\$}100{,}00$ daqui a um mês. Para compararmos os valores da compra de Manoel vamos trazer todos para uma mesma data, por exemplo, para a data atual(0). Teremos então o valor $\mathrm{P}_1 = 90$, onde P_1 é o valor do pagamento na data atual para a primeira opção. Sabemos que as prestações da segunda opção são de $\text{R\$}50{,}00$. Vamos trazer os valores das duas parcelas de $\text{R\$}50{,}00$ para a data de hoje e em seguida somá-los. Lembrando que Manoel teria o dinheiro em uma aplicação rendendo 5% de Juros ao mês (Juros Compostos). Temos então as parcelas formando uma Progressão Geométrica decrescente de razão $(1 + \mathrm{i}) = (1 + 0{,}05)$. Chamando P_2 o valor do pagamento total da segunda opção, temos:

$$\mathrm{P}_2 = \frac{50}{(1{,}05)} + \frac{50}{(1{,}05)^2} = 92{,}97\,.$$

Para a terceira opção vamos trazer os valores das parcelas de R$33,33 para a data atual e somá-los. Chamando de P_3 o valor do pagamento total da terceira opção, teremos:

$$\mathrm{P}_3 = 33{,}33 + \frac{33{,}33}{(1{,}05)} + \frac{33{,}33}{(1{,}05)^2} = 95{,}30\,.$$

Podemos também compararmos os valores da compra de Manoel em outra data, por exemplo na data 1, ou mês 1. Chamando P_1' o valor do pagamento da primeira opção, teremos:

$$\mathrm{P}_1' = 90 \cdot (1{,}05) = 94{,}5\,.$$

Chamando P_2' o valor do pagamento total da segunda opção, temos:

$$\mathrm{P}_2' = 50 + \frac{50}{(1{,}05)} = 97{,}62\,.$$

Para a terceira opção vamos trazer os valores das parcelas de R$33,33 para a data 1 e somá-los. Chamando de P_3' o valor do pagamento total da terceira opção, teremos:

$$\mathrm{P}_3' = 33{,}33 \cdot (1{,}05) + 33{,}33 + \frac{33{,}33}{(1{,}05)} = 100{,}07\,.$$

A melhor alternativa para Manoel é comprar à vista e a pior é comprar em três prestações com entrada. É importante ressaltar aos alunos que a melhor opção para Manoel pode não ser a melhor opção para outra pessoa, Lucronildo por exemplo.

Lucronildo não conseguiu uma aplicação rendendo 5% ao mês e então colocou o dinheiro na poupança rendendo 1% ao mês. Então para ele seria melhor comprar à vista do que comprar a prazo, pagando Juros de 5% ao mês. Se Lucronildo tivesse como investir seu dinheiro, de maneira que lhe rendesse, por exemplo, Juros de 6% ao mês, então a situação seria outra e seria melhor ele comprar a prazo com Juros de 5% ao mês.

6.8 ATIVIDADE 7 : SÉRIE UNIFORME DE N PAGAMENTOS IGUAIS.

Pagamentos (quantias ou prestações) referidas a épocas diferentes constituem o que chamamos de Série. Se esses pagamentos forem iguais e estiverem igualmente distribuídos no tempo, chamamos de Série Uniforme. No Capítulo 2 vimos que as recomendações dos PCN são que a Educação Financeira ensine os alunos a analisar os conceitos e riscos financeiros de modo a ficarem mais conscientes sobre riscos e oportunidades financeiras, para isso fizemos uma atividade que envolve estes conceitos, sobre Série de Pagamentos. Estas estão, de maneira aproximada, na maioria das operações financeiras, entre elas, as de financiamento de carros e imóveis.

Conteúdos:

- Juros Compostos;
- Progressões Geométricas;
- Taxa de Juros.

Objetivos:

- Ensinar os alunos a terem uma posição crítica diante das situações de consumo;
- Orientar os alunos para que tomem decisões corretas diante de operações financeiras;
- Ensinar a calcular o valor das prestações e o valor final pago em uma série de pagamentos uniformes.

Procedimento:

Podemos começar comentando que as lojas do comércio tem propagandas em rádios, televisão e internet, oferecendo produtos em vários pagamentos iguais cobrando uma certa taxa de Juros mensal. Em geral são oferecidos produtos no comércio em 6, 10 ou 12 pagamentos. Alguns imóveis são financiados em até 30 anos.

Em seguida propomos a seguinte situação:

Manoel foi à loja Lucropar procurando um fogão para comprar. O vendedor lhe ofereceu o fogão de uma de suas melhores marcas com as seguintes opções:

1. À vista por R$1500,00;
2. Em seis pagamentos iguais de R$263,16, sem entrada, cujos Juros seriam de 2% ao mês.

Propomos então aos alunos descobrirem como foi determinado o valor das parcelas. Um erro comum é de dividirem o valor do produto à vista por seis, que neste caso obteríamos R$ 250,00, valor diferente da oferta.

Para facilitar o entendimento da operação vamos projetar a linha do tempo para os alunos visualizarem. Colocaremos setas nos meses 1 a 6 representando o valor dos pagamentos, que chamaremos por enquanto de P:

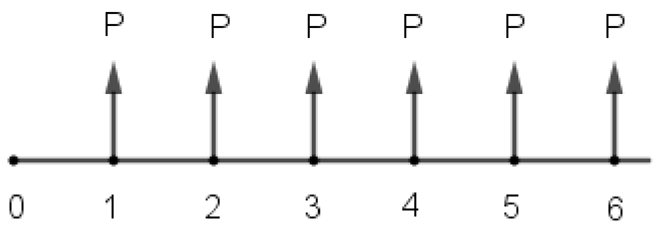


Figura 24: Linha do tempo para pagamentos iguais.
Fonte: Autor.

Como já visto na atividade 9, para compararmos valores em tempos diferentes, devemos trazê-los para uma mesma data. Já que nos foi fornecido o valor do produto à vista, é conveniente trazer todos os valores para a data 0. Já ensinamos na atividade 5, que podemos comparar Juros Compostos com Progressões Geométricas, logo para trazermos valores de n períodos futuros podemos dividir o valor por $(\mathrm{i}+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}$, onde i é a taxa dos Juros (Compostos) cobrada e n o número de períodos de tempo que desejamos retroceder. Neste caso, teremos o valor do bem à vista igual à soma das 6 parcelas, P, retrocedendo do primeiro mês até o sexto mês, com juros de 2% ao mês. Ficamos com a seguinte igualdade:

$$1500 = \left[\frac{P}{(1+0{,}02)^1} + \frac{P}{(1+0{,}02)^2} + \frac{P}{(1+0{,}02)^3} + \frac{P}{(1+0{,}02)^4} + \frac{P}{(1+0{,}02)^5} + \frac{P}{(1+0{,}02)^6}\right]$$

$$= P\left[\frac{1}{(1,02)^1} + \frac{1}{(1,02)^2} + \frac{1}{(1,02)^3} + \frac{1}{(1,02)^4} + \frac{1}{(1,02)^5} + \frac{1}{(1,02)^6}\right].$$

No segundo membro da igualdade temos uma Progressão Geométrica de primeiro termo $a_1 = \frac{1}{(1,02)}$, número de termos $n = 6$ e cuja razão é $q = \frac{1}{(1,02)}$. Temos então:

$$1500 = P \cdot \left[a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)}\right]$$

$$= P \cdot \left[0,98 \cdot \frac{(1 - 0,98^6)}{(1 - 0,98)}\right]$$

$$= P \cdot 0,98 \cdot \frac{0,114}{0,02}$$

$$= P \cdot 5,70 \ .$$

Finalmente calculamos P:

$$1500 = P \cdot 5,70$$

$$\Leftrightarrow P = 263,16 \ .$$

Manoel teria uma opção de comprar a geladeira em 6 pagamentos iguais de R$263,16, sem entrada, cujo total seria de R$ 1578,96. Também ele poderia comprar à vista por R$1500,00.

Dessa maneira ensinamos os alunos a verificar se os Juros e o valor das prestações oferecidas no comércio estão corretos

Neste momento, se o professor achar conveniente pode deduzir uma fórmula para calcular o valor das prestações para uma série uniforme de n pagamentos. Poderemos começar traçando uma linha do tempo com n setas representando as n prestações, conforme desenho abaixo:

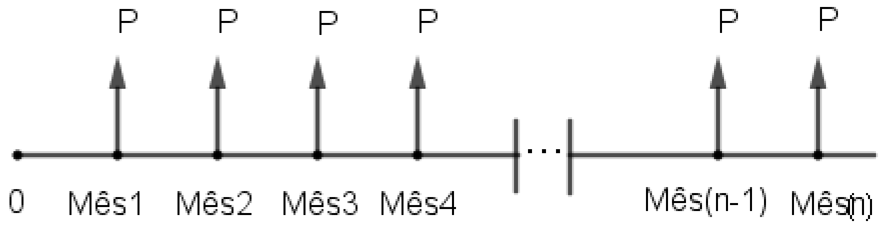


Figura 25: Linha do tempo para n pagamentos.
Fonte: Autor.

Com a mesma lógica do exercício anterior, agora com n prestações, de forma algébrica, traremos os valores de P para a data de hoje, data 0. Chamando V o valor à vista do bem (ou produto), obteremos a seguinte igualdade:

$$V = P \cdot (1 + i)^{-1} + P \cdot (1 + i)^{-2} + \cdots + P(1 + i)^{-n}$$

Colocando P em evidência e calculando a soma da Progressão Geométrica do segundo membro da igualdade acima, ficaremos com:

$$V = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (6.1)$$

A fórmula (6.1) nos permite calcular o valor da prestação para uma série de n pagamentos, se tivermos o valor do bem à vista, o Juro cobrado e o número de parcelas. Note que para chegarmos a essa fórmula usamos matemática básica e noções de Progressões Geométricas. Raciocínio parecido foi usado para obter a fórmula (5.1) que nos permite calcular o Montante de uma sequência uniforme de depósitos.

6.9 ATIVIDADE 8 : SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC).

Grande parte dos financiamentos imobiliários da casa própria utilizam o Sistema de Amortização Constante, ou tabela SAC, é utilizado por bancos como Caixa Econômica Federal e Banco do Brasil.

Conteúdos:

- Juros;
- Sistema de Amortização Constante;
- Noções do software Geogebra.

Objetivos:

- Ensinar noções do Sistema de Amortização Constante;
- Ensinar noções do software Geogebra.

Procedimento:

O professor começa a aula mostrando as características deste sistema, isto é, que as amortizações são iguais e que as parcelas a serem pagas são decrescentes. É a amortização que realmente está fazendo a dívida ser paga. Os Juros são a remuneração de quem emprestou o dinheiro. Como a amortização reduz a dívida todos os meses, então o custo com o pagamento de Juros também vai reduzir. Logicamente a prestação pela tabela SAC também vai diminuir.

Em seguida propomos que o professor aplique o exercício abaixo, auxiliando os alunos na construção da tabela SAC usando o software indicado. Esta atividade tem um exemplo do dia a dia, neste caso, a compra de um bem para ser pago a médio ou longo prazo, para o aluno ligar teoria à prática.

Exercício 6.9.1 Um aluno precisava de uma moto para se deslocar até a Universidade e queira financiar uma moto no valor de $R\$\ 15000{,}00$ por um período de 12 meses. Foi até a concessionária e descobriu que pagando Juros de 3% ao mês, no Sistema de Amortização Constante, ele conseguiria comprar a moto. Monte a tabela de pagamentos, para o aluno, com auxílio do software Geogebra.

Sugestão de resolução:

Para abrirmos a planilha no Geogebra, clique no menu Exibir e escolhemos a opção Planilha. Na tabela no Geogebra teremos na coluna A os períodos, na coluna B os Juros, na coluna C a amortização de cada período, na coluna D as prestações e na coluna E o saldo devedor.

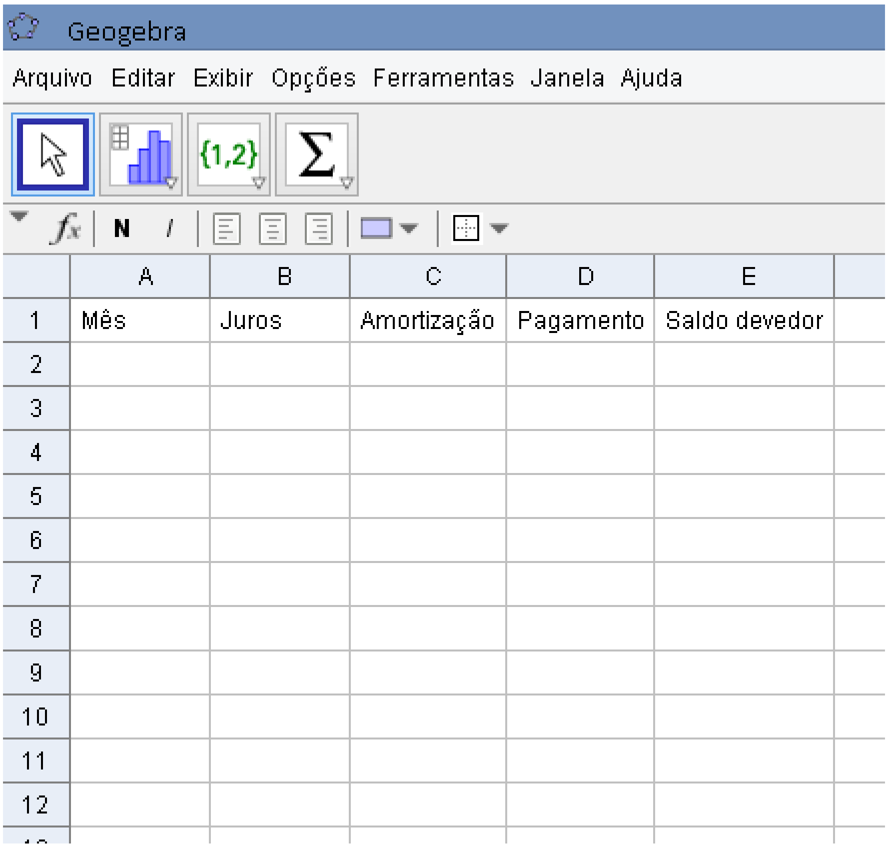
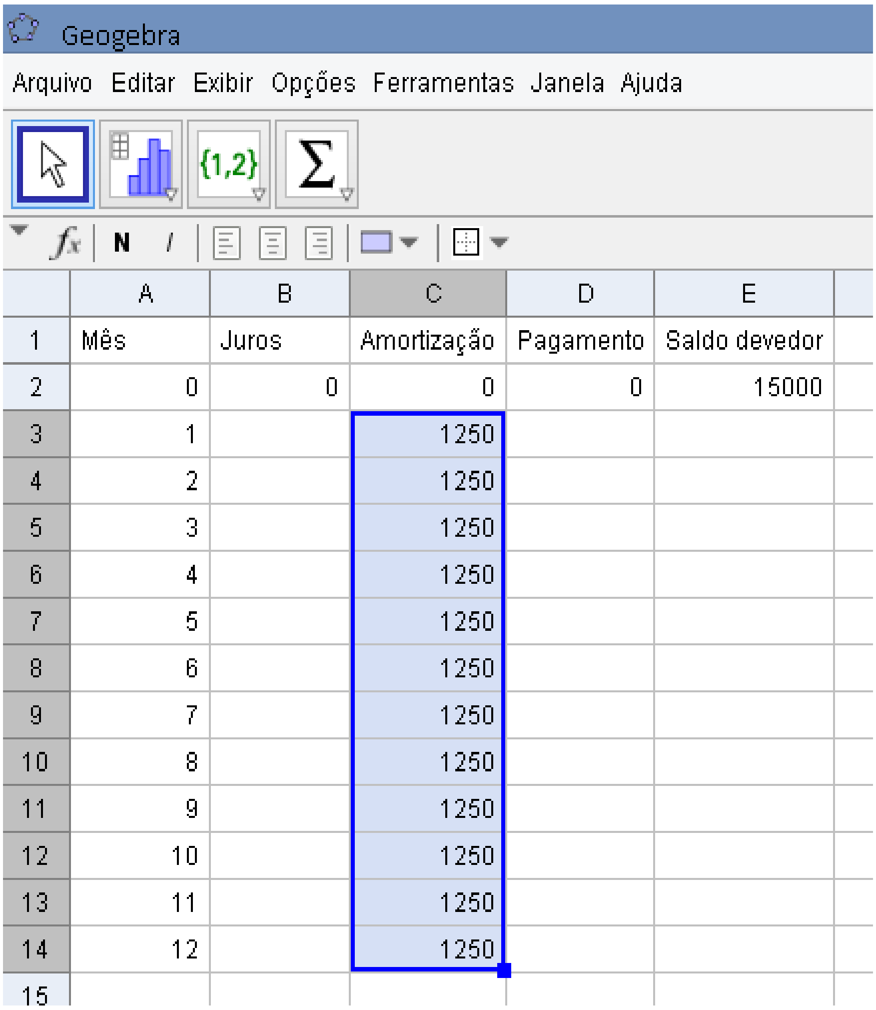


Figura 26: SAC - 1
Fonte: Autor

- Digite “Mês”, “0”, “1”, nas células A1, A2 e A3 respectivamente. Selecione a célula A3 e arraste o mouse na coluna A até a célula A14.
- Digite “0” nas células B2, C2 e D2. Na célula E2 digite”15000” que é o valor a ser financiado.

- Neste caso de Sistema de Amortização Constante a amortização da dívida será igual em todos os meses e obtida dividindo-se os 15000 por 12, que é o número de parcelas, resultando em 1250. Assim digite “1250” na célula C3 e arraste o mouse sobre a coluna C até a célula C14, como na figura 27.



	A	B	C	D	E
1	Mês	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo devedor
2	0	0	0	0	15000
3	1		1250		
4	2		1250		
5	3		1250		
6	4		1250		
7	5		1250		
8	6		1250		
9	7		1250		
10	8		1250		
11	9		1250		
12	10		1250		
13	11		1250		
14	12		1250		
15					

Figura 27: SAC – 2
Fonte: Autor

- Para preencher a coluna do saldo devedor digite ”E2-C3” na célula E3. Este cálculo vale para todas as células da coluna E, por isso, selecione E3 e arraste o mouse sobre a coluna E até E14.
- Para calcularmos a coluna dos Juros digite “0.03*(E2)” na célula B3, onde 0,03 é a taxa dos Juros cobrados e E2 o saldo devedor. Os Juros seguintes obedecerão ao mesmo cálculo, por isso, selecione B3 e arraste o mouse até B14, conforme figura 28.

	A	B	C	D	E
1	Mês	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo devedor
2	0	0	0	0	15000
3	1	450	1250		13750
4	2	412.5	1250		12500
5	3	375	1250		11250
6	4	337.5	1250		10000
7	5	300	1250		8750
8	6	262.5	1250		7500
9	7	225	1250		6250
10	8	187.5	1250		5000
11	9	150	1250		3750
12	10	112.5	1250		2500
13	11	75	1250		1250
14	12	37.5	1250		0

Figura 28: SAC – 3
Fonte : Autor

- Ao final, para determinarmos o valor das prestações digite na célula D3 “(B3)+(C3)” que é a soma do valor que será amortizado com os Juros do período. Selecione D3 e arraste o mouse na coluna D até D14. Obtemos assim a tabela solicitada, figura 29:

	A	B	C	D	E
1	Mês	Juros	Amortização	Pagamento	Saldo devedor
2	0	0	0	0	15000
3	1	450	1250	1700	13750
4	2	412.5	1250	1662.5	12500
5	3	375	1250	1625	11250
6	4	337.5	1250	1587.5	10000
7	5	300	1250	1550	8750
8	6	262.5	1250	1512.5	7500
9	7	225	1250	1475	6250
10	8	187.5	1250	1437.5	5000
11	9	150	1250	1400	3750
12	10	112.5	1250	1362.5	2500
13	11	75	1250	1325	1250
14	12	37.5	1250	1287.5	0

Figura 29: SAC – 4
Fonte: Autor.

Obtemos então o valor das parcelas a serem pagas pelo aluno, para o financiamento uma moto no valor de $R\$\,15000{,}00$ por um período de 12 meses, usando a tabela SAC, com Juros de 3% ao mês.

O professor deve ter o cuidado de justificar as etapas deixando bem claro o uso do conceitos de Matemática Financeira na montagem da tabela. A tabela nos traz uma visibilidade grande dos dados, mas sem a lógica matemática e sem o entendimento dos conceitos não conseguimos programar a planilha adequadamente.

6.10 ATIVIDADE 9 : SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (SAF).

No Sistema de Amortização Francês as prestações pagas são sempre iguais. A prestação paga é composta pela soma da amortização mais os Juros do período. A amortização aumenta a cada período e os Juros diminuem a cada período. Utilizada geralmente em financiamento de veículos.

Conteúdos:

- Juros;
- Sistema de Amortização Francês;
- Noções do Geogebra.

Objetivos:

- Ensinar noções do Sistema de Amortização Francês;
- Ensinar noções do software Geogebra.

Procedimento:

O professor pode começar a aula com um pouco da história do criador deste sistema, Richard Price, que criou este método para o cálculo de pensões e aposentadorias em 1771 e logo após a segunda revolução industrial o sistema foi usado no cálculo de empréstimos. Em seguida evidenciar o fato que este sistema tem parcelas fixas, que facilita no orçamento da pessoa, este método é usado em financiamentos e empréstimos pessoais no Brasil. Depois sugerimos que aplique o exercício abaixo auxiliando os alunos a montar a tabela Price.

Exercício 6.10.1: Joaquim deseja comprar um notebook para auxiliar em seus estudos que custa R$2500,00 a ser pago em 10 parcelas. Chegando a loja Lucropar o vendedor lhe explicou que a loja cobra 3% de Juros ao mês e utiliza o Sistema de

Amortização Francês. Ajude Joaquim a perceber a evolução da dívida dele, montando a tabela Price no software Geogebra.

Sugestão de resolução:

No Geogebra teremos na coluna A os períodos, na coluna B os Juros, na coluna C a amortização de cada período, na coluna D as Prestações e na coluna E o saldo devedor.

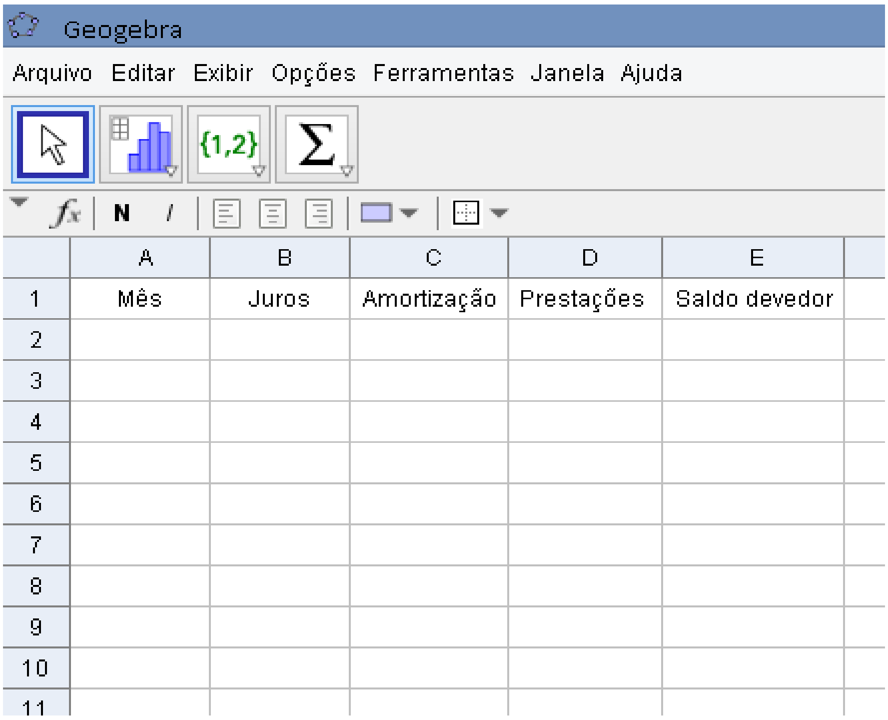
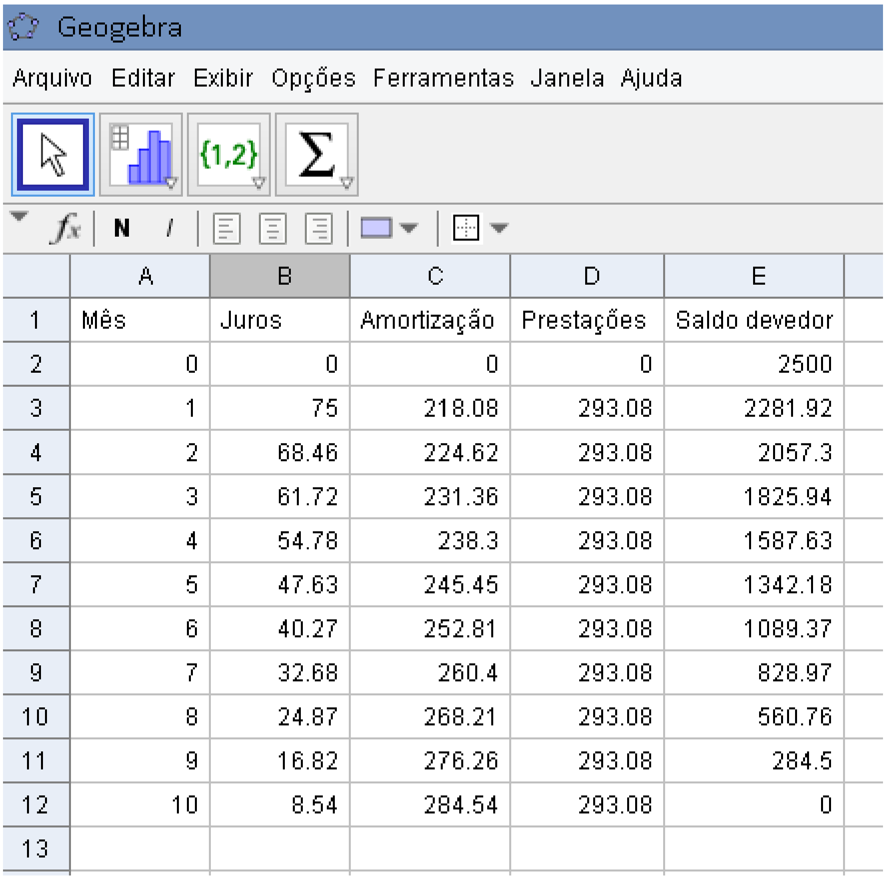


Figura 30: SAF – 1
Fonte: Autor

- Digite “Mês”, “0”, “1”, nas células A1, A2 e A3 respectivamente. Selecione a célula A3 e arraste o mouse na coluna A até a célula A14.
- Digite “0” nas células B2, C2 e D2. Na célula E2 digite”2500” que é o valor a ser financiado.
- Neste caso de Sistema de Amortização Francês a prestação da dívida será igual em todos os meses e obtida pela soma dos Juros com a Amortização: $P = V \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$, onde P é o valor da Prestação, V o valor inicial da dívida, i é a taxa de Juros e n o número de períodos de tempo (número de parcelas). Substituindo temos: $P = 1500 \cdot \frac{(1+0,03)^{10} \cdot 0,03}{(1+0,03)^{10} - 1}$. Resultando em $P = 293{,}08$. Assim digite “293,08” na célula D3 e arraste o mouse sobre a coluna D até a célula D12.

- Vamos preencher as células B3, C3 e E3 da linha 3 da planilha. Para calcularmos a coluna dos Juros digite “0.03*(E2)” na célula B3, onde 0,03 é a taxa de Juros e E2 o saldo devedor. A amortização será calculada diminuindo os Juros do valor da parcela paga, ou seja, digite “D3-B3” na célula C3. Na célula E3 digite “E2-C4”, sendo que E2 contém o saldo devedor no período e C4 o valor da amortização. Para completarmos as colunas B, C e E, das linhas 4 até 12, utilize este mesmo raciocínio. Obtemos assim a tabela pedida pelo exercício, na figura 31.



	A	B	C	D	E
1	Mês	Juros	Amortização	Prestações	Saldo devedor
2	0	0	0	0	2500
3	1	75	218.08	293.08	2281.92
4	2	68.46	224.62	293.08	2057.3
5	3	61.72	231.36	293.08	1825.94
6	4	54.78	238.3	293.08	1587.63
7	5	47.63	245.45	293.08	1342.18
8	6	40.27	252.81	293.08	1089.37
9	7	32.68	260.4	293.08	828.97
10	8	24.87	268.21	293.08	560.76
11	9	16.82	276.26	293.08	284.5
12	10	8.54	284.54	293.08	0
13					

Figura 31: SAF – 2
Fonte: Autor

Obtemos então o valor das amortizações, dos Juros e das prestações, estas constantes, para a compra de Joaquim.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conhecimento financeiro não é algo novo: em 2100 antes de Cristo os sumérios já realizavam operações financeiras e seus conceitos tiveram poucas mudanças ao longo do tempo. É um assunto que está presente em nosso dia a dia.

Quando falamos, no Capítulo 2, das leis que regem a educação, notamos que elas definem os objetivos para uma boa educação. A nível de Governo, os Parâmetros Curriculares Nacionais constituem-se em referências nacionais para o Ensino Básico, a primeira etapa para a concretização curricular do Brasil, definindo as metas para a educação estabelecidas pelas políticas públicas do Ministério da Educação.

Nas escolas, os PCN, as propostas das Secretarias e o projeto político pedagógico podem fundamentar e orientar sua prática, seus projetos, planos das disciplinas e o ensino na sala de aula.

Em relação à LDB, Lei de Diretrizes e Bases da Educação, observamos que ela é uma legislação com a função de organizar a estrutura da educação brasileira e ela influencia diretamente na formação escolar e acadêmica.

No capítulo 3 apresentamos alguns dados sobre as avaliações do PISA, com isto apresentamos um panorama geral da situação atual da Matemática Financeira, evidenciando um certo problema na Educação Financeira a nível mundial e ainda mais agravado no Brasil. Mesmo o orçamento doméstico sendo um tema importante, o conhecimento do brasileiro sobre o assunto é baixo.

As perguntas feitas na pesquisa da OCDE sobre o Letramento Financeiro no mundo não são de nível difícil, mas ainda assim vimos que o índice de respostas corretas do Brasil está abaixo da média. Por isso fizemos algumas atividades básicas em nossa Sugestão de Atividades.

Ao meu ver os programas para diminuir o analfabetismo financeiro, tais como, os da OCDE a nível mundial e o ENEF no Brasil, estão tendo resultados positivos, mas podemos ir além desses programas, por exemplo, melhorando a qualidade da Educação Financeiras nas escolas. Os professores e os alunos têm acesso a bons materiais sobre Educação Financeira, que podem ser usados em sala de aula, por exemplo, o material que pode ser acessado gratuitamente no sitio do programa da ENEF.

Percebemos que a Matemática Financeira e a Educação Financeira são muito importantes e muitas vezes estão sendo esquecidas nos currículos das escolas. Nos

Ensino Fundamental e Médio esse conteúdo pode ser trabalhado para que os alunos possam utilizá-lo melhor em suas vidas.

Esperamos também, com o apoio de nossa sequência de atividades, contribuir com a formação de um cidadão consciente, crítico em relação ao uso do dinheiro, que tenham equilíbrio financeiro e melhor qualidade de vida.

REFERÊNCIAS

ABRAMOVAY, Ricardo; CARVALHO, Carlos Eduardo. **O Difícil e Custoso Acesso ao Sistema Financeiro.** Brasília, DF. Artigo. [2004]. Disponível em: http://ricardoabramovay.com/o-dificil-e-custoso-acesso-ao-sistema-financeiro/.

ARAÚJO, Fernando Cosenza; CALIFE, Flávio Estevez. **A História não Contada da Educação Financeira no Brasil.** Artigo. [2014]. Disponível em: http://www.boavistaservicos.com.br/wp-content/uploads/2014/08/A-hist%C3%B3ria-n%C3%A3o-contada-da-educa%C3%A7%C3%A3o-financeira-no-Brasil.pdf. Acesso em: abril de 2017.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** 3.ed. São Paulo: Contexto, 2011, pp. 87 e 206).

BRASIL. **Estratégia Nacional de Educação Financeira.** Brasília, DF, 2010. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Decreto/D7397.htm. Acesso em: março de 2017.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLD 2014**: **Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013c.

BRASIL. Ministério da Educação. **LDB.** Lei 9.394 de 20/12/1996. **Lei das Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Brasília, 1996. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12907:legislacoes&catid=70:legislacoes. Acesso em março de 2017.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura, Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental. Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, DF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf . Acesso em julho de 2017.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, Departamento de Políticas do Ensino Médio. **Orientações Curriculares do Ensino Médio, vol. 2.** Brasília, MEC/SEB, 2006.

BRASIL. **Programa de Educação Financeira nas Escolas.** Brasília, DF, 2010. Disponível em: http://www.vidaedinheiro.gov.br/para-criancas-e-jovens/. Acesso em: março de 2017.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000.

CONCEIÇÃO, Suelen Vieira. **Análise de uma coleção de livros didáticos para o Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática – PROFMAT) – Sociedade Brasileira de Matemática / Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015.

CORREIA, Thamirys de Souza et al. **A educação financeira como um diferencial nas decisões de consumo e investimento dos estudantes do curso de ciências contábeis na grande João Pessoa**. Revista de contabilidade da UFBA, v.9, n. 3, 2015. Disponível em: http://dvl.ccn.ufsc.br/congresso/arquivos_artigos/artigos/949/20140411105150. pdf. Acesso em: abril de 2017.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação para uma Sociedade em Transição.** Campinas, SP: Papirus, 1999.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FIORENTINI, Dario. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino de Matemática no Brasil. **Revista Zetetiké.** São Paulo, v. 3, n.1, p. 1-38 , jan./jun., 1995.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 2010.

GONÇALVES, Jean Piton. **A História da Matemática Comercial e Financeira.** Só Matemática, 2007. Disponível em: http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php. Acesso em: abril de 2017.

GRANDO, Neiva Ignês; SCHENEIDER, Ido José. **Matemática Financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos.** Revista de educação Matemática. Campinas, SP. Unicamp, v. 18, n. 33, jan/jun 2010. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2799/2463. Acesso em: abril de 2017.

GOUVEA, Simone Aparecida Silva. **Novos Caminho para o Ensino e Aprendizagem de Matemática Financeira: Construção e Aplicação de Webquest:** 2006, 166f. Dissertação. (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, 2006.

IFRAH, Georges. **História Universal dos Algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

LUSARDI, Annamaria. **Financial literacy:** a global perspective. In: SEMINÁRIO DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA PARA CRIANÇAS E JOVENS, 2015. Rio de Janeiro. Disponível em : http://www.portaldoinvestidor.gov.br/portaldoinvestidor/export/sites/portaldoinvestidor/publicaçao/Apresentacoes/Seminario/AnnamariaLusardi_presentation_Sem2015.pdf . Acesso em : fevereiro de 2017.

MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira.; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila. **Progressões e Matemática Financeira,** volume 8 da Coleção do Professor de Matemática. SBM, RJ, 5. Ed., 2001.

OCDE. Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Econômico. **OECD´s Financial Education Project, 2009**. Disponível em: http://www.oecd.org/. Acesso em: março de 2017.

PARANÁ, **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática** – Curitiba: Secretaria de Estado da Educação, 2008, 82 p.

PELICIOLI, Alex Ferranti. **A Relevância da Educação Financeira na Formação de Jovens.** 125f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

PEREIRA, Luiz Carlos Bresser. **A Economia e a Política no Plano Real.** Revista de Economia Política, vol. 14, nº 4(56), outubro-dezembro/94. Disponível em: http://www.rep.org.br/pdf/56-10.pdf. Acesso em: março de 2017.

OECD (2017), **PISA (2015) Assessment and Analytical Framework:** Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving, revised edition, PISA, OECD Publishing, Paris. Disponível em: http://www.keepeek.com/Digital-Asset-Management/oecd/education/pisa-2015-assessment-and-analytical-framework_9789264281820-en#.WgCk8HZrzIU#page3 .

SAITO, André Taue. **Uma contribuição ao desenvolvimento da educação em finanças pessoais no Brasil**. Tese (Doutorado). Universidade de São Paulo, 2007.

SAVOIA, José Roberto Ferreira; SAITO, André Taue.; SANTANA Flávia de Angelis. **Paradigmas da educação financeira no Brasil. Revista de administração pública**, v.41, n.6, pp. 1121-1141, nov./dez. 2007.

SCHNEIDER, Ido José. **Matemática Financeira: um conhecimento importante e necessário para a vida das pessoas.** Dissertação (Mestrado). Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2008.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar Matemática.** Volume 2. 2ª edição. São Paulo: FTD, 2013.