UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ANDREIA SCHALLENBERGER

UM ESTUDO DA APLICAÇÃO PRÁTICA DAS GRANDEZAS DE ÁREA E DE VOLUME E SUAS RELAÇÕES DE PROPORÇÃO, APLICADAS AO COTIDIANO DO ALUNO

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO
2017

ANDREIA SCHALLENBERGER

UM ESTUDO DA APLICAÇÃO PRÁTICA DAS GRANDEZAS DE ÁREA E DE VOLUME E SUAS RELAÇÕES DE PROPORÇÃO, APLICADAS AO COTIDIANO DO ALUNO

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Profª. Drª. Cleonis Viater Figueira

PATO BRANCO

2017

S298 Schallenberger, Andreia
Um estudo da aplicação prática das grandezas de área e de volume e suas relações de proporção, aplicadas ao cotidiano do aluno. / Andreia Schallenberger. -- 2017.
83 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Profª Drª. Cleonis Viater Figueira
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2017.
Bibliografia: f. 80 - 82.

1. Metodologia de ensino. 2. Área. 3. Volume. 4. Prática de ensino. I. Figueira, Cleonis Viater, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.
CDD (22.ed.) 510

Ficha Catalográfica elaborada por
Maria Juçara Vieira da Silveira CRB9/1359
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Câmpus Pato Branco

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 029

"UM ESTUDO DA APLICAÇÃO PRÁTICA DAS GRANDEZAS DE ÁREA E DE VOLUME E SUAS RELAÇÕES DE PROPORÇÃO, APLICADAS AO COTIDIANO DO ALUNO"

Por

Andreia Schallenberger

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação da Profª. Drª. Cleonis Viater Figueira, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 14:00hs do dia 05 de dezembro de 2017. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Profª. Cleonis Viater Figueira, Drª.

(Presidente – UTFPR/Pato Branco)

Prof. André Pereira Pedroso, Dr.

(UNIOESTE/Francisco Beltrão)

Profª. Janecler A. A. Colombro, Drª.

(UTFPR/Branco)

Prof. Rômel da Rosa da Silva, Dr.

(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

Dedico esta conquista a meus pais, a quem admiro, porque com seu amor e dedicação me ensinaram a ter persistência e a praticar a humildade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, fonte infinita de energia e de sabedoria, que sempre foi meu ponto de equilíbrio nos momentos de preocupação.

A Profª. Drª. Cleonis Viater Figueira, por aceitar o convite de me orientar nesta pesquisa, contribuindo com o seu tempo e com seu conhecimento.

Aos professores do programa de Mestrado PROFMAT, por todo o ensinamento transmitido.

Aos meus colegas, pelo prazer em conhecê-los, em especial a minha colega e amiga Adalgisa Loureiro de Mello, pelos bons momentos de estudo e companheirismo vividos.

A Capes, pela concessão de bolsa de estudos, que foi de grande auxílio para manutenção do curso.

RESUMO

SCHALLENBERGER, Andreia. **Um estudo da aplicação prática das grandezas de Área e de Volume e suas relações de proporção, aplicadas ao cotidiano do aluno**. 2017. 85 f. Dissertação de Mestrado em Matemática, Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2017.

Essa pesquisa teve como temática as idéias sugeridas pelas Tendências em Educação Matemática e suas aplicabilidades, destacando-se a Etnomatemática com suas relações da importância da contextualização do conteúdo e o Pensamento Proporcional que descreve o modo de se pensar matematicamente as relações cotidianas, possibilitando assim um suporte metodológico para o ensino de Área e de Volume, por meio de uma atividade prática. Pelo estudo bibliográfico, foi possível verificar um melhor entendimento dessas idéias e a relação dessas com exemplos que envolvem a Matemática e também a Biologia. Buscaram-se informações, por meio de pesquisa qualitativa numa turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública, em que a pesquisadora é professora de Matemática da turma. Buscou-se saber qual o conhecimento prévio dos alunos sobre o conteúdo de Área e de Volume e se eles conseguiriam aplicá-los em uma situação do cotidiano. O questionário apontou alguns dados importantes sobre a dificuldade dos alunos em estender para uma situação prática os elementos envolvidos no conteúdo de Geometria. A proposta apresentada nessa pesquisa faz reflexão sobre uma alternativa para o ensino das grandezas que envolvem o conteúdo escolhido, a partir da releitura de um filme, mostrando que metodologia não é uma forma a ser copiada, mas algo que pode ser desenvolvido, a partir de fundamentações necessárias, aperfeiçoando com segurança a prática pedagógica.

Palavras-chave: Metodologia de Ensino, Área, Volume, Prática de Ensino.

ABSTRACT

SCHALLENBERGER, Andreia. **A study of the practical application of Area and Volume quantities and their proportion ratios, applied to the student's daily life**. 2017. 85 p. Master's Dissertation in Mathematics, Master's Program in Mathematics in National Network - PROFMAT - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2017.

This research had as its theme the ideas suggested by the Trends in Mathematics Education and its applicability, highlighting the Ethnomathematics with its relations of the importance of the contextualization of the content and the Proportional Thinking that describes the way to think mathematically the daily relations, thus allowing a methodological support for the teaching of Area and Volume, through a practical activity. Through the bibliographic study, it was possible to verify a better understanding of these ideas and the relation of these with examples involving Mathematics and also Biology. We searched for information through a qualitative research in a second-year high school class at a public school, where the researcher is a teacher of Mathematics in the class. It was sought to know the students' previous knowledge about the content of Area and Volume and if they could apply them in an everyday situation. The questionnaire pointed out some important data about the difficulty of students in extending to a practical situation the elements involved in the content of Geometry. The proposal presented in this research reflects on an alternative for the teaching of the greatnesses that involves the content chosen, from the re-reading of a film, showing that methodology is not a form to be copied, but something that can be developed, from necessary fundamentals, improving pedagogical practice with certainty.

Keywords: Teaching Methodology, Area, Volume, Teaching Practice.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Geometria é um ramo da Matemática que permite reconhecer as formas planas e espaciais existentes em nossa volta, permitindo analisar estabelecer noções de Área e Volume, para objetos em questão, a partir das dimensões apresentadas nele.

O ensino de Geometria é apontado como um dos conteúdos cujo processo de ensino e aprendizado é problemático. Essa dificuldade surge pelo fato do aluno não compreender as relações existentes entre a Área e o Volume, principalmente quando o objeto não apresenta uma forma definida.

Diante desse fato, a professora da turma em que será desenvolvida pesquisa, se coloca como pesquisadora na busca de reconhecer as dificuldades na aprendizagem do conteúdo mencionado. E a partir de estudos e análises de situações problemas levantados, que se desenvolve uma proposta para o ensino de Geometria usando, como cunho pedagógico, a releitura de um clássico literário, *As Viagens de Gulliver*.

LORENZATO (2006, p.59) quando afirma que "por mais conhecimentos sobre outras partes da Matemática que alguém possuir, eles não serão suficientes para resolver questões que demandarem percepção e raciocínio geométrico". Assim, a Matemática apresenta questões que exigem uma maneira própria de raciocínio que é desenvolvido apenas pelo estudo da Geometria.

A pesquisa sugere ainda, que a proposta se apresente como alternativa de minimizar as deficiências e dificuldades existentes no ensino e aprendizado de Área e Volume, facilitando a compreensão de seus conceitos e elementos envolvidos no conteúdo, dando ênfase à importância da visualização do processo bem como o uso de materiais concretos como suporte para tal visualização.

Para CUNHA (2009), o material concreto pode ser um instrumento viável para mediar uma articulação de passagem dos objetos do mundo físico para o mundo das idéias, ou vice-versa, e, ainda, para auxiliar os alunos a pensarem na maneira como eles interagem e interpretam as diferentes situações geométricas e suas representações simbólicas.

A metodologia utilizada baseou-se no estudo bibliográfico, que reforça o conhecimento sobre Geometria bem como as formas de apresentar o conteúdo, seguido de uma pesquisa qualitativa buscando informações sobre conhecimentos prévios dos alunos sobre questões que envolvem Área e Volume no cotidiano. Por fim, o filme como ferramenta pedagógica que enfatiza a preocupação dessa pesquisa com a visualização do processo de ensino e aprendizagem de noções de Área e Volume para objetos que não apresentam uma forma definida.

1 SEÇÃO

1.1 TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nessa seção, falar-se-á sobre a importância de abordar as tendências como norte no ensino e aprendizagem de Matemática, no contexto brasileiro, e também, as tendências internacionais, que ganham espaço e repercussão nos modelos de ensino.

A título de estudo, pode-se descrever as Tendências Matemáticas brasileiras como: Modelagem Matemática, Etnomatemática, Resolução de Problemas, Mídias Tecnológicas, História da Matemática e Investigação Matemática. E, dentre as Tendências Internacionais, destaca-se o Pensamento Proporcional, suas evoluções históricas e sua importância em sala de aula.

No estudo da Matemática, em especial na área da Educação Matemática, considera-se que deva possuir bases sólidas, ou seja, ter seu alicerce fundamentado na importância de um entendimento sobre as Tendências da Educação Matemática, na qual se traduzem diferentes abordagens no que se refere ao modelo aplicado ao processo de ensino e de aprendizagem.

A Educação Matemática é caracterizada por ser uma área de atuação que busca, a partir de determinados referenciais teóricos consolidados, algumas alternativas para inovar o ensino da disciplina. Além disso, "a Educação Matemática é uma atividade essencialmente pluri e interdisciplinar. Constitui um grande arco, onde há lugar para pesquisas e trabalhos dos mais diferentes tipos." (CARVALHO, 1994, p. 81).

A disciplina de Matemática deve ser atrativa, tanto para quem ensina quanto para aquele que deseja aprender. Desse modo, percebe-se, muitas vezes, que, ter o domínio da teoria não é suficiente para um ensino/aprendizado eficiente. O professor, além de ter um conhecimento assíduo, deve estimular em seus alunos a curiosidade e a vontade de aprender Matemática que, por muitas vezes, é apresentada de forma abstrata, pronta e acabada, com aulas expositivas, nas quais o aluno acaba se tornando um receptor de conhecimentos, acarretando dessa forma uma série de dificuldades para o entendimento e para a visualização dos conteúdos.

A educação matemática permite a compreensão do que se faz ao educar, das propostas pedagógicas, do sentido que fazem as teorias que estudam assuntos da educação. E, preponderantemente, um fazer mediativo que leva ao autoconhecimento, à autocrítica e, portanto, ao conhecimento e crítica do mundo. (BICUDO, 1999, p.25).

Encontrar a beleza da Matemática revela-se ao dar explicações e significados concretos para aquilo que parece não ter sentido. É algo que motiva o professor a buscar, constantemente, metodologias de ensino que façam romper a barreira entre teoria e prática.

Ao se buscar novas metodologias, nota-se também que elas trazem profundas transformações no cenário educacional, uma vez que a educação fundamenta o sucesso/fracasso de toda e qualquer mudança. Por sua vez, o ensino da Matemática também busca oferecer suporte metodológico para viabilizar e superar as dificuldades encontradas na compreensão do conceito e das relações existentes entre área e volume. FIORENTINI (1994), afirma que:

> [...] o professor que concebe a matemática como uma ciência exata, logicamente organizada e a-histórica ou pronta e acabada, certamente terá uma prática pedagógica diferente daquele que a concebe como uma ciência viva, dinâmica, historicamente construída pelos homens e que atende a determinados interesses e necessidades sociais (FIORENTINI, 1994, p.38)

Historicamente, percebe-se a necessidade de uma abordagem mais ampla que, focalizando uma sequência didática a partir de um conhecimento prévio, como base para compreensão das relações entre Área e Volume, por meio da seleção de tendências metodológicas, busque compreender suas características, seus princípios pedagógicos e seu modo de abordagem, dentro de um processo de ensino/aprendizagem.

Sabe-se que a sociedade sofre com processos de transformações profundas, decorrentes do ritmo acelerado dos avanços científicos e tecnológicos, e a educação, por si só, não consegue acompanhar as mudanças resultantes dessas transformações, ficando, dessa forma, defasada.

Os conteúdos matemáticos ministrados desvinculados de um contexto, quase sempre não contribuem para a formação dos alunos e, na maioria das vezes, tornam-se apenas um fator complicador. Desse modo, é necessário que haja a interação da Matemática com outras áreas do conhecimento, no caso dessa pesquisa, a Biologia, para que os alunos possam ser desafiados a perceber que ela não é uma ciência isolada. ZABALA (1998) afirma que:

> "A interdisciplinaridade é a interação entre duas ou mais disciplinas, que pode ir desde a simples comunicação de idéias até a integração recíproca dos conceitos fundamentais e da teoria do conhecimento, da metodologia e dos dados da pesquisa. Estas interações podem implicar transferências de leis de uma disciplina para outra e, inclusive, em alguns casos dão lugar a um novo corpo disciplinar, como a bioquímica ou a psicolingüística. Podemos encontrar esta concepção na configuração das áreas de Ciências Sociais e Ciências Experimentais no Ensino Médio e da área de Conhecimento do meio no Ensino Fundamental" (ZABALA, 1998, p.143).

Para que o processo cognitivo se efetive é importante que o professor atue como um articulador do processo ensino/aprendizagem, e faça uso de metodologias, relacionadas às tendências matemáticas, que venham ao encontro das necessidades atuais do processo educativo.

A partir dessa perspectiva, e de como o ensino da Matemática pode contribuir para que o aluno não seja apenas um sujeito passivo, que recebe informações desconectadas da realidade, é que mencionar-se-á a cronologia histórica das tendências no ensino de Matemática, e a evolução provocadas pela necessidade de aperfeiçoamento dessas tendências, de acordo com a realidade vivenciada, dentro do contexto histórico.

1.2 A EVOLUÇÃO DAS TENDÊNCIAS

O aprimoramento do ensino da Matemática, no Brasil, ocorreu dentro de um cenário de mudanças geradas pela expansão da indústria nacional. Por essa razão, de reconhecer a importância na evolução do ensino, serão mencionadas algumas tendências metodológicas que seguem uma cronologia histórica, dentre as quais, destaca-se as Tendências Pedagógicas: a Escola Nova, a Formalista Clássica, a Tecnicista, a Histórico-Crítica e, para o ensino de Matemática, a Secretaria de Estado da Educação por meio das Diretrizes Curriculares no ano de 2009, apresenta as tendências metodológicas que compõe o campo de estudo da Educação Matemática: Etnomatemática, Modelagem Matemática, Mídias Tecnológicas, História da Matemática, Investigação Matemática e Resolução de Problemas.

O final do século XIX, período marcado pela Segunda Revolução Industrial, é um momento de grandes transformações sociais, políticas e econômicas, no qual surge um novo modelo de produção, o Fordismo*. Nesse momento em que não cabe mais o modelo vigente de educação, nasce a Escola Nova, numa perspectiva de melhorar o processo ensino e aprendizagem, em todas as áreas do conhecimento. Segundo ARANHA (1996):

> Escola Nova surge no final do século XIX justamente para propor novos caminhos à educação, que se encontra em descompasso com o mundo no qual se acha inserida. Representa o esforço de superação da pedagogia da essência pela pedagogia da existência. Não se trata mais de submeter o homem a valores e dogmas tradicionais e eternos nem de educá-lo para a realização de sua "essência verdadeira". A pedagogia da existência volta-se para a problemática do indivíduo único, diferenciado, que vive e interage em um mundo dinâmico. (ARANHA, 1996, p. 167).

Frente a essa nova metodologia de ensino, a Matemática passa a ser ensinada pelos seus valores práticos, acreditando-se que o aluno aprende fazendo.

Outra tendência que prevaleceu, no Brasil, até o final da década de 1950, a Formalista Clássica, é um modelo fundamentado no "modelo euclidiano e na concepção platônica de Matemática". Tal tendência tinha como principal finalidade, na área da Matemática, o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo. Nessa tendência, "a aprendizagem era centrada no professor e no seu papel de transmissor e expositor do conteúdo, ou seja, o ensino era livresco e conteudista, a aprendizagem consistia na memorização e na repetição precisa de raciocínios e procedimentos" (FIORENTINI, 1995).

Já nas décadas de 60 e 70, o ensino da Matemática foi influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna e tinha como sujeito o professor. Esse modelo distanciava-se das aplicações cotidianas, persistindo a tendência Formalista-Moderna, com relevante uso da linguagem no rigor e nas

---

* **Fordismo** é um sistema de produção, criado pelo empresário norte-americano Henry Ford, cuja principal característica é a fabricação em massa.

justificativas. A Matemática era vista como uma construção formada por estruturas e relações abstratas entre formas e grandezas. A interação entre os estudantes e o professor era valorizada e o espaço de produção individual se traduzia como um momento de interiorização das ações e das reflexões realizadas, coletivamente.

Na década de 70, surgiu a tendência Tecnicista, na qual o foco do processo ensino e aprendizagem passou a ser os recursos e as técnicas de ensino. A finalidade do ensino da Matemática tornou-se, essencialmente, desenvolver habilidades e atitudes computacionais, e de manipulação de técnicas para fins de produção de consumo, proporcionando ao aluno a capacidade de resolver exercícios e determinados problemas-padrão, porém, num sentido mais mecânico e repetitivo.

Em meados de 1984, surge, no Brasil, a tendência Histórico-Crítica, defendida por Demerval Saviani, por meio de sua metodologia fundamentada no materialismo histórico, que buscava a construção do conhecimento a partir da prática social, superando a crença na autonomia e na “dependência absoluta da educação em face das condições sociais vigentes” (SAVIANI, 1997, p. 76).

Na Matemática, a tendência Histórico-Crítica é vista como um saber vivo, dinâmico, construído para atender às necessidades sociais, econômicas e teóricas em um determinado período histórico. Esses pressupostos relacionam-se à Tendência Etnomatemática, que será enfocada nesse estudo, para dar sentido às relações de proporção entre Área e Volume, que serão trabalhadas com interdisciplinaridade com a disciplina de Biologia.

Para FONSECA (1995) existe uma necessidade em contextualizar os aspectos fundamentais no ensino da Matemática,

> as linhas de frente da Educação Matemática têm hoje um cuidado crescente com o aspecto sociocultural da abordagem Matemática. Defendem a necessidade de contextualizar o conhecimento matemático a ser transmitido, buscar suas origens, acompanhar sua evolução, explicitar sua finalidade ou seu papel na interpretação e na transformação da realidade do aluno. É claro que não se quer negar a importância da compreensão, nem tampouco desprezar a aquisição de técnicas, mas busca-se ampliar a repercussão que o aprendizado daquele conhecimento possa ter na vida social, nas opções, na produção e nos projetos de quem aprende (FONSECA, 1995).

Acredita-se que na escola, ainda persistam muitos métodos tradicionais de ensino, derivados da formação que muitos professores tiveram. O que se ensinava era aceito sem questionamentos, quase não havendo espaço para discussões, prevalecendo, na maioria das vezes, o conceito de que o saber científico era verdadeiro e único. As teorias preconizavam que o professor era o detentor do conhecimento e o aluno, mero receptor de informações. O conhecimento não era relacionado à sua aplicação; aprendia-se sem saber por que ou para quê.

A Matemática pode ser considerada por muitos indivíduos, como sendo uma disciplina de resultados precisos e procedimentos infalíveis, que possui como elementos fundamentais as operações aritméticas, procedimentos algébricos, definições e teoremas geométricos. Pode-se perceber ainda, que a metodologia tradicional empregada com frequência no ensino da Matemática, não acompanha o desenvolvimento tecnológico da sociedade, exigindo dos alunos excesso de técnicas operatórias sem justificativas destas.

Diante desse fato, procura-se desenvolver modelos de ensino que trabalham dentro de uma lógica de atividades focadas nos interesses dos alunos, levando em considerando os Parâmetros Curriculares da disciplina.

A preocupação com o processo ensino e aprendizagem, baseado na fundamentação teórica norteadora das metodologias de ensino, passa a ser o desenvolvimento da capacidade de reflexão, de argumentação e de criticidade, oferecendo assim aos alunos, diversas possibilidades de reflexão sobre o que aprendem e recursos para uma aprendizagem efetiva.

Nesse novo cenário educacional, a partir do séc. XX, voltado à integração do aluno ao processo de ensino/aprendizagem é que as Tendências Atuais em Educação Matemática, destacadas anteriormente, aproximam-se da proposta de um ensino de qualidade, apesar das várias dificuldades e dos problemas enfrentados pela educação, tanto em relação às políticas públicas, quanto no contexto de sala de aula.

Na perspectiva atual de ensino de Matemática, tem-se fomentado algumas considerações a respeito das diversas possibilidades metodológicas e, cabe ao professor empregar, as quais julgar mais conveniente em seu projeto de trabalho. Uma metodologia bem fundamentada pode ser o ponto de partida para o trabalho didático e para a efetivação do que se pretende ensinar.

A educação é a prática fundamental da existência humana e precisa ser, continuamente, repensada. Nenhuma das tendências metodológicas acima apresentadas esgota todas as possibilidades para realizar com eficácia o complexo processo de ensinar e de aprender Matemática, por isso, sempre que possível, o ideal é promover a articulação entre elas, até o momento em que for necessário repensar numa nova prática. De acordo com BICUDO (1999),

> o estudo das aplicações da matemática e dos seus usos nos mais diversos campos da sociedade – para além da história das grandes descobertas – pode ser de grande alcance tanto para a concepção dos currículos como para dar suporte à prática do professor na sua sala de aula (BICUDO, 1999, p.97).

Percebe-se, nesse sentido, que existe uma necessidade de conhecer e compreender as relações que existem entre as práticas pedagógicas e o modelo de teorias de aprendizagem que as fundamentam, principalmente, quando o objetivo é criar uma relação de ensino e aprendizagem eficiente, focada na contextualização da Matemática com outras disciplinas. Segundo GARCIA (1999),

> [...] Ensinar, que é algo que qualquer um faz em qualquer momento, não é o mesmo que ser um professor. Existem outras preocupações conceituais mais vastas que contribuem para configurar o professor: ser professor implica lidar com outras pessoas (professores) que trabalham em organizações (escolas) com outras pessoas (alunos) para conseguir que estas pessoas aprendam algo (se eduquem) (GARCIA, 1999, p. 23).

Desse modo, a fundamentação teórica permite ao professor ter embasamentos de como o aluno aprende, sem fugir dos conteúdos programáticos, contextualizando-os, sem perder o seu caráter científico.

Para essa pesquisa serão abordadas as ideias relacionadas à Etnomatemática e o Pensamento Proporcional, que servirão de suporte metodológico para o desenvolvimento do trabalho.

1.3 ETNOMATEMÁTICA

Nessa pesquisa, optou-se por descrever apenas uma das tendências brasileiras no ensino de Matemática a Etnomatemática, da qual suas ideias serão usadas como fundamentação teórica e suporte para o desenvolvimento da proposta de ensino, que é relacionar a proporção entre Volume e Área, no contexto da disciplina de Biologia.

O ensino da Matemática tem sido objeto de análise de vários estudiosos, e as tendências apontam para a necessidade de valorizar a Matemática dos diferentes grupos sociais. Ao se contextualizar um conteúdo de Matemática ao conteúdo de Biologia, é preciso que ele faça sentido ao universo do aluno em sua aplicabilidade. Pais, quando diz que “o desafio didático consiste em fazer essa contextualização sem reduzir o significado das idéias matemáticas que deram origem ao saber ensinado”, promove a reflexão sobre a ação do professor em sua práxis pedagógica. (PAIS, 2001, p. 26).

A Etnomatemática é um termo que foi proposto, em 1975, por Ubiratan D’AMBRÓSIO (1996), para descrever as práticas matemáticas dos grupos sociais, sejam eles uma sociedade, uma comunidade, um grupo religioso ou uma classe profissional. Ela procura aproximar os conteúdos trabalhados na escola com os conceitos matemáticos informais, construídos a partir da realidade dos alunos. Esse autor afirma que

> a matemática é uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível e perceptível, e com o seu mundo imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural (D'AMBRÓSIO 1996, p. 7).

Foi somente em agosto de 1984, no VI Congresso Internacional de Educação Matemática, ocorrido em Adelaide, Austrália, período em que algumas novas tendências em Educação Matemática estavam sendo estudadas, que tais tendências, como Matemática e Sociedade, Matemática para todos e História da Matemática e de sua pedagogia, entre outras, que o professor Ubiratan D’Ambrósio apresentou sua teorização para uma linha de pesquisas que se apresentava, timidamente, já há alguns anos. Nascia, então, o Programa de Pesquisa Etnomatemática, motivado pela procura de entender o saber/fazer matemático ao longo da história da humanidade, contextualizado em diferentes grupos de interesse, comunidades, povos e nações.

Etnomatemática ou Etnociência, como também foi chamada por D’AMBRÓSIO (1998) define ainda a ciência como um corpus de conhecimentos, organizados e hierarquizados por com uma graduação de complexidade e de generalidade, elaborados pelo homem para desvendar a ordem cósmica e natural e de esclarecer seu comportamento físico, emocional e psíquico.

Desse modo, o ambiente de sala de aula torna-se uma região de micro-culturas, favorecendo as relações sócio-cognitivas da Matemática, nas quais as informações e os conhecimentos apresentados pelos alunos têm uma importância significativa, e o professor deve usufruir dessas informações, mostrando aos alunos que eles também são peças-chave para um ensino/aprendizagem de qualidade, e não são meros ouvintes, mas parte incentivadora e fonte inspiradora de novos conceitos.

Frente às necessidades do uso de novas metodologias no ensino de Matemática, o futuro professor deve aprender novas ideias matemáticas de forma alternativa, e dominar tanto os conceitos básicos da disciplina, como os mais complexos. Apesar de comprovação recente, o cotidiano escolar está impregnado de saberes e de fazeres próprios da cultura, e o ensino de matemática procura fazer uma relação entre desenvolvimento das disciplinas científicas e o contexto sociocultural.

É, a partir da realidade, das informações, das indagações e da curiosidade dos alunos sobre os conceitos matemáticos, que fomentar-se-á um ensino de qualidade, valorizando o aluno e tornando-o parte integrante do modelo de ensino.

A Etnomatemática traz uma nova postura educacional, no intuito de formar cidadãos críticos e pensantes, criando um elo entre o conhecimento científico, adquirido nas carteiras escolares, integrando a ele um significado mais próximo à realidade dos alunos, mostrando que a Matemática não é, simplesmente, uma ciência difícil e complicada, mas, sim, a ciência que dá significado a tudo a nossa volta, até mesmo às ações mais simples do nosso cotidiano.

Diante disso, para a pesquisa foram utilizados os aspectos da Etnomatemática que proporcionou embasamentos metodológicos, contextualizando o conteúdo e as relações existentes ao se levar em consideração a questão da proporcionalidade envolvida entre Área e Volume de um corpo.

1.4 PENSAMENTO PROPORCIONAL

De acordo com levantamento realizado por BATANERO e col (1992) os programas de Mestrado e Doutorado em Educação Matemática têm realizado trabalhos dentro de algumas linhas de pesquisa, inclusive internacionais, em Educação Matemática. Dentre as tendências internacionais no ensino de Matemática, usaremos do Pensamento Proporcional para compor essa pesquisa, que pressupõe que o sujeito tem a noção de proporcionalidade, mesmo sem ter o conhecimento, cientificamente, estruturado sobre isso.

O Pensamento Proporcional pode ser classificado como o modo de a Matemática pensar o mundo a sua volta, analisando o comportamento das grandezas matemáticas, em vários aspectos e áreas distintas, como a Física e a Biologia, que será a disciplina com a qual será feita a interdisciplinaridade para expor as noções de Área e Volume, os quais serão tratados mais a frente, neste trabalho.

Para PONTE e SILVESTRE (2017), existe uma complexidade em termos de definição de pensamento proporcional e, isso se deve ao amplo conjunto de conhecimentos necessários para compreender todo o seu significado, e ao fato que cada área do conhecimento usar esse tipo de pensamento, modificando-o de modo a atender suas necessidades.

BEHR, LESH e POST (1995) consideram o pensamento proporcional como a base para a Álgebra, além de outros ramos da Matemática. Eles afirmam que há inúmeros problemas que podem ser resolvidos com a utilização das proporções consideradas como igualdade de duas razões, como por exemplo, cálculos relacionados à velocidade, à densidade, a preços, à porcentagem, à escala e à conversão de unidades, entre outras.

Os pesquisadores relatam que questões relacionadas ao desenvolvimento do pensamento proporcional são mais complexas do que se imagina, e ressaltam que os problemas envolvendo tal pensamento podem ser trabalhados com diferentes formas de representá-los, como tabelas, gráficos, símbolos e diagramas, de modo que o aluno consiga expressar sua capacidade algébrica de visualizá-los.

BEHR, LESH e POST (1995) explicam que, intuitivamente, ao se pensar uma situação problema que necessite do desenvolvimento do pensamento proporcional é muito comum se ter um pensamento matemático que pressupõe o uso da expressão $a/b = c/d$ (em que a, b, c e d são números inteiros; b e d não-nulos), e esse raciocínio é algo que parece ter se tornado mecânico.

Os autores explicam ainda, que esta lógica de resolução envolve outros conhecimentos que vai muito além dessa simples mecanização. Eles recomendam que problemas de razões e proporções sejam introduzidos utilizando-se dos conhecimentos dos alunos sobre multiplicação e divisão, nos quais o aluno possa visualizar e fazer comparações entre valores. Além disso, eles alertam para o fato de que o pensamento proporcional envolve a distinção entre situações proporcionais e não-proporcionais, o que, nesse caso, não só envolve, necessariamente, valores numéricos, mas também, conceitos de grandezas.

Após a visualização do problema, o aluno deverá criar estratégias de resolução, e é nesse momento que ele desenvolve seus critérios, podendo ou não partir de uma relação com o pensamento proporcional. Essa autonomia na resolução de problemas não pode fugir à proposição orientada pelo professor.

A partir dessas informações, em CAMEJO, MARANHÃO e MIRANDA (2009) apresentamos aspectos considerados por este grupo de autores como manifestações de um pensamento proporcional, a saber:

> a) utilizar estratégias pessoais para a resolução de problemas envolvendo componentes do pensamento proporcional;
> b) utilizar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo ideias de razão e proporção;

> c) fazer comparações numéricas envolvendo os racionais e também não-numéricas; trabalhar com classe de equivalência de frações;
> d) distinguir situações proporcionais e não-proporcionais;
> e) usar ideia de co-variação;
> f) representar razões por meio de gráficos, ou tabelas, ou símbolos, ou desenhos, ou, ainda, diagramas etc.
> g) relacionar proporcionalidade com ideias de medidas de comprimento, ou superfície, ou volume, ou massa, ou capacidade etc., além de efetuar conversão de unidades de medidas, desenhar ou representar em escala;
> h) utilizar razões na análise de dados (de uma enquete ou pesquisa) ou em probabilidade;
> i) resolver problemas envolvendo porcentagem, juros, descontos, impostos e taxas;
> j) utilizar o pensamento proporcional para resolver problemas envolvendo funções e suas representações ou ideias associadas a elas;
> k) relacionar proporcionalidade com a ideia de semelhança;
> l) diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais.
> m) reconhecer a divisibilidade do zero e a indivisibilidade por zero ao lidar com números racionais em suas diversas representações;
> n) relacionar ao menos duas das ideias acerca do número racional ou da fração: parte-todo, razão, divisão / quociente, porcentagem, operador; probabilidade, homotetia (ampliação e redução de figuras);
> o) operar com os números racionais na representação fracionária e na decimal, bem como transformar uma dessas representações na outra, imprimindo significado a tais ações.

De fato, são apenas algumas orientações que podem servir de elemento norteador na resolução de problemas ligados ao assunto de proporcionalidade, mas isso não se torna uma regra, pois cada qual se identifica com uma maneira de resolver o conteúdo científico apresentado, a qual facilite sua assimilação e compreensão. Nesse momento, o professor abre o leque de possibilidades, porém é o aluno que escolhe o caminho a seguir.

VERGNAUD (1990) defende que o problema central da cognição é a conceitualização, e sua teoria justamente aponta elementos nesse sentido. Opondo-se à separação entre conhecimento procedimental e conhecimento declarativo, ele considera que o fator essencial da dificuldade dos estudantes com a resolução de problemas, em Matemática, encontra-se vinculado não ao tipo de operação que um determinado problema requer pôr em prática, e sim, às operações do pensamento que os estudantes devem fazer para estabelecer relações pertinentes entre os dados do problema. Ou seja, o comportamento dos estudantes na resolução de problemas é guiado por hipóteses, analogias, metáforas, que dependem da conceitualização.

A partir dessas ideias, nota-se a importância da visão que o desenvolvimento do Pensamento Proporcional e suas habilidades agregam a essa pesquisa, tornado-se um elo entre o conhecimento científico e o conhecimento popular, principalmente, quando se faz a comparação entre grandezas que não são propriamente ditas proporcionais, como Área e Volume.

1.5 RAZÃO E PROPORÇÃO

Antes mesmo de falarmos sobre Área e Volume e suas relações, precisamos fazer o uso do Pensamento Proporcional e levar em consideração as definições de Razão e Proporção, para que o aluno reconheça que as grandezas envolvidas nas noções de Área e Volume não aumentam na mesma proporcionalidade.

Sabe-se que a evolução das metodologias de ensino, principalmente, no que diz respeito ao ensino de Matemática, é, constantemente observada, mas não é suficiente que haja uma melhoria nos métodos, se em contrapartida, não há uma melhoria na aprendizagem, por parte dos alunos.

Nesta seção serão abordadas questões sobre Razão e Proporção, e como essas grandezas, que estão presentes no cotidiano, se comportam quando aplicados em questões da Geometria.

Essa analise é de grande importância quando existe uma preocupação com a melhora na qualidade do ensino, pois a preocupação é que o aluno aprenda a desenvolver seu raciocínio de forma não mecanizada, já que o ensino de Razão e Proporção parece ainda estar voltado para a aprendizagem mecânica do algoritmo.

Esse fato é percebido quando se refere ao cálculo de proporção através da comparação entre grandezas numéricas quaisquer, e esse conhecimento popular influencia, diretamente, a pensar em uma regra de três.

Segundo VERGNAUD (1990), há uma tendência de se ensinar os algoritmos das operações sem relacioná-los a uma classe mais ampla de problemas. Desse modo, não é na formalização do ensino que as dificuldades de aprendizagem são superadas, mas, sobretudo, na estimulação constante da resolução de problemas, do uso do raciocínio lógico e do uso dos algoritmos das operações que se pode levar o aluno, em uma situação propícia para a construção de uma aprendizagem significativa.

Sendo assim, o desafio para os professores seria desenvolver uma compreensão mais efetiva desses conceitos, partindo de situações do próprio cotidiano do aluno, pois nota-se que muitas representações fracionárias são substituídas pela representação decimal, acreditando que esta seja mais compreensível. No entanto, essa maneira de tentar facilitar pode gerar dificuldades, criando obstáculos entre a aprendizagem e a relação da Matemática com o mundo real.

Se o ensino de Razão e de Proporção é um conteúdo de grande relevância na vivência cotidiana e acadêmica, a compreensão dos alunos deverá ser favorecida se o seu ensino for contextualizado. É o que se pretende com a interdisciplinaridade com conteúdos relacionados à Biologia usando as questões de contextualização ligadas as ideias fundamentadas pela Etnomatemática.

Segundo FREIRE (2002 p. 46), “é pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática”. Nessa sua fala, o autor adverte o educador da necessidade do exercício de uma ação pedagógica permeável a mudanças, e que o professor deve ter uma postura crítica que lhe permita, após identificar os erros, promover mudanças reais que levem à melhoria das condições de vida de cada indivíduo na sociedade.

Percebe-se que para se desenvolver um raciocínio proporcional conciso, ele precisa estar fundamentado na construção de conceitos e de conhecimentos. Em vista disso, é que se poderá usufruir das palavras de alguns pensadores e seu ponto de vista a respeito do ensino aprendizagem de Matemática abordando a postura e o elo entre professor e aluno a partir desse pensamento.

Qualquer conteúdo compreendido é abstraído em momentos diferentes dependendo do seu nível de complexidade. O conhecimento passa a ser efetivado quando o aluno se conscientiza da importância da informação e a transforma em novas leituras, independentemente se esse conhecimento for adquirido em sala de aula ou não.

Segundo BECKER (2001),

> A tomada de consciência é, pois, apreensão dos mecanismos da própria ação... um sujeito pode agir sobre o meio, sobre algum objeto, algum conteúdo, sobre as próprias ações, interagindo com outro sujeito e, ao fazer isso, ele tem condições de voltar-se sobre si mesmo e aprender o que fez e os mecanismos do seu fazer (BECKER, 2001, p. 40).

Segundo o autor, o conhecimento não nasce com o indivíduo, nem é produto do meio, o sujeito constrói seu conhecimento interagindo, tanto com o meio tanto físico como social, descartando sua bagagem hereditária, física e social. A construção depende, portanto, das condições do indivíduo e do ambiente social do qual faz parte. Ainda, a Matemática é uma ciência que parte de ações concretas para a construção do conhecimento, e seus instrumentos podem ser construídos com base “na intuição e no espírito inventivo” e, posteriormente, são estruturados e se tornarão significativos.

Para ensinar as noções de Área e Volume, o aluno precisará manipular os conceitos de Razão e Proporção para a aquisição do conhecimento, e valorizar o processo de construção desse saber, na busca da resolução dos problemas propostos. Nem sempre o mais importante é conhecer, e sim, como encontrar esse conhecimento, e de quais metodologias utilizar-se para tal.

A metodologia proposta por esse estudo mostra ao aluno todo o trabalho que é preciso desenvolver, quais conceitos tem de adquirir e quais ainda precisa dominar. Mostra ainda, suas falhas e suas assimilações e, principalmente, que vale a pena persistir e acreditar em sua capacidade de raciocínio que, mesmo sem perceber grande parte do processo aplicado, o saber interiorizado é resultado do seu modo de pensar.

O fazer e o refazer as atividades propostas é, de fato, a melhor maneira para se conquistar a aprendizagem com significado, uma vez que ele realça o porquê, valorizando a compreensão, além de possibilitar a integração com diferentes assuntos, a redescoberta, a aprendizagem de diferentes estratégias de resolução de problemas e a verificação de conjecturas e de resultados.

Para LORENZATO (1995), a descoberta é fundamental no ensino da Matemática, pois quando o aluno consegue fazer suas próprias conjecturas, surge o gosto pela aprendizagem. Esse é o caminho mais eficiente para a aprendizagem, porque possibilita a reconstrução do conhecimento, e valoriza a compreensão. O autor justifica, ainda, a importância do ensino da Geometria, uma vez que, o indivíduo dificilmente poderia desenvolver o pensar geométrico, o raciocínio visual e a resolução de problemas geometrizados, sem os conceitos de Razão e Proporção.

Partindo dessa conjectura, pretende-se desenvolver uma aplicação na Geometria, usando dos conceitos de Área e de Volume, tendo como base a lógica do Pensamento Proporcional entre ambas as grandezas.

2 SEÇÃO

2.1 CONCEITO DE ÁREA

Nesta seção, serão explicitados alguns conceitos sobre Área e a evolução de seus cálculos, bem como suas aplicações e atribuições no que se refere aos exemplos de proporção, principalmente, da relação com o Volume de um corpo comparado com o tamanho de sua superfície.

Quando se refere a uma medida de superfície qualquer, ou seja, o seu tamanho, a primeira definição que vem à mente é o cálculo da Área. A Área, portanto, pode ser considerada um conceito fundamental da Geometria Plana. Nessa seção, não importará a forma e o tamanho de tal superfície, mas a relação que essa superfície terá em relação ao corpo que ela reveste.

Ao se buscar na história, os vestígios e relatos das medidas e do cálculo dessa grandeza, saber-se-á que os primeiros a estudar esse conceito foram os babilônicos e egípcios. A Geometria, para o povo dessa época, era rústica e, essencialmente, métrica, ambos não se preocupavam necessariamente com a precisão de seus resultados, nem tão pouco com a descrição da teoria, a importância era apenas para a resolução de problemas práticos, vivenciados por eles.

Pela Figura 1, abaixo, nota-se que o Egito está situado no Nordeste da África, entre os desertos do Saara e da Núbia e é cortado pelo rio Nilo no sentido Sul-Norte, formando duas regiões distintas: o vale, estreita faixa de terra cultivável, apertada entre desertos, denominado Alto Egito, e o delta, em forma de leque, com maior extensão de terras aráveis, pastos e pântanos; denominado Baixo Egito.

Figura 1. Faixa de terra fértil no Egito.

Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/12056406/

Usa-se essa localização para entender que os povos da época procuravam se abrigar à beira de rios, especificamente na região do Rio Nilo, já que ele poderia fornecer, além de alimentos, a água para o consumo e para a irrigação da plantação. Mas, em épocas de cheias, os rios acabavam inundando e destruindo essas terras, e o cálculo de área tornou-se necessário, tanto para remarcá-las, como pela cobrança de impostos feita pelos escribas, pois tais impostos eram proporcionais ao tamanho da lavoura cultivada pelos camponeses. CAJORI (2007) relata um problema da época:

> “Eles disseram também que este rei (Sésotris) dividiu a terra entre todos os egípcios, de modo a doar a cada pessoa um quadrângulo de mesmo tamanho, e para extrair disto dividendos pela imposição de uma taxa anual de impostos. Mas cada um dos que o rio tirou algum pedaço de Terra foi até ele e notificou o que acontecia; ele então mandou observadores, os quais tinham que resolver o quanto ficou menor cada parte e, assim, estipular o que cada um devia proporcionalmente ao que sobrara das suas terras, levando em conta a taxa anual estabelecida. Deste modo, me parece, originou-se a geometria, que então passou para Helas” (CAJORI, 2007, p.33).

Mais tarde por volta de 300 a.C. algumas definições descritas do cálculo de Área são contempladas com os manuscritos de *Os Elementos* de Euclides, obra compilada pelo próprio Euclides, que é conhecido, até hoje, como o pai da Geometria.

Os Elementos de Euclides é um importante acervo de saberes acumulados pela humanidade na Idade Antiga que instruiu gerações por mais de 2000 anos. É considerado um patrimônio cultural da humanidade, e atualmente a obra é fonte inspiradora para estabelecer a vinculação da Matemática do ensino com a sua História.

Tal acervo é formado por treze livros, que apresentam alguns resultados originais, ou seja, resultados de fatos ocorridos na época em que foram descritos os problemas de Área, de forma bem sistemática e uniforme.

Ainda em CAJORI (2007), encontra-se o enunciado de um problema de calculo de Área da época:

> "Seu título é Indicações para Obter o Conhecimento de Todas as Coisas Obscuras. Nesta obra percebe-se que os egípcios pouco se importavam com resultados teóricos. Nela não há, em absoluto, teoremas.(...) Em geometria o forte dos egípcios repousa em construções e cálculo de áreas. A área de um triângulo isósceles, cujos lados medem 10 khets e a base 4 khets, está tomada erroneamente como 20 khets quadrados, ou a metade da base do produto por um dos lados. A área de um trapézio isósceles é calculada multiplicando-se a metade da soma dos lados paralelos por um dos lados não-paralelos. A área de um círculo é encontrada subtraindo do diâmetro 1/9 do seu comprimento e elevando a diferença ao quadrado." (CAJORI, 2007, p. 34)

Nota-se que em *Os Elementos*, o termo Área é utilizado para definir uma superfície (conteúdo) de uma figura, uma grandeza ou, simplesmente, um atributo geométrico da figura.

O conceito de Área, na obra de Euclides, é trabalhado a partir de duas abordagens complementares: a equivalência de áreas (figuras com o mesmo conteúdo) e a transformação de figuras (construção de uma figura com forma diferente da primeira, mas com o mesmo conteúdo).

Como, neste período, eram apenas admitidos números inteiros e ignorava-se a existência de números reais, os gregos não relacionavam a Área de uma figura com sua medida numérica, pois como não existiam termos científicos e não havia fórmulas para o cálculo, não havia necessidade de preocupação em atribuir valores numéricos a qualquer medida.

Euclides tratava a noção de Área como uma relação de equivalência, que satisfazia as noções comuns para os cálculos. Para exemplificar em termos modernos a noção de Área, utilizaremos a tradução de BICUDO (2009) do Livro I de *Os Elementos* de Euclides, como:

> ✓ Figuras congruentes têm conteúdo igual (mesma Área);
> ✓ Se duas figuras têm conteúdo igual a uma terceira figura, elas têm conteúdo igual entre si;
> ✓ Se pares de figura com conteúdo igual são somados, no sentido de serem juntados, sem sobreposição, fazendo figuras maiores, então, essas figuras maiores têm conteúdo igual;
> ✓ O conceito de soma vale para a subtração, observando que a igualdade de conteúdo da diferença não depende de onde as peças iguais foram removidas;
> ✓ Metades de figuras com conteúdo igual têm conteúdo igual. (Também, dobro de iguais é igual);
> ✓ O todo é maior que as partes, o que nesse caso, significa que, se uma figura está contida, totalmente, em outra (não congruente), então, as duas figuras não podem ter conteúdos iguais (estabelece-se uma relação de ordem sobre a grandeza Área) (BICUDO, 2009).

Note-se que o termo, conteúdo, usado acima, refere-se à medida de Área usada em uma linguagem simples e de fácil compreensão. Como o quadrado é a figura mais simples considerada pelos gregos, e era utilizado como unidade de comparação, o quadrado serviu como referencial de unidade de medida, transformando figuras poligonais em quadrados.

Euclides atribui em *Os Elementos,* o método axiomático-dedutivo, que parte de alguns fatos aceitos como evidentes e intuitivos (chamados de definições, postulados e axiomas) que, posteriormente, foram demonstrados (teoremas) e, atualmente, toda Geometria se constrói baseada em tais postulados, axiomas e resultados, já demonstrados.

Certamente, desde então, a linguagem foi melhorada, mas as ideias de Euclides foram preservadas, e formam a base do ensino de Geometria. VASCONCELOS (1925) afirma que a reputação desse autor deve-se à obra *Os Elementos que*, pelo método de construção lógica, o autor, parte de "um reduzido número de simples proposições, quase evidentes, chega gradualmente, por demonstrações sempre rigorosas e métodos [...] a fazer uma exposição sistemática das principais verdades da Geometria Elementar (com exceção das secções cônicas)", ou seja, por simples observações, Euclides descreve as definições dos conceitos fundamentais de Área e de Volume, utilizados até hoje.

Um dos livros da coleção PROFMAT 2012, mais especificamente, do título Tópicos de História da Matemática ROQUE e CARVALHO (2012) traz algumas dessas abordagens, relativas à Área, em forma de definições, tais como:

> ✓ Ponto é o que não tem partes;
> ✓ Linha é o que tem comprimento;
> ✓ As extremidades da linha são pontos;
> ✓ Linha reta é aquela que está posta igualmente entre as suas extremidades;
> ✓ Superfície é o que tem comprimento e largura;
> ✓ As extremidades da superfície são linhas;
> ✓ E o axioma X (p. 85) que preconiza que "duas linhas retas não compreendem um espaço (uma superfície)" (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 83)

Como os autores acima citados afirmam que, atualmente, "a distinção dos primeiros princípios entre definições, postulados e axiomas não é utilizada, mas é imprescindível lembrar que a Matemática se baseia ainda sobre primeiros princípios, admitidos como válidos sem demonstrações". Todas as proposições contidas em *Os Elementos,* de Euclides, são consequências da aplicação do método axiomático aos primeiros princípios.

NETO (2013), em seu livro de Geometria, da coleção PROFMAT, faz introdução ao conteúdo de áreas de polígonos, referindo-se que, para um conceito qualquer de Área para polígonos tenha utilidade, postula-se que as seguintes propriedades (intuitivamente desejáveis) sejam válidas:

> ✓ Polígonos congruentes têm áreas iguais;
> ✓ Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (i.e., se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta), então a área de polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores;
> ✓ Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor;
> ✓ A área de um quadrado de lado 1cm é igual a $1cm^2$ (NETO, 2013, p, 206).

Para LIMA (1991), no capítulo *Definições Gerais de Área*, tais propriedades descritas são utilizadas para formular a Área de uma superfície plana pelo método chamado "quadratura" (desenvolvido anteriormente por Euclides através da transformação de figuras). Dado um polígono *P*, associamos a ele um número real não-negativo, chamado *área de P,* com as seguintes propriedades:

1) Polígonos congruentes têm áreas iguais;

> 2) Se *P* é um quadrado unitário, então a área de *P* é igual a 1;
> 3) Se *P* pode ser decomposto em uma reunião de n polígonos P_1, P_2,..., P_n, tais que quaisquer dois desses polígonos têm em comum no máximo alguns lados, então a área de *P* é igual à soma das áreas de P_i. (LIMA, 1991, p. 21/23).

Segue do item 3 que, se o polígono *P* está contido em um polígono *Q*, então a área de *P* é menor do que a área de *Q*.

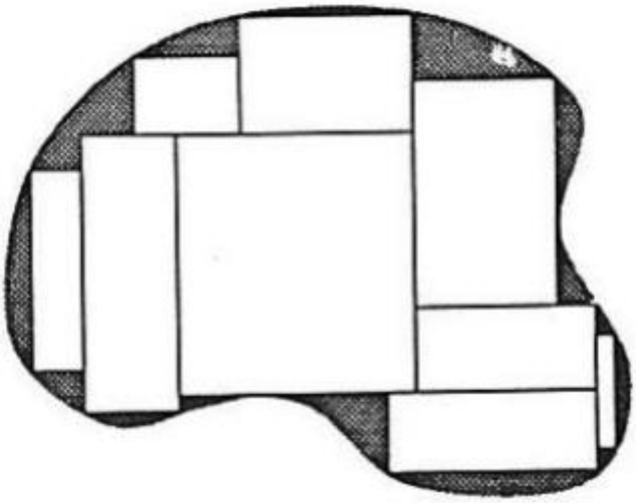
Seja então, segundo LIMA (1991), uma figura *F* qualquer e considere *P* um polígono formado pela justaposição de retângulos, isto é, um *polígono retangular.* Observe que a área de *P* é igual à soma das áreas dos retângulos que o compõem. Para determinar a área de *F* a qual se denota por *a(F),* tomar-se-á polígonos retangulares contidos em *F* e definimos: a Área de *F* é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em *F*. Isto é, para todo polígono retangular *P* contido em *F*, temos que:

$$a(P) \leq a(F)$$

Além disso, dado um número real qualquer $b < a(F)$, sempre existe um polígono regular *P* tal que:

$$B<a(P) \leq a(F)$$

Figura 2. Área por aproximação de polígonos retangulares



Fonte: LIMA (1991)

Também, é possível definir a Área de uma figura *F* como número real, cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos retangulares *Q* que contém *F*, utilizando o método descrito por Euclides, de comparação entre figuras. Assim, é possível usar o raciocínio matemático para chegar à identificação de Área como uma grandeza, sem recurso ao numérico de um determinado objeto.

Ou seja, trabalhar o conceito de Área sem a necessidade de defini - lá por um valor numérico, mas sim a sua noção de superfície permitindo a comparação com outras e as diferenciando, maior ou menor, por seu tamanho.

Desse modo, a Geometria precisa ser trabalhada de forma mais clara e exemplificada, para que o aluno compreenda sua relação e sua aplicabilidade. Para ROCHA (2010),

> é preciso levar o aluno a “falar” e a “escrever” sobre geometria, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos (ROCHA, 2010, p.16).

Essa maneira de ensinar Geometria, com um trabalho de atividades mecânicas, sem que o aluno saiba como aplicá-lo, em situações do dia a dia ou até mesmo em outras disciplinas ou áreas do conhecimento, aos poucos, vem sendo mudado, devido à importância dada ao enfoque nas necessidades reais de conhecimento sobre o assunto que esta sendo trabalhado, que visam conceitos da Geometria.

O documento oficial de Referencial Curricular do estado do Rio Grande do Sul, *Matemáticas e suas Tecnologias*, se refere à importância de trabalhar a Geometria como parte essencial do cotidiano, pois é ela que nos permite desenvolver habilidades necessárias para comparar, classificar, ordenar, corresponder e estabelecer relações entre fatos que nos ocorrem diariamente, a qual nos permite expressar tais manifestações através da fala, da escrita e das próprias representações que criamos.

> As vivências e o reconhecimento dos procedimentos da geometria possibilitam o desenvolvimento de habilidades de síntese e análise. O domínio do vocabulário geométrico proporciona a ampliação da comunicação e compreensão das situações relacionadas ao espaço. (...) O desenvolvimento do pensamento geométrico propicia entender o mundo e adquirir formas de apreciar a natureza e a arte em todas as suas manifestações, na medida em que as estruturas geométricas

> permeiam o universo natural e estético (RIO GRANDE DO SUL, 2009, p.38).

Neste texto, a Geometria é a ciência que permite o individuo reconhecer o mundo a sua volta em formas permitindo que ele próprio cria suas conjecturas sobre elas. Mas para que o individuo possa estender esse conhecimento no mundo que o rodeia é preciso começar na sala de aula a trabalhar esse olhar geométrico.

O ensino da Matemática nos dias atuais deve estar vinculado com as aplicações que os alunos vivenciam, e dessa forma eles compreenderam a importância e a necessidade de aprender conceitos fundamentais da Geometria, como as questões que envolvem os conceitos e representações, numéricas ou não, de Área.

2.2 CONCEITO DE VOLUME

De modo análogo ao explicado, anteriormente, em Conceito de Área, será explicitado aspectos sobre as definições de Volume sem, necessariamente, haver preocupação com uma forma geométrica específica, mas sim com uma forma generalizada de determiná-lo, para qualquer sólido ou corpo.

Intuitivamente, pode-se definir Volume como o espaço ocupado por um sólido, e para dar resultado a essa quantidade de espaço por meio de um valor numérico, devem-se compará-la com uma unidade de medida, logo, o resultado dessa comparação será chamado de Volume.

LIMA (2006), em seu livro A Matemática do Ensino Médio, Volume 2, faz uso de uma forma bem simplificada; o cálculo de Volume por uma situação cotidiana,

> por exemplo, podemos medir o volume de uma panela tomando como unidade de medida uma xícara. Enchendo a xícara de água e vertendo na panela sucessivas vezes ate que esta fique completamente cheia, estamos realizando uma medida de volume. É possível que o resultado dessa comparação seja um número inteiro – digamos: 1 panela = 24 xícaras – mas é muito provável que, na última operação, sobre ainda um pouco de água na xícara. E como determinaremos essa fração? (LIMA, 2006, p. 279).

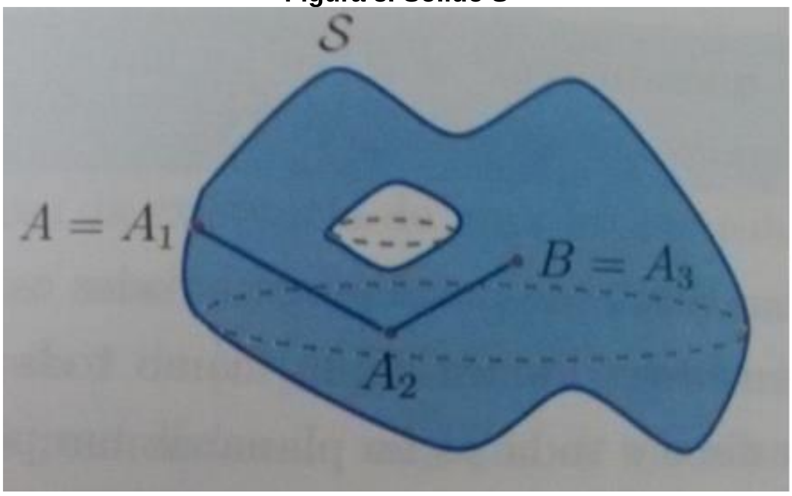
Esse tipo de situação é válido somente quando se busca uma aproximação de valor para o Volume. Quando se quer saber o valor exato, ele deixa de ser suficiente, ou porque os objetos em questão são muito pequenos, ou muito grandes, ou até mesmo, quando são sólidos maciços. E, a partir dessa concepção de cálculo de Volume para sólidos maciços é que se torna necessária outra unidade de medida padrão para tal comparação: a unidade de Volume é o cubo de aresta 1.

Como é necessário fazer o uso de algumas definições e conceitos que satisfazem às condições para os sólidos em geral, utiliza-se como base, as definições descritas por NETO (2013) através da definição:

> Um sólido é um conjunto *S* de pontos do espaço satisfazendo as seguintes condições:
> a) *S* é fechado, limitado e tem interior não vazio.
> b) Para todo A, B $\in$ *S*, existe uma poligonal $A_1A_2\ldots A_k$ ligando $A = A_1$ a $B = A_k$ e contida em Int(*S*) $\cup$ {A,B} (NETO, 2013, p. 392).

Do item a), entende-se que uma linha fechada forma uma região chamada de superfície. Intuitivamente, o item (b), pela definição acima, garante que todo sólido tem *um único pedaço*, conforme a Figura 3 abaixo,

Figura 3. Sólido *S*



Fonte: NETO (2013)

A partir da figura acima descrita, define-se que o Volume é o conjunto de pontos do espaço que formam uma figura, de modo que esta seja, totalmente, sólida, utilizando-se como unidade de medida um cubo de valor unitário, ou seja, a medidas de suas arestas que interceptam no mesmo vértice possuem valor 1, indicam que $V(1,1,1) = 1$. Mediante essa concepção, pode-se generalizar a ideia: dado um cubo C qualquer, cujas medidas de suas arestas são n, com n inteiro, pode ser decomposto, por planos paralelos às suas faces, em n^3 cubos unitários, logo, seu Volume é dado por $V = n^3$.

$$V(C)= n^3$$

Para o cálculo do Volume do bloco retangular de arestas a, b e c, também conhecido por paralelepípedo retângulo, seu Volume será expresso por V(a,b,c). Se os valores de a, b e c sejam naturais, então o cálculo de seu Volume consiste em expressar quantos cubos unitários "cabem" no bloco retangular. Nesse caso, o volume é proporcional a cada uma de suas arestas, ou seja, ao se multiplicar uma de suas dimensões por um número natural n, o seu Volume também ficará multiplicado por n.

$$V\text{ (na, b, c)} = \text{n}V\ (a, b, c)$$

Desse modo, conclui-se que o Volume ocupado por um determinado corpo ou objeto pode ser obtido pelo produto de suas dimensões.

2.3 A RELAÇÃO ÁREA E VOLUME EM EXEMPLOS DE SITUAÇÕES COTIDIANAS

Algumas atividades importantes da vida dependem da Área de Superfície; outras, do Volume; outras, das dimensões lineares e; outras ainda, das várias combinações entre as três.

O fato em questão é determinar se há alguma relação entre elas, se uma interfere no comportamento da outra, ou ainda, se existe uma proporcionalidade regular para estas.

Para dar resposta a essas questões, vamos analisar alguns exemplos práticos, alguns deles, até observados em situações cotidianas, e que, por muitas vezes, passam despercebidos a olhos desatentos.

O primeiro exemplo apresentado será adaptado de DAWKINS (2003), que faz a seguinte comparação:

> Se um ovo de avestruz é três vezes maior que um ovo de galinha do mesmo formato, não será três vezes mais pesado, mas sim 3 x 3 x 3,

> ou 27 vezes mais pesado. Ou ainda, se um ovo de galinha servir de desjejum para um homem, um ovo de avestruz será desjejum para um pelotão de 27 homens (DAWKINS, 2003, p.125).

Ao se referir que tal ovo de avestruz é três vezes maior que o ovo de galinha, o primeiro pensamento que vem em mente, e de forma automática, é de que apenas uma das suas dimensões será aumentada, dando essa impressão de que seu peso será apenas o triplo, mas não se nota, de imediato, que essa comparação de “triplo” está relacionada a três dimensões, comprimento largura e altura, portanto, triplicando ambas as dimensões, chegando ao total de 27 vezes maior.

Observa-se que o Volume, e, portanto seu peso, aumenta à terceira potência (ao cubo) das dimensões lineares. Desse modo, já se nota a questão da desproporcionalidade na comparação de Volume com uma unidade linear de comprimento.

Outro exemplo similar, adaptado de DAWKINS (2003), faz uma nova comparação a respeito dessa proporcionalidade, que engana o observador:

> Suponha que um produtor de fósforos, construa uma caixa de fósforos do tamanho de um homem, com dois metros de comprimento quando apoiada no chão. Uma caixa de fósforos padrão tem dois centímetros de altura, portanto uma pilha de cem caixas de fósforos seria da altura do caixote. Uma fila de cem caixas se estenderia somente de uma ponta à outra do caixote. E uma fileira de cem caixas de fósforos corresponderia a sua largura. Então, se você preenchesse o caixote com caixas de fósforos, quantas caberiam? A resposta é 100 x 100 x 100, ou 1 milhão. Por outro lado, o caixote é somente cem vezes maior que uma caixa de fósforos comum, e é isso que o inocente olho humano estimaria. Mas, por outro lado, é 1 milhão de vezes maior e comportará pelo menos 1 milhão de vezes mais fósforos (DAWKINS, 2003, p.127).

O mesmo autor ainda explica que, supondo que a caixa de fósforos gigante seja feita do mesmo tipo de papelão que uma caixa de fósforos comum, qual é o preço relativo do papelão? Isso não depende do Volume, nem das dimensões lineares, mas da Área de Superfície. A caixa gigante não precisaria de um milhão de vezes mais papelão, mas meras 10 mil vezes mais.

A Área de superfície da pequena caixa de fósforos padrão é muito maior em relação ao seu peso do que a área de superfície da caixa gigante. Se você picasse uma caixa de fósforos pequena, preencheria outra de fósforos pequena por inteira com o papelão cortado. No entanto, se picasse uma caixa de fósforos gigante, o papelão cortado mal seria notado no fundo de outra caixa de fósforos gigante.

A razão entre Área de Superfície e Volume se traduz em uma quantidade muito importante: “Para cada vez que se eleva o Volume ao cubo, a Área é elevada ao quadrado”, pois é de comum senso de que quando se calcula a Área de uma superfície, utilizam-se apenas duas dimensões, mas quando se calcula o Volume, serão três as dimensões do mesmo objeto. Parece um tanto confuso, mas ao se analisar com paciência tudo isso faz sentido.

A Área é, usualmente, o produto de suas duas dimensões, portanto, se as dimensões são dobradas, o resultado final será o quadrado do valor inicial. Já o Volume, é o produto de suas três dimensões, logo, o cubo do valor inicial, antes de serem alteradas as suas medidas.

A seguinte situação demonstra que a relação entre Área de Superfície e seu Volume é maior para os objetos pequenos do que para os grandes. Objetos pequenos têm maior superfície do que objetos grandes do mesmo formato e, é por esse motivo que, quando se compara o preço de uma caixa de sabão em pó de um quilograma com outra caixa de meio quilograma, nota-se que o preço destas, por muitas vezes, não se reduz a metade.

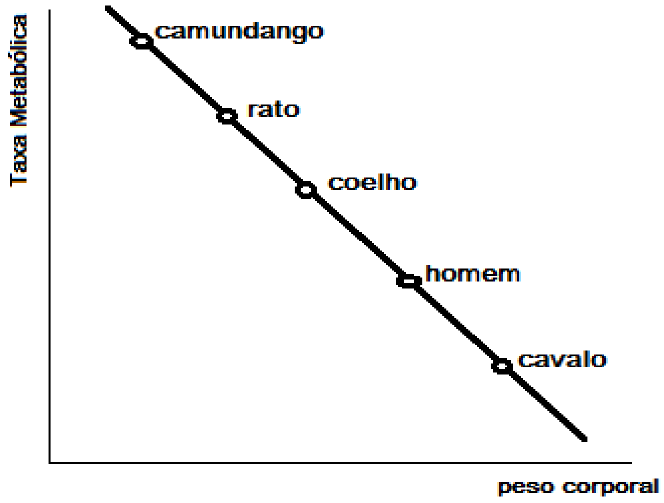
Esse fato é explicado que ao se igualar o Volume, são necessárias duas caixas de meio quilograma para se obter uma de um quilograma. Mas, por outro lado, comparando a quantidade de material usado na fabricação dessas caixas, percebe-se também que essa quantidade é desproporcional, pois duas caixas menores, que juntas comportam o mesmo Volume da caixa maior, possuem mais material de que a de um quilograma. Se de fato possuem mais materiais, maior será seu custo.

Outra observação com relação a essa desproporcionalidade de Volume e Área quando comparados ao tamanho dos objetos, é encontrado nas várias e inúmeras contribuições da Geometria Plana e Geometria Espacial para estudos da Biologia e da Química.

O exemplo comentado a seguir é uma adaptação de uma publicação de MAGALHÃES (2011), que se refere à Taxa Metabólica, termo biológico que se refere à quantidade de energia (calorias) que um corpo necessita para desempenhar suas funções vitais, ou seja, para manter-se vivo.

Para tal comparação, analisa-se a Figura 4.

Figura 4. Relação taxa metabólica x peso corporal



Fonte: http://salabioquimica.blogspot.com.br/2011/06/geometria-da-vida-relacao.html

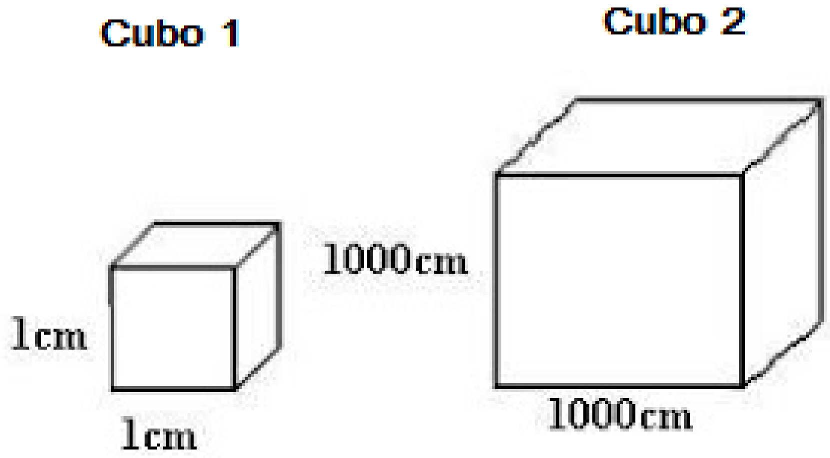
A Figura 4 mostra a relação existente entre o peso corporal e a taxa metabólica de alguns animais. Nota-se que existe uma ordem crescente com relação ao tamanho do corpo desse animal, e, consequentemente, uma decrescente em relação a sua taxa metabólica.

Analisando o gráfico, é possível perceber que o camundongo tem maior taxa metabólica que o cavalo, um animal de grande porte em comparação ao tamanho de um camundongo. Mas por que o camundongo apresenta maior taxa metabólica que o cavalo? A resposta está na relação Superfície/Volume.

O camundongo apresenta menor Superfície e menor Volume que o cavalo. Entretanto, a relação Superfície/Volume do camundongo é maior do que a do cavalo. Por quê? Para responder a essa pergunta, primeiramente, serão feita algumas comparações matemáticas entre o Volume de alguns sólidos, e para tal comparação usa-se, basicamente, o cubo, pois se trata de uma forma mais simples e que não perde sua generalidade na questão do Volume.

Considere a Figura 5 abaixo, que mostra um cubo de 1cm de lado e outro, de 1000 cm de lado.

Figura 5. Comparação entre Cubo de aresta 1cm e Cubo de aresta 1000cm



Fonte: http://salabioquimica.blogspot.com.br/2011/06/geometria-da-vida-relacao.html

Com base na figura acima, é possível calcular o Volume de cada cubo, a Superfície de cada cubo e a razão Superfície/Volume entre ambos.

Do Cubo 1:

a) Volume $(1cm)^3 = 1cm^3$

b) O cubo apresenta 6 faces, cada uma com a Área de $1cm^2$. Assim a Superfície total é $6x1cm^2 = 6cm^2$

c) A razão Superfície/Volume= 6/1 = 6

Do Cubo 2:

a) Volume $(1000cm)^3 = 1\ 000\ 000\ 000cm^3$

b) O cubo apresenta 6 faces, cada uma com a Área de $1000\ 000cm^2$. Assim a superfície total é $6x1000000cm^2 = 6000000cm^2$

c) A razão Superfície/Volume= 6000000/1000000000 = 6/1000

Note-se que houve uma desproporcionalidade muito acentuada comparando a razão entre Superfície/Volume para os dois cubos. Isso implica que quanto maior o Volume menor será essa razão.

Voltando a Figura 4, e usando a comparação matemática embasada pela Figura 5, acima exemplificada, é que se consegue dar uma explicação mais concisa a respeito de que a taxa metabólica é desproporcional ao tamanho de um corpo. Isso se explica pelo fato de que tanto os animais como as plantas crescem até atingir a altura adulta, e necessitam suportar a sua massa corporal nas diversas fases do seu ciclo de vida.

Para fazer a relação Superfície/Volume, usa-se os conceitos biológicos, os cálculos da matemática e de observações da energia calorífica irradiada por animais, definidos pela regra de Kleiber, chegando assim a uma constante metabólica. E, segundo HOPLEY e SCHALKWYK (2006), o peso metabólico relaciona-se com a massa corporal e tem em conta crescimento alométrico do animal, correspondendo ao peso vivo elevado a 0,75. Sendo assim, num animal com Volume superior, as células aumentam em grande número, e é pela Área de superfície corporal que o calor produzido pelo organismo é liberado.

Essa Área corporal aumenta ao quadrado da dimensão linear, enquanto o Volume, o peso do animal vivo, aumenta ao cubo. Nota-se, então, que a proporção Área de Superfície/Volume diminui à medida que o tamanho do animal aumenta.

Percebe-se, assim, que animais pequenos, apresentam uma maior proporção Área de Superfície/Volume, e apresentam ainda uma maior perda de energia do que animais maiores, portanto, o metabolismo não aumenta proporcionalmente ao Volume do animal.

De forma sintetizada, pode-se generalizar que, animais de pequeno porte possuem uma Superfície para perda de calor muito grande, quando comparados com animais de grande porte. Isso inclui não somente a superfície externa do corpo, mas também outra razão para o metabolismo de animais pequenos ser mais elevado é o fato de animais pequenos terem também órgãos menores.

Quando se diminui o porte de um animal, aumenta-se a sua área propensa a perda de calor, produzindo assim uma taxa metabólica maior do que animais de grande porte, que perdem menos calor. Esse é um dos motivos pelo qual animais de pequeno porte comem muito mais durante o dia.

Com base nos exemplos acima comentados, estes poderiam ser utilizados para demonstrar a importância que muitos conteúdos matemáticos têm para tantas outras disciplinas, nesse caso a Biologia, mostrando que a Área e o Volume não são conteúdos isolados da Matemática. Por outro lado, é necessário que os alunos compreendam como essas grandezas se comportam diante de uma determinada situação para que possa estendê-los a outras áreas do conhecimento.

Com os exemplos anteriores, os alunos podem desenvolver sua capacidade de comparação entre ambas as grandezas se existem uma relação ou não, ou de como instigá-lo a pensar essa relação e perceber a sua desproporcionalidade.

Essa é uma questão faz os alunos pensarem, erroneamente, que todas as relações matemáticas são diretamente proporcionais, mas quando se estuda algumas situações do cotidiano, ou até mesmo situações problemáticas de outras áreas do ensino, é que se percebe que a necessidade dessa distinção é muito importante, caso contrário, erra-se e se é enganado pelo Pensamento Proporcional. Neste sentido, concordamos com MIORIN (1999), quando afirma que a Matemática deve ser vislumbrada pelo aluno, pois

> as condições dos problemas devem ser as mesmas da vida real. Os problemas devem ser propostos de acordo com ocupações e interesse da classe, de modo que os alunos, sentindo a necessidade de resolvê-los, se apliquem à solução, movidos por verdadeiro interesse. Assim as contas que a criança faz para casa, no mercado, na feira, nas lojas, no armazém; os trabalhos escolares, movimento de cooperativas, jogos, esportes, excursões; a saúde da criança e de pessoas da família, as condições de saúde do bairro, incluindo serviços de saúde pública, despesas com receitas, dietas, remédios etc., fatos diversos que a criança presencia - tudo isso constitui assunto para problemas (MIORIM, 1999, p.90).

A partir do momento em que o aluno é instigado a relacionar o aprendizado de Matemática a situações concretas com as quais ele percebe sua necessidade e sua importância, é que a aprendizagem, realmente, pode ser efetivada.

3 SEÇÃO

3.1 PROPOSTA DE ENSINO

A proposta da pesquisa é contextualizar de forma dinâmica os conteúdos de Área e de Volume através da releitura de uma obra literária apresentada na forma de um filme, pois é algo diferenciado a trabalhar e, envolve a questão da visualização das grandezas envolvidas no processo.

O interesse surgiu diante da preocupação em mostrar que a Matemática não é uma ciência isolada, e para que ela realmente faça sentido para os alunos é necessário mostrar a sua aplicabilidade e a sua importância para as demais disciplinas.

A contextualização da pesquisa vem ao encontro do conteúdo de Geometria na turma de 2° ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública da cidade de Capanema, estado do Paraná.

A pesquisadora é também professora da disciplina de Matemática da turma participante da pesquisa.

A escolha da turma foi motivada pela miscigenação de alunos oriundos de várias localidades. Essa diversidade na origem dos alunos, poderia propiciar uma discussão mais rica dos temas abordados na pesquisa.

São alunos de zona rural, de periferia e do centro da cidade e, inclusive alunos de outros estados brasileiros, devido ao fato de que no município, onde se localiza o colégio, esta sendo construída uma usina hidrelétrica que fornece emprego para uma determinada demanda.

A partir das informações, desenvolveram-se atividades visando verificar o nível de compreensão e de aplicabilidade que os alunos demonstram, ao estender suas ideias sobre os conceitos de Área e de Volume quando instigados a pensar em situações do seu próprio cotidiano.

É preciso verificar se existe compreensão no desenvolver do conteúdo, e o modo pensado em fazer essa análise de aprendizado foi a partir de atividades que envolvam desde os conceitos formalizados pelos alunos até o reconhecimento das relações entre Área e Volume em objetos ou corpos que possuam ou não uma forma geométrica específica. Inclusive, de como é possível, encontrar uma unidade de medida para comparação sem que haja a necessidade de valores numéricos ou de dimensões.

As pessoas vivem imersas num mundo de formas e, basta olhar ao redor para confirmar essa percepção e, quando se pensa em Geometria, reporta-se a algumas imagens e conceitos. Sabe-se que a Geometria, segundo FERREIRA (1999) é a

> ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos" ou ainda "um ramo da matemática que estuda as formas, plana e espacial, com as suas propriedades, ou ainda, ramo da matemática que estuda a extensão e as propriedades das figuras (geometria Plana) e dos sólidos (geometria no espaço) (FERREIRA, 1999, p.983).

E a partir de experiências vivenciadas, em sala de aula, que se verifica, por parte dos alunos, a grande dificuldade, principalmente, no Ensino Médio, quando se trabalha com o conteúdo da Geometria Espacial, em especial, em relação à visualização de um objeto ou corpo tridimensional, e a influencia dos conhecimentos básicos da Geometria Plana, que podem interferir nas relações existentes entre ambas as grandezas.

Constata-se que, sem a visualização ou compreensão das relações entre as grandezas, o entendimento do conteúdo torna-se bastante complexo e obsoleto. Muitas vezes, o aluno desenvolve os cálculos de forma mecanizada, não estendendo a ligação dos conceitos a novas situações, principalmente, se elas estiverem fora do contexto escolar.

Muitas vezes, o ensino da Geometria se apresenta de forma isolada das demais disciplinas, impedindo que o aluno reconheça a importância desse saber matemático e como ele se aplica em outras áreas do conhecimento. MACHADO (2003) afirma que o ensino de Geometria não recebe sua real importância; a importância que os demais temas do currículo recebem.

Como é no Ensino Médio que essa situação é ainda mais agravante, busca-se propor uma perspectiva para que os alunos consigam desenvolver sua percepção espacial e sua visualização, que se fazem tão necessários para que a Geometria seja a conexão didática pedagógica da Matemática e das demais áreas do conhecimento, principalmente, no que se diz respeito às relações de Área e de Volume. Nesse sentido, KALEFF (2003), comenta que

> “a visualização, a análise e a organização informal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito”. A preocupação com a visualização em geometria é citada pela autora (idem, p.15), baseada em pesquisas em Educação Matemática que (...) apontaram para a importância de se incentivar nos meios educacionais o desenvolvimento de habilidades de visualizar (KALEFF, 2003, p.14).

Muitos alunos demonstram aprender determinados conteúdos por meio de manipulação de objetos; já outros, mostram ter melhor entendimento do processo quando o conteúdo é exposto com a visualização de imagens e de objetos. Para FERREIRA (1999), visualizar é “formar ou conceber uma imagem visual, mental de (algo que não se tem ante os olhos no momento)” e visualização “ato ou efeito de visualizar” ou “transformação de conceitos abstratos em imagens real ou mentalmente visíveis”.

Esse estudo tem, portanto, o objetivo de oferecer uma perspectiva para o ensino conciso da Geometria, ou seja, que a pesquisa possibilite aos alunos analisarem as formas planas e especiais bem como as suas características de forma mais critica estabelecendo conexões e integração entre diferentes temas da Geometria e outras áreas do currículo e do conhecimento.

Percebe-se que, por muitas vezes, o ensino não supre as deficiências dos alunos, no quesito falta de percepção das dimensões e das proporções, no que diz respeito à Área e ao Volume.

Tal falha pode ser justificada por alguns motivos, dentre tantos outros, a falta de tempo, ou seja, o número reduzido de aulas em algumas séries/anos, impedindo que o professor, por muitas vezes, consiga acrescentar algo diferenciado em suas atividades, e outro seria a falta de criatividade do profissional em ensinar a Matemática de uma forma diferenciada.

Diante das situações apresentadas, é que a proposta se torna uma alternativa para mostrar que existem meios de minimizar os impactos causados por tais falhas.

Na pesquisa serão trabalhadas as questões das proporções encontradas nos tamanhos dos personagens principais da obra, *Viagens de Gulliver*, Gulliver e os liliputianos, e de como elas podem ser confundidas pelos alunos, quando estes se deixam influenciar pelo Pensamento Proporcional.

Uma das questões a ser trabalhada na pesquisa, baseia-se na estória citada no livro de SWIFT (1726), que será contada resumidamente na próxima seção, é o momento que Gulliver desacordado é encontrado pelo povo de Lilliput.

Na estória, pela noção da altura dos liliputianos, pode-se fazer uma estimativa da altura de Gulliver, quando ele é amarrado e avista o pequenino que o amarra. Ele percebe "tratar-se de uma criatura humana, cuja altura não chegava a 6 polegadas" e pela quantidade de comida necessária para alimentá-lo, como constata a personagem:

> "(...) os matemáticos de Sua Majestade,havendo tomado a altura do meu corpo por meio de um quadrante, e verificado que ela excede a dos deles na proporção de doze para um, deduziram, da semelhança dos nossos corpos, que o meu devia conter pelo menos 1728 dos deles, e exigir, conseguintemente a quantidade de alimentos necessária a sustentação de igual número de liliputianos" (SWIFT, 1726, p. 39).

Tendo como base os dados, citados na obra de SWIFT (1726), é possível fazer com que os alunos calculem a altura estimada de Gulliver, pois, tomando-se como referência à proporção doze para um, é possível verificar que cada uma das suas dimensões (altura, comprimento, largura) é multiplicada por doze, ou seja, para compor um Gulliver é preciso colocar doze liliputianos em cada uma das dimensões, totalizando, ao completar o corpo da personagem, 1728 homenzinhos. Isso sugere que para se chegar ao Volume de um corpo qualquer, tem-se que desenvolver o produto de suas dimensões.

Pretende-se apresentar uma perspectiva para o ensino de Área e de Volume fazendo uma relação do conteúdo com situações do cotidiano que, muitas vezes, passam despercebidas pelos alunos, ou que até podem ser percebidas, mas os alunos, podem não compreender as principais relações e os conceitos do conteúdo dessa proporção equivocada encontrada.

Ao se comparar uma grandeza linear com o valor de seu tamanho e de sua superfície, passam a não serem justificados os valores das grandezas reais, ou seja, os alunos desconsideram que há mais de uma dimensão envolvida no processo. Isso ocorre não só com os alunos, mas com a maioria dos indivíduos, em termos gerais de observação de Área e de Volume. O resultado equivocado surge quando os alunos não visualizam o processo, e consideram apenas o pensamento proporcional incutido em seu raciocínio, aparentemente, lógico.

O objetivo dessa pesquisa é mostrar que a Matemática não é apenas uma ciência repleta de números e de formas, mas de relações importantes, que explicam o mundo e os fenômenos existentes, trazendo um significado para aquilo que parece ser entendido somente por grandes gênios.

A Matemática pode ser simples para aquele que quer aprender, desde que aquele que ensina tenha dedicação pelo que faz. Ensinar é uma arte e são poucos os que são apreciadores dessa arte. O professor, por sua escolha, deve ter apreço por ensinar, não, simplesmente, passar o conteúdo por obrigatoriedade do currículo, mas pela necessidade da transmissão e de aquisição do conhecimento. Um trabalho mais aprofundado exige que o professor tenha consciência disso.

A atividade desenvolvida nesta pesquisa pretende proporcionar uma metodologia diferenciada a fim de que os alunos, de 2° ano do Ensino Médio, percebam no conteúdo de Geometria Plana e Espacial, a relação entre as grandezas envolvidas, haja vista que essa é a série em que o currículo apresenta tal conteúdo de forma mais aprofundada. Assim, pretende-se instigar nos alunos o gosto pela aprendizagem desse conteúdo, a partir de situações presentes nos aspectos globais e/ou corriqueiros de sua vida.

É necessário fazer uma avaliação diagnóstica com os alunos, quais são seus conhecimentos prévios sobre o conteúdo e, a partir de alguns problemas vivenciados em seu cotidiano, verificar se eles, realmente, fazem a distinção real de desproporcionalidade entre Área e Volume, quando comparados a uma medida linear, como a ingenuidade do cérebro pensa e engana a racionalidade.

É bastante comum os alunos tentarem desenvolver a habilidade de visualização para executar diferentes processos mentais, para interpretação de diferentes situações. Contudo, os materiais concretos e manipuláveis permitem ver o objeto em estudo, mas não garantem a habilidade de visualização, que segundo KALEFF (2003) “não é inata a todos os indivíduos”. Diante dessa constatação, e por haver alunos que visualizam e outros que não visualizam, é que se espera encontrar recursos em diferentes materiais.

A professora e pesquisadora ao tentar aguçar a curiosidade e a oportunidade de desenvolver a percepção sensorial no conteúdo de Área e Volume, a partir de uma obra da literatura mundial, *Viagens de Gulliver*, trabalhada com os alunos, observando a linguagem retratada no filme, parece contemplar os quesitos pensados para essa pesquisa e, que será mais proveitoso, por ser uma atividade também lúdica.

Viagens de Gulliver é uma obra clássica da literatura mundial, escrita por Jonathan Swift, e que trata de uma ácida crítica social, escrita em 1726. O livro é dividido em quatro partes: Parte I: Uma Viagem a Lilliput; Parte II: Uma Viagem a Brobdingnag; Parte III: Uma Viagem a Laputa, Balnibarbi, Luggnagg, Glubbdubdrib e Japão; Parte IV: Uma Viagem ao país dos Houyhnhnms.

A parte que será trabalhada com os alunos é a Parte I: Uma viagem a Lilliput, retratada no filme *As Viagens de Gulliver*.

3.2 SINOPSE DA ESTÓRIA

Devido a questões relacionadas a tempo e a disponibilidade de material, a obra *Viagens de Gulliver*, será trabalhada com os alunos em sala de aula em forma de filme. A obra impressa será utilizada como referencial bibliográfico para a pesquisa e também, disponibilizada aos alunos como fonte de consulta.

Figura 6. Gulliver chega à ilha de Lilliput

Fonte: http://viagensdegulliver.blogspot.com.br/p/viagem-lilipute.html

A Figura 6 retrata uma das cenas mais impressionantes do livro, o momento em que os pequenos moradores da ilha encontram aquele ser gigantesco, que até então, nunca havia sido visto por nenhum liliputiano.

Após dar início a sua insólita viagem, Lemuel Gulliver é o único sobrevivente de um naufrágio. Ao conseguir alcançar uma praia desconhecida, exausto, ele desaba e adormece. Ao acordar, vê-se amarrado ao chão, até os cabelos, e é surpreendido por um homenzinho empunhando um arco e flecha, que Gulliver avista do alto de seu queixo. Logo, Gulliver está na mira de dezenas, ou centenas de criaturinhas nervosas. Esse, então, é o primeiro encontro entre o cirurgião aventureiro e os habitantes desconhecidos que almejava conhecer.

O livro conta ainda, que depois de aprisionado, Gulliver, promete aos pequenos um bom comportamento, convictos de suas promessas, eles o libertam e o convidam a residir em Lilliput, tornando-se o morador predileto do rei que lhe dá permissão para andar pela cidade, desde que ele não machuque os demais moradores.

Primeiramente, os liliputianos são hospitaleiros com Gulliver, pois têm receio da ameaça que seu tamanho representa a eles. Mas, os liliputianos, logo se mostram um povo que gosta de exibições de autoridade e de poder, e são suscetíveis a criar confusões por coisas triviais. Por exemplo, qual lado de um ovo que uma pessoa deve quebrar vira a base de uma divisão política profunda dentro da nação.

Gulliver ajuda os liliputianos a roubar os navios de seus vizinhos, da ilha de Blefuscu, mas, quando Gulliver se recusa a ajudar os pequenos a tomar posse da ilha, tornando-a uma província de Lilliput, o rei o acusa de traição. Além de traição, o rei o acusa de outros crimes, como urinar na capital quando ele estava apenas apagando um incêndio e salvando várias vidas. Ao ser julgado, o gigante é declarado culpado, e sua sentença é a de ser cegado. Amedrontado, e com a ajuda de um amigo na corte, ele foge para Blefuscu, onde encontra um barco abandonado que mais tarde é avistado por um navio que o leva de volta para casa (Adaptado de SWIFT, 1726).

3.3 *AS VIAGENS DE GULLIVER*, O FILME, E SUA FUNÇÃO PEDAGÓGICA

Como o assunto em questão é a relação de Área e de Volume e como essas duas grandezas se comportam diante de uma medida linear, busca-se no filme “As Viagens de Gulliver”, direção de Rob Letterman, que é uma adaptação do livro, mostrar a comparação entre a estrutura corporal (Volume) e a superfície que reveste tal corpo (Área), tomando uma medida referencial, o porte de um pequeno liliputiano.

A escolha pelo filme, citando apenas alguns trechos relevantes do livro, é devido ao fato de ser uma versão atualizada do romance, no qual as personagens mudam suas profissões e seus estilos de vida, em decorrência da própria época em que se passa a história.

O foco principal do estudo é, depois de assistir ao filme, verificar se as comparações de proporcionalidade realizadas entre Gulliver e os liliputianos, atendem aos conceitos matemáticos trabalhados nos conteúdos de Área e de Volume. Observar com os alunos, a imagem de Gulliver em relação à imagem dos liliputianos, e analisar os dados utilizados para os cálculos apresentados, serve para assimilar o entendimento do conteúdo, além de, possibilitar aos alunos, a clareza suficiente para que consigam fazer essa relação, entendê-la, e estendê-la para outras situações vivenciadas em seu dia a dia.

Os alunos precisam mostrar segurança em compreender que o tamanho e a superfície de um corpo não aumentam ou diminuem na mesma proporção, não se deixando enganar pela variação de uma dimensão linear.

3.4 O CONTEXTO DO FILME E AS CENAS TRABALHADAS

Pensando no bom aproveitamento do tempo, trabalhou-se com as turmas elencadas alguns trechos do filme, e algumas citações do livro, pois como a escola precisa cumprir uma grade curricular e datas estipuladas no Calendário Escolar, essa metodologia apresenta-se mais adequada e não afeta o objetivo do trabalho, que se propõe a despertar um olhar geométrico, na visão dos alunos, ao relacionar as proporções de Área e de Volume dos corpos. O trabalho vem ao encontro à aplicabilidade do conteúdo que estava sendo estudado pela turma e reforça o conhecimento dos alunos, sendo uma atividade dinâmica para aprender tal assunto.

Como já mencionado anteriormente, o filme “As Viagens de Gulliver” que foi trabalhado com os alunos é uma releitura atualizada do clássico de SWIFT (1726). O personagem principal do filme, Lemuel Gulliver, trabalha em uma grande editora de jornal como entregador de correspondências. Muito acomodado e sempre brincalhão, ele sente-se desapontado, quando um novo funcionário, que vem trabalhar no mesmo setor que ele, logo em seu primeiro dia, é elevado de nível e se torna seu supervisor. Lemuel, que guarda uma paixão secreta pela fascinante editora Darci, ao tentar fazer-lhe um convite para sair, acaba se atrapalhando. Na confusão, ele aceita, sem saber, o desafio de escrever um artigo sobre o “Triângulo das Bermudas” e suas ilhas vizinhas.

Lemuel, muito confiante, como marinheiro de primeira viagem, já em alto mar, prende sua atenção em coisas triviais e não percebe uma grande tempestade se aproximando. Uma grande tempestade o leva para uma terra desconhecida, habitada pelos pequenos liliputianos.

No pequeno reino, pacato de novidades, eis que surge uma gigantesca fera, Gulliver, que se torna o centro das atenções e uma grande ameaça, por do seu gigantesco tamanho.

No filme, ao se comparar a um liliputiano, Gulliver, tomando como base que os pequenos tenham a altura de um homem de 1,80m, imaginando-se que tenha se tornado um gigante, Gulliver tem a impressão de um ser humano com 30m de altura e, esse valor servirá como referencial para o desenvolvimento das atividades.

Para as atividades propostas aos alunos, foram comentadas algumas cenas e analisadas algumas medidas citadas no filme. Para que o leitor possa compreender melhor o seu desenvolvimento, mencionaremos as cenas elencadas.

CENA I – O GIGANTE SALVA O REI

A cidade sofre um ataque de seus maiores inimigos, os Blefuscudianos. Para distrair a atenção do gigante e do exército, os Blefuscudianos começam um incêndio na cidade, permitindo, assim, que o castelo esteja desprotegido.

No incêndio, ficam presos o rei Theodor e seu criado, desesperados, ao temer sua morte, o povo implora a ajuda de Gulliver. Despreparado e sem equipamentos para apagar tal incêndio, o gigante, depois de pensar e não ver alternativa, baixa suas calças e urina sobre as chamas.

Primeiramente, o ato causa espanto, por ser algo insolente, mas ao ver o rei agradecido, por ser salvo, e feliz pela atitude do gigante, o povo aplaude e saúda Gulliver.

CENA II – O GRANDE BANQUETE

Em comemoração ao salvamento do rei, Gulliver é convidado a participar de um jantar para homenagear sua atitude de apagar o incêndio. Ato inusitado, mas certeiro.

O banquete foi realizado no jardim em frente ao palácio, contando com a presença de toda a corte e os homens mais corajosos do reino, entre eles, estava sentado, na ponta da mesa, Gulliver que parecia ser maior que o tamanho da própria mesa. Seus talheres eram pequeníssimos, comparados ao seu tamanho, mas mesmo assim o gigante se sentia muito feliz por ter o privilégio de compartilhar de uma refeição com aqueles que, no início, o chamavam de fera.

CENA III – O TRAJE DO GENERAL

Após seu grande ato heróico de salvar o rei, do incêndio causado pelos inimigos, Gulliver recebe um voto de confiança e passa a ser adorado pelo povo de Lilliput. Confiante de que o gigante seria uma grande arma de defesa contra os blefuscudianos, o rei o nomeia como general das tropas de defesa. Para identificar seu novo cargo, e também para se uniformizar, como os demais homens que compunham o exército de Lilliput, os pequeninos confeccionam uma imensa roupa para o gigante.

4 SEÇÃO

4.1 O CONTEÚDO ÁREA E VOLUME CONTEXTUALIZADO

Nessa seção será explanado o modo de como foi realizada a aplicação dos questionários da pesquisa, a sua divisão e os critérios de respostas estabelecidos pela pesquisadora. Os critérios variam de acordo com as questões, e são mencionados na sequência de cada uma delas.

A pesquisa foi aplicada em três momentos; Primeiramente, foram passados os trechos do filme acima comentados, devido à questão do tempo e também por serem as cenas que mais se aproximam da temática trabalhada, de modo que os alunos conseguissem analisá-las e ter embasamentos suficientes para desenvolver a prática; No segundo momento, após assistirem aos trechos do filme, foi aplicado um questionário sobre os assuntos elencados nas cenas, e os alunos puderam descrever as questões, utilizando-se de seu pensamento proporcional para concluí-las; Por último, foi à etapa de comparar as respostas e verificar se o objetivo esperado foi alcançado, fazendo com que os alunos tivessem a percepção de que as relações de Área e de Volume não são grandezas diretamente proporcionais a uma medida linear. Para esse cronograma de atividades foram elencadas 8 horas/aula.

4.1.1 Momento 1 - No primeiro momento, com a autorização da Direção e Equipe Pedagógica do colégio que foi realizada a pesquisa, nas próprias aulas de Matemática, foi disponibilizado o uso do projetor para que a turma do 2°A pudesse assistir às cenas elencadas do filme.

Como na grade curricular, o número de aulas de Matemática, nessa turma, é de duas aulas semanais, e devido à organização do horário com os demais professores e suas disponibilidades, essas aulas não são geminadas, ou seja, são separadas, sendo cada uma delas trabalhada em dias diferentes.

Logo, as cenas foram passadas em dois momentos distintos; cena I, na primeira aula da semana e, antes de assistir, houve uma explicação do que seria trabalhado com a turma, no caso, um questionário sobre as situações apresentadas no filme; as cenas II e III, foram passadas na segunda aula da semana e, nas aulas seguintes, foi realizada a aplicação do questionário.

4.1.2 Momento 2 - No segundo momento, dividido em Introdução, Formalização e Aplicação, foi exposto o desenvolvimento da metodologia utilizada nessa atividade diferenciada:

4.1.2.1 Introdução - A ideia de utilizar, com a turma de 2° do Ensino Médio, parte do pressuposto que, nessa série, o aluno já consegue ter mais clareza e conhecimento, o suficiente para diferenciar e conceituar Área e Volume. Além de ser o conteúdo de Geometria Plana e Espacial, o conteúdo específico dessa série, os alunos já vem de uma formação gradativa em que foram elencados tais assuntos e, dessa forma, sua percepção proporcional já deve se encontrar mais desenvolvida.

No momento em que é cobrado o conhecimento de Área e de Volume, realmente, pode-se ter clareza de como os alunos aprendem tal conteúdo, e se conseguem fazer a relação entre ambos, quando aplicados em práticas vivenciadas no seu cotidiano. Por esse motivo, que a questão número 1, proposta a seguir, tem a intenção de verificar se o aluno faz o uso das relações matemáticas em seu dia a dia, e se ele sabe qualificar tais relações.

1- Pense que você gostaria de presentear uma pessoa, e esse presente seria um frasco de perfume.

a) Nesse caso, você precisaria embalar esse perfume, qual a ideia matemática que está associada à quantidade de papel necessário para fazer o embrulho?

b) Qual a ideia matemática que está por trás da quantidade de perfume que tem no frasco?

c) Essas duas ideias, nas quais você pensou para responder as perguntas anteriores, dependem de alguma característica do frasco para determinar a quantidade de papel necessário para o embrulho, e também para determinar a quantidade de perfume do frasco?

4.1.2.2 Formalização - Como comentado, anteriormente, o 2° ano do Ensino Médio é uma série em que o aluno aperfeiçoa noções básicas de alguns conceitos matemáticos, como Área e Volume e, nessa série, serão formalizados tais conceitos, pois é nesse nível que é trabalhado o conteúdo de Geometria Plana e Espacial, da base curricular.

Nas questões 1, 2 e 3, será verificado qual o entendimento prévio que o aluno demonstra sobre as noções de Área e Volume, e também, será avaliado se ele compreende as diferenças entre essas grandezas, usando como argumento a relação de dimensão.

1) O que você entende por Área de uma figura geométrica?

2) O que você entende por Volume de um sólido geométrico?

3) O que você entende por dimensão? Como você diferencia a idéia de Área e Volume através da dimensão?

4.1.2.3 Aplicação - Nessa etapa de questões, o aluno já assistiu as cenas elencadas do filme, que foi reproduzido em sala de aula para a turma, e terá embasamentos para respondê-las.

As cenas foram utilizadas como motivação para despertar uma relação visual de proporção. Após assistir, foram feitos alguns apontamentos sobre os itens mais atrativos e importantes para os alunos. Nesse momento, ainda foram definidos, a partir do senso comum, a noção que os alunos apresentaram sobre os conceitos de Área e de Volume, possibilitando-lhes uma melhor compreensão das cenas retratadas.

Espera-se que os alunos entendam que a definição de Área e de Volume depende da quantidade de dimensões, e que tais grandezas, Área e Volume, não variam, proporcionalmente, com relação a uma única medida linear (dimensão).

Para a questão de número 4, especificamente, os alunos precisaram demonstrar a importância de uma referência de medida para processar os cálculos.

4) Segundo informações do filme, Gulliver tem a impressão de ser um homem de 30 metros de altura, quando se compara a um liliputiano, portanto, quantas vezes mais alto é o gigante, em relação a um dos pequenos? Se fosse possível empilhar liliputianos até a altura de Gulliver, e se forçasse o primeiro da pilha a andar, será que ele conseguiria sair do lugar? E se saísse o que iria acontecer com a pilha de homenzinhos?

Na questão número 4, os alunos precisam demonstrar que a diferença das noções entre Área e Volume, é justamente, a quantidade de dimensões em que uma superfície é visualizada, que é diferente do número de dimensões em que é visualizado o Volume de um sólido. Esse pensamento deverá ser similar, para responder a questão de número 5.

5) A partir do que você descreveu sobre Área e Volume, quando se analisa a estrutura de um corpo qualquer, em quantas dimensões pode-se ver esse corpo, quando observada a Área e quando observado o Volume?

6) E quanto à confecção da roupa de Gulliver, qual critério poderia ser utilizado para determinar a quantidade de tecido, levando-se em consideração o tamanho dele? Justifique sua resposta.

7) Suponha que fôssemos construir uma estátua com a forma de um Gulliver, usando apenas estátuas de liliputianos. Quantos deles seriam necessários para construir essa estátua de Gulliver?

No caso da questão de número 5, os alunos precisaram pensar, por si só, a resposta para ela. Seguidamente, com o auxilio de Material Dourado, que tem disponível na escola e é de fácil manipulação, os alunos usaram do mesmo para reproduzir tal estátua, e puderam concluir se, realmente, seu pensamento inicial estava de acordo com o resultado alcançado, ao usar o material de apoio como auxilio.

4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise dos resultados foi realizada com base nas questões mencionadas anteriormente, comparando os critérios estabelecidos pela pesquisadora com as repostas fornecidas pelos alunos.

Esse foi o momento de contemplar os resultados descritos pelos alunos, e de verificar se o seu entendimento se aproximou dos critérios estabelecidos pela pesquisadora. A expectativa seria que eles demonstrassem segurança ao expor seus conhecimentos sobre os conceitos de Área e de Volume, e que fizessem essa relação de transferência de informação, ao observarem alguns objetos.

Iniciou-se a atividade pela ordem em que as questões foram apresentadas aos alunos, sendo assim, pela questão de número 1 da Introdução, *Pense que você gostaria de presentear uma pessoa, e esse presente seria um frasco de* *perfume.* Essa questão faz os alunos refletir sobre a quantidade de papel necessário para fazer um embrulho contendo um certo frasco de perfume sugerindo a ideia de Área e, na mesma questão, definir qual a ideia matemática que está por trás da quantidade de perfume que há no frasco, o Volume, analisando a estrutura do frasco.

Ainda usando as duas ideias, as quais os alunos pensaram para responder as perguntas anteriores, esperava-se que eles estabelecessem que as proporções de Área e de Volume dependem de alguma característica do frasco para que pudessem determinar a quantidade de papel necessário para o embrulho, e também para determinar a quantidade de perfume do frasco.

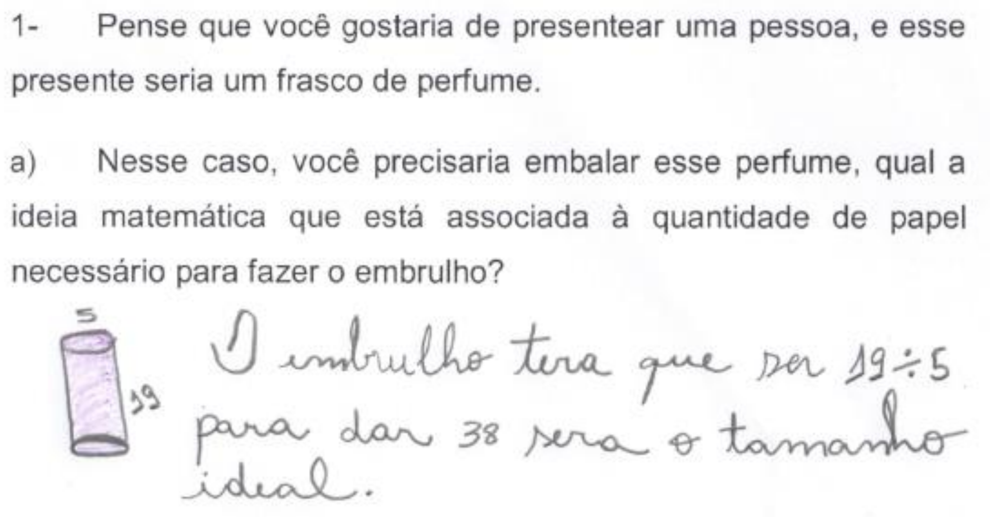
A questão apresentou algumas respostas não formais escritas, a partir da concepção dos alunos, sem o auxílio da pesquisadora. Algumas observações dos alunos se aproximaram da resposta adequada ao item (a), *Nesse caso, você precisaria embalar esse perfume, qual a ideia matemática que está associada à quantidade de papel necessário para fazer o embrulho?,* e as respostas foram: “O embrulho precisa ter a mesma área que o frasco”; “A área em m^2 ou em cm^2 de no mínimo a área externa do frasco de perfume”; “Para saber a quantidade de papel necessário para embrulhar este frasco de perfume, precisaríamos saber a forma do frasco... dessa forma, seria possível utilizar uma fórmula”.

A maioria dos alunos afirmou que para se ter uma boa aproximação da quantidade de papel necessário para produzir o embrulho, parte-se da necessidade de conhecer a forma geométrica que esse frasco possui, e ainda, mencionou unidades de medidas para essa quantidade, como cm^2 e m^2, que são as unidades de medidas mais utilizadas nos cálculos de Área.

Obviamente, surgiram algumas respostas inusitadas, e algumas que não estavam relacionadas à ideia de Área, e, sim, à de Volume, como: “usar Teorema de Pitágoras”; “calcular o volume”; “tem que calcular a altura, o comprimento e a largura para saber o tanto de papel para o presente que vai ser utilizado”; “O embrulho terá de ser 19/5 para dar 38, será o tamanho ideal”.

Algumas respostas não apresentaram logicidade no entendimento do conteúdo, como ilustração abaixo:

Figura 7. Resposta escrita por um aluno


1- Pense que você gostaria de presentear uma pessoa, e esse presente seria um frasco de perfume.

a) Nesse caso, você precisaria embalar esse perfume, qual a ideia matemática que está associada à quantidade de papel necessário para fazer o embrulho?

O embrulho tera que ser 19÷5 para dar 38 sera o tamanho ideal.

Fonte: Dados da pesquisa

Quando observado o item (b), *Qual a ideia matemática que está por trás da quantidade de perfume que tem no frasco?,* as respostas foram mais diretas e mais objetivas e, no geral, os alunos apresentaram a mesma linha de pensamento, respondendo: “seria o volume do frasco”; “tem que calcular o volume do frasco para saber a quantidade, e é usada essa fórmula: v = Ab.h”; “volume e capacidade, teríamos que saber o volume do frasco e convertê-lo para a capacidade”; “para saber a quantidade de perfume que vai no frasco de perfume precisamos usar a fórmula do volume, e depois transformar o resultado em ml”; “calculamos a quantidade por metros cúbicos (m^3)”; “mililitros (ml)”.

Interpretando esses resultados, demonstrou-se o quanto os alunos compreendem a concepção de Volume e conseguem ampliar essa idéia, quando relacionam tal grandeza com objetos simples do dia a dia, talvez, por ser um valor mais presente em suas ações. Por outro lado, percebe-se que a maioria dos alunos entende o conceito de Área, mas confunde quando precisa mostrar ou explicar sua aplicação. Muitos, ainda confundiram Área de uma superfície com as noções de Volume.

Quando se observa o item (c), *Essas duas ideias, nas quais você pensou para responder as perguntas anteriores, dependem de alguma característica do frasco para determinar a quantidade de papel necessário para* *o embrulho, e também para determinar a quantidade de perfume do frasco?,* a maioria dos alunos também apresentou a mesma linha de raciocínio.

Os alunos responderam pensando que para ser possível determinar a quantidade de papel para o embrulho e a quantidade de perfume que o frasco possui é necessário conhecer a forma e o tamanho desse frasco como referência, e algumas de suas respostas foram: “é questão de lógica, se o frasco é grande vai ter que utilizar um embrulho um pouco maior”; “sim, porque varia conforme o tamanho do frasco”; “depende do tamanho e do formato do frasco”; “sim, depende da dimensão desse frasco”; “Sim, pois se o frasco for em forma de cilindro, por exemplo, a área dele não será muito diferente de um cone, mas o volume do cone seria apenas 1/3 do volume do cilindro, fazendo grande diferença”.

Quanto às questões propostas à etapa da Formalização, pensando em verificar se, além de compreender o sentido prático dessas concepções, os alunos mostram ter compreensão do significado de Área e de Volume e se fazem alguma distinção entre ambas as grandezas, foi usando como argumento a relação de dimensão.

As respostas obtidas com a questão *O que você entende por Área de uma figura geométrica?* mostraram que os alunos possuem certa dificuldade em expressar seu entendimento e em formalizar um conceito, mesmo que informal, sobre o significado de Área. Alguns ainda confundiram a ideia de Área com a noção de Volume, como se verifica nas respostas obtidas: “Área é o tamanho da figura”; “Área é o espaço ocupado, e pode ser calculada usando a fórmula base x altura”, ou seja, o aluno talvez aprendesse de forma mecanizada o cálculo para figuras geométricas que apresentam uma forma bem definida, mas não compreenderia o seu significado.

Fazendo uma análise geral entre as respostas obtidas e a resposta condizente com os conceitos de Área e de Volume, percebe-se o quanto os alunos possuem dificuldades em fazer uma assimilação de conceitos matemáticos e, ainda, em fazer uma relação destes com exemplos práticos.

Diante dos fatos, percebe-se a necessidade que o professor trabalhe, quando possível, o conteúdo de Área utilizando exemplos práticos, figuras, situações diárias, para que os alunos tenham uma melhor formalização desse conceito.

Pois segundo DEWEY (1960) a formalização de conceitos pode representar para os alunos modelos de referência ou ainda, segundo o mesmo autor,

> os conceitos têm a capacidade de generalizar, para ampliar e transferir nossa compreensão de uma coisa a outra;..., representam uma totalidade de classe do conjunto de coisas, ..., possuem um significado estabilizado e permanente em diferentes contextos (DEWEY, 1960, p. 134).

Para o autor, é importante a participação da conceitualização dos alunos para que a intelectualização do conteúdo seja obtida através da prática e pela aplicação de atividades.

Por outro lado, observando ainda as respostas obtidas com a questão anterior, observamos que muitos alunos conseguiram desenvolver a conceitualização explicada pelo autor, demonstrando segurança em responder a essa pergunta através das respostas: “Área é o espaço bidimensional ocupado pela figura geométrica, ou seja, comprimento e largura”, outros ainda se aproximaram da resposta coerente, dizendo: “É o contorno da figura”; “É o tamanho de uma superfície”, no qual uma das respostas poderia ser “É a superfície de uma figura”.

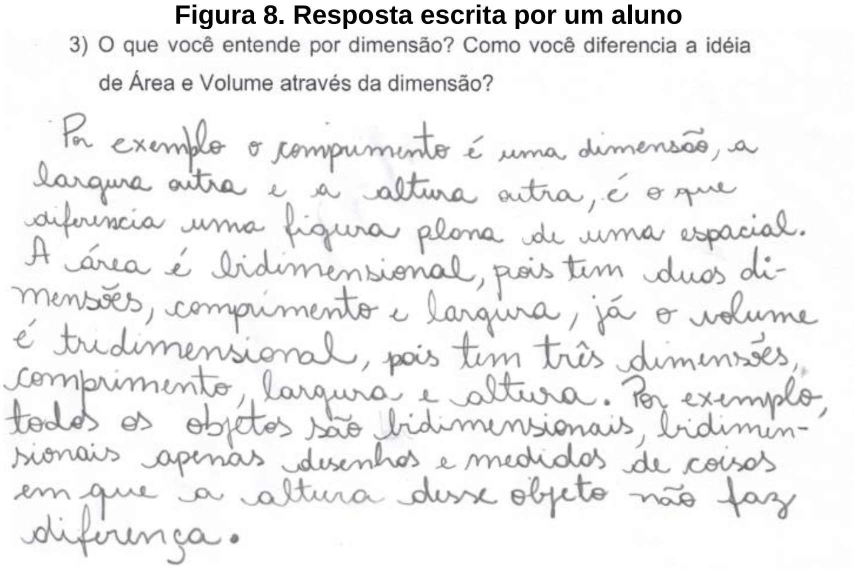
Quanto à questão *O que você entende por Volume de um sólido geométrico?,* que sugere a ideia de Volume, alguns alunos demonstraram possuir dificuldades em definir esse conceito, confundindo, de forma recíproca, com o conceito de Área, isso pode ser observado nas respostas: “O Volume calculado na área”; “O tamanho, a área que está sendo ocupada”; “o tamanho da área”.

Outros tentaram generalizar tal idéia respondendo: “É um prisma que possui duas bases idênticas, com faces laterais perpendiculares”, “V = Ab x h, essa é a fórmula para descobrir o volume, por exemplo da sala de aula”. No entanto, alguns alunos, em sua maneira simples, mostraram que conseguem ter um entendimento sobre a ideia de Volume: “O espaço tridimensional ocupado pelo sólido geométrico, ou seja, seu comprimento, largura e altura”, “O volume que há dentro, ou seja, a quantidade”, “Espaço ocupado por um líquido”, “O volume é a quantidade que contém dentro de alguma coisa”, “O espaço da figura”.

Novamente, pode-se perceber que muitos não possuem uma diferenciação clara entre o conceito de Área e de Volume, e confundem ambos. E quando foi pedido para eles definirem ambos, usando a idéia de dimensão, que foi o item pensado na questão *O que você entende por dimensão? Como você diferencia a idéia de Área e Volume através da dimensão?* pareceu ser uma informação que causou grande dificuldade, para a maioria dos alunos, de explicar suas ideias.

Com exceção de um aluno, que argumentou de forma muito clara seu pensamento, mencionando que: “Por exemplo, o comprimento é uma dimensão, a largura outra e a altura outra, é o que diferencia uma figura plana de uma espacial. A área é bidimensional, pois tem duas dimensões, comprimento e largura, já o volume é tridimensional, pois tem três dimensões, comprimento, largura e altura. Por exemplo, todos os objetos são bidimensionais, bidimensionais será apenas desenhos e medidas de coisas em que a altura desse objeto não faz diferença”.

Figura 8. Resposta escrita por um aluno


3) O que você entende por dimensão? Como você diferencia a idéia de Área e Volume através da dimensão?

Por exemplo o comprimento é uma dimensão, a largura outra e a altura outra, é o que diferencia uma figura plana de uma espacial. A área é bidimensional, pois tem duas dimensões, comprimento e largura, já o volume é tridimensional, pois tem três dimensões, comprimento, largura e altura. Por exemplo, todos os objetos são bidimensionais, bidimensionais apenas desenhos e medidas de coisas em que a altura desse objeto não faz diferença.

Fonte: Dados da pesquisa

Notou-se que o aluno teve segurança em descrever o seu entendimento, por mais que, provavelmente, tenha confundido o termo altura com profundidade, ele consegue diferenciar a medida da Área de uma Superfície e a medida de Volume de um sólido usando o conceito de dimensão.

Outros, não mostraram tal segurança em descrever a sua concepção sobre a pergunta, e descreveram respostas que mostram um grau de dificuldade de assimilação e de relação entre a Matemática aprendida em sala de aula e a sua aplicação fora desse contexto.

Pode-se verificar essa questão, analisando as seguintes respostas dadas pelos alunos: "Eu entendo por dimensão que é a profundidade da figura, quando há a possibilidade de ver todos os lados da figura". Nota-se que é uma resposta que precisa ser aperfeiçoada para apresentar uma melhor estrutura de clareza sobre Área e Volume, pois o aluno pode até, no seu conhecimento empírico, saber o seu significado, mas não consegue expressá-lo.

É a mesma situação verificada nas falas de outros alunos: "Dimensão é a altura de uma figura. Área você calcula o tamanho dessa figura e o volume você delimita o que cabe dentro de um determinado lugar ou figura", ou ainda, "Dimensão é a medida dos lados da figura. Através da dimensão descobrimos os volume e as áreas".

Observou-se que os alunos fizeram uma descrição, mas, muito confusa, quando se compara com a resposta condizente.

Por outro lado, a maioria dos alunos não soube relacionar a necessidade de haver uma referência, no que diz respeito ao valor e à quantidade de dimensões, para diferenciar Área e Volume, e descreveram respostas sem nenhum sentido, como: "Dimensão seria o tamanho de alguma coisa, a área é a superfície e o volume é a dimensão", "Dimensão tem que calcular o espaço que tem dentro do sólido geométrico".

A partir de tais análises, percebeu-se o quanto os alunos têm dificuldade de assimilação de conteúdos, de gravar informações aprendidas em séries anteriores que, no 2° ano do Ensino Médio, serão aprofundadas.

Percebeu-se ainda, que poderia haver uma mudança de concepção se for utilizado o material manipulável, servindo de motivação e possibilitando aos alunos uma visualização do processo e uma melhor fixação do conteúdo ensinado.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, BRASIL (1997), afirmam que processos de visualização possibilitam que os alunos desenvolvam um domínio geométrico, pois

> O aluno deve ser incentivado, por exemplo, a identificar posições relativas dos objetos, a reconhecer no seu entorno e nos objetos que nele se encontram formas distintas, tridimensionais e bidimensionais, planas e não planas, a fazer construções, modelos ou desenhos do espaço de diferentes pontos de vista) e descrevê-los (BRASIL, 1997, p.128).

Assim sendo, a exploração de formas é o principal meio para o desenvolvimento da segurança em estabelecer critérios geométricos.

Para a próxima etapa de análise de questões, a de Aplicação, os alunos precisaram, necessariamente, assistir ao filme. Sob orientação da pesquisadora, os alunos prestaram atenção nas informações de proporção que o filme mostrou e, se havia alguma cena que apresentava algum valor de medida que poderia ser utilizado futuramente como referência.

Após assistir ao filme, algumas discussões foram feitas em sala de aula para saber se Gulliver aumentou ou diminuiu seu tamanho. Alguns alunos afirmaram de imediato que Gulliver aumentou; outros, no entanto, ficaram indecisos, mas, quando questionados sobre a cena em que foi encontrado o barco em que Gulliver chegou à ilha de Lilliput, é que os alunos entenderam que, “a fera”, assim chamada pelos pequenos, não alterou seu tamanho real, e que os liliputianos eram seres pequenos.

A primeira questão apresentada sobre o filme foi, *Segundo informações do filme, Gulliver tem a impressão de ser um homem de 30 metros de altura, quando se compara a um liliputiano, portanto, quantas vezes mais alto é o gigante, em relação a um dos pequenos? Se fosse possível empilhar liliputianos até a altura de Gulliver, e se forçasse o primeiro da pilha a andar, será que ele conseguiria sair do lugar? E se saísse o que iria acontecer com a pilha de homenzinhos?.*

A partir das reflexões propostas pela questão, os alunos entenderam a importância de se conhecer um valor métrico, uma dimensão, pois se sabendo uma referência do tamanho de Gulliver, eles necessitavam, também, de uma referência sobre os pequenos, para conseguir responder à pergunta.

Alguns se questionaram: “Como iremos saber o tamanho de um lilliputiano?”, até que um aluno comentou: “Mas se Gulliver tem 30m (informação do filme), e na ideia dele os liliputianos são do tamanho normal, então só precisamos saber qual é a altura média de um homem.” Essa informação aguçou a turma, e os cálculos iniciaram-se.

Alguns alunos usaram sua própria altura como referência; outros atribuíram uma altura qualquer e, depois de algum tempo, as respostas começaram a surgir: “Aproximadamente 19 liliputianos”; “Tomamos como referência nossa própria altura”. Apenas um aluno apresentou uma resposta um pouco equivocada: “300 vezes maior que um liliputiano, vai precisar de 1000 liliputianos para chegar a altura de Gulliver”.

Em geral, a turma teve a mesma linha de raciocínio, a necessidade de ter uma referência para os dois corpos, e mostraram muita segurança em responder a essa pergunta, como mostram as respostas: “Se cada liliputiano tivesse 1,50m seria necessário juntar 20, um em cima do outro para dar os 30m de Gulliver”; “30/1,75 é aproximadamente 17 liliputianos”; “1,70 x 18 = 30,6. Precisa 18 liliputianos para chegar ao tamanho de Gulliver, aproximadamente.”

Percebeu-se, analisando as respostas dadas, que os alunos precisaram de informações métricas e, a partir do momento em que eles utilizaram um valor qualquer como referência ou a sua própria altura, eles tiveram a segurança e o conhecimento do que estavam calculando.

Quando eles foram questionados sobre a segunda parte da pergunta, sobre o fato de que seria possível empilhar os homenzinhos até a altura do gigante e se a estrutura conseguiria andar, alguns alunos ficaram pensativos quanto à resposta, uns disseram que sim, outros que não, mas não possuíam muita certeza do que estavam falando.

Para dar ao aluno mais segurança, recorreu-se ao auxílio de um material manipulável, muito comum nas escolas e que os alunos conhecem, o Material Dourado, que foi distribuído em grupos, devido ao fato de a escola possuir apenas quatro jogos, e os alunos usaram a unidade de dezena simples como referência.

Figura 9. Alunos comparando a altura de Gulliver com a dos lilliputianos

Fonte: Dados da pesquisa

A partir desse momento, em que os alunos usufruíram do material de apoio, e que eles empilharam o material, a resposta ficou mais clara, quando foi perguntado, *Seria possível a pilha se mover*?, obtendo como respostas: “Não, pelo fato de eles serem muito pequenos e finos”; “Não, iria despencar liliputiano”; “Não conseguiria, pois seria muito pesado para o debaixo se mover, se ele saísse os outros iriam cair por falta de equilíbrio”; “Se saísse do lugar eles iam desequilibrar e cair”; “Não conseguiria andar, pois não teria força para carregar 20 da mesma altura e peso, e se saísse, a pilha iria desequilibrar e todos iriam cair”.

Evidenciou-se, nessas observações, a diferença que o auxílio de materiais de apoio representa para a interpretação de situações-problema. O mesmo material foi utilizado para responder às demais questões.

A próxima questão dessa etapa se referia ao número de dimensões que um corpo apresenta quando é observada sua Área e seu Volume, *A partir do que você descreveu sobre Área e Volume, quando se analisa a estrutura de um corpo qualquer, em quantas dimensões pode-se ver esse corpo, quando observada a Área e quando observado o Volume?*.

Notaram-se algumas informações confusas, por parte dos alunos, quando eles não usaram o Material Dourado, que foi possível observar nas respostas: “a área da superfície observamos 4 dimensões, no caso suas faces, o volume é a quantidade que cabe dentro, o espaço que determinado corpo tem"; " 4 dimensões, altura, largura, os lados, comprimento, base, largura". As respostas, em sua maioria, foram equivocadas.

Durante as atividades, os alunos que fizerem o uso do Material Dourado como recurso, mostraram maior segurança em responder a questão, e algumas dessas respostas foram: "Quando observa a área, são duas (comprimento e largura), já quando observa o volume serão três (comprimento, largura e altura)"; "Na Área tem 2 dimensões e no Volume 3 dimensões"; "Área: 2 dimensões = comprimento, altura. Volume: 3 dimensões = comprimento, largura e altura". Nota-se, que as respostas estão mais coerentes com a situação-problema.

A questão que refere-se à confecção da roupa de Gulliver e qual o critério que poderia ser utilizado, *E quanto à confecção da roupa de Gulliver, qual critério poderia ser utilizado para determinar a quantidade de tecido, levando-se em consideração o tamanho dele? Justifique sua resposta*, foi a questão que mais dúvidas causou.

Alguns alunos não souberam o que responder; outros, chegaram à resposta aproximada, que seria utilizar como referência a roupa de um liliputiano respondendo: "Se colocar Gulliver deitado e todos os liliputianos deitarem em cima dele, conseguiriam saber a quantidade de liliputianos que precisava para fazer a roupa de Gulliver"; "Determinar a área do corpo de Gulliver"; "Teriam que medir sua altura e seu volume muscular para fazer a roupa de Gulliver".

Outros ainda padronizaram suas unidades de medidas afirmando: "Deveriam pegar um modelo de liliputiano e depois multiplicar pela altura de Gulliver"; "Teria de ser medido a área de cada superfície de Gulliver e somado para ver a quantidade pois seu corpo não é um prisma de forma exata e nem sua superfície plana, por isso deveria ser medido cada uma de suas partes, ou pegar a quantidade de tecido para um liliputiano e multiplicaria por 17 x 17 que é sua área x 6 superfícies = 1734 vezes a quantidade de tecido de um liliputiano". Essas respostas foram as que mais se aproximaram das proporções reais.

Essa questão, referente ao cálculo da quantidade de tecido para confecção da roupa de Gulliver, tinha o intuito de verificar se os alunos conseguiriam assimilar tal situação com o cálculo da Área de uma Superfície e, nessa situação, eles só precisariam levar em consideração o número de liliputianos necessários para formar sua largura e altura. Poucos alunos conseguiram fazer essa descrição e, novamente, as situações que envolveram Área se mostraram as que apresentaram maiores dificuldades de interpretar.

A última questão da etapa de Aplicação, que seria montar uma estátua de Gulliver, usando estátuas de liliputianos como pecinhas de encaixe, *Suponha que fôssemos construir uma estátua com a forma de um Gulliver, usando apenas estátuas de liliputianos. Quantos deles seriam necessários para construir essa estátua de Gulliver?,* as respostas foram as mais diversas. Algumas foram coerentes, mas algumas foram adversas aos critérios pretendidos.

Alguns alunos reproduziram de imediato aquilo que foi respondido por eles, anteriormente, na questão referente à quantidade necessária de liliputianos para formar a altura de Gulliver, ou seja, não observaram o corpo de Gulliver em todas as dimensões, mas apenas a dimensão referente à altura.

Por exemplo, o aluno que disse que seria preciso 20 pequenos lilliputianos para equivaler a altura de Gulliver, respondeu, também, que: “Seriam necessárias 20 estátuas para formar a estátua desejada”. Outro aluno, ainda, respondeu: “Precisaria do triplo”, mostrando que o cérebro humano tenta processar uma informação proporcional, mas ela não acompanha a proporção exigida no Volume.

Percebeu-se que 80% dos alunos não conseguiram formalizar suas respostas e, apenas dois alunos conseguiram reproduzir um critério que permitisse determinar um resultado aproximado de estatuas de lilliputianos.

O primeiro aluno descreveu: “Teríamos de colocar 17 estátuas para ter sua altura, 17 estátuas para a sua largura e 17 para o seu comprimento, ou seja, precisaríamos 17x17x17 estátuas, 17^3 que é equivalente a 4913 estátuas”. Essa foi à resposta do aluno que usou a estatura de um homem normal, ou seja, um liliputiano teria 1,75m quando comparado ao Gulliver de 30m.

O segundo aluno também demonstrou o mesmo raciocínio na formulação de sua resposta: “Para parar em pé a estátua precisa 18 liliputianos para a altura, 18 de comprimento, 18 de largura, e depois, completando, dando assim 5832 liliputianos”. Essa foi a ideia sugerida pelo aluno que disse que a altura de um pequeno seria de 1,70m, comprovando a logicidade do cálculo.

A problemática da estrutura da estátua também causou dúvidas quanto à resposta dos alunos, pois, como anteriormente mencionado, todas as pessoas possuem, de certa forma, um Pensamento Proporcional, e esse pensamento leva-as a acreditar que completando apenas uma das dimensões chegariam à resposta correta, ou seja, se Gulliver fosse 20 vezes maior (mais alto) que um liliputiano, então, seria necessário apenas 20 deles para formar a sua estrutura, o que seria um equívoco. E foi dessa forma que, primeiramente, os alunos processaram a análise.

No momento em que foi pedido para que eles usassem, novamente, o Material Dourado, e resolvessem em conjunto com a pesquisadora a problemática apresentada na Seção 2, Conceito de Volume, sobre a confecção da caixa de fósforos gigante.

A partir do exemplo, as informações começaram a fazer sentido para os alunos. Eles começaram a refletir sobre o porquê se devem alterar todas as dimensões quando um corpo aumenta ou diminui de tamanho. Para facilitar a explanação, foram utilizados os cubinhos, que representam uma unidade simples, para tal construção.

Para iniciar a construção da caixa, pediu-se aos alunos que imaginassem que o pequeno cubo fosse uma caixa de fósforos. Em seguida pediu-se para que eles dobrassem o seu tamanho. Alguns alunos usaram apenas dois desses cubinhos para demonstrar que o tamanho dobrou, mas quando foram questionados quanto à quantidade de dimensões de um sólido, e quanto ao aumento de apenas uma dimensão, perceberam que não estariam aumentando seu Volume, e começaram a discordar de seu pensamento inicial.

A partir daí, eles perceberam que dobrando o tamanho, dobra-se todas as dimensões e, dessa forma, colocaram dois cubinhos da largura (um ao lado do outro), dois na altura (um em cima do outro) e dois no comprimento (um ao lado do outro), entendendo como chegar à resposta.

Os alunos, após essas constatações, depararam-se como uma espécie de buraco, um espaço vazio formado por essa construção e, mais que depressa, compreenderam o que precisaria ser completado. Quando eles completaram o espaço vazio, foi perguntado pela pesquisadora aos alunos: *Quantos cubinhos foram precisos para formar a caixa com o dobro de tamanho da anterior?.* Os alunos contaram e responderam: “Foram oito cubinhos” e, na sequência, foi perguntado; “Dobrando o tamanho, significa que cada uma das três dimensões foi multiplicada por dois, completando os espaços deu um total de oito cubinhos.

Em seguida a pesquisadora perguntou, *Então qual foi à relação criada?.* Alguns responderam que seria apenas preciso multiplicar a proporção de aumento pelo número de dimensões, mas essa resposta seria imprópria chegando à resposta “seis cubos”, que não foi o valor encontrado.

Somente quando se usou um novo exemplo, de triplicar o tamanho da caixa de fósforos, de imediato, os alunos já sabiam que precisavam colocar três cubinhos em cada dimensão e o espaço vazio formado precisava ser completado. Novamente, foi verificada a quantidade total de cubinhos utilizados, observando-se que foram 27 e, nesse momento, os alunos entenderam que a relação de ampliação de tamanho é um produto simples de base x altura x largura. Em seguida, pediu-se que eles quadruplicassem o tamanho da caixa original e que determinassem a quantidade total de cubinhos utilizados e, de imediato, a resposta foi quase unânime, 64 cubinhos.

Depois de realizar tal motivação com os alunos, retornou-se à questão da construção da estátua de Gulliver, e a conclusão da resposta foi muito mais simples e clara para a turma, no geral.

Nessa situação, eles usaram a proporção encontrada na questão referente à quantidade de liliputianos para formar a altura de Gulliver. Quem respondeu que Gulliver era 19 vezes mais alto que um pequeno, chegou a um número de 6.859 estátuas para formar o gigante. Quem respondeu que era 17, chegou a 4.913 estátuas. Assim, a maioria dos alunos conseguiu entender o processo, de que o aumento não é algo diretamente proporcional, como o pensamento humano faz entender, mas sim, uma potência cúbica. O mesmo exemplo foi utilizado para formalizar a ideia de Área de Superfície.

Quando se dobrou o tamanho da caixa de fósforos, verificou-se com os alunos, que a quantidade de cubinhos usados para formar qualquer uma das faces, foi quatro. Quando triplicado, foi nove, e quando foi quadruplicado foi de 16.

Dessa forma, os alunos tiveram uma percepção similar ao entendimento do cálculo de Volume, que o índice da potência varia de acordo com a quantidade de dimensões utilizadas no processo, ou seja, o Volume é o resultado de uma potência cúbica, no qual a base é o fator de aumento, e da Área de Superfície, uma potência quadrada.

Usando uma relação entre Área de Superfície e Volume de um sólido, mencionada na 2 SEÇÃO, Figura 5, que mostra as relações do Cubo 1 e Cubo 2, quando foram feitas as razões entre a sua Área e o seu Volume, pediu-se aos alunos se o aumento da Superfície era proporcional ao aumento do espaço ocupado pelo sólido. Automaticamente, a resposta foi positiva. No entanto, ao usar como referência um Gulliver de 30m de altura e um liliputiano, como sendo um homem de estatura de 2m, verifica-se que seriam necessários 225 deles para formar a superfície do corpo de Gulliver, e 3.375 para formar toda a estrutura do gigante e, a razão entre essas grandezas seria 225/3.375 = 1/15.

Aumentando a altura de Gulliver para 60m, é necessário 900 liliputianos para formar a sua superfície, mas é preciso 27.000, para a sua estrutura corporal, o que resulta na razão 900/27.000 = 1/30. Assim, é possível perceber que, quando se aumenta o tamanho de Gulliver, aumenta-se também o seu Volume e a sua Área de Superfície, levando em consideração que suas características iniciais acompanham essa alteração, mas esse aumento não é proporcional. Assim, efetuando-se a razão entre elas, percebeu-se que a taxa obtida por essa fração diminui, verificando-se, então, que o aumento do Volume de um corpo qualquer não é proporcional ao aumento de sua Área de Superfície.

4.3 ATIVIDADE PRÁTICA COMPLEMENTAR

Para verificar a validação dos conceitos adquiridos pelos alunos na prática anterior, referente ao filme, é que se propôs uma atividade extra, para melhor verificação de se o conteúdo trabalhado na proposta mostrou que houve um aprendizado significativo.

Para efetivar os conceitos adquiridos, foi desenvolvida uma atividade prática com os alunos, baseada em citação feita no início do trabalho, uma adaptação do livro de DAWKINS (2003), que diz o seguinte:

> “Se um ovo de avestruz é três vezes maior que um ovo de galinha do mesmo formato, não será três vezes mais pesado, mas sim 3 x 3 x 3, ou 27 vezes mais pesado. Ou ainda, se um ovo de galinha servir de desjejum para um homem, um ovo de avestruz será desjejum para um pelotão de 27 homens” (DAWKINS, 2003, p. 125).

Para realizar a atividade foram utilizados como sólidos um ovo de galinha e um ovo de codorna como referência. Com o uso desses sólidos, foi reproduzido um mecanismo já conhecido, que é utilizado para medir o Volume de corpos não regulares.

O mecanismo permite calcular o Volume exato de sólidos que não apresentam uma forma definida, sem ter que recorrer aos recursos do Cálculo, do nível superior, que não se trabalha no Ensino Médio.

O procedimento citado consiste em usar um recipiente com uma forma específica e, nesse caso, foi utilizado um aquário, emprestado por um dos alunos. O aquário tem a forma de um paralelepípedo, com dimensões de 15cm de comprimento, 13cm de altura e 8cm de largura, em seguida, foi colocado certa quantidade de água dentro do recipiente, até atingir o nível de 7cm de altura, que seria uma altura mediana do recipiente.

A ideia foi não completar o nível até a borda, pois ao mergulhar os objetos, o ovo de codorna e o ovo de galinha, permitiu-se verificar que ocorria uma alteração do nível de água, de acordo com o Volume do ovo.

Essa variação de nível serviu de referência para determinar o Volume exato de cada um dos ovos, já que eles não apresentavam uma forma geométrica específica, impedindo que, por meio de fórmulas, usualmente conhecidas, de cálculo de Volume, pudesse se determinar tal resultado.

Primeiramente, os alunos foram instigados a fazer uma leitura visual da situação, questionando-os se seria possível determinar, aproximadamente, quantas vezes um ovo de galinha é maior que um de codorna.

Nesse caso, alguns responderam que sim, inclusive o número que vezes que um era maior do que o outro. Quando foi pedido qual o critério que os fez pensar dessa forma, para chegar ao valor aproximado, a maioria dos alunos responderam que compararam a altura dos ovos, ou seja, levou em consideração apenas uma medida linear.

Pediu-se aos alunos que usassem uma régua e medissem as dimensões para os dois ovos. Em seguida, a pesquisadora perguntou e se a respostas deles, quanto à diferença de Volume, se manteve a mesma comparando as alturas. A maioria dos alunos respondeu que sim.

Para comprovar se a visualização feita pelos alunos corresponde ao valor exato dos sólidos, recorreu-se ao cálculo do Volume exato, para comparar os resultados pensados pelos alunos.

Nesse instante, a pesquisadora instigou os alunos a pensarem numa fórmula matemática utilizada para determinar o Volume de um sólido qualquer e, prontamente, alguns responderam: “V = Ab x h”, ou seja, o Volume para um corpo qualquer é obtido, diretamente, pelo produto de sua Área da base pela sua Altura.

Também, questionou-se aos alunos, se seria possível aplicar tal forma usando os ovos como sólidos em questão, e foi possível verificar que a fórmula não se enquadrava ao formato deles. Mas, por outro lado, a fórmula se encaixava, perfeitamente, no formato do aquário e, nesse momento, é que foi apresentado aos alunos como funcionaria o procedimento.

Como já se conheciam as medidas que formavam as dimensões do aquário, foi fácil determinar o Volume ocupado pelo liquido, quando se encheu de água até chegar ao nível de 7cm. Utilizando-se da fórmula mencionada pelos alunos, “V = Ab x h”, que seria o produto direto da Área da base do aquário pela altura do líquido, chegou-se ao resultado de 840 cm^3. Esse passou a ser o valor tomado como referência para os novos cálculos.

Após o cálculo do Volume de líquido contido no recipiente, no caso 840cm^3, mergulhou-se, primeiramente, o ovo de codorna e, juntamente com os alunos, verificou-se que o nível da água ultrapassou os 7cm.

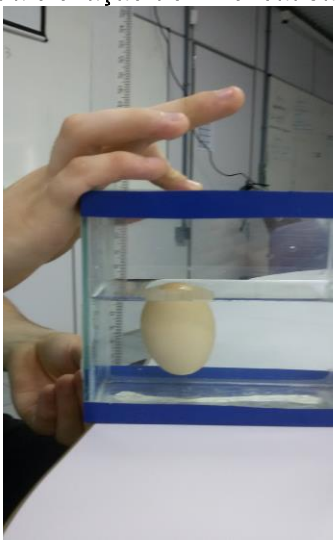
Figura 10. Verificação da elevação de nível causada pelo ovo de codorna

Fonte: Dados da pesquisa

Feita uma nova marcação da altura da coluna de líquido, observou-se que ele chegou em 7,1cm, quando foi imerso no líquido. O nível aumentou, pois contabilizou o Volume de líquido já existente com o Volume do sólido acrescido a ele. Nesse momento, foi feito o cálculo do Volume total do recipiente, com o novo nível, chegando a 852cm^3.

Questionou-se aos alunos se esse resultado final seria o Volume do ovo de codorna e eles, prontamente, responderam que não, mas que o Volume procurado seria a diferença entre o novo Volume com o Volume anterior, antes de ser imerso o sólido no líquido. Calculando a diferença 840cm^3 - 852cm^3, chegou-se ao resultado de 12 cm^3. Esse seria, portando, o Volume que o ovo de codorna possui. O mesmo processo foi realizado para determinar o Volume do ovo de galinha.

Figura 11. Verificação da elevação de nível causada pelo ovo de galinha



Fonte: Dados da pesquisa

Usou-se novamente como referência o Volume inicial de 840cm^3, imergiu-se o ovo de galinha no líquido e, novamente, foi verificado o nível atingido nesse processo que, no caso, foi de 7,5cm, e utilizou-se essa medida como a altura para o cálculo do Volume, chegando ao resultado de 15cm x 8cm x 7,5cm = 900 cm^3. Calculando-se a diferença entre os dois valores, 900cm^3 – 840cm^3, obteve-se que o Volume ocupado pelo ovo de galinha é de 60cm^3.

Com os valores específicos do Volume de cada um dos ovos, foi possível, então, determinar quantas vezes um ovo de galinha é maior que um ovo de codorna, utilizando um simples processo de divisão; o valor do maior pelo valor do menor. Após a realização do cálculo, concluiu-se que para se ter um ovo de galinha é preciso 5 ovos de codorna, supondo que esses ovos tenha o mesmo Volume.

Nesse momento a pesquisadora pediu para os alunos se o valor pensado por eles antes da realização do mecanismo conferia com o resultado obtido no processo. A resposta foi quase que unânime: não.

Essa atividade é uma excelente ferramenta de auxílio para o cálculo de Volume, mostrando que, quando se faz comparações de tamanho, o Pensamento Proporcional nos leva a confundir os resultados reais, pois, na maioria das vezes, temos em consideração apenas uma única medida linear.

Foi evidente que a participação dos alunos, as discussões em sala, as atividades desenvolvidas com a turma contribuíram de forma enriquecedora para as aulas, melhorando o entendimento sobre o tema abordado.

A proposta de trabalhar alguns aspectos importantes que a Etnomatemática apresenta foi bem aceita pelos alunos. Facilitou a contextualização do conteúdo e permitiu que o conhecimento adquirido por eles, através das atividades realizadas e da construção dos conceitos matemáticos, se tornasse um diferencial para as aulas, permitindo assim, atingir os objetivos propostos.

Acredita-se que a pesquisa contribuiu para que os alunos pudessem desenvolver sua capacidade reflexiva e geométrica tornando-os mais críticos com problemáticas em que o Pensamento Proporcional poderia confundir seu modo de pensar e analisar situações.

Além disso, permitiu que a pesquisadora e também professora da turma determinasse critérios que favorecessem a intervenção eficaz no processo de ensino e aprendizagem para a turma participante e para o conteúdo em questão.

A reflexão adquirida com esta pesquisa contribuirá significativamente nos trabalhos futuros desenvolvidos com outras séries e com outros conteúdos.

5 CONCLUSÃO

Em virtude dos fatos apresentados e das atividades desenvolvidas com os alunos, é imprescindível que todos se conscientizem de que o homem tem uma linha de pensamento que o faz raciocinar de maneira proporcional. Muitas situações da vida cotidiana exigem esse pensamento, como fazer compras em um supermercado em relação à quantidade de itens, as médias bimestrais em relação às notas obtidas nas provas, o tempo de uma viagem em função da velocidade, entre tantas outras.

A proposta realizada com os alunos teve a intenção de mostrar como a Matemática está presente em objetos que eles manipulam com frequência e que não percebem, à primeira vista, que envolvem as grandezas de Área e de Volume. Há pessoas que confundem o ingênuo cérebro humano, por fazê-las acreditar que todas as relações entre grandezas se comportam da mesma maneira. O pensar nem sempre se aproxima do real e, para isso, existem os recursos matemáticos que, de certa forma, conseguem efetuar a prova.

Essa pesquisa teve intuito de mostrar que algumas situações vivenciadas em sala de aula não se concretizam pelo fato de que se generalizam os conceitos e, conseguintemente, o resultado do aprendizado não se torna efetivo, principalmente, quando é preciso estender para além da sala de aula os conteúdos ensinados na escola.

O filme *As Viagens de Gulliver* foi utilizado como recurso didático para a explanação e para a fixação das relações entre Volume de um sólido e sua Área de Superfície, e utilizadas nas atividades desenvolvidas após o filme. A análise dessas atividades demonstrou as dificuldades que os alunos têm de distinguir tais grandezas e defini-las, usando critérios matemáticos. A dificuldade maior, apresentada pelos alunos, foi em reconhecer os valores de cálculo, sem a aplicação de fórmulas, apenas utilizando um único valor de referência, como no caso da questão que pedia pra eles fazerem o cálculo da altura que Gulliver acreditava ter.

As dificuldades de compreensão do conteúdo que, nesse caso, é o de Geometria, podem ser explicadas pelo fato de haver poucas aulas de Matemática na série em que foi aplicada a atividade, apenas duas aulas na semana, pelo fato de a ementa da disciplina ser extensa, ou ainda pela carência de materiais didáticos distribuídos às escolas publicas. Esses, entre outros, fatores acabam afetando no desempenho do trabalho do professor que, por muitas vezes, não consegue trabalhar o conteúdo de forma dinamizada, exatamente, pela falta de ajuste de tempo.

Muitos dos alunos possuem uma leitura visual, e demonstram maior segurança em desenvolver alguns conteúdos, quando foram apresentados os materiais manipulativos ou materiais em forma de imagens, ou mesmo, o filme, que foi o caso desse trabalho, que se utilizou desses materiais como apoio didático.

Quando foi mencionado aos alunos que o trabalho a ser desenvolvido com eles partia da ideia de um filme, todos ficaram eufóricos, pois se tratava de algo comum no dia a dia deles, mas que não é muito comum em sala de aula. No entanto, para trabalhar a ideia central do filme, a proporção do tamanho de corpos, era preciso saber, antecipadamente, qual o nível de compreensão que os alunos possuíam sobre os conceitos de Área e de Volume. Por esse motivo, a intenção de desenvolver as questões da sessão de Introdução e, a partir delas, analisar a possibilidade de eles terem uma noção do conteúdo que a pesquisadora precisaria focar nessa prática, para que ela, realmente, fosse importante.

Com as questões abordadas, foi possível perceber que a maioria dos alunos confunde os conceitos de Volume com os conceitos de Área e, quando era preciso estender tais conceitos para as situações cotidianas, o embrulho de um presente, eles se mostraram inseguros em expressar seu entendimento.

Nesse instante, percebeu-se que a prática deveria esclarecer as dúvidas deles em distinguir tais conceitos e, a partir de uma leitura visual, pudessem apontar o que se refere à Área de uma Superfície e o que se refere ao Volume de um Sólido.

Após a aplicação da sessão de Introdução, foi o momento de assistir ao filme e, notou-se que o nível de concentração dos alunos na percepção dos detalhes foi alto, porque havia sido pedido a eles que ficassem atentos às proporções e aos valores apresentados nas cenas analisadas.

Com a leitura visual da estrutura de dois corpos, de um Gulliver e de um liliputiano, foi possível explicar-lhes a diferença entre a Área da Superfície e o Volume de um Sólido. Os alunos puderam perceber também que, quando um sólido varia sua proporção de tamanho, ele deve manter suas características iniciais, nesse caso, variar, proporcionalmente, suas dimensões.

A compreensão das proporções só foi efetivada a partir da construção que os alunos precisariam fazer, relacionada às questões 6 e 7, da sessão Aplicação, as quais se referiam à quantidade de roupa para revestir o corpo de Gulliver e à quantidade de unidades de estátuas de liliputianos necessárias para formar a estrutura do gigante.

As questões trabalhadas, inicialmente, confundiram o modo de pensar dos alunos, pois o Pensamento Proporcional deles influenciou na referência de cálculo que utilizaram, no caso, a dimensão relacionada à altura. Ao usar o exemplo da caixa de fósforos, citado no início do trabalho, referindo-se ao seu aumento, tomando como unidade de medida a própria caixa, foi o que os ajudou a compreender as relações existentes entre as grandezas de Área e de Volume.

A partir das construções realizadas com o Material Dourado foi possível verificar que a Área aumenta numa potência dois porque apresenta duas dimensões e o aumento acontece, igualmente, em cada uma delas, e o Volume aumenta na potência três e esse aumento, também acontece, igualmente, nas três dimensões. Foi possível explanar, ainda, que a razão entre a Área e o Volume diminuiu, conforme esses valores aumentaram, em função, justamente, da diferença entre o número de dimensões que ambos possuem.

Foi perceptível a mudança de pensamento dos alunos. O que antes parecia ser algo abstrato ou mecânico para eles, passando a ser algo compreendido e que pode ser aplicado em qualquer objeto que possua, ou não, uma forma específica.

Até então, para eles, só era possível realizar o cálculo de Área da Superfície e de Volume para objetos que possuíam uma forma geométrica bem definida, com a qual eles poderiam usar uma fórmula para determinar o seu valor.

Percebeu-se ainda, que a pesquisa foi importante também para a pesquisadora, pois, além de obter a satisfação de verificar o aprendizado dos alunos, mostrou que o conteúdo ensinado vai além do que os livros didáticos oferecem. Na maioria dos casos, capítulos inteiros cheios de fórmulas e teorias, puderam ser apresentados em forma de atividade prática.

O professor deve saber que, em uma mesma sala de aula têm-se diversas formas de entendimento e de percepção do conteúdo por parte dos alunos. Há aqueles que aprendem resolvendo; há aqueles que aprendem lendo; outros, compreendendo a teoria; e há, também, aqueles que demonstram dificuldades em assimilação do conteúdo, e o entendem com o uso de uma atividade prática, no caso, quando foi utilizado o Material Dourado.

A cada ano tem-se uma nova turma, com novos perfis de alunos, e o professor precisa entender que nenhum deles vai aprender da mesma forma. É preciso conhecer os alunos, suas habilidades e suas dificuldades e, diante delas, possibilitar que eles consigam desenvolver o conteúdo de forma significativa.

A prática proporcionou a pesquisadora e também professora da turma, entender que, quando em seu papel de mediador do conhecimento, a aprendizagem é uma constante em construção, e que não se pode esperar que os alunos venham preparados de séries anteriores. É de sua responsabilidade ensinar os alunos, nesse momento, independentemente de se nas séries seguintes lembrará ou não do conteúdo.

Dificuldades aparecem a todo o momento, como o número reduzido de aulas, duas por semana; a demanda de conteúdo programático; a insegurança do professor em não conseguir contemplar a ementa exigida em cada série, no entanto, é necessário fazer uma análise e ponderar o que é mais importante: trabalhar os conteúdos exigidos pela grade curricular e ampliá-los com o uso de sua aplicabilidade.

Nesse momento verificou-se a importância que os aspectos da Etnomatemática proporcionam, pois a aplicabilidade precisa ser contextualizada para que faça sentido os conteúdos aprendidos no ambiente escolar.

Os conteúdos matemáticos vão muito além de fórmulas prontas e, nesta pesquisa, procurou-se demonstrar que, com um pouco de dedicação e de criatividade, é possível fazer a diferença na aprendizagem dos alunos. O conteúdo só é, efetivamente, aprendido e apreendido, quando os alunos conseguem estendê-lo para além da sala de aula.

É perceptível que os alunos encontraram a beleza que a Matemática trouxe ao dar explicações e significados concretos para aquilo que pareceu primeiramente não ter sentido.

Após a aplicação da pesquisa verificou-se que a mesma desenvolveu habilidades necessárias aos alunos, como comparar, classificar, ordenar e estabelecer relações entre fatos que nos ocorrem diariamente no que se refere ao conteúdo de Geometria.

REFERÊNCIAS

ARANHA, M.L.A. **Filosofia da educação**. São Paulo: Moderna, 2. ed., 1996.

BATANERO, M. C. e col. **Preparation of Researchers in Mathematics Education: na International TME-Survey**. Germany, Bielefeld, Universität/Institut für Didaktik der Mathematik. Ocasional Paper, 1992.

BECKER, F. **Educação e Construção do Conhecimento**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

BEHR, M; LESH, R. e POST, T.R. **A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra**. In: COXFORD, A. F., SHULTE, a. P. (Orgs). *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995, pp. 89– 103.

BICUDO, M.A.V. **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: EDNESP, 1999.

BICUDO, I. **Prefácio e introdução**. EUCLIDES. Os Elementos. São Paulo: UNESP, 2009.

BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CAJORI, F. **Uma história da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CAMEJO, A., MARANHÃO, C., e MIRANDA, M.R. **Ideias de professoras dos anos iniciais sobre números racionais**. IV SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília – DF, out/2009.

CARVALHO, J.P. **Avaliação e perspectiva na área de ensino de matemática no Brasil**. Em Aberto, Brasília: n. 62, p. 74-88, abr./jun. 1994. p. 81.

CUNHA, D.S.I. **Investigações Geométricas: desde a formação do professor até a sala de aula de Matemática**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.

DAWKINS, R. **A Escalada do Monte Improvável**. São Paulo: Companhia das Letras, 2003.

D’AMBRÓSIO, B.S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Brasília: Ano II. N2, 1998.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria á pratica**. Campinas, São Paulo: Papirus,1996.

DEWEY, J. **Cómo pensamos**. Barcelona: Editorial Paidós, 1960.

FERREIRA, A.B.H. **Novo dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 2.ed. Curitiba: Nova Fronteira, 1999.

FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção científica em Cursos de Pós-Graduação**. Tese de doutorado. Faculdade de Educação, UNICAMP, 1994.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil**. Zetetiké, Campinas: n. 4, 1995.

FONSECA, M.C.F.R. **Por que ensinar Matemática**. Presença Pedagógica, Belo Horizonte: v.1, n.6, 1995.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia. Saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

GARCIA, C.M. **Formação de Professores: Para uma mudança educativa**. Porto: Porto Editora, 1999.

HOPLEY, L. e SCHALKWYK, J.V. **Kleiber Rules**. Disponível em: http://www.anaesthetist.com/physiol/basics/scaling/Findex.htm#index.htm. Acesso em 06 de abril de 2017.

KALEFF, A.M.M.R. **Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos**. Niterói: EdUFF, 2003.

LIMA, E.L. **Medidas e forma em Gemetria – Comprimento, Área, Volume e Semelhança.** Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, E.L. et al. **A Matemática do Ensino Médio – volume 2**. 6.ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LORENZATO, S. **Por que ensinar geometria?**. São Paulo: SBEM, v. 3, n. 4, p. 1-64, 1995.

LORENZATO, S. **Para aprender Matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006.

MACHADO, S.D.A. **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003.

MAGALHÃES, F.D. **Geometria da vida: relação superfície/volume**, 2011. Disponínel em: http://salabioquimica.blogspot.com.br/2011/06/geometria-da-vida-relacao.html. Acesso em 01 de maio de 2017.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1999.

NETO, A.C.M. **Geometria**, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PAIS, L.C. **Didática da matemática, uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PONTE, J.P. e SILVESTRE A.I. **Uma experiência de ensino da proporcionalidade no 2° ciclo do ensino básico**. Disponível em: http://www.spce.org.pt/sem/19as.pdf. Acesso em: 21 de março de 2017.

RIO GRANDE DO SUL, Secretaria de Estado da Educação. Departamento Pedagógico. **Referenciais Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul: Matemática e suas Tecnologias**. Porto Alegre: SE/DP, 2009.

ROCHA, G.T. **Contribuições da Geometria no Aprendizado da Matemática**. Monografia. Universidade Estadual do Ceará. 2010.

ROQUE, T. e CARVALHO, J.B.P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SAVIANI, D. **Escola e Democracia**. 31 ed. Campinas: Autores Associados, 1997.

SWIFT, J. **Viagens de Gulliver**. São Paulo: Círculo do Livro, 1726.

VASCONCELOS, F. **História das Matemáticas na Antiguidade**, Aillaud e Bertrand, Lisboa: p. 290, 1925.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble: v.19, n. 23, p.133, 1990.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed. 1998.

ANEXO A – Sugestões de Atividades

1 - Segundo o Dr. Drauzio Varella (https://drauziovarella.com.br/corpo-humano/bexiga-urinaria/) a bexiga de um homem adulto sadio pode armazenar até 800 ml de líquido. Comparando tal informação com a cena do incêndio, CENA I – O GIGANTE SALVA O REI, seria possível determinar a quantidade de urina que Gulliver utilizou para apagá-lo, supondo que ele estivesse com a bexiga cheia?

2 - Uma das cenas elencada no filme foi a do banquete, CENA II – O GRANDE BANQUETE. Segundo informações dessa cena, os liliputianos teriam dificuldades para alimentar o Gulliver? Seria possível determinar uma quantidade aproximada de alimento para ele? Qual informação poderia ser utilizada como unidade de medida?