UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

GUSTAVO JOSE WURMEISTER FERREIRA

TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

LONDRINA
2022

GUSTAVO JOSE WURMEISTER FERREIRA

TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

WRITTEN PRODUCTION ANALYSIS TASKS FOR TEACHING FUNCTION CONCEPT

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jader Otavio Dalto

LONDRINA

2022

4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.
Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

GUSTAVO JOSE WURMEISTER FERREIRA

TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 28 de Setembro de 2022

Jader Otavio Dalto, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Angela Marta Pereira Das Dores Savioli, Doutorado - Universidade Estadual de Londrina (Uel)

Dra. Marcele Tavares, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 28/09/2022.

FERREIRA, Gustavo José Wurmeister. **Tarefas de Análise da Produção Escrita para o Ensino de Função Afim**. 2022. 228 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

RESUMO

Resumo: A Análise da Produção Escrita vem sendo pesquisada com sucesso como metodologia ativa de ensino em diversos conteúdos no ensino da matemática, no entanto, pouco se conhece sobre a utilização desta prática no ensino de funções. Desta forma, o objetivo deste trabalho é investigar a utilização de Tarefas de Análise da Produção Escrita em Matemática no ensino dos conceitos de função e mais especificamente a função afim, a partir da Análise da Produção Escrita e estruturado por uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Foram aplicadas 14 tarefas, desenvolvidas de acordo com os critérios da Análise da Produção Escrita, chamadas de TAPE (Tarefas de Análise da Produção Escrita) e mais uma tarefa diagnóstica, com o intuito de inventariar o que os alunos já sabiam e utilizar como comparativo para depois das aulas através do uso das TAPE. A aplicação das TAPE ocorreu em uma escola estadual, sendo aplicada em duas turmas do 3º ano do Ensino Médio das quais o autor é o professor titular. Para isso, foi desenvolvida uma pesquisa qualitativa realizada em quatro momentos, definição das tarefas para obtenção de produções escritas, elaboração das Tarefas de Análise da Produção Escrita e a Trajetória Hipotética de Aprendizagem, a preparação e aplicação da Trajetória Hipotética de Aprendizagem e análise dos dados. Os resultados da análise apontam uma evolução significativa na aprendizagem dos principais conceitos de função afim, evidenciando as potencialidades das Tarefas de Análise da Produção Escrita. Com esta pesquisa se tem um material que pode contribuir para reforçar a Análise da Produção Escrita como estratégia de ensino, com potencial aplicação das Tarefas de Análise da Produção Escrita, evidenciando o compromisso do professor com todo o processo, desde a preparação das tarefas até sua discussão e formalização do conteúdo, destacando a participação ativa dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, ficando evidente a característica de reflexão, análise, discussão e conclusão que as TAPE proporcionam, o desempenho positivo com relação a aprendizagem do conteúdo de funções e contribuições para Educação Matemática.

Palavras-chave: 1. Educação Matemática. 2.Tarefas de Análise da Produção Escrita. 3.Análise da Produção Escrita. 4.Funções. 5.Função Afim

SOBRENOME, Nome Prenome do autor. **Written Production Analysis Task For Teaching Function Concept**. 2022. 228 p. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

ABSTRACT

The Written Production Analysis has been successfully researched as active teaching methodology in several subjects in mathematics teaching, however, we don't know much about the use of this methodology when teaching functions. Therefore, the objective of this study is to investigate the use of Written Production Analysis Task in mathematics when teaching the concept of function, more specific affine function, through the Written Production Analysis methodology and structured by a Hypothetical Learning Trajectory. Fourteen tasks were applied, developed in accordance with the criteria of the Written Production Analysis, called TAPE (Tasks of Analysis of Production Written) and one more diagnosis task, in order to inventory what the students already knew and use that as a comparison after classes through the use of TAPE.

The application of TAPE occurred in a State School, being applied in two classes of High school third grade, in which the author is the professor. For that, was developed a qualitative research done in four moments, definition of tasks to obtain written productions, elaboration of Tasks of Analysis of Production Written and the Hypothetical Learning Trajectory, preparation and application of Hypothetical Learning Trajectory and data analysis.

The analysis results show a significant improvement in learning the main concepts of affine function, highlighting the potential of Tasks of Analysis of Production Written.

With this research we have a material that can contribute to reinforce the Written Production Analysis as a teaching strategy, with potential application of Tasks of Analysis of Production Written, evidencing the teachers commitment with all the process, from the tasks preparation to their discussion and content formalization, highlighting the active participation of students in the teaching and learning process,

becoming evident the characteristic of reflection, analysis, discussion and conclusion that TAPE provides, positive performance in relation to content learning of functions and contributions to Mathematics Education.

Keywords: 1. Mathematical Education. 2.Written Production Analysis Task. 3. Written Production Analysis. 4. Function. 5. Affine Function.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Características na elaboração das TAPE 24
Figura 2 – Etapas das TAPE 25
Figura 3 - Ciclo de Ensino de Matemática 27
Figura 4 – As 4 etapas das TAPE 35
Figura 5 – Enunciado TAPE 1 37
Figura 6 – Enunciado TAPE 2 43
Figura 7 – Enunciado TAPE 3 46
Figura 8– Enunciado TAPE 4 50
Figura 9 – Enunciado TAPE 5 53
Figura 10 – Enunciado TAPE 6 56
Figura 11 – Diagrama da TAPE 6 60
Figura 12 - Enunciado TAPE 7 61
Figura 13 – Função como relação de conjuntos 65
Figura 14 – Enunciado TAPE 8 66
Figura 15 – Enunciado TAPE 9 74
Figura 16 - Ângulo α (IEZZI, p. 84, 2016) 78
Figura 17 – Enunciado TAPE 10 80
Figura 18– Enunciado TAPE 11 84
Figura 19 – Enunciado TAPE 12 88
Figura 20 – Diagrama (Fonte: autor) 91
Figura 21 – Enunciado TAPE 13 – parte 1 93
Figura 22 – Enunciado TAPE 13 – parte 2 95
Figura 23 – Gráfico da TAPE 13 98
Figura 24 – Gráfico da TAPE 13 100
Figura 25 – Enunciado TAPE 14 104
Figura 26 – Relatos da TAPE 1 112
Figura 27 – Relatos da TAPE 1 – Repostas criativas 112
Figura 28– Relatos da TAPE 3 – Definição de função 114
Figura 29 – Relatos da TAPE 3 115
Figura 30 – Relatos da TAPE 4 116
Figura 31 – Relatos da TAPE 5 117
Figura 32 – Relatos da TAPE 6 118

Figura 33 – TAPE 6 – Dificuldades na escrita 119
Figura 34 – Relatos da TAPE 7 120
Figura 35 – TAPE 7 – Lei de formação genérica de uma função 120
Figura 36 – TAPE 7 – Respostas corretas 121
Figura 37 – Relatos da TAPE 8 122
Figura 38 – Relatos da TAPE 8 – Respostas corretas 123
Figura 39 – Relatos da TAPE 9 125
Figura 40 – Relatos da TAPE 10 127
Figura 41 – Relatos da TAPE 11 128
Figura 42 –TAPE 11 – Escrita com erros 129
Figura 43 – Relatos da TAPE 12 – Valor inicial da função 130
Figura 44 – TAPE 12 – Respostas de acordo com a THA 131
Figura 45 – TAPE 12 – Erros de resolução de equação 132
Figura 46 – Relatos das TAPE 13 – Erros de resolução de equação 134
Figura 47 – Respostas da TAPE 13 de acordo com a THA 135
Figura 48 – Relatos das TAPE 14 137
Figura 49 – Respostas da TAPE 14 – Determinação do coeficiente angular 138
Figura 50 – Respostas da TAPE 14 – Domínio e Contradomínio 139
Figura 51 – Desempenho dos alunos na atividade diagnóstica 140
Figura 52 – Resposta do aluno A 142
Figura 53 – Resposta do aluno B 142
Figura 54 - Resposta do aluno A 143
Figura 55 - Resposta do aluno B 143
Figura 56 - Resposta do aluno A 143
Figura 57 - Resposta do aluno A 144
Figura 58 - Resposta do aluno A 144
Figura 59 - Resposta do aluno B 144
Figura 60 - Resposta do aluno A 144
Figura 61 - Resposta do aluno B 144
Figura 62 - Resposta do aluno A 145
Figura 63 - Resposta do aluno B 145
Figura 64 - Resposta do aluno A 146
Figura 65 - Resposta do aluno B 146
Figura 66 - Anotação TAPE 1 - Aluno A 148

Figura 67 - Anotação TAPE 1 – Aluno A 149
Figura 68 – Respostas dos alunos para o item **a** da TAPE 1 149
Figura 69 – Respostas dos alunos para item b da TAPE 1 150
Figura 70 – Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 1 150
Figura 71 – Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 2 151
Figura 72 – Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 2 152
Figura 73 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 2 153
Figura 74 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 3 154
Figura 75 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 3 154
Figura 76 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 3 155
Figura 77 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 4 156
Figura 78 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 5 156
Figura 79 – Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 5 157
Figura 80 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 6 158
Figura 81 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 6 159
Figura 82 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 6 159
Figura 83 - Resposta dos alunos para o item **d** da TAPE 6 160
Figura 84 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 7 161
Figura 85 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 7 161
Figura 86 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 7 162
Figura 87 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 8 163
Figura 88 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 8 163
Figura 89 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 8 164
Figura 90 - Resposta dos alunos para o item **d** da TAPE 8 164
Figura 91 - Resposta dos alunos para o item **e** da TAPE 8 165
Figura 92 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 9 165
Figura 93 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 9 166
Figura 94 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 9 166
Figura 95 - Resposta dos alunos para o item **d** da TAPE 9 167
Figura 96- Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 10 167
Figura 97 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 10 168
Figura 98 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 10 169
Figura 99 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 11 169
Figura 100 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 11 170

Figura 101 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 11 171
Figura 102 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 12 171
Figura 103 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 12 172
Figura 104 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 12 173
Figura 105 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 13 174
Figura 106- Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 13 174
Figura 107 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 13 175
Figura 108 - Resposta dos alunos para o item **d** da TAPE 13 176
Figura 109 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 13 177
Figura 110 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 13 178
Figura 111 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 13 178
Figura 112 - Resposta dos alunos para o item **d** da TAPE 13 179
Figura 113- Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 14 180
Figura 114 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 14 181
Figura 115 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 14 181
Figura 116 - Resposta dos alunos para o item **d** da TAPE 14 182
Figura 117 - Resposta dos alunos para o item **e** da TAPE 14 182
Figura 118 - Resposta dos alunos para o item **f** da TAPE 14 183
Figura 119 - Resposta dos alunos para o item **g** da TAPE 14 184
Figura 120 - Resposta dos alunos para o item **a** da atividade diagnóstica pós TAPE 186
Figura 121 - Resposta dos alunos para o item **b** da atividade diagnóstica pós TAPE 187
Figura 122 - Resposta dos alunos para o item **c** da atividade diagnóstica pós TAPE 188
Figura 123 - Resposta dos alunos para o item **d** da atividade diagnóstica pós TAPE 188
Figura 124 - Resposta dos alunos para o item **e** da atividade diagnóstica pós TAPE 189
Figura 125 - Resposta dos alunos para o item **f** da atividade diagnóstica pós TAPE 190
Figura 126 - Resposta dos alunos para o item **g** da atividade diagnóstica pós TAPE 191
Figura 127 - Resposta dos alunos para o item **h** da atividade diagnóstica pós TAPE 192

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Lado e perímetro de um quadrado 42

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Desempenho do aluno A na atividade diagnóstica 147
Gráfico 2 – Desempenho do aluno B na atividade diagnóstica 147
Gráfico 3 – Desempenho do Aluno A na resolução das TAPE 185
Gráfico 4 – Desempenho do Aluno B na resolução das TAPE 185
Gráfico 5 – Desempenho do aluno A na atividade diagnóstica após TAPE 193
Gráfico 6 - Desempenho do aluno B na atividade diagnóstica após TAPE 194
Gráfico 7 – Comparativo de desempenho do aluno A na atividade diagnóstica pré e pós TAPE 195
Gráfico 8 – Comparativo de desempenho do aluno B na atividade diagnóstica pré e pós TAPE 195
Gráfico 9 – Desempenho de todos os alunos na atividade diagnóstica pré TAPE 196
Gráfico 10 – Desempenho de todos os alunos na atividade diagnóstica pós TAPE 197

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.. 18

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 21

2.1 Análise da Produção escrita... 21

2.2 Tarefas de análise da produção escrita 23

2.3 Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA)..................................... 26

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS... 30

4 TRAJETÓRIA HIPOTETICA DE APRENDIZAGEM.............................. 36

4.1 TAPE 1 36

4.1.2 A TArefa.. 36

4.1.3 Resoluções Esperadas... 38

4.1.4 Possíveis dúvidas.. 39

4.1.5 Formalização... 42

4.2 TAPE 2 43

4.2.1 A TAREFA... 43

4.2.2 Resoluções Esperadas... 44

4.2.3 Possíveis dúvidas.. 44

4.3 TAPE 3 45

4.3.1 A Tarefa.. 45

4.3.2 Resoluções esperadas.. 47

4.3.3 Possíveis dúvidas.. 48

4.4 TAPE 4 49

4.4.1 A TAREFA 49

4.4.2 Resoluções esperadas 51

4.4.3 Possíveis dúvidas 51

4.5 TAPE 5 52

4.5.1 A TAREFA 52

4.5.2 Resoluções esperadas 54

4.5.3 Possíveis dúvidas 54

4.5.4 Formalização 55

4.6 TAPE 6 56

4.6.1 a TAREFA 56

4.6.2 Resoluções esperadas 57

4.6.3 Possíveis dúvidas 58

4.6.4 Formalização 59

4.7 TAPE 7 60

4.7.1 A TArefa 60

4.7.2 Resoluções esperadas 62

4.7.3 Possíveis dúvidas 63

4.7.4 Formalização 64

4.8 TAPE 8 66

4.8.1 A TAREFA 66

4.8.2 Resoluções esperadas ... 67

4.8.3 Possíveis dúvidas ... 68

4.8.4 Formalização ... 72

4.9 TAPE 9 ... 73

4.9.1 A TAREFA ... 73

4.9.2 Resoluções esperadas ... 75

4.9.3 Possíveis dúvidas ... 76

4.9.4 Formalização ... 77

4.10 TAPE 10 ... 79

4.10.1 A TArefa ... 80

4.10.2 Resoluções esperadas ... 81

4.10.3 Possíveis dúvidas ... 82

4.11 TAPE 11 ... 84

4.11.1 A Tarefa ... 84

4.11.2 Resoluções esperadas ... 85

4.11.3 Possíveis dúvidas ... 86

4.12 TAPE 12 ... 87

4.12.1 A Tarefa ... 87

4.12.2 Resoluções esperadas ... 89

4.12.3 Possíveis dúvidas ... 90

4.13 TAPE 13 ... 92

4.13.1 A Tarefa 93

4.13.2 Resoluções esperadas 97

4.13.3 Possíveis dúvidas 101

4.13.4 Formalização 103

4.14 TAPE 14 103

4.14.1 A TArefa 104

4.14.2 Resoluções esperadas 106

4.14.3 Possíveis dúvidas 108

5. RELATO E ANÁLISE DAS APLICAÇÕES DAS TAPE 111

5.1 Aplicação da tAPE 1 111

5.2 Aplicação daS TAPE 2 e 3 113

5.3 Aplicação das TAPE 4 e 5 115

5.4 Aplicação da TaPE 6 117

5.5 Aplicação da TaPE 7 119

5.6 Aplicação da TAPE 8 121

5.7 Aplicação da TaPE 9 124

5.8 Aplicação da Tarefa 10 126

5.9 Aplicação da Tape 11 127

5.10 Aplicação da Tape 12 129

5.11 Aplicação da Tape 13 133

5.12 Aplicação da tarefa 14 136

5.13 Análise da Atividade Diagnóstica 141
5.13.1 Atividade Diagnóstica 141
5.14 Análise das TAPE 148
5.14.1 TAPE 1 148
5.14.2 TAPE 2 151
5.14.3 TAPE 3 153
5.14.4 TAPE 4 155
5.14.5 TAPE 5 156
5.14.6 TAPE 6 158
5.14.7 TAPE 7 160
5.14.8 Tape 8 162
5.14.9 TAPE 9 165
5.14.10 TAPE 10 167
5.14.11 TAPE 11 169
5.14.12 TAPE 12 171
5.14.13 TAPE 13 173
5.14.14 TAPE 14 180
5.15 Análise da Atividade Diagnóstica Pós TAPE 186
5.16 Comparativo entre as Atividades Diagnóstica pré e Pós TAPE 194
5.16.1 Comparativo Entre os alunos A e B 194
5.16.2 Comparativo Entre todos os alunos 196

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS **198**

7. REFERÊNCIAS **200**

APÊNDICE A – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 1 .... **202**

APÊNDICE B – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 2 .... **203**

APÊNDICE C – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 3 .... **204**

APÊNDICE D – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 4 .... **205**

APÊNDICE E – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 5 .... **206**

APÊNDICE F – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 6 .... **207**

APÊNDICE G – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 7 .... **208**

APÊNDICE H – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 8 .... **209**

APÊNDICE I – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 9 .... **210**

APÊNDICE J – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 10 .... **211**

APÊNDICE K – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 11 .... **212**

APÊNDICE L – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 12 .... **213**

APÊNDICE M – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 13 .... **214**

APÊNDICE N – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 14 .... **215**

APÊNDICE O – TAREFA 1 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA **216**

APÊNDICE P – TAREFA 2 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA **217**

APÊNDICE Q – TAREFA 3 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA..............218

APÊNDICE R – TAREFA 4 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA..............219

APÊNDICE S – TAREFA 5 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA 219

APÊNDICE R – TAREFA 4 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA..............220

APÊNDICE T – TAREFA 6 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA..............221

APÊNDICE U – TAREFA 7 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA..............222

APÊNDICE V – TAREFA 8 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA..............223

APÊNDICE W – TAREFA 9 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA.............224

1 INTRODUÇÃO

A matemática está presente em nossas vidas de várias formas. Mesmo em tempos remotos, em que utilizávamos a matemática de maneira prática, sem formalizações que temos hoje, era necessário expressar quantidades, comparar grandezas, ordenar, contar de maneira exata ou aproximada e fazer estimativas das mais variadas situações possíveis. Em muitas tarefas do nosso dia-a-dia, como a compra de pães na padaria ou numa análise para um grande investimento financeiro, conceitos matemáticos podem estar relacionados. Dentre eles, está o conceito de funções.

O estudo das funções possui destaque especial entre os conteúdos matemáticos da Educação Básica. A importância se deve ao fato de as funções explicarem diversos fenômenos que ocorrem em nosso cotidiano e estar conectada com outras áreas de conhecimento. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacional (PCN+) (BRASIL, 2002), a Biologia, a Física, a Química e a Matemática compõem uma mesma área do conhecimento, tendo em comum a investigação da natureza e dividem as linguagens para a representação de fenômenos naturais.

Ainda segundo o documento

> A distinção entre modelo e realidade, entre interpretação e fenômeno, o domínio dos conceitos de interação e de função, de transformação e conservação, ..., não são prerrogativas desta ou daquela ciência, são instrumentos gerais, desenvolvidos em todo o aprendizado científico, que promovem, como atributo da cidadania, a competência geral de investigação e compreensão (BRASIL, 2002, p. 25).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) destaca várias habilidades que resultam dos conceitos e atividades ligadas ao ensino de função, entre elas,

> [...]"compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. (BNCC, 2017, p.317). [...]interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação (BNCC, 2017, p.533). [...] resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas. " (BNCC, 2017, p.536).

Desta forma, estudar e compreender funções está intimamente ligado com a análise de fenômenos, percepção de regularidades e generalizações. E foi na sala de aula, como professor titular da turma de 3º do Ensino Médio, em que o conteúdo era Juros Simples (a função aplicada na prática), que percebemos o déficit que os alunos tinham sobre o conteúdo, não conseguindo acompanhar nem resolver problemas que conectavam Juros Simples com os conceitos de Função Afim. Fato esse que foi decisivo para a implementação desta pesquisa nestas turmas.

Para justificar a retomada de conteúdo com estas turmas, já que haviam visto Função Afim no 1º ano do Ensino Médio, mas de modo remoto devido à pandemia, foi necessária a aplicação de uma atividade diagnóstica que comprovou a dificuldade em conceitos básicos de Função Afim, e a partir destas informações entendemos que eram turmas propícias para realizar a pesquisa.

Um desafio muito grande para a escola de hoje é tornar as aulas mais atrativas e despertar o interesse dos alunos. Precisamos considerar que as informações estão mais acessíveis e rápidas e o mundo moderno exige estudantes autônomos, críticos e pensantes. O modelo tradicional de ensino, aquele em que o professor pode ser considerado o detentor do conhecimento e o aluno o receptor passivo desses conhecimentos transmitidos, está ultrapassado. São várias as opções metodológicas que confrontam este tradicional, que buscam uma participação maior dos alunos e que permitam que estes sejam independentes.

Como alternativa para o modelo tradicional de ensino, destaca-se a Análise de Produção Escrita (APE) e as Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE) como guia para as aulas. A APE permite ao professor analisar e entender como o estudante processou o entendimento de determinado conteúdo através de suas produções, sejam estas provas, caderno ou uma tarefa (CARDOSO; PEREIRA; DALTO, 2018). As TAPE são tarefas elaboradas pelo professor que advém de produções de alunos, com o objetivo de ensinar ou reforçar um conteúdo. Pesquisas desenvolvidas em Educação Matemática, vem trabalhando na perspectiva de Análise da Produção Escrita (APE) como uma estratégia de ensino. Esses trabalhos sugerem que a APE, através do uso das Tarefas de Análise da Produção escrita (TAPE), possa ser utilizada em sala de aula como uma estratégia de ensino (CARDOSO, 2017; CARDOSO; PEREIRA; DALTO, 2018; DONEZE, 2019; DONEZE; PEREIRA; DALTO, 2018, PEREIRA, 2021).

Em alguns trabalhos desenvolvidos até o momento (CARDOSO, 2017; CARDOSO; PEREIRA; DONEZE, 2019; PEREIRA, 2021) fazendo uso da APE, foram abordados conteúdos diversos, como Operações básicas com frações, Área e Perímetro de Figuras Planas, Progressão Aritmética, Análise Combinatória, Equações. Para este trabalho foi escolhido o ensino de Função Afim utilizando a APE como estratégia de ensino. Desta forma, o objetivo deste trabalho é investigar a utilização de Tarefas de Análise da Produção Escrita em Matemática na retomada de conceitos de funções Afim, a partir da Trajetória Hipotética de Aprendizagem

Para estruturar o trabalho, utilizamos a Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA. Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), segundo Figueiredo e Costa (2016) é formada por objetivos para a aprendizagem, por tarefas matemáticas e por hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos. “A construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) oferece uma descrição de aspectos-chave do planejamento da aula de matemática” (FIGUEIREDO; COSTA, 2016, p. 4). A THA evidencia os caminhos que os alunos podem ou devem seguir no decorrer dos estudos, ou seja, é uma hipótese elaborada pelo professor sobre como deve ser conduzida a aula e uma expectativa de como a aprendizagem será processada pelos alunos.

Esta dissertação está dividida em 7 capítulos: 1 - Introdução, que dá um panorama geral da pesquisa; 2 - Fundamentação Teórica, que contém as referências em que esta pesquisa foi baseada; 3 - Procedimentos Metodológicos, uma descrição de como ocorreu a coleta das produções e como foi feita a análise dos dados; 4 - Trajetória Hipotética de Aprendizagem, o pano de aula completo com as 14 TAPE, possíveis duvidas e resoluções das tarefas, além da formalização; 5 - Relato e Análise das Aplicações das TAPE, descrição detalhada da aplicação das TAPE, análise dos dados da Atividade Diagnóstica, análise detalhada de dois alunos nas TAPE e Atividade Diagnóstica.; 6 – Considerações Finais, com reflexões e conclusões sobre este trabalho; e 7: Referências Bibliográficas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA

Diversas mudanças na sociedade fazem com que a escola tenha que se reinventar, o desenvolvimento de novas tecnologias facilitou as relações sociais, as interações entre as pessoas, exigindo que a escola também se modernizasse, oferecendo novas formas de aprender, modificando as relações entre o professor e o aluno, entre o ensino, aprendizagem e avaliação.

Entre os muitos temas investigados na Educação Matemática, a avalição tem um destaque. Mediar as mudanças e o crescimento dos alunos está conectado com as práticas que os professores utilizam em sala de aula. Utiliza-se de uma avaliação para diversas situações que permita o aluno construir um conhecimento, desta forma a avaliação realizada na sala de aula deve ser entendida como um processo único e contínuo que se inicia no primeiro dia de aula e só termina no último.

Visando utilizar a avaliação como reguladora do processo de ensino e aprendizagem, ou seja, uma ação que visa investigar as "potencialidades do estudante de explicar, de aprender de compreender e enfrentar criticamente situações novas" (BURIASCO, 2009), o Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA) do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) tem como uma de suas atividades a investigação relacionada à Avaliação da Aprendizagem Escolar e acumula uma vasta experiência e estudo na Análise da Produção Escrita (APE). Desde 2004, esse grupo de estudos desenvolve pesquisas que tratam a respeito dessa temática, que busca esclarecer e tentar entender o que a produção escrita de professores e estudantes revela, ou o que esses diferentes sujeitos nos processos de ensino e aprendizagem pensam na hora de resolver atividades matemáticas (SANTOS; BURIASCO, 2015).

Neste sentido, segundo Viola dos Santos (2007), podemos descrever a APE como:

> [...]Uma das formas de buscar conhecer as maneiras de alunos resolverem questões abertas de matemática, de conhecer como se configuram seus processos de aprendizagem. [...] análise da produção escrita dos alunos é uma alternativa promissora para fazer interpretações sobre a atividade matemática dos alunos e também sobre os processos de ensinar e aprender matemática. [...] A Análise da Produção Escrita se apresenta como uma estratégia para implementação da avaliação como prática de investigação (VIOLA DOS SANTOS, 2007, p. 27-30).

Ao olhar para a avaliação como uma investigação sobre as realizações dos alunos, a Análise da Produção Escrita não tem como objetivo principal a atribuição de uma nota. O objetivo é obter informações que possibilitem perceber o ocorrido nos processos de ensino e de aprendizagem e uma tomada de decisão de modo a auxiliar tanto professores quanto alunos a organizar e orientar suas ações (SANTOS, 2014).

A APE proporciona ao professor obter informações sobre a aprendizagem do aluno, permite ao professor refletir sobre seu trabalho, em como está conduzindo suas aulas e reformular sua estratégia de ensino. Além disso, possibilita também ao aluno analisar o seu processo de aprendizagem.

Na tese de doutorado de Santos (2014), ao analisar trabalhos desenvolvidos no grupo GEPEMA, a autora apresenta como consequência que a Análise da Produção Escrita pode ser considerada como Estratégia de Ensino. Ainda segundo Santos (2014), alguns trabalhos do grupo sugerem que a avaliação, além de ser uma prática de investigação, também se constitui uma oportunidade de aprendizagem. Ou seja, a avaliação não pode ser vista como um momento à parte da vida escolar ou uma interrupção do processo de ensino, mas sim como parte integrante deste; uma aliada ao processo de ensino/aprendizagem.

Segundo Santos (2014),

> [...] a análise da produção escrita como estratégia de ensino pode ser utilizada para auxiliar o professor na obtenção de informações sobre os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, as quais posteriormente podem subsidiar a elaboração de intervenções, comentários e/ou questionamentos na produção do aluno de modo que se possa, sob orientação do professor, desenvolver ferramentas matemáticas, isto é, ser autor do seu próprio conhecimento matemático (SANTOS, 2014, p. 63).

Através das produções escritas dos alunos que o professor fará estudos e investigações que possibilitem conduzir suas ações, é possível obter informações sobre o que os alunos sabem ou não do conteúdo, e reformular suas estratégias. Na mesma direção, Cardoso, Pereira e Dalto (2018) relatam que

> Ao professor cabe o papel de analisar as produções escritas dos alunos a fim de obter informações que o auxilie; elaborar comentários e/ou questionamentos na produção dos alunos; elaborar intervenções na forma de trajetórias de ensino e aprendizagem. Ao aluno lhe cabe resolver uma tarefa; discutir com os colegas as informações geridas da análise das produções feita pelo professor; refletir a respeito do que fez a partir dos comentários e/ou intervenções feitas pelos professores. Em ambas as direções, possibilitará aos alunos que desenvolvam suas próprias ferramentas matemáticas (CARDOSO; PEREIRA; DALTO, 2018, p. 361).

Santos e Buriasco (2015) afirmam que a análise da produção escrita como uma estratégia de ensino pode ser utilizada pelo professor para “[...] obter informações a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática de modo a subsidiar o processo de elaboração de intervenções, comentários e/ou questionamentos na produção do aluno” (SANTOS; BURIASCO, 2015, p. 133).

2.2 TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA

Desde 2016, pesquisas desenvolvidas no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGMAT da UTFPR, vem trabalhando na perspectiva de APE de Santos (2014), considerando APE como estratégia de ensino.

Cardoso (2017) apresentou propostas de ensino com a Análise da Produção Escrita como um fio condutor nas aulas de matemática, baseada no trabalho de Santos (2014), para os conteúdos de progressão aritmética, expressão com frações e área e perímetro. Em seu trabalho, Cardoso (2017) apresenta uma proposta de ensino para professores de matemática utilizarem a APE em suas aulas para o conteúdo de Progressão Aritmética, com previsão de oito aulas. Cardoso (2017) concluiu que esta esta permitiu "modificar profundamente a dinâmica da aula de Matemática, colocando o aluno em posição semelhante à do professor, que deve analisar aquilo que o aluno produziu na resolução de uma tarefa. " (CARDOSO, 2017, p. 43).

Para estruturar uma aula utilizando a APE no ensino, foi preciso desenvolver tarefas específicas para este objetivo. Estas tarefas são produções de alunos, analisadas previamente pelo professor, que possuem um objetivo específico (ensinar, retomar ou reforçar um conteúdo), e foram definidas como TAPE, Tarefas de Análise da Produção Escrita. Nos trabalhos descritos a seguir, veremos como as TAPE foram definidas e quais suas características.

Pereira (2019) apresentou em seu trabalho um curso de extensão com o título "Tarefas de Análise da Produção Escrita como estratégia de ensino e de aprendizagem", sua pesquisa investigou os conhecimentos mobilizados pelos professores quando estiveram envolvidos na construção e discussão de Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE). Segundo Doneze, Pereira e Dalto (2018) uma Tarefa de Análise da Produção Escrita –TAPE é definida como uma tarefa:

> [...] cujo surgimento advenha de uma produção escrita previamente analisada pelo professor, de modo que sua construção tenha sido no cerne desta produção escrita, tudo nele(a) proposto esteja envolto ao objetivo de se analisar tal produção escrita, norteando o ensino e a aprendizagem de determinado conteúdo, configurando-se como uma tarefa de questionamentos, reflexões, de comparação e discussão quanto aos diferentes pontos de vista e procedimentos que permitem solucionar as situações (DONEZE; PEREIRA; DALTO, 2018, p. 240).

Nas discussões com os participantes, Pereira (2019) pôde identificar que o ensino através da APE permite "apresentar um conhecimento matemático descomprimido, livre de padronizações, que busque considerar e avaliar a criatividade dos alunos como alternativas diferentes para conduzir o ensino. " (Pereira, 2019, p. 78). Além de identificar a presença da criatividade dos alunos ao resolverem situações-problema.

Doneze (2019) apresentou uma análise do processo de construção de Tarefas de Análise da Produção Escrita, destacando que ao elaborar TAPE, é imprescindível ter um objetivo definido e que as questões sejam de forma progressiva, que permita ao aluno progredir gradualmente no conteúdo abordado. A autora apresenta (Figura 1), através de questionamentos, características a serem consideradas no momento da elaboração das TAPE:

Figura 1 – Características na elaboração das TAPE

Características a se compreender em cada Tarefa
Como a produção escrita é utilizada na TAPE? • São elaborados questionamentos buscando chamar a atenção para determinado ponto da produção escrita. • São elaborados questionamentos para que o aluno se posicione sobre o certo ou errado.
Confronta produções escritas de um mesmo exercício ao passo que é preciso se posicionar sobre o certo ou errado? • Foram elaborados questionamentos gradualmente para que ao final o aluno concluísse o certo ou errado. • É solicitado de imediato que se resolva o exercício apresentado e posteriormente se posicione sobre o certo ou errado.
A tarefa auxilia o aluno a aprender um novo conteúdo ou apenas reforçar algo já conhecido por ele?

Fonte: Doneze, 2019, p. 46.

Doneze conclui então ser “possível caracterizar substancialmente Tarefas de Análise da Produção Escrita, como uma ação, cuja a progressividade em sua elaboração conduz a uma prática de interação e reflexão. ” (DONEZE, 2019, p.65).

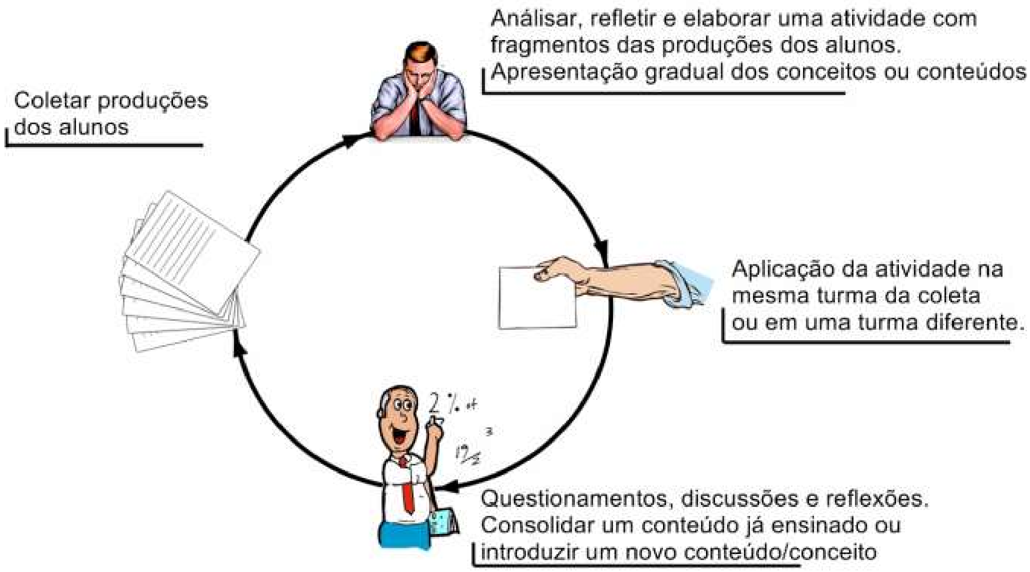
Minato (2019) apresentou procedimentos que os professores podem adotar para a construção de TAPE. Em seu trabalho “Tarefas de Análise da Produção Escrita para o Ensino de Progressões Geométricas”, a autora apresenta uma proposta de tarefas para o ensino de Progressão Geométrica. Ela relata que os alunos, por meio das investigações nas produções escritas propostas, pensam e percebem o que outro aluno fez e desta forma reflitam sobre o conteúdo, e conclui ser uma “proposta onde o ensino é feito de uma forma que os alunos são estimulados a pensar, a questionar e aprender. ” (MINATO, 2019, p. 42)

Pereira (2021) apresentou um trabalho sobre Tarefas de Análise da Produção Escrita para o ensino de Análise Combinatória utilizando uma sequência de 12 TAPE em turmas do 2º ano do Ensino Médio. Concluiu que as TAPE chamam atenção para “detalhes fundamentais nos conceitos estudados”, além de mostrar que houve aprendizagem dos principais conceitos de análise combinatória, concluindo ser uma estratégia de ensino e aprendizagem com grande potencial para ser usado em aulas.

Partindo deste princípio, de utilizar a APE como uma estratégia de ensino, é preciso identificar, selecionar e preparar produções escritas que permitam serem utilizadas para este fim.

Pereira e Dalto (2019) apresentam 4 etapas na elaboração/aplicação das TAPE, sendo elas, a coleta de produções dos alunos, ou seja, aplicação de atividades em alunos que já detém o conhecimento do tema proposto com o intuito de ter material escrito; análise, reflexão e elaboração de atividades com recortes dessas produções dos alunos, ou seja, planejamento de uma aula utilizando a APE como base. Aplicação da nova tarefa em uma turma, e a consolidação do processo, feito através de questionamentos, discussões e reflexões, onde o professor passa a ser o mediador dessa etapa.

Figura 2 – Etapas das TAPE



Fonte: Pereira e Dalto, 2019, p. 11

Ainda de acordo com os autores Pereira e Dalto (2019), as TAPE devem ser formuladas a partir de materiais advindos da prática, da sala de aula, de produções vindas de alunos, podendo ser utilizadas “copias do caderno, de atividades ou de avaliações”.

A escolha das tarefas requer atenção especial, deve levar em consideração os objetivos que se pretende ao aplicá-las. Doneze (2019) destaca que ao elaborar as TAPE há características diferentes em cada tarefa, pois cada pergunta elaborada tem o objetivo específico em determinado ponto da produção escrita. Além disso, “[...] confronta produções escritas de um mesmo exercício também solicitando o posicionamento dos alunos sobre o certo ou errado”

(PEREIRA, 2019, p. 4). Assim, as TAPE podem auxiliar a aprender um novo conteúdo ou reforçar algo já conhecido.

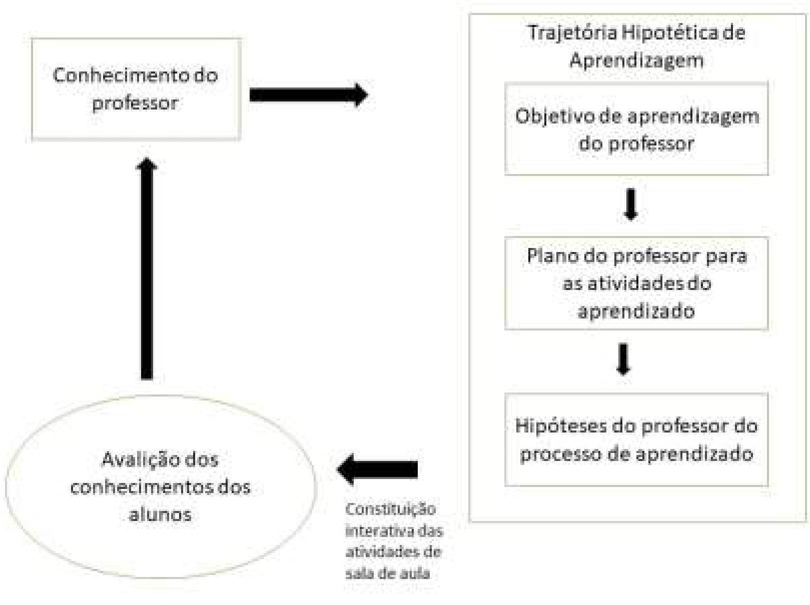
Desta forma, busca-se elaborar as TAPE de forma que permita ao aluno questionar, refletir e investigar sobre o conteúdo abordado, podendo seu utilizado uma ou várias produções escritas, para que torne possível a construção do conhecimento pelos alunos.

2.3 TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM (THA)

Simon (1995) propõe que compreender a aprendizagem como um processo de construção individual e social permite aos professores entender a aprendizagem de seus alunos. Segundo o autor, cabe ao professor propor ações eficazes de forma a mobilizar os alunos a utilizar seus conhecimentos prévios como estímulo para seus estudos.

Em seu trabalho, o autor apresenta o "Ciclo de Ensino de Matemática", um esquema que evidencia as relações existentes entre o conhecimento do professor, pensamentos e reflexões, tomada de decisões e atividades. Este ciclo tem como objetivo formular modelos de ensino baseado nos objetivos traçados pelo professor para determinada aula. Desta forma, se caracteriza como ciclo, pois muitas vezes é necessário alterar os objetivos previamente estabelecidos para se adaptar às atitudes dos alunos no decorrer do processo de ensino e aprendizagem. A cada observação, alteração ou reformulação dos objetivos o ciclo se inicia, caracterizando as relações cíclicas.

Figura 3 - Ciclo de Ensino de Matemática



Fonte: Simon, 1995, p. 136 (Tradução livre do autor).

Ao planejar suas aulas, o professor estabelece objetivos de aprendizagens, interpreta as ações dos alunos, toma decisões sobre possíveis conhecimentos que seus alunos podem aprender e, quando se fizer necessário, faz mudanças nestes processos, de acordo com o desenvolvimento dos alunos. Para esse objetivo de aprendizagem que o professor estabelece, Simon (1995) usa o termo “Trajetória Hipotética de Aprendizagem – (THA) ”, sendo uma referência à previsão, ao suposto caminho que os alunos farão para chegar à aprendizagem, partindo do objetivo traçado pelo professor.

Ao usar o termo “hipotético”, Simon (1995) se refere a duas situações de significados, aquele em que o professor faz uma estimativa do conhecimento dos alunos, ou seja, o professor faz uma hipótese sobre o que o aluno sabe para, a partir deste ponto, traçar seus objetivos, e o outro significado faz referência ao que o professor espera daquele plano de aula, às expectativas do professor com relação a aprendizagem dos alunos.

Para Simon (1995), a THA fornece ao professor um planejamento que justifica suas escolhas particulares para os objetivos específicos estabelecidos para os alunos. Com a THA o professor pode tomar as decisões de maneira mais precisa quanto ao aprendizado dos alunos.

Simon (1995) destaca que a THA é constituída por 3 componentes, o *objetivo*, que define qual caminho o professor deve percorrer, ou seja, uma trajetória de como será a aula, as *atividades* que serão aplicadas aos alunos, e a *aprendizagem hipotética*, uma previsão de como o pensamento e a compreensão dos alunos se dará perante as atividades propostas pelo professor.

Cabe aqui fazer uma distinção entre atividade (como o autor Simon se refere) e tarefa (termo que usamos nesta pesquisa). De acordo com Christiansen & Walther (1986), a atividade é realizada através de um conjunto de ações que tem um propósito de atingir objetivos causados pelo motivo da atividade. “A atividade existe apenas nas ações, mas atividades e ações são entidades diferentes. Por isso, uma ação específica pode servir para realizar diferentes atividades, e a mesma atividade pode dar origem a diferentes objetivos e desse modo iniciar diferentes ações. ” (Christiansen & Walther, 1986, p. 255). O autor trata a tarefa como um objetivo de uma ação em que a atividade desenvolve. “A tarefa proposta torna-se o objeto da atividade dos alunos e a proposta de tarefas em conjunto com as ações a elas respeitantes realizada pelo professor constitui o principal método pelo qual se espera que a matemática seja transmitida aos alunos. (Christiansen & Walther, 1986, p. 224).

Para este trabalho, o que o Simon chama de atividade, vamos nos referir a tarefas, como sendo uma proposta do professor, que deve ser interpretada pelos alunos e podem dar origem a diversas atividades.

A criação e a modificação contínua da THA estão fortemente ligadas ao Ciclo de Ensino de Matemática proposto por Simon (1995), evidenciado na Figura 3. Ao utilizar a THA fica evidente a importância de se ter uma meta e um planejamento para o ensino e para a tomada de decisões do professor. Ao desenvolver um processo de aprendizagem hipotético, o professor deve ter o foco em seus objetivos, que vão gerar ideias de atividades a serem aplicadas, que vão gerar as hipóteses do professor sobre o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos.

Ao optar por uma THA, o professor desenvolve um plano de aula com as atividades que serão aplicadas em sala. À medida que ocorre a interação entre professor e alunos com as atividades, estas constituem uma experiência e, de acordo com Simon (1995), esta experiência, dada sua origem social, é diferente daquela prevista pelo professor. Simultaneamente e em interação com a constituição social da atividade em sala de aula, ocorre uma modificação nas ideias e no conhecimento do professor, uma vez que este deu sentido ao que aconteceu em sala de aula, conduzindo a uma modificação ou uma nova Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Esta modificação na THA não está restrita ao planejamento das aulas, o professor deve se empenhar para ajustar a trajetória que ele presumiu e ajustar de acordo com a interação com os alunos, muitas vezes podendo ocorrer entre a aplicação das atividades programadas e, ainda segundo Simon (1995), essas alterações podem ser feitas em qualquer um dos componentes da THA, o objetivo, as atividades ou na aprendizagem hipotética.

Entender e perceber que o aluno já possui um conhecimento próprio e anterior à sala de aula, e usar esse conhecimento de gatilho para as novas aprendizagens, faz com que todo o processo de ensino e aprendizagem se modifique. É necessário outro posicionamento do professor na preparação e na condução de suas aulas, levando em consideração esses aspectos, os conhecimentos prévios dos alunos, cabe ao professor propor ações eficazes de forma a mobilizar os alunos a utilizar esse conhecimento para se desenvolver.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa baseia-se na abordagem qualitativa e mais especificamente sob um caráter interpretativo, segundo Bogdan e Biklen (1994), este tipo de pesquisa se destaca por ser mais descritiva, sendo o processo mais importante que os resultados:

> "Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. (...) os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém através do contacto directo. (...) Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as acções podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. (...) A investigação qualitativa é descritiva. (...) Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. (...) Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos. " (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 47-50).

O ambiente natural se denota pela pesquisa ter sido realizada em duas turmas do ensino médio, das quais o autor é professor titular, durante os horários habituais de aula, seguindo uma rotina já estabelecida pelas escolas, como dia e horário das aulas. Como professor titular, além de ter o contato direto com os alunos, o autor tinha a responsabilidade pelo aprendizado, sendo importante, além de observar a dinâmica da pesquisa, atentar para que as aulas tenham seu objetivo alcançado, que é o de ensinar aspectos da função afim.

Ainda em relação à abordagem qualitativa, os resultados obtidos com esta pesquisa estão descritos nos próximos capítulos desta dissertação, tendo sido analisados sob os critérios de Análise da Produção Escrita (APE) desenvolvidos pelos trabalhos como Santos (2014), Cardoso (2017) e Doneze (2019), que visam na formação do aluno, enquanto ele produziu e aprendeu, e não apenas no erro. Foram analisadas as produções dos estudantes respeitando a maneira que cada aluno registrou sua resposta.

Desta forma o objetivo da pesquisa é o de investigar a utilização da Análise da Produção Escrita (APE) e as Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE) no ensino de funções, para alunos do 3º ano do Ensino Médio (durante o terceiro momento eu justifico porque foi feito para estes alunos). A preparação e planejamento das aulas foram baseados na Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA).

A pesquisa foi dividida em quatro momentos. Importante destacar que durante a pesquisa passamos pelo período de pandemia entre os anos de 2020 e 2021, na qual tivemos a rotina escolar totalmente alterada, as aulas aconteceram de forma remota, através de vídeo aulas, de encontros online e através de aplicativos disponibilizados pelo governo.

No primeiro momento, que ocorreu antes do período de pandemia, ou seja, sem a alteração na rotina escolar, com as aulas totalmente presenciais, houve a definição das tarefas que envolvem o conceito de função e a aplicação destas tarefas para alunos que já possuem conhecimento do conteúdo. Esta fase da pesquisa aconteceu em três turmas do 3º ano do Ensino Médio, das quais eu era o professor titular e estes alunos já haviam tido o conteúdo Função no 1º ano do Ensino Médio, e como estavam se preparando para o vestibular, a aplicação das tarefas nestas turmas serviu como uma recapitulação de aspectos importantes da função afim.

Foram aplicadas nove tarefas, elaboradas de acordo com os livros didáticos que fazem parte do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) e que são adotados pelas escolas (Iezzi, Matemática: ciência e aplicações: Ensino Médio; Dante, Matemática em Contexto: função afim e quadrática; Andrade, Matemática interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica), estas tarefas seguiram a sequência de como o conteúdo é abordado nos livros, foram utilizados os exemplos já resolvidos e problemas propostos nos livros, transformados em questões abertas, tendo sido adaptados os enunciados para o objetivo da pesquisa.

A aplicação destas tarefas para a coleta de produção seguiu a seguinte dinâmica, inicialmente eu entregava para os alunos a tarefa sem nenhuma explicação, fazíamos uma leitura em grupo e abria espaço para possíveis dúvidas, feito isso, os alunos respondiam individualmente seus formulários. Esta aplicação ocorreu durante o horário de aula sendo necessário sete encontros para fazer esta coleta.

Neste primeiro momento o objetivo foi obter material, ou seja, produções escritas, que foram utilizadas para a criação das Tarefas de Análise da Produção Escrita, desta forma, as questões foram abertas, e exigiam dos alunos palavras ou frases.

O segundo momento da pesquisa consistiu na elaboração das TAPE e da Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Para isso, as produções escritas foram escolhidas de acordo com os critérios estabelecidos por Pereira (2019), "[...] resoluções que apresentem diferentes características, que estejam corretas, incorretas ou parcialmente corretas para que sejam levantados questionamentos sobre tais resoluções a fim de direcionar as conclusões dos alunos" (PEREIRA, 2019, p. 8). Deste modo, coube ao autor, como professor titular, analisar e estruturar essas produções escritas. A análise de certo e errado foi baseada na resolução proposta no livro didático. Para este momento do trabalho, foi selecionado apenas respostas corretas, pois como o objetivo é de ensinar um conteúdo, não fazia sentido utilizar resoluções parcialmente corretas e erradas para elaborar as TAPE (os alunos não detêm o conhecimento para discernir entre o que é certo ou errado).

Foram elaboradas 14 TAPE, uma sequência de tarefas que engloba o conceito de função como relação entre variáveis, definição de função por meio da relação entre conjuntos e as características da função afim, como lei de formação, coeficientes angular e linear, raiz e representação gráfica. Essas TAPE estão estruturadas na THA, sendo apresentadas possíveis resoluções, dúvidas e a formalização de cada conteúdo abordado.

O terceiro momento da investigação consistiu em aplicar a Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Neste momento tivemos que fazer uma alteração no planejamento inicial. O conteúdo funções deveria estar no 1º ano do Ensino Médio, mas, devido às alterações no currículo, sendo implementado o Novo Ensino Médio, o conteúdo funções não estaria mais nos meses iniciais do ano letivo e isto nos pegou de surpresa, pois devido a pandemia, tivemos que interromper por um período a pesquisa e desta forma o tempo para conclusão do projeto estava limitado.

Paralelo a isso, como professor titular do 3º ano do Ensino Médio, o autor estava lecionando sobre juros simples e compostos para duas turmas. Conteúdos estes que remetem a funções (afim e exponencial), e foi percebida uma defasagem muito grande dos alunos. Durante os problemas propostos aos alunos, que envolvia identificar, através de um gráfico, qual tipo de função estava relacionado, os alunos não sabiam responder, nem mesmo conseguiam fazer uma leitura correta da lei de formação do problema.

Foi diante desta situação que o autor aproveitou a oportunidade para fazer alguns questionamentos sobre função para estes alunos, perguntas como qual tipo de função, qual o conjunto domínio, se era crescente ou decrescente, pois, em tese, já teriam visto este assunto no 1º ano do Ensino Médio. Os alunos não respondiam, alegando que durante o período da pandemia, no qual tiveram aulas remotas (seja pela televisão, celular ou computador) eles não conseguiram acompanhar. Alguns alunos disseram que ficaram sem acesso, ou seja, não tiveram aulas, e outros, mesmo assistindo as aulas, não entendiam o que estava sendo transmitido, e não tinham como tirar dúvidas, ficando sem compreender o conteúdo. Em resumo, estes alunos tiveram o conteúdo função afim no período de pandemia com as aulas de forma remota, mas não conseguiam sequer relacionar a lei de formação de uma função com o gráfico da mesma.

Juntamente com o orientador, decidimos aplicar uma atividade diagnóstica nestas turmas do 3º ano, explorando alguns conceitos de função afim, e o resultado (apresentado na análise dos dados) mostrou que os alunos não tinham compreensão sobre conceitos e características básicos de função. Desta forma, sabendo da importância que a função afim tem dentro da matemática e de forma interdisciplinar em outras áreas do conhecimento, decidimos aplicar as TAPE, baseados no resultado aquém do esperado na atividade diagnóstica, nestas duas turmas do 3º ano do Ensino Médio, mesmo sabendo que eles já haviam tido contato com este conteúdo.

A dinâmica das aplicações das TAPE ocorreu em sala de aula, no horário habitual das turmas. Por opção do autor, como pesquisador, os alunos responderam individualmente suas tarefas, porém, foi combinado que durante a execução da TAPE os alunos poderiam discutir entre eles assuntos da TAPE para que cada um chegasse a seu consenso e respondesse sua tarefa.

Ao entregar as TAPE para os alunos, pedi que eles fizessem uma leitura individual e em seguida, fizemos uma leitura em conjunto. Neste momento, observou-se se haveria alguma dúvida ou palavras desconhecidas para os alunos, e é importante esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se com os alunos, consultar um dicionário.

De posse da TAPE, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, individualmente começaram a resolvê-la. Durante a realização das tarefas pelos alunos, o professor tem um papel fundamental de observar e incentivar. Deste modo, como professor aplicador das TAPE, o autor percorria a sala no intuito de estimular os alunos, fazendo perguntas para que os norteasse e incentivando a troca de ideias entre eles, acompanhando suas explorações e ajudando-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decorrer da aplicação das TAPE.

Após a conclusão da TAPE por todos os alunos foi feita a formalização do conteúdo. Ressaltando que a formalização das TAPE $2, 3, 4$ aconteceram juntamente com a TAPE 5, o mesmo para as TAPE $10,11$, que tiveram sua formalização na TAPE 12. A TAPE 14 não tem formalização, pois ela é uma TAPE que retomou os conceitos vistos por todas as tarefas.

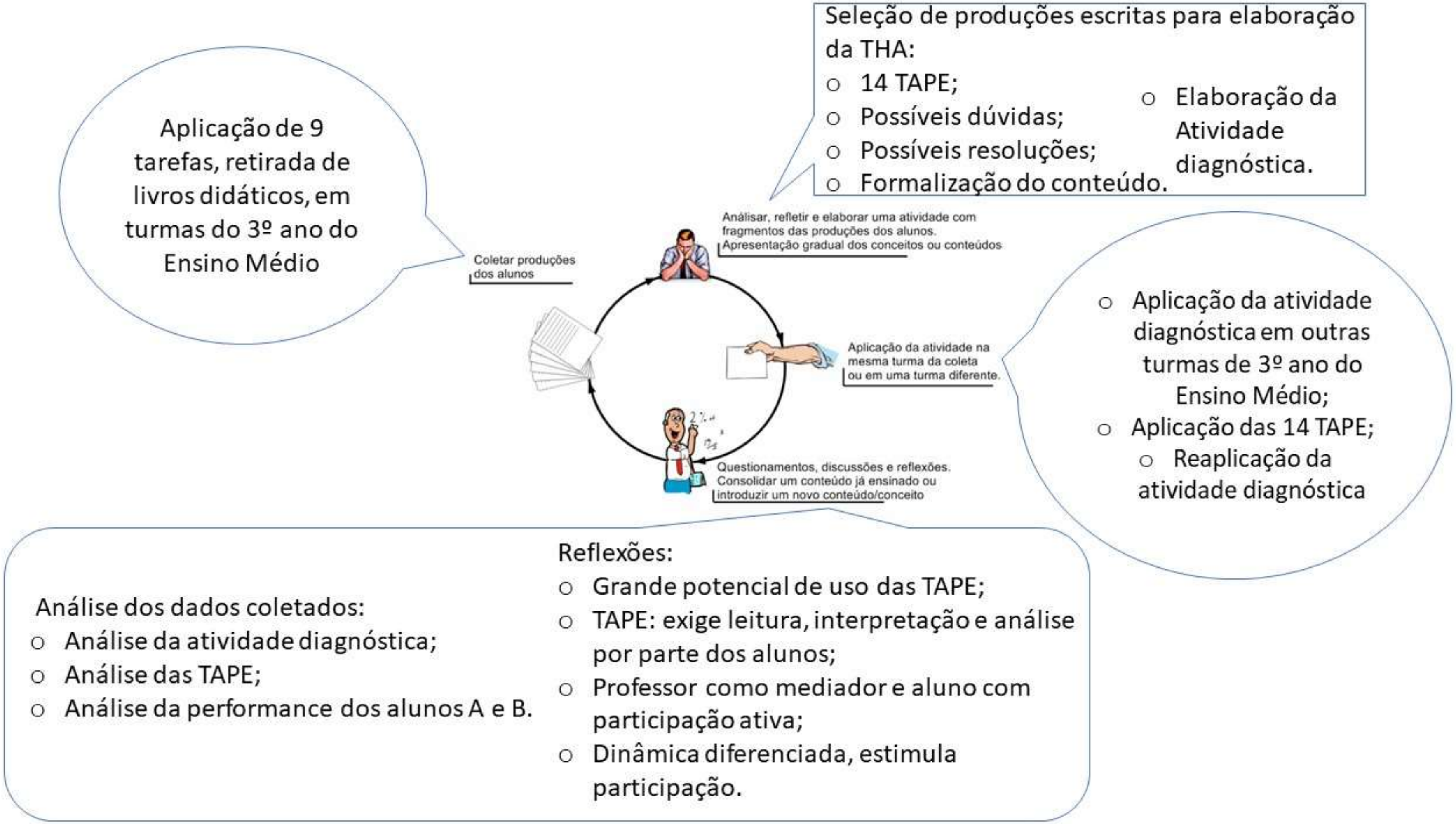
Para a formalização, foi promovido um debate com os alunos apresentando os termos técnicos e a teoria envolvida na TAPE, registrando na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através das resoluções das TAPE.

E foi durante a aplicação das TAPE que tivemos a ideia de reaplicar a atividade diagnóstica nestes alunos. Esta atividade serviria de base de comparação para fazer uma avaliação de como os alunos processaram o ensino de função através das TAPE. Após a aplicação das 14 TAPE, os alunos retomaram a atividade diagnóstica feita por eles anteriormente, optou-se por devolver o mesmo formulário, de forma que os próprios alunos poderiam observar o que haviam respondido anteriormente às TAPE e refazer após as aulas pela estratégia de ensino da APE.

O quarto momento foi a análise dos dados coletados. Foram reunidos os registros escritos dos alunos ao resolverem as TAPE e analisados sob os critérios de Análise da Produção Escrita (APE) desenvolvidos pelos trabalhos como Santos (2014), Cardoso (2017) e Doneze (2019), desta forma, foi considerado o que foi aprendido e o que gostaríamos que fosse aprendido, o foco está no que o aluno produziu e aprendeu e não apenas no certo ou errado. Utilizando essa estratégia “o professor foca mais seus objetivos na formação do aluno e menos na sua certificação” (VIOLA DOS SANTOS, BURIASCO e CIANI, 2008. p.43).

Como o objetivo do trabalho é o de investigar a utilização de Tarefas de Análise da Produção Escrita em Matemática na retomada de conceitos de funções Afim, optamos por usar a atividade diagnóstica como referência, ou seja, observamos como foi o desempenho dos estudantes ao refazer a atividade diagnóstica após as aulas através da estratégia de ensino APE com o uso das TAPE (resultados apresentados na seção 16 do capítulo 5). Além disto, selecionamos dois alunos que não tiveram um desempenho satisfatório na atividade diagnóstica, mas que ao refazerem esta mesma atividade após as TAPE tiveram uma evolução significativa. Para estes dois alunos específicos foi investigado detalhadamente a participação e resolução de suas 14 TAPE e o desempenho na atividade diagnóstica (resultados apresentados na seção 16.1 do capítulo 5).

Figura 4 – As 4 etapas das TAPE



Fonte: Autoria própria (2022).

4 TRAJETÓRIA HIPOTETICA DE APRENDIZAGEM

Apresentamos agora a THA, o plano de aula, com a hipótese de como foram as aulas, as TAPE elaboradas a partir de resolução de alunos, resoluções esperadas pelos alunos participantes, possíveis dúvidas e a formalização do conteúdo.

4.1 TAPE 1

Objetivo: Evidenciar a noção de função como uma relação ou correspondência entre grandezas (variáveis).

4.1.2 A TAREFA

Figura 5 – Enunciado TAPE 1

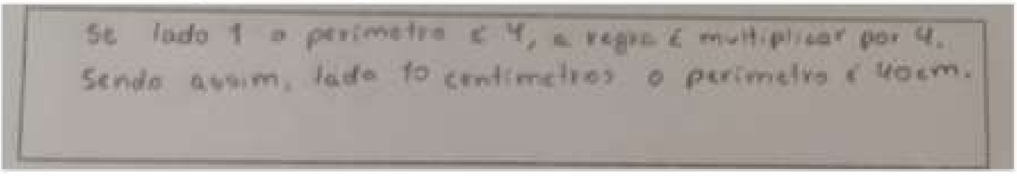
Dois alunos, Carlos e Mara, resolveram a seguinte questão:

A tabela a seguir relaciona a medida de comprimento do lado de um quadrado (l), e a medida do perímetro (P), ambos em centímetros.

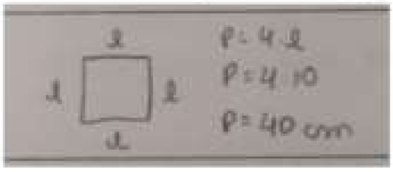
Medida de comprimento do lado.	Medida do perímetro.
1	4
2	8
3	12

a) Qual a medida do perímetro de um quadrado cujo lado mede 10 cm?

Observe a resolução do Carlos para a letra a:

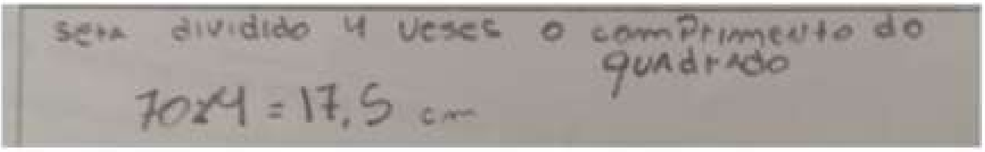


Observe a resolução de Mara para a letra a:

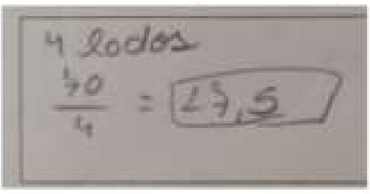


b) Qual a medida do lado de um quadrado cujo perímetro mede 70 cm?

Observe a resolução do Carlos para a letra b:



Observe a resolução de Mara para a letra b:



Após análise das respostas de Carlos e Mara para o problema proposto, responda as seguintes questões:

a) Ao analisar a relação entre o lado e o perímetro do quadrado, essas grandezas possuem dependência (ou seja, existe uma conexão entre elas)? Explique.

b) Descreva uma situação qualquer do seu dia a dia que exista uma relação de dependência.

Fonte: Autoria própria (2022).

A intenção desta tarefa é fazer com que os alunos percebam que existem relações entre grandezas e é importante para o estudo das funções identificar o tipo de relação existente entre elas. No item “a” da tarefa, utilizando como referência as resoluções apresentadas por alunos, a intenção é mostrar como o lado e o perímetro do quadrado se relacionam. Já no item “b” a intenção é provocar os alunos a pensar em uma situação do cotidiano que mostra uma relação de dependência e como essa relação se apresenta.

4.1.3 RESOLUÇÕES ESPERADAS

Para o item “a”**,** a expectativa é que os alunos percebam que o perímetro do quadrado depende da medida do seu lado, logo, são aguardadas respostas do tipo:

- Existe relação de dependência, o perímetro depende da medida do lado do quadrado.
- Existe relação de dependência, quanto maior for o lado do quadrado, maior será o perímetro.
- Existe conexão entre perímetro e lado, como o quadrado tem 4 lados, basta multiplicar a medida do lado por 4 para obter o perímetro.
- Sim, existe dependência, uma regra entre as grandezas lado do quadrado e perímetro, essa regra é multiplicar por 4 a medida do lado do quadrado para obter o perímetro, sendo, ainda, o perímetro dependente da medida do lado do quadrado.

Para o item “b”, as possibilidades são inúmeras, a intenção aqui é fazer os alunos pensarem que são as mais diversas situações do nosso cotidiano que possuem uma correlação, uma relação de dependência, de forma que cada aluno pode usar sua imaginação, sua vivência, sua realidade, para exemplificar uma dessas situações.

Como possíveis respostas:

- O preço de uma mercadoria qualquer com a quantidade comprada. Exemplo (e aqui pode ser muitos, basta usar a criatividade), 1 lata de refrigerante custa $R\$5{,}00,$ 2 latas, $R\$10{,}00$, 3 latas, $R\$\ 15{,}00$, e assim por diante, dessa forma, o valor a pagar depende da quantidade de latas de refrigerantes compradas.
- A distância percorrida por um automóvel com a quantidade de combustível no tanque. Quanto mais litros no tanque, maior a distância percorrida, uma relação

de dependência em que a distância a ser percorrida, depende de quantos litros de combustível há no tanque.

- Restaurante do tipo "self-service", onde o valor que se paga pela comida é dado pela quantidade de gramas de comida que se coloca no prato. Desta forma, o valor a pagar depende da quantidade de comida.
- Cobrança de estacionamento, cobra-se um valor pelo tempo que o carro fica estacionado. Dessa forma, o valor da cobrança está dependo do tempo que o carro fica estacionado no local.
- Em crianças, as doses de medicamentos são administradas em gotas de maneira que a quantidade de gotas é calculada de acordo com a massa da criança. A dose total depende do "peso" da criança.

4.1.4 POSSÍVEIS DÚVIDAS

Possíveis dúvidas que possam surgir, serão conduzidas de acordo com os princípios das metodologias ativas, em que os alunos assumem papeis de protagonistas e participam diretamente do processo de aprendizagem. Para proporcionar aos estudantes meios para que eles consigam guiar o seu desenvolvimento educacional, o professor deve fazer questionamentos que auxiliem os alunos na interpretação das tarefas e nas dúvidas e não simplesmente oferecer a resposta direta do problema.

Nos ensaios realizados, observamos alguns questionamentos que podem ser realizados pelos estudantes na resolução e que valem a pena serem registrados, para que caso ocorram durante a aplicação da tarefa a resposta já tenha sido devidamente estruturada. Estes questionamentos estão sendo simulados a seguir por meio de diálogo entre o aluno e o professor. Não necessariamente este diálogo ficará fechado entre os dois, pelo contrário, a ideia é que no decorrer das aplicações das TAPE essas dúvidas sejam compartilhadas com a turma, de forma que mais de um aluno participe destas discussões.

Algumas possibilidades de dúvidas que possam ser levantadas:

- Possível dúvida:

Aluno: O que é perímetro?

Professor: Analise a reposta do aluno ao calcular o perímetro, o que ele fez?

Aluno: pela resposta apresentada foi multiplicado a medida do lado do quadrado por quatro.

Professor: por que você acha que multiplicou por quatro?

Aluno: Porque o quadrado tem quadro lados.

Professor: E como são as medidas dos lados de um quadrado?

Aluno: o quadrado tem os quatro lados com medidas iguais.

Professor: Ao invés de multiplicar por quatro, há a possibilidade de fazer essa operação de outra forma?

Aluno: Sim, utilizando a operação de adição, ou seja, somar os 4 lados do quadrado.

Professor: então, somar os 4 lados do quadrado, é o cálculo do perímetro?

Aluno: Sim.

Professor: Consegue explicar o que é o perímetro, sem usar as operações de adição e multiplicação?

Aluno: o perímetro é a medida do contorno da figura, que é a soma da medida dos seus lados.

- Possível dúvida:

Aluno: para calcular o perímetro eu devo multiplicar a medida de dois lados?

Professor: Analise a resposta do aluno ao calcular o perímetro, o que ele fez?

Aluno: pela resposta apresentada foi multiplicado a medida do lado do quadrado por quatro.

Professor: o resultado seria o mesmo se o aluno tivesse multiplicado a medida de dois lados?

Aluno: Não, ao multiplicar a medida de dois lados o resultado seria 100 e não 40.

Professor: Portanto, ao analisar a resposta do aluno, como você calcularia o perímetro?

Aluno: multiplicando a medida do lado por quatro.

Professor: por que você acha que multiplicou por quatro?

Aluno: Porque o quadrado tem quadro lados.

Professor: E como são as medidas dos lados de um quadrado?

Aluno: o quadrado tem os 4 lados com medidas iguais.

Professor: Ao invés de multiplicar por quatro, há a possibilidade de fazer essa operação de outra forma?

Aluno: Sim, utilizando a operação de adição, ou seja, somar os quatro lados do quadrado.

Professor: então, somar os quatro lados do quadrado, é o cálculo do perímetro?

Aluno: Sim.

Professor: Consegue explicar o que é o perímetro, sem usar as operações de adição e multiplicação?

Aluno: o perímetro é medida do contorno da figura, que representado pela soma da medida dos seus lados.

Professor: No caso do quadrado, quando se multiplica a medida de dois lados, qual grandeza estamos calculando?

Aluno: Área.

- Possível dúvida:

Aluno: O que são grandezas?

Professor: Ao ler a pergunta, a que se refere a palavra "grandezas"?

Aluno: se refere ao lado e ao perímetro do quadrado.

Professor: lado e perímetro podem ser medidos ou calculados?

Aluno: sim, a medida do lado é dada, 10 cm, e o perímetro basta multiplicar o lado por quatro, ou seja, 40 cm.

Professor: Você conhece alguma outra situação em que é possível medir ou calcular?

Aluno: sim, temperatura, massa (peso), velocidade, força.

Professor: Consegue me dizer o que é grandeza?

Aluno: Uma grandeza é tudo aquilo que pode ser medido e possibilita que tenhamos características baseadas em informações.

- Possível dúvida:

Aluno: O que é "possuir dependência"?

Professor: Ao ler o problema proposto, o que entendeu sobre o cálculo do perímetro?

Aluno: entendi que para calcular o perímetro do quadrado eu devo multiplicar a medida do lado por quatro, porque o quadrado tem quatro lados.

Professor: Na resolução apresentada, qual a medida do lado e do perímetro?

Aluno: lado mede 10 cm e o perímetro 40 cm.

Professor: o que aconteceria com a medida do perímetro se o lado do quadrado fosse 20 cm?

Aluno: eu iria multiplicar a medida do lado por quatro, e o perímetro seria 80 cm.

Professor: e se o lado do quadrado fosse cinco cm?

Aluno: eu iria multiplicar a medida do lado por quatro, e o perímetro seria 20 cm.

Professor: Ao alterar a medida do lado do quadrado, o que aconteceu com o perímetro?

Aluno: Quando aumentou o lado, aumentou o perímetro, quando diminuiu o lado, diminuiu o perímetro.

Professor: Essas grandezas têm conexão?

Aluno: Sim, quando se altera o lado, altera o perímetro.

Professor: Lado e perímetro possuem dependência?

Aluno: Sim.

4.1.5 FORMALIZAÇÃO

Ao final da tarefa 1 pretende-se formalizar a ideia de função com todos os alunos, evidenciando que, no estudo dos fenômenos do nosso cotidiano, identificar as grandezas ligadas a ele e as relações de dependência entre elas é necessário para que se identifique uma função que representa o fenômeno.

No exemplo da tarefa 1, em que o lado do quadrado mede 10 cm e o perímetro 40 cm, temos a relação das grandezas lado e perímetro, podendo ser expressa como a multiplicação da medida do lado do quadrado por quatro, já que o quadrado possui quatro lados e o cálculo do perímetro se dá pelo contorno da figura (no caso do quadrado, como os 4 lados tem a mesma medida, pode-se multiplicar a medida do lado por 4 ou fazer a adição das medidas dos lados do quadrado). Assim, a ideia de função está presente quando relacionamos os valores de duas grandezas.

Tabela 1 – Lado e perímetro de um quadrado

Medida de comprimento do lado	Medida do perímetro
1	4
2	8
3	12
x	$4.x$

Fonte: Autoria própria (2022).

A medida do lado x de um quadrado corresponde a uma medida específica de perímetro, $\mathbf{4.x}$ (quatro vezes x)**.** Dizemos que o perímetro do quadrado é dado em **função** da medida do lado desse quadrado. Podemos ainda estabelecer uma fórmula que relaciona o perímetro (p) com o lado do quadrado, neste caso, $p = 4.x$. Chamamos essa fórmula de **lei da função** ou **lei de correspondência**.

4.2 TAPE 2

Objetivo: Caracterizar a noção de **função** utilizando a notação de conjuntos.

4.2.1 A TAREFA

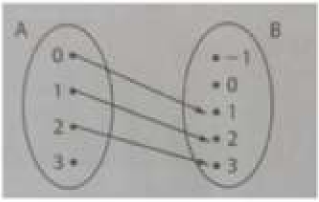
Figura 6 – Enunciado TAPE 2

Três alunos, Carlos, Mara e Paulo, resolveram a seguinte questão:

1) Considere dois conjuntos, dados por A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3} e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

I. Associar a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y = x + 1$.

x	y
0	1
1	2
2	3



a) É função? Por quê?

Observe a resolução do Carlos para a pergunta:

Não é função, pois há um elemento do conjunto domínio que não está ligado a nenhum elemento do conjunto contra domínio.

Observe a resolução da Mara para a pergunta:

Não, porque os elementos do primeiro conjunto precisam ter um correspondente no segundo conjunto e o número "3" não tem.

Observe a resolução do Paulo para a pergunta:

Não, porque um elemento de A não tem um correspondente no conjunto B.

De acordo com a situação apresentada, responda:

a) Ao analisar a primeira resposta do aluno Carlos e em seguida as outras respostas, como podemos denominar o conjunto A? E o conjunto B?

b) De acordo com as respostas dos 3 alunos, como você define uma função para este caso apresentado?

Fonte: Autoria própria (2022).

O objetivo desta tarefa é começar a definir uma função como uma relação entre conjuntos. A letra “a” visa destacar que o conjunto A (primeiro conjunto) é chamado de **domínio** da função, enquanto o conjunto B é chamado de **contradomínio** da função. A letra “b” visa evidenciar que para uma relação ser uma função deve cumprir algumas regras, a primeira delas é que para **todos** os elementos do domínio da função (elementos do conjunto A) devem ter correspondente no conjunto contradomínio (elementos do conjunto B).

,

4.2.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

Para a letra “a” não se espera grandes dificuldades, pois está bem evidente na resposta do aluno que um conjunto se chama domínio e o outro contradomínio. Ao fazer a análise conjunta com as outras respostas fornecidas, espera-se que os alunos identifiquem que o primeiro conjunto se chama conjunto **domínio** e o segundo conjunto**, contradomínio.**

Para a letra “b” esperamos que os alunos percebam que, para ser uma função todos os elementos do conjunto domínio devem ter relação com elementos do conjunto contradomínio. Dessa forma, são possíveis respostas:

- Função é uma relação em que todos os elementos do conjunto domínio tem um correspondente no conjunto contradomínio.
- Função é quando todos os elementos do conjunto A tem ligação com elementos do conjunto B.
- Função é quando todos os elementos do primeiro conjunto têm uma ligação com elementos no segundo conjunto.
- Função é quando não ocorre elementos “sozinhos” no primeiro conjunto, ou seja, todos os elementos do primeiro conjunto devem ter seu par no segundo conjunto.

4.2.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

- Possível dúvida:

Aluno: o que é relação entre os conjuntos?

Professor: Ao analisar a tabela ou a imagem, o que você percebe?

Aluno: que tem um número x e um número em y e que esses números estão relacionados no conjunto A e conjunto B.

Professor: Como esses números estão relacionados?

Aluno: Foi dada uma fórmula no enunciado.

Professor: o que essa fórmula faz?

Aluno: quando coloco o valor de x na fórmula e efetuo o cálculo, resulta no valor de y.

Professor: Então o valor de x tem uma conexão com o de y?

Aluno: sim, quando eu uso a fórmula no número x resulta no y.

Professor: Para você, isto é uma relação?

Aluno: Sim. Existe uma conexão entre eles.

4.3 TAPE 3

Objetivo: Caracterizar de forma precisa a noção de **função** utilizando a notação de conjuntos.

4.3.1 A TAREFA

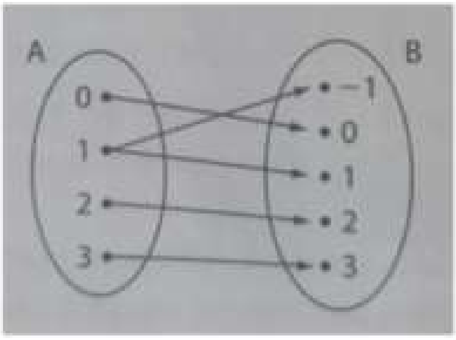
Figura 7 – Enunciado TAPE 3

Três alunos, Carlos, Mara e Paulo, resolveram a seguinte questão:

1) Considere dois conjuntos, dados por A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3} e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

II. Associar a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y^2 = x^2$.

x	y
0	0
1	+1
1	-1
2	2
3	3



a) É função? Por quê?

Observe a resolução do Carlos para a pergunta:

Não é função, pois há um elemento no con-
junto domínio que possui mais de um cor-
respondente no conjunto contra domínio.

Observe a resolução de Mara para a pergunta:

Não é função porque um número do conjunto A está rela-
cionado com dois números na coluna B.

Observe a resolução do Paulo para a pergunta:

Não, porque um elemento de A correspondeu a dois
elementos do conjunto B.

Agora, responda o que ser pede:

a) De acordo com as respostas dos 3 alunos, como você define uma função para este caso apresentado?

b) Compare esta situação com o caso anterior (item I), o que difere?

c) Junte as informações dos itens I e II, defina função.

Fonte: Autoria própria (2022).

O objetivo desta tarefa, juntamente com o item I, é evidenciar que, para se definir uma função, é preciso determinar algumas regras. A letra “a” reforça o entendimento sobre a situação apresentada, onde, para ser uma função, cada elemento do conjunto domínio (primeiro conjunto) deve possuir apenas um correspondente no conjunto contradomínio (segundo conjunto). A letra “b” da tarefa pretende que o aluno retome a regra estabelecida no item I e faça uma comparação com o item II e a letra “c” tem como intenção de que o estudante junte as informações dos itens I e II, e observe que para se definir função as 2 regras estabelecidas nas tarefas devem ser cumpridas, ou seja, para se definir uma função cada elemento do conjunto domínio deve ter apenas um único correspondente no conjunto contradomínio.

4.3.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

Para o item “a” a expectativa de resposta é basicamente a interpretação da leitura das respostas pelos alunos, ou seja, que fique evidente que, para ser uma função, os elementos do domínio não podem ter mais de uma correspondência no contradomínio.

Possíveis respostas para o item “a”:

- Função é uma relação em que todos os elementos do conjunto domínio tem apenas um correspondente no conjunto contradomínio.
- Função é quando os elementos do conjunto A tem ligação com apenas um elemento do conjunto B.
- Função é quando os elementos do primeiro conjunto têm ligação com apenas um elemento no segundo conjunto.
- Função é quando não ocorre de um dos elementos no primeiro conjunto ter mais de uma ligação com os elementos no segundo conjunto, ou seja, os elementos do primeiro conjunto devem ter seu único par no segundo conjunto.

Para o item “b” a intenção é que os alunos percebam que para definir uma função é necessário que as duas regras sejam obedecidas, dessa forma, essa pergunta visa distinguir bem as características da função.

Respostas esperadas para o item “b”**:**

- No item I, ficou evidente que para ser função todos os elementos do conjunto domínio devem ter correspondência no conjunto contradomínio, já no item II, ficou claro que os elementos do domínio não podem ter mais que uma correspondência no conjunto contradomínio.

- Enquanto no item I todos os elementos do conjunto A devem ter uma ligação com os elementos do conjunto B, no item II mostrou que somente pode haver uma ligação entre o elemento do conjunto A com os elementos do conjunto B.
- Na tarefa I mostrou que para ser função todos os números do primeiro conjunto devem ter uma ligação com os números do segundo conjunto, e na tarefa II mostrou que os números do primeiro conjunto podem ter somente uma ligação com os números do segundo conjunto.

O item “c” tem a intenção de juntar as duas informações das tarefas e definir a função através da relação entre conjuntos. Os alunos devem fazer a conexão com as duas regras vistas até agora.

Expectativas de respostas para o item “c”:

- Função é uma relação de correspondência entre dois conjuntos, o domínio e o contradomínio, onde todos os elementos do domínio devem ter apenas um elemento correspondente no contradomínio. Esta relação de correspondência é dada através de uma lei de formação.
- Função é quando todos os elementos de um primeiro conjunto se ligam a um e apenas um elemento no segundo conjunto, esta ligação acontece por uma fórmula matemática.
- Dado um conjunto A, função é a relação de todos os elementos deste conjunto com elementos de um outro conjunto B, de tal forma que os elementos do conjunto A somente podem ter um correspondente no conjunto B.
- Para se caracterizar função, todos os elementos do conjunto A devem ter uma correspondência com apenas um elemento de um conjunto B, através de uma lei de formação.

4.3.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

- Possível dúvida:

Aluno: Por que o número 1 do primeiro conjunto está correspondendo com o 1 e com o -1 do segundo conjunto?

Professor: o que faz com que os elementos do conjunto domínio (primeiro conjunto) se relacionem com os elementos do contradomínio (segundo conjunto)?

Aluno: A lei de formação dada, $y^2 = x^2$.

Professor: Os elementos do primeiro conjunto estão representados por qual das variáveis, x ou y?

Aluno: x.

Professor: Substitua o valor de x por 1, e veja qual será o seu correspondente no contradomínio.

Aluno: $y^2 = 1^2 \rightarrow y^2 = 1$.

Professor: qual o número que se elava ao quadrado e tem como resultado o 1?

Aluno: o próprio 1.

Professor: Existe mais algum? Quando a base de um número é negativa, e elevamos ao quadrado, como fica o resultado?

Aluno: positivo.

Professor: novamente, qual o número que se elava ao quadrado e tem como resultado o 1?

Aluno: $1\ e\ -1$.

Professor: Consegue responder porque o 1 do domínio tem dois elementos relacionados no contradomínio?

Aluno: Sim, ao tomar o 1 do conjunto A, percebi que o resultado pode ser 1 e -1, logo o número 1 do conjunto A tem dois correspondentes no conjunto B.

4.4 TAPE 4

Objetivo: Caracterizar de forma precisa a noção de **função** utilizando a notação de conjuntos.

4.4.1 A TAREFA

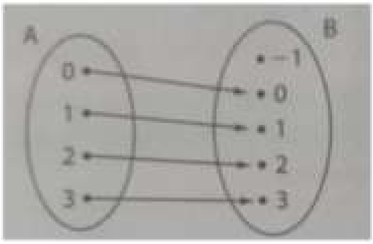
Figura 8– Enunciado TAPE 4

Três alunos, Carlos, Mara e Paulo, resolveram a seguinte questão:

1) Considere dois conjuntos, dados por A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3} e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

III. Associemos a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: y = x.

x	y
0	0
1	1
2	2
3	3



a) É função? Por quê?

Observe a resolução do Carlos para a pergunta:

Sim, porque cada elemento do primeiro conjunto tem um único correspondente no segundo conjunto.

Observe a resolução de Mara para a pergunta:

É função, pois cada elemento do conjunto domínio está ligado a um único elemento do conjunto contra domínio.

Observe a resolução do Paulo para a pergunta:

Sim, porque todo elemento do A tem um único correspon-dente no conjunto B.

Responda:

a) Utilizando a definição de função que você elaborou na tarefa anterior e analisando as respostas dos três alunos acima, o que se pode concluir sobre o elemento -1 que não tem um correspondente no conjunto domínio?

Fonte: Autoria própria (2022).

Esta tarefa visa consolidar os conceitos de função, a intenção é que os estudantes percebam que todas as regras vistas anteriormente estão sendo cumpridas, ou seja, todos os elementos do domínio possuem uma única relação com os elementos do contradomínio, o fato de no conjunto contradomínio possuir um elemento que não tem correspondente no domínio não impede de ser uma função.

4.4.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

Possíveis resoluções para a TAPE 4:

- O elemento -1 do conjunto contradomínio não possuem uma ligação com elemento do domínio, mas isto não impede de ser uma função, pois todos os elementos do domínio possuem uma única relação com os elementos do contradomínio.
- Para ser uma função é preciso analisar os elementos do conjunto domínio, como visto, todos os elementos devem possuir apenas uma relação com os elementos do contradomínio, como o -1 está no conjunto contradomínio, mesmo ele não tendo uma correspondência no conjunto domínio, não impede de ser uma função.
- Mesmo tendo um elemento isolado no contradomínio, ou seja, que não possui um vínculo com elementos do domínio, não impede de ser função, pois todos os elementos do domínio possuem apenas uma ligação com os elementos do contradomínio.
- Ao analisar a situação, percebe-se que não há problemas no segundo conjunto possuir elementos sozinhos, sem relação com o primeiro conjunto, pois como visto, a regra para ser função está sendo cumprida, todos os elementos do primeiro conjunto possuem apenas uma ligação com os elementos do segundo conjunto.

4.4.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

- Possível Dúvida:
  Aluno: Dúvida: Por que o elemento -1 não tem um correspondente no conjunto domínio?

Professor: O que faz com que os elementos do domínio tenham seu correspondente no contradomínio?
Aluno: A lei de formação (regra ou fórmula matemática).
Professor: De que forma isto acontece?
Aluno: substituo no lugar do x o número que está no primeiro conjunto (domínio).
Professor: Qual a lei de formação para esta situação?
Aluno: a regra é $y = x$.
Professor: Para que o -1 do conjunto contradomínio tenha correspondente, o que deve acontecer no domínio?
Aluno: o elemento -1 deve estar no conjunto domínio.
Professor: E isto acontece.
Aluno: Não.

4.5 TAPE 5

Objetivo: Caracterizar de forma precisa a noção de **função** utilizando a notação de conjuntos.

4.5.1 A TAREFA

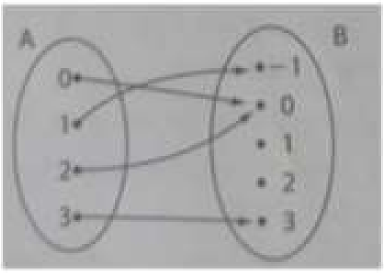
Figura 9 – Enunciado TAPE 5

Três alunos, Carlos, Mara e Paulo, resolveram a seguinte questão:

1) Considere dois conjuntos, dados por A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3} e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

IV. Associar a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y = x^2 - 2x$.

x	y
0	0
1	-1
2	0
3	3



a) É função? Por quê?

Observe a resolução do Carlos para a pergunta:

Sim, porque cada elemento do primeiro conjunto tem um único correspondente no segundo conjunto, mesmo que repita esse correspondente.

Observe a resolução da Mara para a pergunta:

É função, pois cada elemento do conjunto domínio está ligado a um único elemento do conjunto contra domínio

Observe a resolução do Paulo para a pergunta:

Sim, porque todo elemento de A tem um único correspondente no conjunto B.

Responda:

a) Utilizando a definição de função que você elaborou na tarefa anterior e analisando as respostas dos três alunos acima, o que se pode concluir sobre o elemento 0 (zero) do conjunto B (contradomínio)?

Fonte: Autoria própria (2022).

Como na tarefa anterior, a proposta é a consolidação das regras para uma função, porém neste caso, o elemento 0 (zero), do conjunto contradomínio, está relacionado com dois elementos do domínio, o que não impede de o exemplo ser uma função, continua valendo o que foi visto anteriormente, ou seja, todos os elementos do domínio têm relação a apenas um elemento no contradomínio.

4.5.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

Visto que essa tarefa é uma sequência das anteriores, espera-se que os alunos percebam que no conjunto contradomínio não há problemas em ter elementos "sozinhos" ou que recebam duas relações, desta forma, as possíveis respostas são:

- O elemento 0 (zero) do contradomínio está relacionado com dois elementos do domínio, o que não impede de ser uma função, pois, como visto, para se ter uma função todos os elementos do domínio precisam estar relacionados com um único elemento no contradomínio. O zero (0) do domínio está relacionado somente com o zero (0) do contradomínio, da mesma forma que o dois (2) do domínio está relacionado somente com o zero (0) do contradomínio.
- Visto que função é uma relação de todos os elementos de um primeiro conjunto que se ligam a um e apenas um elemento no segundo conjunto, não há nada que impeça o elemento do segundo conjunto receber mais do que uma correspondência, que é o caso do exemplo.
- O elemento 0 do conjunto B recebe a ligação de dois elementos do conjunto A, mas isso não impede que seja uma função, pois a função exige que todos os elementos do conjunto A estejam relacionados com apenas um elemento do conjunto B.

4.5.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

- Possível dúvida:

Aluno: Por que o elemento recebe duas ligações vinda do conjunto A?

Professor: O que faz com que os elementos do domínio tenham seu correspondente no contradomínio?

Aluno: A lei de formação (regra ou fórmula matemática).

Professor: De que forma isto acontece?

Aluno: substituo no lugar do x o número que está no primeiro conjunto (domínio).

Professor: Qual a lei de formação para esta situação?

Aluno: a regra é $y = x^2 - 2x$.

Professor: Ao substituir o 0 no lugar do x, qual o valor encontrado?

Aluno: $y = 0^2 - 2.0 \rightarrow y = 0 - 0 \rightarrow y = 0$.

Professor: Agora substitua o x por 2?

Aluno: $y = 2^2 - 2.2 \rightarrow y = 4 - 4 \rightarrow y = 0$

Professor: qual conclusão chegou?

Aluno: Ao substituir o zero e o dois na lei de formação, o resultado encontrado será o zero, por isso o zero do conjunto contradomínio recebe as duas ligações.

Professor: E pelo fato de o zero receber duas ligações, esta relação é uma função?

Aluno: Sim, pois conforme visto, para ser função todos os elementos do conjunto domínio devem ter ligação com apenas um elemento do conjunto contradomínio, e isto acontece na situação proposta.

4.5.4 FORMALIZAÇÃO

As TAPE $2, 3, 4\ e\ 5$ tinham como objetivo denotar a noção de função como uma relação entre conjuntos e estabelecer algumas regras para que se possa definir uma função.

Ao final das aplicações dessas TAPE, os alunos devem ser capazes de perceber que para que uma relação possa ser caracterizada como função, **todo** elemento do primeiro conjunto tem um correspondente no segundo conjunto e que cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um único elemento no segundo conjunto.

Em uma linguagem mais técnica o professor deve evidenciar que o primeiro conjunto se chama conjunto **domínio** da função enquanto o segundo conjunto se chama conjunto **contradomínio** da função, e apresentar a definição de função de acordo com o livro didático:

"Dado dois conjuntos não vazios A e B, uma **função f de A em B** é uma relação que associa cada elemento de $x \in$ A um único elemento $y \in$ B." (DANTE, p. 17, 2020)

Nessas condições, usamos a seguinte notação: $f: A \rightarrow B$

4.6 TAPE 6

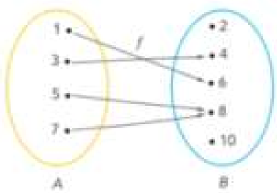
Objetivo: Consolidar o conceito de função, destacar os conjuntos domínio, contradomínio e imagem de uma função.

4.6.1 A TAREFA

Figura 10 – Enunciado TAPE 6

Leticia e Vera, resolveram a seguinte questão:

1) De acordo com o diagrama a seguir, que representa a função f, responda os itens que se pede.



a) Qual é o conjunto domínio e o conjunto contradomínio de f?

Observe a resposta de Leticia para o item a:

D(f) = {1, 3, 5, 7}   CD(f) = {2, 4, 6, 8, 10}

Observe a resposta de Vera para o item a:

D = {1, 3, 5, 7}
CD = {2, 4, 6, 8, 10}

b) Qual é o conjunto imagem de f?

Observe a resposta de Leticia para o item b:

Im(f) = {4, 6, 8}

Observe a resposta de Vera para o item b:

Im = {4, 6, 8}

Agora responda:

a) Por que a situação apresentada é uma função?
b) Como você define o conjunto domínio e o conjunto contradomínio de uma função?
c) Como você define o conjunto imagem de uma função?
d) Qual a diferença entre o conjunto contradomínio e o conjunto imagem?

Fonte: Autoria própria (2022).

O objetivo desta tarefa é consolidar o conceito de função, conjunto domínio e conjunto contradomínio visto nas tarefas anteriores e definir o conjunto **imagem** de uma função.

4.6.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

Esta tarefa consolida o conceito de função, conjunto domínio e contradomínio e traz um novo elemento, o conjunto **imagem**. A expectativa é que os alunos percebam que os elementos do conjunto contradomínio que são atingidos pela função fazem parte de um subconjunto, chamado de conjunto imagem.

Desta forma, as possíveis respostas são:

Para a letra “a”**:**

- Função é uma relação de todos os elementos de um primeiro conjunto que se ligam a um e apenas um elemento no segundo conjunto, que é o caso da situação apresentada.
- Porque todos os elementos do conjunto A se associam a um único elemento do conjunto B, cumprindo a regra de função.
- Como todos os elementos do conjunto domínio se ligam a um único elemento do conjunto contradomínio, a regra de função está sendo cumprida.
- Mesmo os números 2 e 10 não tendo um correspondente no primeiro conjunto isso não impede de ser uma função, pois como visto todos os números do primeiro conjunto tem apenas uma ligação com os números do segundo conjunto.

Para a letra “b”**:**

- O conjunto domínio é o primeiro conjunto, é aquele que os números vão ser colocados na fórmula, e o conjunto contradomínio é o segundo conjunto, no qual está o resultado obtido quando colocado o número do domínio na fórmula da função.
- O conjunto domínio são os valores de x de uma função, aqueles que são substituídos em uma regra matemática, já o conjunto contradomínio é formado por muitos números, entre eles os que são resultados da regra da função.
- O conjunto domínio é o conjunto A, o primeiro conjunto, no qual todos os seus elementos devem ter ligação com um único elemento em um outro conjunto, no caso o conjunto B, que se chama contradomínio.

Para a letra “c”:

- O conjunto imagem é um conjunto específico que contém somente os números que são relacionados com os números do conjunto domínio.
- O conjunto imagem é um conjunto que está dentro do contradomínio e que contém somente os resultados dos números que são correlacionados ao conjunto domínio.
- Conjunto imagem é formado por elementos que tem ligação com os elementos do conjunto domínio.
- Conjunto imagem é um conjunto menor que o conjunto contradomínio porque recebe a ligação dos elementos do conjunto domínio.
- Conjunto imagem é formado somente pela ligação dos elementos do primeiro conjunto.

Para a letra “d”:

- A diferença é que o conjunto contradomínio tem elementos que não estão sendo correlacionados com o conjunto domínio, enquanto que o conjunto imagem é formado por todos os elementos que tem relação com o domínio, e está dentro do conjunto contradomínio.
- No conjunto imagem não pode ter elementos que não estão conectados com o conjunto domínio.
- O conjunto Imagem está dentro do conjunto contradomínio, nele estão todos os números que têm relação com os números do conjunto domínio. Já no conjunto contradomínio pode ter números que não estão correlacionados com os números do domínio da função.
- A diferença é que todos os elementos do conjunto imagem tem ligação com os elementos do conjunto domínio, enquanto o conjunto contradomínio pode ter elementos que não tem essa ligação.

4.6.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

Durante as simulações de respostas, possíveis dúvidas podem vir dos alunos.

- Possível dúvida:

Aluno: Nas respostas do item “a”, as alunas escrevem D(f) e CD(f), o que significam essas letras?

Professor: Qual a pergunta para o item “a”?

Aluno: Qual o conjunto domínio e o contradomínio da função.

Professor: Você consegue ver alguma relação com as letras que as alunas colocaram na resposta com a pergunta?

Aluno: Sim, D seria de domínio e CD de contradomínio.

Professor: Por que a aluna Leticia colocou a letra f entre parênteses?

Aluno: para indicar que aquele é o domínio e o contradomínio da função em questão.

Professor: Você consegue me dizer o que significa as letras IM (f) da letra “b” que tem nas respostas das alunas?

Aluno: Usando o mesmo critério que o domínio é utilizado a letra D e contradomínio CD, IM (f) significa o conjunto imagem da função f.

- Possível dúvida:

Aluno: Não estou conseguindo definir o conjunto imagem.

Professor: Analise a resposta das alunas do item “a” e do item “b”, o que tem de diferente entre elas?

Aluno: para o item “a”, as alunas responderam todos os números que estão no conjunto B (contradomínio), e para o item “b”, somente os números $4, 6\ e\ 8$.

Professor: Ao analisar esses números, 4, 6 e 8, o que acontece com eles que não acontece com o 2 e o 10?

Aluno: Eles têm ligação com os números do conjunto A, enquanto o 2 e o 10 não tem.

Professor: então, o que seria um conjunto imagem?

Aluno: seriam os números do conjunto B que tem ligação com o conjunto A.

Professor: como se define o conjunto A e B.

Aluno: conjunto A é o domínio e conjunto B o contradomínio da função.

Professor: utilizando esses termos, defina o conjunto imagem novamente.

Aluno: Conjunto imagem é o conjunto formado pelos elementos do conjunto contradomínio que tem ligação com os elementos do conjunto domínio.

4.6.4 FORMALIZAÇÃO

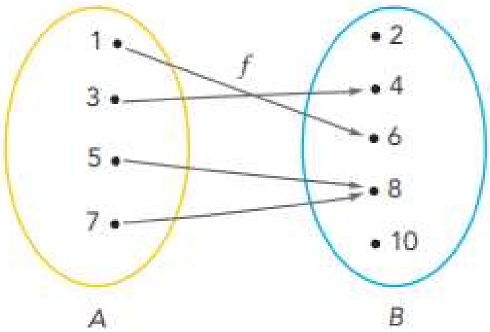
Ao final da TAPE 6, os alunos devem ser capazes de distinguir os conjuntos domínio, contradomínio e Imagem de uma função. Cabe ao professor fazer a definição de como esses elementos aparecem nos livros didáticos, para que os alunos entendam a linguagem utilizada.

Dessa forma, quando definimos uma "função f de A em B, os conjuntos A e B são chamados, respectivamente de **domínio** ($\boldsymbol{D(f)}$) e **contradomínio** ($\boldsymbol{CD(f)}$) da função f ". (DANTE, p. 18, 2020).

Do mesmo jeito, se f de A em B é uma função, chama-se "**conjunto imagem de $\boldsymbol{f}$ (Im ($\boldsymbol{f}$))** o subconjunto do contradomínio constituído pelos elementos $\boldsymbol{y}$ que são imagens de algum $x \in$ A" (IEZZI, p. 48, 2016). Ou seja, para cada elemento x do conjunto domínio existe um elemento $\boldsymbol{y}$ no conjunto contradomínio, chamado de imagem de x pela função f.

Utilizando o diagrama da TAPE 6, podemos perceber que a imagem do elemento $1(x)$ do conjunto A é o elemento 6 (y) do conjunto B.

Figura 11 – Diagrama da TAPE 6



Fonte: Autoria própria (2022).

E o conjunto formado pelas imagens de todos os elementos de A é chamado de **conjunto imagem** de f e indicado com $\mathbf{Im}(\boldsymbol{f})$. Assim, no diagrama da TAPE 6, o conjunto imagem é formado pelos elementos 4, 6 e 8, Im (f) = {4,6,8}.

4.7 TAPE 7

Objetivo: Evidenciar a estrutura/lei de formação de uma função afim.

4.7.1 A TAREFA

Figura 12 - Enunciado TAPE 7

Dois alunos, Carlos e Mara, resolveram a seguinte questão:

1) Vimos (tarefa 1) que a ligação entre os elementos do conjunto domínio e contradomínio pode acontecer através de uma formula (ou regra) matemática. Chamamos essa formula de **lei da função** ou **lei de correspondência**.

Nas leis de formação das funções abaixo, determine o coeficiente **a** e **b** de cada uma delas.

a) $f(x) = 2x + 1$

Resolução de Carlos para o item **a**:

A = 2
B = 1

Resolução de Mara para o item **a**:

a = 2
b = 1

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 5$

Resolução de Carlos para o item **b**:

$A = -\frac{1}{3}$
B = 5

Resolução de Mara para o item **b**:

$a = -\frac{1}{3}$
b = 5

c) $f(x) = \pi x - 4$

Resolução de Carlos para o item **c**:

$A = \pi$
B = -4

Resolução de Mara para o item **c**:

$a = \pi$
b = -4

Baseado nas respostas dos alunos acima, responda as seguintes questões:

a) O que você entendeu como "coeficiente a" das leis de formação apresentadas?
b) O que você entendeu como "coeficiente b" das leis de formação apresentadas?
c) Utilizando a mesma estrutura das leis de formação apresentadas, escreva uma lei de formação genérica, utilizando o "a" e o "b" como coeficientes.

Fonte: Autoria própria (2022).

O objetivo desta tarefa é começar a analisar um tipo específico de função, a função afim. Esta função tem uma característica importante que é a sua lei de formação, uma estrutura definida através de uma variável e coeficientes. Através desta tarefa os alunos devem ser capazes de identificar o coeficiente a e b e também uma estrutura de função afim.

4.7.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

Para a letra "a" da tarefa a expectativa é que os alunos percebam que o coeficiente a é um número que está multiplicando a variável x. Importante destacar que esse número pode pertencer ao conjunto dos números Reais. Na próxima tarefa vai ser abordado o que acontece quando esse coeficiente assume valor 0 (zero).

Desta forma, são possíveis respostas para a letra "a":

- O coeficiente a é um número que está multiplicando a letra x na lei de formação da função.
- O coeficiente a é um número que acompanha a variável x da regra da função.
- O coeficiente a é o número que vai junto com o x da fórmula da função.

Para a letra "b" da tarefa, espera-se que os estudantes percebam que o coeficiente b é um número real "isolado", ou seja, que não está sendo multiplicado pela variável, pois, nas respostas apresentadas pelos alunos que resolveram a questão, fica evidente que o coeficiente b é o termo independente da lei de formação, como respostas podem surgir:

- O coeficiente b é um número que está na fórmula da função, mas que não acompanha a variável x.
- O coeficiente b é o número sozinho que está na regra da função.
- O número que está sem o x em cada uma das fórmulas apresentadas é o coeficiente b.

Para a letra "c" os alunos devem substituir o número de qualquer uma das fórmulas apresentadas pelas letras a e b, e desta forma chegar na estrutura de uma função afim que será formalizada no final da tarefa. Como resposta:

- Substituindo os coeficientes das fórmulas pelas letras que o representam a função, ficaria: $f(x) = ax + b$.

4.7.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

Dúvidas que possam surgir ao realizar esta tarefa:

- Possível dúvida:

Aluno: o que é um coeficiente?

Professor: para responder essa pergunta vamos recorrer aos monômios, você se lembra deles?

Aluno: monômio é quando se tem letras e números em uma expressão, como por exemplo, $2x^2y^3$.

Professor: muito bem. O que o x e o x são neste exemplo?

Aluno: São letras que podem estar representando um número qualquer,

Professor: Isso dizemos que é a parte literal de um monômio, e o 2, o que ele representa nessa expressão?

Aluno: Seria um número que está multiplicando a parte literal de um monômio.

Professor: isso mesmo, esse número é conhecido como coeficiente, no caso do monômio é chamado de coeficiente numérico.

Professor: ao analisar as respostas dos alunos, o que o coeficiente a esta representando?

Aluno: o coeficiente numérico de um monômio.

Professor: e o coeficiente b?

Aluno: o número sozinho, que não tem a parte literal.

Professor: Este caso é conhecido como um monômio sem parte literal, somente o coeficiente numérico.

- Possível dúvida:

Aluno: Na letra “c”, o que significa lei de formação genérica?

Professor: vou usar uma analogia para te explicar. Como você faz para calcular a área de um retângulo?

Aluno: Basta multiplicar a medida dos lados.

Professor: mas os lados têm a mesma medida?

Aluno: não. Em um retângulo existem 2 medidas dos lados paralelos.

Professor: e como fazemos para diferenciar essas medidas?

Aluno: podemos chamar de base e altura ou comprimento e largura.

Professor: e se fosse para escrever a fórmula da área usando uma dessas referência, como você faria?

Aluno: $A = b . h$.

Professor: o que essas letras significam?

Aluno: A é a área, b é a base e h é a altura de um retângulo.

Professor: Por que você optou por escrever as letras?

Aluno: pois fica mais fácil do que escrever as palavras e como cada retângulo tem uma medida diferente, basta substituir as medidas de um retângulo específico nesta fórmula.

Professor: isso é o que se chama de uma fórmula genérica, utilizamos letras para expressar particularidades das coisas, no caso, b é a base, e como todo retângulo tem uma base, basta localizar a base do retângulo.

Professor: no caso da nossa tarefa, o que você entendeu de ser uma lei genérica agora?

Aluno: que no lugar do número que representa os coeficientes eu devo colocar as letras que o representam.

4.7.4 FORMALIZAÇÃO

Nas tarefas anteriores foi trabalhado a noção de função e algumas propriedades que devem ser cumpridas para que uma relação se torne uma função matemática. Vimos que a ideia de função está presente quando relacionamos os valores de duas grandezas, definimos o conjunto domínio e o conjunto contradomínio, e que essa relação pode se dar através de uma fórmula matemática, e chamamos essa fórmula de lei da função ou lei de correspondência.

Esta tarefa visa evidenciar que a estrutura de uma lei de formação do tipo $f(x) = ax + b$ é conhecida como **função afim**.

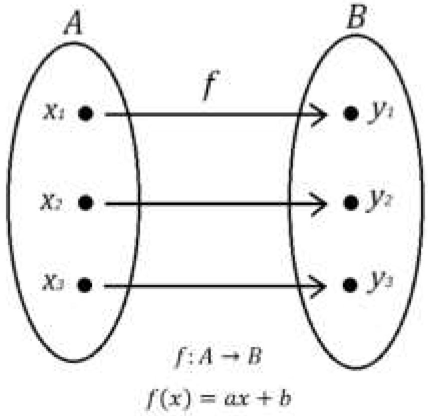
Define-se como sendo função afim, "uma função *f*, de ℝ em ℝ, que a todo número $x \in \mathbb{R}$ associa o número $f(x) = ax + b$, com $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ reais é chamada **função afim.**" (ANDRADE, p. 60, 2020).

$$f: A \to B$$

$$f(x) = ax + b$$

Para melhor compreensão dos alunos e para explicar o conceito da função afim, será apresentado o diagrama abaixo, visto que já está sendo trabalhado a ideia de função como uma relação de conjuntos.

Figura 13 – Função como relação de conjuntos



Fonte: Autoria própria (2022).

A proposta do diagrama é aproveitar as tarefas anteriores e mostrar que, para uma função afim, o conjunto dos números reais está fazendo o papel do primeiro conjunto, ou conjunto A, que denominamos domínio da função, e da mesma forma, o conjunto dos números reais faz o papel do segundo conjunto, ou conjunto B, que denominamos contradomínio da função. Ao dizer "uma função *f*, de ℝ em ℝ...", estamos definindo o conjunto domínio e contradomínio da função afim.

Com o diagrama, percebe-se que todo número que está no conjunto domínio, representado por x $(x \in \mathbb{R} - x\ que\ pertence\ ao\ conjunto\ dos\ numero\ reais)$, ao passar pela lei da função, $f(x) = ax + b$, ou seja, substituir o x por qualquer número real do conjunto domínio, obtém-se o número y do contradomínio, também pertencente ao conjunto dos número reais.

Em relação aos coeficientes a e b, como a própria definição já evidenciou, é importante frisar que são números que pertencem ao conjunto dos números reais. Vamos ver na próxima tarefa que ao assumir alguns valores específicos, temos casos particulares de função afim.

Ainda sobre os coeficientes da função afim, ficou evidente que o coeficiente a é o número real que está multiplicando a variável x, e que o coeficiente b é o número independente da função afim, ou seja, que não está com a variável.

4.8 TAPE 8

Objetivo**:** Destacar casos particulares da função afim.

4.8.1 A TAREFA

Figura 14 – Enunciado TAPE 8

Observe a resolução dos alunos Mara e Paulo para a questão a seguir:

1) Nas leis de formação das funções abaixo, determine o coeficiente **a** e **b** de cada uma delas e classifique a função em função linear, identidade ou constante.

a) $f(x) = 4{,}3x$

Observe a resolução de Mara para o item a:

A = 4,3
B = 0
Função Linear

Observe a resolução de Paulo para o item a:

a = 4,3
b = 0
função linear

b) $f(x) = x$

Observe a resolução de Mara para o item b:

a = 1
b = 0
função identidade

Observe a resolução de Paulo para o item b:

a = 1
b = 0
função identidade

c) $f(x) = 6$

Observe a resolução de Mara para o item c:

A = 0
b = 6
Função Constante

Observe a resolução de Paulo para o item c:

a = 0
b = 6
função constante

d) $f(x) = 0$

Observe a resolução de Mara para o item d:

A = 0
B = 0
Função Constante Nula

Observe a resolução de Paulo para o item d:

a = 0
b = 0
função constante nula.

Com base nas respostas dos alunos acima e em seu conhecimento de função, responda as seguintes questões:

a) São funções afim? Por quê?
b) O que você entendeu como uma função linear?
c) O que você entendeu como uma função identidade?
d) O que você entendeu como uma função constante?
e) O que você entendeu como uma função constante nula?

Fonte: Autoria própria (2022).

O objetivo desta tarefa é evidenciar a lei de formação de uma função afim, identificar os coeficientes a e b, e mostrar que existem casos particulares de funções afim de acordo com os valores que os coeficientes assumem.

4.8.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

Para o item "a", além de concretizar a lei de formação de uma função afim, a tarefa tem como objetivo os estudantes perceberem que os coeficientes a e b podem assumir o valor 0 (zero), inclusive, ambos podem ser zero. Desta forma, são esperados como respostas:

- Sim, pois a estrutura de uma função afim é $f(x) = ax + b$. Logo na letra "a" a função pode ser escrita da forma $f(x) = 4{,}3x + 0$, na letra "b" como $f(x) = 1x + 0$, na letra "c", $f(x) = 0x + 6$ e na letra "d", $f(x) = 0x + 0$. Logo, todas as funções apresentadas são afim.
- Em todas as funções apresentadas podemos reescreve-las na forma $f(x) = ax + b$, que é a lei de formação de uma função afim, onde o coeficiente a e b foram destacados pelos alunos.
- Sim, todas as leis de formação apresentadas estão no formato de função afim, $f(x) = ax + b$, em alguns casos não fica evidente o coeficiente a e b pois os mesmos valem 0 (zero).

As letras "b", "c", "d" e "e" da TAPE 8 visam mostrar para os alunos que existem casos particulares de função afim quando os coeficientes a e/ou b assumem valor zero.

Como possíveis respostas para o item "a":

- Uma função linear é um tipo de função afim que o coeficiente b assume valor 0 (zero).
- Função linear é quando não tem o coeficiente b, ou seja, ele vale zero.
- Função linear é uma função afim que só tem o termo ax, dessa forma o coeficiente b é igual a zero.

Para o item "b", os alunos devem perceber que é um caso particular de uma função linear, pois o coeficiente b é zero, porém, neste caso, como o coeficiente a é igual a 1, para qualquer valor que a variável x assume, o resultado é o mesmo para a função, por isso o nome "identidade".

Possíveis respostas para o item “b”:

- A princípio, pelo coeficiente b ser igual a zero, achei que fosse uma função linear, depois percebi que o coeficiente a sendo igual a um, a fórmula da função fica sendo $f(x) = x$, o que significa que para qualquer número do domínio terá como correspondente o mesmo número no contra domínio, e isto se chama função identidade.
- Função identidade é quando a lei de formação de uma função afim é apenas o valor de x, ou seja, o coeficiente a é igual a 1 e o coeficiente b é igual a zero.
- Função identidade é quando o coeficiente a da função afim é igual a um e o coeficiente b da função afim é igual a zero.

O item “c” mostra uma função constante, quando o coeficiente a de uma função afim é igual a zero. Isto significa que para qualquer valor do domínio, o resultado sempre será o coeficiente b, por isso ser chamada de constante.

- Função constante é uma função afim, do tipo $f(x) = ax + b$, mas que o coeficiente a é igual a zero, desta forma, a função fica sendo somente o coeficiente b, $f(x) = b$.
- Função constante é quando uma função tem somente o coeficiente b em sua fórmula.
- Função constante é quando a regra da função afim tem como coeficiente a o zero ficando somente o coeficiente b.

A letra “d” da tarefa mostra que uma função afim também pode ter seus dois coeficientes, a e b, como zero, e desta forma é chamada de função constante nula.

- Função constante nula é quando os coeficientes a e b são iguais a zero, de modo que a lei de formação da função fica sendo $f(x) = 0$.
- Função constante nula é uma função constante, ou seja, o coeficiente a é igual a zero, e é nula pois o coeficiente b também é zero.

4.8.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

Dúvidas que possam surgir ao realizar esta tarefa:

- Possível dúvida:

Aluno: como vou saber o que é uma função é linear?

Professor: Na tarefa anterior, estudamos um tipo de função, qual?

Aluno: Estudamos a função afim.

Professor: o que você pode me dizer a regra de uma função afim?

Aluno: é uma função que tem a seguinte estrutura: $f(x) = ax + b$.

Professor: o que a letra "a" e a letra "b" significam nessa estrutura.

Aluno: são coeficientes, são números que fazem parte da regra da função.

Professor: E esses coeficiente podem ser qualquer número?

Aluno: sim, são números reais.

Professor: Analise a resolução da letra "a" dos alunos Mara e Paulo, como são os coeficientes a e b?

Aluno: o coeficiente a é 4,3 e o coeficiente b é 0 (zero).

Professor: posso dizer que é uma função afim?

Aluno: sim, pois é do tipo $f(x) = ax + b$, onde $a = 4{,}3$ e $b = 0$.

Professor: e como eles classificaram esta função?

Aluno: como função linear.

Professor: O que você conclui que é uma função linear?

Aluno: que é uma função afim, onde o coeficiente b é igual a zero.

- Possível dúvida:

Aluno: como vou saber o que é uma função é identidade?

Professor: Na tarefa anterior, estudamos um tipo de função, qual?

Aluno: Estudamos a função afim.

Professor: o que você pode me dizer a regra de uma função afim?

Aluno: é uma função que tem a seguinte estrutura: $f(x) = ax + b$.

Professor: o que a letra "a" e a letra "b" significam nessa estrutura.

Aluno: são coeficientes, são números que fazem parte da regra da função.

Professor: E esses coeficiente podem ser qualquer número?

Aluno: sim, são números reais.

Professor: Analise a resolução da letra "b" dos alunos Mara e Paulo, como são os coeficientes a e b?

Aluno: o coeficiente a é 1 e o coeficiente b é 0 (zero).

Professor: Como eles chegaram à conclusão que o coeficiente a é 1 se não aparece na regra da função?

Aluno: Porque quando tem uma letra e um número juntos, entre eles tem a operação de multiplicação implícita, logo, como na tarefa aparece somente a letra x, significa que tem o número um multiplicando, e como $1.x = x$, o coeficiente a é um.

Professor: podemos dizer que $f(x) = x$ é uma função afim?

Aluno: sim, pois é do tipo $f(x) = ax + b$, onde $a = 1$ e $b = 0$.

Professor: e como eles classificaram esta função?

Aluno: como função identidade.

Professor: O que você conclui que é uma função identidade?

Aluno: que é uma função afim, onde o coeficiente b é igual a zero e o coeficiente a é igual a 1.

Professor: qual o resultado obtido quando substitui um valor qualquer em uma função identidade, como por exemplo o 3?

Aluno: Como a função é $f(x) = x$, logo, ao substituir o x por 3, temos que a $f(3) = 3$, o mesmo valor do x.

Professor: o que você conclui?

Aluno: que uma função identidade, qualquer que seja o valor do x, o resultado vai ser o mesmo para a função.

Professor: Conclua seu raciocínio utilizando as definições de função já vistas nas tarefas anteriores.

Aluno: A função identidade é uma função que possui a imagem de cada elemento do domínio como o próprio elemento.

- Possível dúvida:

Aluno: como vou saber o que é uma função é constante?

Professor: Na tarefa anterior, estudamos um tipo de função, qual?

Aluno: Estudamos a função afim.

Professor: o que você pode me dizer a regra de uma função afim?

Aluno: é uma função que tem a seguinte estrutura: $f(x) = ax + b$.

Professor: o que a letra “a” e a letra “b” significam nessa estrutura.

Aluno: são coeficientes, são números que fazem parte da regra da função.

Professor: E esses coeficiente podem ser qualquer número?

Aluno: sim, são números reais.

Professor: Analise a resolução da letra “c” dos alunos Mara e Paulo, como são os coeficientes a e b?

Aluno: o coeficiente a é 0 e o coeficiente b é 6.

Professor: Como eles chegaram à conclusão que o coeficiente a é 0 (zero) se não aparece na regra da função?

Aluno: Porque a função afim tem a seguinte fórmula $f(x) = ax + b$, se substituir o a por 0 (zero), temos que $0 . x = 0$, logo, o que sobra é apenas o coeficiente b, que é 6.

Professor: podemos dizer que $f(x) = 6$ é uma função afim?

Aluno: sim, pois é do tipo $f(x) = ax + b$, onde $a = 0$ e $b = 6$.

Professor: e como eles classificaram esta função?

Aluno: como função constante.

Professor: Sendo a regra da função $f(x) = 6$, substitua o valor de x por um número qualquer, por exemplo 3, que resultado obtém?

Aluno: $f(x) = 0. x + 6$, logo $f(3) = 0.3 + 6$, $f(3) = 6$.

Professor: e se escolhermos outro número, qual será o resultado?

Aluno: sempre será 6, pois o x está sendo multiplicado por zero, e o resultado é sempre o coeficiente b.

Professor: O que você conclui que é uma função constante?

Aluno: que é uma função afim, onde o coeficiente a é igual a zero e o coeficiente b é um número real, e para qualquer x do domínio sempre terá como resultado o coeficiente b.

- Possível dúvida:

Aluno: como vou saber o que é uma função constante nula?

Professor: Na tarefa anterior, estudamos um tipo de função, qual?

Aluno: Estudamos a função afim.

Professor: o que você pode me dizer a regra de uma função afim?

Aluno: é uma função que tem a seguinte estrutura: $f(x) = ax + b$.

Professor: o que a letra "a" e a letra "b" significam nessa estrutura.

Aluno: são coeficientes, são números que fazem parte da regra da função.

Professor: E esses coeficiente podem ser qualquer número?

Aluno: sim, são números reais.

Professor: Analise a resolução da letra "d" dos alunos Mara e Paulo, como são os coeficientes a e b?

Aluno: os coeficientes a e b são 0 (zero).

Professor: Como eles chegaram à conclusão que o coeficiente a é 0 (zero) se não aparece na regra da função?

Aluno: Porque a função afim tem a seguinte fórmula $f(x) = ax + b$, se substituir o "a" por 0 (zero), temos que $0 \,. x = 0$, logo, o que sobra é apenas o coeficiente b, que é 0.

Professor: podemos dizer que $f(x) = 0$ é uma função afim?

Aluno: sim, pois é do tipo $f(x) = ax + b$, onde $a = 0$ e $b = 0$.

Professor: e como eles classificaram esta função?

Aluno: como função constante nula.

Professor: Sendo a regra da função $f(x) = 0$, substitua o valor de x por um número qualquer, por exemplo 3, que resultado obtém?

Aluno: $f(x) = 0. x + 0$, logo $f(3) = 0.3 + 0$, $f(3) = 0$.

Professor: e se escolhermos outro número, qual será o resultado?

Aluno: sempre será 0, pois o x está sendo multiplicado por zero, e o resultado é sempre o coeficiente b, que neste caso é 0.

Professor: O que você conclui que é uma função constante nula?

Aluno: que é uma função afim, onde o coeficiente a é igual a zero e o coeficiente b também é zero, e para qualquer x do domínio sempre terá como resultado o valor do coeficiente b, que neste caso sempre será zero, ou seja, valor nulo.

4.8.4 FORMALIZAÇÃO

O objetivo da tarefa foi de consolidar a estrutura da lei de formação de uma função afim ($f(x) = ax + b$) e mostrar para os estudantes que quando os coeficientes a e b assumem valor igual a zero temos casos particulares de função afim.

Desta forma, ao final da tarefa, a formalização do conteúdo seguirá as orientações dos livros didáticos.

"...uma função afim *f:* ℝ → ℝ, tal que $f(x) = ax + b$, com $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ números reais e diferente de 0 (zero), é chamada **função polinomial do 1º grau**." (DANTE, 2020, p. 23). Obviamente, como vimos na tarefa acima, o coeficiente *b* pode ser zero, e nestes casos, teríamos as particularidades da função afim, descritas abaixo.

"...função **identidade**: quando $\boldsymbol{a} = 1\ e\ b = 0$" (ANDRADE, 2020, p. 60). A função afim chamada identidade, é a função que o coeficiente a é igual a 1 e o coeficiente b é igual a 0 (zero), isso faz com que a regra da função fique sendo $f(x) = x$, o que na prática, para qualquer valor que o x (valor do domínio) assumir, o mesmo resultado será obtido para o y (valor do contradomínio).

Outro caso particular de função afim é aquele em que o coeficiente $b = 0$. Desta forma "...a função afim *f:* ℝ →ℝ, dada pela lei $f(x) = ax$, com a real e $a \neq 0$, recebe a denominação especial de **função linear.**" (IEZZI, 2016, p. 71).

Chama-se **função constante** a "...função afim *f:* ℝ →ℝ, dada pela lei $f(x) = 0x + b$" (IEZZI, 2016, p. 74), ou seja, aquela que o coeficiente a assume valor 0 (zero), e dessa forma, para qualquer x do domínio, o resultado da função sempre será o valor do coeficiente b, uma constante. Isto porque a função linear terá sua estrutura da forma $f(x) = b$.

"A função afim *f:* ℝ → ℝ, definida por $f(x) = 0$ é chamada **função constante nula** (ou **função nula**)**"** (DANTE, 2020, p. 23). A função constante nula é um caso particular da função linear/constante, onde, além do coeficiente a ser 0 (zero), o coeficiente b também é zero, logo, para qualquer valor de x do domínio, o resultado da função sempre será 0 (zero), e por isso o nome função constante nula.

4.9 TAPE 9

Objetivo: Trabalhar a representação gráfica das funções afim, identificar o papel dos coeficientes angular e linear em um gráfico de uma função afim e classificar uma função afim em crescente e decrescente.

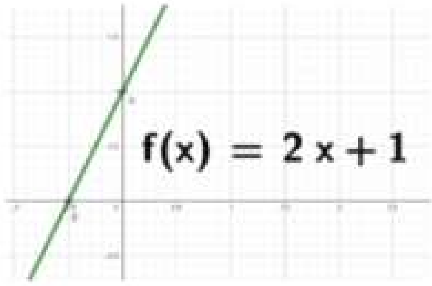
4.9.1 A TAREFA

Figura 15 – Enunciado TAPE 9

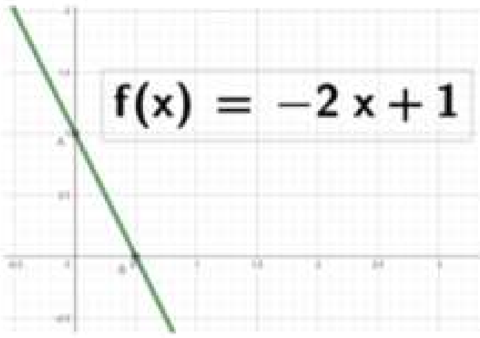
Observe a resolução dos alunos Maria e Carlos para a questão a seguir:

A representação gráfica em um plano cartesiano de uma função afim, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ é uma reta. O coeficiente de **x**, indicado pela letra **a**, é chamado de **coeficiente angular** ou **declividade** da reta, e está ligado à inclinação da reta com o eixo das abcissas (eixo x). Assim, existe duas possibilidades para essas retas, serem **crescentes** ou **decrescentes**. Analise **o coeficiente angular** das duas situações abaixo e classifique essas funções em crescentes ou decrescentes.

a) Crescente ou decrescente, por que?



b) Crescente ou decrescente, por que?



Resolução da Maria para a letra a:

CRESCENTE, PORQUE O COEFICIENTE A QUE É O a É POSITIVO.

Resolução da Maria para a letra b:

DECRESCENTE, PORQUE O COEFICIENTE A QUE É O a É NEGATIVO.

Resolução da Carlos para a letra a:

Crescente, porque a é positivo

Resolução da Carlos para a letra b:

Decrescente, porque a é negativo.

De acordo com as informações do enunciado e analisando as resoluções dos alunos Maria e Carlos, responda as seguintes questões:

a) Qual objeto geométrico representa a função afim no plano cartesiano?
b) O que é e para que serve o coeficiente angular de uma função afim?
c) Qual a diferença entre as leis de formação das funções da letra a e b?
d) Como se classifica uma função afim em crescente ou decrescente?

Fonte: Autoria própria (2022).

Esta tarefa visa mostrar que podemos representar uma função utilizando o plano cartesiano, que a função afim tem uma representação gráfica específica e que através dos coeficientes da lei de formação da função afim pode-se tirar algumas conclusões sobre o comportamento da função.

4.9.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

A letra “a” da TAPE 9 tem como finalidade, através da leitura do enunciado, verificar se o aluno entendeu que em uma representação gráfica da função afim se obtém uma reta.

Possíveis respostas para a letra “a”:

- A figura representada é uma reta.
- A função afim, quando em um gráfico, tem o desenho de uma reta.
- Uma reta.

A letra “b” da tarefa também tem o intuito de verificar a compreensão dos alunos para a definição formal do coeficiente a, chamado de coeficiente angular e sua utilidade ao verificar um gráfico de uma função afim.

- O coeficiente a da lei de formação de uma função afim $(f(x) = ax + b)$ é chamado de coeficiente angular ou declividade da reta e serve para verificar se uma função é crescente ou decrescente.
- O coeficiente angular da função afim é o coeficiente a da lei de formação da função $f(x) = ax + b$. Este permite classificar uma função em crescente ou decrescente.
- É o número que está multiplicando o “x” da função afim e serve para determinar se a função é crescente ou decrescente.

A letra “c” da TAPE 9 tem como finalidade mostrar a diferença entre o valor do coeficiente angular das duas leis de formação da função afim, um positivo e outro negativo e facilitar a percepção que através desse coeficiente que se classifica a função afim em crescente e decrescente, que é o intuito da letra “d” da tarefa.

- A letra “a” tem como lei de formação $f(x) = 2x + 1$, sendo que o coeficiente angular (a) é 2 e o coeficiente b é 1, já a letra “b” tem como lei de formação $f(x) = -2x + 1$, logo o coeficiente angular (a) é -2 e o coeficiente b é 1, portanto a diferença entre eles é o sinal do coeficiente angular (a).
- A diferença está no coeficiente angular, na letra “a” é 2 e na letra “b” é -2.
- Na letra “a”, o número que está com o x é o 2 e na letra “b” é o -2.

Para a letra “d”, as possíveis respostas são:

- De acordo com as resoluções dos alunos Maria e Carlos, basta verificar o coeficiente angular da função afim, se ele é positivo a função é crescente, se é negativo a função é decrescente.
- Observando o coeficiente a da função, se for positivo é crescente e se for negativo é decrescente.
- Analisando o coeficiente angular da função afim, positivo a função é crescente, negativo a função é decrescente.

4.9.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

Nos ensaios realizados, possíveis dúvidas podem surgir na execução da tarefa.

- Possível dúvida:

Aluno: o que é plano cartesiano?

Professor: Você observou o gráfico dado na tarefa? Já viu representação desse tipo?

Aluno: sim, são duas retas que se cruzam, chamadas de reta x e y.

Professor: isso mesmo, esse sistema de retas é chamado plano cartesiano e tem características importantes. Qual o ângulo formado no cruzamento dessas retas?

Aluno: forma um ângulo de 90°.

Professor: isso mesmo, por isso essas retas são chamadas perpendiculares. Você sabe me dizer outro nome que a reta x e y tem?

Aluno: Não.

Professor: a reta x, que é a horizontal, tem o nome de abcissa enquanto a reta y, a vertical, tem o nome de ordenada. Além dessas retas, o que mais você pode me dizer dessa representação?

Aluno: através do plano cartesiano é possível localizar pontos.

Professor: De que maneira?

Aluno: Essas retas são numeradas, para isso temos que relacionar os números da reta x com os números da reta y.

Professor: de que maneira ocorre a numeração dessas retas?

Aluno: O ponto de encontro entre a reta x e y tem o valor inicial zero. Na reta x, para a direita são os valores positivos e para a esquerda valores negativos, enquanto que na reta y, para cima são valores positivos e para baixo valores negativos.

Professor: E como se localiza um ponto neste sistema?

Aluno: um ponto precisa ter dois números (coordenadas), por exemplo $(2, -3)$, o primeiro desses números, no caso o 2, se refere a posição na reta x, e o segundo, o -3, a posição na reta y, o encontro dessas duas coordenadas é o ponto em questão no plano cartesiano.

Professor: você consegue relacionar esse par de pontos com a função afim?

Aluno: Como vimos, a função afim tem um x em sua fórmula, ao substituir um número no lugar do x, encontra-se um resultado, que é o y, ou o valor da função.

Professor: Então, fazendo uma conexão com o conjunto domínio e contradomínio, como você relaciona isso com a função?

Aluno: Domínio é o conjunto que está sendo representado pela reta x e contradomínio pela reta y.

- Possível dúvida:

Aluno: o que significa declividade?

Professor: Analise as duas situações apresentadas pela tarefa, qual a diferença entre as retas destacadas em verde?

Aluno: a primeira reta, da letra "a", parece estar subindo e a segunda reta, da letra "b", parece estar descendo.

Professor: Se analisarmos essas retas quando elas cruzam o eixo x (abcissa), o que pode se dizer do ângulo formado entre elas?

Aluno: quando a reta verde está subindo, ao passar pelo eixo x forma um ângulo, que, quando comparado com a outra reta que está descendo, é menor.

Professor: Podemos dizer que essas retas tem uma inclinação em relação ao eixo x?

Aluno: sim.

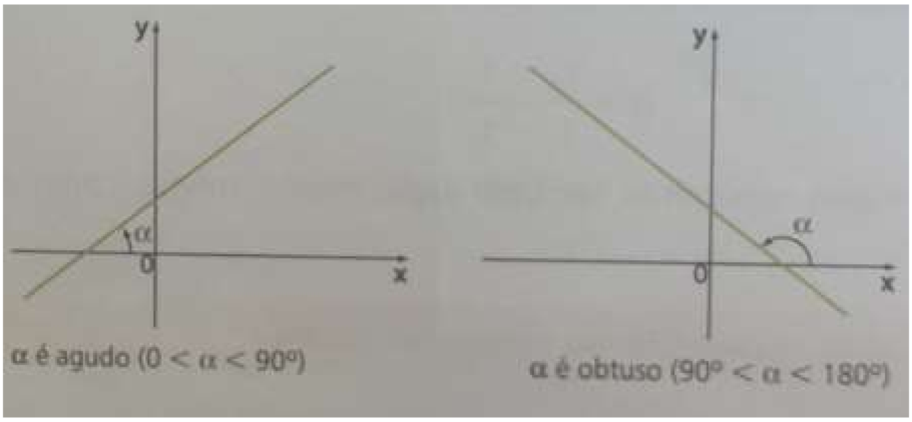
Professor: Isto é declividade da reta.

4.9.4 FORMALIZAÇÃO

O enunciado da TAPE 9 deixa evidente que o gráfico de uma função afim , f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ é uma reta. Também fica claro que o coeficiente a, visto anteriormente nas outras tarefas, agora recebe o nome de **coeficiente angular** da reta, e está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo x (eixo das abcissas).

Diante dos gráficos apresentados no problema, podemos destacar o ângulo α que a reta forma com o eixo x:

Figura 16 - Ângulo α (IEZZI, p. 84, 2016)



Diante de uma função afim definida pela lei de formação $f(x) = ax + b$, temos duas possibilidades:

- Para o coeficiente angular a ser maior que zero ($a > 0$):

"se $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$ e, daí, $ax_1 + b < ax_2 + b$; portanto, $f(x_1) < f(x_2)$ e a função é dita **crescente**". (IEZZI, 2016, p. 85).

Para melhor exemplificar a função crescente, vamos usar a função $f(x) = 2x + 1$, da letra "a" da TAPE 9. Tomamos um $x_1 = 2$, e um $x_2 = 3$, conforme Iezzi sugeriu ($x_1 < x_2$), e substituímos na função:

- Para $x_1 = 2$:

$$f(2) = 2.2 + 1$$
$$f(2) = 4 + 1$$
$$f(2) = 5$$

- Para $x_2 = 3$:

$$f(3) = 2.3 + 1$$
$$f(3) = 6 + 1$$
$$f(3) = 7$$

Desta forma, se o $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Em outras palavras, podemos dizer que conforme o valor do domínio aumenta, no exemplo escolhido, aumenta de 2 para 3, o valor no contradomínio também aumenta, $f(2) = 5$ e $f(3) = 7$, o que caracteriza uma função crescente.

- Para o coeficiente angular a ser menor que zero ($a < 0$):

"se $x_1 < x_2$, então $ax_1 > ax_2$ e, daí, $ax_1 + b > ax_2 + b$; portanto, $f(x_1) > f(x_2)$ e a função é dita **decrescente"**. (IEZZI, 2016, p. 85).

Para melhor exemplificar a função decrescente, vamos usar a função $f(x) = -2x + 1$, da letra "b" da TAPE 9. Tomamos um $x_1 = 2$, e um $x_2 = 3$, conforme Iezzi sugeriu ($x_1 < x_2$), e substituímos na função:

- Para $x_1 = 2$:

$$f(2) = -2.2 + 1$$
$$f(2) = -4 + 1$$
$$f(2) = -3$$

- Para $x_2 = 3$:

$$f(2) = -2.3 + 1$$
$$f(2) = -6 + 1$$
$$f(2) = -5$$

Desta forma, se o $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$. Em outras palavras, podemos dizer que conforme o valor do domínio aumenta, no exemplo escolhido, aumenta de 2 para 3, o valor no contradomínio diminui, $f(2) = -3$ e $f(3) = -5$, o que caracteriza uma função decrescente.

4.10 TAPE 10

Objetivo: Definir o valor numérico de uma função. Evidenciar que o valor numérico de uma função é um valor do conjunto contradomínio, mais especificamente a imagem do elemento do conjunto domínio, que se obtém substituindo um determinado valor do conjunto domínio para a variável x.

4.10.1 A TAREFA

Figura 17 – Enunciado TAPE 10

Carlos, Luana e Vitor resolveram a seguinte questão:

O valor numérico de uma função afim f, dada por $f(x) = ax + b$, é tal que, para um determinado valor de x, tem-se um valor para f(x). Por exemplo, para um $x = x_0$, o valor numérico da função é dado por $f(x_o) = ax_o + b$.

I. Seja a função afim $f(x) = 3x + 2$

a) Calcule a f(0):

Veja a resolução de Carlos:

y(x) = 3.x + 2
y(0) = 3.0 + 2
y(0) 0 + 2 = 2
y = 2

Veja a resolução de Luana:

F.(0) = 3.0 + 2 =
F.(0) = 2

Veja a resolução de Vitor:

f(x) = 3x + 2
f(0) = 3.0 + 2 = 2

b) Calcule a f(1):

Veja a resolução de Carlos:

y(1) = 3.1 + 2
y(1) = 3 + 2 = 5
y = 5

Veja a resolução de Luana:

F.(1) = 3.1 + 2
F.(1) = 5

Veja a resolução de Vitor:

f(x) = 3x + 2
f(1) = 3.1 + 2 = 5

c) Calcule a f(-3):

Veja a resolução de Carlos:

y(-3) = 3.(-3) + 2
y(-3) = -9 + 2 = -7
y = (-7)

Veja a resolução de Luana:

F(-3) = 3.-3 + 2
F(-3) = -7

Veja a resolução de Vitor:

f(x) = 3x + 2
f(-3) = 3.-3 + 2 = -7

Analisando as respostas dos alunos, responda:

a) O que você entendeu como valor numérico de uma função?

b) Como se calcula o valor numérico de uma função?

c) Por que o aluno Carlos escreveu "y" e os outros alunos "f" nas resoluções?

Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando as respostas dos alunos que resolveram a questão, a intenção é que os estudantes percebam que para calcular o valor numérico de uma função deve ser substituído um valor do conjunto domínio no lugar de x, e dessa forma, encontrarão o valor da função, no contradomínio da mesma.

4.10.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

A letra "a" da TAPE 10 requer que o estudante entenda as resoluções apresentadas, que eles percebam que o valor numérico é calculado substituindo um valor para x na lei de formação de uma função, desta forma, as possíveis resoluções:

- É o resultado apresentado quando se calcula um determinado valor na fórmula da função. Por exemplo, na letra "a" pedia para calcular o valor da função quando o $x = 0$, logo, o valor da função foi 2. No Caso, o 2 é o valor numérico da função quando o $x = 0$.
- Valor numérico é o resultado de quando se escolhe um determinado valor de x e substitui na regra da função, obtendo um resultado.
- Dada a lei de formação de uma função, o valor numérico é tal que se $x = 1$, como na letra "b", é o resultado que se obtém substituindo x por 1, onde 1 pertence ao conjunto dos números reais (conjunto domínio da função). Dessa forma, concluímos que o valor numérico de $f(1)$ corresponde ao resultado obtido quando substitui o x por 1, logo $f(1) = 5$, valor presente no contradomínio da função.

A intenção da letra "b" é reforçar a compreensão do valor numérico, pedindo para os estudantes como se calcula esse valor:

- Basta substituir o x da fórmula matemática por um número, o resultado encontrado é o valor numérico da função.
- Utilizado a lei de formação da função, no lugar do x coloca o número que se deseja, e o resultado é o valor numérico. Por exemplo, na letra "a" pede-se o valor numérico quando o $x = 0$, de forma que os alunos colocaram 0 no lugar do x e o resultado deu 2.
- O valor numérico será obtido com a realização dos cálculos utilizando a lei de formação da função. Ao substituir um valor para x, valor este que deve estar

no conjunto domínio da função, obtém-se um resultado, que está no conjunto contradomínio da função, este resultado se chama valor numérico da função.

A intenção da letra “c” é com que os alunos façam uma conexão entre os conjuntos domínio e contradomínio, que inicialmente chamamos de A e B, os elementos que pertencem ao conjunto domínio (1º conjunto) são chamados de x e os elementos que pertencem ao conjunto contradomínio (2º conjunto) são chamados de y, ou $f(x)$.

- Como vimos a função é uma relação que pode ser escrita como dois conjuntos, o conjunto A, chamado domínio, e o conjunto B, chamado contradomínio. Os elementos do conjunto A são aqueles que são substituídos no lugar do x da regra da função, e ao efetuar o cálculo, obtém-se o valor de $f(x)$, ou seja, um elemento do conjunto B, do contradomínio, também chamado de y.
- Conforme visto nas tarefas anteriores, a função afim tem a lei de formação $\mathrm{f}(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, o x da fórmula está relacionado com os elementos do primeiro conjunto, enquanto que o resultado da função ($f(x)$), está relacionado com os elementos do segundo conjunto, chamados de y.
- Vimos que podemos representar uma função no plano cartesiano, vimos que o eixo x está representando os elementos do domínio, chamados de x, e o eixo y os elementos do contradomínio, chamados de y ou $f(x)$.

Para a letra “c” desta tarefa podemos ainda abordar a conexão entre a notação $f(x)$ para funções e sua representação gráfica em um plano cartesiano. O resultado de $f(x)$ para um determinado valor de x é representado pelos valores do eixo dos y (eixo das ordenadas). Por isso, $f(x)$ pode ser substituído pela letra y, porque o resultado de uma função $f(x)$ para um determinado valor de x é um par ordenado da forma (x, y).

4.10.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

- Possível dúvida:

Aluno: não entendi o enunciado, o que é valor numérico e o que significa x_0?

Professor: Vamos analisar a resolução da letra “a” do aluno Vitor, consegue me explicar o que ele fez?

Aluno: Ele utilizou a regra da função e substituiu o x por 0.

Professor: Por que ele substituiu por 0 (zero)?

Aluno: porque foi o que o enunciado exigiu.

Professor: como sabe que foi o enunciado?

Aluno: porque entre parênteses, no lugar do x, tem o zero, então o aluno substituiu na fórmula onde tinha o x por zero.

Professor: e qual foi o resultado encontrado?

Aluno: foi 5.

Professor: Analisando o enunciado da questão que os alunos tinham que resolver, e vendo a resolução, o que o aluno calculou?

Aluno: o valor numérico de uma função para quando o x for igual a zero.

Professor: muito bem, agora analisamos a lei de formação de uma função afim, qual é?

Aluno: $f(x) = ax + b$

Professor: o que é calcular o valor numérico?

Aluno: substituiu o x por um valor pedido.

Professor: Olhe para o enunciado, o que entendeu sobre x_0 (x índice zero)?

Aluno: que é um valor qualquer a ser substituído na fórmula.

- Possível dúvida:

Aluno: Não entendi como os alunos calcularam o valor numérico da função?

Professor: Qual a lei de formação da função da questão?

Aluno: $f(x) = 3x + 2$.

Professor: vamos analisar juntos uma das resoluções dos alunos, veja a letra "b" e a resolução do Vitor, o que você percebe na resolução dele?

Aluno: Ele colocou o número 1 onde tinha o x.

Professor: por que ele colocou o número 1 e não qualquer outro número?

Aluno: Por que foi solicitado pelo enunciado, calcule a $f(1)$.

Professor: Então, depois de substituir o x por 1, o que o Vitor fez?

Aluno: realizou os cálculos, $3.1 + 2 = 5$.

Professor: o que você entendeu desse resultado, 5?

Aluno: é o valor da função quando o $x = 1$.

Professor: Isso é um valor numérico?

Aluno: sim.

Professor: dá para calcular quantos valores numéricos em uma função?

Aluno: muitos, depende de qual valor o x pode ser.

Professor: o x está representando qual conjunto da função.

Aluno: o conjunto domínio, que são os números reais.

Professor: então, quantos valores numéricos pode se calcular nesta função?

Aluno: todos os números reais existentes, infinitos.

4.11 TAPE 11

Objetivo: Utilizar o valor numérico da função para determinar o seu valor inicial e formalizar o conceito de coeficiente linear.

4.11.1 A TAREFA

Figura 18– Enunciado TAPE 11

Carlos, Luana e Vitor resolveram a seguinte questão:

Chama-se valor inicial da função o número **b** (chamado **de coeficiente linear** da função afim $f(x) = ax + b$), tal que $f(0) = b$. Sejam algumas leis de funções abaixo, determine o valor inicial de cada uma delas.

a) $f(x) = -2x + 3$

Observe a resolução de Carlos:

$f(0) = -2 \cdot 0 + 3$
$f(0) = 0 + 3$
$f(0) = 3$

Observe a resolução de Luana:

$f(0) = -2\cdot\cancel{0} + 3$
$f(0) = 3$

Observe a resolução de Vitor:

$b = +3$

b) $f(x) = 5x - 1$

Observe a resolução de Carlos:

$f(0) = 5 \cdot 0 - 1$
$f(0) = 0 - 1$
$f(0) = -1$

Observe a resolução de Luana:

$f(0) = 5\cancel{0} - 1$
$f(0) = -1$

Observe a resolução de Vitor:

$b = -1$

c) $f(x) = 7x$

Observe a resolução de Carlos:

$f(0) = 7 \cdot 0$
$f(0) = 0$

Observe a resolução de Luana:

$f(0) = 7\cancel{0}$
$f(0) = 0$

Observe a resolução de Vitor:

$b = 0$

Baseado nas resoluções acima, responda:

a) O que é valor inicial de uma função?
b) Por que nas respostas do Vitor ele escreveu o coeficiente "b" como resposta?
c) Como é chamado o coeficiente "b" da função afim?

Fonte: Autoria própria (2022).

A TAPE 11 consolida a ideia de valor numérico de uma função, determina o que é o valor inicial e define o coeficiente b da função afim como sendo o **coeficiente linear**.

4.11.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

Para a letra “a” da TAPE 11, espera-se que os alunos percebam que o valor inicial de uma função se refere ao valor numérico da função quando o x assume valor 0 (zero), e neste caso, o valor da função fica sendo o coeficiente b da função afim.

Possíveis respostas para o item “a”:

- Valor inicial de uma função é calcular o valor numérico da função para o $x = 0$, ou seja, substituir na fórmula da função o x por zero e fazer os cálculos.
- Valor inicial da função é fazer o cálculo das $f(0)$ da função. Ao substituir o x por zero, o resultado obtido é o valor inicial da função.
- Valor inicial é o valor da função quando o x é igual a zero. Neste caso, ao trocar x por zero, percebe-se que o termo “ax” da função afim passa a ter valor zero, ficando apenas o termo “b” e dessa forma o valor inicial é o coeficiente b.

A letra “b” da tarefa tem a intenção de fazer os alunos perceberem que ao calcular o valor inicial de uma função, o resultado é exatamente o coeficiente b, isto, porque, ao fazer o cálculo da $f(0)$, a parte literal da função afim, tida como “ax” se torna zero, e o resultado obtido é justamente o coeficiente b.

- Porque ele percebeu que o valor inicial de uma função é quando o x assume o valor de zero, e dessa forma, ao substituir na regra da função, o termo que sobra é justamente o coeficiente b.
- Como a função afim tem como lei de formação $f(x) = ax + b$, o cálculo do valor inicial deve ser feito para o $x = 0$, ou seja, $f(0)$. Ao substituir o x por zero, temos que a lei de formação fica $f(x) = ax + b \rightarrow f(0) = 0.x + b \rightarrow f(0) = b$. Logo o Vitor não precisou fazer cálculos, apenas localizou o coeficiente b de cada uma das funções dadas.
- O coeficiente b da função afim é justamente o valor inicial da função, pois, ao calcular a $f(0)$, o termo que sobra é justamente o b, que foi a resposta do aluno Vitor.

A letra “c” tem por objetivo dar o nome técnico ao coeficiente b, confirmando a interpretação do texto pelos alunos.

- É Chamado de coeficiente Linear.
- É o coeficiente linear da função afim, é o termo que não está acompanhado do x.

4.11.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

- Possível dúvida:

Aluno: No enunciado diz $f(0) = b$, não entendi o que isso significa?

Professor: Que tipo de função se trata a questão?

Aluno: de função afim.

Professor: Qual a estrutura (lei de formação / regra) da função afim?

Aluno: $f(x) = ax + b$.

Professor: o que é o valor numérico de uma função?

Aluno: é calcular o valor da função, substituindo o x por um valor pedido.

Professor: o que significa $f(0)$?

Aluno: substituir o x por zero.

Professor: então substitua na lei de formação de uma função afim genérica para ver o resultado obtido.

Aluno: $f(x) = ax + b \rightarrow f(0) = a.0 + b \rightarrow f(0) = b$.

Professor: o que significa o valor inicial de uma função?

Aluno: é calcular o valor da função quando o x é zero.

Professor: e qual vai sempre ser o resultado?

Aluno: o coeficiente b.

Professor: então, precisa fazer cálculos para se obter o valor inicial?

Aluno: não, basta encontrar o coeficiente b.

- Possível dúvida:

Aluno: Não entendi como calcular o valor inicial da função.

Professor: Veja as respostas dos alunos Carlos e Luana, o que você entendeu?

Aluno: entendi que eles calcularam o valor numérico da função, substituindo o x por zero.

Professor: por que eles substituíram por zero?

Aluno: Para calcular o valor inicial.

Professor: Mas o que garante que se calcula o valor inicial substituindo por zero?

Aluno: por que no enunciado aparece $f(0)$, ou seja, devo trocar x por zero.

Professor: correto, e ao substituir por zero, o que acontece com a função?

Aluno: De acordo com as resoluções, percebi que fica somente o coeficiente b da função afim.

Professor: então, como podemos calcular o valor inicial de uma função?

Aluno: identificando apenas o coeficiente b.

4.12 TAPE 12

Objetivo: Definir e determinar o **zero** ou a **raiz** de uma função.

4.12.1 A TAREFA

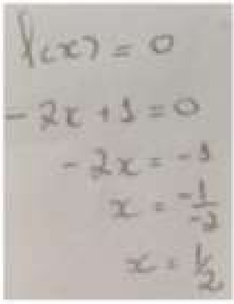
Figura 19 – Enunciado TAPE 12

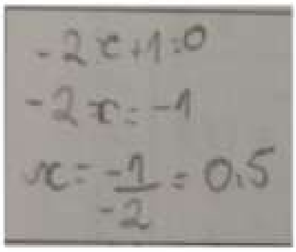
Carlos, Luana e Vitor resolveram a seguinte questão:

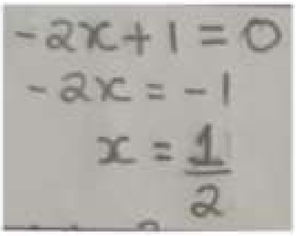
Raiz ou **zero** de um função afim, dada por $f(x) = ax + b$, com a ≠ 0, é o número real "x" tal que f(x) = 0. Sejam algumas leis de funções abaixo, determine a raíz de cada uma delas.

a) $f(x) = -2x + 1$

Observe a resolução de Carlos: Observe a resolução de Luana: Observe a resolução de Vitor:

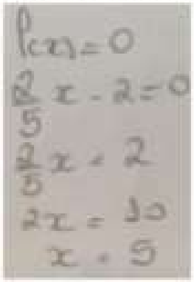


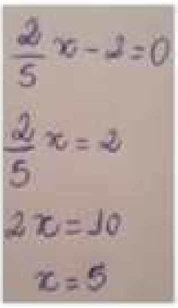




b) $f(x) = \frac{2}{5}x - 2$

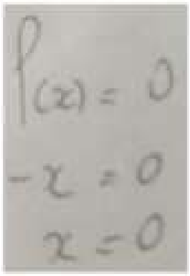
Observe a resolução de Carlos: Observe a resolução de Luana: Observe a resolução de Vitor:

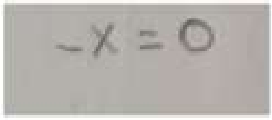


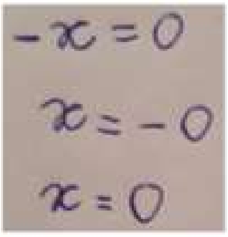


c) $f(x) = -x$

Observe a resolução de Carlos: Observe a resolução de Luana: Observe a resolução de Vitor:







Responda as seguintes questões baseada na resolução dos alunos acima:

a) Por que nas resoluções apresentadas a lei de formação da função foi igualada a zero?

b) O que você entendeu como raiz ou zero de uma função?

c) Determina a raiz das seguintes funções:

I. $f(x) = 3x - 12$

II. $f(x) = -2x - 10$

Fonte: Autoria própria (2022).

A TAPE 12 trabalha a raiz da função afim, diferentemente do valor numérico, em que os estudantes deveriam fazer o cálculo de um determinado valor de x para obter o valor da função, a raiz de uma função é descobrir qual o valor do x que torna a função igual a zero, ou seja, qual o valor de x que determina um valor numérico zero para a função. A letra “c” da tarefa exige o cálculo da raiz das funções apresentadas.

4.12.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

O enunciado da TAPE, juntamente com as resoluções dos alunos, deixa evidente que a raiz de uma função afim é o valor de x que torna a função com valor numérico igual a zero, ou seja, $f(x) = 0$. O esperado é que os alunos percebam na resolução que isto acontece e repitam o processo.

Para a letra “a” as possíveis respostas são:

- Porque de acordo com o enunciado o cálculo da raiz de uma função é quando esta é igual a zero.
- Porque a raiz da função é o valor de x que torna a função igual a zero, $f(x) = 0$, ao igualar a função a zero, conseguimos descobrir o valor do x.
- Para descobrir o número x que torna a função com valor zero, ou seja, a raiz da função.

Para a letra “b”, as possíveis respostas são:

- Entendi que a raiz da função é um valor de x que faz com que o resultado da função seja 0 (zero).
- É quando a função tem valor zero, e nesse caso temos que descobrir qual o número que ao substituir por x faz isso acontecer.
- Entendi que tem que igualar a função a zero para descobrir qual é o número que faz isso acontecer.

A letra “c” exige conhecimentos de equações de primeiro grau para determinar a raiz da função, utilizando os conceitos vistos nas letras “a” e “b”:

- Item I:

$f(x) = 3x - 12$

$f(x) = 0$

$3x - 12 = 0$

$3x = 12$

$x = \frac{12}{3}$

$x = 4$

- Item II

$f(x) = -2x - 10$

$f(x) = 0$

$-2x - 10 = 0$

$-2x = 10$

$x = \frac{10}{-2}$

$x = -5$

4.12.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

- Possível dúvida:

Aluno: o que é raiz da função?

Professor: Leia novamente enunciado, o que você entendeu?

Aluno: entendi que a raiz é um número, mas não entendi o que é $f(x) = 0$.

Professor: o que é a $f(x)$?

Aluno: é a função.

Professor: que tipo de função estamos estudando? Qual a lei de formação dela?

Aluno: função afim, é do tipo $f(x) = ax + b$.

Professor: qual a fórmula que está representando a função?

Aluno: $ax + b$, se pegarmos o exemplo da letra “a” é $f(x) = -2x + 1$.

Professor: e o que o enunciado pede para fazer com a lei de formação da função?

Aluno: fazer a função ser igual a zero.

Professor: então faça isso, pode usar o exemplo da letra “a” se for mais fácil para você visualizar.

Aluno: $f(x) = -2x + 1 \rightarrow -2x + 1 = 0$

Professor: como se chama essa expressão matemática?

Aluno: equação.

Professor: você sabe resolver?

Aluno: sim, basta isolar o x.

Professor: agora veja as resoluções da letra “a” dos alunos, o que eles fizeram?

Aluno: resolveram as equações.

Professor: o que é raiz da função?

Aluno: é igualar a função a zero e encontrar o valor do x.

4.12.4 FORMALIZAÇÃO

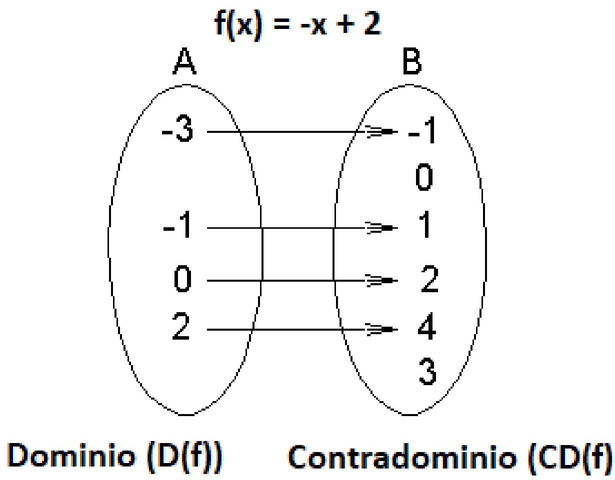
Neste momento, formalizar os conteúdos abordados nas TAPE 11 e 12, definindo o que é o valor numérico de uma função, valor inicial e o zero ou raiz da função afim.

"**Valor numérico** de uma função afim *f*, dada por $f(x) = ax + b$, para um $x = x_0$ é dado por $f(x_o) = ax_o + b$" (DANTE, 2020, p. 24).

Em outras palavras, e utilizando o que já estudamos nas tarefas anteriores, podemos dizer que o valor numérico de uma função é o valor obtido quando substitui o x por um valor do domínio da função, o valor numérico é um elemento que está no conjunto contradomínio da função.

Utilizando o esquema de diagrama abaixo:

Figura 20 – Diagrama (Fonte: autor)



Fonte: Autoria própria (2022).

Fica evidente o conjunto domínio da função, o conjunto contradomínio e a lei de formação. O valor numérico da função para um x do conjunto domínio é o resultado obtido através da lei de formação, e será o seu correspondente no conjunto contradomínio.

Por exemplo:

Qual o valor numérico da função para $x = -3$, ou $f(-3)$?

$$f(x) = -x + 2$$

$$f(-3) = -3 + 2$$

$$f(-3) = -1$$

Logo, o valor numérico da função para um $x = -3$ é o elemento -1 do contradomínio.

O **valor inicial** de uma “função afim f, dada por $f(x) = ax + b$, é o número $b = f(0)$” (DANTE, 2020, p. 24).

Podemos descrever o valor inicial de uma função como o valor numérico da função ao escolher o elemento 0 (zero) do conjunto domínio. Interessante notar que, ao substituir o zero na lei de formação da função, o resultado encontrado será o coeficiente $\boldsymbol{b}$, que é denominado **coeficiente linear**, isto porque:

$$f(x) = ax + b \rightarrow f(0) = a.0 + b \rightarrow f(0) = 0 + b \rightarrow f(0) = b$$

Desta forma, para identificar o valor inicial de qualquer função afim, basta localizar o coeficiente linear b da lei de formação, conforme o aluno Vitor fez em suas resoluções.

A **Raiz** ou **zero** de uma função afim é um número real do conjunto domínio da função que, ao ser substituído na lei de formação, faz com que o valor numérico da função seja igual a zero, em outra palavras, “chama-se **raiz** ou **zero** da função afim, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, o número real x tal que $f(x) = 0$. Temos que:

$f(x) = 0 \rightarrow ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$.” (IEZZI, 2016, p. 78).

Na próxima tarefa, TAPE 13, vamos fazer uma correlação entre o valor numérico, valor inicial e a raiz da função quando representamos graficamente uma função afim.

4.13 TAPE 13

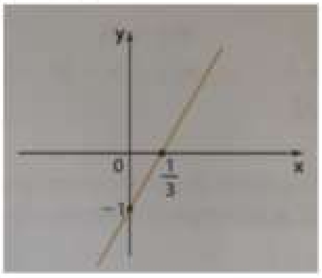
Objetivo: Correlacionar os coeficientes angular e linear com o gráfico de uma função afim.

4.13.1 A TAREFA

Figura 21 – Enunciado TAPE 13 – parte 1

Observe a resolução dos alunos Arthur, Davi e Laura para a questão abaixo:

1) Seja a função f: R – R, definida por $f(x) = 3x - 1$. Observe o gráfico da função.



a) A função é crescente ou decrescente? Justifique.

Resolução de Arthur:

Crescente, pois o coeficiente angular a é 3, positivo

Resolução de Davi:

Crescente, porque o valor de a é positivo

Resolução de Laura:

Crescente, pois o coeficiente "a" é 3, positivo.

b) Determine a raiz da função. A seguir, faça uma análise e descreva qual a relação da raiz e o gráfico da função.

Resolução de Arthur:

$3x-1=0$
$3x=1$
$x=\frac{1}{3}$

A raiz é o ponto onde passa pelo eixo x no gráfico.

Resolução de Davi:

$3x-1=0$
$3x=1$
$x=\frac{1}{3}$

A raiz é o ponto onde se passa pelo eixo x

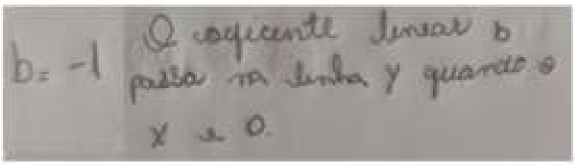
Resolução de Laura:

Raiz $= (\frac{1}{3}, 0)$

A Raiz está cruzando na reta X.

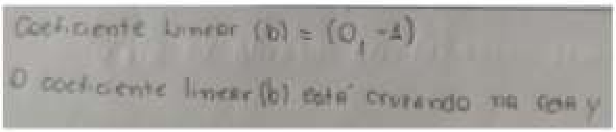
c) Determine o coeficiente linear (b) da função? Qual a relação entre o coeficiente linear e o gráfico da função?

Resolução de Arthur:



Resolução de Davi:

Resolução de Laura:



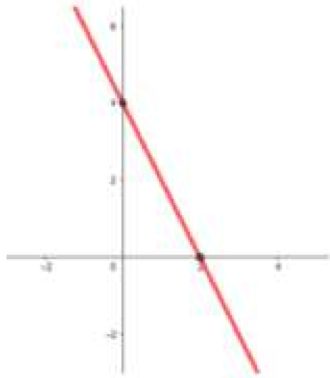
Analisando as resoluções dos alunos, responda:

a) Como identificar a raiz de uma função afim analisando somente o gráfico?

b) Por que a resposta de Laura para o item "b" foi raiz = ($\frac{1}{3}$, 0)?

c) Como identificar o coeficiente linear ("b") da função afim analisando somente o gráfico.

d) Dado o gráfico abaixo, determine a raiz, o coeficiente linear e o sinal do coeficiente angular da função afim representada.

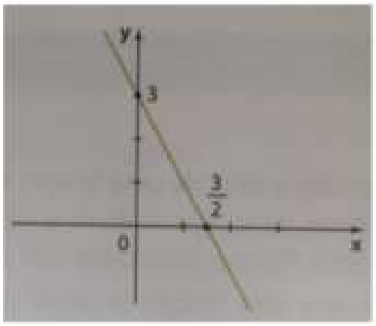


Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 22 – Enunciado TAPE 13 – parte 2

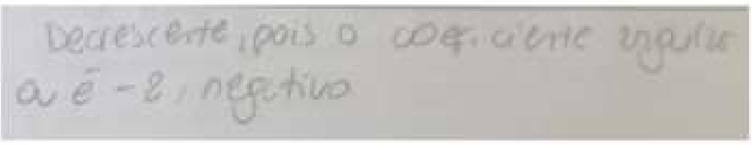
Observe a resolução dos alunos Arthur, Davi e Laura para a questão abaixo:

2) Seja a função f: R – R, definida por $f(x) = -2x + 3$. Observe o gráfico da função.



a) A função é crescente ou decrescente? Justifique.

Observe a resolução de Arthur:

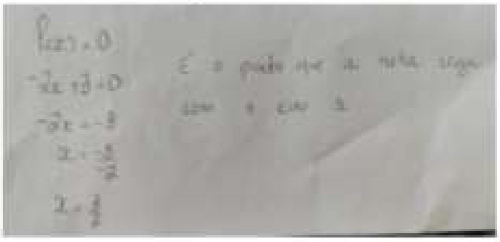


Observe a resolução de Davi:

Observe a resolução de Laura:

b) Determine a raiz da função? A seguir, faça uma análise e descreva qual a relação da raiz e o gráfico da função.

Observe a resolução de Arthur:



Observe a resolução de Davi:

Observe a resolução de Laura:

c) Determine o coeficiente linear (b) da função? Qual a relação entre o coeficiente linear e o gráfico da função?

Observe a resolução de Arthur:

b=3 é onde a reta passa pelo y

Observe a resolução de Davi:

b= 3 / onde a reta cruza o eixo y.

Observe a resolução de Laura:

o coeficiente linear é o 3 e ele é o ponto em que a reta corta o eixo "y"

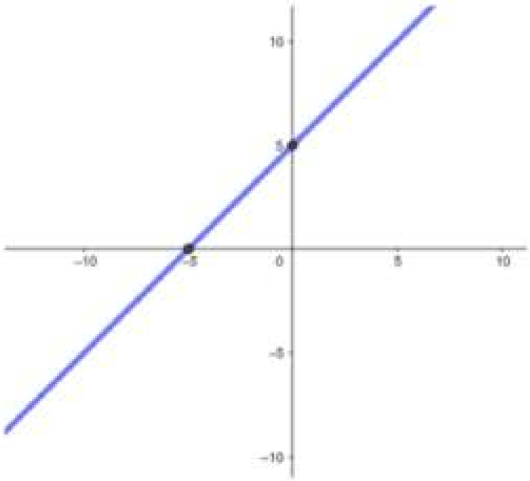
Analisando as resoluções dos alunos, responda:

a) Como identificar a raiz de uma função afim analisando somente o gráfico?

b) Por que na resposta do item "b" do Davi e da Laura eles não realizaram cálculos para determinar a raiz?

c) Como identificar o coeficiente linear ("b") da função afim analisando somente o gráfico.

d) Dado o gráfico abaixo, determine a raiz, o coeficiente linear e o sinal do coeficiente angular da função afim representada.



Fonte: Autoria própria (2022).

Nas tarefas anteriores vimos que a representação gráfica de uma função afim é uma reta, que através do coeficiente angular a, classificamos a função em crescente ou decrescente, e aprendemos a fazer o valor numérico de uma função assim como sua raiz.

Na TAPE 13 o objetivo é juntar todas essas informações e retomar esses conteúdos utilizando o gráfico como apoio.

A TAPE 13 está dividida em dois itens, “1” e “2”, e a intenção da tarefa é fazer a conexão dos coeficientes e da raiz da função afim com o gráfico, o que difere os itens “1” e “2” é que uma função tem o coeficiente angular positivo, logo é crescente e a outra tem o coeficiente angular negativo, portanto decrescente. No final dos itens é dada uma situação em que os alunos devem colocar em prática o que entenderam.

4.13.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

A letra “a” da primeira questão da TAPE 13 tem a intenção dos estudantes perceber que podemos identificar a raiz de uma função afim analisando o gráfico da mesma, pois, conforme vimos, como a raiz da função é o valor x do domínio em que a função é igual a zero, basta localizar no gráfico o ponto em que a coordenada y é zero, que é exatamente o ponto que o gráfico que representa a função afim intercepta o eixo das abcissas, eixo x.

São esperados como resposta:

- Como a raiz da função é $x = \frac{1}{3}$, e esse é o valor que deixa a função igual a zero, ao representar esse ponto no plano cartesiano $(\frac{1}{3}, 0)$, percebe-se que é exatamente o ponto onde a reta da função intercepta o eixo das abcissas (eixo x).
- O ponto onde a reta que representa a função passa pelo eixo x, é a raiz da função.
- Como a raiz da função é o ponto x que torna a função com valor igual a zero, basta localizar no gráfico onde y ou x é igual a zero e verificar a coordenada x desse ponto, que é exatamente onde a reta que representa a função está passando.
- Basta olhar para a reta e achar o valor do ponto em que a reta cruza o eixo x.

A letra “b” é uma continuação da letra “a”, seria um reforço para os alunos perceberem que a raiz da função é a coordenada do ponto em que o gráfico intercepta o eixo das abcissas. Dessa forma, são esperadas respostas como:

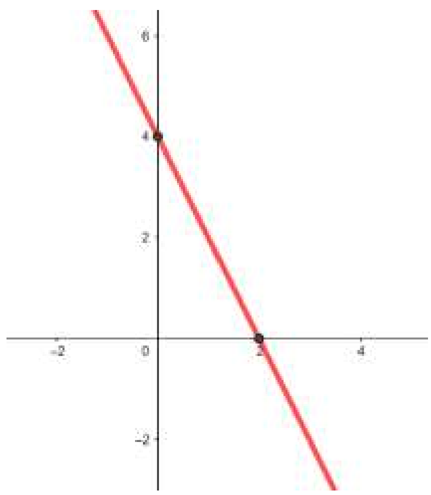
- Porque ela olhou o gráfico que representa a função e percebeu que o ponto onde a reta intercepta o eixo x é a raiz e a coordenada desse ponto é $(\frac{1}{3}, 0)$.
- Porque raiz de uma função é o valor do x que deixa a função igual a zero, logo ela viu no gráfico qual seria esse ponto, no caso $(\frac{1}{3}, 0)$.
- Porque $(\frac{1}{3}, 0)$ é ponto que a reta passa pelo eixo x, e ali é a raiz da função.

A letra "c" faz a ligação entre o coeficiente b e o gráfico da função, o intuito é o aluno observar o coeficiente linear na lei de formação e fazer a conexão desse valor com o gráfico da função.

- A função é $f(x) = 3x - 1$, o coeficiente $b = -1$, logo, ao olhar o gráfico, percebemos que a reta passa no ponto -1 no eixo y, basta verificar esse ponto no gráfico pra descobrir o valor de b.
- O coeficiente b é o valor da coordenada em y quando a reta da função cruza o eixo y.
- O coeficiente linear é o mesmo valor do ponto em que a reta cruza o eixo y, isso por que neste ponto o $x = 0$.
- Quando o $x = 0$ na função afim, o que resulta é o coeficiente b, logo, ao analisar o gráfico no ponto $x = 0$, a reta passa exatamente na coordenada y em que coincide com o coeficiente linear da função.

Para a resolução da letra "d" o aluno deve ter compreendido os conceitos anteriores, para determinar a raiz, o coeficiente linear e o sinal do coeficiente angular da função afim representada.

Figura 23 – Gráfico da TAPE 13



Fonte: Autoria própria (2022).

Possíveis resoluções para a letra “d”:

- Raiz: valor onde a função é zero, o x é igual a 2, coeficiente linear é onde o x é igual a zero, logo b é igual 4, como a reta está “descendo”, a função é decrescente e o coeficiente angular tem sinal negativo.
- Raiz: é o valor da abscissa do ponto no qual a reta intercepta o eixo horizontal, no caso é o x da coordenada $(2,0)$, Coeficiente linear: é o valor da ordenada do ponto no qual a reta intercepta o eixo vertical, no caso é o y da coordenada $(0,4)$, Coeficiente angular: negativo.
- Raiz: reta passa no eixo x, logo raiz igual a 2. Coeficiente b: reta passa no eixo y, logo $b = 4$, e como a reta é decrescente, o coeficiente a tem sinal negativo.

A resolução do item “2” da TAPE 13 é muito próxima do item “1”, no caso a função apresentada é decrescente, mas, para responder as questões os alunos devem compreender o conceito de raiz, coeficiente angular e linear.

Para a letra “a” do item 2:

- Como a raiz da função é $x = \frac{3}{2}$, e esse é o valor que deixa a função igual a zero, ao representar esse ponto no plano cartesiano $(\frac{3}{2}, 0)$, percebe que é exatamente o ponto onde a reta da função intercepta o eixo das abcissas (eixo x).
- O ponto onde a reta que representa a função passa pelo eixo x, é a raiz da função.
- Como a raiz da função é o ponto x que torna a função com valor igual a zero, basta localizar no gráfico onde y ou $f(x)$ é igual a zero e verificar a coordenada x desse ponto, que é exatamente onde a reta que representa a função está passando.
- Basta olhar para a reta e achar o valor do ponto em que a reta cruza o eixo x.

A letra “b” tem como objetivo que os alunos expliquem com suas palavras como foi feita a resolução apresentada na questão.

- Porque os alunos já sabiam analisar e localizar no gráfico a raiz, não precisou fazer cálculos para isso.

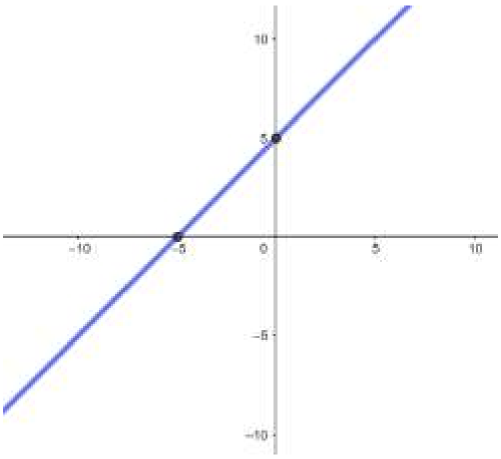
- Porque eles olharam no gráfico da função onde a reta passa pelo eixo x e encontraram a raiz.
- Porque o gráfico da função fornece o ponto em que a função é igual a zero e o $x = \frac{3}{2}$, que é a raiz da função afim.
- Porque é possível identificar a raiz utilizando apenas o gráfico da função, basta ver o valor em que a reta passa no eixo x.

A letra “c” é idêntica à do item “1”, logo as respostas esperadas são muito próximas:

- Na função é $f(x) = -2x + 3$, o coeficiente $b = 3$, logo, ao olhar o gráfico, percebemos que a reta passa no ponto 3 no eixo y, basta verificar esse ponto no gráfico pra descobrir o valor de b.
- O coeficiente b é o valor da coordenada em y quando a reta da função cruza o eixo y. No exemplo é o ponto $(0{,}3)$.
- O coeficiente linear é o mesmo valor do ponto em que a reta cruza o eixo y, isso por que neste ponto o $x = 0$.
- Quando o $x = 0$ na função afim, o que resulta é o coeficiente b, logo, ao analisar o gráfico o ponto $x = 0$, a reta passa exatamente na coordenada y em que coincide com o coeficiente linear da função.

A resolução da letra “d” compreende colocar em prática o que foi discutido e respondido nos itens anteriores. O aluno deve analisar um gráfico, identificar a raiz, e as características dos coeficientes angular e linear da função.

Figura 24 – Gráfico da TAPE 13



Fonte: Autoria própria (2022).

Possíveis respostas para a letra “d”:

- Raiz: valor onde a função é zero o x é igual a -5, coeficiente linear é onde o x é igual a zero, logo b é igual 5, como a reta está “subindo”, a função é crescente e o coeficiente angular tem sinal positivo.
- Raiz: é o valor da abscissa do ponto no qual a reta intercepta o eixo horizontal, no caso é o x da coordenada $(-5{,}0)$, Coeficiente linear: é o valor da ordenada do ponto no qual a reta intercepta o eixo vertical, no caso é o y da coordenada $(0{,}5)$, Coeficiente angular: positivo.
- Raiz: reta passa no eixo x, logo raiz igual a -5. Coeficiente b: reta passa no eixo y, logo $b = 5$, e como a reta é crescente, o coeficiente a tem sinal positivo.

4.13.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

Possíveis dúvidas que podem surgir aos alunos realizarem a tarefa:

- Possível dúvida:

Aluno: Não entendi o número -1 e o número $\frac{1}{3}$ que aparecem no gráfico do exercício 1?

Professor: Ao analisar o gráfico do exercício, qual é a figura que representa a função?

Aluno: a reta que está na cor laranja.

Professor: e as outras duas retas que aparecem no gráfico, o que são?

Aluno: É o plano cartesiano, uma reta é a x e a outra reta é a y.

Professor: Como se localiza um ponto no plano cartesiano?

Aluno: O ponto tem dois valores, um para a reta x e outro para a reta y.

Professor: o que você observa quando vê o número -1 e $\frac{1}{3}$ no gráfico?

Aluno: são os pontos onde a reta quer representa a função está passando.

Professor: se são pontos, não devem ter dois valores? Quais são eles?

Aluno: Sim, um ponto é o $(0, -1)$ e o outro é o $(\frac{1}{3}, 0)$.

- Possível dúvida:

Aluno: Não consegui identificar a raiz da função somente olhando para o gráfico.

Professor: Você consegue encontrar a raiz da função sem usar o gráfico?

Aluno: sim, basta igualar a função a zero.

Professor: Faça isso na função dada pela questão.

Aluno: $3x - 1 = 0 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{1}{3}$.

Professor: Agora, observe o gráfico, o que você pode concluir?

Aluno: que a reta passou no ponto $\frac{1}{3}$, o mesmo que a raiz.

Professor: Mas passou em qual dos eixos do plano cartesiano?

Aluno: No eixo x.

Professor: qual é a coordenada desse ponto?

Aluno: $(\frac{1}{3}, 0)$

Professor: o zero desse ponto se refere a qual eixo do plano cartesiano?

Aluno: Eixo y.

Professor: quando você calculou a raiz, o que você fez com a lei de formação?

Aluno: igualou a zero.

Professor: consegue fazer a ligação entre o ponto do gráfico e a raiz?

Aluno: o ponto que a reta cruza com o eixo x é quando a função vale zero, justamente o conceito da raiz.

- Possível dúvida:

Aluno: Não consegui identificar o coeficiente linear somente observando o gráfico.

Professor: como você identifica o coeficiente linear da função afim?

Aluno: é o termo que não tem o x na regra da função.

Professor: então qual é o coeficiente linear da função da questão 1?

Aluno: a função é $f(x) = 3x - 1$, logo o $b = -1$.

Professor: Analise o gráfico, tem como fazer alguma relação deste coeficiente com o gráfico?

Aluno: A reta do gráfico está passando por este ponto.

Professor: mas em qual dos eixos do plano cartesiano?

Aluno: na reta y.

Professor: qual é a coordenada desse ponto?

Aluno: $(0, -1)$

Professor: o zero desse ponto se refere a qual eixo do plano cartesiano?

Aluno: Eixo x.

Professor: Substitua na lei da função o valor zero para o x.

Aluno: $f(x) = 3x - 1 \rightarrow f(0) = 3.0 - 1 \rightarrow f(0) = -1$

Aluno: igualou a zero.

Professor: consegue fazer a ligação entre o ponto do gráfico e coeficiente linear?

Aluno: o ponto que a reta cruza com o eixo y é quando o x da função vale zero, e o valor da coordenada y é exatamente o coeficiente linear.

4.13.4 FORMALIZAÇÃO

O comportamento do gráfico da função afim tem ligação direta com os coeficientes angular (a) e linear (b).

A TAPE 13 faz a ligação entre a lei de formação da função afim e o gráfico, permitindo os alunos identificar os coeficientes e a raiz da função compreendendo a definição dos mesmos e analisando o gráfico.

Em uma função afim *f,* dada por $f(x) = ax + b$:

- $\boldsymbol{a}$ é o **coeficiente angular ou declividade**, pois está associado à inclinação da reta que representa o gráfico.
- $\boldsymbol{b}$ é o **coeficiente linear** do gráfico e seu valor corresponde à ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y, ou seja, b é o valor inicial da função ($x = 0$).
- A **raiz** ou **zero** da função afim é o valor de x para o que a função afim se anula, ou seja $f(x) = 0$.

"Geometricamente, podemos concluir que $\boldsymbol{b}$ á a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função dala pela lei $f(x) = ax + b$, intercepta o eixo y." (DANTE, 2020, p. 36). A raiz da função é a abcissa do ponto onde a mesma reta intercepta o eixo x, e, como visto anteriormente, o sinal do coeficiente angular está relacionado com uma função crescente, quando positivo, ou decrescente, quando negativo.

4.14 TAPE 14

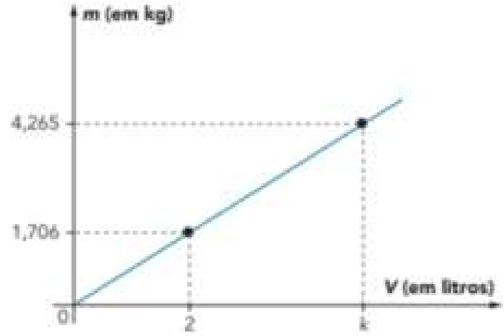
Objetivo: Consolidar todas as informações vistas nas tarefas anteriores através de um problema rotineiro de função afim.

4.14.1 A TAREFA

Figura 25 – Enunciado TAPE 14

Os Alunos Marcia, Claudia e Otavio resolveram a seguinte questão:

O gráfico a seguir mostra a relação entre a medida de massa e a medida de volume do óleo diesel.



a) Determine a medida de densidade (isto é, a razão entre a medida de massa e a medida de volume) desse óleo, em quilogramas por litro.

Observe a resolução da Marcia:

$d = \frac{m}{V}$

$d = \frac{1,706}{2}$

$d = 853$ Kg/L

Observe a resolução da Claudia:

$D = \frac{m}{V}$

$D = \frac{1,706}{2}$

$\boxed{D = 0,853 \text{ kg/L}}$

Observe a resolução do Otavio:

$d = \frac{m}{V}$

$d = \frac{1,706}{2}$

$d = 0,853$ Kg/L

b) Calcule o valor do k.

Observe a resolução de Marcia:

$D = \frac{m}{V}$

$0,853 = \frac{4,265}{k}$

$k = \frac{4,265}{0,853}$

$k = 5$ L

Observe a resolução de Claudia:

$0,853 = \frac{4,265}{k}$

$K = \frac{4,265}{0,853}$

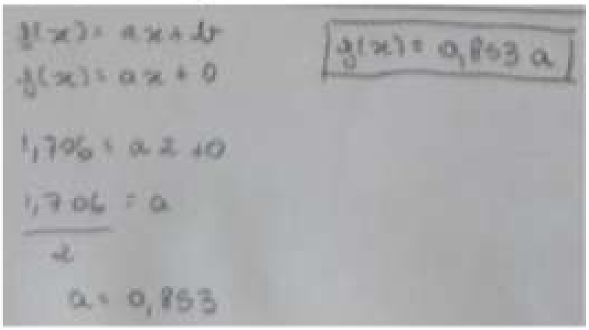
$K = 5$

Observe a resolução do Otavio:

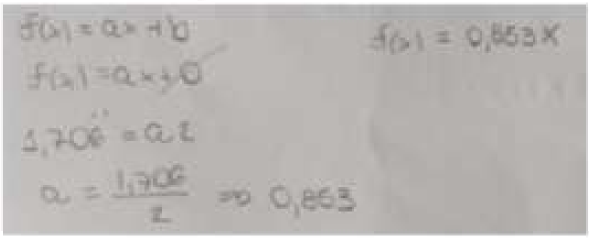
$d = \frac{m}{V}$ $\quad 0,853 = \frac{4,265}{K}$ $\quad K = \frac{4,265}{0,853}$ $\quad \boxed{K = 5}$

c) Qual a lei da função que modela essa situação.

Observe a resolução de Marcia:



Observe a resolução de Claudia:



Observe a resolução do Otavio:

Diante das resoluções apresentadas pelos alunos, responda:

a) Vimos na TAPE 1 que uma função é uma relação entre grandezas, quais são as grandezas envolvidas nesta situação?

b) Qual é o conjunto domínio e contradomínio desta função?

c) Por que na resolução da letra "a" os 3 alunos realizaram a divisão do valor do eixo y com o valor do eixo x?

d) Observe a resolução dos alunos para a letra "b" e explique com suas palavras o procedimento adotado por eles.

e) Na letra "c" os três alunos adotaram a estrutura de uma função afim para representar a lei de formação, por que?

f) Por que os alunos adotaram o coeficiente linear "b" como sendo zero?

g) Observe a resolução da letra "c", explique como os alunos determinaram o coeficiente angular "a".

Fonte: Autoria própria (2022).

4.14.2 RESOLUÇÕES ESPERADAS

O objetivo da TAPE 14 é colocar em prática todos os conceitos, definições e propriedades vistas de função afim em um problema clássico.

Para a letra "a" os alunos devem perceber que a função é uma relação entre grandezas, e no problema em questão está sendo trabalhado o conceito de densidade de um produto. Como respostas esperadas:

- As grandezas envolvidas são a massa, em quilogramas e o volume, em litros, do óleo diesel.
- Está sendo relacionado a massa e o volume do óleo diesel.
- A relação envolvida na densidade é massa e volume.

A letra "b" retoma o conceito do conjunto domínio e contradomínio da função, com o auxílio do gráfico, espera-se que os alunos observem que os valores do domínio estão relacionados com o volume do óleo diesel, não podendo ser valores negativos. Desta forma, as possíveis respostas:

- O conjunto domínio é aquele que corresponde aos valores de x, ao observar o gráfico, podemos concluir que o x somente pode assumir valores positivos e o zero, sendo formado pelo conjunto dos números Reais positivos. Já o conjunto contradomínio, apesar de também não assumir valores negativos, pode ser formado pelo conjunto dos números reais, pois não há problema de ter elementos a mais neste conjunto.
- O conjunto domínio da função é qualquer valor que seja maior ou igual a zero, enquanto o conjunto contradomínio pode ser todos os números Reais, pois não há problemas de sobrar números.
- Domínio – $\{ x \in R : x \geq 0\}$, contradomínio $\{R\}$.

A letra "c" da questão visa identificar o entendimento dos alunos das relações existentes entre as grandezas envolvidas, ou seja, a densidade é a razão entre a massa e o volume, para isso, devem observar e retirar do gráfico as informações necessárias.

- Porque eles calcularam a densidade do óleo diesel, e, de acordo com o enunciado, a densidade é calculada fazendo a divisão entre a massa e o volume. Ao analisar o gráfico, percebe-se que o valor no eixo y se refere à massa enquanto o valor do eixo x se refere ao volume, por isso foi feita a divisão entre eles.

- Porque no eixo y está o valor da massa do óleo diesel e no eixo x o valor do volume, e como a densidade é a razão entre esses dois valores, os alunos efetuaram a divisão.
- Para calcular a densidade, pois, conforme o enunciado, a densidade é a razão entre a massa, valor que está no eixo y, pelo volume, valor que está no eixo x.

Para a resolução da letra "d", os alunos devem perceber que a densidade do produto não se altera, e podem utilizar o valor encontrado anteriormente para descobrir o valor de k. Como possíveis respostas:

- A densidade do óleo diesel já foi calculada anteriormente, assim, para descobrir o valor de "k", os alunos fizeram o uso da definição de densidade, como sendo a razão entre a massa e o volume, utilizaram o valor da massa que está relacionada com o volume k, e determinaram o seu valor.
- Os alunos utilizaram a densidade calculada anteriormente para descobrir o valor de k, para isso eles utilizaram o valor da massa que está relacionada com o volume "k" e fizeram os cálculos necessários.
- Eles observaram que a densidade é a divisão da massa pelo volume, e, usando a densidade calculada anteriormente, fizeram a mesma relação, porém utilizando o valor da massa correspondente ao volume indicado pela letra k.

A letra "e" da TAPE 14 tem a intenção de provocar os alunos a conectar o gráfico apresentado (em que o objeto é uma reta) com a função afim. Como possíveis respostas:

- Porque ao observar o gráfico, percebe-se que é uma reta, e essa é a representação de uma função afim no plano cartesiano.
- Porque uma reta no plano cartesiano é a caracterização de uma função afim e a função afim tem como estrutura $f(x) = ax + b$.
- Porque uma função afim é representada no plano cartesiano por uma reta, logo, a situação apresentada se refere a uma função do tipo $f(x) = ax + b$.

Na letra "f" os alunos devem identificar o coeficiente linear da função utilizando o gráfico como referência.

- Porque o coeficiente b da função afim é o valor da função quando esta passa pelo eixo y, e neste ponto a função tem valor igual a zero.
- Porque o b da função afim é o valor quando a reta intercepta o eixo y, e neste caso é no ponto (0,0).
- Coeficiente b ou coeficiente linear é o valor do ponto y, quando o valor de x da função é zero, e neste caso, (0,0), ou seja, $b = 0$.

A letra "g" tem como objetivo os alunos entenderem a construção da lei de formação através do gráfico da função. Como já foi identificado que o coeficiente linear b é igual a 0, bastava substituir um dos pontos na lei de formação para encontrar o valor de a.

- Como os alunos já sabiam que era uma função afim, cuja lei de formação é $f(x) = ax + b$, e já foi identificado que o coeficiente b é zero, a função fica sendo $f(x) = ax$. Desta forma, como todos os pontos da reta pertencem a função, os alunos pegaram um ponto conhecido em x, e seu respectivo correspondente em y, e aplicaram na função, desta forma, encontraram o valor do coeficiente angular a.
- A função afim é do tipo $f(x) = ax + b$, com $b = 0$, logo a função é apenas $f(x) = ax$. Pegando a coordenada de um ponto conhecido no gráfico e aplicando na fórmula, eles encontraram o coeficiente a.
- Sendo $b = 0$, o coeficiente angular a é a divisão entre o valor do x e o valor do x de um ponto qualquer da reta, em outras palavras é a própria densidade do produto.

4.14.3 POSSÍVEIS DÚVIDAS

Durante os ensaios realizados para esta tarefa, possíveis dúvidas que possam surgir serão abordadas da seguinte forma:

- Possível dúvida:

Aluno: O que é razão?

Professor: qual é a pergunta da letra "a"?

Aluno: qual a densidade do produto.

Professor: Observe a resolução da letra "a" dos alunos, o que eles fizeram?

Aluno: Realizaram a divisão entre a massa e o volume do óleo diesel.

Professor: então, o que significa razão?

Aluno: é uma divisão.

Professor: Correto, é a relação de duas grandezas expressa através de uma fração, que é uma divisão.

- Possível dúvida:

Aluno: Não entendi como eles calcularam o valor do k.

Professor: Na letra "a", para calcular a densidade, qual foi o procedimento?

Aluno: dividir a massa pelo volume.

Professor: e por que os alunos escolheram o ponto $(1{,}706, 2)$?

Aluno: porque $1{,}706$ é a massa quando o volume é 2 litros, de acordo com o gráfico.

Professor: a densidade do produto se altera?

Aluno: não. Pois o produto é o mesmo, óleo diesel.

Professor: por que os alunos não pegaram o ponto cujo valor do volume é $4{,}265$ para calcular a densidade?

Aluno: porque não tem o correspondente em x, ou seja, o volume, nesse ponto é o k.

Professor: mas agora, sabendo a densidade, e tendo a massa, dá para descobrir o volume? Observe a resolução dos alunos.

Aluno: sim, posso usar a densidade calculada anteriormente e descobrir qual o volume que representa o valor do k.

- Possível dúvida:

Aluno: Como saber qual a lei de formação da função?

Professor: observe o gráfico, qual a figura que aparece em azul?

Aluno: uma reta.

Professor: e uma reta é a representação de qual tipo de função?

Aluno: de uma função afim.

Professor: e qual a lei de formação de uma função afim?

Aluno: $f(x) = ax + b$

Professor: e como identifica o coeficiente b?

Aluno: é o valor onde a reta passa pelo eixo y, e no caso é zero.

Professor: sendo $b = 0$, como fica a lei de formação da função?

Aluno: $f(x) = ax$

Professor: Veja a resolução dos alunos, qual conclusão que você chega agora?

Aluno: eles pegaram um ponto do gráfico e colocaram na lei da função, substituindo o x e o y por esses valores, e conseguiram calcular o valor do coeficiente a.

5. RELATO E ANÁLISE DAS APLICAÇÕES DAS TAPE

A aplicação das TAPE ocorreu em uma escola pública estadual de Londrina, Paraná, no período de 15 de março de 2022 a 10 de abril de 2022. Participaram 52 alunos de duas turmas do 3º ano do Ensino Médio, das quais sou[1] o professor titular. Foram necessárias 12 aulas em cada turma, de 50 minutos cada, para a aplicação das tarefas.

Importante destacar que estes alunos vieram de dois anos estudando de forma remota devido à pandemia, que no decorrer das aulas apresentaram déficits de conteúdos e até mesmo relatos de não terem vistos ou participado das aulas nesse período.

Por se tratar de uma dinâmica que os alunos ainda não tinham tido contato, havia uma certa preocupação de como eles iriam reagir e interagir com a proposta das TAPE. Neste primeiro momento, faremos uma descrição e uma análise geral de como se deu as aplicações das 14 TAPE nestas duas turmas, escolhendo produções entre todos os alunos, que julgamos relevantes para ilustrar aspectos de como se deu essa experiência.

5.1 APLICAÇÃO DA TAPE 1

Os alunos aceitaram bem a tarefa, disseram que foi diferente analisar um problema já resolvido e escrever sobre matemática, mas em geral o feedback foi positivo, que entenderam e gostaram da proposta.

Para a letra “a” da TAPE 1, apesar de quase todos responderem corretamente quais as grandezas relacionadas no problema (medida do lado com o perímetro do quadrado), muitas dúvidas vieram do que seria uma grandeza, parece que faltou alguma outra situação-problema para ter comparação e facilitar esse entendimento. A situação foi conduzida de acordo com a THA, pois já era uma possível dúvida prevista no plano de aula.

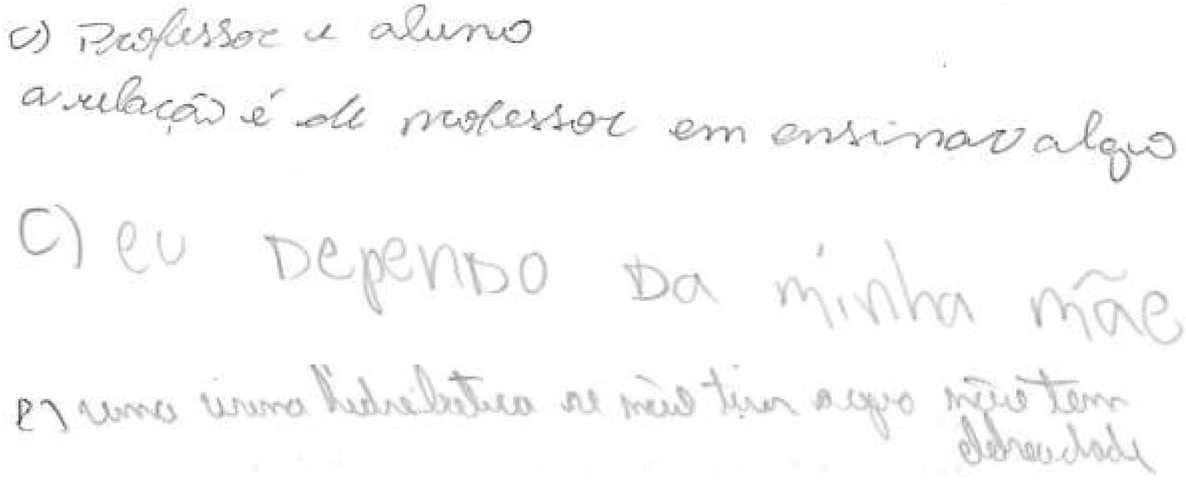
A letra “c” do problema também causou bastante discussão, os alunos tentavam reproduzir uma situação envolvendo figuras geométricas, ficaram presos à situação apresentada, e, mesmo quando houve intervenção por parte do professor, dizendo para eles abrirem as possibilidades e pensar em fatos do cotidiano que pudessem haver correspondência/dependência, eles diziam que não conseguiam reproduzir uma situação

---

[1] Em alguns momentos deste capítulo, o texto está redigido na primeira pessoa do singular por se tratar do relato pessoal da experiência do autor como professor da turma no momento da aplicação.

de dependência, ficaram pensando em dependência no sentido de estar sujeito, de ser "sustentado", como nos exemplos abaixo.

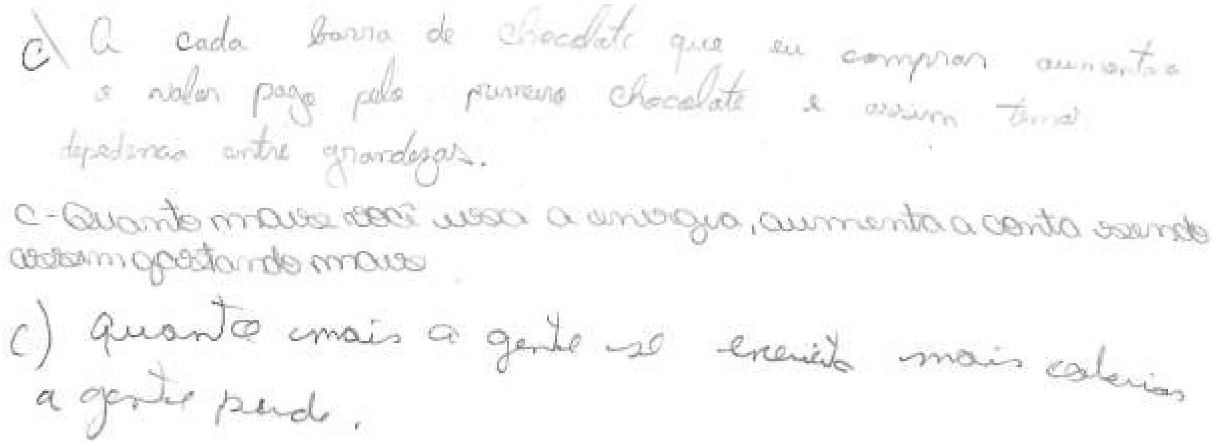
Figura 26 – Relatos da TAPE 1



Fonte: Autoria própria (2022).

Mas houve muitas respostas criativas e de acordo com a proposta da tarefa:

Figura 27 – Relatos da TAPE 1 – Repostas criativas



Fonte: Autoria própria (2022).

Após a tarefa, a formalização do conteúdo foi bem produtiva, notamos os alunos interessados em ouvir e entender o contexto do problema e fazer uma "comparação" com o que estava sendo exposto e as respostas que eles haviam dado na TAPE. Ao analisar as respostas, entendemos que a tarefa cumpriu seu objetivo, de evidenciar relações entre grandezas e ainda foi além, durante a formalização foi preciso retomar a diferença entre perímetro e área, mesmo não havendo sido questionado isso no decorrer da tarefa (mas estava nas possíveis dúvidas dos alunos na THA), houve confusão entre os conceitos de área e perímetro, desta forma foi preciso revisar e definir perímetro e área, foi um momento a parte que acrescentou à tarefa.

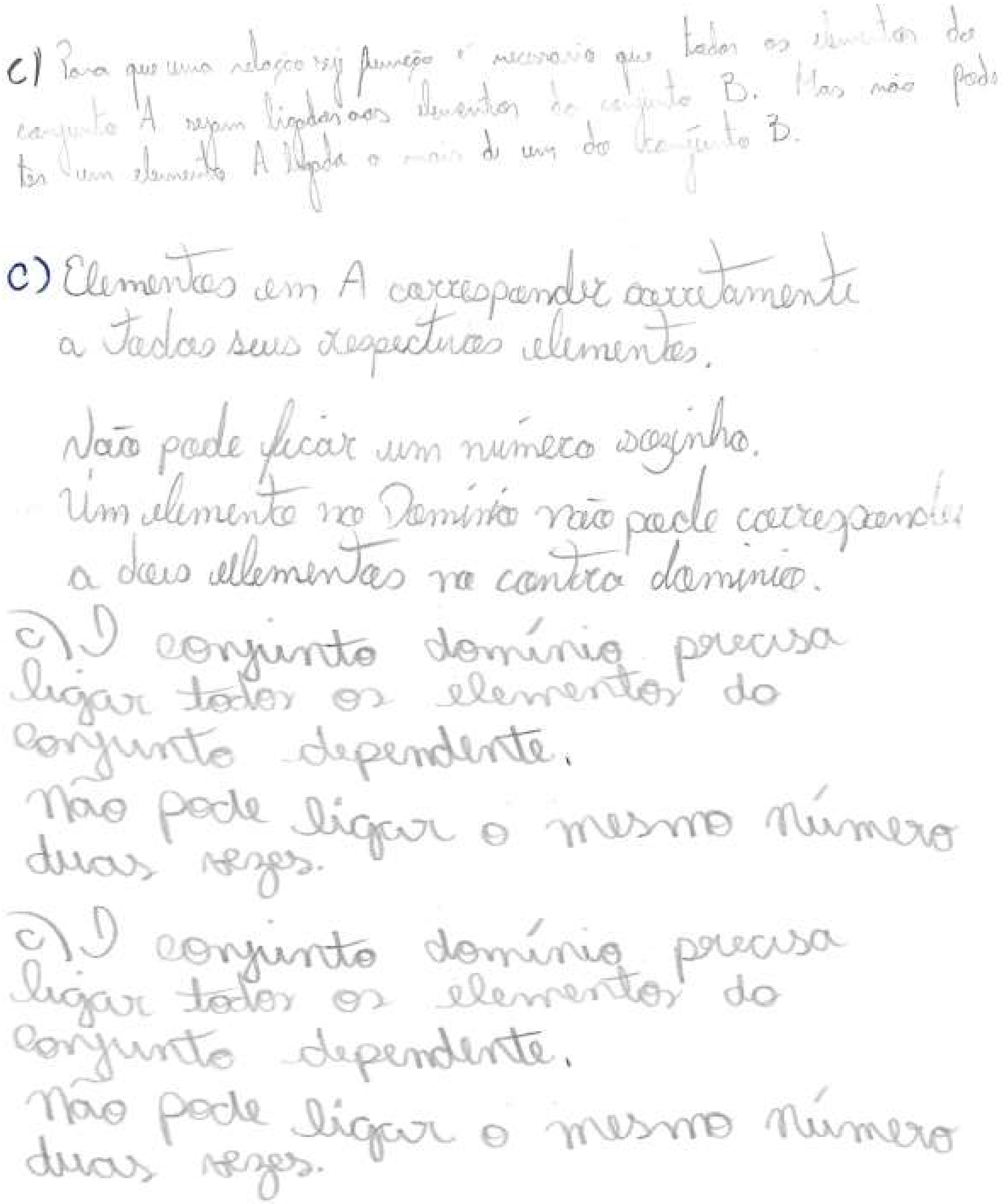
5.2 APLICAÇÃO DAS TAPE 2 E 3

As TAPE 2 e 3 puderam ser aplicadas em uma mesma aula. Fizemos uma leitura inicial em conjunto, não houve dúvidas iniciais e os alunos começaram a resolução.

Para a letra “a” da TAPE 2**,** a maioria das respostas vieram de acordo com o planejado, ou seja, que o primeiro conjunto é o domínio (alguns escreviam dominante, mas ficou evidente o entendimento) e contradomínio, porém, alguns alunos fizeram relação com a formalização da tarefa anterior e escreviam como sendo o conjunto independente e dependente. Conforme os alunos terminavam a resolução da TAPE, houve tempo para fazer uma análise das respostas, e na própria formalização do conteúdo, mostrar as diferenças entre analisar a dependência entre as grandezas e a definição dos conjuntos Domínio (e não dominante) e Contradomínio.

A TAPE 3 deu muito sentido para a definição de função. Ao ler as respostas prontas na tarefa, os alunos perceberam na hora a diferença entre as situações, entre eles houveram debates sobre o fato de todos os elementos do domínio estarem relacionados com o contradomínio, que foi visto na tarefa 2, e, apesar deste fato acontecer na tarefa 3, um elemento do domínio possui mais de uma correspondência no contradomínio, e isso impedir a situação de ser função. Usando sua própria linguagem, os alunos perceberam e definiram função de acordo com as características apresentadas na tarefa, seguem alguns exemplos:

Figura 28– Relatos da TAPE 3 – Definição de função


c) Para que uma relação seja função é necessario que todos os elementos do conjunto A sejam ligados aos elementos do conjunto B. Mas não pode ter um elemento A ligada a mais de um do conjunto B.

c) Elementos em A corresponder exatamente a todos seus respectivos elementos.

Não pode ficar um numero sozinho.
Um elemento no Domínio não pode corresponder a dois ellementos na contra dominio.

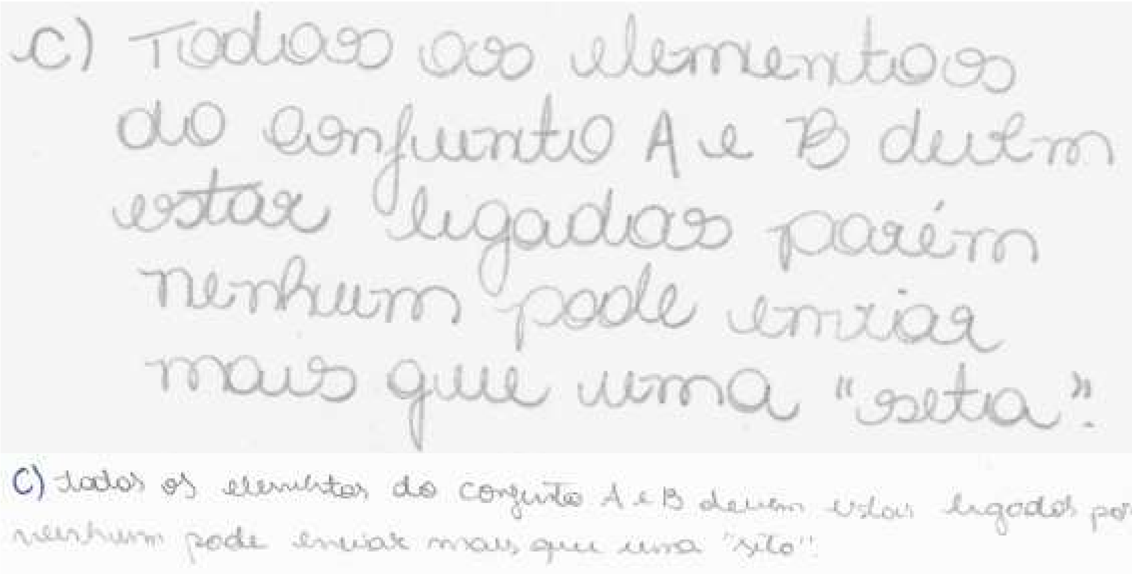
c) O conjunto domínio precisa ligar todos os elementos do conjunto dependente.
Não pode ligar o mesmo número duas vezes.

c) O conjunto domínio precisa ligar todos os elementos do conjunto dependente.
Não pode ligar o mesmo número duas vezes.

Fonte: Autoria própria (2022).

Nota-se em algumas respostas a definição de função como todos os elementos do domínio sendo relacionados com todos os elementos do contradomínio.

Figura 29 – Relatos da TAPE 3


c) Todos os elementos do conjunto A e B devem estar ligadas porém nenhum pode enviar mais que uma "seta".

C) todos os elementos do conjunto A e B devem estar ligados por nenhum pode enviar mais que uma "seta".

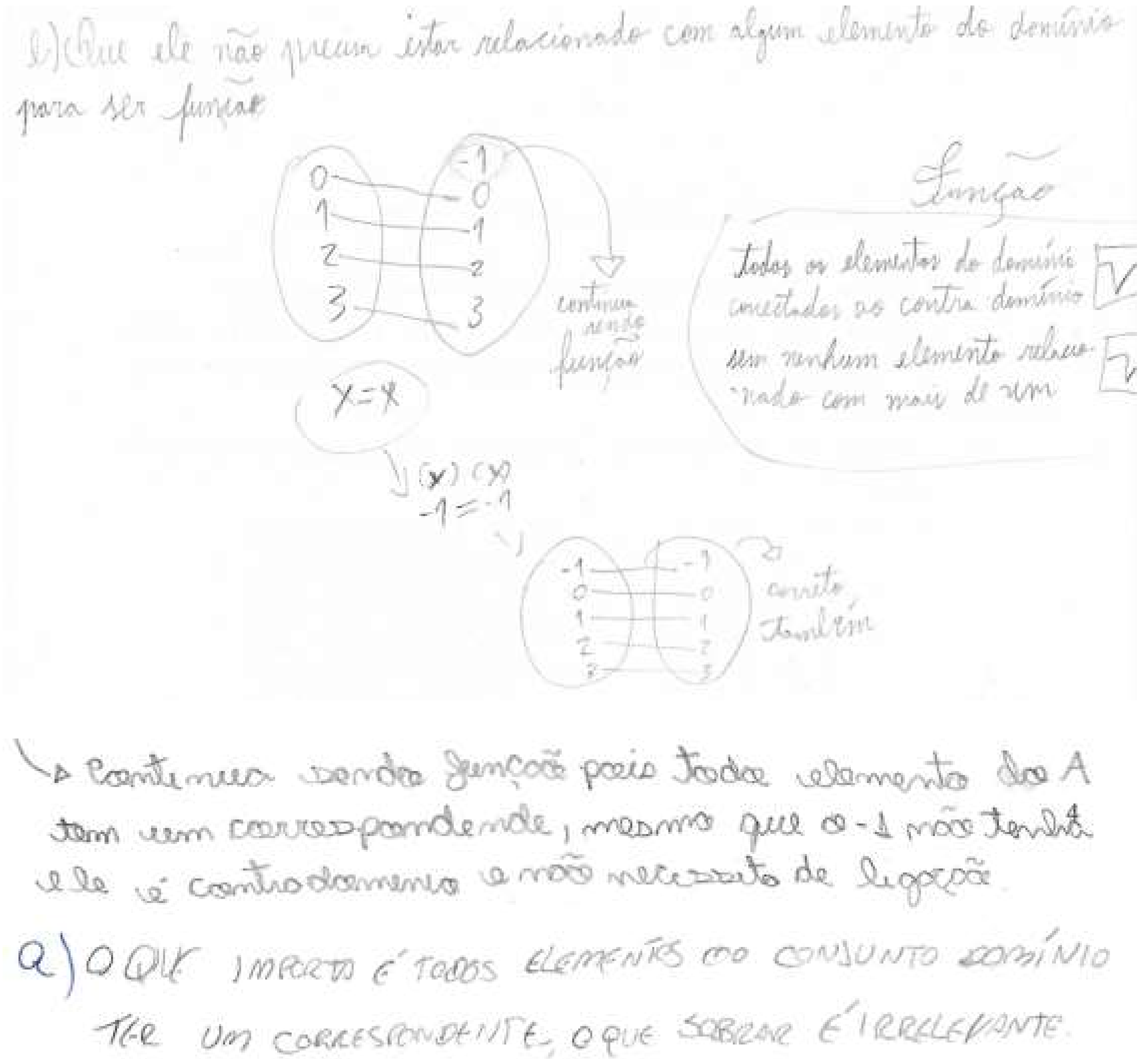
Fonte: Autoria própria (2022).

Como as TAPE 4 e 5 são complementos destas tarefas, ainda não foi o momento de formalizar o conteúdo. Mesmo sabendo que algumas colocações não estão corretas, como é o caso de alguns alunos definirem neste momento que função é uma relação entre todos os elementos do conjunto domínio com todos os elementos do contradomínio, foi bastante difícil não antecipar o que estaria por vir. Neste momento da TAPE proposta era o que os alunos conseguiam responder, porém, as próximas tarefas definiriam função de forma precisa, mesmo assim, ao finalizar a aplicação das tarefas 2 e 3, fizemos uma discussão sobre as perguntas das tarefas, reforçando o uso correto dos termos "domínio" e não "dominante" para o primeiro conjunto, e fizemos uma definição de função de acordo com o que foi visto, ou seja, uma consolidação da letra "c" da TAPE 3, como função sendo uma relação entre grandezas, em que todos os elementos do conjunto domínio devem ter apenas uma ligação com os elementos do conjunto contradomínio.

5.3 APLICAÇÃO DAS TAPE 4 E 5

As tarefas 4 e 5 mostravam outras situações em que os alunos deveriam utilizar o conceito de função definido nas tarefas anteriores para dar sequência no conteúdo. A tarefa 4 foi muito tranquila de ser aplicada, não gerou discussões e os alunos conseguiram entender que no conjunto contradomínio não há problemas em "sobrar" um elemento. Interessante observar nas respostas dos alunos termos mais técnicos, como conjuntos domínio e contradomínio, correspondência e elementos. Outro fato que me chamou atenção foi a tentativa de justificar a resposta de acordo com os conceitos já estabelecidos nas TAPE anteriores.

Figura 30 – Relatos da TAPE 4



Fonte: Autoria própria (2022).

A TAPE 5 gerou polemica entre os estudantes, o fato de um elemento do contradomínio estar relacionado com dois elementos do domínio intrigou os alunos, em um primeiro momento eles diziam que não poderia ser uma função, confundindo o entendimento das regras estabelecidas nas TAPE 2 e 3, assim, foi preciso fazer uma intervenção, fazendo perguntas para que eles entendessem a diferença da situação apresentada.

O primeiro questionamento foi em relação a regra estabelecida na tarefa anterior, estava bem definido que todos os elementos do domínio devem ser relacionar com apenas um elemento do contradomínio, assim ao perguntar sobre o elemento em questão, se está no domínio ou contradomínio, quase que unanime, eles disseram, é função. Ficou evidente que por se tratar do elemento do contradomínio que recebe duas ligações, isto não impede a situação apresentada de ser uma função, e também, foi orientado para eles relerem as respostas dadas pelos alunos, pois no enunciado diziam que eles resolveram corretamente e todos diziam que a situação era uma função. Exemplo de respostas dadas:

Figura 31 – Relatos da TAPE 5

a) 0 e 2

B) Porque o importante é o conjunto dominio, se ele estiver com todos seu elementos ligados a um correspondente do contradominio.

b) Cada elemento do Dominio está ligado a apenas um Correspondente no contradominio, mesmo que o elemento no contradominio esteja repetido.

a- Estão conectados ao 0 os números 2 e 0

b- Porque o importante é que cada elemento do conjunto domínio esteja conectado a um elemento do conjunto contradomínio.

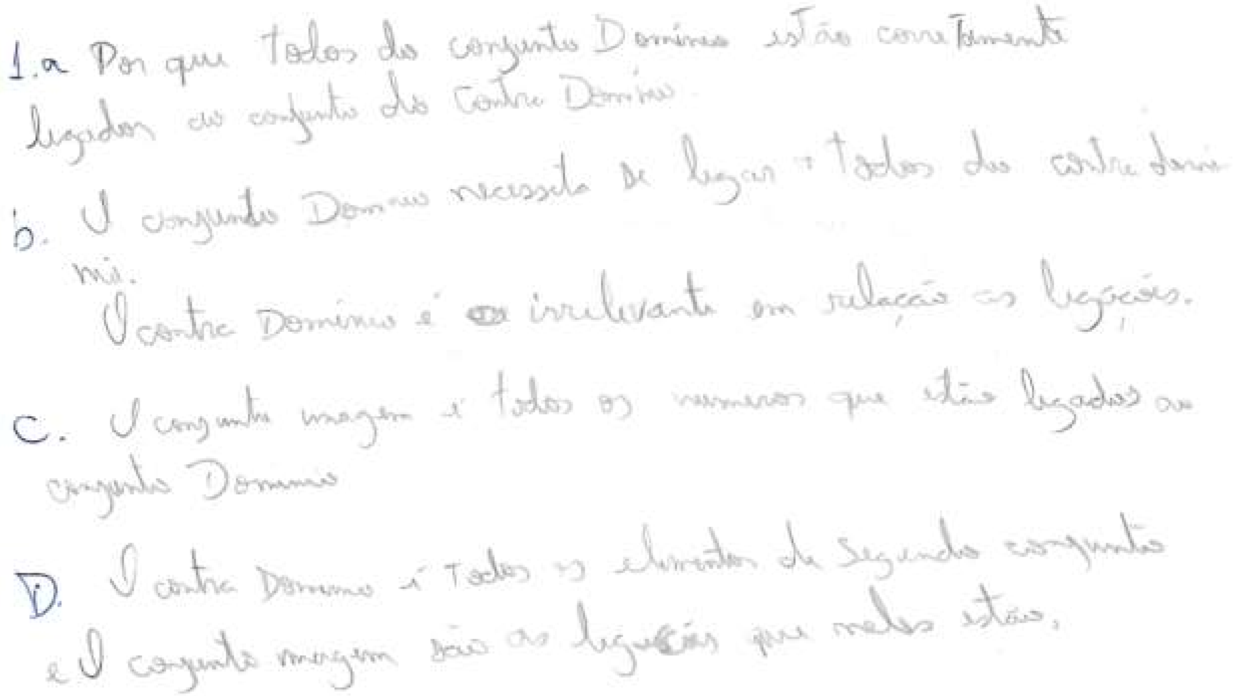
Fonte: Autoria própria (2022).

5.4 APLICAÇÃO DA TAPE 6

A tarefa 6 não apresentou dificuldades na sua realização, os alunos compreenderam bem a noção intuitiva de função através da notação de conjuntos e conseguem perceber que o conjunto domínio está se referindo ao primeiro conjunto e que o contradomínio ao segundo conjunto onde recebe a ligação dos elementos do domínio.

O objetivo principal desta tarefa era definir conjunto imagem e os alunos não tiveram dificuldade em perceber que o conjunto imagem é formado por aqueles elementos onde recebem ligação dos elementos do conjunto domínio, sendo este um conjunto menor, que está contido no conjunto contradomínio.

Figura 32 – Relatos da TAPE 6



1.a Por que Todos do conjunto Dominio estão corretamente ligados ao conjunto do Contra Dominio

b. O conjunto Dominio necessita de ligar a Todos do contra dominio.
O contra Dominio é irrelevante em relação as ligações.

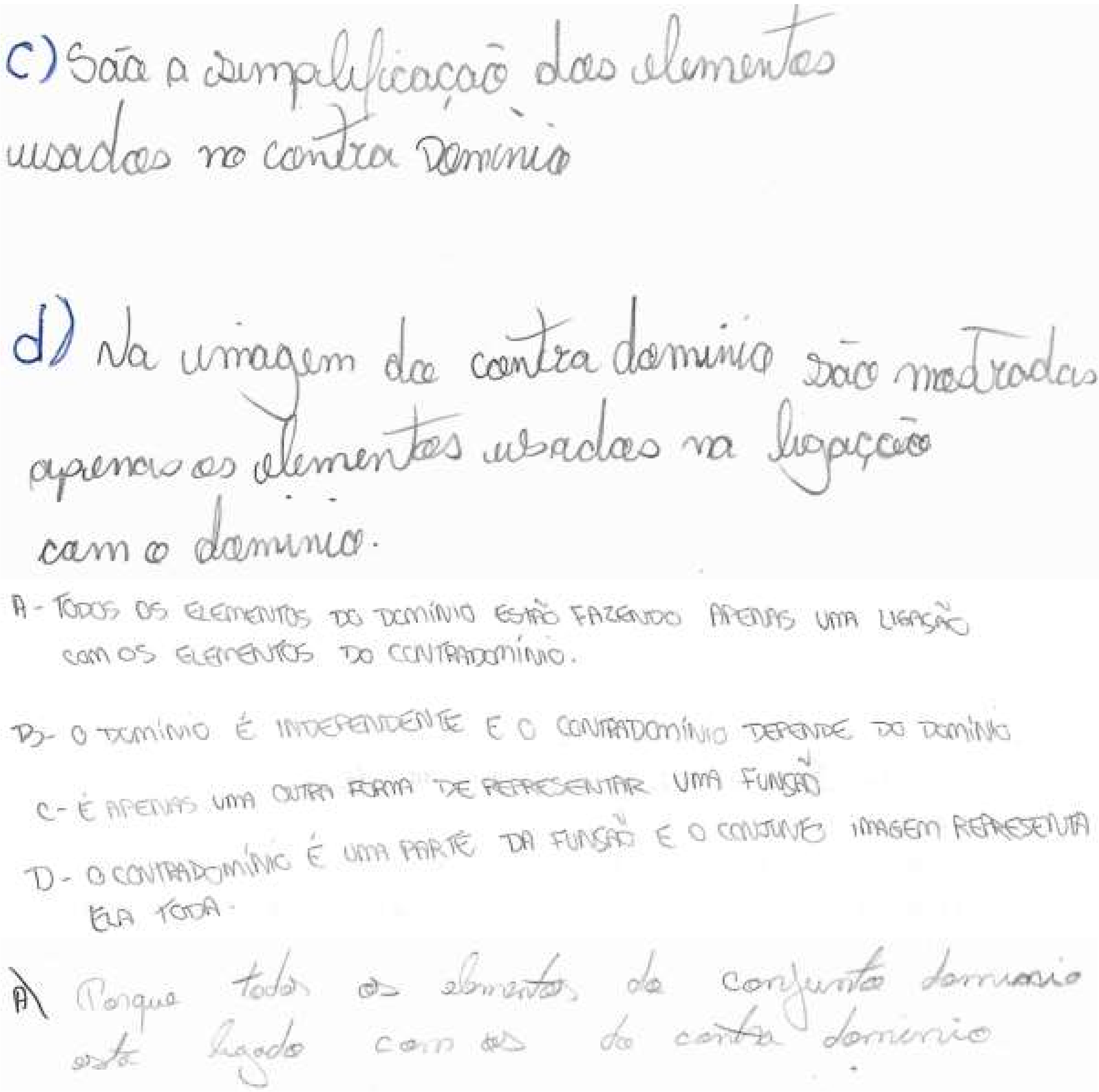
c. O conjunto imagem é todos os numeros que estão ligados ao conjunto Dominio

D. O contra Dominio é Todos os elementos do segundo conjunto e O conjunto imagem são as ligações que neles estão.

Fonte: Autoria própria (2022).

Vale destacar que nas respostas obtidas observa-se uma dificuldade muito grande na escrita, por vezes dava para perceber o que o aluno queria dizer, mas na hora de expressar isso, não saia corretamente, como abaixo:

Figura 33 – TAPE 6 – Dificuldades na escrita



c) São a simplificação dos elementos usados no contra Dominio

d) Na imagem do contra dominio são mostradas apenas os elementos usados na ligação com o dominio.

A- TODOS OS ELEMENTOS DO DOMÍNIO ESTÃO FAZENDO APENAS UMA LIGAÇÃO COM OS ELEMENTOS DO CONTRADOMÍNIO.

B- O DOMÍNIO É INDEPENDENTE E O CONTRADOMÍNIO DEPENDE DO DOMÍNIO

C- É APENAS UMA OUTRA FORMA DE REPRESENTAR UMA FUNÇÃO

D- O CONTRADOMÍNIO É UMA PARTE DA FUNÇÃO E O CONJUNTO IMAGEM REPRESENTA ELA TODA.

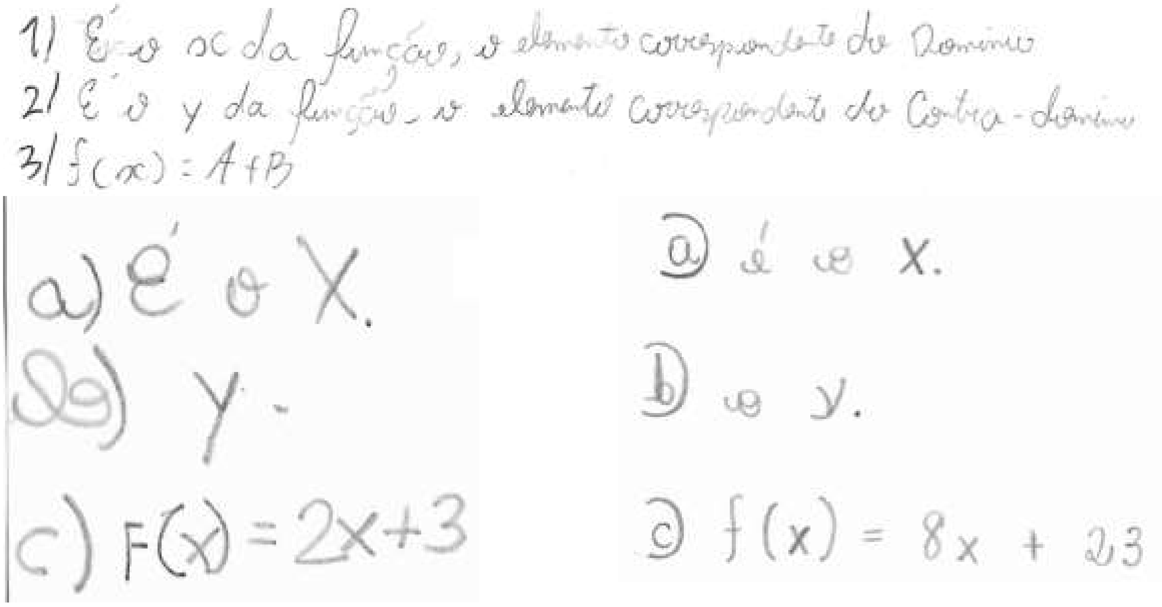
A) Porque todos os elementos do conjunto dominio esta ligado com os do contra dominio

Fonte: Autoria própria (2022).

5.5 APLICAÇÃO DA TAPE 7

A tarefa 7 tinha como objetivo principal identificar os coeficientes a e b da lei de formação de uma função afim ($f(x) = ax + b$). Para o coeficiente a, muitos alunos confundiram como sendo o x da lei de formação, eles não conseguiram identificar que era o número que estava multiplicando o x. Também houve algumas confusões no entendimento do " b como sendo o y da função, conforme exemplos abaixo:

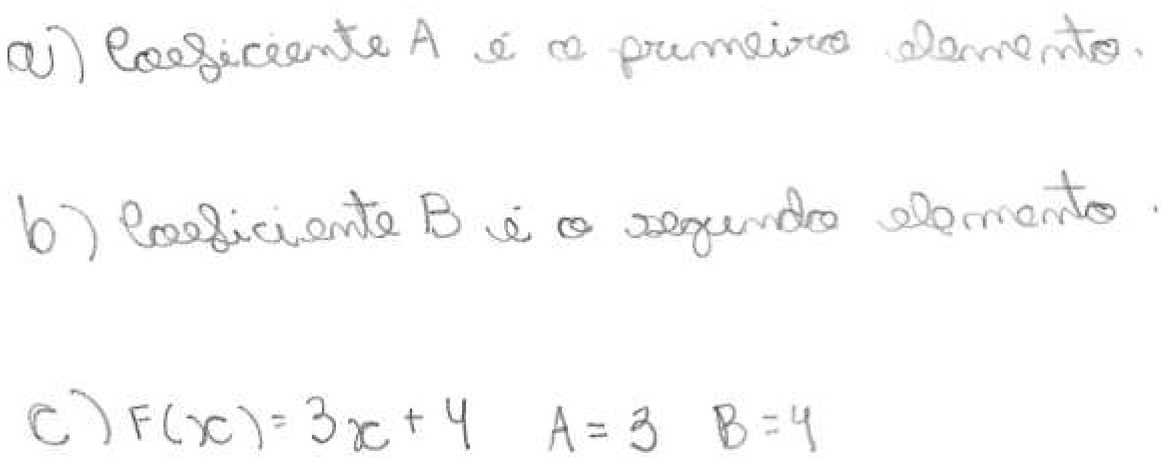
Figura 34 – Relatos da TAPE 7



Fonte: Autoria própria (2022).

O que gerou mais dúvida na tarefa 7 foi escrever a lei de formação genérica, os alunos não perceberam que no lugar do número que acompanha o x era para representar a letra “a” e do número que está sozinho era para colocar a letra “b”. Os alunos têm muita dificuldade de entender e representar fórmulas ou leis de formação de modo genérico, utilizando letras no lugar de números. Desta forma, muitas respostas vieram com um valor para cada coeficiente escolhido pelo aluno.

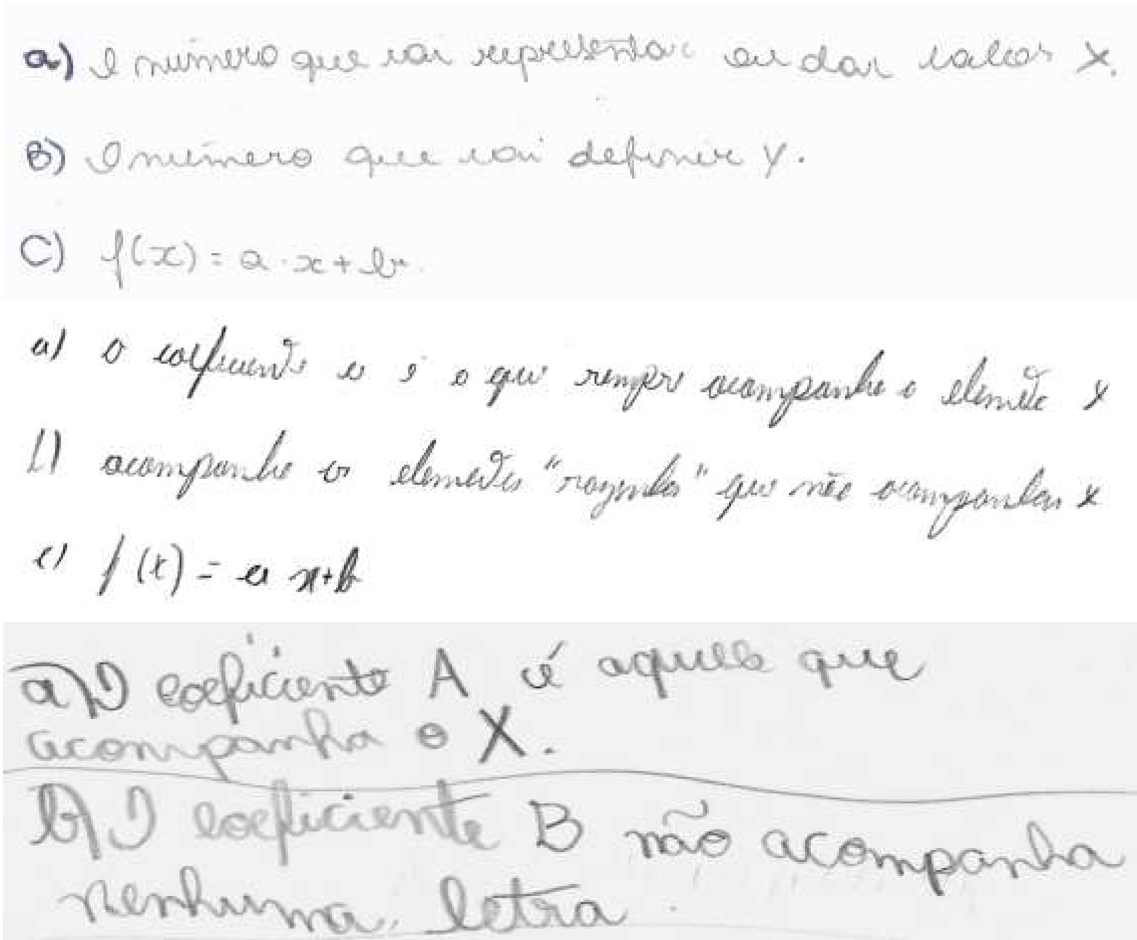
Figura 35 – TAPE 7 – Lei de formação genérica de uma função



Fonte: Autoria própria (2022).

Mas também houve muitas respostas corretas, conforme a THA.

Figura 36 – TAPE 7 – Respostas corretas

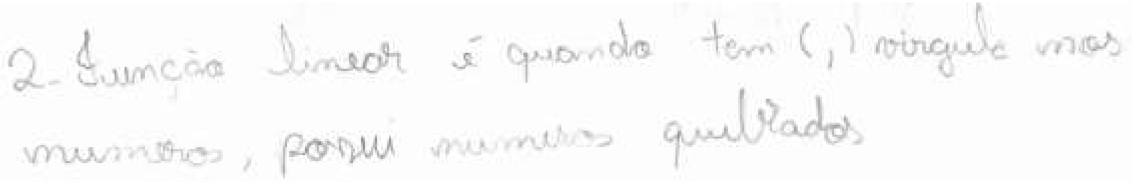


Fonte: Autoria própria (2022).

5.6 APLICAÇÃO DA TAPE 8

A tarefa 8 gerou bastante dúvida entre os alunos. Como na tarefa havia apenas um exemplo de cada caso particular da função afim, os alunos acabaram se confundindo em algumas respostas. Por exemplo, na função linear não ficou evidente que o coeficiente b sendo 0 (zero) se refere a uma função linear. Isto porque na letra "b" o coeficiente b também é zero e a função acaba sendo identidade, como exemplo, a figura 36 mostra a resposta de um aluno que respondeu que uma função cuja lei de formação é $f(x) = 4{,}3x,$ seria uma função linear pois o coeficiente a é um número "com virgula', mesmo sendo uma função, o objetivo era o aluno perceber que a função linear acontece quando o coeficiente linear (b) é zero. A função constante, tendo como coeficiente a igual a zero, também gerou dúvidas, porque confundiu com a função constante nula em que os coeficientes a e b são zero. Enfim, para o produto educacional deve-se reformular esta tarefa, com mais exemplos de cada uma das funções, para que fique evidente a característica de cada tipo particular de função afim. No momento da formalização houve uma explicação mais detalhada dos casos particulares das funções afim.

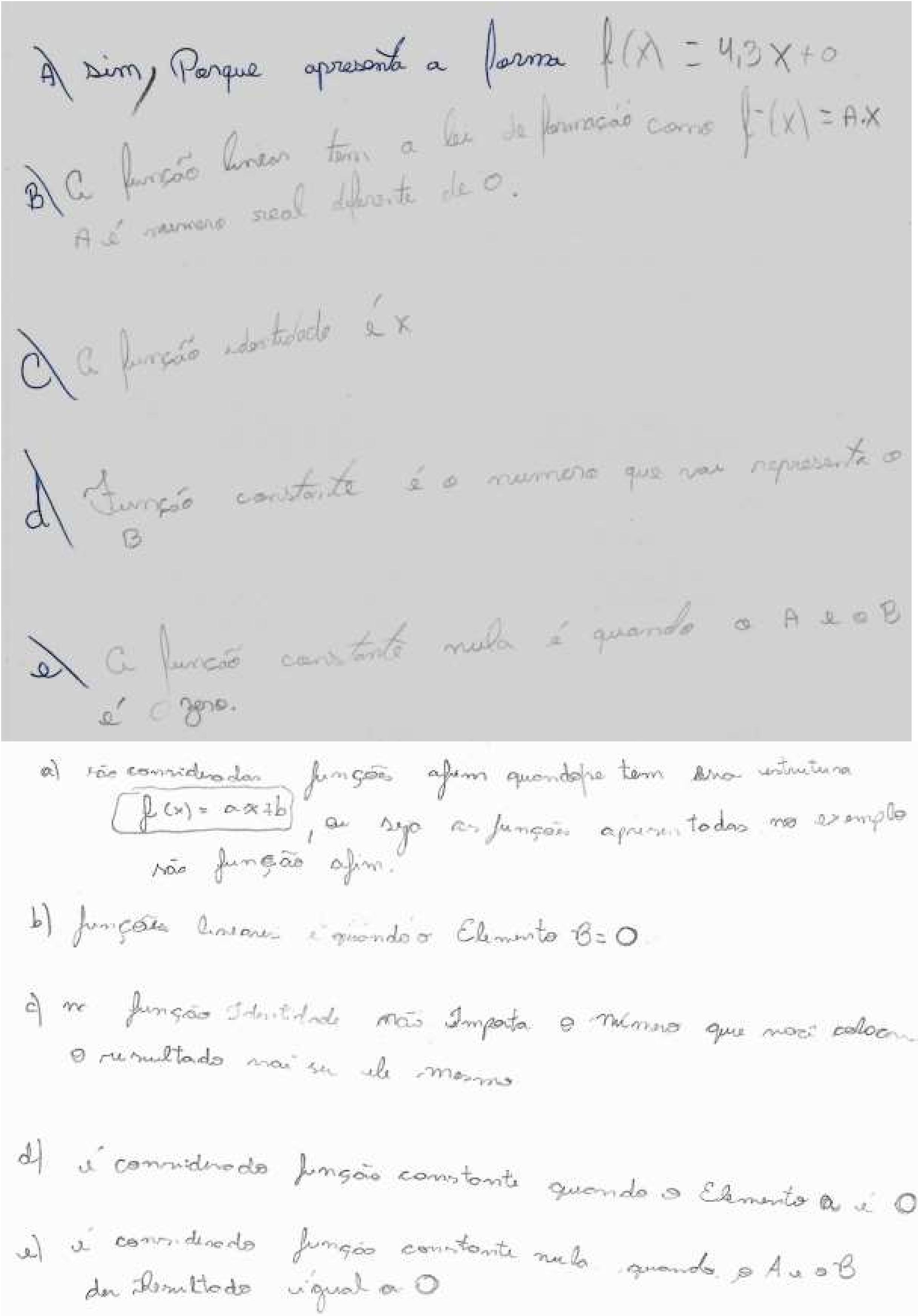
Figura 37 – Relatos da TAPE 8


2- Função linear é quando tem (,) virgula nos numeros, possui numeros quebrados

Fonte: Autoria própria (2022).

Mas mesmo diante desta constatação, alguns alunos conseguiram entender que os tipos de função estão relacionados com o valor dos coeficientes sendo zero:

Figura 38 – Relatos da TAPE 8 – Respostas corretas



A) sim, Porque apresenta a forma $f(x) = 4{,}3x + 0$

B) A função linear tem a lei de formação como $f(x) = A.X$
A é numero real diferente de 0.

C) A função identidade é X

d) Função constante é o numero que vai representa o B

e) A função constante nula é quando o A e o B é zero.

a) são consideradas funções afim quando se tem sua estrutura $\boxed{f(x) = ax+b}$, ou seja as funções apresentadas no exemplo são função afim.

b) funções lineares é quando o Elemento $B=0$

c) na função Identidade não Importa o número que você coloca o resultado vai ser ele mesmo

d) é considerado função constante quando o Elemento a é 0

e) é considerado função constante nula quando o A e o B der Resultado igual a 0

Fonte: Autoria própria (2022).

5.7 APLICAÇÃO DA TAPE 9

O maior obstáculo da TAPE 9 foi o entendimento do enunciado. Os alunos têm dificuldade com a leitura e a compreensão da linguagem matemática e isto complicou a resolução das tarefas. Para que os alunos conseguissem resolver esta tarefa, foi preciso ler, mais de uma vez, e interpretar o enunciado junto com as turmas, para depois eles efetuarem a tarefa. A resolução da tarefa em si não apresentou dificuldades, ao fazer as correções das resoluções dos alunos para a tarefa proposta, ficou evidente que o coeficiente a está ligado com a inclinação da reta, quando ele é positivo a reta cresce, quando ele é negativo a reta desce. No momento da formalização, alguns alunos questionaram como identificar quando uma reta está subindo (função crescente) e descendo (função decrescente), porque isso depende de um referencial, desta forma foi explicado que a inclinação da reta está relacionado com o valor do “x” que a função assume e do resultado da função, ou seja, se quando aumenta o valor do “x”, aumenta o valor da função, dizemos que a função é crescente e se o valor do “x” diminui e o valor da função aumenta, dizemos que a função é decrescente.

Uma confusão que gerou entre os alunos foi em relação ao objeto geométrico que representa a função afim, muitos alunos responderam como sendo um triângulo, pois analisaram a reta junto com os eixos do plano cartesiano. Durante a formalização, ao perguntar por que muitos se referiam ao objeto como triângulo, eles disseram que ao ler “objeto geométrico” ficaram concentrados em identificar alguma figura plana, um polígono, e não se atentaram que a reta é a representação gráfica de uma função afim, o que evidencia ainda mais o déficit de conteúdo destes alunos.

Figura 39 – Relatos da TAPE 9

a) um triângulo

a) triângulo.

b) para marcar os pontos A e B na reta.

c) a primeira é uma função crescente (positiva)
a segunda é decrescente (negativa)

d) vendo se o número é negativo ou positivo.

a) uma reta
b) para saber se é crescente ou decrescente
c) uma é crescente e outra decrescente
d) se o A é positivo ou negativo.

A) Uma Reta
b) Para determinar se no plano cartesiano, a reta vai ser crescente ou decrescente
c) Na letra a, o coeficiente angular é positivo, já em b, é negativo
d) A partir do primeiro termo (coeficiente angular)

A esta Positiva e crescente

B esta negativa e decrescente

É a letra que acompanha o "x" e serve para crescente e decrescente
e serve para determinar se é

Fonte: Autoria própria (2022).

5.8 APLICAÇÃO DA TAREFA 10

Novamente a dificuldade da tarefa 10 foi interpretação da linguagem matemática do enunciado. Os alunos têm dificuldade para entender o que seria x_0 e fazer a interpretação do que se pede no enunciado. Para que a tarefa pudesse ser concluída, foi feita a leitura com todos e uma explicação geral sobre o enunciado.

Ao analisar as resoluções dos alunos ficou evidente que o valor numérico de uma função é o resultado que se tem quando substitui o x pelo valor pedido e os alunos conseguiram entender isso muito bem (após a leitura em conjunto).

Interessante algumas respostas para a letra "c", ao explicar a letra y no lugar de f muitos alunos confundem o f e o y como sendo diferentes. Para a formalização deste conteúdo, vale destacar que o resultado do valor da função, denotada por $f(x)$, quando representado no plano cartesiano, é expresso no eixo das ordenadas, também indicado pelo eixo y. Assim, $f(x)$ pode ser substituído pela letra y, porque o resultado de uma função $f(x)$ para um determinado valor de x é um par ordenado da forma (x, y).

Figura 40 – Relatos da TAPE 10

1. São o resultado da função

2. Substituindo os valores do domínio, para a lei de formação

3. Porque ele resolveu o valor da função, e os outros resolveram a função

a) O valor numérico de uma função é o resultado correspondente a $ax+b$ que tem como resposta na conta ax_0+b_0.
b) Se calcula com a forma de função ax_0+b_0 que dará seus resultados deram 2, 5 e -7.
c) O f escreveram como função; O y é o número que é correspondente ao b ieles precisaram a resposta da letra b.

a) Que depende do número que está no valor do domínio, o resultado da função
b) Você pega um elemento que está no grupo X e aplica na função
c) Pois no formula é f, mas eles estão calculando o número do grupo y

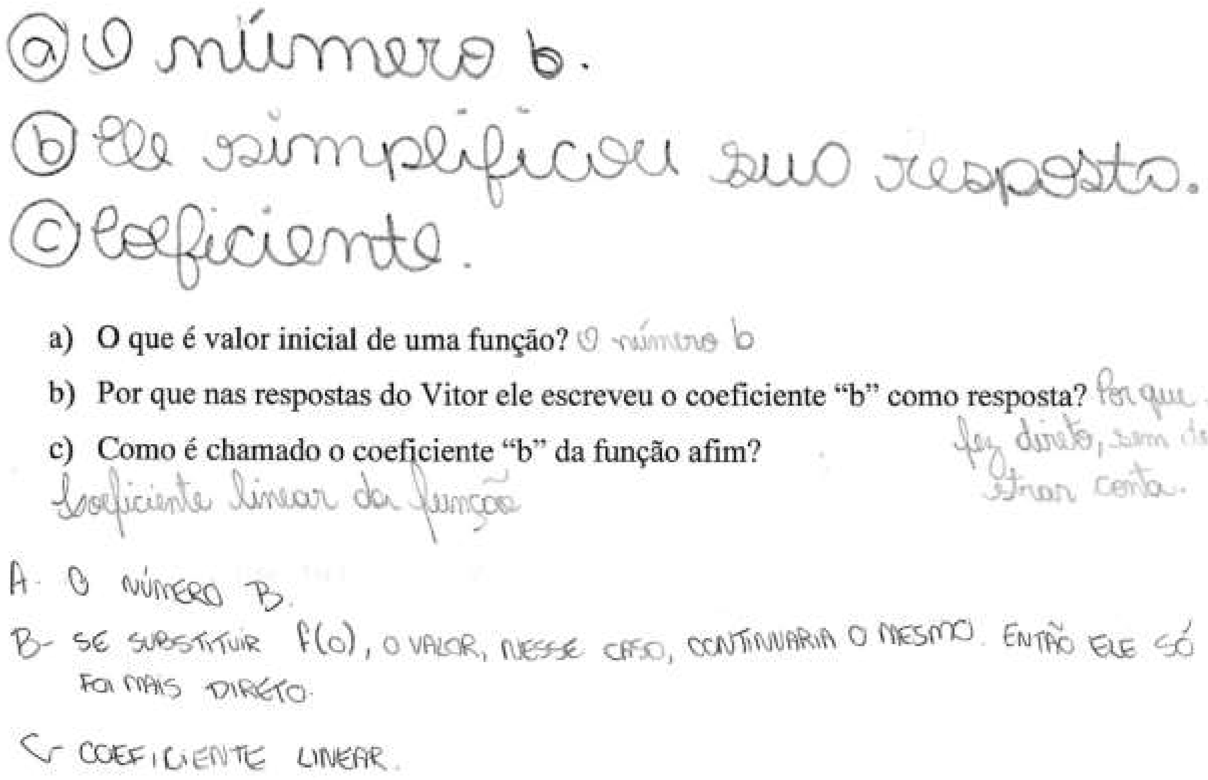
Fonte: Autoria própria (2022).

5.9 APLICAÇÃO DA TAPE 11

A tarefa 11 tinha como objetivo identificar o coeficiente b da função afim, denominado como coeficiente linear. Os alunos perceberam que ao substituir o "x" de uma função por zero, o resultado obtido da lei de formação é justamente coeficiente b.

Para esta tarefa não houve muitos questionamentos. Os alunos entendem perfeitamente que o coeficiente b é o termo independente da lei de formação e que para identificar ele na função basta substituir o x por zero que no caso é chamado o valor inicial da função.

Figura 41 – Relatos da TAPE 11



a) O número b.
b) Ele simplificou sua resposta.
c) coeficiente.

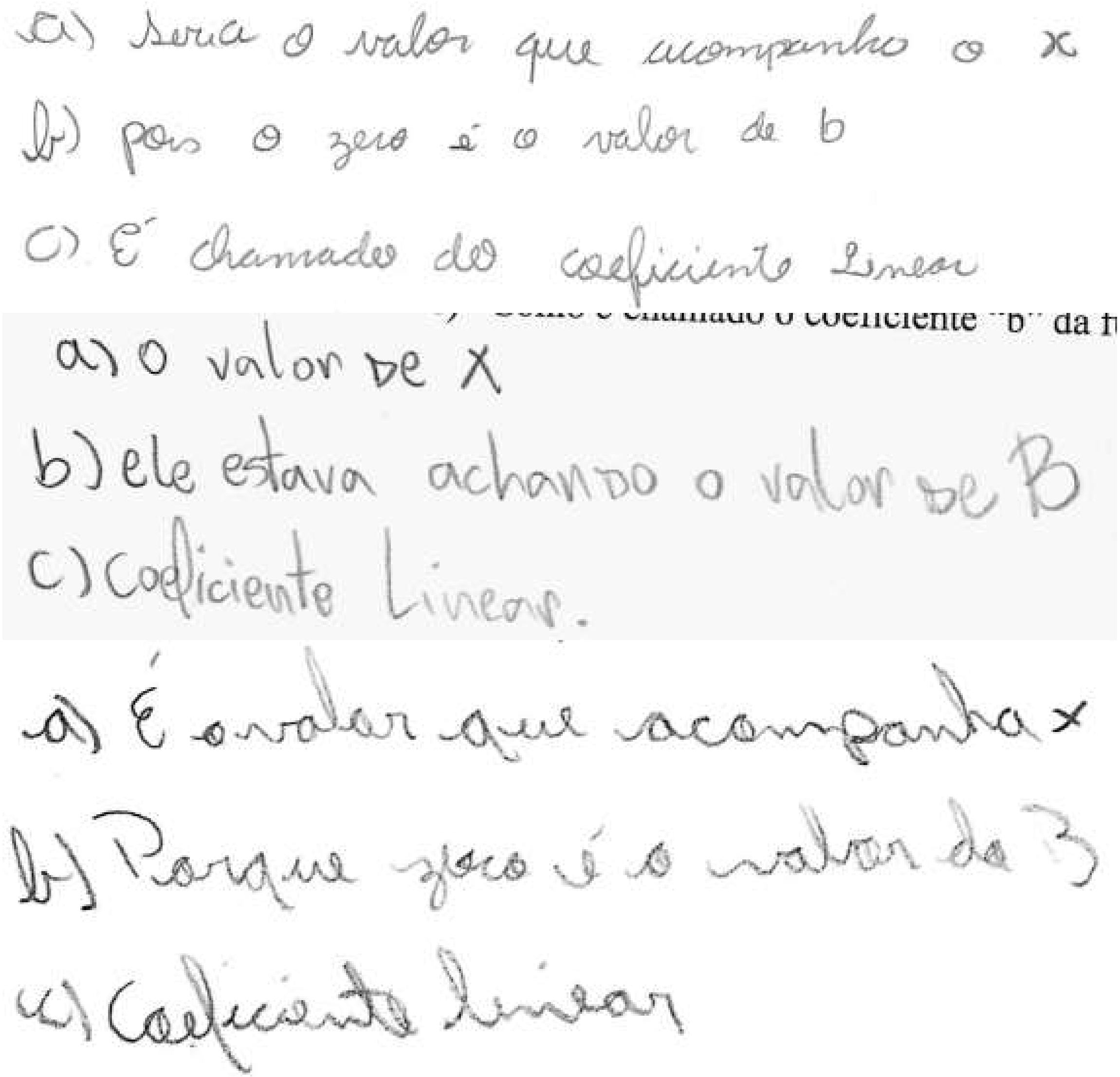
a) O que é valor inicial de uma função? O número b
b) Por que nas respostas do Vitor ele escreveu o coeficiente "b" como resposta? Porque ele fez direto, sem demonstrar conta.
c) Como é chamado o coeficiente "b" da função afim?
Coeficiente linear da função

A. O NÚMERO B.
B- SE SUBSTITUIR f(0), O VALOR, NESSE CASO, CONTINUARIA O MESMO. ENTÃO ELE SÓ FOI MAIS DIRETO.
C- COEFICIENTE LINEAR.

Fonte: Autoria própria (2022).

Vale destacar que muitas respostas obtidas estão com uma escrita muito ruim, percebe-se que os alunos compreenderam a tarefa proposta, mas tem dificuldade de expressar esse entendimento, fazendo uma escrita com erros.

Figura 42 –TAPE 11 – Escrita com erros



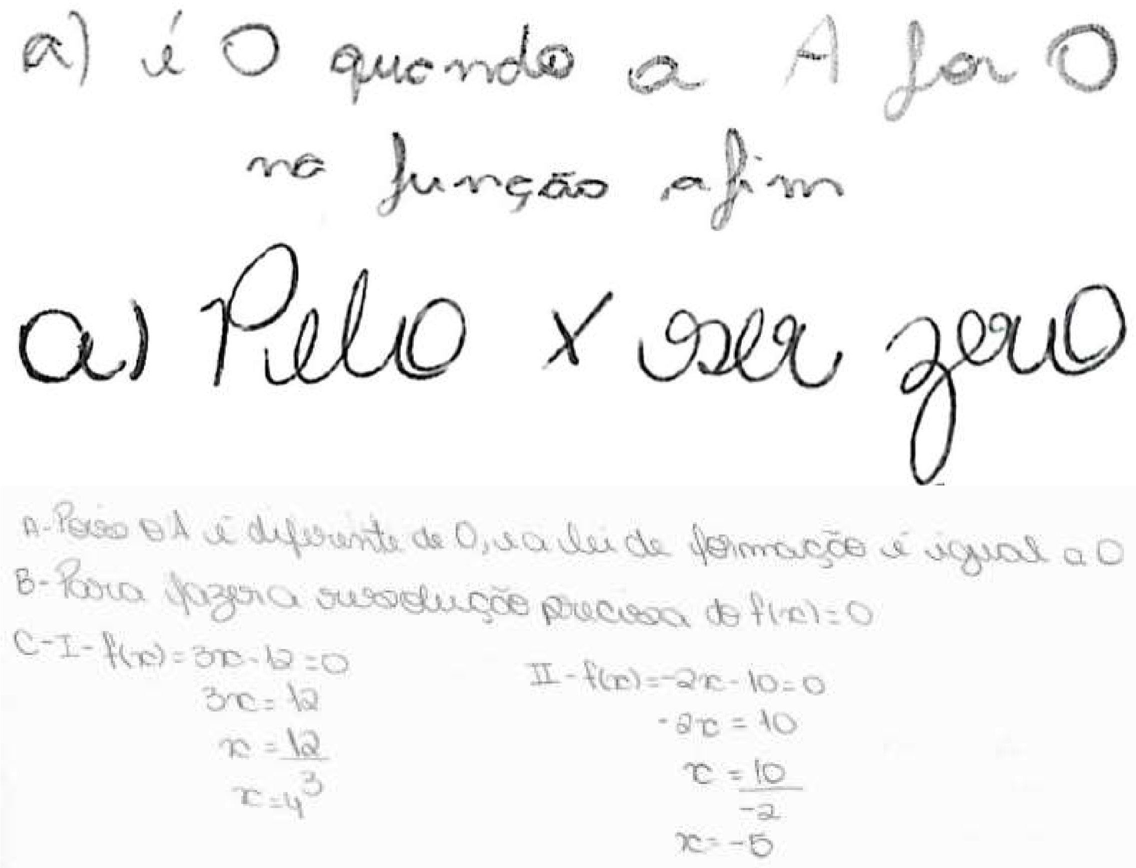
Fonte: Autoria própria (2022).

5.10 APLICAÇÃO DA TAPE 12

A tarefa 12 tinha como objetivo identificar a raiz ou zero de uma função afim. Essa tarefa causou bastante polêmica. Os alunos confundem o cálculo da raiz como sendo substituir o x por 0 quando na verdade, de acordo com as resoluções dos colegas apresentadas na TAPE, a função tem que ser igual a zero. Esta tarefa precisou de bastante explicação na sua formalização, foi preciso voltar para a tarefa anterior e mostrar a diferença de substituir o x por zero e igualar a função a zero. Ao substituir x por zero fica evidente o número b da função, que é denominado o valor inicial da função, enquanto que ao igualar a função a zero é encontrado o valor do domínio (x) que torna a função com valor igual a zero.

Outro fato que chamou atenção foi a dificuldade que alguns alunos apresentaram ao resolver uma equação de 1º grau com uma incógnita. Algumas resoluções apresentavam erro de sinal ao trocar os termos do 1º para o 2º membro da equação, outros simplesmente não conseguiram efetuar a resolução. Reflexo do período de ensino remoto que muitos alunos tiveram dificuldades de acesso e de acompanhar as aulas.

Figura 43 – Relatos da TAPE 12 – Valor inicial da função



a) é 0 quando a A for 0 no função afim

a) Pelo x ser zero

A- Pois o A é diferente de 0, e a lei de formação é igual a 0

B- Para fazer a resolução precisa do f(x)=0

C- I- $f(x)=3x-12=0$

$3x=12$

$x=\frac{12}{3}$

$x=4$

II- $f(x)=-2x-10=0$

$-2x=10$

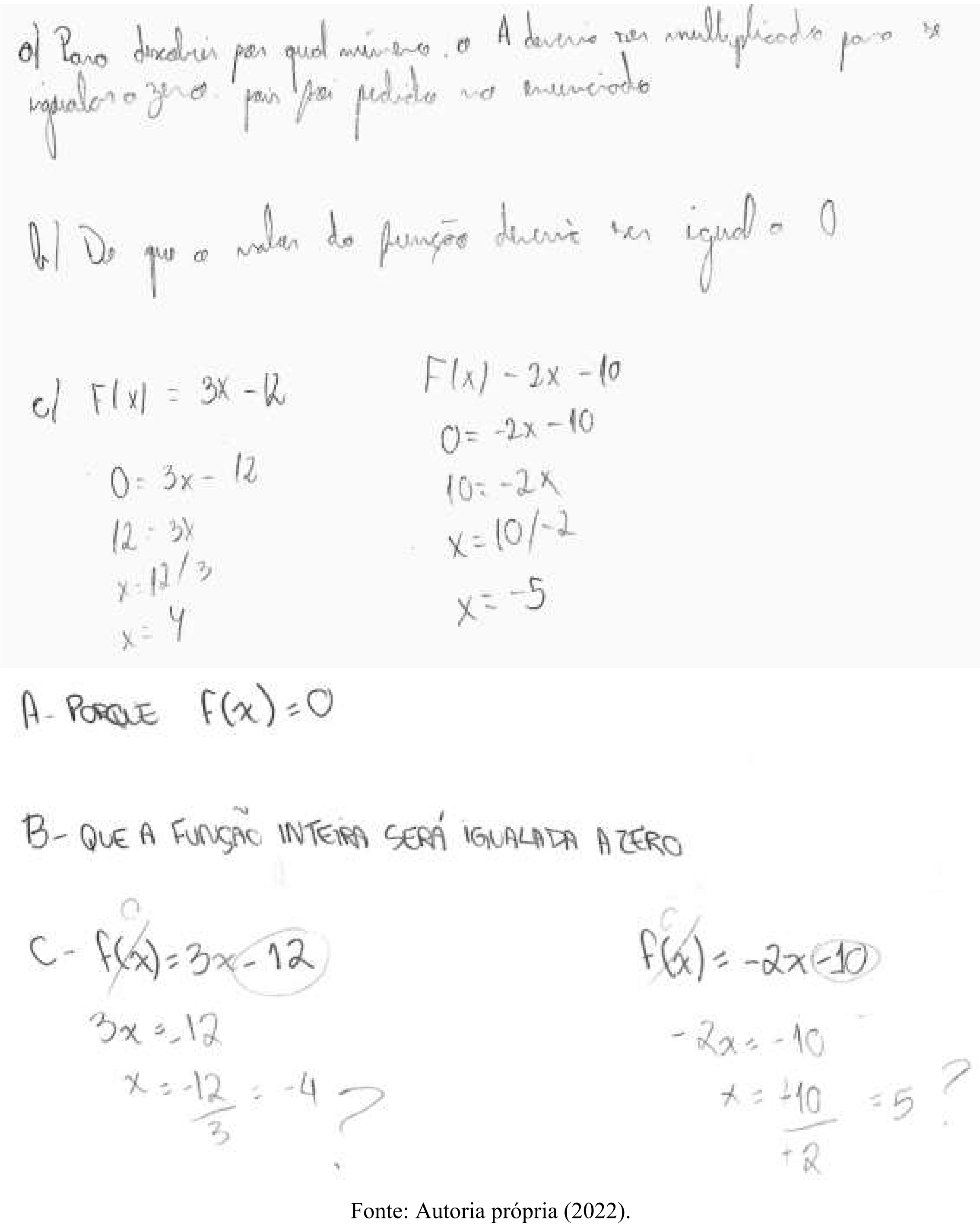
$x=\frac{10}{-2}$

$x=-5$

Fonte: Autoria própria (2022).

Respostas de acordo com a THA:

Figura 44 – TAPE 12 – Respostas de acordo com a THA



a) Para descobrir por qual número o A deveria ser multiplicado para se igualar a zero. pois foi pedido no enunciado

b) De que o valor da função deveria ser igual a 0

c) $F(x) = 3x - 12$

$0 = 3x - 12$

$12 = 3x$

$x = 12/3$

$x = 4$

$F(x) - 2x - 10$

$0 = -2x - 10$

$10 = -2x$

$x = 10/-2$

$x = -5$

A- PORQUE $f(x) = 0$

B- QUE A FUNÇÃO INTEIRA SERÁ IGUALADA A ZERO

C- $f(\overset{0}{\cancel{x}}) = 3x - 12$

$3x = -12$

$x = \frac{-12}{3} = -4$?

$f(\overset{0}{\cancel{x}}) = -2x - 10$

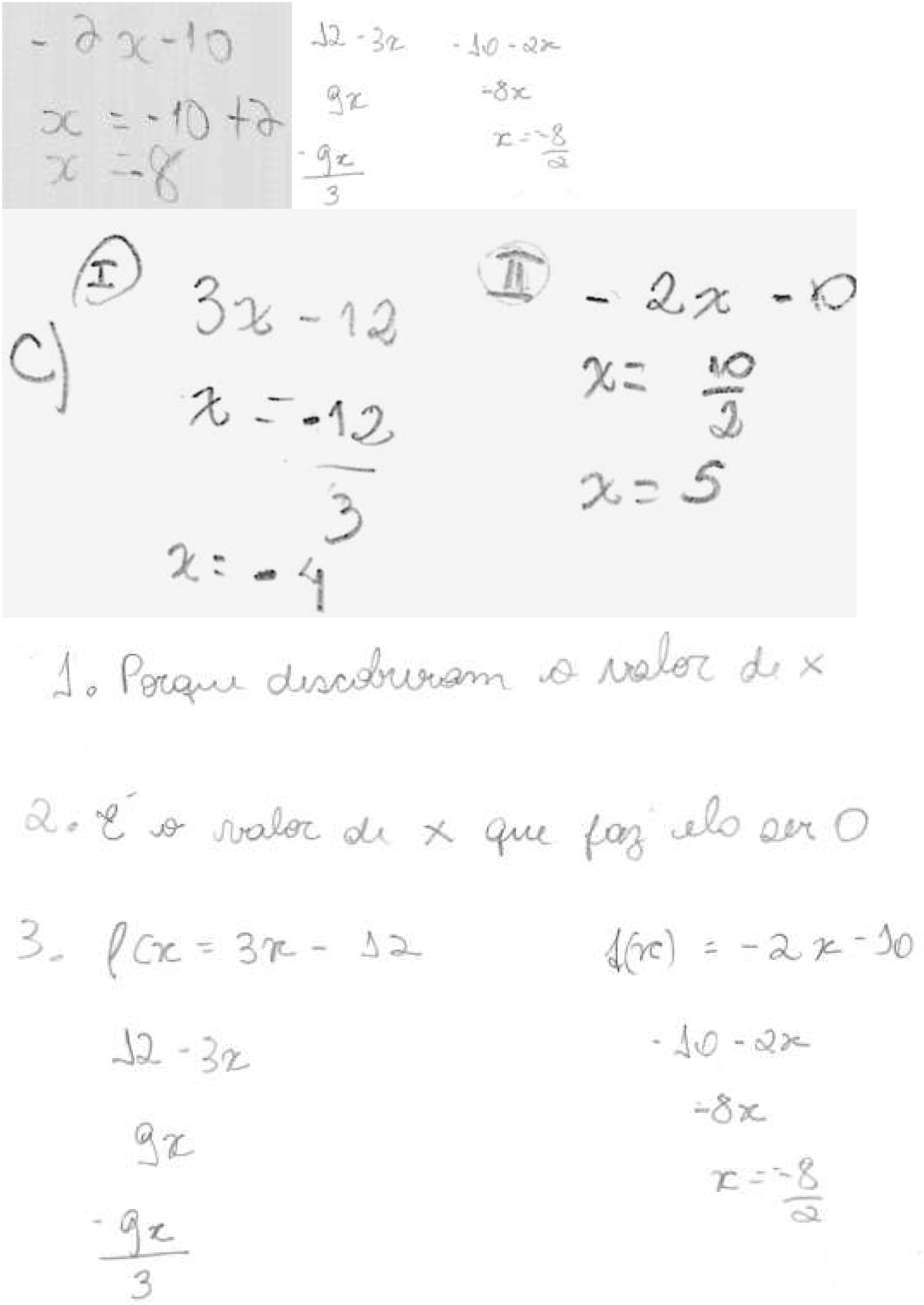
$-2x = -10$

$x = \frac{+10}{+2} = 5$?

Fonte: Autoria própria (2022).

Erros de resolução na equação:

Figura 45 – TAPE 12 – Erros de resolução de equação



Fonte: Autoria própria (2022).

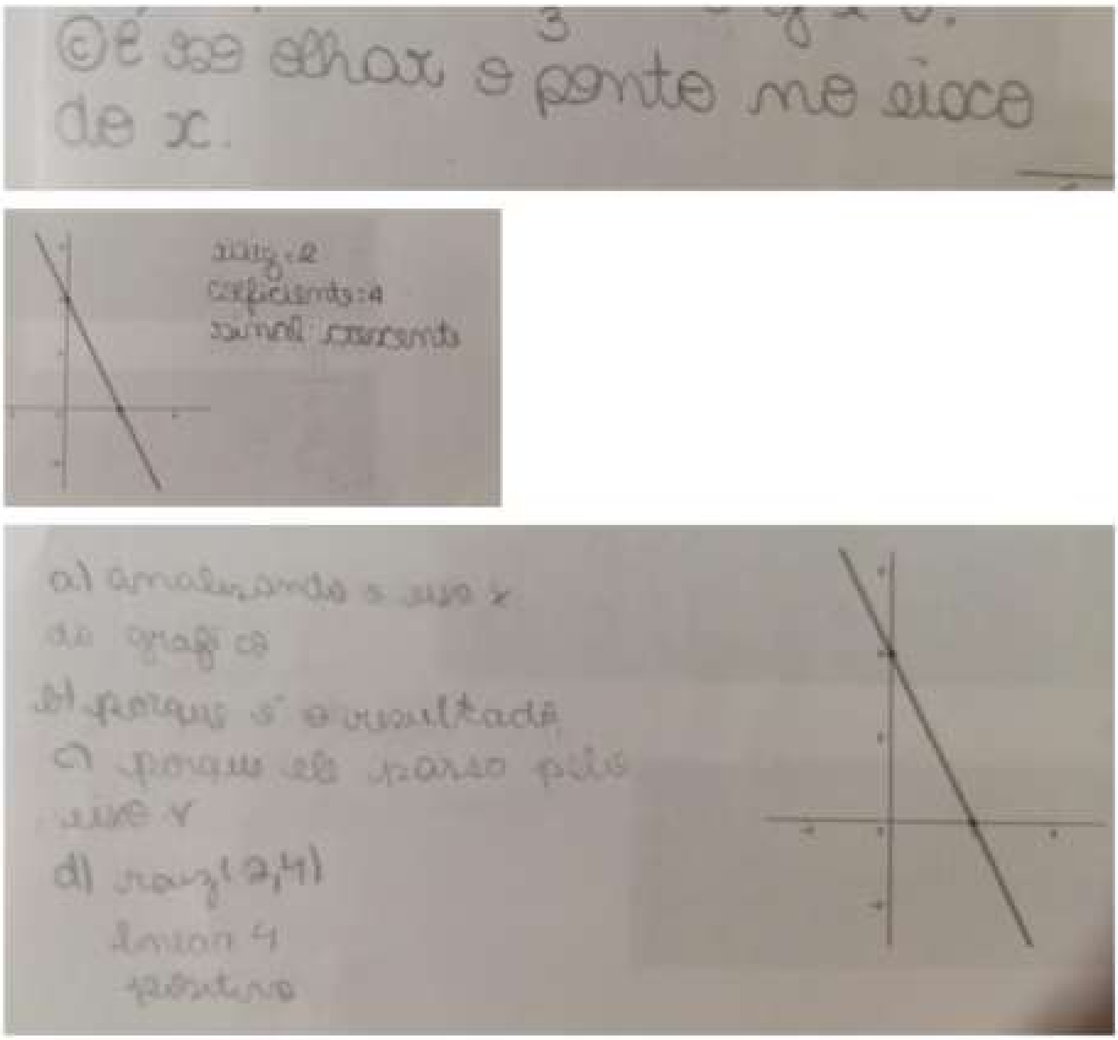
Diante destas resoluções com erros, podemos observar o potencial que as TAPE têm, não só de ensinar um conteúdo através delas, mas também de analisar dificuldades dos alunos, de permitir ao professor enxergar esses déficits, e replanejar suas aulas para que contorne situações como as apresentadas. Durante a formalização do conteúdo, foram retomados alguns conceitos da equação, como o princípio multiplicativo e aditivo, porém de maneira superficial. Mas, sabendo desta dificuldade, foi abordado o conteúdo equação dentro de outros conteúdos seguintes, no caso, sólidos geométricos (sequência do conteúdo do 3º ano do Ensino Médio).

5.11 APLICAÇÃO DA TAPE 13

A tarefa 13 reúne os conhecimentos sobre os coeficientes da função afim vistos nas tarefas anteriores em duas situações problemas. Para esta TAPE os alunos deveriam identificar em um gráfico o coeficiente linear, a raiz, e o sinal do coeficiente angular de uma função afim, comparando as resoluções dos alunos apresentados na TAPE e justificando suas respostas.

Ao analisar as respostas nota-se que houve confusão ao identificar se uma função é crescente ou decrescente, também houve algumas respostas confusas em relação ao coeficiente linear, alguns alunos confundiram a reta passar pelo eixo x no ponto em que o coeficiente é o b.

Figura 46 – Relatos das TAPE 13 – Erros de resolução de equação

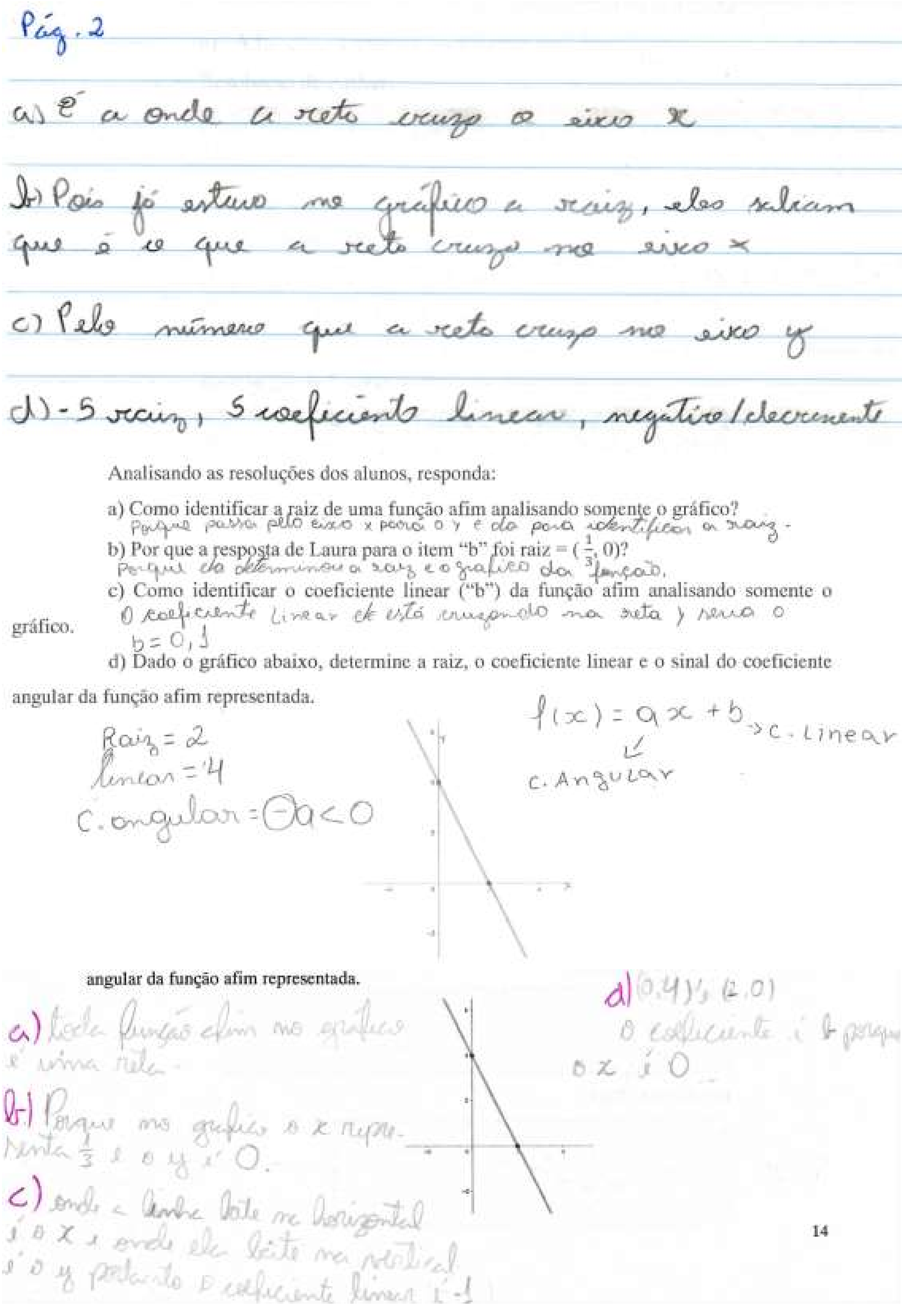


Fonte: Autoria própria (2022).

Outro erro comum foi confundir o coeficiente angular com a raiz da função. Os alunos associam o coeficiente b como o ponto em que a reta intercepta o eixo y e pensam que a mesma relação vale para o coeficiente a, porém no eixo x.

Pode-se observar muitas respostas corretas, que foram previstas na THA, conforme a figura abaixo:

Figura 47 – Respostas da TAPE 13 de acordo com a THA


Pág. 2

a) É a onde a reta cruza o eixo x

b) Pois já estava no gráfico a raiz, eles sabiam que é o que a reta cruza no eixo x

c) Pelo número que a reta cruza no eixo y

d) -5 raiz, 5 coeficiente linear, negativo/decrescente

Analisando as resoluções dos alunos, responda:

a) Como identificar a raiz de uma função afim analisando somente o gráfico?
Porque passa pelo eixo x para o y e dá para identificar a raiz.

b) Por que a resposta de Laura para o item "b" foi raiz = $(\frac{1}{3}, 0)$?
Porque ela determinou a raiz e o gráfico da função.

c) Como identificar o coeficiente linear ("b") da função afim analisando somente o gráfico.
O coeficiente linear ele está cruzando na reta y sendo o b = 0,1

d) Dado o gráfico abaixo, determine a raiz, o coeficiente linear e o sinal do coeficiente angular da função afim representada.

Raiz = 2
linear = 4
C. angular = (-) $a < 0$

$f(x) = ax + b$ → C. Linear
C. Angular

angular da função afim representada.

a) toda função afim no gráfico é uma reta.

b) Porque no gráfico o x representa $\frac{1}{3}$ e o y é 0.

c) onde a linha bate na horizontal é o x e onde ela bate na vertical é o y portanto o coeficiente linear é -1

d) (0,4); (2,0)
O coeficiente é 4 porque o x é 0.

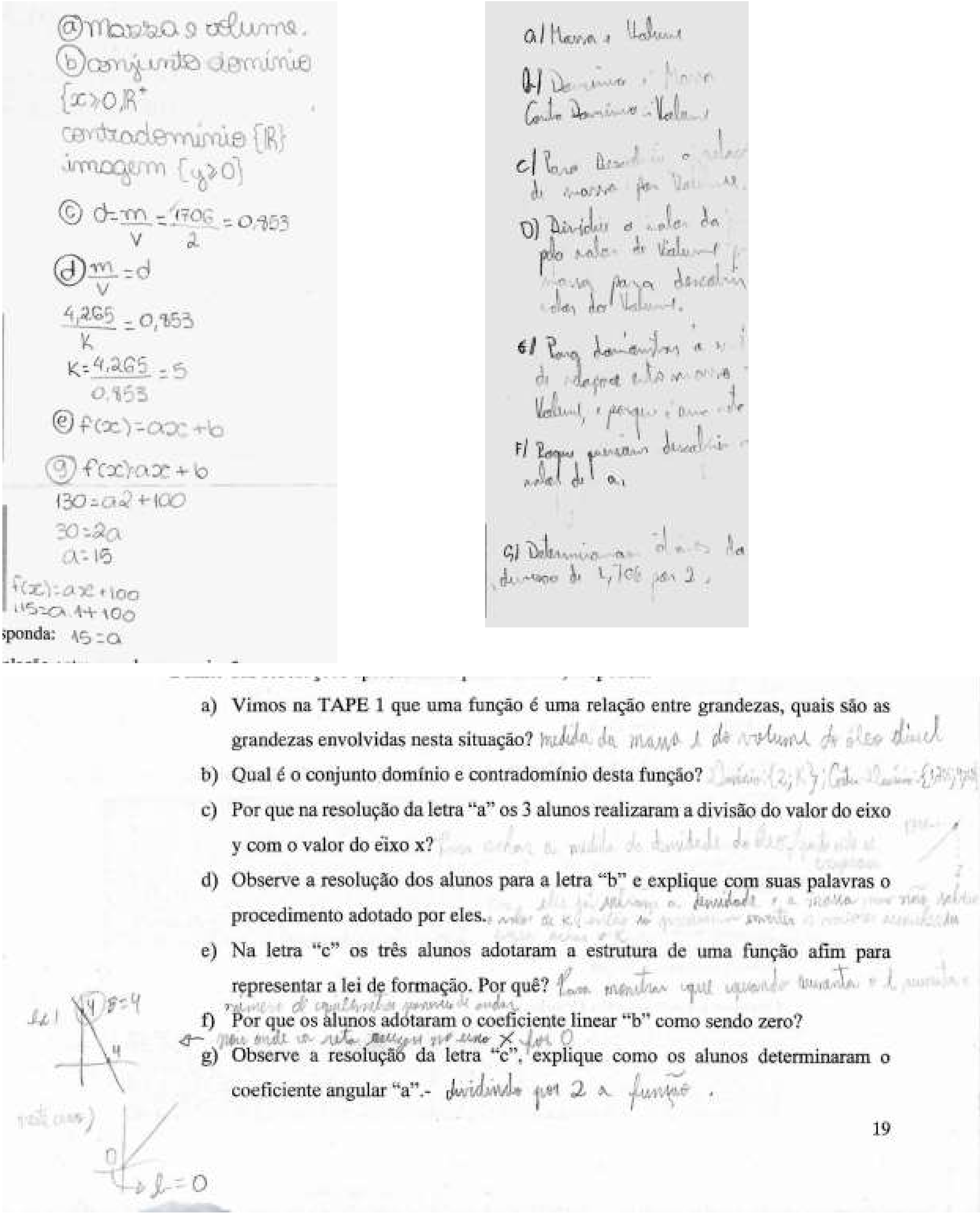
14

Fonte: Autoria própria (2022).

5.12 APLICAÇÃO DA TAREFA 14

A tarefa 14 consolida o conteúdo de função afim, reúne todas as informações vistas anteriormente através de um problema de função. Nesta tarefa os alunos deveriam identificar a relação entre grandezas, o conjunto domínio e contradomínio, explicar os coeficientes angular e linear, e pela primeira vez, calcular o coeficiente angular de uma função, para isso eles devem observar as resoluções oferecidas pelos alunos na TAPE perceber que para calcular o coeficiente angular seria necessário substituir na lei de formação uma coordenada (valor de x e y) conhecida, resolver uma equação de uma incógnita para identificar o coeficiente a.

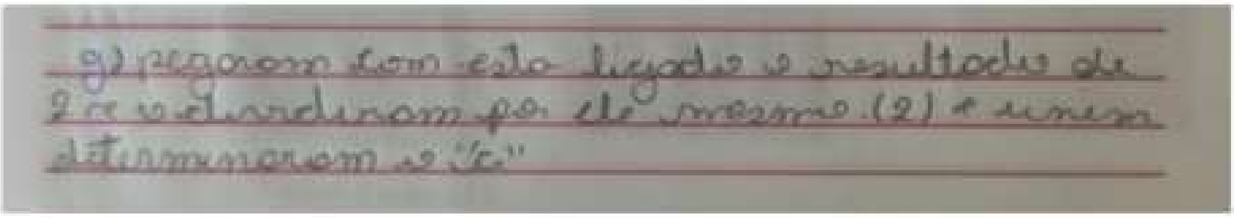
Figura 48 – Relatos das TAPE 14

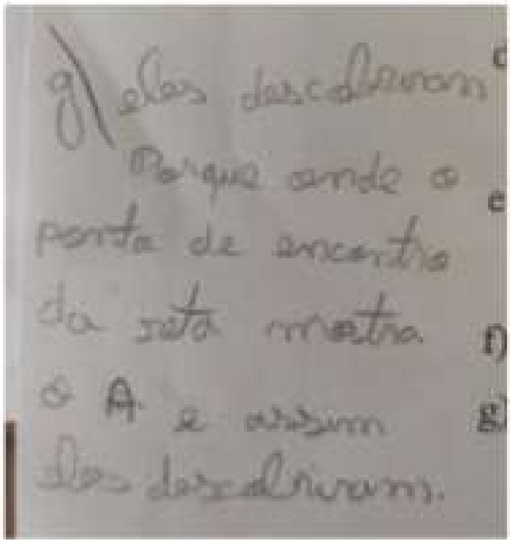


Fonte: Autoria própria (2022).

Ao analisar as produções dos alunos percebi que a maior dificuldade estava na letra "g" do problema proposto, que era determinar justamente o coeficiente angular, tentaram explicar como foi conseguido obter o coeficiente, porém as respostas estavam confusas e com muitos erros.

Figura 49 – Respostas da TAPE 14 – Determinação do coeficiente angular

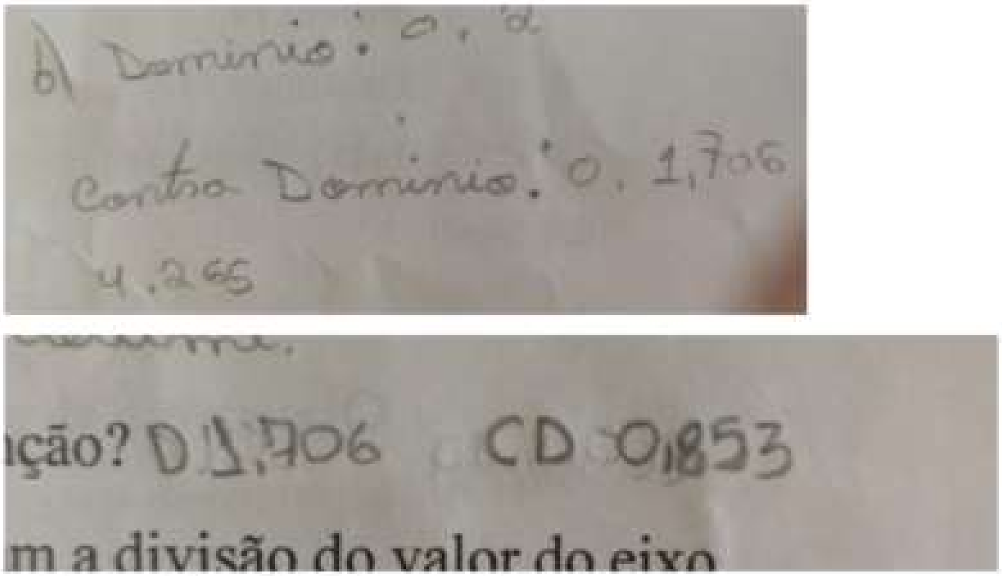




Fonte: Autoria própria (2022).

Outro aspecto que chamou a atenção foi a determinação do domínio e contradomínio, os alunos ficaram presos aos dados informados no gráfico e muitas respostas foram como sendo apenas a alguns pontos relacionados e não a um conjunto.

Figura 50 – Respostas da TAPE 14 – Domínio e Contradomínio



Fonte: Autoria própria (2022).

De posse das produções escritas e após o relato e análise das resoluções das TAPE de todos os alunos, era preciso decidir como filtrar esse material e fazer uma investigação mais aprofundada e pontual no desempenho dos alunos diante do que foi feito.

A ideia foi aproveitar a atividade diagnóstica aplicada nestas turmas e fazer um comparativo com o desempenho dos alunos antes e depois das TAPE. A planilha a seguir (figura 50) mostra um panorama geral do desempenho dos alunos na atividade diagnóstica.

Figura 51 – Desempenho dos alunos na atividade diagnóstica

Atividade Diagnóstica																
Numero de Alunos	Pré - TAPEs								Pós - TAPEs							
	A	B	C	D	E	F	G	H	A	B	C	D	E	F	G	H
1	parcial	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	X	X	X	X	X	X	X	X
2	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	X	X	X	X	X	X	X	X
3	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto
4	Correto	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Correto	Parcial	Correto	Branco	Branco
5	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Parcial	Correto	Correto
6	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco
7	Correto	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto
8	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Parcial	Correto	Errado	Errado	Errado	Correto	Correto	Parcial
9	parcial	Correto	Errado	Branco	Branco	Errado	Branco	parcial	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto
10	Errado	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Parcial	Correto	Correto	Parcial	Errado	Correto	Correto	Parcial
11	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Parcial	Errado	Correto	Correto	Parcial
12	parcial	Errado	parcial	Correto	Branco	Branco	Branco	Errado	Correto	Errado	Parcial	Correto	Errado	Parcial	Correto	Parcial
13	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Parcial	Parcial	Parcial	Correto	Correto	Correto
14	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto
15	Branco	Errado	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Parcial	Errado	Correto	Correto	Parcial
16	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Parcial	Errado	Correto	Correto	Parcial
17	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Parcial	Parcial	Errado	Errado	Branco	Errado
18	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto
19	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto
20	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Correto	Parcial	Correto	Correto	Correto
21	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Parcial	Correto	Errado	Branco	Branco	Branco
22	Errado	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Parcial	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto
23	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Parcial	Correto	Correto	Correto	Parcial	Branco	Correto	Branco
24	Branco	Errado	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Correto	Errado	Correto	Correto	Correto
25	Correto	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Parcial	Correto	Correto	Correto	Correto	Parcial
26	Errado	Errado	Branco	Branco	Branco	Errado	Branco	Errado	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Parcial
27	Errado	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Parcial	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto
28	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	X	X	X	X	X	X	X	X
29	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Errado	Parcial	Correto	Correto	Parcial	Correto	Correto	Correto
30	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Errado	Errado	Parcial	Correto	Branco	Branco	Branco	Branco
31	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Parcial	Parcial	Correto	Branco	Correto	Correto	Correto
32	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Parcial	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto	Correto
33	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Errado	Errado	Errado	Parcial	Errado	Correto
34	Correto	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Errado	Errado	Errado	Correto	Errado	Correto
35	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Errado	Errado	Parcial	Correto	Errado
36	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Parcial	Parcial	Errado	Branco	Branco	Errado
37	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Parcial	Errado	Errado	Branco	Branco	Branco
38	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Errado	Errado	Errado	Branco	Errado	Errado
39	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Branco	Branco	Parcial	Parcial	Errado	Parcial
40	Correto	Branco	parcial	parcial	Branco	Branco	Errado	Branco	Correto	Correto	Parcial	Parcial	Errado	Parcial	Parcial	Correto
41	Correto	Correto	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	X	X	X	X	X	X	X	X
42	Correto	Correto	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Branco	Branco	Branco	Parcial	Correto	Parcial
43	parcial	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Correto	Errado	Parcial	Parcial	Correto	Errado
44	X	X	X	X	X	X	X	X	Correto	Correto	Correto	Errado	Errado	Parcial	Correto	Errado
45	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco
46	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	X	X	X	X	X	X	X	X
47	Correto	Correto	Branco	Branco	Branco	Errado	Branco	Errado	Correto	Correto	Correto	Branco	Branco	Parcial	Errado	Parcial
48	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Parcial	Correto	Errado	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco
49	Correto	Correto	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Parcial	Parcial	Parcial	Branco	Errado	Errado
50	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Branco	Correto	Parcial	Branco	Errado	Branco
51	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Parcial	Errado	Parcial	Branco	Errado	Branco
52	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Branco	Correto	Correto	Errado	Errado	Errado	Errado	Errado	Errado

Legenda	
	Errado
	Parcial
	Certo
	Em branco/ Não soube
	Não realizou a atividade

Fonte: Autoria própria (2022).

Ao analisar a tabela fica evidente que o desempenho na atividade diagnóstica é insuficiente, os alunos apresentaram mínima ou nenhuma noção de função e mais especificamente função afim. Basta visualizar pela cor azul claro que a maioria dos alunos, cerca de 61%, deixaram em branco ou escreveram “não sei” para as questões da atividade diagnóstica. Importante ressaltar que estes alunos, em tese, tiveram contato com função afim, porém, no modelo de aulas remotas, que conforme relatos, muitas vezes não tinham acesso às aulas nos aplicativos, que não conseguiam acompanhar as explicações e tirar dúvidas, o que reflete no desempenho insatisfatório. Após as aulas e as resoluções das TAPE, observando a cor verde, houve uma melhora significativa de acerto das questões.

Em uma decisão em conjunto com o orientador, escolhemos analisar mais detalhadamente as produções de alunos que tentaram resolver a tarefa proposta na atividade diagnóstica, que apresentaram alguma resposta, mas que não tiveram um bom desempenho. Entendemos que dessa forma esses alunos realmente não sabiam sobre o conteúdo abordado. Foram selecionados dois alunos, intitulados de aluno A e aluno B.

A partir deste momento, será apresentada a análise de desempenho destes dois alunos nas produções de todas as 14 TAPE propostas, e em seguida, comparar com a mesma atividade diagnóstica que foi reaplicada a esses alunos.

5.13 ANÁLISE DA ATIVIDADE DIAGNÓSTICA

A atividade diagnóstica aplicada para os alunos é uma questão básica de função afim que relaciona o salário de um vendedor com um percentual sobre suas vendas, abaixo vamos analisar a performance dos alunos nesta tarefa.

Esta atividade foi aplicada para verificar o conhecimento dos alunos em alguns conceitos de função, sendo que os resultados aqui expostos foram antes das aulas utilizando a APE como dinâmica de aula e as TAPE como guia condutor destas aulas.

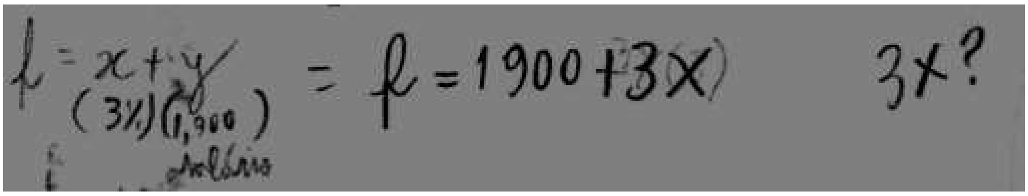
5.13.1 ATIVIDADE DIAGNÓSTICA

O salário de um vendedor é composto por $R\$ \ 1.900,00$ mais uma comissão de 3% do total de vendas do mês.

a) escreva a lei de formação de uma função f que relaciona o salário que o vendedor recebe em um mês em função da quantia “x” vendida nesse mês.

Resposta do aluno A:

Figura 52 – Resposta do aluno A



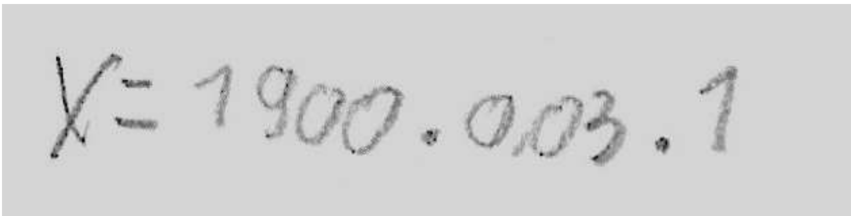
Fonte: Autoria própria (2022).

De acordo com o critério estabelecido para a correção, essa resposta foi classificada como parcialmente correta, isto porque o aluno identificou o percentual de comissão (3%), anotado abaixo do que ele nomeou de "x" e identificou o que seria o valor fixo de $R\$1.900{,}00$, porém, ao fazer a lei de formação não soube expressar corretamente a porcentagem, deixando como sendo "$3x$" ou invés de $\frac{3}{100}.x$ ou $0{,}03.x$.

Pode-se perceber que o aluno tem boa noção da estrutura de uma função afim, apesar do erro na transcrição da porcentagem, a lei de formação obedeceu corretamente a estrutura $f(x) = a.x + b$.

Resposta do aluno B:

Figura 53 – Resposta do aluno B



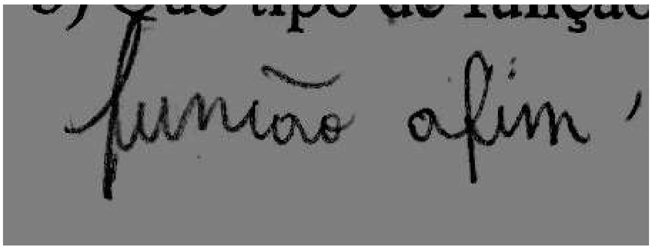
Fonte: Autoria própria (2022).

A resposta do aluno B foi classificada como errada. Pode-se dizer que ele entendeu um valor fixo de $R\$1.900{,}00$ e uma comissão de 3%, porém, não soube traduzir essa escrita para a linguagem matemática, a estrutura da resposta não contém uma variável independente, que estaria relacionada com o total das vendas. Apresenta evidencias de que o aluno não tem noção de função.

b) que tipo de função representa esta situação?

Resposta do aluno A:

Figura 54 - Resposta do aluno A

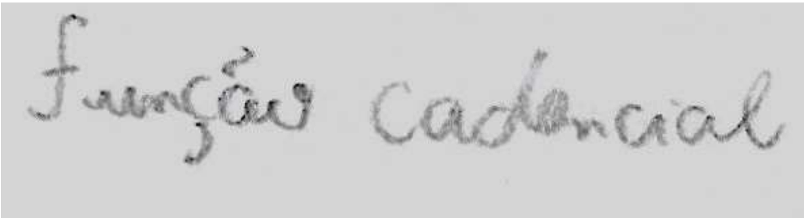


Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta correta, vem ao encontro com a resposta do item “a”, que o aluno tem noção de estrutura de função afim.

Resposta do aluno B:

Figura 55 - Resposta do aluno B



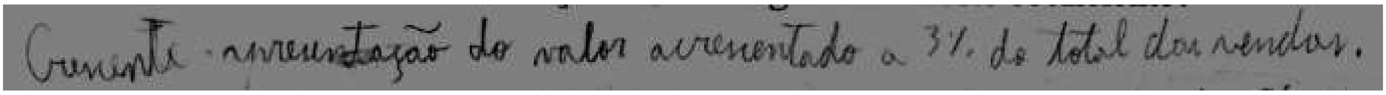
Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta errada, ficando evidente, juntamente com o item “a”, que o aluno não tem conhecimento sobre função e, mais especificamente, sobre função afim.

c) qual o coeficiente linear desta função? Qual o significado deste coeficiente?

Resposta do aluno A:

Figura 56 - Resposta do aluno A



Fonte: Autoria própria (2022).

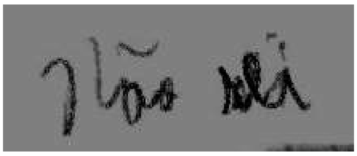
Resposta errada, sem ligação alguma com o conceito de coeficiente linear de função afim.

Aluno B deixou em branco essa pergunta.

d) qual o coeficiente angular desta função? Qual o significado deste coeficiente?

Resposta do aluno A:

Figura 57 - Resposta do aluno A



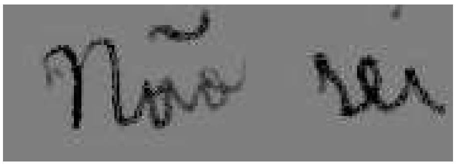
Fonte: Autoria própria (2022).

Aluno B deixou em branco essa pergunta.

e) determine o conjunto Domínio e o conjunto Contradomínio desta função.

Resposta do aluno A:

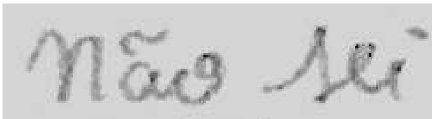
Figura 58 - Resposta do aluno A



Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta do aluno B:

Figura 59 - Resposta do aluno B



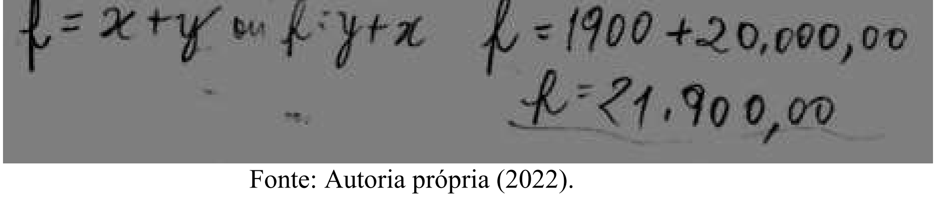
Fonte: Autoria própria (2022).

As respostas dos itens “c”. “d” e “e”, mostram evidencias de que os alunos não sabem conceitos básicos de função.

f) Determine o valor numérico da função para $x = 20.000{,}00$.

Resposta do aluno A:

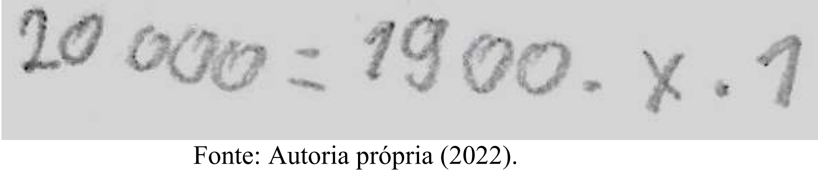
Figura 60 - Resposta do aluno A



Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta do aluno B:

Figura 61 - Resposta do aluno B



Fonte: Autoria própria (2022).

As duas respostas foram consideradas erradas. Ao analisar a resposta dos alunos A e B, percebemos que eles não fazem conexão com a letra “a” da tarefa, que seria a lei de formação. Ambos utilizam uma nova estrutura para fazer o cálculo do valor numérico.

O aluno A desconsidera o que ele chamou de “$3.x$” e faz o cálculo do salário como se 20.000 fosse a comissão que o vendedor estivesse recebendo, o que mostra duas possibilidades, entendimento errado sobre a situação, em que o “x” seria o total de vendas, e a partir disto ele deveria fazer o cálculo de 3%, ou então uma dificuldade em aplicar na lei de formação o valor pedido. O coerente seria o aluno A substituir na lei de formação da letra “a” o valor de $20.000{,}00$, o que não foi feito.

Já o aluno B parece que tentou substituir o valor do “x” $(20.000{,}00)$ em sua lei de formação $(x = 1900.0{,}03.1)$ da letra “a”, porém pode ter percebido que algo estaria errado, pois não teria uma incógnita na equação. De forma que ele tentou uma “manipulação” sem obter o resultado correto.

g) qual a taxa de variação da função f?

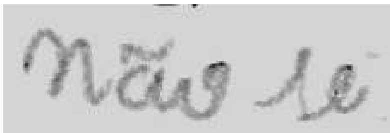
Resposta do aluno A:

Figura 62 - Resposta do aluno A

Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta do aluno B:

Figura 63 - Resposta do aluno B

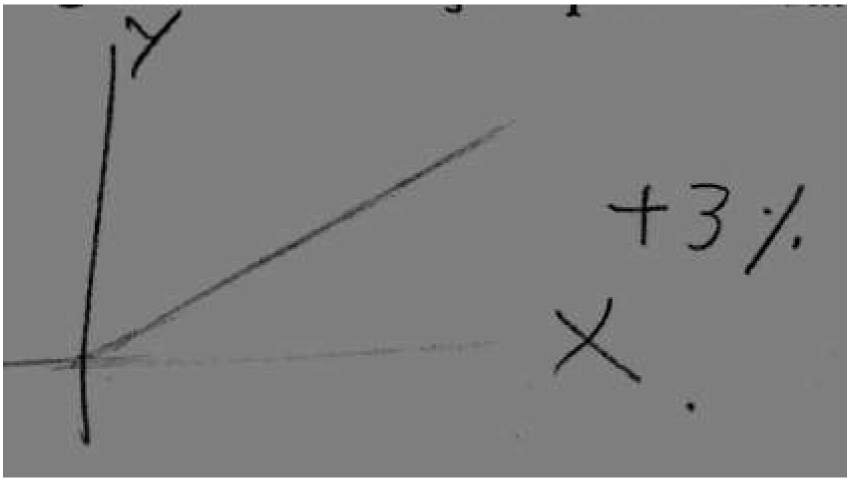


Fonte: Autoria própria (2022).

h) faça um esboço do gráfico da situação apresentada.

Resposta do aluno A:

Figura 64 - Resposta do aluno A

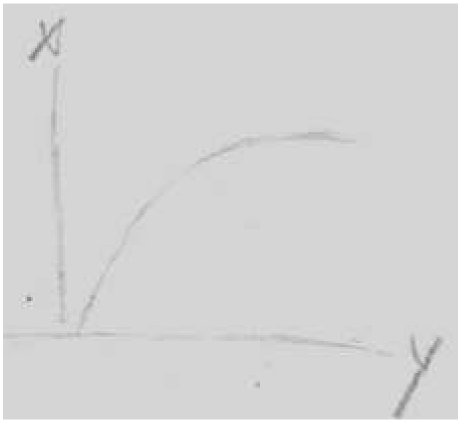


Fonte: Autoria própria (2022).

A resposta do aluno A foi considerada parcialmente correta, pois o gráfico parte da origem, quando deveria ser o ponto $(0{,}1.900)$ o início do gráfico. Mesmo assim o aluno considerou uma reta crescente como representação da situação apresentada.

Resposta do aluno B:

Figura 65 - Resposta do aluno B

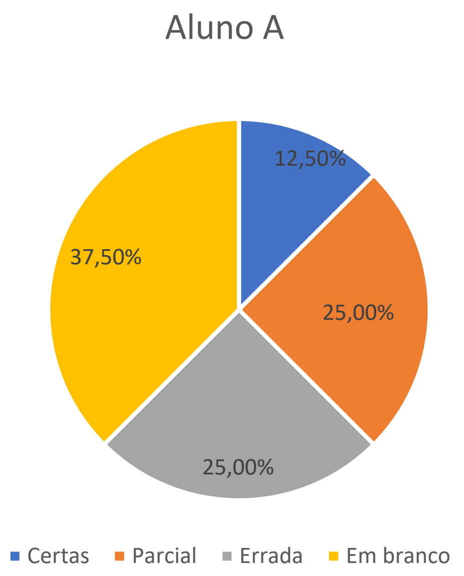


Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta errada, pois o gráfico da situação apresentada é uma reta crescente e não uma curva. Percebe-se também uma inversão nos eixos x e y.

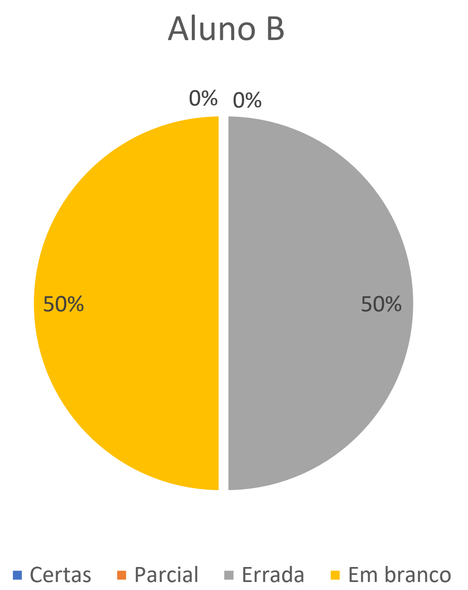
Desta forma, das oito questões referente a situação de função afim, o aluno A tentou fazer cinco questões, destas, acertou uma, parcialmente duas, errou duas e deixou em branco três questões, enquanto que o aluno B tentou fazer quatro questões, e errou as quatro, deixando as outras quatro em branco (gráfico 1 e 2 dos desempenhos dos alunos abaixo).

Gráfico 1 – Desempenho do aluno A na atividade diagnóstica



Fonte: Autoria própria (2022).

Gráfico 2 – Desempenho do aluno B na atividade diagnóstica



Fonte: Autoria própria (2022).

A partir desde momento será feita uma análise do desempenho dos alunos A e B na execução das 14 TAPE que, juntas, tinham o objetivo de retomar o conceito de função como uma relação entre variáveis e ainda definir e caracterizar um tipo específico de função, a função afim.

5.14 ANÁLISE DAS TAPE

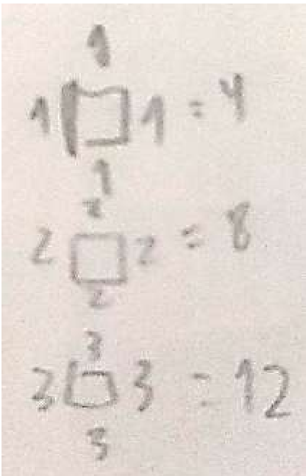
As informações a seguir mostram o desempenho dois alunos escolhidos na aplicação das TAPE.

5.14.1 TAPE 1

O objetivo da TAPE 1é de evidenciar uma relação entre grandezas e que existe uma dependência entre elas.

As anotações da folha de tarefa do aluno A (figura abaixo) mostram o caminho que o aluno tomou para resolver essa questão, ao lado do enunciado tem desenhos de quadrados com medidas de lados e perímetros diferentes, o que facilita o entendimento da situação e a resolução da TAPE.

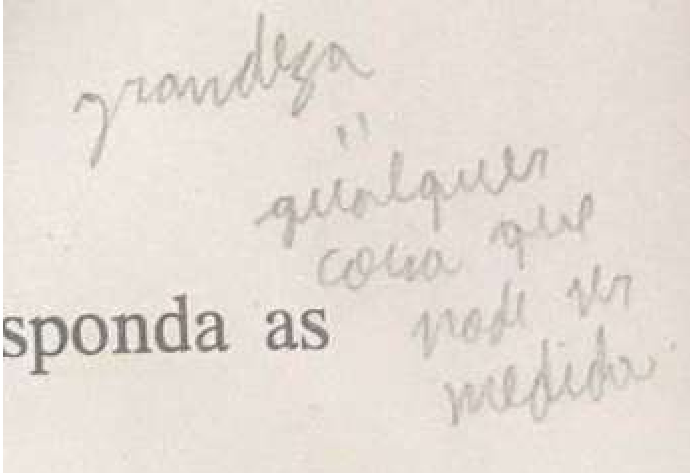
Figura 66 - Anotação TAPE 1 - Aluno A



Fonte: Autoria própria (2022).

Outro fato que chamou atenção na folha de tarefa do aluno A foi a anotação do significado de grandeza. Ao fazer a leitura em grupo da tarefa, um dos alunos havia questionado o que era uma grandeza, dúvida essa que estava prevista na THA. Chegamos à conclusão que grandeza seria tudo que pode ser medido ou que tenha características baseados em informações.

Figura 67 - Anotação TAPE 1 – Aluno A



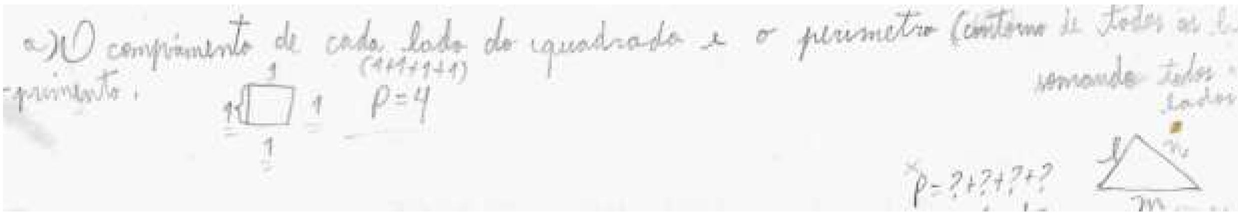
Fonte: Autoria própria (2022).

As respostas apresentadas na TAPE 1 pelos alunos A e B estão muito próximas daquelas esperadas na THA, o que chamou atenção foi que os alunos se preocuparam em explicar/definir alguns conceitos.

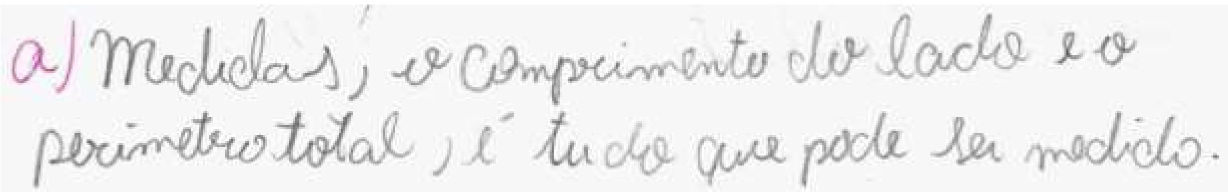
Para o item “a”, na situação apresentada, duas grandezas se relacionam. Quais são elas?

Figura 68 – Respostas dos alunos para o item **a** da TAPE 1

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



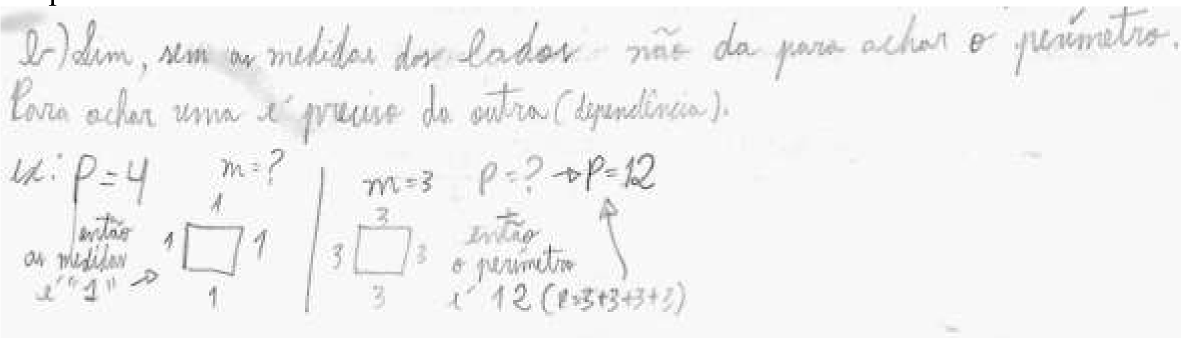
Fonte: Autoria própria (2022).

Fica evidente que os dois alunos compreenderam o que são grandezas e que elas estão relacionadas. As respostas dos dois alunos estão corretas.

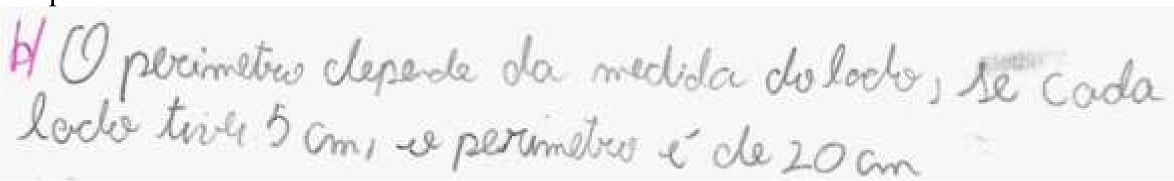
O item “b” é um entendimento maior da relação entre as grandezas envolvida na TAPE A. Para o item “b”, qual é a relação de dependência (ou seja, a conexão) entre elas? Uma delas depende da outra? Explique.

Figura 69 – Respostas dos alunos para item b da TAPE 1

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

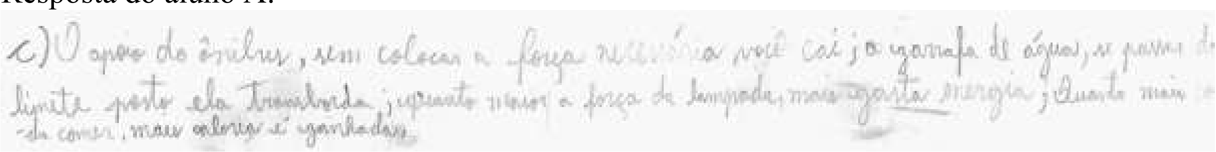
Os alunos A e B responderam corretamente, mostrando que compreenderam que o perímetro de um quadrado depende da medida do seu lado, inclusive, na resposta do aluno A, ele mostra duas situações de medidas de lados e perímetros diferentes.

A letra "c" solicitava um exemplo qualquer de relação de dependência. No dia da aplicação, vários alunos ficaram presos à situação de lado e perímetro, os alunos A e B responderam de forma diferente.

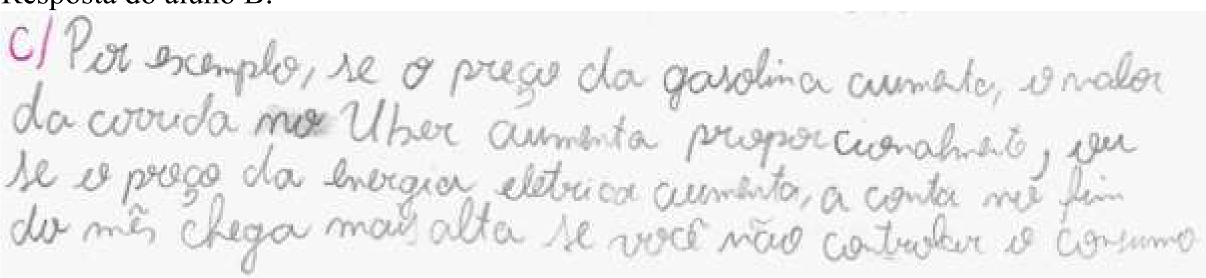
Item "c", descreva uma situação qualquer do seu dia a dia que exista uma relação de dependência entre duas grandezas.

Figura 70 – Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 1

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

O aluno A destaca duas situações diferentes, apoio do ônibus e garrafa de água, que faltou informações para mostrar como ele pensou na dependência, porém ele usa o consumo de energia elétrica de uma lâmpada com sua potência e o consumo de comida com a ingestão de calorias, que ficam evidentes relações de dependência. O aluno B faz a relação do valor do combustível com uma corrida de Uber e do consumo de energia elétrica com o aumento do valor da fatura.

5.14.2 TAPE 2

O objetivo da TAPE 2 a 5 é o de definir função utilizando a notação de conjuntos. São apresentados situações diversas em que os alunos deveriam identificar as diferenças entre elas e saber em quais situações pode-se afirmar que é uma função.

Para a TAPE 2, os alunos deveriam responder três questões:

Ao analisar a primeira resposta do aluno Carlos e em seguida as outras respostas, como podemos denominar o conjunto A? E o conjunto B?

Figura 71 – Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 2

Resposta do aluno A:

a) Conjunto $A = x$ e Conjunto $B = y$

Resposta do aluno B:

Domínio/contra domi

; para o fato da relação não

Fonte: Autoria própria (2022).

O aluno A fez menção ao conjunto A como sendo x e o B de y, pois no enunciado da TAPE diz que os elementos de A são denominados de x, os elementos de B são denominados de y, apesar de não estar totalmente errado a resposta do aluno, a perguntа é bem clara ao analisar a resposta do aluno Carlos, sendo assim, a expectativa de resposta para esta questão seria conjunto domínio e contradomínio, que é exatamente o que o Carlos respondeu na TAPE sendo a mesma resposta do aluno B.

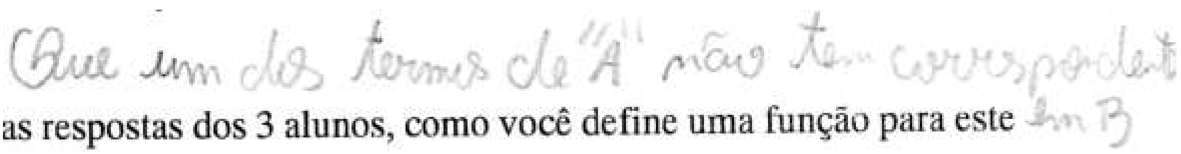
Para a letra "b", o que há em comum nas justificativas dadas pelos alunos para o fato da relação não ser função?

Figura 72 – Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 2

Resposta do aluno A:


b) um dos elementos do Conjunto A não estar ligado a nenhum do conjunto B. O "?" não tem nenhum correspondente.

Resposta do aluno B:


Que um dos termos de "A" não tem correspondente em B

as respostas dos 3 alunos, como você define uma função para este

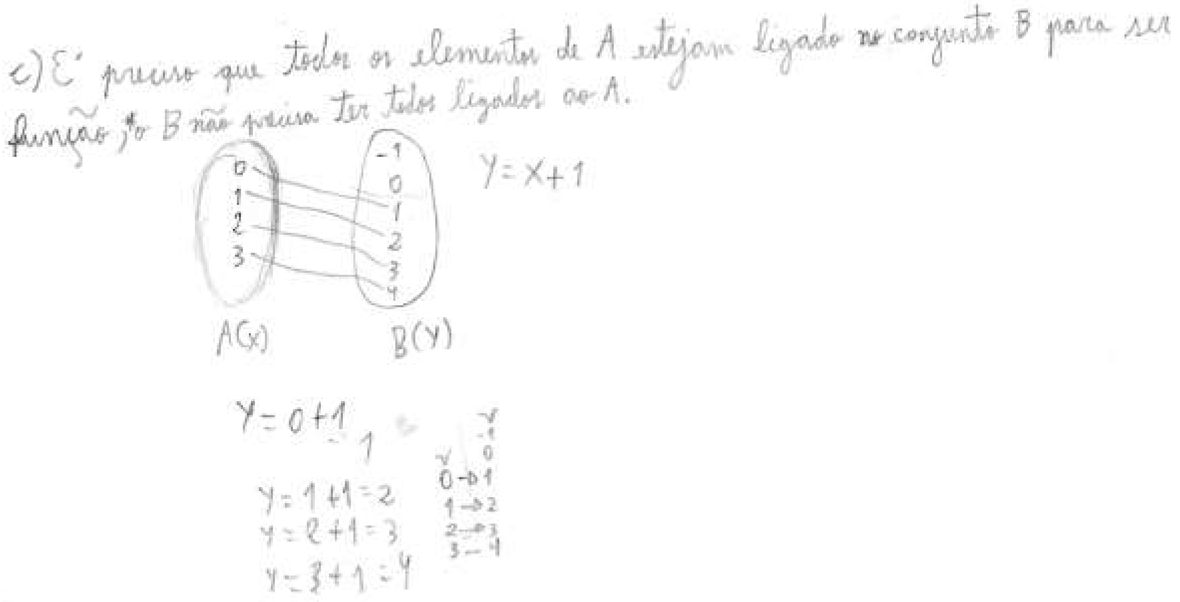
Fonte: Autoria própria (2022).

Essa questão é de suma importância para o entendimento do conceito de função, e ficou evidente que os alunos perceberam que uma relação para ser função, todos os elementos do primeiro conjunto, dito domínio, devem ter ligação com o conjunto contradomínio, e a respostas dos dois alunos vem de encontro com esse conceito.

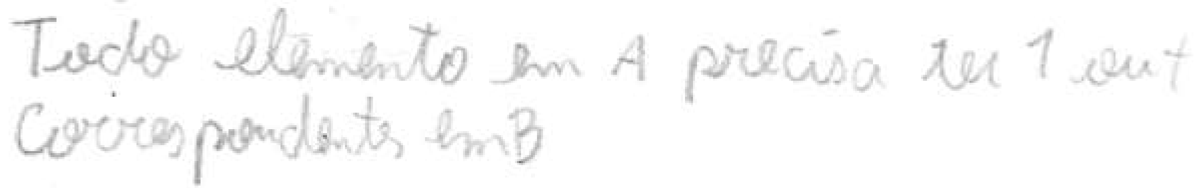
A letra "c" tem por objetivo começar a conceituar função. De acordo com as respostas dos 3 alunos, como você define uma função para este caso apresentado?

Figura 73 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 2

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

Muito interessante observar que o aluno A já percebeu que no conjunto contradomínio não é necessário ter todos os elementos com correspondência, não fica evidente se o aluno já possuía esse conhecimento ou se ele identificou na tarefa, pois este não era o objetivo neste momento. Os dois alunos entenderam e definiram corretamente a função de acordo com a situação apresentada.

5.14.3 TAPE 3

Com o objetivo de caracterizar função atrás da notação de conjuntos, a TAPE 3 apresenta outra situação em que os alunos deveriam perceber o motivo de não ser uma função e ainda fazer uma ligação com a situação apresentada na TAPE 2.

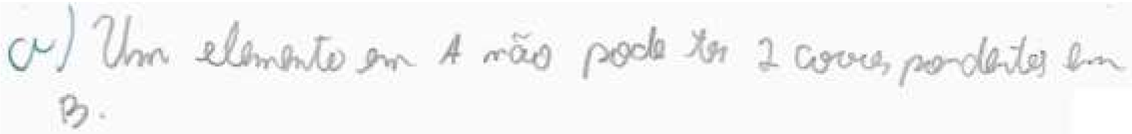
Para o item “a”, o que há em comum nas justificativas dadas pelos alunos para o fato da relação não ser função?

Figura 74 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 3

Resposta do aluno A:


a) Que um dos elementos de A está ligado a dois elementos de B

Resposta do aluno B:


a) Um elemento em A não pode ter 2 correspondentes em B.

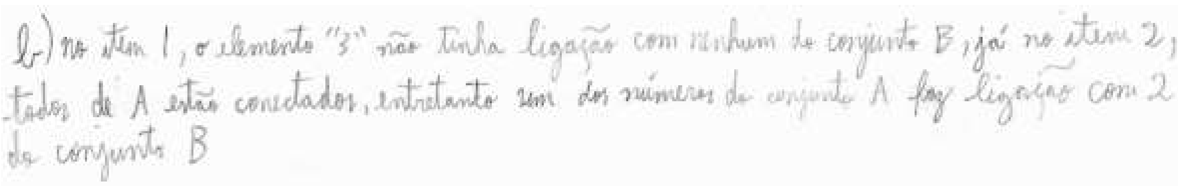
Fonte: Autoria própria (2022).

Os alunos A e B entenderam corretamente que a situação apresentada não é uma função pois existe um elemento no conjunto domínio que tem relação com dois elementos no conjunto contradomínio.

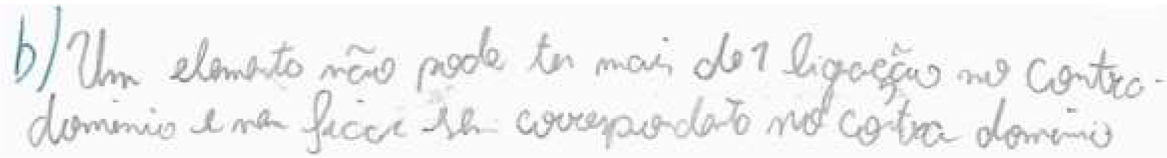
Para o item “b”, compare esta situação com o caso anterior (item I), em que a justificativa dada neste caso difere da anterior?

Figura 75 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 3

Resposta do aluno A:


b) no item 1, o elemento "3" não tinha ligação com nenhum do conjunto B, já no item 2, todos de A estão conectados, entretanto um dos números do conjunto A faz ligação com 2 do conjunto B

Resposta do aluno B:


b) Um elemento não pode ter mais de 1 ligação no contra-domínio e não ficar sem correspondente no contra domínio

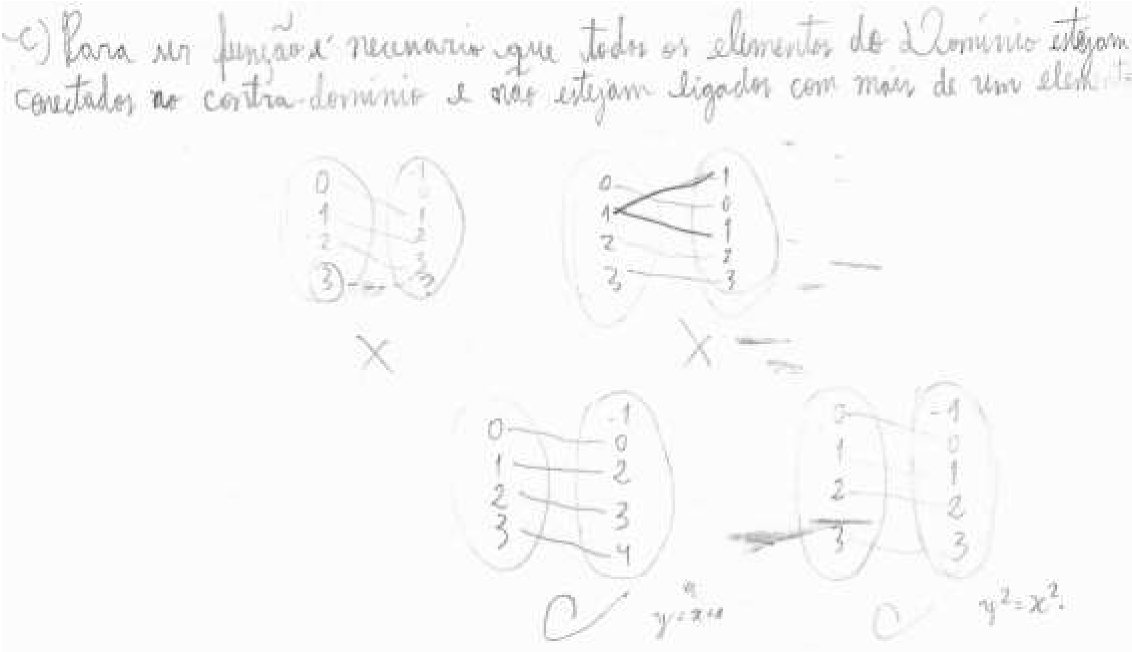
Fonte: Autoria própria (2022).

Cada um à sua maneira compreendeu o intuito da questão, comparar a situação apresentada na TAPE 3 com a situação da TAPE 2. Ficou evidente que para uma relação ser função os elementos do domínio devem ter apenas uma ligação com os elementos do contradomínio, dessa forma, os alunos A e B responderam corretamente o tem “b” proposto.

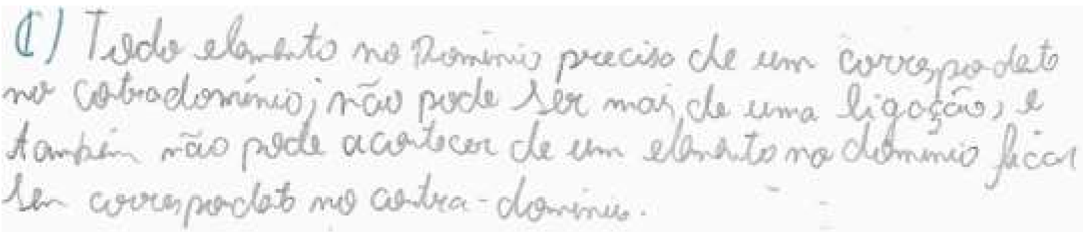
O item “c” é uma confirmação do entendimento das situações apresentadas. Para que uma relação entre dois conjuntos seja uma função, esta relação tem que apresentar duas características. Defina função utilizando essas características?

Figura 76 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 3

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

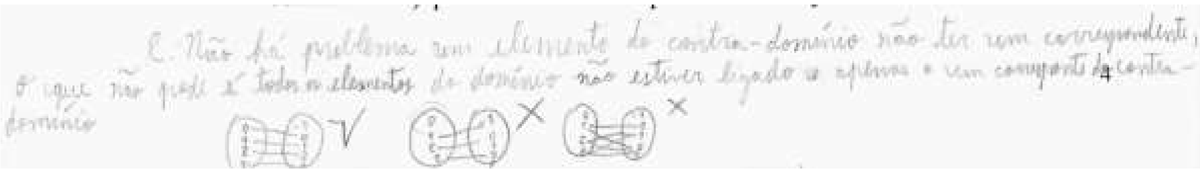
Os alunos A e B responderam corretamente o item “c”, confirmando que compreenderam bem as situações apresentadas, interessante notar a qualidade da escrita dos mesmos, utilizando termos mais técnicos, como domínio, contradomínio, correspondência e ainda o aluno A que representou as situações através dos conjuntos.

5.14.4 TAPE 4

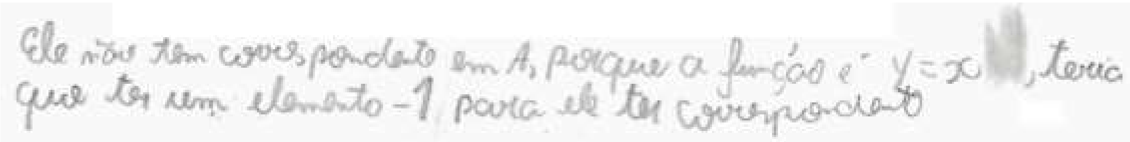
Com objetivo de reforçar as regras para que uma situação seja função, o item “a” pede para: utilizando a definição de função que você elaborou na tarefa anterior e analisando as respostas dos três alunos acima, o que se pode concluir sobre o elemento -1 (do contradomínio) que não tem um correspondente no conjunto domínio?

Figura 77 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 4

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

A situação apresentada é de um elemento (-1) no contradomínio não ter correspondente no domínio. A resposta do aluno A é correta, não há problemas de o elemento do contradomínio não possuir correspondência, já que as regras anteriores exigem que todos os elementos do domínio se conectem a um elemento do contradomínio, o que acontece. O aluno B justifica o fato do porque o elemento -1 não ter seu correspondente, porém o aluno não se atem à definição da função e não responde corretamente à questão.

5.14.5 TAPE 5

A TAPE 5 consolida o conceito de função através da relação de conjuntos apresentando uma situação que elementos distintos do domínio tem ligação com um elemento comum no contradomínio. Para o item “a”, com quais elementos do domínio o elemento 0 (zero) do contradomínio está relacionado?

Figura 78 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 5

Resposta do aluno A:

Resposta do aluno B:

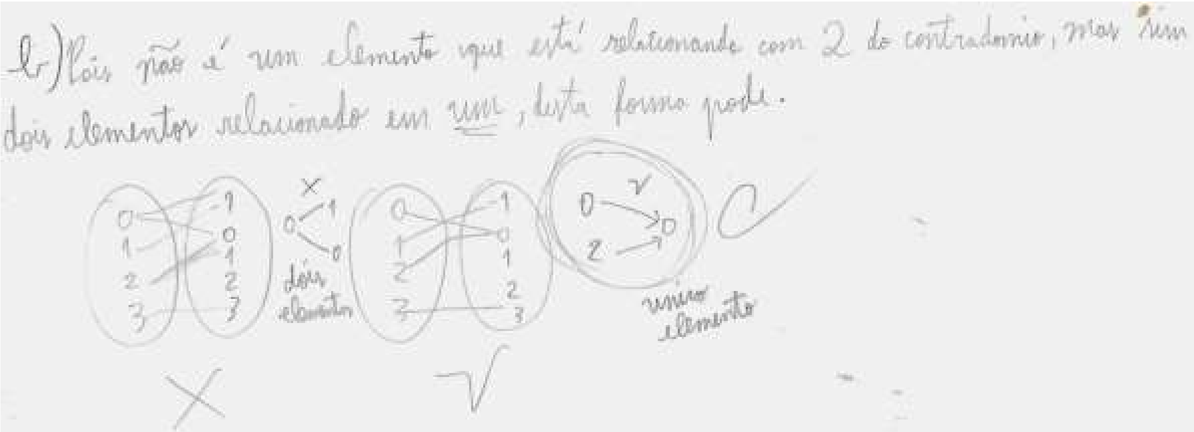
Fonte: Autoria própria (2022).

O intuído da pergunta é deixar evidente que existe dois elementos no domínio que tem um correspondente comum, e os alunos A e B identificaram corretamente.

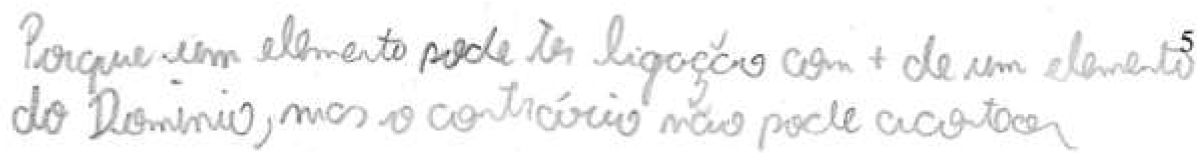
Para o item “b”, os alunos deveriam responder baseado nos conceitos construídos nas tarefas anteriores, utilizando a definição de função que você elaborou na tarefa anterior e analisando as respostas dos três alunos acima, por que o fato do elemento 0 (zero) do conjunto B (contradomínio) estar relacionado com mais de um elemento do domínio não impede com que a relação seja função?

Figura 79 – Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 5

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

Ao analisar a resposta dos alunos A e B, podemos dizer que os alunos responderam de forma correta, mas faltou alguns termos para deixar mais completa a resposta. O aluno A, ao dizer que, “mas sim dois elementos relacionado em um, desta forma pode” faltou especificar de qual conjunto ele se refere, porém, a parte inicial da sua resposta, “um elemento que está relacionado com 2 do contradomínio” dá a entender que se trata de elementos distintos do domínio estarem relacionados com o mesmo no contradomínio é permitido. Ainda é possível verificar seu entendimento nos diagramas que o aluno A fez. A resposta do aluno B também falta especificar na primeira parte de qual conjunto “um elemento pode ter ligação com mais de um elemento do domínio”, porém, ao citar o domínio no fim da justificativa, entende-se que se trata do conjunto contradomínio.

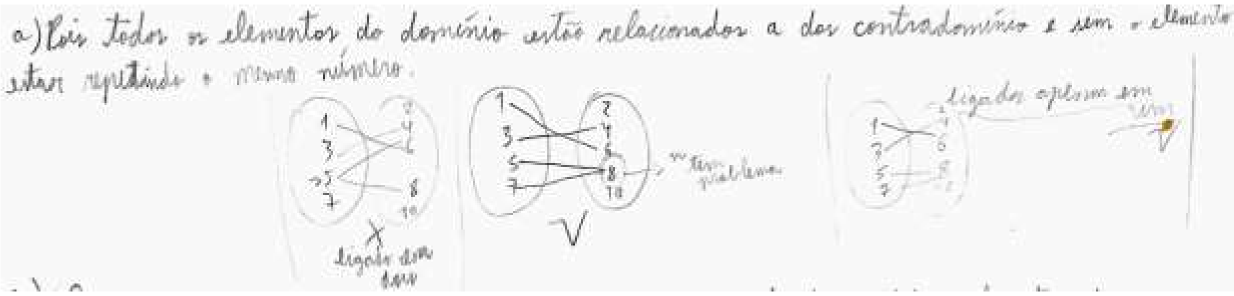
5.14.6 TAPE 6

Consolidando os conceitos de função através da notação de conjuntos e ainda inserindo o conjunto imagem nestas definições, os alunos deveria responder quatro itens nesta TAPE.

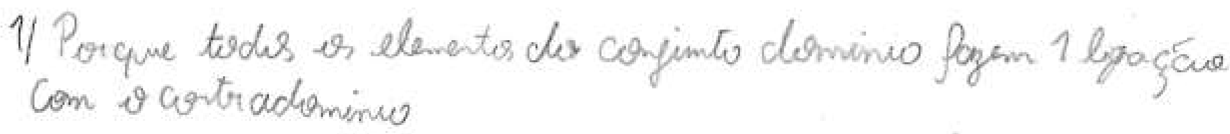
No item “a”, por que a situação apresentada é uma função?

Figura 80 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 6

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



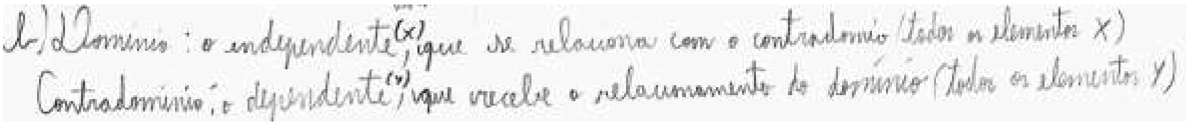
Fonte: Autoria própria (2022).

A resposta dos alunos A e B estão corretas, pois ambos perceberam que todos os elementos do conjunto domínio têm apenas uma ligação com os elementos do conjunto contradomínio, interessante que o aluno A sempre representa através de diagramas situações para identificar se a relação é ou não uma função.

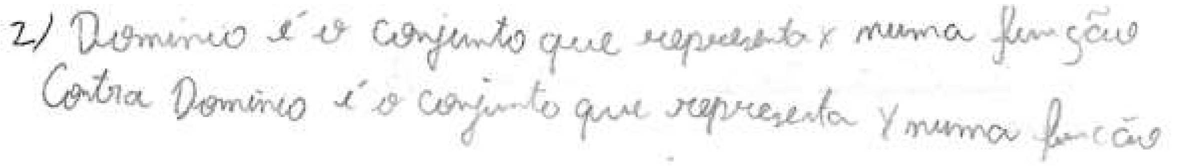
Item “b”, como você define o conjunto domínio e o conjunto contradomínio de uma função?

Figura 81 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 6

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



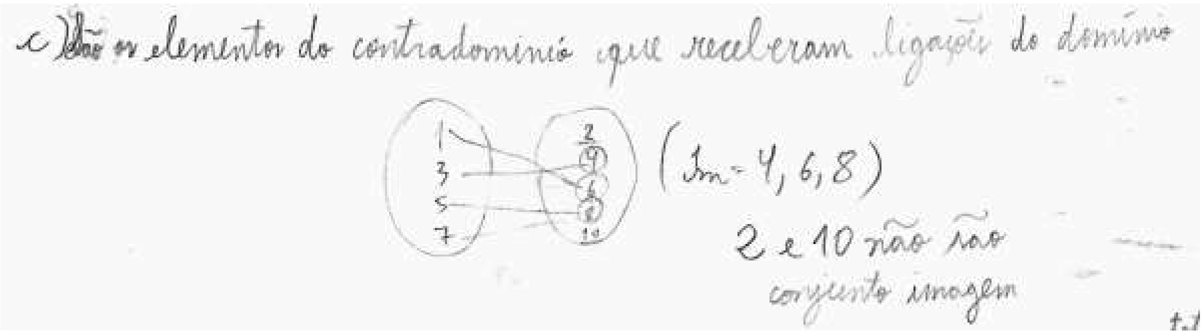
Fonte: Autoria própria (2022).

Cada aluno, à sua maneira, respondeu corretamente. Ficou evidente que os alunos entenderam que o conjunto domínio é aquele que os elementos são representados pela variável “x” na função, enquanto que o conjunto contradomínio tem seus elementos representados por “y”. Importante destacar a ligação que o aluno A fez com a variável dependente e independente com os conjuntos domínio e contradomínio.

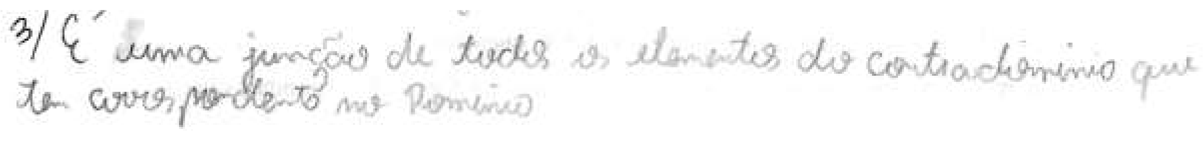
O item “c” objetivava introduzir o conceito de conjunto imagem, como você define o conjunto imagem de uma função?

Figura 82 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 6

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



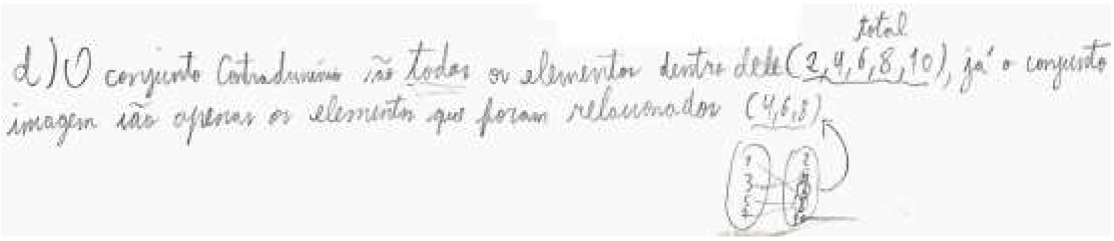
Fonte: Autoria própria (2022).

Os dois alunos responderam corretamente. O aluno A surpreende com respostas completas e utilizando termos técnicos, e ainda fazendo novamente os diagramas para evidenciar sua resposta. O aluno B explica à sua maneira, o termo “junção” não parece o ideal, mas é compreensível sua ideia de que o conjunto imagem são todos os elementos que recebem uma correspondência dos elementos do domínio.

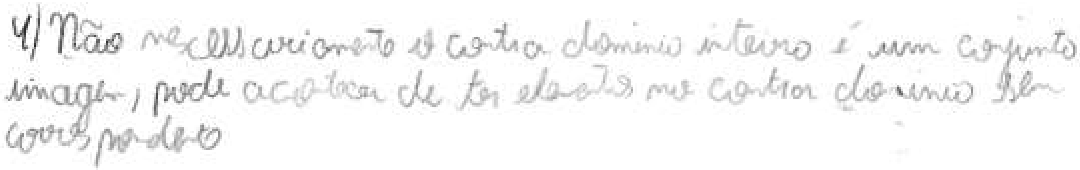
O intuito da letra “d” é o de consolidar o conceito de conjunto imagem e destacar que é um subconjunto do contradomínio, ou seja, um conjunto que está contido no contradomínio. Qual a diferença entre o conjunto contradomínio e o conjunto imagem?

Figura 83 - Resposta dos alunos para o item **d** da TAPE 6

Resposta do aluno A:


total
d) O conjunto Contradomínio são todos os elementos dentro dele (2,4,6,8,10), já o conjunto imagem são apenas os elementos que foram relacionados (4,6,8)

Resposta do aluno B:


d) Não necessariamente o contra domínio inteiro é um conjunto imagem, pode acontecer de ter elementos no contra domínio sem correspondente

Fonte: Autoria própria (2022).

Diante da situação apresentada, os alunos respondem corretamente. O aluno A consegue explicar de forma bem objetiva e clara a diferença entre os conjuntos, citando inclusive exemplo. O aluno B usa um termo interessante, “não necessariamente”, ou seja, o aluno percebeu que o conjunto contradomínio pode ser “maior” que o conjunto imagem.

5.14.7 TAPE 7

A TAPE 7 usa leis de formação de função afim para definir os coeficientes a e b e formalizar o conceito de função afim.

O item “a”, o que você entendeu como “coeficiente a” das leis de formação apresentadas?

Figura 84 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 7

Resposta do aluno A:

a) É o número que está ao lado do x (elemento que multiplica o X) ex: $2x$, $a=2$

Resposta do aluno B:

1) É o x da função, o elemento correspondente do Domínio

Fonte: Autoria própria (2022).

O aluno B expressa de forma incorreta sua resposta, o coeficiente a é o número que multiplica a variável x, da maneira que respondeu, entende-se que o coeficiente a é o próprio x. Esse foi um erro bem comum, que no ponto de vista de professor, os alunos não estão acostumados a escrever matemática e acabam cometendo esse tipo de deslize. O aluno A responde corretamente, inclusive dando um exemplo.

Para o item “b”, o que você entendeu como “coeficiente b” das leis de formação apresentadas?

Figura 85 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 7

Resposta do aluno A:

b) É o número que não está acompanhado do X (ex: $2x+1$) $b=1$ outro ex: $3x-4$ $a=3$ $b=-4$

Resposta do aluno B:

2) É o y da função, o elemento correspondente do Contra-domínio

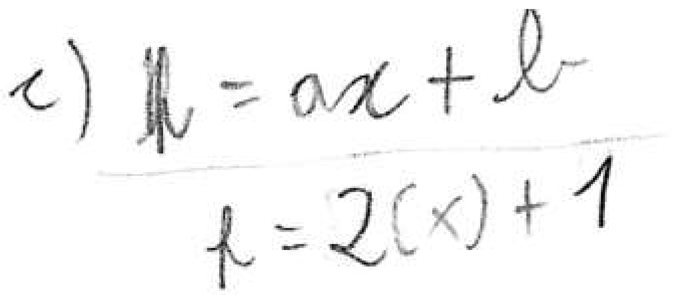
Fonte: Autoria própria (2022).

O coeficiente b, é o valor na lei de formação que não está com a variável, também chamado de termo independente. O aluno A responde corretamente, novamente dando um exemplo, e mostrando que compreendeu o conceito. Já o aluno B tenta fazer a ligação do coeficiente como sendo um elemento do contradomínio, o que não está errado, pois é justamente o correspondente do elemento zero do domínio, porém, não é este o objetivo da pergunta, desta forma, considerado a resposta como incorreta.

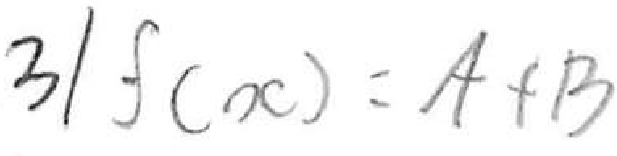
E o item “c”, utilizando a mesma estrutura das leis de formação apresentadas, escreva uma lei de formação genérica, utilizando o a e o b como coeficientes.

Figura 86 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 7

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

Com o objetivo de consolidar que uma lei de formação da função afim é formada por dois coeficientes, chamados de a, que acompanha a variável x, e b, que é independente, o aluno A responde corretamente, já o aluno B comete um erro, esquecendo a variável x acompanhando o coeficiente a, resposta considerada como parcialmente correta. Vale destacar que ajustes, como o da letra maiúscula para os coeficientes, foram tratados de forma isolada no momento da formalização em sala de aula.

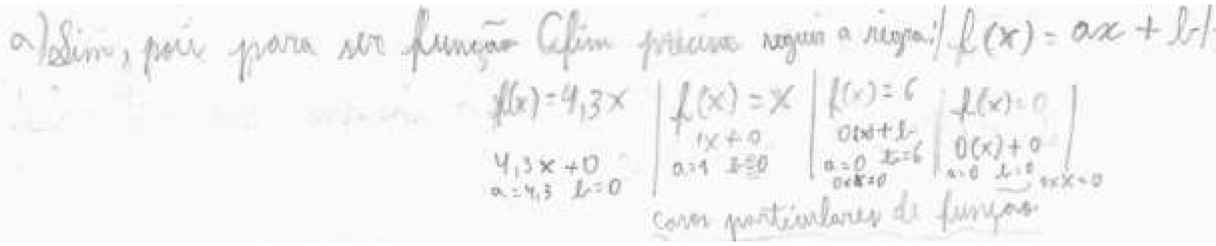
5.14.8 TAPE 8

A TAPE 8 destacava tipos diferentes de leis de formação que são casos particulares de função afim.

Item “a”, são funções afim? Por quê?

Figura 87 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 8

Resposta do aluno A:


a) Sim, pois para ser função Afim precisa seguir a regra: $f(x) = ax + b$
$f(x) = 4,3x$ | $4,3x + 0$ | $a = 4,3$ $b = 0$
$f(x) = x$ | $1x + 0$ | $a = 1$ $b = 0$
$f(x) = 6$ | $0(x) + b$ | $a = 0$ $b = 6$
$f(x) = 0$ | $0(x) + 0$ | $a = 0$ $b = 0$
Casos particulares de funções

Resposta do aluno B:


a) Não, elas não seguem a lei de formação $f(x) = ax + b$

Fonte: Autoria própria (2022).

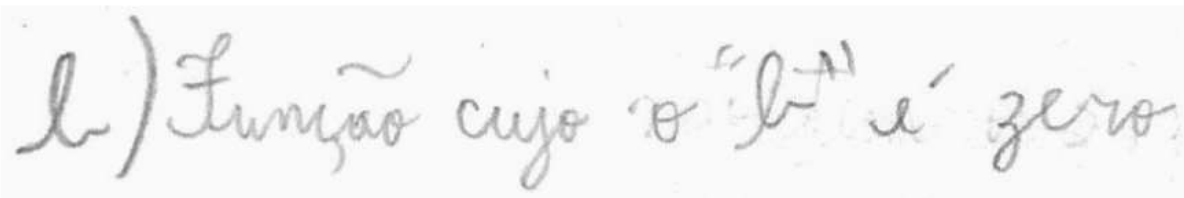
O aluno A percebeu que os casos particulares de função afim, onde o coeficiente a e/ou b assumem valor zero. Apesar desses valores não aparecerem na lei de formação, está implícito nelas, desta forma, a resposta do aluno A está correta, são casos de função afim.

O aluno B não conseguiu identificar as estruturas das leis de formação apresentadas como sendo função afim, analisando sua resposta, para o aluno B, nas leis apresentadas falta o termo "ax" ou "b", não considerarndo como uma função afim.

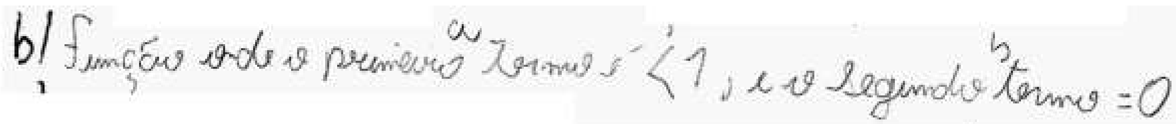
Os itens “b”, “c”, “d” e “e”, destacam os casos particulares de função afim. Para o item “b”, o que você entendeu como uma função linear?

Figura 88 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 8

Resposta do aluno A:


b) Função cujo o "b" é zero

Resposta do aluno B:


b) funções onde o primeiro termo a é < 1, e o segundo termo b $= 0$

Fonte: Autoria própria (2022).

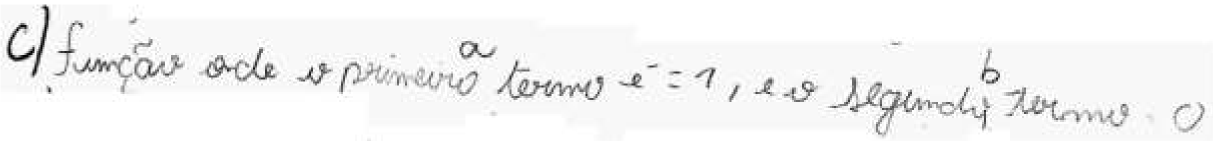
Diante do exemplo dado, não fica evidente como se comporta o coeficiente a em uma função linear, por isso o aluno B destacou ser menor do que um, porém, a parte importante é que os dois alunos compreenderam que uma função linear é um caso particular de função afim na qual o coeficiente b é zero, respondendo corretamente.

Item “c”, o que você entendeu como uma função identidade?

Figura 89 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 8

Resposta do aluno A:

Resposta do aluno B:



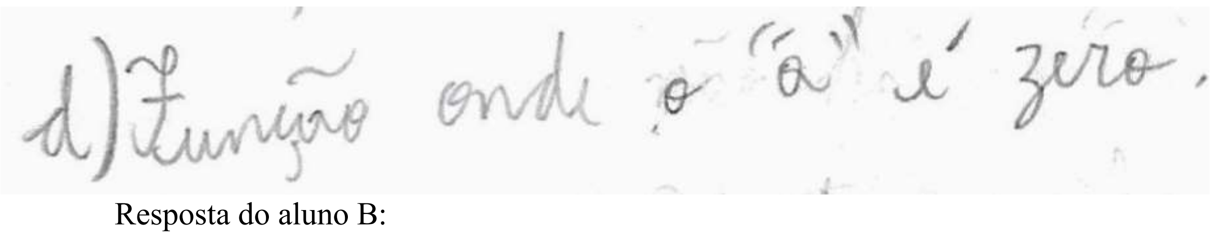
Fonte: Autoria própria (2022).

Os dois alunos, à sua maneira, compreenderam que uma função identidade é aquela onde os valores do domínio são os mesmos da imagem, e para isso acontecer é necessário o coeficiente a ser um e o coeficiente b ser zero. Percebe-se na resposta do aluno A que faltam termos mais técnicos para melhorar a qualidade de sua resposta, mas fica evidente sua compreensão de função identidade.

Item “d”, o que você entendeu como uma função constante?

Figura 90 - Resposta dos alunos para o item **d** da TAPE 8

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:

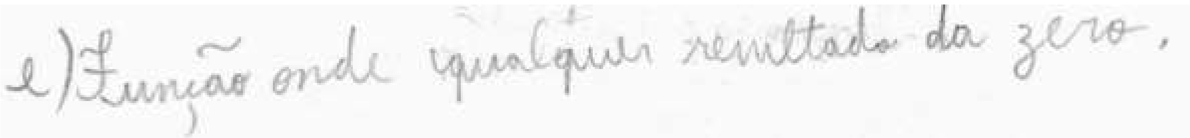
Fonte: Autoria própria (2022).

Os dois alunos respondem corretamente. Uma função é dita constante quando somente é composta pelo coeficiente b. No momento da formalização, foi destacado que não é necessário este coeficiente ser menor do que um, conforme a resposta do aluno B, isto acontece pois na situação apresentada não havia outra lei de formação para o aluno fazer a comparação, por isso o aluno B julgou ser necessário ser desta forma.

No item “e”, o que você entendeu como uma função constante nula?

Figura 91 - Resposta dos alunos para o item **e** da TAPE 8

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:

Fonte: Autoria própria (2022).

Os dois alunos respondem corretamente e entendem que uma função nula é aquela que os coeficientes a e b assumem valor zero.

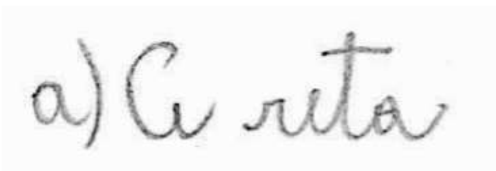
5.14.9 TAPE 9

Com o objetivo de trabalhar a representação gráfica das funções afim, identificar o papel dos coeficientes angular e linear em um gráfico de uma função afim e classificar uma função afim em crescente e decrescente, os alunos deveria responder quatro perguntas para esta tarefa.

Item “a”, qual objeto geométrico representa a função afim no plano cartesiano?

Figura 92 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 9

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:

Fonte: Autoria própria (2022).

Os alunos A e B resolveram corretamente o item “a”, identificando que o objeto que representa uma função afim no plano cartesiano é uma reta.

O item “b”, o que é e para que serve o coeficiente angular de uma função afim?

Figura 93 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 9

Resposta do aluno A:

Resposta do aluno B:

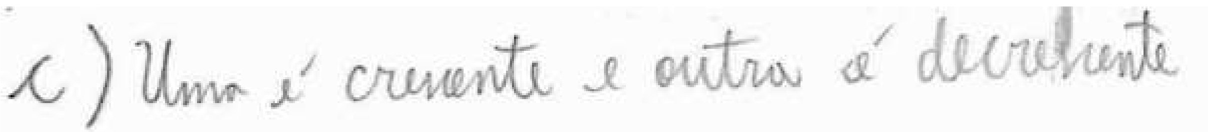
Fonte: Autoria própria (2022).

Os dois alunos responderam corretamente. A resposta para essa pergunta estava no enunciado da TAPE, o objetivo é fazer com que os alunos deem atenção à inclinação da reta e façam a ligação com o coeficiente angular (coeficiente a).

O item “c”, qual a diferença entre as leis de formação das funções da letra “a” e “b”?

Figura 94 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 9

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:

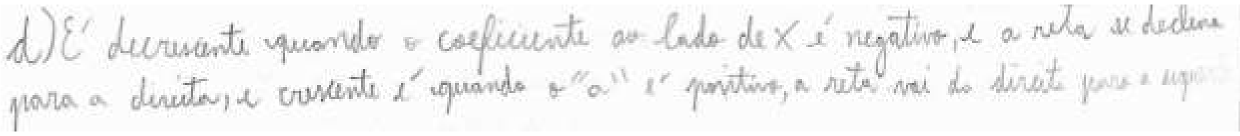
Fonte: Autoria própria (2022).

A resposta do aluno B vai de encontro com o objetivo da questão, analisar que a diferença entre as leis de formação é o coeficiente a de um ser positivo e da outra ser negativo, como consequência, uma função é crescente e outra decrescente. A resposta do aluno A foi considerada como parcialmente correta, pois o mesmo não mostrou a diferença entre as leis de formação da situação apresentada.

Item “d”, Como se identifica uma função afim crescente ou decrescente a partir de sua lei de formação?

Figura 95 - Resposta dos alunos para o item **d** da TAPE 9

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:

Fonte: Autoria própria (2022).

Visando relacionar o sinal do coeficiente angular com a declividade da reta que a representa, evidenciando se a função é crescente ou decrescente a expectativa de resposta é a do aluno A, que mostrou entendimento do coeficiente a positivo a reta é crescente e quando negativo a reta é decrescente. A resposta do aluno B está correta, a partir do coeficiente angular que se analisa se a função é crescente ou decrescente, porém, poderia ser completa.

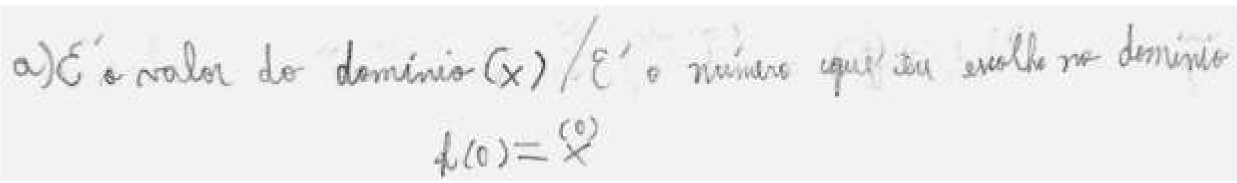
5.14.10 TAPE 10

A TAPE 10 tem como objetivo trabalhar com o valor numérico de uma função. Para isso o aluno deveria substituir um determinado valor para a variável x, ou seja, um valor do conjunto domínio da função e obter o valor da função.

Para o item "a", o que você entendeu como valor numérico de uma função?

Figura 96- Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 10

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:

Fonte: Autoria própria (2022).

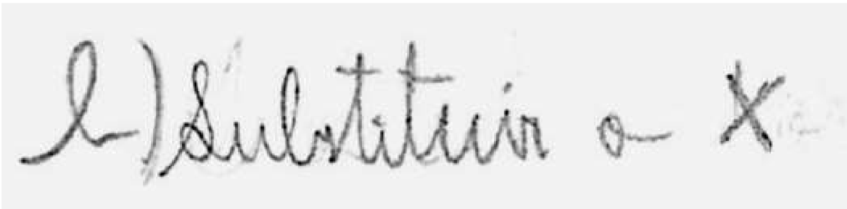
A resposta do aluno B foi considerada como correta, apesar de não estar bem clara. Observa-se a dificuldade que os alunos têm em expressar sua compreensão e ainda, em escrever matemática, algo que eles não estão acostumados. O aluno B consegue dizer, ao seu jeito, que o valor numérico de uma função é o resultado que se obtém após substituir um valor para a variável x na lei de formação.

A resposta do aluno A está incorreta. O valor numérico da função não é o valor do domínio, mas sim o resultado que se obtém ao aplicar um valor do domínio na lei de formação. Mesmo sendo considerada errada, percebe-se que o aluno entendeu como se determina o valor numérico, pois ele fez uma notação de $f(0) = x$, e colocou o 0 (zero) acima do x, como se estivesse substituindo a variável pelo 0 (zero).

O item "b", como se calcula o valor numérico de uma função?

Figura 97 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 10

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:

Fonte: Autoria própria (2022).

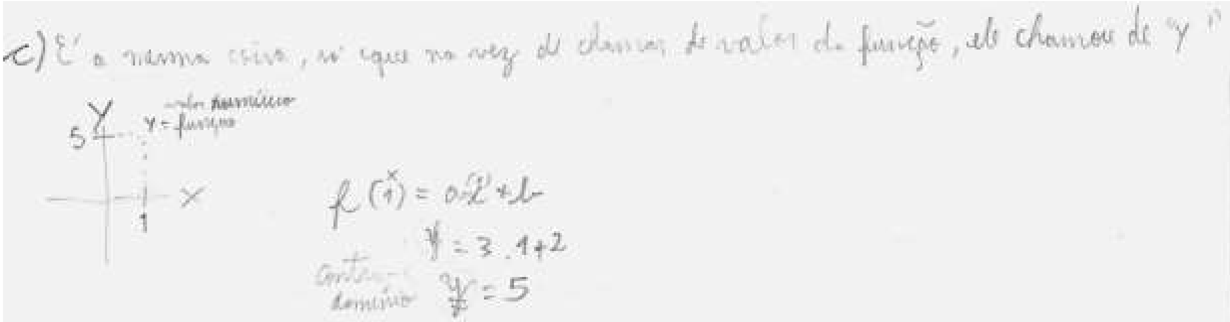
A resposta do aluno A foi considerada correta, apesar de poder ser muito melhor explorada. O aluno poderia ter descrito com mais detalhes, substituindo um valor do domínio na variável x da lei de formação e encontrando o resultado da função.

Já a resposta do aluno B está errada, ao escrever uma lei de formação não fica evidente o que ela quer dizer com isso e nem responde o item.

O item "c" visa destacar a notação de $f(x)$ ou y, desta forma, por que o aluno Carlos escreveu y e os outros alunos "f" nas resoluções?

Figura 98 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 10

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:

Fonte: Autoria própria (2022).

A resposta do aluno A foi considerada correta. O Aluno A, através do gráfico em sua resposta, deu a entender que o valor numérico de uma função está representado no plano cartesiano pelo eixo y, assim, chamar $f(x)$ ou y, se refere à mesma informação.

A resposta do aluno B tem uma certa lógica, porém não responde à pergunta, por que "$f(x)$ ou y". Considerada então como uma resposta errada.

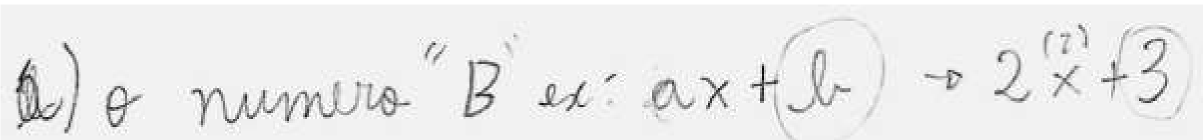
5.14.11 TAPE 11

A TAPE 11 visa utilizar o valor numérico da função para determinar o seu valor inicial e formalizar o conceito de coeficiente linear.

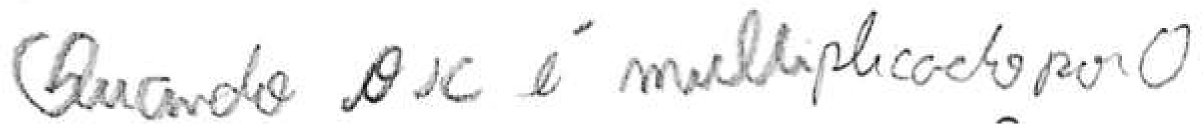
O item "a", o que é valor inicial de uma função?

Figura 99 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 11

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



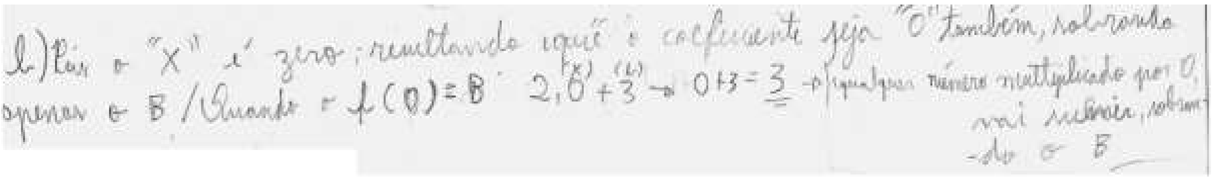
Fonte: Autoria própria (2022).

Os alunos A e B responderam corretamente. A resposta do aluno A está completa, ao afirmar que o valor inicial de uma função afim é o coeficiente b, e o aluno B “complementa”, que se obtém este valor ao substituir o x por 0 (zero).

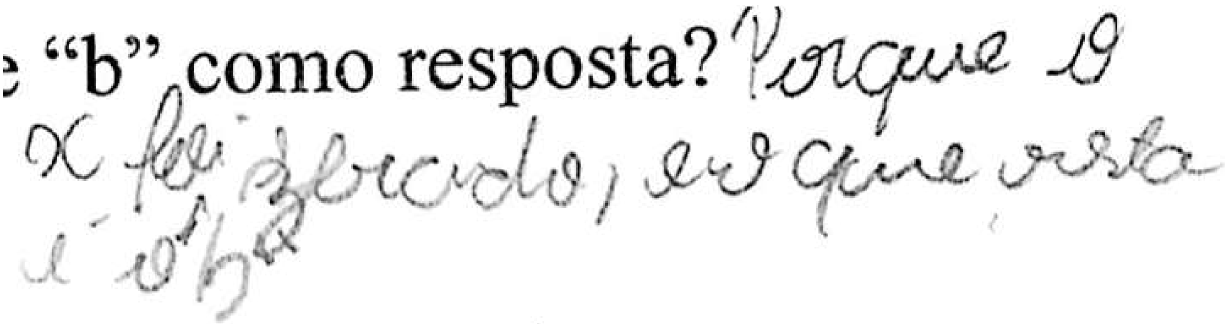
Para o item “b”, os alunos deveriam perceber que não é necessário calcular o valor inicial, basta localizar o coeficiente b, assim, por que nas respostas do Vitor ele escreveu o coeficiente b como resposta?

Figura 100 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 11

Resposta do aluno A:


b) Pois o "X" é zero; resultando aqui o coeficiente seja "0" também, sobrando apenas o B / Quando o f(0) = B 2,0 + 3 → 0+3 = 3 → qualquer número multiplicado por 0, vai zerar, sobrando o B

Resposta do aluno B:


“b” como resposta? Porque o x foi zerado, e o que resta é o b

Fonte: Autoria própria (2022).

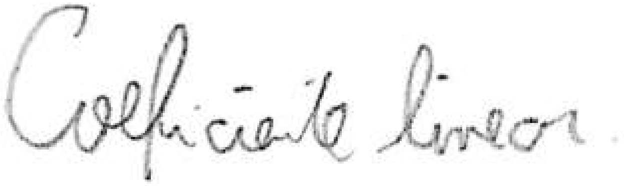
Os dois alunos respondem corretamente, e explicam porque o coeficiente b é o valor inicial, pois ao assumir a variável x como zero, o resultado obtido é justamente o b.

Item “c”, como é chamado o coeficiente b da função afim?

Figura 101 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 11

Resposta do aluno A:

Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

Sem maiores dificuldades, estava bem evidente no enunciado da TAPE que o coeficiente b se chama coeficiente linear.

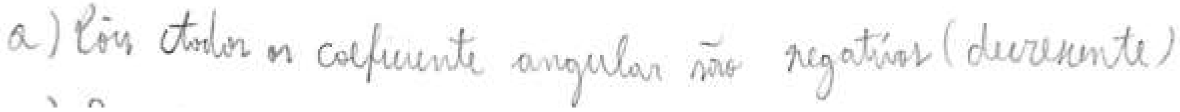
5.14.12 TAPE 12

A TAPE 12 tem como objetivo definir e determinar o zero ou a raiz de uma função afim. Para isso os alunos responderam três perguntas.

Item “a”, por que nas resoluções apresentadas a lei de formação da função foi igualada a zero?

Figura 102 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 12

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:

Fonte: Autoria própria (2022).

O objetivo desta pergunta é que os alunos percebam que para determinar a raiz de uma função afim deve-se igualar a lei de formação a zero encontrando-se, desta forma, o valor do domínio (x), chamado de raiz ou zero da função. As respostas dos alunos A e B foram consideradas errada, pois não atenderam ao enunciado. O aluno A fez uma ligação com o coeficiente angular enquanto o aluno B deu a entender que o valor a ser encontrado tem que ser o zero. Em nenhum momento os alunos mencionaram que a raiz é o valor de x que torna a função com valor numérico igual a zero.

Para o item "b", o que você entendeu como raiz ou zero de uma função?

Figura 103 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 12

Resposta do aluno A:


b) Quando o resultado da zero

Resposta do aluno B:


2) É quando o X encontra o 0 no eixo (Plano Cartesiano)

Fonte: Autoria própria (2022).

As duas respostas foram consideradas parcialmente corretas. Esta é uma pergunta que exige do aluno termos técnicos e uma boa escrita para expressar sua compreensão. O aluno A, de acordo com nossa análise, tentou explicar que raiz é o valor do x que se obtém ao igualar a função a zero, mas foi bem comedido em suas palavras, o que tornou sua resposta parcialmente correta. Já o aluno B tentou explicar a raiz do ponto de vista gráfico, e não usou uma linguagem adequada, acredita-se que ela tenha tentado explicar que a raiz de uma função é o valor quando a reta intercepta o eixo das abcissas (x), e neste ponto a função tem valor zero.

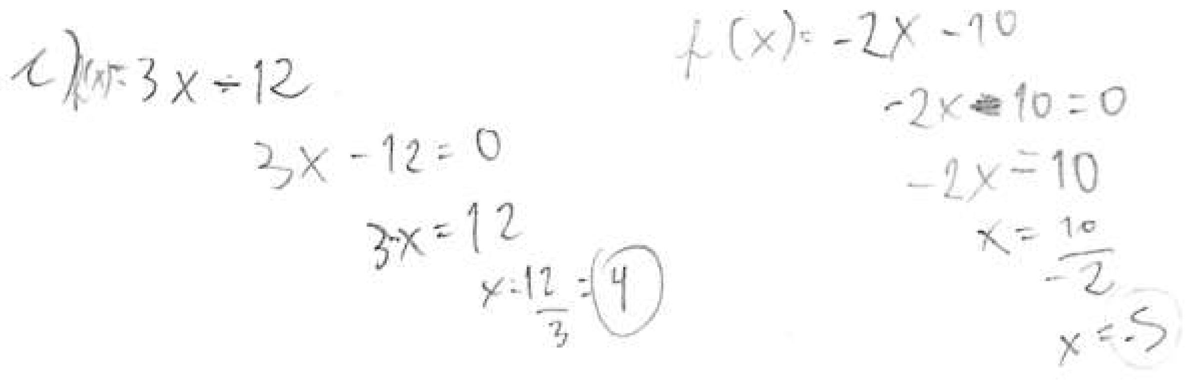
O item "c" exigia dos alunos cálculos. Determine a raiz das seguintes funções:

I. $f(x) = 3x - 12$

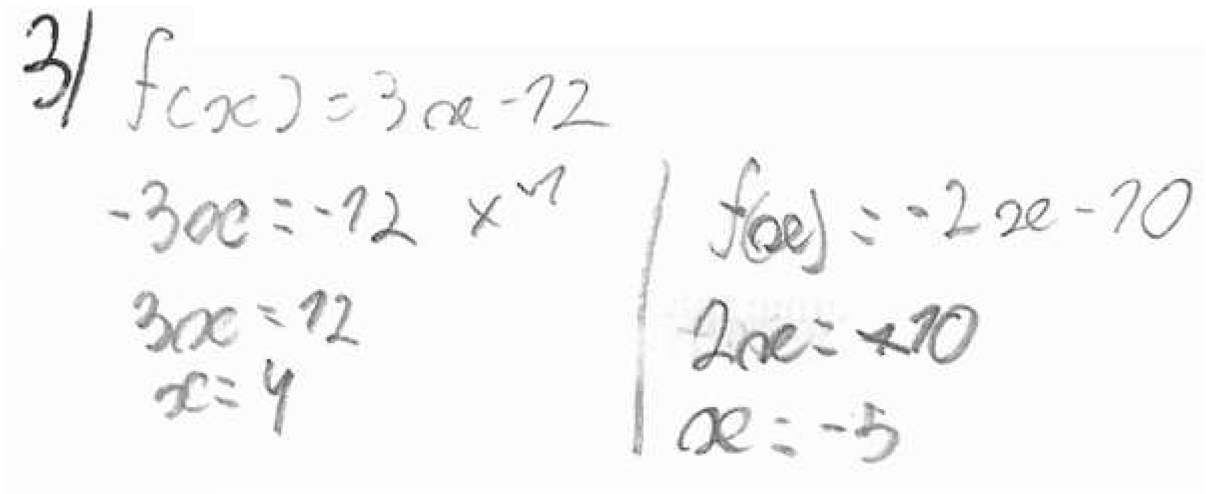
II. $f(x) = -2x - 10$

Figura 104 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 12

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

Os dois alunos responderam corretamente, o que nos leva a conclusão de que entenderam e conseguem determinar a raiz de uma função afim.

5.14.13 TAPE 13

A TAPE 13 tem objetivo de consolidar as informações vistas até agora, reúne em uma mesma tarefa os conceitos de raiz, coeficiente linear e coeficiente angular em duas situações diferentes.

Questão 1, o item “a”, como identificar a raiz de uma função afim analisando somente o gráfico?

Figura 105 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 13

Resposta do aluno A:

a raiz é o ponto onde se passa pelo eixo X no grafico $\left(\frac{1}{3}\right)$

Resposta do aluno B:

É só observar onde o eixo cruza a linha x

Fonte: Autoria própria (2022).

Os alunos respondem corretamente, percebendo que a raiz é coordenada x do ponto onde a reta intercepta o eixo das abcissas. Podemos observar na resposta do aluno B a dificuldade que eles têm em escrever sobre matemática e nomear os elementos de forma adequada. Não é o eixo que cruza a linha x, e sim o ponto onde a reta intercepta o eixo x, mesmo assim, a resposta foi considerada correta, pois o aluno identificou corretamente na resolução a raiz sendo o ponto $x = 2$.

Para o item "b", por que a resposta de Laura para o item "b" foi $raiz = (\frac{1}{3}, 0)$?

Figura 106- Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 13

Resposta do aluno A:

pois é o ponto de encontro entre elas

Resposta do aluno B:

Porque é a forma simplificada de um número irracional

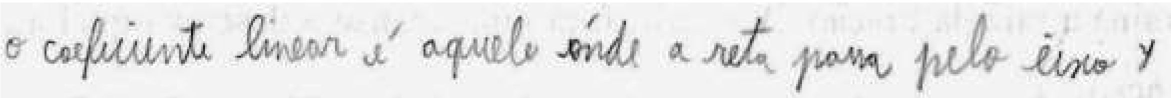
Fonte: Autoria própria (2022).

A resposta do aluno A foi considerada parcialmente correta. A resposta do aluno B está errada. A resposta esperada é que esta é a coordena do ponto onde a reta intercepta o eixo x. Na resposta do aluno A percebe-se que ele quis dizer que é o ponto de "encontro" entre e a reta e o eixo x. Já o aluno B confunde a coordenada do ponto b como sendo um número irracional, o que está errado.

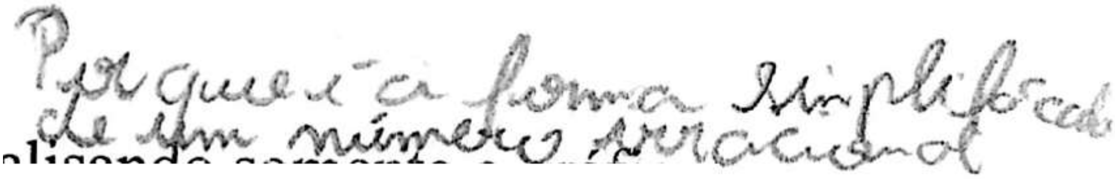
Item "c", como identificar o coeficiente linear (b) da função afim analisando somente o gráfico.

Figura 107 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 13

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



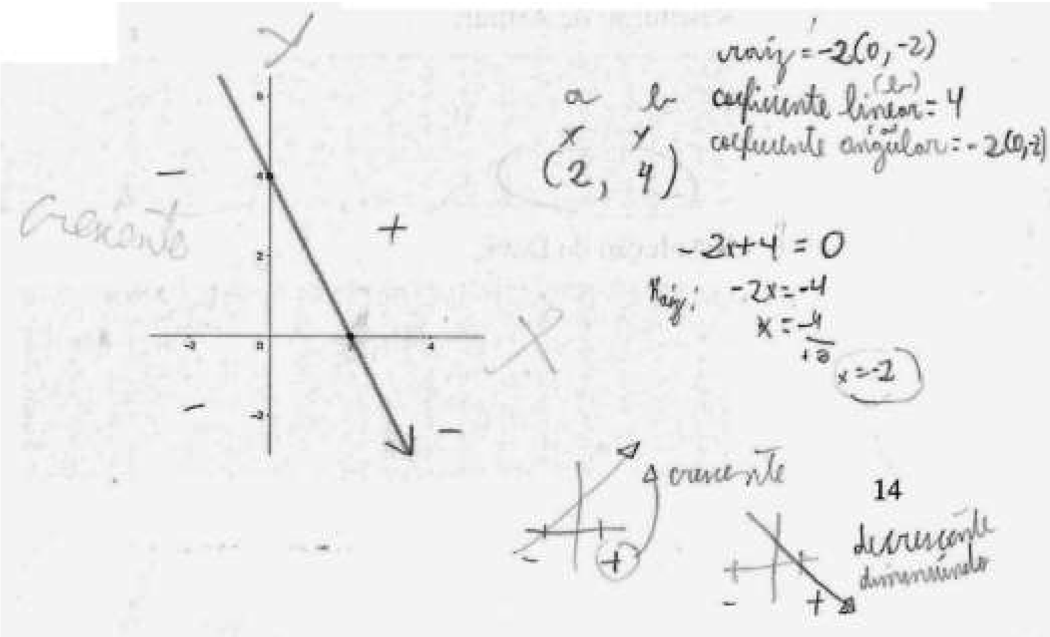
Fonte: Autoria própria (2022).

Os alunos A e B respondem corretamente. Novamente percebemos uma dificuldade na escrita do aluno B, confundindo o eixo com a reta que representa a função.

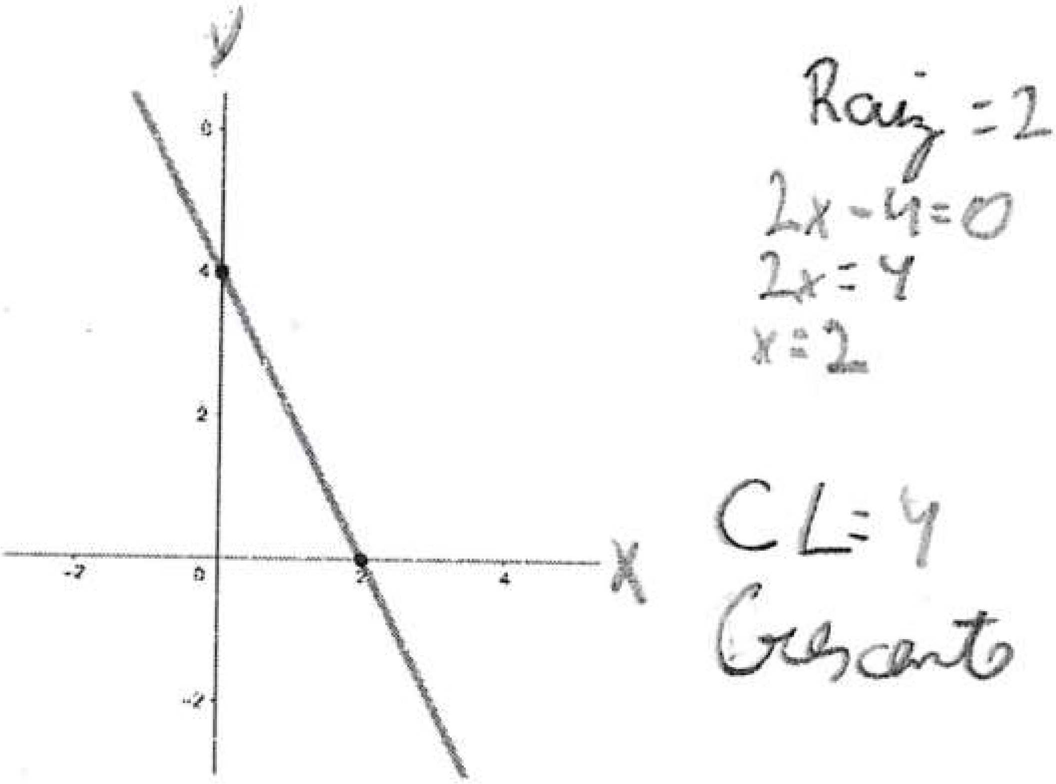
Item "d", dado o gráfico abaixo, determine a raiz, o coeficiente linear e o sinal do coeficiente angular da função afim representada.

Figura 108 - Resposta dos alunos para o item **d** da TAPE 13

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta parcialmente correta do aluno A. Ao responder qual era a raiz da função o aluno confundiu, provavelmente com a reta decrescente, observando o sinal do coeficiente, o aluno respondeu $(0, -2)$ enquanto a raiz é $(0,2)$. O coeficiente linear está correto, o aluno conseguiu identificar o ponto onde o gráfico intercepta o eixo y. Quanto ao coeficiente angular, o aluno tentou identificar o coeficiente a, que não era o objetivo no momento, bastava identificar o sinal, vendo se o gráfico é crescente ou decrescente. Pelos esboços do gráfico que o aluno fez na parte de baixo, o aluno compreendeu que na reta crescente o sinal do coeficiente angular é positivo e o contrário é negativo.

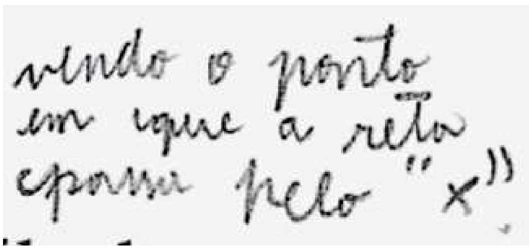
O aluno B responde parcialmente correto o item "d". Identificou a raiz de forma adequada, igualando a lei de formação a zero, e encontrando o $x = 2$ como raiz. O coeficiente linear está correto, ponto em que a reta intercepta o eixo y, $b = 4$. O erro está na classificação da função, a reta é decrescente, logo o sinal do coeficiente angular é negativo, o aluno B classificou como crescente.

A questão 2 da TAPE 13 remete a uma situação parecida, porém com uma função afim crescente.

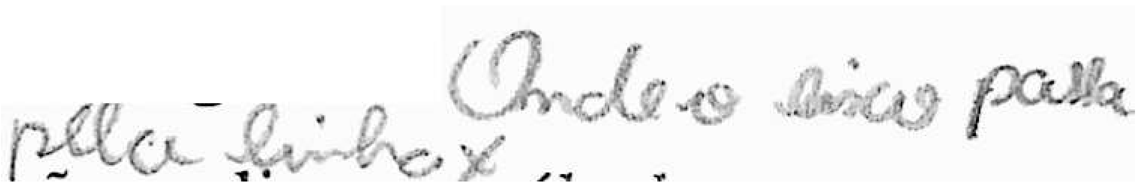
Item "a", como identificar a raiz de uma função afim analisando somente o gráfico?

Figura 109 - Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 13

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta correta do aluno A, percebe-se que a resposta do aluno foi melhor que no item "a" da 1 questão, especificando que é o ponto de interseção da reta com o eixo x.

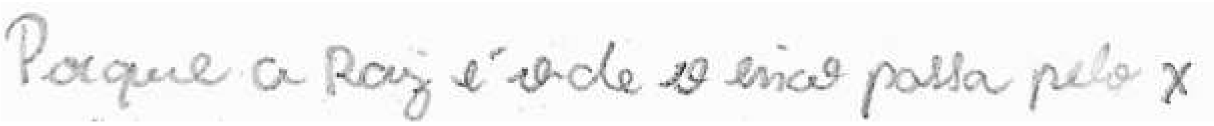
O aluno B comete o equívoco na escrita, nomeando a reta de eixo, mas identifica corretamente o coeficiente no gráfico.

Item “b”, por que na resposta do item “b” do Davi e da Laura eles não realizaram cálculos para determinar a raiz?

Figura 110 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 13

Resposta do aluno A:

Resposta do aluno B:



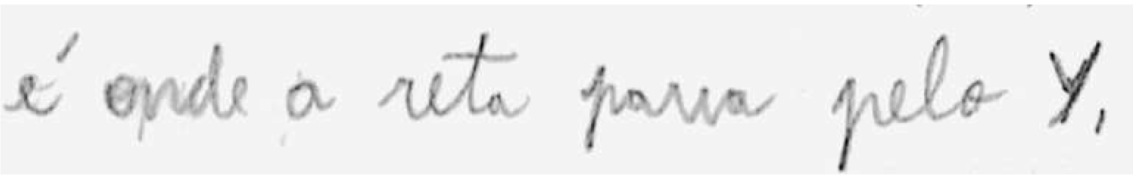
Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta correta dos alunos, basta analisar o gráfico e identificar o ponto onde a reta passa pelo eixo x. Aluno B comete o mesmo equívoco ao chamar a reta de eixo, porém identifica corretamente a raiz o que leva a ser considerada correta sua resposta.

Item “c”, como identificar o coeficiente linear (b) da função afim analisando somente o gráfico.

Figura 111 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 13

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:

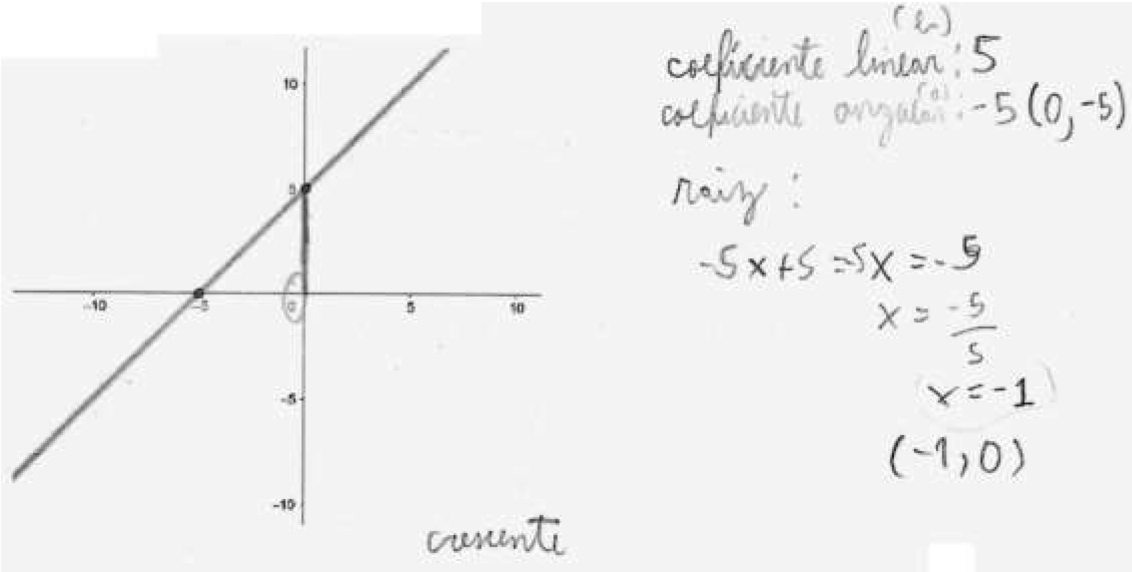
Fonte: Autoria própria (2022).

Respostas corretas dos alunos A e B, valor da ordenada onde a reta passa pelo eixo y. Aluno B nomeando a reta de eixo, mas identificando corretamente o coeficiente linear, logo a resposta foi considerada válida.

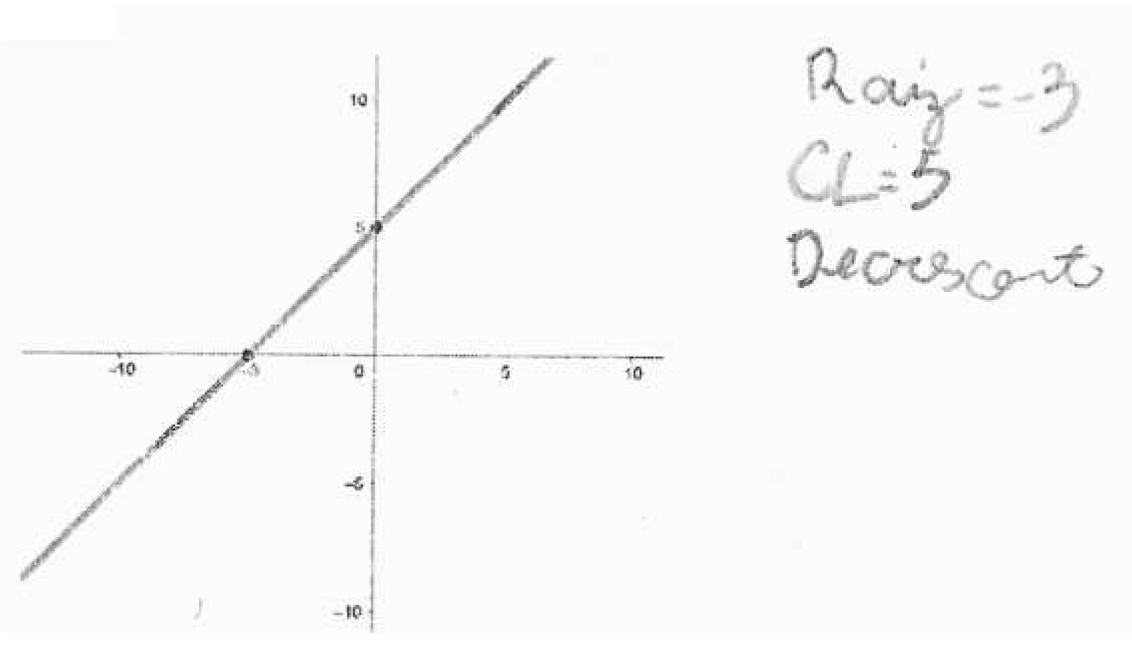
Item “d”, dado o gráfico abaixo, determine a raiz, o coeficiente linear e o sinal do coeficiente angular da função afim representada.

Figura 112 - Resposta dos alunos para o item **d** da TAPE 13

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

Reposta parcialmente correta do aluno A. O aluno está confundindo o sinal do coeficiente angular com a raiz da função. Neste momento ele está tentando identificar qual o valor do coeficiente angular, quando deveria apenas identificar o sinal (positivo ou negativo) através da declividade da reta. O aluno responde corretamente o coeficiente linear e identifica que a função é crescente.

Resposta parcialmente correta do aluno B. A raiz da função foi identificada como sendo -3. Pelas respostas anteriores, verifica-se que o aluno entendeu o conceito de raiz, o que pode ter acontecido foi um erro de leitura por má impressão ou por descuido do aluno. Percebe-se também que o aluno está confundindo a declividade da reta, neste caso a reta é crescente, com coeficiente angular positivo, e o aluno descreveu como decrescente.

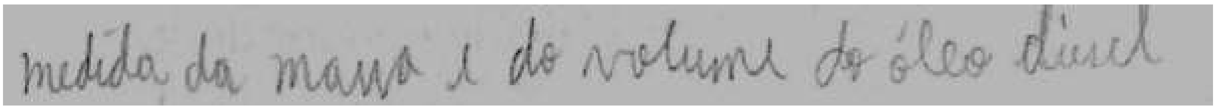
5.14.14 TAPE 14

A TAPE 14 finaliza as tarefas sobre função afim. O objetivo da TAPE 14 é mostrar que o coeficiente angular é a taxa de variação de uma função afim e os alunos vão identificar, através das resoluções apresentadas, como se calcula o coeficiente angular a. Além disso, a TAPE 14 retoma os conceitos vistos nas tarefas anteriores, como relação entre grandezas, conjunto domínio e contradomínio, lei de formação e os coeficientes.

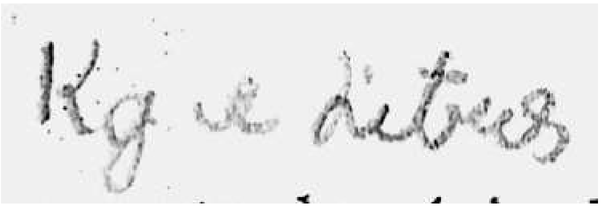
Item “a”, vimos na TAPE 1 que uma função é uma relação entre grandezas, quais são as grandezas envolvidas nesta situação?

Figura 113- Resposta dos alunos para o item **a** da TAPE 14

Resposta do aluno A:


medida da massa e do volume do óleo diesel

Resposta do aluno B:


Kg e Litros

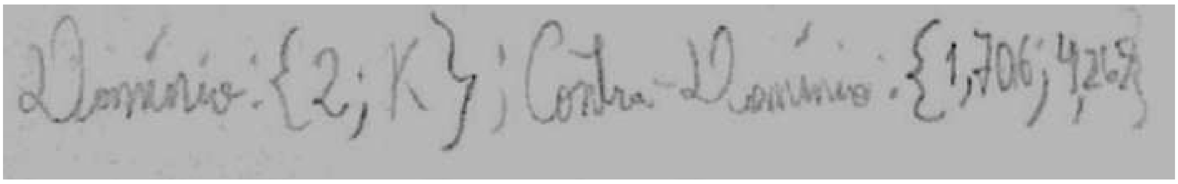
Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta correta, o próprio enunciado desta afirma que a densidade é a relação entre a massa e o volume do óleo diesel.

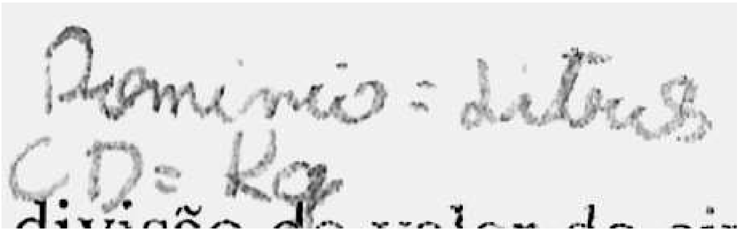
Item “b”, qual é o conjunto domínio e contradomínio desta função?

Figura 114 - Resposta dos alunos para o item **b** da TAPE 14

Resposta do aluno A:


Domínio: {2; K}; Contra-Domínio: {1,706; 4,2

Resposta do aluno B:


Domínio = Litros
CD = Kg

Fonte: Autoria própria (2022).

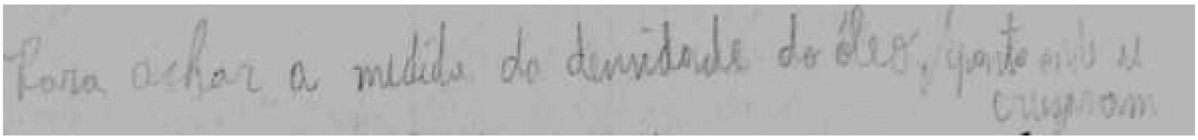
Resposta parcialmente correta do aluno A. O aluno não está considerando o domínio e o contradomínio como um conjunto, apenas destacou os valores informados no gráfico. Foi considerada parcial pois o aluno entendeu que o domínio são os valores ligados à variável independente (x) e contradomínio à variável dependente (y).

Resposta correta do aluno B. O aluno entendeu que o domínio são os valores relacionados no eixo x e respondeu como sendo "litros", ou seja, o conjunto de valores atribuídos ao volume do óleo diesel. O mesmo para o contradomínio, valores relacionados ao eixo y, a massa do óleo diesel, em quilo.

Item "c", por que na resolução da letra "a" os três alunos realizaram a divisão do valor do eixo y com o valor do eixo x?

Figura 115 - Resposta dos alunos para o item **c** da TAPE 14

Resposta do aluno A:


Para achar a medida da densidade do óleo, quando eles se cruzam

Resposta do aluno B:


Para descobrir a Densidade

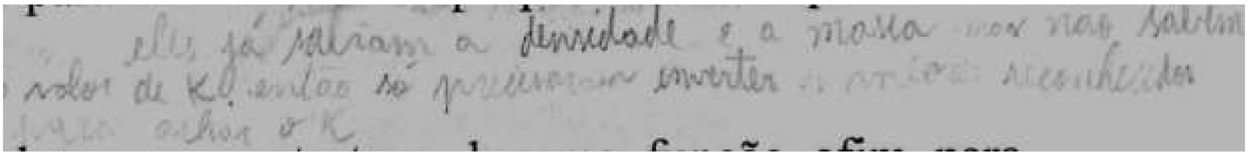
Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta correta dos alunos A e B. Como no eixo y estão os valores da massa e no eixo x os valores do volume, ao fazer a divisão obtém-se a densidade do óleo diesel.

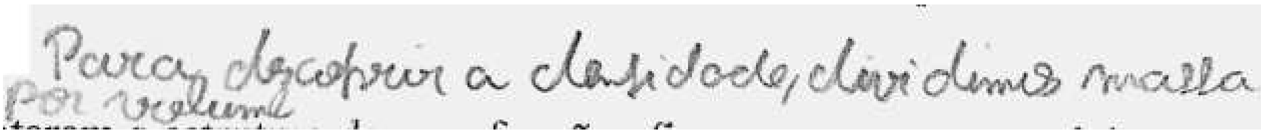
Item “d”, observe a resolução dos alunos para a letra “b” e explique com suas palavras o procedimento adotado por eles.

Figura 116 - Resposta dos alunos para o item **d** da TAPE 14

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

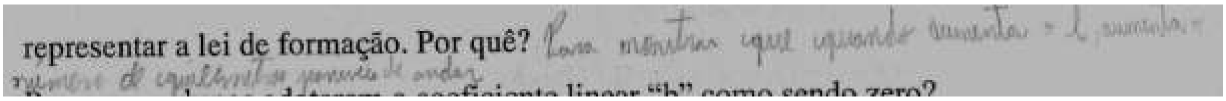
O item “b” da TAPE 14 solicitava que os alunos calculassem o valor de “k”, um determinado valor do volume, para isso os alunos deveriam identificar a densidade do óleo diesel e usar esta informação com o ponto $(k, 4{,}265)$. À sua maneira, o aluno A explicou corretamente como se obtém esse valor, ou seja, identificou que a densidade do óleo é constante e usou o ponto em questão para determinar o valor de k.

A resposta do aluno B foi considerada parcialmente correta. Uma parte é a densidade, mas faltou a relação com o ponto $(k, 4{,}265)$ para identificar o valor de “k”.

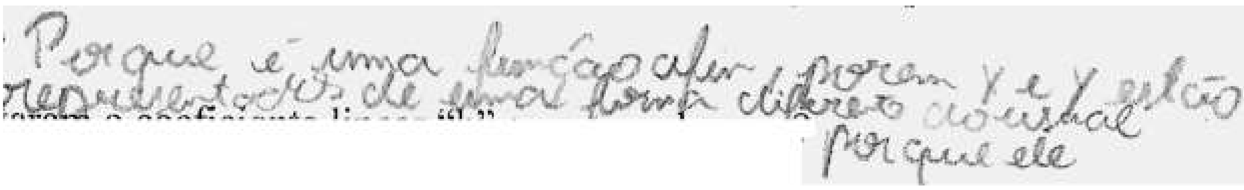
Item “e”, na letra “c” da TAPE os três alunos adotaram a estrutura de uma função afim para representar a lei de formação. Por quê?

Figura 117 - Resposta dos alunos para o item **e** da TAPE 14

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



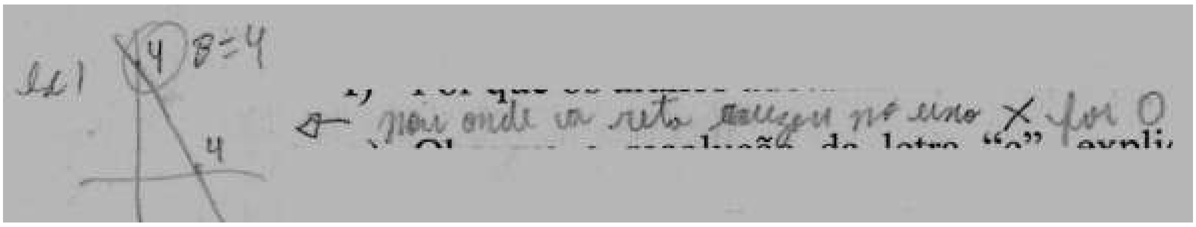
Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta parcialmente correta dos alunos A e B. O aluno A percebe uma relação de proporção, porém, confunde a situação, problema está relacionando massa e volume, enquanto o aluno faz uma relação de que quanto mais litros (de óleo) mais quilômetros é possível andar, fora de contexto da situação apresentada. O aluno B não explica corretamente como identificar que a função é afim. Como resposta esperada eles poderiam citar que o gráfico é uma reta, que o crescimento é de forma linear, características que representam a função afim.

Item “f”, por que os alunos adotaram o coeficiente linear b como sendo zero?

Figura 118 - Resposta dos alunos para o item **f** da TAPE 14

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:

Fonte: Autoria própria (2022).

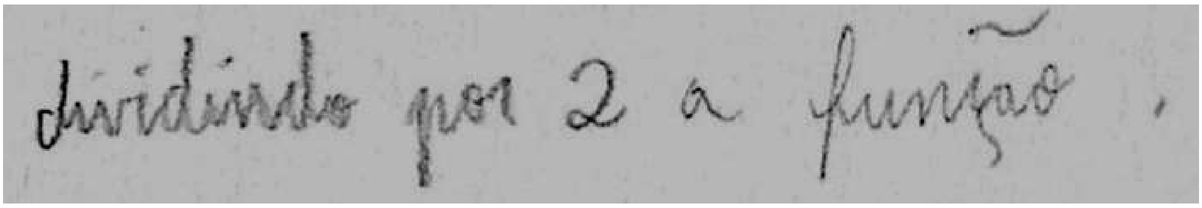
Resposta parcialmente correta do aluno A. O aluno justifica que o coeficiente é zero pois é onde reta intercepta o eixo x, como no exemplo dado, a reta passa pelo ponto $(0,0)$ o aluno acerta o valor zero, mas erra na justificativa. Percebe-se também que o aluno fez um exemplo do lado esquerdo da sua resposta e nele está marcado o coeficiente b no eixo y, o que está correto.

O aluno B responde de forma incorreta, fazendo a relação do coeficiente linear com a densidade, que no caso é o coeficiente angular da situação.

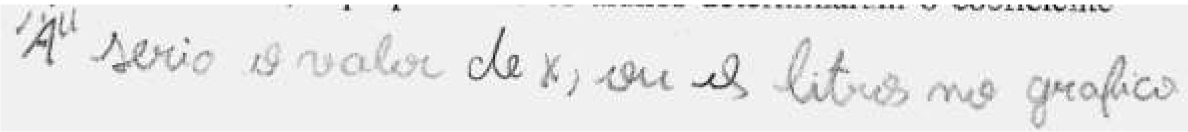
Item “g”, observe a resolução da letra “c”, explique como os alunos determinaram o coeficiente angular a.

Figura 119 - Resposta dos alunos para o item **g** da TAPE 14

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



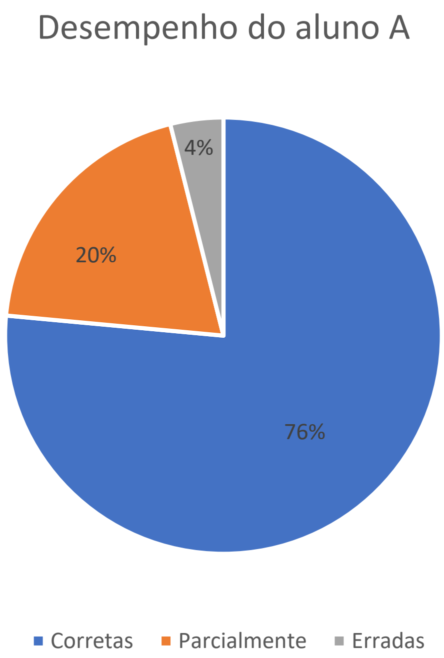
Fonte: Autoria própria (2022).

Resposta parcialmente correta do aluno A. Faltou o aluno explicar porque ocorreu a divisão por 2. Como a densidade (taxa de variação, o coeficiente a já era sabido, bastava aplicar na lei de formação, $f(x) = a.x$ $(porque\ o\ b = 0)$, no ponto $(2, 1{,}706)$.

A resposta do aluno B está incorreta, o aluno confunde o coeficiente angular com os valores do domínio. Não percebe que a taxa de variação da situação apresentada é a própria densidade, a razão entre a massa e o volume.

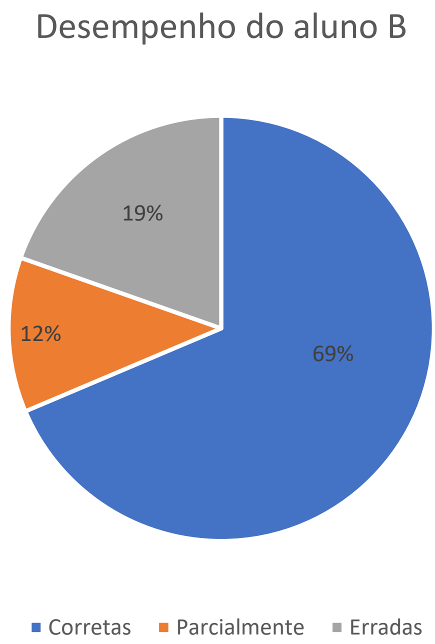
Diante das resoluções dos alunos A e B, fica evidente que eles tiveram uma participação produtiva nas TAPE, acertando um número considerável de questões. O aluno A respondeu 51 perguntas (considerando todos os itens das 14 TAPE), acertou 39 questões, parcialmente corretas foram 10 e errou 2, conforme gráfico abaixo. O aluno B também respondeu 51 questões, fez corretamente 35, parcialmente 6 e foram 10 questões erradas, conforme gráfico abaixo. Por ser uma dinâmica diferente, que os alunos não estão acostumados, percebe-se uma dificuldade de expressar as compreensões por meio de textos, de forma geral, ao analisar as resoluções, os alunos se saíram bem nas TAPE.

Gráfico 3 – Desempenho do Aluno A na resolução das TAPE



Fonte: Autoria própria (2022).

Gráfico 4 – Desempenho do Aluno B na resolução das TAPE



Fonte: Autoria própria (2022).

Depois de aplicado as 14 TAPE e feito a formalização do conteúdo com as turmas, reaplicamos a mesma atividade diagnóstica com o intuito de comparar o desempenho dos mesmos após o ensino através da Análise da Produção Escrita, com o uso das TAPE.

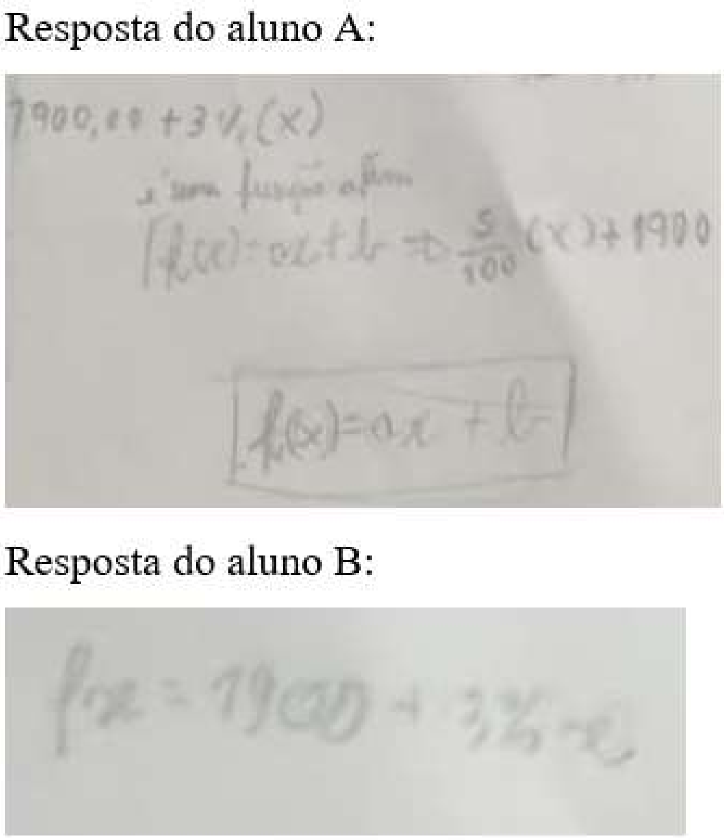
Neste momento, apresentamos a análise de desempenho dos alunos A e B na atividade diagnóstica após as aulas com as TAPE.

5.15 ANÁLISE DA ATIVIDADE DIAGNÓSTICA PÓS TAPE

O salário de um vendedor é composto por $R\$\ 1.900{,}00$ mais uma comissão de 3% do total de vendas do mês.

a) escreva a lei de formação de uma função f que relaciona o salário que o vendedor recebe em um mês em função da quantia x vendidas nesse mês.

Figura 120 - Resposta dos alunos para o item **a** da atividade diagnóstica pós TAPE



Fonte: Autoria própria (2022).

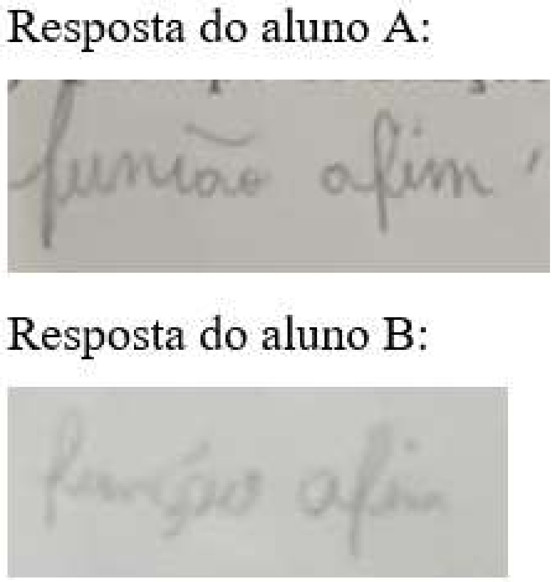
Os dois alunos respondem corretamente o item “a”. Pode-se perceber que o aluno A identificou ser uma função afim, escreveu a estrutura da função e completou com os coeficientes. Já o aluno B foi mais direto, mas de forma correta fez a lei de formação.

Apesar de ter usado o símbolo da porcentagem (%) na fórmula, foi considerada correta sua resposta.

Ao comparar com a mesma atividade antes das TAPE, o aluno A havia respondido de forma parcialmente correta e o aluno B de forma incorreta, o que demonstra entendimento em como as grandezas da situação estão relacionadas.

b) que tipo de função representa esta situação?

Figura 121 - Resposta dos alunos para o item **b** da atividade diagnóstica pós TAPE



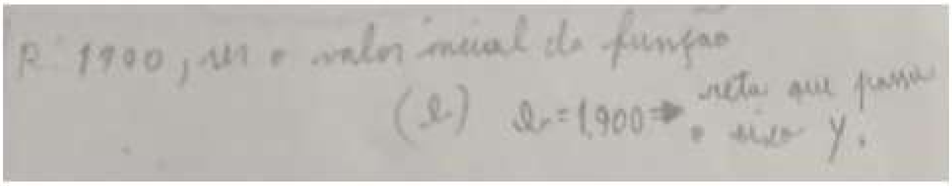
Fonte: Autoria própria (2022).

Os dois alunos respondem corretamente o item “b”. O aluno A já havia respondido de forma correta na atividade antes das TAPE, e desta vez o aluno B, que havia errado, responde de forma correta também.

c) qual o coeficiente linear desta função? Qual o significado deste coeficiente?

Figura 122 - Resposta dos alunos para o item **c** da atividade diagnóstica pós TAPE

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:

Fonte: Autoria própria (2022).

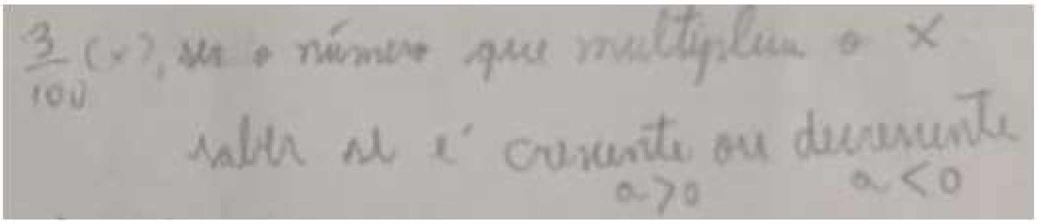
Os dois alunos respondem corretamente. Interessante analisar a justificativa dos alunos. O aluno A entende que o coeficiente linear é o valor inicial da função, do mesmo modo que foi feito na TAPE 11, ou seja, é o valor da função para quando o "$x = 0$". Já o aluno B justifica ser a "taxa fixa" de ganho no mês, fazendo uma relação com o coeficiente linear como algo fixo.

Anteriormente às TAPE, o aluno A havia respondido de forma incorreta e o aluno B deixou em branco este item.

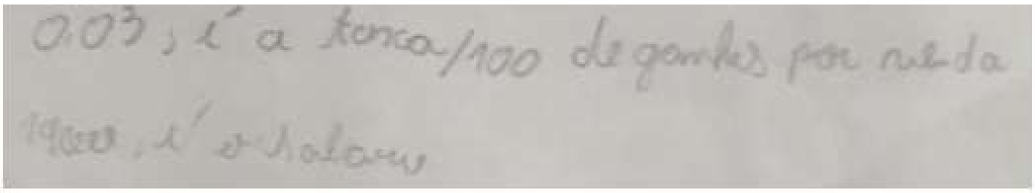
d) qual o coeficiente angular desta função? Qual o significado deste coeficiente?

Figura 123 - Resposta dos alunos para o item **d** da atividade diagnóstica pós TAPE

Resposta do aluno A:



Resposta do Aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

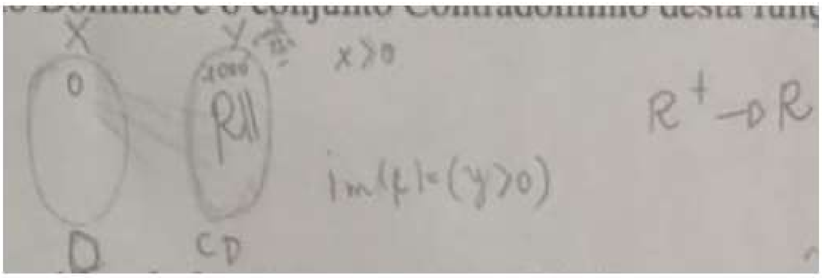
Os dois alunos respondem corretamente o item “d”. percebe-se, pela justificativa de cada um deles, que ficou evidente o entendimento de que o coeficiente angular é a taxa de variação de uma função. Interessante observar que o aluno A destacou que o coeficiente positivo descreve uma função crescente enquanto que negativo descreve uma função decrescente. O aluno B faz uma anotação de que $R\$1.900,00$ é o salário, entende-se que o aluno quis dizer ser a parte fixa do salário, como respondeu no item anterior.

Anteriormente às TAPE os dois alunos responderam que não sabiam responder essa questão.

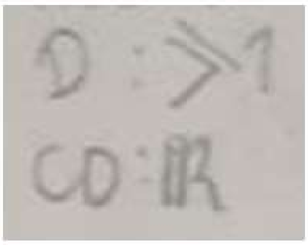
e) determine o conjunto Domínio e o conjunto Contradomínio desta função.

Figura 124 - Resposta dos alunos para o item **e** da atividade diagnóstica pós TAPE

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

Apesar da escrita dos alunos apresentar problemas, e isso foi um dos aspectos visualizados na aplicação das TAPE, a dificuldade que os alunos tem de expor suas compreensões e mais, em escrever matemática, em utilizar termos e linguagens mais técnicas, as duas respostas foram consideradas corretas.

Ao analisar a resposta do aluno A, vemos a compreensão de caracterizar uma função através de conjuntos. O aluno identifica corretamente o conjunto domínio e contradomínio, percebe que valor inicial do domínio é o zero (caso o vendedor não efetue vendas) e descreve o conjunto como “$x > 0$”. No conjunto contradomínio o aluno faz uma anotação do símbolo do Real (R$), identificando neste conjunto o salário do vendedor, inclusive, colocando dentro deste conjunto o valor 1.900, que é o valor mínimo do salário. Outro fato interessante de se observar é que o aluno entende que o contradomínio pode ser um conjunto maior e responde como sendo $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais). O aluno ainda faz menção ao conjunto imagem, de forma correta, entende que é maior do que zero, e destaca que a função é definida de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}$.

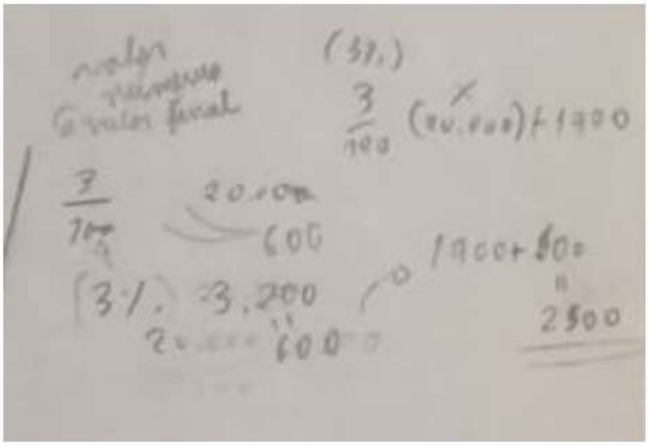
O aluno B foi mais moderado na sua resposta. Entende que o conjunto contradomínio não tem restrições e destaca como sendo o conjunto dos números Reais, já para o domínio, entendemos que o aluno percebeu que a comissão só vai existir se houver vendas, dessa forma ele escreve como sendo 1 a venda inicial, assim consideramos correta sua resposta. Observa-se nas respostas uma dificuldade dos alunos com a notação e simbologia utilizados, por exemplo, ao escrever D: ≥1 (resposta do aluno B da figura 123) ele não utiliza uma notação de conjunto. Estes são aspectos que as TAPE permitem observar e fazem com que o professor possa corrigir essas falhas no decorrer de suas aulas.

Anteriormente às TAPE os dois alunos não sabiam responder esta questão.

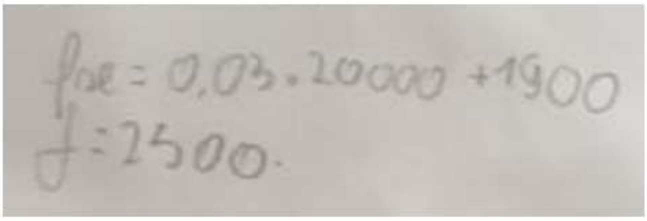
f) Determine o valor numérico da função para $x = 20.000{,}00$.

Figura 125 - Resposta dos alunos para o item **f** da atividade diagnóstica pós TAPE

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

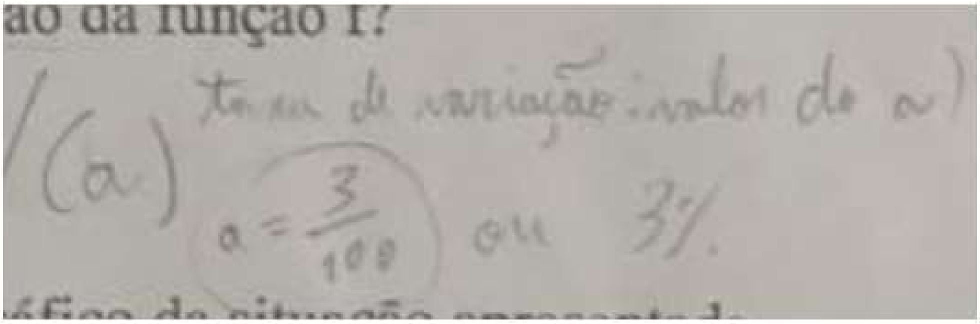
Os dois alunos respondem corretamente o item “f”. O aluno A demonstra como pensou para responder, ele faz o cálculo da porcentagem da comissão e adiciona ao valor fixo. Já o aluno B utiliza a lei de formação elaborada no item “a” e substitui o valor nesta fórmula.

Os dois alunos haviam errado esta questão antes da aplicação das TAPE.

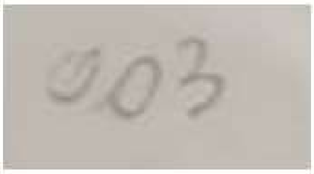
g) qual a taxa de variação da função f?

Figura 126 - Resposta dos alunos para o item **g** da atividade diagnóstica pós TAPE

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

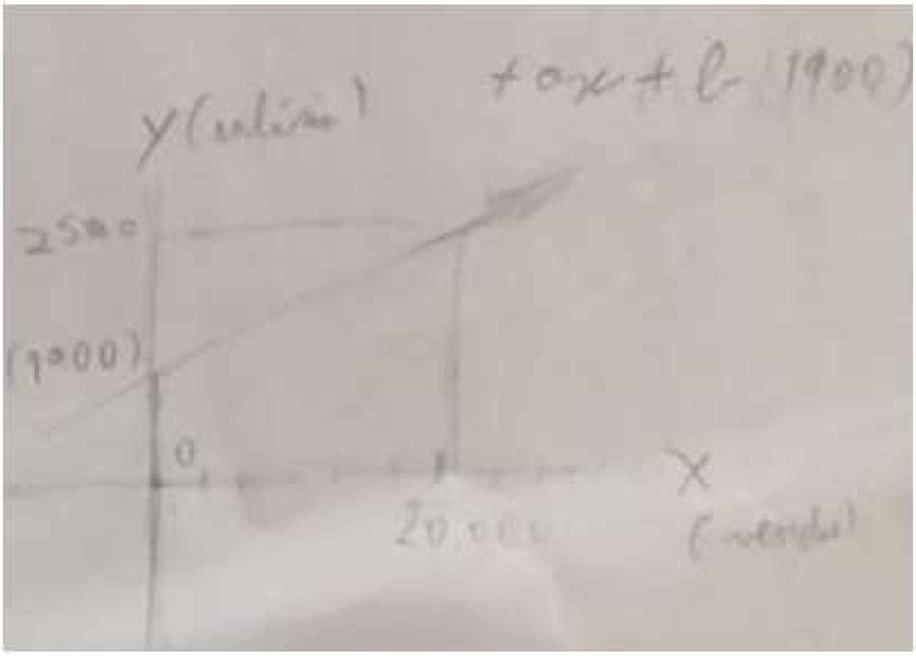
Os dois alunos respondem corretamente, entendendo que a taxa de variação da função afim é o coeficiente angular.

Os dois alunos não sabiam responder esta questão antes da aplicação das TAPE.

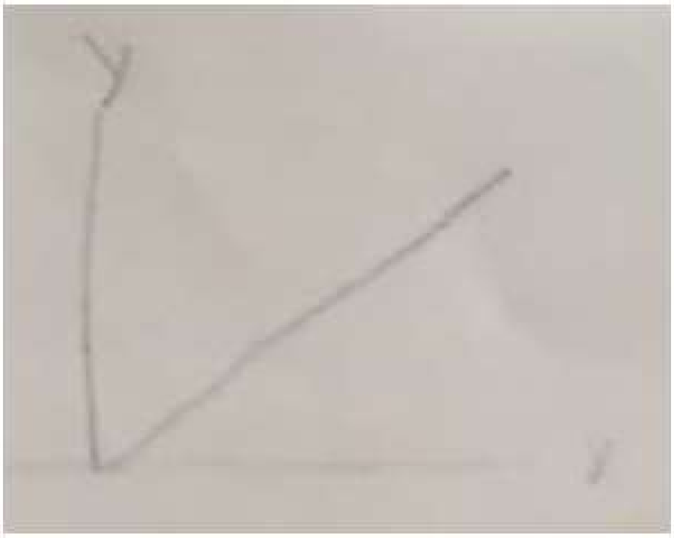
h) faça um esboço do gráfico da situação apresentada.

Figura 127 - Resposta dos alunos para o item **h** da atividade diagnóstica pós TAPE

Resposta do aluno A:



Resposta do aluno B:



Fonte: Autoria própria (2022).

A resposta do aluno A está correta. O aluno identifica aspectos importantes no gráfico, como o significado de cada eixo, o valor inicial da função, a reta crescente e a estrutura da lei de formação da função. Interessante observar que o aluno aplicou o ponto $(20.000, 2.500)$, que é o valor numérico da função pedido no item "f", no esboço do seu gráfico.

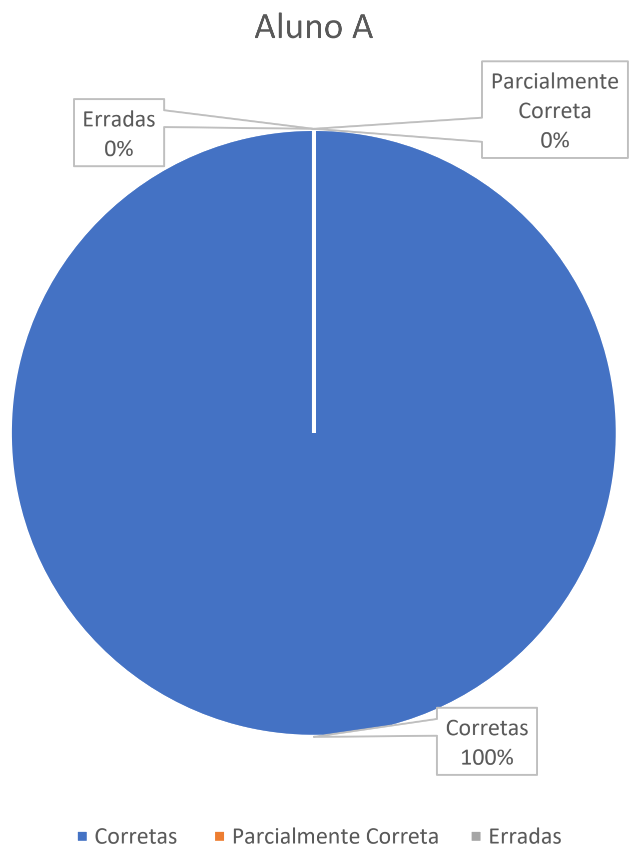
O aluno A havia respondido de forma parcialmente correta este item na aplicação anterior às TAPE.

O aluno B responde de forma parcialmente correta. Como esboço, o aluno faz uma reta crescente, entendendo que é uma função afim cujo coeficiente angular é positivo, porém, esta reta não se inicia na origem do plano cartesiano.

Anteriormente às TAPE, o aluno havia respondido de forma incorreta este item.

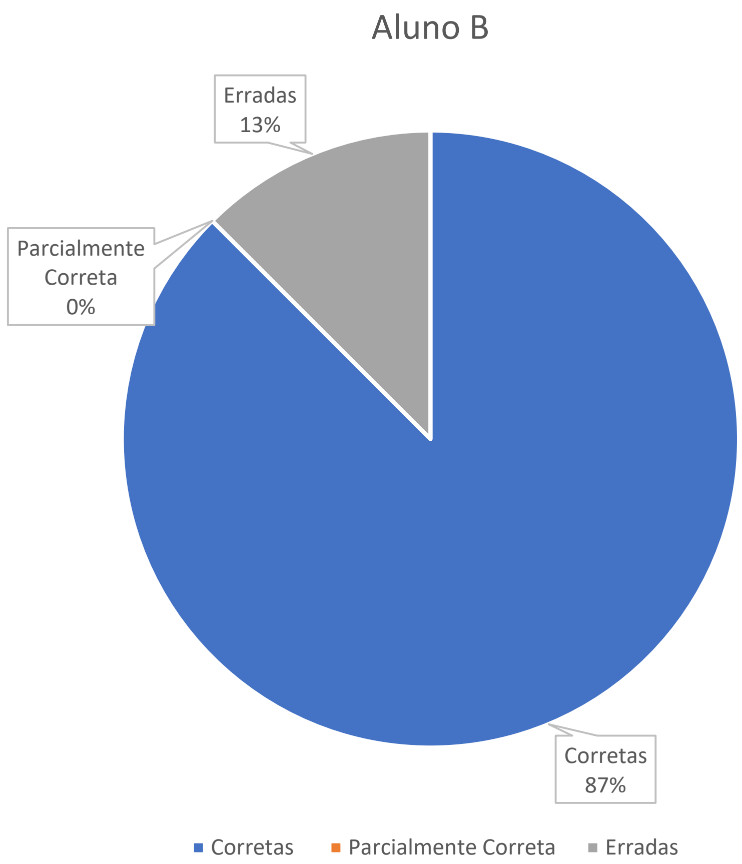
De acordo com o desempenho dos alunos na atividade diagnóstica após a aplicação das TAPE, podemos perceber que os alunos obtiveram um desempenho muito bom. O aluno A acertou todas as questões enquanto que o aluno B acertou 7 e parcialmente 1, sendo que ambos não erraram questão alguma da tarefa, conforme gráficos 5 e 6 abaixo.

Gráfico 5 – Desempenho do aluno A na atividade diagnóstica após TAPE



Fonte: Autoria própria (2022).

Gráfico 6 - Desempenho do aluno B na atividade diagnóstica após TAPE



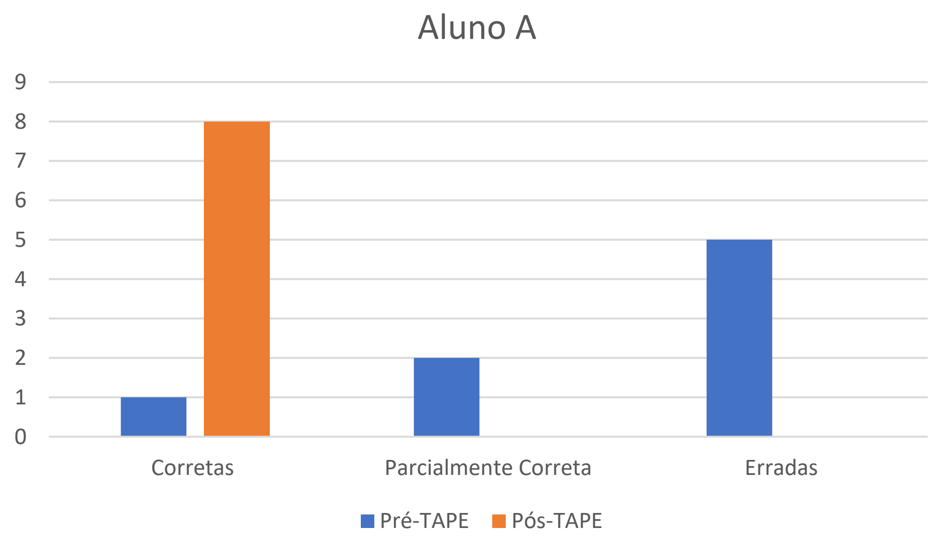
Fonte: Autoria própria (2022).

5.16 COMPARATIVO ENTRE AS ATIVIDADES DIAGNÓSTICA PRÉ E PÓS TAPE

5.16.1 COMPARATIVO ENTRE OS ALUNOS A E B

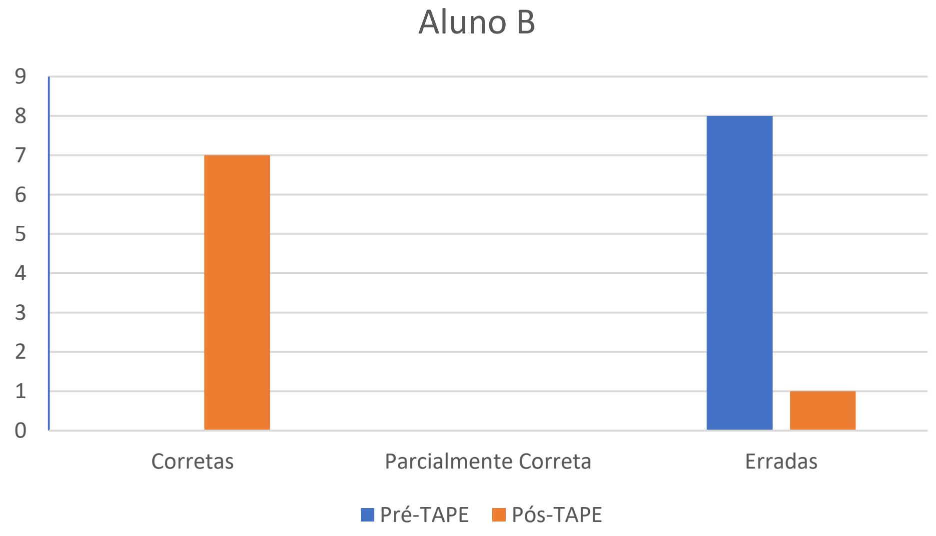
Ao comparar o desempenho dos alunos A e B antes e depois das TAPE, pode-se perceber que os alunos evoluíram. Antes da aplicação das TAPE o aluno A havia feito corretamente uma das questões e parcialmente correto duas questões, e o aluno B errou todas as questões, e, após as TAPE os alunos conseguiram realizar a atividade com um índice de acerto muito melhor, o aluno A respondeu corretamente todas as questões, enquanto o aluno B acertou sete e respondeu parcialmente correta uma, das oito questões da atividade diagnóstica, conforme o gráfico oito. O que demonstra que as aulas, por meio da Análise da Produção Escrita (APE), com a utilização de Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE) como ferramenta de ensino, tem um grande potencial para ser utilizado pelos professores.

Gráfico 7 – Comparativo de desempenho do aluno A na atividade diagnóstica pré e pós TAPE



Fonte: Autoria própria (2022).

Gráfico 8 – Comparativo de desempenho do aluno B na atividade diagnóstica pré e pós TAPE

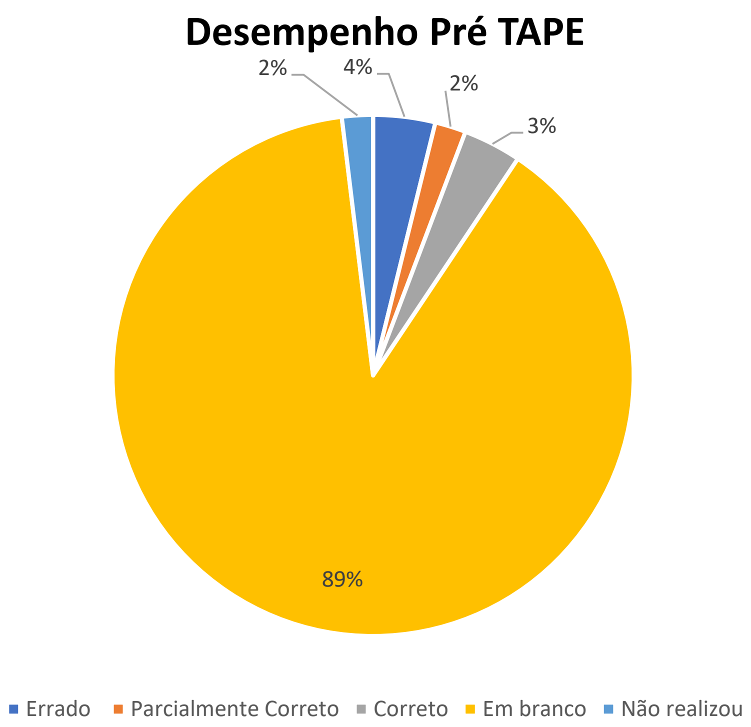


Fonte: Autoria própria (2022).

5.16.2 COMPARATIVO ENTRE TODOS OS ALUNOS

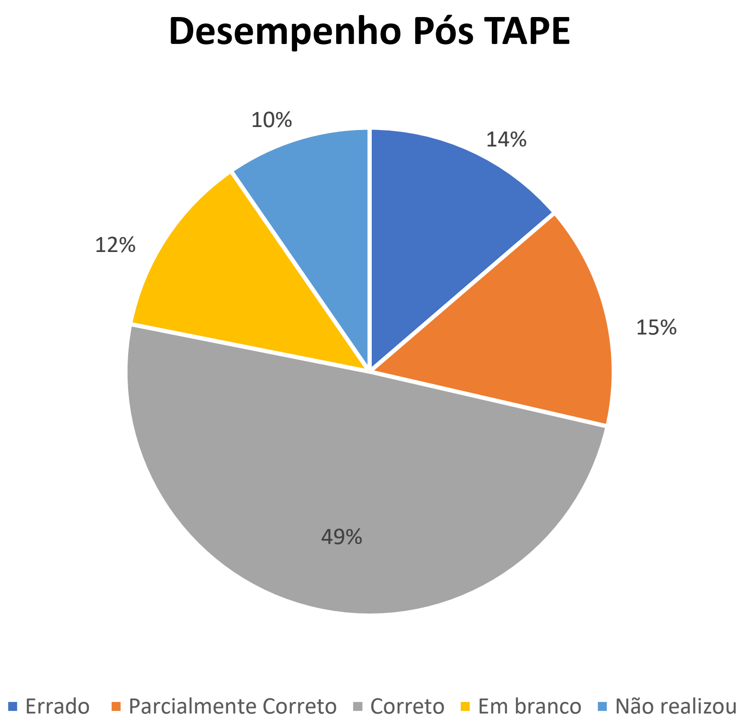
Examinando o desempenho de todos os alunos que participaram das aulas utilizando as TAPE como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem, podemos observar que houve um desempenho significativo na reaplicação da atividade diagnóstica. Os gráficos a seguir apresentam os resultados dos alunos antes e depois da aplicação das TAPE.

Gráfico 9 – Desempenho de todos os alunos na atividade diagnóstica pré TAPE



Fonte: Autoria própria (2022).

Gráfico 10 – Desempenho de todos os alunos na atividade diagnóstica pós TAPE



Fonte: Autoria própria (2022).

Pode-se observar uma evolução significativa nas resoluções e acerto das questões, enquanto que na atividade diagnóstica antes das TAPE houve 89% das questões em branco e um índice de 3% de acerto. Após a realização das tarefas propostas, apenas 12% das questões ficaram em branco, ou seja, houve uma quantidade relevante de alunos que ao menos tentou responder as questões, e um acerto de 49% das questões, um salto considerável no aproveitamento desses alunos, o que indica que a aula através da Análise de Produção Escrita, com a utilização das Tarefas de Análise da Produção escrita pode ser uma alternativa eficiente no ensino de função afim.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa buscou investigar a utilização de Tarefas de Análise da Produção Escrita em Matemática na retomada de conceitos de funções Afim, a partir da Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Além de descrever as tarefas aplicadas em sala de aula, analisou-se o desempenho dos alunos, por meio de uma atividade diagnóstica que foi aplicada antes e depois das aulas conduzidas através da APE.

Ao observar o desempenho de todos os alunos que participaram das aulas, verificou-se uma melhora significativa no desempenho, de 3% de acertos para 49% de respostas corretas (utilizando como base a atividade diagnóstica).

De forma mais detalhada, analisamos o desempenho de dois alunos no decorrer das TAPE, examinando cada uma de suas respostas e verificando a evolução dos mesmos nas tarefas propostas. Os dois alunos participaram de todas as tarefas, obtendo desempenhos próximos as 70% de acertos nas TAPE e uma evolução significativa na atividade diagnóstica, sendo que um respondeu corretamente as oito questões propostas e o outro respondeu corretamente sete das oito questões.

De acordo com o objetivo deste trabalho, podemos apontar que a estratégia Análise da Produção Escrita, com o uso das Tarefas da Análise da Produção Escrita, tem um grande potencial quanto dinâmica de ensino, proporcionando uma aula diferenciada, sendo alternativa eficaz ao modelo tradicional de ensino, que promove participação e aprendizado aos alunos. Podendo ainda ser uma estratégia que pode permitir ao professor identificar déficits de conteúdo, promover retomada de conteúdo, construção de conceitos por parte dos alunos e ainda permite ao professor uma reflexão quanto à sua pratica docente.

Importante destacar que as TAPE são tarefas que exigem do aluno proatividade, devido a necessidade de leitura, interpretação, análise, reflexão, discussão e escrita a respeito de matemática. Esse tipo de tarefa não é habitual, pois muitos alunos veem a aula de matemática como sendo obrigatoriamente de cálculos, e a dinâmica proposta coloca o aluno em uma posição diferente do que ele entende como tradicional.

Assim, para se aplicar esta abordagem (APE com o uso de TAPE), é necessário que o docente esteja preparado para enfrentar algumas mudanças, como é o caso de ter que disponibilizar um maior tempo para a resolução das tarefas, uma maior interação entre os alunos e dar tempo suficiente para que os mesmos explorem a tarefa disponibilizada. Esta dinâmica requer um trabalho de equipe por parte dos alunos e do docente, no qual o papel deste resume-se a intervir e a orientar os estudantes, de maneira a conduzi-los para os objetivos delineados.

Por vezes, as TAPE deixaram evidente que, além de cumprir o objetivo de ensinar (ou retomar/reforçar) um conteúdo, é possível observar nas produções dos alunos algum déficit de conteúdo (como foi o caso das resoluções das equações na TAPE 12), o que permite o professor replanejar ou até mesmo mudar a maneira como conduz suas aulas.

Como pesquisador e professor, esta investigação me fez acreditar mais nas metodologias ativas. É perceptível os inúmeros benefícios para os alunos. O engajamento, a participação nas discussões e nas realizações das tarefas, o envolvimento com o aprendizado, de forma autônoma, proporcionando espaço para criatividade, debate, colaboração entre os alunos, faz com que a aula se torne muito mais atraente. Ficou evidente que proporcionar aos alunos uma aula com uma dinâmica não habitual fez diferença, ouvir dos alunos que a proposta foi bem aceita, que eles entenderam o conteúdo, que participaram dos debates mostrando vontade e interesse e fizeram as tarefas com empenho, me fez entender que como professor devo sempre proporcionar aulas que instiguem os alunos e os coloque em posição ativa. Não é fácil proporcionar um ambiente desses, mas as metodologias ativas, e em especial a APE, mostrou que os alunos se sentem motivados e os resultados são satisfatórios, tanto em termos de aprendizado como de participação dos alunos.

As aulas propostas utilizando como dinâmica a APE, tendo as TAPE como condutoras, passa para os alunos uma responsabilidade maior pelo seu aprendizado, colocando-os como personagens indispensáveis deste processo. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Este ato exige de ambos, professor e aluno, mudanças de atitude e postura durante as aulas, o que, nem sempre, é fácil conseguir, mas que pode ser uma alternativa eficaz ao modelo tradicional de ensino, e mais ainda, como sendo uma opção capaz de prover uma aprendizagem significativa.

Para o futuro, pode-se investigar o uso das TAPE propostas para o objetivo de ensinar funções para estudantes que não tiveram contato com este conteúdo, visto que os estudantes que participaram desta pesquisa já haviam estudado função Afim em algum momento da trajetória escolar.

7. REFERÊNCIAS

ANDRADE, M. et al. **Matemática interligada**: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica / obra coletiva; editora responsável Thais Marcelle de Andrade. -- 1. ed. — São Paulo: Scipione, 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Educação é a Base. Brasília. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base >. Acesso em: 23 jan. 2022.

BRASIL. **PCN+ ensino médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Semtec, 2002.

BOGDAN, R., & BIKLEN, S. (1994). **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora. 1994.

BURIASCO, R. L. C. Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos). **Bolema,** Rio Claro (SP), a. 22, n. 33, 2009, p. 69-96. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil.

CARDOSO, M. A. M. **Tarefas de Análise da Produção Escrita em Matemática: Quatro Histórias da Construção de uma Proposta de Ensino para a Educação de Jovens e Adultos.** 2017. 105f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal Tecnológica do Paraná (UTFPR), Londrina, 2017.

CARDOSO, M. Ap. M; PEREIRA, F. F; DALTO, J.O. **Configurando a análise da produção escrita como estratégia de ensino a partir de uma experiência com o sétimo ano,** ACTIO, Curitiba, v. 3, n. 3, p. 358-377, set. /Dez. 2018.

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. **Task and activity**. In: CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; Otte, M. (Eds.). Perspectives on mathematics education (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel. 1986.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática em Contexto**: função afim e quadrática. Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo: Ática, 2020.

DONEZE, I. S. **A construção de tarefas de análise da produção escrita para ensino e aprendizagem de matemática.** 2019. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina/Cornélio Procópio, Londrina, 2019.

FIGUEIREDO, S. A.;Costa, N. M. L. **Trajetória Hipotética De Aprendizagem E A Compreensão Das Relações Trigonométricas No Ciclo.** XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016.

IEZZI, G. et al. **Matemática:** ciência e aplicações: ensino médio, volume 1 / Gelson lezzi... [et. al]. — 9. ed. — São Paulo: Saraiva, 2016.

MINATO, S. N. **Tarefas de Análise da Produção Escrita para o Ensino de Progressões Geométricas.** 2019. 53f. TCC (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal Tecnológica do Paraná (UTFPR), Londrina, 2019.

PEREIRA, F. F. **Conhecimentos mobilizados por graduandos e professores que ensinam**

Matemática em um curso de formação sobre Tarefas de Análise da Produção Escrita. 2019. 124f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2017, 2019.

PEREIRA, F. F.; DONEZE, I. S. DALTO, J. O. Caracterizando Tarefas de Análise da Produção Escrita por meio do ensino de Equações. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.7, n.14, p.236-255, jul.- dez. 2018.

PEREIRA, F. F.; DALTO J. O. **Tarefas de análise da produção escrita: uma proposta de curso de extensão.** Dissertação de Mestrado (Programa de pós-graduação em Ensino de Matemática PPGMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Londrina, 2019.

PEREIRA, E. R. S. **Tarefas de análise da produção escrita para o ensino de análise combinatória.** 2021. 84f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal Tecnológica do Paraná (UTFPR), Londrina, 2021.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em matemática:** de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. 157f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

SANTOS, E. R.; BURIASCO, R. L. C. **Análise Da Produção Escrita Em Matemática Como Uma Estratégia De Ensino**: Algumas Considerações. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.17, n.1, p.119-136, 2015.

SIMON, M. A (1995). **Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective**. Journal for research in Mathematics Education, 26 (2), 114-145. 1995.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; BURIASCO, R. L. C. de; CIANI, A. B. A avaliação como prática de investigação e análise da produção escrita em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, *[S. l.]*, n. 25, 2012. Disponível em: https://periodicos.puc-campinas.edu.br/reveducacao/article/view/106. Acesso em: 28 mar. 2022.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que Alunos da Escola Básica Mostram Saber por Meio de sua Produção Escrita em Matemática.** 2007. 115f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

APÊNDICE A – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 1

Nome: ___________________________ 3º ano ____ Turma: __________

Tarefa 1

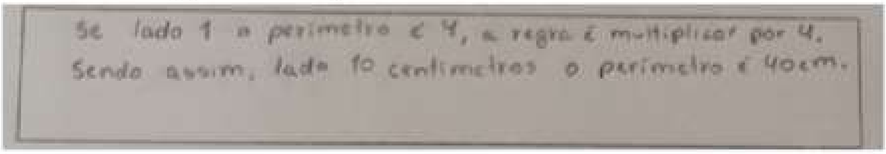
Dois alunos, Carlos e Mara, resolveram corretamente a seguinte questão:

A tabela a seguir relaciona a medida de comprimento do lado de um quadrado (l), e a medida do perímetro (P), ambos em centímetros.

Medida de comprimento do lado	Medida do perímetro
1	4
2	8
3	12

a) Qual a medida do perímetro de um quadrado cujo lado mede 10 cm?

Observe a resolução do Carlos para a letra a:

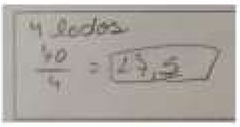


Observe a resolução de Mara para a letra a:

b) Qual a medida do lado de um quadrado cujo perímetro mede 70 cm?

Observe a resolução do Carlos para a letra b:

Observe a resolução de Mara para a letra b:



Após análise das respostas de Carlos e Mara para o problema proposto, responda as seguintes questões:

a) Na situação apresentada, duas grandezas se relacionam. Quais são elas?

b) Qual é a relação de dependência (ou seja, a conexão) entre elas? Uma delas depende da outra? Explique.

c) Descreva uma situação qualquer do seu dia a dia que exista uma relação de dependência entre duas grandezas.

APÊNDICE B – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 2

Nome: ____________________________ 3º ano Turma: __________

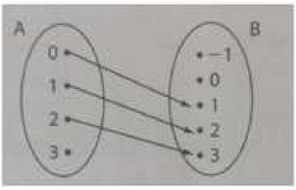
Tarefa 2

Três alunos, Carlos, Mara e Paulo, resolveram corretamente a seguinte questão:

1) considere dois conjuntos, dados por A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3} e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

I. Associar a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y = x + 1$.

x	y
0	1
1	2
2	3



a) Esta relação é função? Por quê?

Observe a resolução do Carlos para a pergunta:

Não é função, pois há um elemento do conjunto domí-nio que não está ligado a nenhum ele-mento do conjunto contra domínio.

Observe a resolução da Mara para a pergunta:

Não, porque os elementos do primeiro conjunto precisam ter um correspondente no segundo conjunto e o número "3" não tem.

Observe a resolução do Paulo para a pergunta:

Não, porque um elemento de A não tem um correspondente no conjunto B.

De acordo com a situação apresentada, responda:

a) Ao analisar a primeira resposta do aluno Carlos e em seguida as outras respostas, como podemos denominar o conjunto A? E o conjunto B?

b) O que há em comum nas justificativas dadas pelos alunos para o fato da relação não ser função?

c) De acordo com as respostas dos 3 alunos, como você define uma função para este caso apresentado?

APÊNDICE C – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 3

Nome: ____________________________ 3º ano Turma: __________

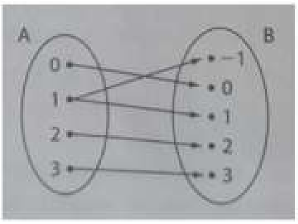
Tarefa 3

Três alunos, Carlos, Mara e Paulo, resolveram corretamente a seguinte questão:

1) Considere dois conjuntos, dados por $A = \{0,1,2,3\}$ e $B = \{-1,0,1,2,3\}$ e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

II. Associar a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y^2 = x^2$.

x	y
0	0
1	+1
1	-1
2	2
3	3



a) Esta relação é função? Por quê?

Observe a resolução do Carlos para a pergunta:

> Não e função, pois há um elemento no conjunto domínio que possui mais de um correspondente no conjunto contra domínio.

Observe a resolução de Mara para a pergunta:

> NÃO É FUNÇÃO PORQUE UM NÚMERO DO CONJUNTO A ESTÁ RELACIONADO COM DOIS NÚMEROS NA COLUNA B.

Observe a resolução do Paulo para a pergunta:

> Não, porque um elemento de A correspondeu a dois elementos do conjunto B.

Agora, responda o que ser pede:

a) O que há em comum nas justificativas dadas pelos alunos para o fato da relação não ser função?

b) Compare esta situação com o caso anterior (item I), em que a justificativa dada neste caso difere da anterior?

c) Para que uma relação entre dois conjuntos seja uma função, esta relação tem que apresentar duas características. Defina função utilizando essas características?

APÊNDICE D – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 4

Nome: ____________________________ 3º ano_____ Turma: __________

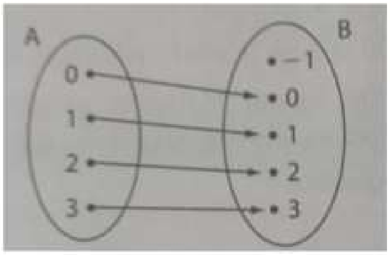
Tarefa 4

Três alunos, Carlos, Mara e Paulo, resolveram corretamente a seguinte questão:

1) Considere dois conjuntos, dados por A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3} e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

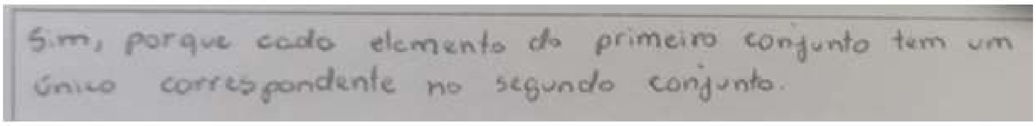
III. Associemos a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: y = x.

x	y
0	0
1	1
2	2
3	3

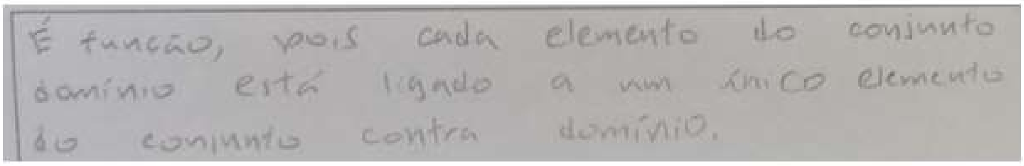


a) É função? Por que?

Observe a resolução do Carlos para a pergunta:


Sim, porque cada elemento do primeiro conjunto tem um único correspondente no segundo conjunto.

Observe a resolução de Mara para a pergunta:


É função, pois cada elemento do conjunto domínio está ligado a um único elemento do conjunto contra domínio.

Observe a resolução do Paulo para a pergunta:


Sim, porque todo elemento do A tem um único correspon-dente no conjunto B.

Analisando as respostas dos alunos, responda:

a) Utilizando a definição de função que você elaborou na tarefa anterior e analisando as respostas dos três alunos acima, o que se pode concluir sobre o elemento -1 (do contradomínio) que não tem um correspondente no conjunto domínio?

APÊNDICE E – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 5

Nome: ___________________________ 3º ano______ Turma: __________

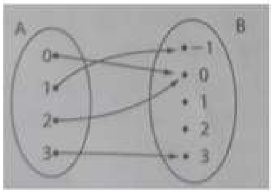
Tarefa 5

Três alunos, Carlos, Mara e Paulo, resolveram corretamente a seguinte questão:

1) Considere dois conjuntos, dados por A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3} e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

IV. Associar a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y = x^2 - 2x$.

x	y
0	0
1	-1
2	0
3	3



a) A relação é função? Por quê?

Observe a resolução do Carlos para a pergunta:

Sim, porque cada elemento do primeiro conjunto tem um único correspondente no segundo conjunto, mesmo que repita esse correspondente.

Observe a resolução da Mara para a pergunta:

É função, pois cada elemento do conjunto domínio está ligado a um único elemento do conjunto contra domínio

Observe a resolução do Paulo para a pergunta:

Sim, porque todo elemento de A tem um único correspondente no conjunto B.

Responda:

a) Com quais elementos do domínio o elemento 0 do contradomínio está relacionado?

b) Utilizando a definição de função que você elaborou na tarefa anterior e analisando as respostas dos três alunos acima, por que o fato do elemento 0 (zero) do conjunto B (contradomínio) estar relacionado com mais de um elemento do domínio não impede com que a relação seja função?

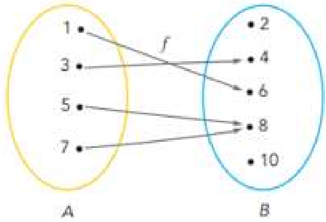
APÊNDICE F – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 6

Nome: ___________________________ 3º ano______ Turma: __________

Tarefa 6

Leticia e Vera, resolveram corretamente a seguinte questão:

1) De acordo com o diagrama a seguir, que representa a função f, responda os itens que se pede.

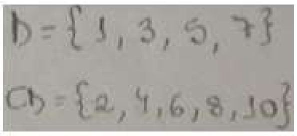


a) Qual é o conjunto domínio e o conjunto contradomínio de f?

Observe a resposta de Leticia para o item a:

$D(f) = \{1, 3, 5, 7\}$ $CD(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Observe a resposta de Vera para o item a:

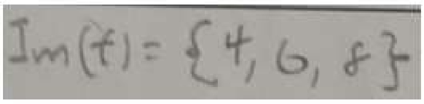


$D = \{1, 3, 5, 7\}$

$CD = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

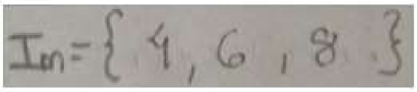
b) Qual é o conjunto imagem de f?

Observe a resposta de Leticia para o item b:



$Im(f) = \{4, 6, 8\}$

Observe a resposta de Vera para o item b:



$Im = \{4, 6, 8\}$

Agora responda:

a) Por que a situação apresentada é uma função?

b) Como você define o conjunto domínio e o conjunto contradomínio de uma função?

c) Como você define o conjunto imagem de uma função?

d) Qual a diferença entre o conjunto contradomínio e o conjunto imagem?

APÊNDICE G – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 7

Nome: ___________________________ 3º ano______ Turma: __________

Tarefa 7

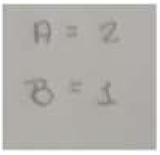
Dois alunos, Carlos e Mara, resolveram corretamente a seguinte questão:

1) vimos (tarefa 1) que a ligação entre os elementos do conjunto domínio e contradomínio pode acontecer através de uma formula (ou regra) matemática. Chamamos essa formula de **lei da função** ou **lei de correspondência**.

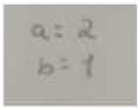
Nas leis de formação das funções abaixo, determine o coeficiente **a** e **b** de cada uma delas.

a) $f(x) = 2x + 1$

Resolução de Carlos para o item **a**:

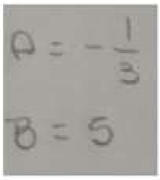


Resolução de Mara para o item **a**:

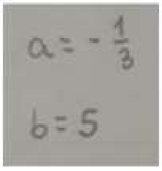


b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 5$

Resolução de Carlos para o item **b**:

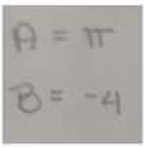


Resolução de Mara para o item **b**:



c) $f(x) = \pi x - 4$

Resolução de Carlos para o item **c:**



Resolução de Mara para o item **c:**

Baseado nas respostas dos alunos acima, responda as seguintes questões:

a) O que você entendeu como "coeficiente a" das leis de formação apresentadas?
b) O que você entendeu como "coeficiente b" das leis de formação apresentadas?
c) Utilizando a mesma estrutura das leis de formação apresentadas, escreva uma lei de formação genérica, utilizando o "a" e o "b" como coeficientes.

APÊNDICE H – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 8

Nome: ___________________________ 3º ano______ Turma: __________

Tarefa 8

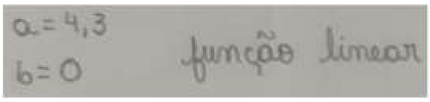
Observe a resolução correta dos alunos Mara e Paulo para a questão a seguir:

1) nas leis de formação das funções abaixo, determine o coeficiente **a** e **b** de cada uma delas e classifique a função em função linear, identidade ou constante.

a) $f(x) = 4{,}3x$

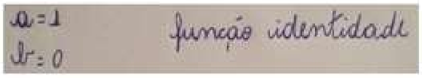
Observe a resolução de Mara para o item a:

Observe a resolução de Paulo para o item a:



b) $f(x) = x$

Observe a resolução de Mara para o item b:



Observe a resolução de Paulo para o item b:

c) $f(x) = 6$

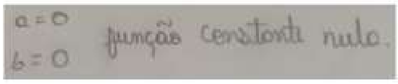
Observe a resolução de Mara para o item c:

Observe a resolução de Paulo para o item c:

d) $f(x) = 0$

Observe a resolução de Mara para o item d:

Observe a resolução de Paulo para o item d:



Com base nas respostas dos alunos acima e em seu conhecimento de função, responda as seguintes questões:

a) São funções afim? Por quê?
b) O que você entendeu como uma função linear?
c) O que você entendeu como uma função identidade?
d) O que você entendeu como uma função constante?
e) O que você entendeu como uma função constante nula?

APÊNDICE I – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 9

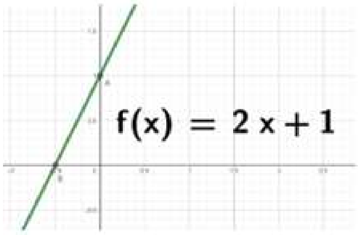
Nome: ___________________________ 3º ano______ Turma: __________

Tarefa 9

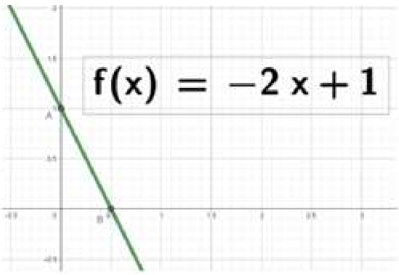
Observe a resolução correta dos alunos Maria e Carlos para a questão a seguir:

A representação gráfica em um plano cartesiano de uma função afim, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ é uma reta. O coeficiente de **x**, indicado pela letra **a**, é chamado de **coeficiente angular** ou **declividade** da reta, e está ligado à inclinação da reta com o eixo das abcissas (eixo x). Assim, existe duas possibilidades para essas retas, serem **crescentes** ou **decrescentes**. Analise **o coeficiente angular** das duas situações abaixo e classifique essas funções em crescentes ou decrescentes.

a) Crescente ou decrescente, por que?



b) Crescente ou decrescente, por que?



Resolução da Maria para a letra a:

Resolução da Maria para a letra b:

Resolução da Carlos para a letra a:

Resolução da Carlos para a letra b:

De acordo com as informações do enunciado e analisando as resoluções dos alunos Maria e Carlos, responda as seguintes questões:

a) Qual objeto geométrico representa a função afim no plano cartesiano?
b) O que é e para que serve o coeficiente angular de uma função afim?
c) Qual a diferença entre as leis de formação das funções da letra a e b?
d) Como se identifica uma função afim crescente ou decrescente a partir de sua lei de formação?

APÊNDICE J – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 10

Nome: ___________________________ 3º ano______ Turma: __________

Tarefa 10

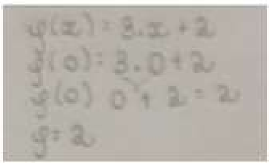
Carlos, Luana e Vitor resolveram corretamente a seguinte questão:

1) O valor numérico de uma função afim f, dada por $f(x) = ax + b$, é tal que, para um determinado valor de x, tem-se um valor para f(x). Por exemplo, para um $x = x_0$, o valor numérico da função é dado por $f(x_o) = ax_o + b$.

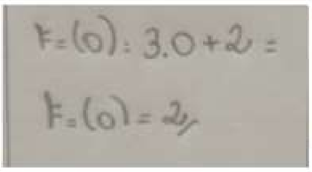
Seja a função afim $f(x) = 3x + 2$

a) Calcule a f(0):

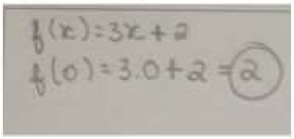
Veja a resolução de Carlos:



Veja a resolução de Luana:

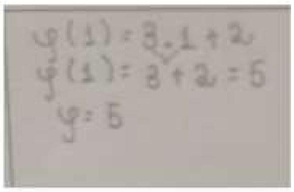


Veja a resolução de Vitor:

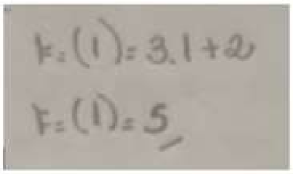


b) Calcule a f(1):

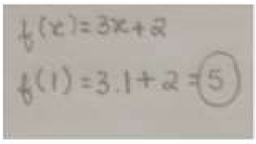
Veja a resolução de Carlos:



Veja a resolução de Luana:

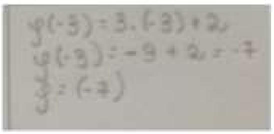


Veja a resolução de Vitor:

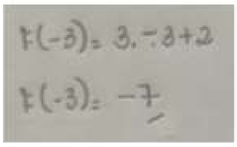


c) Calcule a f(-3):

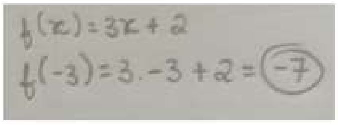
Veja a resolução de Carlos:



Veja a resolução de Luana:



Veja a resolução de Vitor:



Analisando as respostas dos alunos, responda:

a) O que você entendeu como valor numérico de uma função?
b) Como se calcula o valor numérico de uma função?
c) Por que o aluno Carlos escreveu "y" e os outros alunos "f" nas resoluções?

APÊNDICE K – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 11

Nome: ___________________________ 3º ano______ Turma: __________

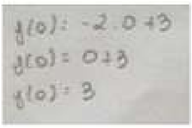
Tarefa 11

Carlos, Luana e Vitor resolveram corretamente a seguinte questão:

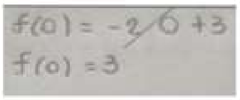
1) Chama-se valor inicial da função o número b (chamado de coeficiente linear da função afim $f(x) = ax + b$), tal que $f(0) = b$. Sejam algumas leis de funções abaixo, determine o valor inicial de cada uma delas.

a) $f(x) = -2x + 3$

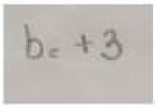
Observe a resolução de Carlos:



Observe a resolução de Luana:

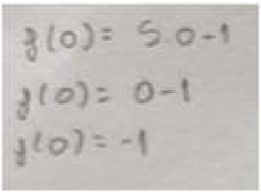


Observe a resolução de Vitor:

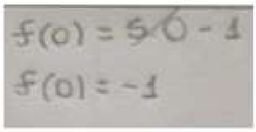


b) $f(x) = 5x - 1$

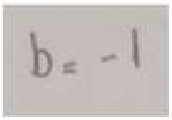
Observe a resolução de Carlos:



Observe a resolução de Luana:

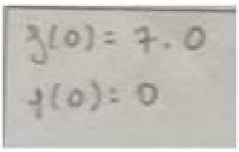


Observe a resolução de Vitor:

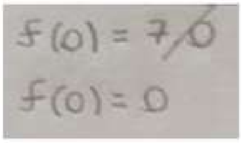


c) $f(x) = 7x$

Observe a resolução de Carlos:



Observe a resolução de Luana:



Observe a resolução de Vitor:

Baseado nas resoluções acima, responda:

a) O que é valor inicial de uma função?
b) Por que nas respostas do Vitor ele escreveu o coeficiente "b" como resposta?
c) Como é chamado o coeficiente "b" da função afim?

APÊNDICE L – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 12

Nome: ___________________________ 3º ano______ Turma: __________

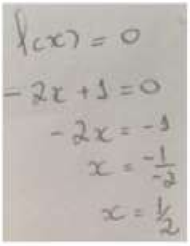
Tarefa 12

Carlos, Luana e Vitor resolveram corretamente a seguinte questão:

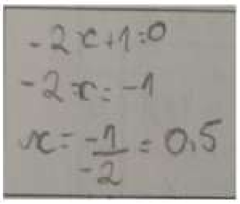
1) **Raiz** ou **zero** de um função afim, dada por $f(x) = ax + b$, com a ≠ 0, o número real "x" tal que f(x) = 0. Sejam algumas leis de funções abaixo, determine a raíz de cada uma delas.

a) $f(x) = -2x + 1$

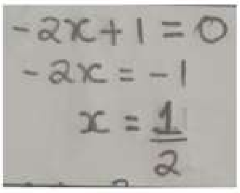
Observe a resolução de Carlos:



Observe a resolução de Luana:

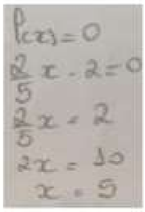


Observe a resolução de Vitor:



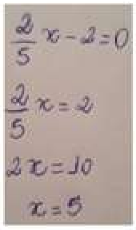
b) $f(x) = \frac{2}{5}x - 2$

Observe a resolução de Carlos:



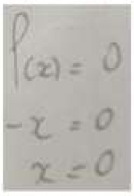
Observe a resolução de Luana:

Observe a resolução de Vitor:

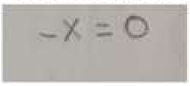


c) $f(x) = -x$

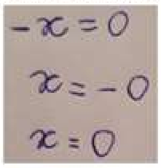
Observe a resolução de Carlos:



Observe a resolução de Luana:



Observe a resolução de Vitor:



Responda as seguintes questões baseada na resolução dos alunos acima:

a) por que nas resoluções apresentadas a lei de formação da função foi igualada a zero?

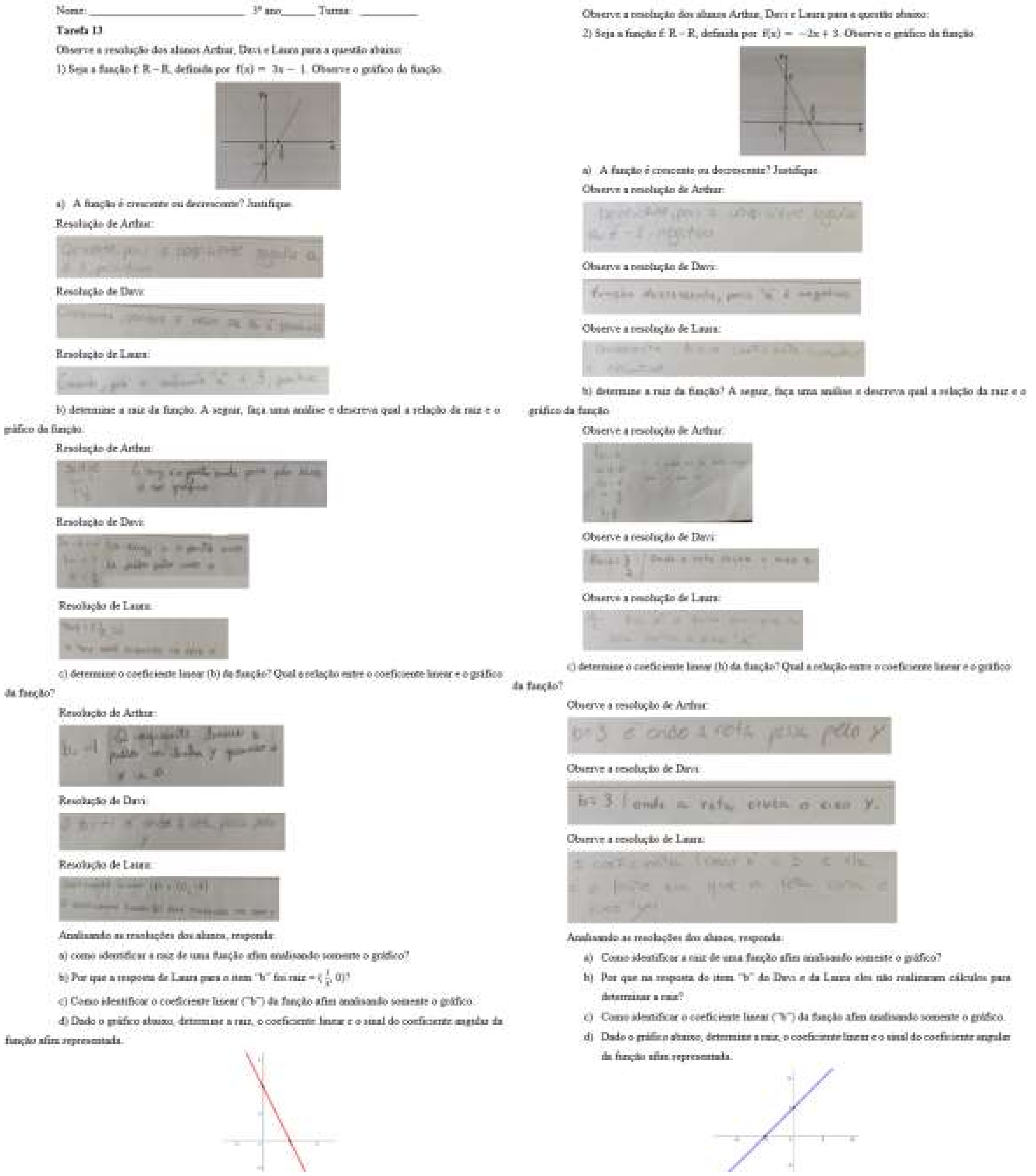
b) O que você entendeu como raiz ou zero de uma função?

c) determine a raiz das seguintes funções:

I. $f(x) = 3x - 12$

II. $f(x) = -2x - 10$

APÊNDICE M – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 13



Nome: ______________________ 3º ano_____ Turma: _________

Tarefa 13

Observe a resolução dos alunos Arthur, Davi e Laura para a questão abaixo:

1) Seja a função f: R – R, definida por $f(x) = 3x - 1$. Observe o gráfico da função.

a) A função é crescente ou decrescente? Justifique.

Resolução de Arthur:

Resolução de Davi:

Resolução de Laura:

b) determine a raiz da função. A seguir, faça uma análise e descreva qual a relação da raiz e o gráfico da função.

Resolução de Arthur:

Resolução de Davi:

Resolução de Laura:

c) determine o coeficiente linear (b) da função? Qual a relação entre o coeficiente linear e o gráfico da função?

Resolução de Arthur:

Resolução de Davi:

Resolução de Laura:

Analisando as resoluções dos alunos, responda:

a) como identificar a raiz de uma função afim analisando somente o gráfico?

b) Por que a resposta de Laura para o item "b" foi raiz = ($\frac{1}{3}$, 0)?

c) Como identificar o coeficiente linear ("b") da função afim analisando somente o gráfico.

d) Dado o gráfico abaixo, determine a raiz, o coeficiente linear e o sinal do coeficiente angular da função afim representada.

Observe a resolução dos alunos Arthur, Davi e Laura para a questão abaixo:

2) Seja a função f: R – R, definida por $f(x) = -2x + 3$. Observe o gráfico da função.

a) A função é crescente ou decrescente? Justifique.

Observe a resolução de Arthur:

Observe a resolução de Davi:

função decrescente, pois 'a' é negativo

Observe a resolução de Laura:

b) determine a raiz da função? A seguir, faça uma análise e descreva qual a relação da raiz e o gráfico da função.

Observe a resolução de Arthur:

Observe a resolução de Davi:

Observe a resolução de Laura:

c) determine o coeficiente linear (b) da função? Qual a relação entre o coeficiente linear e o gráfico da função?

Observe a resolução de Arthur:

b=3 e onde a reta passa pelo y

Observe a resolução de Davi:

b=3 | onde a reta cruza o eixo y.

Observe a resolução de Laura:

Analisando as resoluções dos alunos, responda:

a) Como identificar a raiz de uma função afim analisando somente o gráfico?

b) Por que na resposta do item "b" do Davi e da Laura eles não realizaram cálculos para determinar a raiz?

c) Como identificar o coeficiente linear ("b") da função afim analisando somente o gráfico.

d) Dado o gráfico abaixo, determine a raiz, o coeficiente linear e o sinal do coeficiente angular da função afim representada.

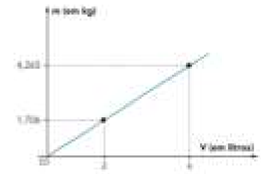
APÊNDICE N – VERSÃO PARA ALUNO DA TAPE 14

Nome: ________________________ 3º ano______ Turma: _________

Tarefa 14

Os Alunos Marcia, Claudia e Otavio resolveram a seguinte questão:

1) O gráfico a seguir mostra a relação entre a medida de massa e a medida de volume do óleo diesel.

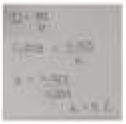


a) determine a medida de densidade (isto é, a razão entre a medida de massa e a medida de volume) desse óleo, em quilogramas por litro.

Observe a resolução da Marcia: Observe a resolução da Claudia: Observe a resolução do Otavio:

b) Calcule o valor do k.

Observe a resolução de Marcia:

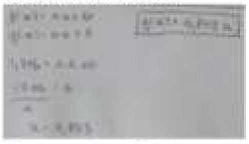


Observe a resolução de Claudia:

Observe a resolução do Otavio:

c) Qual a lei da função que modela essa situação.

Observe a resolução de Marcia:



Observe a resolução de Claudia:

Observe a resolução do Otavio:

Diante das resoluções apresentadas pelos alunos, responda:

a) Vimos na TAPE 1 que uma função é uma relação entre grandezas, quais são as grandezas envolvidas nesta situação?

b) Qual é o conjunto domínio e contradomínio desta função?

c) Por que na resolução da letra "a" os 3 alunos realizaram a divisão do valor do eixo y com o valor do eixo x?

d) Observe a resolução dos alunos para a letra "b" e explique com suas palavras o procedimento adotado por eles.

e) Na letra "c" os três alunos adotaram a estrutura de uma função afim para representar a lei de formação. Por quê?

f) Por que os alunos adotaram o coeficiente linear "b" como sendo zero?

g) Observe a resolução da letra "c", explique como os alunos determinaram o coeficiente angular "a".-

APÊNDICE O – TAREFA 1 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA

Tarefa 1

A tabela a seguir relaciona a medida de comprimento do lado de um quadrado (l), e a medida do perímetro (P), ambos em centímetros.

Medida de comprimento do lado	Medida do perímetro
1	4
2	8
3	12
3,5	14

a) Qual a medida do perímetro de um quadrado cujo lado mede 10 cm?

b) Qual a medida do lado de um quadrado cujo perímetro mede 70 cm?

c) Qual a relação existente entre a medida do lado e o perímetro do quadrado? Represente esta relação para um quadrado de lado com uma medida qualquer.

d) Ao analisar a relação entre o lado e o perímetro do quadrado, essas grandezas possuem dependência (ou seja, existe uma conexão entre elas)?

APÊNDICE P – TAREFA 2 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA

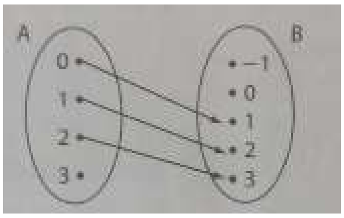
Tarefa 2

Observe as relações abaixo e em seguida responda o que se pede.

Considere dois conjuntos, dados por A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3} e algumas relações entre os elementos do conjunto A, denominados por x, e elementos do conjunto B, denominados por y.

1) Associar a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y = x + 1$.

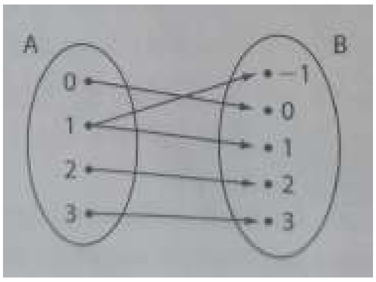
x	y
0	1
1	2
2	3



É função? Por que?

2) Associar a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y^2 = x^2$.

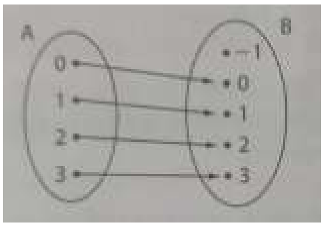
x	y
0	0
1	+1
1	-1
2	2
3	3



É função? Por que?

3) Associemos a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y = x$.

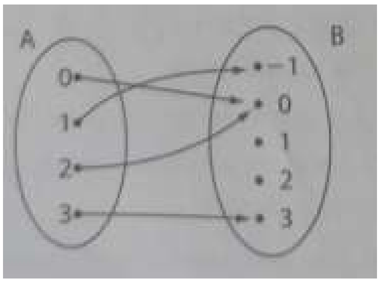
x	y
0	0
1	1
2	2
3	3



É função? Por que?

4) Associar a cada elemento de A, o elemento de B, usando a seguinte lei de formação: $y = x^2 - 2x$.

x	y
0	0
1	-1
2	0
3	3

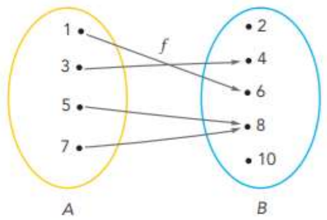


É função? Por que?

APÊNDICE Q – TAREFA 3 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA

Tarefa 3

De acordo com o diagrama a seguir, que representa a função f, responda os itens que se pede.



a) Qual é o domínio e o contradomínio de f?

b) Qual é o conjunto imagem de f?

c) Qual o valor da função quando x=3, ou seja, f(3)?

d) Qual o valor de x quando a f = 6?

e) Existem elementos do contradomínio de f (CD(f)) que não são elementos de imagem de f (Im(f))? Se sim, quais são eles?

f) Existe algum elemento do domínio de f (D(f)) que está relacionado pela função f a mais de um elemento de contradomínio de f (CD(f))? Qual é esse elemento?

g) Existe algum elemento de imagem de f (Im(f)) que é imagem de mais de um elemento de domínio de f (D(f))? Se sim, qual é esse elemento?

APÊNDICE R – TAREFA 4 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA

Tarefa 4

Nas leis de formação das funções abaixo, determine o coeficiente **a** e **b** de cada uma delas e, quando esses coeficientes forem igual a zero, classifique a função em função linear ou constante.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = \pi x - 4$

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 5$

d) $f(x) = 4{,}3x$

e) $f(x) = 6$

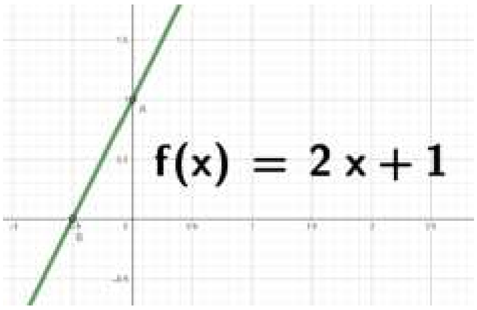
f) $f(x) = 0$

APÊNDICE R – TAREFA 4 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA

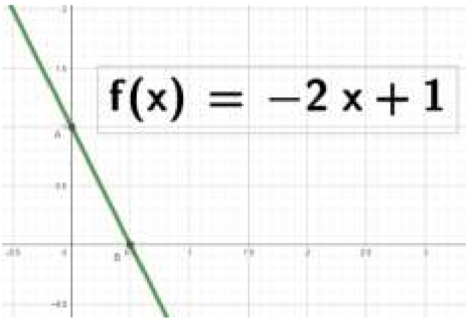
Tarefa 5

A representação gráfica de uma função afim, f: R – R, dada por f(x) = ax + b, com a≠0 é uma reta. O coeficiente de **x**, indicado pela letra **a**, é chamado de **coeficiente angular** ou **declividade** da reta, e está ligado à inclinação da reta com o eixo das abcissas (eixo x). Assim, existe duas possibilidades para essas retas, serem **crescentes** ou **decrescentes**. Analise **o coeficiente angular** das duas situações abaixo e classifique essas funções em crescentes ou decrescentes. Qual conclusão chegou?

a) Crescente ou decrescente, por que?



b) Crescente ou decrescente, por que?



c) Conclusão.

APÊNDICE T – TAREFA 6 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA

Tarefa 6

O valor numérico de uma função afim f, dada por $f(x) = ax + b$, é tal que, para um determinado valor de x, tem-se um valor para f(x). Por exemplo, para um $x = x_0$, o valor numérico da função é dado por $f(x_o) = ax_o + b$.

I. Seja a função afim $f(x) = 3x + 2$, determine o valor numérico para:

   a. f(0)
   b. f(1)
   c. f(-3)
   d. $f(\frac{1}{3})$

II. Chama-se valor inicial da função o número **b** (chamado de **coeficiente linear** da função $f(x) = ax + b$), tal que f(0) = b. Sejam algumas leis de funções abaixo, determine o valor inicial de cada uma delas.

   a. $f(x) = -2x + 3$
   b. $f(x) = 5x - 1$
   c. $f(x) = 7x$

III. **Raiz** ou **zero** de um função afim, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, o número real x tal que f(x) = 0. Sejam algumas leis de funções abaixo, determine a raíz de cada uma delas.

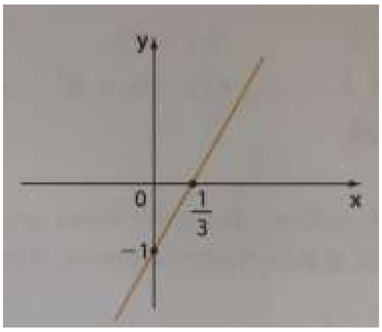
   a. $f(x) = -2x + 1$
   b. $f(x) = \frac{2}{5}x - 2$
   c. $f(x) = -x$

APÊNDICE U – TAREFA 7 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA

Tarefa 7

I. Seja a função f: R – R, definida por $f(x) = 3x - 1$. Observe a tabela e o gráfico da função.

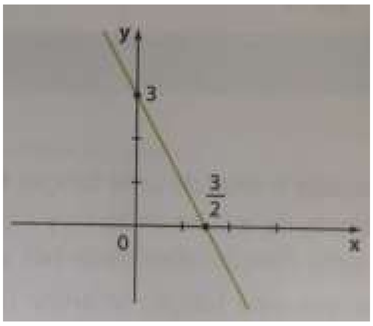
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	-7	-4	-1	2	5	8



a) A função é crescente ou decrescente?
b) Determine a raiz da função? Qual a relação da raiz e o gráfico da função?
c) Determine o coeficiente linear (b) da função? Qual a relação entre o coeficiente linear e o gráfico da função?

II. Seja a função f: R – R, definida por $f(x) = -2x + 3$. Observe a tabela e o gráfico da função.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

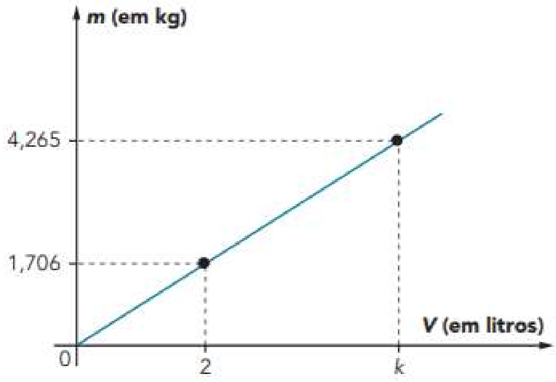


a) A função é crescente ou decrescente?
b) Determine a raiz da função? Qual a relação da raiz e o gráfico da função?
c) Determine o coeficiente linear (b) da função? Qual a relação entre o coeficiente linear e o gráfico da função?

APÊNDICE V – TAREFA 8 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA

Tarefa 8

O gráfico a seguir mostra a relação entre a medida de massa e a medida de volume do óleo diesel.



a) Determine a medida de densidade (isto é, a razão entre a medida de massa e a medida de volume) desse óleo, em quilogramas por litro.

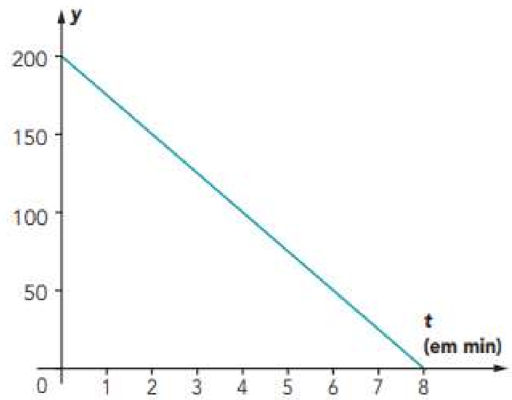
b) Calcule o valor do k.

c) Qual a lei da função que modela essa situação.

APÊNDICE W – TAREFA 9 – COLETA DE PRODUÇÃO ESCRITA

Tarefa 9

Um estabelecimento em situação de emergência retira de maneira organizada todos os convidados em segurança, usando uma única saída de emergência, em apenas 8 minutos. O gráfico a seguir representa a quantidade de pessoas dentro do estabelecimento (y) em função da medida de intervalo de tempo (t), em minutos.



a) Quantas pessoas ainda estavam no interior do estabelecimento após 5 minutos de evacuação?

b) Qual a lei da função que modela essa situação.

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM
Título do Produto/Processo Educacional	SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: GUSTAVO JOSÉ WURMEISTER FERREIRA
	Orientador/Orientadora: JADER OTAVIO DALTO
	Outros (se houver):
Data da Defesa	28/09/2022

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); *L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática* (trata da análise e do	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	( ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *<u>Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória</u>.	( ) Local ( ) Regional (X) Nacional ( ) Internacional Justificativa (*obrigatória*): tem abrangência nacional por estar disponível no repositório institucional
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>.	( ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada	( ) Econômica;

*Apenas um item pode ser marcado.	( ) Saúde; (X) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; ( ) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.	(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (X) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. ( ) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
JADER OTAVIO DALTO	UTFPR-CP
MARCELE TAVARES MENDES	UTFPR-LD
ANGELA MARTA PEREIRA DAS DORES SAVIOLI	UEL