UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

STÊNIO ROCHA SILVA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS SOB DIFERENTES PERSPECTIVAS: UM OLHAR PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

TOLEDO, PR, BRASIL

2022

STÊNIO ROCHA SILVA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS SOB DIFERENTES PERSPECTIVAS: UM OLHAR PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Solving Mathematical Problems from different perspectives: a look at solving geometric problems

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Antunes

TOLEDO, PR, BRASIL
2022

STÊNIO ROCHA SILVA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS SOB DIFERENTES PERSPECTIVAS: UM OLHAR PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 21/10/2022

Leandro Antunes
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanessa Largo Andrade
Doutora
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Jackson Itikawa
Doutor
Universidade Federal de Rondônia

TOLEDO, PR, BRASIL

2022

Dedico este trabalho a minha mãe, Maria de Lourdes Rocha Silva (*In Memorian*) e a meu pai, Severino Antônio Silva.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Leandro Antunes, pela paciência, pelas inúmeras contribuições, pelo incentivo.

À Profa. Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia, pelas valiosas contribuições iniciais e participação nas primeiras etapas deste trabalho.

Aos meus colegas do PROFMAT, cada um a sua maneira, pelas contribuições pessoais, acadêmicas e pelo harmonioso convívio.

Aos professores do mestrado, PROFMAT, pelo valioso e estimado aprendizado.

À minha esposa Ivonete Maria Pioresan e minha filha Helena Pioresan Rocha Silva, pela presença, incentivo e solidariedade em todas as fases desta jornada.

Aos meus filhos Guilherme Costa Silva e Gustavo Costa Silva pelo apoio e incentivo, constantes.

A todos aqueles que de alguma forma participaram e contribuíram para que este trabalho fosse possível.

All human knowledge begins with intuitions, thence passes to concepts and ends with ideas. (KANT, 1998)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é buscar estratégias, metodologias, técnicas, entre outros elementos, visando o ensino e aprendizagem através da resolução de problemas geométricos. A revisão bibliográfica orientou-se no trabalho de matemáticos envolvidos diretamente com a resolução de problemas e que participaram e contribuíram em Círculos Matemáticos ou Olimpíadas de Matemática, resgatando suas experiências e experimentos. A pesquisa apresentou uma resolução de problemas recheada de técnicas lógicas e pontuadas pelo rigor matemático, por um lado, mas revelou forte contribuição de estratégias psicológicas, atitudes mentais, intuitivas e inventivas. Propõe-se um conjunto de atividades como ferramenta inicial no sentido de que professores descubram e incentivem seus alunos a encontrarem seus potenciais mentais para resolução de problemas.

Palavras-chave: problemas; lógica; heurística; intuição; analogia.

ABSTRACT

The objective of this work is to look for strategies, methodologies, techniques, among other elements, aiming at teaching and learning through the resolution of geometric problems. The literature review was guided by the work of mathematicians directly involved with problem solving and who participated and contributed in Mathematical Circles or Mathematics Olympiads, rescuing their experiences and experiments. The research presented a problem solving filled with logical techniques and punctuated by mathematical rigor, on the one hand, but revealed a strong contribution of psychological strategies, mental attitudes, intuitive and inventive. A set of activities are proposed as an initial tool for teachers to discover and encourage their students to find their mental potential for problem solving.

Keywords: problems; logic; heuristic; intuition; analogy.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao ser humano, desde os primórdios, por sobrevivência e para seu próprio desenvolvimento foi imposto que resolvesse inúmeros problemas, e o fato da humanidade ter chegado até os dias atuais sugere ter tido algum sucesso neste processo.

No dia a dia enfrentam-se problemas de toda natureza, sociais, financeiros, comportamentais, de relacionamento, de transporte, operacionais, de saúde, entre muitos outros, que são solucionados conforme o entendimento de cada ser humano apesar de oferecerem, cada um deles, um conjunto imenso de dificuldades.

O aprendizado, no que concerne a resolução dos problemas da vida das pessoas ocorre por experiência, erro e acerto, por imitação, entre outras, e envolve emoções e atitudes diversas.

Na busca pela solução de um problema os matemáticos utilizam diversas abordagens lógicas meticulosas e criativas, muita abstração recheada com atitudes intuitivas, inventivas, ousadas, entre outras, contudo, ao final é o rigor da prova e da determinação lógica que confere o caminho verdadeiro.

Matemáticos, professores, estudantes, leigos, são seres humanos, como descreveu o filósofo David Hume (2003,p.23), são racionais, sociais, ativos e disponíveis a uma variada gama de exigências da vida. Mas parece, na visão de Hume, que a natureza estabeleceu uma espécie de exigência velada para que o ser humano não se ocupasse das inclinações de forma excessiva, a ponto de impedir que desfrute das demais. Para ele a pluralidade nas inclinações humanas é naturalmente desejável.

Ocorre, ao pensamento de Hume, que o ensino seja na verdade a busca, em cada ser humano daquilo que melhor se enquadra internamente no conjunto de inclinações disponíveis e principalmente o auxílio para auto-descoberta, como cada ser humano entende o mundo a sua volta. Um difícil papel a ser desenvolvido por um ser humano chamado, *professor*.

A diferença entre o trabalho de um professor, um aluno, resolvendo um problema de geometria ou álgebra é análogo a um trabalho de invenção de um matemático. A diferença está no grau e nível.

A resolução de problemas tem sido instituída no ensino como uma estratégia através da qual busca-se o aprendizado da Matemática e de outras áreas do conhecimento. É claro que os problemas matemáticos a serem desenvolvidos, no aprendizado da matemática, não são técnicos e elementares o suficiente para serem comparados aos problemas enfrentados pelos matemáticos em seus desafios. O ensino e aprendizado, como forma de fixar conteúdos, vem aplicando a exercitação através da resolução de problemas e tem sido praticado principalmente na Matemática. É interessante, inicialmente, definir **problema**, de forma a estabelecer melhor entendimento sobre um dos elementos que é base deste trabalho.

Segundo o mini dicionário Aurélio, problema é uma *"questão matemática proposta para que se lhe dê solução"* (FERREIRA, 2008).

Já para Kantowski (1980 apud SERRAZINA, 2017, p.58), *"um problema é uma situação com que uma pessoa se depara e para a realização da qual não tem um procedimento ou algoritmo que conduza à sua solução"*. Observa-se que há uma situação inesperada logo que surge uma situação-problema, como na visão de Krulik e Rudnik (1993 apud SERRAZINA, 2017, p.58) para os quais, *"problema é uma situação, quantitativa ou outra, com que se confronta um indivíduo ou grupo, na procura de uma solução, para a qual não tem prontamente resposta"*. Estes autores ainda distinguem *questão*[1], *exercício*[2] e *problema*[3] Paul Zeitz (2021,p.17), define exercício e problema da seguinte forma. *"An excercise is a question that you know to resolve immediately"*[4], *"A problem demands much thought and resourcefulness before the right approach is found"*[5].

O tema deste trabalho é a resolução de problemas matemáticos e está contido num universo absurdamente gigantesco o que levou à delimitação para a geometria, a mais poderosa forma do pensamento humano, face a visualização e a intuição visual e a riqueza das noções intuitivas como a congruência, a simetria, elemento poderoso para o raciocínio lógico e heurístico (STEWART, 1995, p.8).

A motivação, está no fato desta atividade ser companheira do ser humano desde sua aparição sobre a face da Terra até a atualidade, o infindável número de estratégias a disposição para sua operacionalização e a desafiadora tarefa de ajudar as pessoas a descobrirem suas habilidades para desenvolvê-las. Há porém, segundo Schroeder e Lester (1980, p.32 apud MORAIS; ONUCHIC, 2014, p.29), três abordagens de ensino sobre a resolução de problemas :

- Ensinar sobre resolução de problemas;
- Ensinar para resolução de problemas;
- Ensinar via resolução de problemas.

A primeira abordagem está relacionada ao processo de resolução de problemas propriamente dito. A segunda abordagem utiliza a resolução como forma de ensinar matemática e por último o propósito é aprender matemática e fazer matemática.

Esta dissertação está voltada a uma investigação sobre o processo de resolução de problemas matemáticos, com foco nos geométricos, sua estrutura metodológica, mecanismos, técnicas, envolvimento e ações dos sujeitos.

Considerando o processo de resolução de problemas matemáticos sob a ótica geométrica e considerando os indivíduos envolvidos neste processo, o professor e o aluno, como resolvedores de problemas, e ainda levando-se em conta que faz-se necessário instrumentalizar

[1] Uma situação que apela à capacidade de memória.
[2] Uma situação em que é necessário treinar ou reforçar algoritmos já aprendidos.
[3] Onde é necessário raciocinar e sintetizar o que foi aprendido.
[4] Um exercício é uma questão que você sabe resolver imediatamente (tradução nossa).
[5] Um problema exige mais reflexão e engenhosidade antes da abordagem correta ser encontrada (tradução nossa).

o primeiro, tem-se a questão de pesquisa: Como estão apresentadas as diferentes perspectivas dos métodos de resolução de problemas matemáticos, mais especificamente, de problemas geométricos?

Assim, para responder ao questionamento de investigação, relaciona-se alguns objetivos: realização de um levantamento bibliográfico de autores que abordam sobre métodos de resolução de problemas; seleção e descrição de alguns métodos; identificação de mecanismos de raciocínio lógicos, dedutíveis, indutivos, entre outros; identificação de mecanismos intuitivos, inventivos, baseados na analogia, heurística e as atitudes mentais, psicológicas; contextualização destes elementos para que os professores possam orientar seus alunos a descobrirem suas potencialidades na resolução de problemas, e produção de atividades de forma a permitir, aos professores, instrumentos necessários ao entendimento e operacionalização no processo de resolução de problemas.

2 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS.

A pesquisa sobre o processo de resolução de problemas matemáticos, mais especificamente, os geométricos, tem cunho qualitativo e obedece a critérios de coleta específicos.

Em primeiro lugar, quanto aos autores das obras pesquisadas, deu-se preferência para professores, educadores e pesquisadores que possuem ou possuíram contribuição sobre o tema resolução de problemas matemáticos. Em segundo lugar, a busca por autores se ateve também à experiência em eventos como as Olimpíadas de Matemática, Círculos Matemáticos ou assemelhados, tanto na participação como na organização dos mesmos, em algum momento de suas vidas.

Neste contexto é dirigida a busca por contribuições específicas de cada autor ou por ele relatada, métodos, estratégias, ideias correlacionadas à resolução de problemas, percepções ou sistematizações sobre o processo de resolução de problemas geométricos. As obras consultadas, de uma maneira geral, permitiram o acesso a outros autores por citações específicas relativas ao tema, resumos biográficos, entre outros.

Um item importante no processo de busca desenvolvido se refere à maneira como o autor se comporta durante a resolução de um problema, se sua comunicação é estabelecida numa forma dialogada com o leitor de sua obra ou através de uma estratégia diferente. Importa também os problemas apresentados pelo autor, com o objetivo de propor ou avaliar métodos de resolução, estratégias de tratamento, mecanismos específicos de abordagem. Finalmente, para que público o autor tratou a resolução de problemas matemáticos.

George Polya é a principal referência como educador matemático e como pesquisador sobre o tema resolução de problemas matemáticos. A resolução de problemas é dividida entre o antes e o depois dele. Não será possível tratar este tema sem entender as ideias e as contribuições deste professor cuja obra esta direcionada aos professores. (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p.23).

Hellmeister (2013) dedicou as páginas iniciais de seu livro, *Geometria em Sala de Aula*, a um matemático americano, Elisha S. Loomis, que reuniu mais de três centenas de demonstrações do teorema de Pitágoras, apresentando e comentando algumas delas. O trabalho de Loomis tem enorme correlação com o tema resolução de problemas. Este matemático americano, dedicou-se a resolução de problemas geométricos e publicou dois livros: Loomis (1901) escreveu sobre como atacar um problema geométrico apresentando princípios e técnicas, e reuniu mais de três centenas de provas do teorema de Pitágoras, o que importa numa enorme contribuição para o resolução de problemas (LOOMIS, 1968).

Terence Tao é o menino prodígio que escreveu sobre resolução de problema com apenas 15 anos e transformou-se num dos maiores matemáticos da atualidade. Ele abordou o tema resolução de problemas de forma inquisitiva e eloquente, construindo soluções efetivas e criativas de uma maneira muito pessoal, o tempo todo questionando-se, algo que vale a pena ser imitado.

Abordando os aspectos psicológicos e inventivos do processo de resolução de problemas matemáticos, Paul Zeitz oferece uma abordagem ampla, educativa, que precisa ser entendida por todos aqueles envolvidos neste tema, como ele mesmo expressa: interessados, professores e alunos. O professor Zeitz esteve envolvido com as Olimpíadas de Matemática americanas tendo vencido a Olimpíada Internacional, na Alemanha Oriental, participando pelos EUA. Sua abordagem tem como característica importante para a resolução de problemas a ênfase nas estratégias e táticas psicológicas necessárias a este processo, apresentadas em seu livro (ZEITZ, 2021).

A escola russa foi alvo de busca para instrumentalizar este trabalho pela tradição matemática e envolvimento nos círculos matemáticos. Com foco em geometria no processo de resolução de problemas não foi difícil chegar até os professores, V. Gusev, V. Litvinenko e A. Mordkovich, num trabalho em que apresentaram um volume considerável de problemas geométricos (cerca de mil problemas), nos diversos segmentos da geometria plana.

Alfred S. Posamentier e Charles T. Salkind foram escolhidos pelo trabalho que ambos publicaram *Challenging Problems in Geometry*, onde foram apresentados um vasto número de problemas geométricos comentados, uma curta mas significativa orientação na preparação para resolução de problemas voltado para professores, alunos e interessados. Alfred S. Posamentier em parceria com Stephen Krulik publicaram a obra, *A arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática*, que instrumentaliza o professor na busca de elementos motivantes para suas aulas de matemática.

Há muitas contribuições para o processo de resolução de problemas e muita experiência entre os matemáticos, filósofos, professores e pesquisadores. Muitos se manifestaram em livros e trabalhos buscando o aprendizado da resolução de problemas. Ao resolverem seus problemas os matemáticos deixaram à mostra suas técnicas, suas estratégias e abordagens. Diante de tantas experiências como reuni-las e integrá-las, visando estabelecer um conjunto de técnicas baseadas na lógica, juntamente com atitudes mentais, processos heurísticos.

Este estudo procura através do trabalho de pesquisadores, matemáticos, desenvolvedores de métodos para resolução de problemas e envolvidos em atividades onde a resolução de problemas é elementar, como as competições desenvolvidas no mundo matemático, dentre os quais destacam-se as olimpíadas de matemática e os círculos matemáticos, os mecanismos que são a base deste processo.

O objetivo é a identificação dos mecanismos de raciocínio lógico, dedutível, indutivo, entre outros, os mecanismos intuitivos, inventivos, baseados na analogia, heurística e as atitudes mentais, psicológicas; situar estes elementos para que os professores possam orientar seus alunos a descobrirem suas potencialidades na resolução de problemas, e produzir um conjunto de atividades que permitam inicialmente, experimentar e explorar este universo de mecanismos em sala de aula.

Dos autores pesquisados a sistematização do processo de resolução de problemas ficou com George Polya, de forma geral, ampla, educativa, eloquente e particularmente motivante, deixando a marca da heurística inerente ao mesmo. Elisha Loomis e Terence Tao, enriqueceram o processo com sugestões, recomendações e muitas técnicas e estratégias apresentadas em exemplo fartamente comentados. Paul Zeitz escreveu um livro onde abordou técnicas em exemplos comentados, avaliou o processo de resolução de problemas sobre os aspectos educacionais e humanos, e deu ênfase aos aspectos psicológicos do mesmo.

É apresentado, para cada um dos autores pesquisados, um resumo biográfico, sua relação e contribuição para o tema resolução de problemas e um ou mais exemplos de suas técnicas diante de problemas escolhidos, dentre os apresentados em suas obras.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO GEORGE POLYA

Na busca de contribuições para resolução de problemas matemáticos e especificamente geométricos, de forma que seja possível reunir métodos, abordagens, experiências, recomendações e aplicações que ofereçam ao professor de matemática, material e ideias para o desenvolvimento de seus alunos, George Polya é referência. Seu trabalho e suas convicções em relação ao tema, como o coração da educação matemática, e por ser considerado o pai da resolução de problemas, lhe confere relevante destaque.

George Polya nasceu em 13 de dezembro de 1887 em Budapeste, Hungria. Suas preferências nos anos iniciais de sua formação escolar eram pelas disciplinas de literatura e biologia. Já no meio do ensino universitário interessou-se por filosofia quando foi alertado por um professor sobre a necessidade de cursar matemática e física, para o melhor entendimento do conteúdo filosófico. Ele foi muito influenciado pelos matemáticos de sua geração como, Leopoldo Fejér, húngaro e Adolf Hurwitz, alemão, este último, quando de sua passagem por Zurich. Segundo O'connor e Robertson (2002) Polya doutorou-se em Matemática, sem supervisão, na Universidade de Budapeste, tratando um problema na teoria da probabilidade geométrica.

Polya reconheceu que a Matemática chegou mais tarde em sua carreira, tendo se dedicado primeiramente a outras ciências, e quando se envolveu matematicamente percebeu que a dificuldade era compreender, diante de uma prova conclusiva, como as pessoas tinham descoberto o resultado (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002).

Sua primeira publicação juntamente com Gábor Szego, foi um livro sobre Análise de Problemas e Teoremas. A ideia era classificar os problemas, não pelo assunto, e sim pelo método de solução, o que de certa forma tornou-se sua contribuição inicial para a solução de problemas matemáticos, tendo sido publicado em 1925.

Polya contribuiria para a Matemática do século vinte de forma extraordinária na teoria das probabilidades, física matemática, geometria, análise combinatória, entre outras. No entanto a grande contribuição foi realizada na educação matemática, que o absorveu mesmo após sua aposentadoria em 1953. No campo da resolução de problemas escreveu, inicialmente em alemão, em Zurich, o livro que recebeu mais tarde uma versão em inglês, tendo sido traduzido para o português como, *A Arte de Resolver Problemas* (POLYA, 2006).

Em 1940, a situação política na Europa levou Polya a migrar para os Estados Unidos onde, após anos de dedicação como educador matemático, faleceu em 07 de setembro de 1985, em Palo Alto, Califórnia.

As secções que se seguem estão baseadas no livro de George Polya em suas versões em português e inglês.(POLYA, 2006)(POLYA, 2004).

3.1 A Arte de Resolver Problemas

O método para resolução de problemas foi proposto por Polya, em *A Arte de Resolver Problemas*, numa sequência de quatro etapas pelas quais deve passar o resolvedor no processo de resolução de um problema:

- A Compreensão do Problema: formulado um problema matemático, é necessário compreendê-lo, familiarizar-se com seus objetos, suas restrições, as verdades apresentadas, o que se deseja descobrir. Polya não se referia apenas a esta categoria de problemas, seu tratamento era mais generalizado.
- O Estabelecimento de um Plano: entendido o problema, é preciso partir para a concepção de um plano de resolução. É o momento de encontrar estratégias que associem o entendimento à solução. É a hora de por para fora as características inventivas do resolvedor, heurísticas.
- A Execução do Plano: concebido o plano, é hora de executá-lo. Esta etapa pode sofrer reavaliações. Pode ser iterativa. Pode levar ao sucesso do encontro com a solução.
- O Exame da Solução Obtida: solucionado o problema é o momento do reexame. Da confirmação do processo de solução. É hora de saber se a solução adotada não poderia ser executada de uma outra forma. É momento de mais um aprendizado com o problema resolvido.

No estabelecimento das fases para resolução de qualquer problema, Polya não se atém apenas as questões matemáticas, mas também dá um direcionamento ao processo de resolução. Ciente do enunciado de um problema, o resolvedor, em primeiro lugar tem uma ocupação: compreendê-lo. Em seguida, após de uma sólida compreensão do mesmo, deve construir um plano. Esta etapa é complexa e envolve conhecimentos, percepções e atitudes. O plano construído e revisado permite orientação para sua execução. A medida que o desenvolvimento da execução do plano revela sinais de progresso, uma solução aguarda o resolvedor, após o que um reexame de todo o processo certamente deverá ser implementado.

Cada uma das fases esta associada a uma lista de indagações, questionamentos que ocorrem na mente do resolvedor, reproduzida na *lista* ou na *nossa lista*, como Polya se refere.

Nesta *lista*, 1 e 2, os questionamentos de um elemento mediador, muito provavelmente o professor ou até o próprio aluno, orientam, constroem opções, respondem aos impasses, oportunizam novas formulações, novas atitudes mentais direcionadas a criação de uma ou mais soluções para o problema, nas quatro fases ou etapas. Tudo precisa ser feito, segundo o tratamento dado por Polya, à *lista*, dentro do universo mental e de aprendizado do aluno, suas capacidades, suas fragilidades, seu potencial inventivo e sua motivação. A *lista*, entretanto, não é um guia, e sim um referencial para possíveis questionamentos orientativos.

Tabela 1 – A Lista: Compreensão e Estabelecimento de um plano.

Compreensão do Problema É preciso compreender o problema	Qual é a incógnita? Quais os dados? Qual a condicionante? É possível satisfazer a condição ou restrição? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?
Estabelecimento de um Plano Encontre a conexão entre os dados e a incógnita É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para resolução.	Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar seu resultado? É possível utilizar seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como ela pode variar? É possível obter dos dados alguma coisa útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

Fonte: (POLYA,2006)

O livro de Polya esta dividido em quatro partes:

- Na Sala de Aula;
- Como Resolver Problemas. Um Diálogo.
- Pequeno Dicionário de Heurística.
- Problemas, Sugestões e Soluções.

Tabela 2 – A Lista: Execução do Plano e Reexame da Solução

Execução do Plano Execute seu Plano	Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
Exame da Solução Obtida Examine a solução obtida	É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte: (POLYA,2006)

3.2 Na Sala de Aula

Na Sala de Aula, o autor trata inicialmente do apoio ao resolvedor, que ele define como o aluno em qualquer fase de sua vida escolar, o mesmo para professor ou alguém interessado em aprender técnicas para o ensino de matemática. Este apoio é dever do professor, ressaltando as dificuldades relativas ao tempo, prática, dedicação e princípios necessários.

O trabalho em sala de aula deve levar o aluno a adquirir máxima experiência pelo trabalho mais independente possível. Cabe ao professor conter cada parcela de ajuda, trabalhar na medida certa, ter como objetivo que o aluno se encontre nas etapas inerentes a resolução do problema. É preciso entender o que se passa na mente do aluno, até onde isso for possível.

Considerando que questionamentos são de uso comum entre resolvedores de problemas, Polya recomenda que naturalmente sejam feitas indagações: O que se desconhece[1]? O que é que se quer? Isto se dará também na medida da solicitação do aluno.

Os questionamentos da *lista* (1 e 2) foram ordenados da forma mais provável que ocorram e são genéricos, cabendo portanto correlação e coerência com o objeto de que se esta tratando. Os questionamentos devem gerar autonomia ao aluno. A medida em que se envolver mais e mais na resolução de problemas é natural que entenda melhor sua maneira de lidar com os questionamentos e até crie seu próprio rol de indagações. E como os problemas não são iguais haverá de entender melhor a necessidade e extensão do interrogatório.

Polya entendia que os objetivos do professor iam além do auxílio ao aluno na resolução de problemas. O desenvolvimento da habilidade de resolver problemas também consta do rol de preocupações do professor. Entretanto, os questionamentos indicam, em última análise, uma possível direção ou até um elemento de apoio; muito há para o resolvedor fazer.

A habilidade na resolução de problemas é algo a ser adquirido, quer por imitação e prática, como aprender a nadar ou andar de bicicleta, imita-se, pratica-se e a independência vem com o tempo. É preciso observar e imitar o que outras pessoas fazem para resolver problemas e meditar como isso se aplica a cada aluno. O professor, com naturalidade deve proporcionar

[1] Foi evitada a palavra *incógnita*, utilizada na versão em Português de *How to solve it*, que na Matemática possui significado mais específico.

isso a seus alunos procurando formas de desenvolver as operações mentais correspondentes as indagações e sugestões da *lista*.

Ainda **Na Sala de Aula**, Polya detalha as quatro fases. Do momento da formulação ou apresentação de um problema até sua resolução, as perspectivas e as atitudes do resolvedor, mudam. Assim, a *lista* agrupou o conjunto de indagações e sugestões em quatro grupos. No primeiro deles é imprescindível que haja uma compreensão clara do problema. No segundo uma inter-relação entre os dados conhecidos e desconhecidos deve levar o resolvedor a estabelecer um plano de resolução. Este plano deve ser executado e em fim examinado e discutido. O grande aprendizado esta no reexame da solução encontrada, para conferir experiência visando o ataque a outros problemas.

Todas as etapas traçadas por Polya são igualmente importantes, mas colocar o pé na estrada sem a compreensão adequada do problema é uma prática que o professor não deverá deixar que seus alunos, por impulsividade, adotem. Se a formulação do problema for textual ou verbal, qualquer que seja a forma de comunicação do mesmo ao resolvedor, ela tem que estar clara para ele. O aluno deve estar em condições de identificar o cenário, o que é desconhecido e se deseja conhecer, os dados, as restrições que envolvem o problema. Se estes elementos estão definidos, algumas indagações da *lista* podem ser dispensadas.

Um importante recurso a ser considerado é o visual. Muitos problemas, mesmos os mais gerais e do cotidiano, podem ser representados através de uma figura, um desenho, um diagrama. Traçar esta figura, adaptá-la ao cenário projetado pelo problema e indicar os dados e elementos desconhecidos, com notação adequada, auxiliará na melhor compreensão do problema.

O elemento mais significativo da resolução de problemas está na concepção da ideia de um plano. Para chegar neste estágio, a fase de compreensão deverá estar totalmente concluída e estruturada e o estabelecimento de um plano estará em condições de ser realizado. Esta fase pode ser efetuada através de caminhos longos e tortuosos, podem haver períodos de hesitação e forte entusiasmo. Nesta fase, a ajuda se fará através da própria experiência do professor e os questionamentos e apresentação de soluções que provoquem o aluno mentalmente. O conhecimento do conteúdo é primordial. Sem ele não será possível a construção de qualquer plano.

"Conhece um problema correlato?" Sugere a *lista*! O reconhecimento de um problema conhecido, análogo, que busca os mesmos elementos desconhecidos ou elementos semelhantes, pode ajudar o aluno no estabelecimento de um plano para resolução de seu problema. As indagações servem para dar partida às ideias, para dar um direcionamento. Pode ocorrer de ter que se lançar mão de uma reformulação do problema, tal como uma generalização ou até uma particularização do mesmo. Pode ser necessário uma redução de suas restrições, simplificar, para melhor compreender ou ativar novas percepções. Transformar o problema em um problema auxiliar sem perder de vista o problema principal em questão. Contudo, ao final, há de se verificar se todos os dados, a condicionante e as restrições foram utilizados.

O estabelecimento de um plano proporciona um roteiro a ser seguido e antes de executá-lo deve-se verificar se o mesmo está claro, coerente. É preciso ser paciente! Cada passo do roteiro deve ser verificado. Mesmo que o aluno não tenha ainda executado o plano e mesmo que o auxílio do professor tenha sido importante, ele deverá estar com a ideia nítida e convencido sobre o roteiro. E sua verificação deve levá-lo, se for o caso, a realização de ajustes deste plano. Em certos casos deve o professor realçar as diferenças entre percepção e demonstração. *"É possível perceber claramente que o passo está correto?É possível demonstrar que o passo está correto?"*

A última fase, o exame da solução, muitas vezes é dispensada pelos alunos. Encontrada uma solução abandona-se o problema, principalmente se possui a resposta do mesmo. Polya entende que perde-se aí um momento importante e instrutivo da resolução de problemas. Reexaminando os passos dados desde o processo de compreensão, estabelecimento do plano e sua execução o aluno poderá, com este hábito, consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoamento de sua capacidade de resolver problemas. Este exame será a oportunidade de utilização das ideias nele implementadas em um próximo problema. A possibilidade de resolução do mesmo problema, seguindo um outro roteiro, deve ser incentivada pelo professor para cada problema formulado criando autonomia e experiência (POLYA, 2006).

3.3 Um Diálogo

Na parte 2 de *A Arte de Resolver Problemas*, Polya revisita os quatro passos estabelecidos de forma dialogada, como que simulando os questionamentos do aluno ao professor ou, como trata-se de um exercício mental, do resolvedor. Neste momento ele toma o lugar do aluno e assume o papel do resolvedor. Polya divide o diálogo em cinco fases: Familiarização, Aperfeiçoamento da Compreensão, Procura da Ideia Proveitosa, Execução do Plano e Retrospecto. Em cada uma dessas fases, o aluno faz os seguintes questionamentos:

- *Por onde começar?*
- *Que posso fazer?*
- *Qual a vantagem em assim proceder?*

Na fase de familiarização, o professor sugere inicialização pelo tratamento de seu enunciado, seus elementos, atenção às figuras, caso existam, buscar clareza e nitidez, mesmo que releituras sejam necessárias, compreender o problema para que suas particularidades se apresentem.

Na fase de Aperfeiçoamento da Compreensão, o professor recomenda retornar ao enunciado, explorá-lo até que esteja bem compreendido e tão bem memorizado que não seja possível esquecê-lo por completo. Como diria o matemático françês Henry Poincaré: "[...] sem o período inicial de preparação, o progresso é improvável"(STEWART, 2014, p.27). Polya sugere ainda separar partes importantes do problema, quando for de demonstração, como a hipótese e a conclusão, ou os elementos desconhecidos, os dados e a condicionante quando for um problema de determinação. Fazer um exame minucioso destas partes inter-relacionando-as, combinando-as para trazer um maior conhecimento dos elementos do problema e uma maior intimidade com o mesmo, despertando o processo intuitivo.

A fase da procura por uma ideia proveitosa deve ocorrer quando todas as possibilidades das fases anteriores tiverem sido esgotadas e o conhecimento do problema deixar a mente receptiva e melhor habilitada para associações. A recomendação do professor é que o aluno perceba a possibilidade de associar seus conhecimentos aos diversos elementos existentes no problema.

Aos questionamentos anteriores, na fase da procura da ideia proveitosa, o aluno acrescenta outros:

- *Que posso perceber?*
- *Como pode uma ideia ser proveitosa?*
- *Que posso fazer com uma ideia incompleta?*
- *Qual a vantagem em tornar a fazer isso?*.

O professor sugere atenção do aluno para perceber, diante do cenário construído, dos elementos identificados, o surgimento de uma ideia que possa indicar um caminho para a resolução do problema, mesmo que seja intuitiva, imediata e plausível, deve ser considerada. Deve o aluno apegar-se a qualquer ideia, por mais incompleta ou insignificante que seja, se houver indicação de progresso, coerência com os elementos do problema, ou mesmo se indicar a existência de um novo panorama a ser trabalhado, uma nova situação a ser examinada. O professor alerta da possibilidade de que uma ideia proveitosa leve o aluno a resolução imediata do problema, como pode passar um bom tempo sem que surja qualquer nova ideia que possa ser considerada.

Na fase de execução do plano o professor remonta a fase anterior, àquela ideia que melhor se direciona para a solução do problema, e quando o aluno estiver seguro, estimula-o a executar de forma detalhada e segura as operações necessárias e viáveis, paulatinamente, efetuando as correções apropriadas. O professor sugere avaliar a complexidade do problema para dividi-lo em grandes e pequenos passos priorizando inicialmente a execução dos primeiros, tornando a correção da resolução fácil de ser analisada.

Normalmente a fase de retrospecto é abandonada pelos alunos, o professor sugere o reexame da resolução, a avaliação corretiva e completa da mesma, a verificação de sua complexidade visando a possibilidade de simplificá-la, encontrar, quem sabe uma outra resolução, um outro caminho baseado em uma ideia surgida anteriormente. Sugere também avaliar o aprendizado obtido com o problema e a busca pela sua resolução, o conjunto de ferramentas utilizadas e possibilidade de utilização das mesmas em outros problemas análogos.

3.4 Dicionário de Heurística

Na terceira parte de *Como Resolver Problemas*, é compreendida por sessenta e sete termos, onde Polya, atribuindo como **Pequeno Dicionário de Heurística**, apresenta seus significados no âmbito do livro, aprofunda questionamentos e fundamentos da primeira parte, apresenta dados históricos, faz comentários mais específicos, instruções sobre a *lista* e apresenta exemplos de resoluções matemáticas e não-matemáticas de forma dialogada, cita autores e suas contribuições como Pappus, Descartes, Leibniz e Bernard Bolzano e suas contribuições para a resolução de problemas.

3.4.1 Heurística

Cabe neste ponto tratar sobre heurística, que foi definida no dicionário de Polya, como o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção, e neste caso, ao estudo dos métodos de resolução.

Não é um termo novo e tem um longo passado que remonta a Pappus de Alexandria, o grande matemático grego, que viveu no século IV, e no Livro VII das suas *Collectiones*, parafraseado por Polya, define heurística:

> A chamada Heurística é, em suma, um corpo especial de doutrina para uso daqueles que, depois de terem estudado os Elementos comuns, desejam adquirir a capacidade de resolver problemas geométricos[2] e somente serve para este fim. [...] Ela ensina os procedimentos da análise e da síntese (PAPPUS apud POLYA, 2006).

Pappus foi o primeiros matemáticos a publicar um estudo sobre os métodos de análise e síntese (SAPUNARU; BRANT, 2018). Polya novamente parafraseou um texto de Pappus sobre análise e síntese:

> Na análise, começamos por aquilo de que se precisa e que admitimos como certo e extraímos consequências disso e consequência das consequências até chegarmos a um ponto que podemos usar como partida da síntese. Porque na análise admitimos que o que precisa ser feito já o foi. Indagamos de qual antecedente poderá ser deduzido o resultado desejado; em seguida, indagamos de novo qual poderá ser o antecedente deste antecedente e assim por diante, até chegarmos finalmente a algo que já conhecemos ou admitimos como verdadeiro. A este procedimento chamamos análise, ou regressão ou raciocínio regressivo.
>
> Mas na síntese, invertendo o processo, partimos do último ponto a que chegamos na análise, daquilo que já sabemos ou admitimos como verdadeiro. Disso deduzimos o que o precedeu na análise e continuamos a fazer deduções até que, percorrendo o mesmo caminho no outro sentido, conseguimos finalmente chegar onde queríamos. A este procedimento chamamos síntese, ou resolução construtiva ou raciocínio progressivo (PAPPUS apud POLYA, 2006).

[2] Como no original.

Visando esclarecer a descrição do método em questão, análise e síntese segundo Pappus, em Polya (1978, p.154-157), apresenta e comenta, a seguinte questão: *Como é possível retirar de um rio exatamente seis litros de água se só se dispõe, para medida da água, de dois recipientes A e B, com nove e quatro litros de capacidade, respectivamente?*

Polya imagina os dois recipientes, A e B, cilíndricos de bases iguais. Estes são os dados iniciais, introduzindo seu método, remetendo-se à **lista** (*Quais são os dados?*). Observa que os recipientes não são graduados, logo não há uma forma direta, através do nível dos mesmos, para inferir sobre o volume de água nos recipientes. Não se sabe como medir seis litros de água. *Se não conseguir resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível obter algo de útil dos dados?*.

Figura 1 – Ilustração dos recipientes hipotéticos do problema

Fonte: (POLYA, 2006, p.154, reprodução nossa).

Inicialmente tem-se dois recipientes (figura 1)[3] vazios! Precisa-se encher um dos recipientes, e só pode ser o recipiente A, com seis litros de água (*Qual a incógnita?*). Atendendo a orientação de Pappus, inicia-se por aquilo que se procura (figura 2) admitindo-se que já foi obtido.

Como chegar a este resultado com os dados que se tem? Usando a estratégia de Pappus, que do antecedente pode-se deduzir o resultado que se deseja?

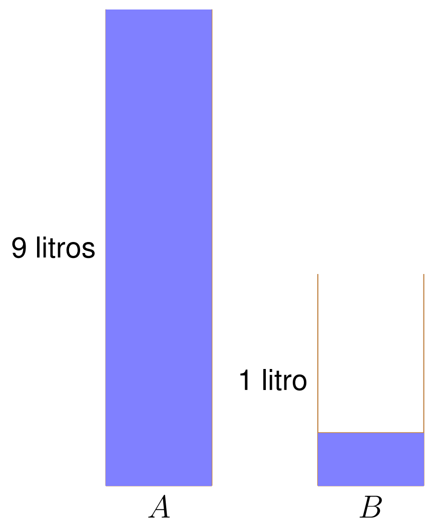
Observa-se que se o recipiente A estiver completamente cheio, nove litros, e o recipiente B estiver com um litro apenas, figura 3, ao transferir-se três litros de A para B tem-se seis litros em A. É o que se deseja! Mas há aqui um outro antecedente: Como obter um litro de água em B? Ilustrado na figura 4. Isto pode ser conseguido se, com o recipiente A cheio de água e o recipiente B vazio, transferir o conteúdo de A para B e esvaziar B, no rio, por duas vezes, o que fará restar em A um litro apenas. Ao final transfere-se a água restante em A para B

[3] Todas as ilustrações deste trabalho foram desenvolvidas ou reproduzidas utilizando o pacote LateX, TikZ

Figura 2 – Ilustrando a situação dos recipientes hipotéticos de acordo com a solução do problema

Fonte: (POLYA, 2006, p.154, reprodução nossa).

Figura 3 – Trabalhando *de trás para frente*



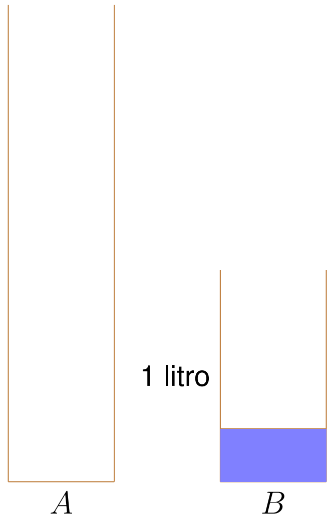
Fonte: (POLYA, 2006, p.155, reprodução nossa).

(ver figura 4). Chega-se a alguma coisa conhecida, segundo Pappus. Partindo do recipiente A cheio, retrocedendo até obter um litro no mesmo, transferindo para B este volume, enchendo A completamente de água de novo e transferindo três litros para B tem-se seis litros em A, que era o desejado.

O arremate fundamental dado por Polya, ao texto de Pappus, torna mais compreensível a heurística definida por ele: *a análise é a invenção e a síntese a execução*. Na análise concebe-se o plano, este é o passo dois da *lista*, e na síntese executa-se o plano, o terceiro passo.

Interessante como a definição de Pappus se encaixa na metodologia de Polya para a resolução de problemas; os passos dois e três, estabelecimento e execução do plano, são a

Figura 4 – Como obter 1 litro de água no recipiente B?



Fonte: (POLYA, 2006, p.156, reprodução nossa).

análise, o espaço da invenção, é a síntese, o espaço para as operações de execução, o trabalho dito braçal, por ele definido. A compreensão e o reexame do problema complementam o método.

Um exemplo de Polya (2006, p.121) para ilustrar os procedimentos de análise e síntese num problema de determinação algébrico, mais conveniente neste caso.

- Determinar o valor de x que satisfaz a equação:

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$$

Pode inicialmente parecer assustador para um principiante, contudo merece uma primeira invenção, que pode parecer uma mágica, um truque, mas foi desenvolvida por uma mente que percebeu uma ideia brilhante.

$$4^x = (2^x)^2$$

$$4^{-x} = (2^x)^{-2}$$

$$y = 2^x$$

O resultado parece vantajoso pois a equação modificou-se e seu tratamento parece mais atrativo.

$$8(y^2 + \frac{1}{y^2}) - 54(y + \frac{1}{y}) + 101 = 0$$

Entretanto, neste ponto o resolvedor não saberia ainda se sua invenção inicial teria sucesso na simplificação da equação. É provável que seu raciocínio heurístico, como expressava

Polya, apontava para o sucesso e ele teria que criar mais uma invenção.

$$z = y + \frac{1}{y}$$

$$z^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$$

$$8z^2 - 54z + 85 = 0$$

A análise termina aqui pois o trabalho agora é resolver a equação do segundo grau em z, o que significa efetuar cálculos utilizando um algoritmo já de domínio dos alunos, em tese. Inicia-se portanto, a síntese.

O estudo da heurística, na visão de Polya, deve considerar os elementos da lógica e os psicológicos. Não se trata de uma questão apenas intelectual, deve aproveitar a experiência de quem escreveu sobre o tema, Pappus, Descartes, Leibniz, entre outros, e não deve deixar de lado a experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dos processos utilizados por outras pessoas para resolvê-los. Impressiona a afirmação categórica de Henry Poincaré: "[...] a lógica consciente é apenas parte do processo criativo [...] (STEWART, 2014, p.26).

Desta forma, o professor tem amparo e referências na sua prática docente e o grupo de alunos, em sala de aula, tem muito a aprender e a ensinar uns aos outros. Um aspecto relacionado à heurística, detalhado no dicionário, é o raciocínio heurístico. Muitos resolvedores não se dão conta de sua existência durante a resolução de um problema, mas ele existe e não tem sido explorado nas salas de aula, segundo Polya.

Não terá ocorrido, durante a resolução de um problema que um encaminhamento de solução surge, provisório, plausível, mas que só será considerado útil ao final do processo? Este é o raciocínio heurístico, em alguns casos necessário para se chegar a solução de um problema. O papel de um argumento heurístico é o de preparar para uma solução, pois possui limitações, posto que é provisório.

Outro aspecto interessante são os sinais de progresso no processo de resolução de problemas que são de natureza heurística, não devem ser ignorados nem adotados como certeza de sucesso. No entanto, qualquer indicador de sucesso conseguido através da orientação seguindo os elementos da **lista** é progresso. Tem-se um plano, por exemplo, percebe-se por onde começar, não se enxerga adiante o desenrolar do caminho a seguir, não há certezas quanto ao funcionamento do plano, mas progride-se na direção inicialmente planejada. A atenção para sinais de progresso são uma constante, sinais raros aumentam a hesitação, contudo sinais frequentes de progresso trazem encorajamento, aumentam a confiança. Este monitoramento heurístico pode salvar uma boa resolução e evitar perda de tempo e frustrações.

O que o dicionário aponta como a heurística moderna é a integração da heurística de Pappus, Descartes, Leibniz e Bolzano com a imensa quantidade de informações existentes nas operações mentais inerentes ao processo solucionados de problemas.

Os atuais métodos heurísticos aplicados aos problemas do mundo moderno, problemas de otimização, se espelham através de algoritmos, na forma como a mãe natureza solucionou problemas específicos, genética, colônia de insetos, metalurgia, entre outros. (MICHALEWICZ; FOGEL, 2013).

3.4.2 Analogia

A palavra analogia, segundo Ferreira (2008), é definida como ponto de semelhança entre coisas diferentes. Na verdade, segundo Polya, uma espécie de similaridade. A palavra analogia tem origem grega e esta relacionada com proporção, algo mais intuitivo geometricamente falando (POLYA, 2014). Um exemplo, o paralelogramo retângulo é análogo a um paralelepípedo retângulo. Lados do paralelogramo e faces do paralelepípedo possuem relações que se identificam.

A analogia permeia as argumentações, os pensamentos, as conclusões costumeiras no dia a dia do ser humano, podendo serem imprecisas e incompletas, por um lado, mas podem tornar-se rigorosas, matematicamente falando, servindo como ferramenta na resolução de problemas, se forem evitadas ambiguidades. É que há diferenças entre a analogia e outras formas de similaridades que são produzidas de acordo com as reais intensões na mente do observador. A analogia estabelecida por um poeta é contemplativa por natureza. Já um naturalista encontra sugestiva analogia entre a mão humana, a pata de um gato ou a nadadeira de uma baleia.

Analogia concorre com dois outros conceitos: generalização e especialização. Na generalização parte-se de uma consideração sobre um dado conjunto de objetos para outros mais amplo, como de triângulos para polígonos com arbitrário número de lados. Já na especialização parte-se de uma consideração sobre um conjunto de objetos para outro menor, como passamos de polígonos para polígonos regulares.

Estes conceitos, de generalização, especialização e percepções de analogias, orientam operações mentais, gerando descobertas que podem auxiliar na resolução de problemas (POLYA, 2014).

3.4.3 Raciocínio Demonstrativo e Plausível

Devido ao fato do estudo da heurística oferecer amplo domínio nos segmentos matemáticos, lógicos, psicológicos, pedagógicos e até filosóficos, Polya, no prefácio da primeira tiragem de *How to solve it*, anunciou que abordaria com maior profundidade o assunto em um livro que estaria em fase de conclusão, o que ele mesmo confirmou na sétima tiragem, com a obra *Mathematics and Plausible Reasoning*.

O conhecimento matemático, a prova matemática é assegurada pelo raciocínio demonstrativo ou dedutível, já as conjecturas, ideias e hipóteses são sustentadas pelo raciocínio plausível ou aceitável ou heurístico. Em outras ciências, para se ter uma ideia, como no direito, a evidência circunstancial está amparada pelo raciocínio plausível, já que se trata de elementos que estão no passado, já ocorreram.

Estas duas espécies de raciocínio são significativamente diferentes. O demonstrativo é constituído de padrões rígidos, codificados e formais. Já o plausível é controverso e provisório. Grande parte das questões do dia a dia dos seres humanos são processadas através de raciocínios plausíveis, para os quais não há uma teoria que estabeleça suas regras.

Em Jaynes (2003,p.101) tem-se uma interessante história que exemplifica a natureza do raciocínio plausível:

> Um policial faz sua ronda, altas horas da noite, no centro de uma cidade, aparentemente deserta: de repente ele ouve sons de um alarme, observa ao longo da rua, e vê uma joalheria com a vidraça quebrada. Então, um indivíduo utilizando máscara, atravessa a vidraça quebrada carregando uma bolsa carregada de joias de alto valor. O policial não hesita diante do que vê concluindo que este indivíduo é um assaltante [4].

A situação em que o policial se encontra não o leva a uma conclusão lógica em virtude das evidências encontradas. Pode haver uma explicação válida que aponte para a não caracterização do indivíduo como assaltante. A evidência, por si só, não garante que o indivíduo seja desonesto. Ele pode ser o dono da loja, e tê-la encontrado com a vidraça quebrada, vindo de uma festa à fantasia, e procurou defender seu patrimônio retirando o que tinha de mais valor.

Entretanto, mesmo não havendo uma dedução lógica no raciocínio do policial, sua conclusão é aceitável. Este é um exemplo de uma espécie de raciocínio para o qual é preciso estar habilitado muito antes do estudo das teorias da matemática. Este tipo de situação ocorre na vida real todos os dias. É quando não se tem informações suficientes para um raciocínio dedutível, e precisa-se decidir de forma imediata o que fazer (JAYNES, 2003).

Este raciocínio é considerado heurístico pois não é rigoroso, é apenas provisório e plausível. Interessante detalhar mais um pouco.

Uma premissa é que se um indivíduo cometeu um ato desonesto, um assalto, deve existir evidências disto. O indivíduo esta sendo acusado não pelo estabelecimento irrefutável dos fatos e sim por uma suspeita, uma conjectura:

A- O homem encontrado pelo policial em frente da joalheria é um assaltante.

A acusação esta sendo colocada por um conjunto de fatos e não por uma conjectura gratuita. A conjectura **A** está sendo amparada pela premissa **B**.

B- O acusado deixava a joalheria pela vitrine quebrada carregando uma bolsa cheia de joias de alto valor.

A outra é que o policial observou várias evidências que relacionam o indivíduo a um ato criminoso.

Portanto, a conclusão: é mais aceitável que o policial esteja diante de um indivíduo que praticou um assalto.

[4] tradução e adaptação nossa.

O raciocínio heurístico do policial estará amparado também em suas experiências anteriores, relativas a estas evidências ou até outras. Sua confiança na decisão inicial dada será maior ou menor em função de sua vivência e poderá variar se algo novo for acrescentado aos fatos.

A matemática é considerada uma ciência demonstrativa, parece consistir de provas apenas, no entanto é preciso achar o teorema matemático antes de prová-lo, encontrar uma forma de prová-lo, combinar observações, perseguir analogias, tentar solucionar e continuar tentando. Assim o resultado do trabalho criativo dos matemáticos, a prova, se desenvolve através do raciocínio demonstrativo, contudo há um determinado grau de invenção, intuição, adivinhação ou predição, ou seja existe a contribuição do raciocínio plausível ou aceitável.

Observa-se que estes dois raciocínios dedutível e heurístico, não são contraditórios, na verdade se completam, é preciso aprender a utilizá-los para o estudo da matemática, por conseguinte na resolução de problemas (POLYA, 2014).

3.4.4 Atitude Indutiva

As ciências lidam com a experiência e grande parte das atividades do ser humano são desenvolvidas através de um conjunto de experiências variadas. Um procedimento científico adequado e usual para lidar com experiências é a indução. Ao formular uma dada conjectura, que pode ser fruto da observação, sua generalização deve ser provada ou não (POLYA, 2014). Como este processo é inerente ao ser humano pode ocorrer, durante o processo de resolução de problemas, no exame de certas crenças, julgamentos impulsivos e admissão de verdades aceitas provisoriamente.

Visando evitar que falsas ilusões comprometam o processo de resolução de problemas é preciso, segundo Polya, assumir uma postura científica através de atitudes ditas indutivas:

1. É preciso estar preparado para revisar crenças já estabelecidas; é preciso ter coragem intelectual para fazê-lo.

2. A mudança de uma crença deve ocorrer por uma causa absolutamente importante; é necessário honestidade intelectual para isso.

3. Uma determinada crença não deve ser mudada gratuitamente, sem uma boa razão; faz-se necessário a contenção do desejo.

A atitude indutiva compõe-se de qualidades morais dignas de cientistas, extremamente adequadas para professores e devem se estender a seus alunos. Orientará de forma conveniente o conjunto de ações heurísticas presentes na resolução de problemas.

3.4.5 Outros itens do Dicionário

Para solucionar um problema, necessita-se conhecer alguma coisa sobre o assunto em questão, sob pena de não ser possível compreender seu enunciado. A concepção da solução de um problema, no primeiro momento, leva em consideração o conteúdo, teoremas e definições e as experiências anteriores na resolução de problemas, ou seja, aquilo que consegue-se extrair da memória. Polya chama a isso mobilização. A concepção entre o primeiro e o último momento neste processo vai ficando cada vez mais ampla.

O processo de resolução de problemas não exige apenas as lembranças de fatos e elementos isolados, e sim a combinação entre eles adaptada ao problema em questão: a organização.

O método de questionar do professor com elementos de orientação e despertar para o problema a ser resolvido tem na *lista*, sugestões genéricas, que podem e devem ser aperfeiçoadas, no entanto, deve ser curta para que as questões sejam repetidas sem artificialismos e as indagações naturais e genéricas. O que se deseja é o desenvolvimento da capacidade do aluno e não somente o aprendizado de uma técnica específica e que este hábito mental contribua para que o aluno encontre de forma autônoma o caminho para resolução de diferentes problemas, criando sua maneira própria de orientação.

Ao professor cabe paciência. Não pode haver procedimentos rígidos nem mecânicos, pois admite-se abordagens diversas, e devem ser aplicados de maneira que as questões apresentadas pelo professor possam ter ocorrido ao próprio aluno, o que sedimentará sua forma de conduzir diante dos problemas e também lhe trará independência.

O Dicionário é rico e apresenta até conselhos de Polya para alunos e professores. Como não se trata de um processo absolutamente lógico, há de se considerar as emoções, as fragilidades, as convicções, a força de vontade e a ansiedade que vão desempenhar papel importante no alcance do objetivo final. Há necessidade também de força de vontade, e provavelmente, ocorrerão decepções.

Nos esportes de alto rendimento estes aspectos mentais e psicológicos são fundamentais para o sucesso, muito além de uma técnica apurada. E eles oscilam, na mente do esportista, a medida que as coisas acontecem na quadra, na arena, na pista, no tabuleiro de xadrez. É preciso se motivar diante de uma situação adversa, difícil. Um tenista mexeria mais as pernas, gritaria um *Come on!*, um maratonista pensaria no próximo quarteirão, no quilômetro 33, 34,[...] O que cabe ao resolvedor de problemas? Persistir, perseverar, concentrar-se mais, dar um tempinho para si mesmo e retornar, ficar no problema mentalmente?

Ingressar por um caminho depois de horas e talvez mais tempo de avaliação e observar que este não atende ao objetivo que almejava, é desalentador. Não encontrar saída para uma determinada dificuldade também. Mas Polya aconselha não atacar um problema se ele não apresenta algum interesse. Decidir-se trabalhar seriamente se o problema parecer instrutivo. Uma vez determinado o objetivo, apegar-se a ele. Se não puder resolver o problema proposto, tentar primeiro resolver um problema correlato, semelhante. Sem desejo, sem vontade e interesse não haverá sucesso. De acordo com Polya, incutir no aluno o desejo de resolver o problema, estimular a curiosidade e o ser humano resolvedor de problemas precisa de tempo para decidir. Ensinar a resolver problemas é educar a vontade.

O Dicionário também é longo e George Polya, incansável nos argumentos, sugestões, comentários que esclarecem a *lista*. Contudo o processo vai muito além dando oportunidade para que ele traga o tema para a forma mais clara possível. Isto se dá pelo uso de provérbios para tornar mais clara as etapas e os passos durante o processo de resolução de problemas pois trata-se de uma atividade humana que envolve as pessoas todos os dias em diversas situações, ao que Polya chama de *problemas práticos*.

Objetivamente falando as pessoas desejam solucionar seus problemas, procurando meios para tal, e alguns tem mais sucesso que outros. Polya encontrou nos provérbios elementos que exprimem estas diferenças como aspectos de bom senso, as estratégias, e os erros habituais que as pessoas cometem. Ele entende que os provérbios não são fontes autorizadas de sabedoria universal, mas proporcionam pitorescos procedimentos heurísticos se correlacionados com as etapas deste processo.

- Diante de um problema formulado a primeira coisa a fazer é compreendê-lo, caso contrário: **Quem entende mal, mal responde.**

- No entanto, não basta compreender o problema é preciso querer uma solução, obstinadamente. **Querer é poder.**

- É preciso conceber um plano através de uma ideia apropriada para chegar a uma solução, é necessário buscá-la. Uma boa ideia é uma sorte, uma inspiração, mas é preciso estar tentando, buscando, procurando uma ideia. **A perseverança é a mãe da boa sorte. Se no princípio não conseguir, continue tentando.**

- Durante o processo de resolução de problemas é preciso variar as tentativas, experimentar novas abordagens. **Experimente todas as chaves do molho.** Adaptar as circunstâncias às tentativas. Se este caminho não esta sendo promissor verifique o que dele é importante **Veleja-se conforme o vento.**

- Não deve-se perder de vista a meta, o objetivo, o que se pede. **O objetivo da pescaria não é lançar o anzol, mas sim apanhar o peixe.**

- A execução do plano deve ocorrer na hora certa, sem precipitações, aguarde sinais de que o momento da apropriado para seguir em frente esta chegando. **Olhe antes de saltar. Prove antes de confiar. Uma demora prudente torna o caminho seguro.** Por outro lado, não hesitar por muito tempo. **Quem quiser navegar sem risco, não se faça ao mar.** Deve haver um convencimento de que o plano atende avaliando cada detalhe. **Degrau a degrau, sobe-se a escada. Faça as coisas gradualmente.**

- O reexame da solução encontrada é importante e instrutivo. **Não pensa bem quem não repensa.**

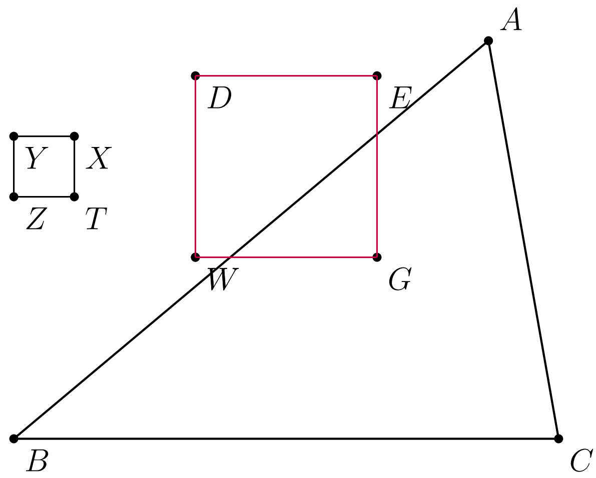
- Um conselho que remonta as indagações da *lista*: Os melhores amigo são : **O que, Porque, Onde, Quando, e Como**. Não acredite em coisa alguma, mas só duvide daquilo que merecer dúvida.

3.5 Primeiro Exemplo.

Há vários exemplos em *Como Resolver Problemas*, e o objetivo da apresentação deles é o de ilustrar os pontos apresentados nas suas duas primeiras partes. Foi escolhido um problema geométrico, por ser mais adequado ao presente trabalho, e o que se deseja é aplicar o método proposto, como uma simulação, utilizando aquilo que for pertinente da *lista*, para um dado problema. Seu enunciado é:

- *Inscrever um quadrado num triângulo dado. Dois vértices do quadrado devem situar-se sobre a base do triângulo e os dois outros vértices sobre os dois outros lados do triângulo, um em cada.*

Figura 5 – A fase da compreensão do problema



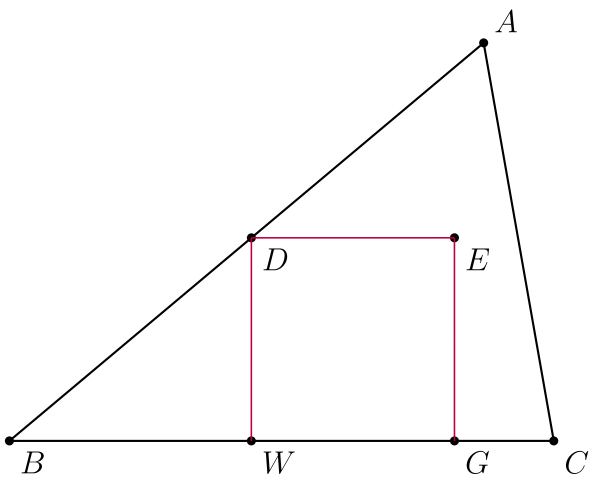
Fonte: Criação e reprodução nossa..

Interessante adotar a resolução desse problema como se professor, aluno, mediador e resolvedor, dialogassem. A etapa é a compreensão do problema proposto, imaginando que existe dificuldade na construção do cenário:
Professor: **O que é desconhecido no problema?**
Comentário: O mediador procura orientar na identificação, dentro dos objetos do problema formulado, aquilo sobre o que nada se tem.
Aluno: Um quadrado.
Professor: **Quais são os dados?**

Aluno: Existe um triângulo apenas.
Comentário: Aqui já caberia o desenho de um triângulo. Isto já traria clareza ao problema.
Professor: **Qual é a condicionante?**
Comentário: O que se deseja dizer com condicionante? Que informação é essa?
Neste caso a exigência é que o quadrado desconhecido seja construído da seguinte forma.
Aluno: Os quatro vértices do quadrado devem situar-se da seguinte forma: dois vértices na base do triângulo e os outros dois em cada um dos outros lados.
Professor: **É possível atender a condicionante?**
Comentário: É possível atender à exigência?
O aluno pode achar que sim, sem muita certeza. Pode ser necessário aguardar um tempo para assimilação.
Professor: **Se não for possível resolver o problema inicialmente. É possível satisfazer uma parte da condicionante?** Comentário: De novo a condicionante. Isto pode não ficar claro, então, melhor esclarecer mais um pouco, contudo fazendo com que o aluno se situe e avance por ele mesmo.
professor: **A condicionante refere-se à todos os vértices do quadrado. Uma parte da condicionante seria atender a um número menor de vértices. Dispõe-se de quantos vértices para o quadrado?**
Aluno: Quatro.
Professor: **Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado por enquanto.**
Comentário: O mediador não pode se precipitar em prol da autonomia do aluno.
Professor: **Que parte da condicionante é fácil de satisfazer?**
Aluno: É fácil traçar um quadrado que possua dois vértices sobre a base do triângulo e um vértice sobre um dos lados.
Professor: **Trace uma figura!**
Comentário: Enfim a figura.
Aluno: Figura 6 traçada.

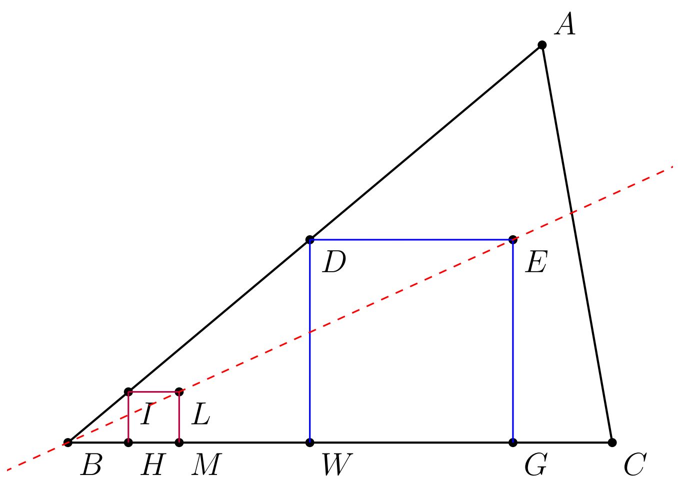
Professor: **Foi mantida uma parte da condicionante e foi deixada uma de parte da mesma foi momentaneamente ignorada? Até que ponto o elemento desconhecido fica determinado?**
Aluno: Com apenas três vértices o quadrado não fica determinado como pede o problema. Ver figura 7.
Comentário: Até aqui, o problema com a condicionante reduzida esta sendo tratado, é preciso avançar. Professor: **Então acrescente um outro quadrado à figura.**
Aluno: Acrescenta novo quadrado, figura 8, mantendo a condicionante simplificada.
Observa-se que o quadrado não fica determinado pela parte da condicionante que foi mantida. Como ele pode variar? Outros quadrados podem ser acrescentados, é impor-

Figura 6 – Testando parte da condicionante do problema



Fonte: (POLYA, 2006, p.19, reprodução nossa).

Figura 7 – Ilustrando a fase de planejamento da solução do problema



Fonte: (POLYA, 2006, p.20, reprodução nossa).

tante experimentar.

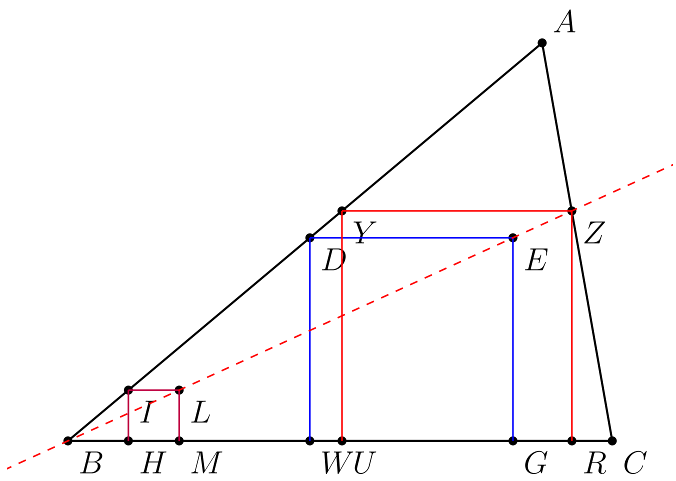
Comentário: É necessário um tempo para o aluno.

Como varia o quarto vértice?

Comentário: O professor, sem atropelo, deve levar o aluno o mais próximo possível da solução, até que o mesmo perceba como varia o quarto vértice do quadrado, figura 1, ligando os vértices dos mesmos, obtendo uma reta, um lugar geométrico, que atende a condição geral do problema.

Assim concluída a solução, deve-se cuidar do seu reexame, da revisão dos passos anteriores, da compreensão completa da solução adotada e conhecimentos adquiridos, da possibilidade da existência de uma outra forma de solução, da prova de que o polígono $URZY$ é um quadrado.

Figura 8 – Ilustrando a solução do problema



Fonte: (POLYA, 2006, p.03, reprodução nossa).

Os questionamentos podem ser absolutamente necessários, podem ocorrer na mente apenas do aluno, podem ser outras as indagações geradas, posto que as atitudes mentais sejam outras.

Interessante concluir com um conjunto de ideias de Polya apresentadas no prefácio de um curso ministrado por ele em Stanford, 1967 (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p.23-p.24).

"Comece por algo que é familiar, ou útil, ou desafiador. Que possua alguma conexão com o mundo ao nosso redor, a partir da perspectiva de alguma aplicação, a partir de uma ideia intuitiva".

Neste trecho ele estabelece de forma bem simples as bases para a adoção de um conteúdo motivador e desafiador, explorando os interesses do aluno, direcionado ao professor e sua prática docente para resolução de problemas.

"Não tenha medo de usar uma linguagem coloquial quando é mais sugestiva do que a terminologia convencional e precisa. Na verdade, não apresente termos técnicos antes que o estudante possa ter a necessidade para eles".

Interessante a preocupação que Polya teve com a linguagem e terminologia indicando mais simplicidade na abordagem deixando para depois o formalismo.

"Não entre muito cedo ou muito em detalhes pesados de uma prova [demonstração]. Dê primeiro uma ideia geral ou apenas o germe intuitivo da prova".

O que se deseja inicialmente, do que se entende do texto acima, é atingir o aprendizado para depois, mergulhar nas asperezas dos problemas e nos detalhes do universo de problemas existentes, como o próximo texto deixa concluir.

> De modo geral, perceber que a forma natural de aprender é aprender por etapas: Primeiro, nós queremos ver um esboço do assunto, para perceber alguma fonte concreta ou algum possível uso. Então, gradualmente, tão cedo quanto nós pudermos ver mais uso e conexões e interesse, ganhamos maior vontade de trabalhar com os dados.

4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO ELISHA LOOMIS

Elisha Loomis nasceu em 1852, em Medina County, Ohio, EUA. Foi filósofo, matemático, educador, autor, genealogista e engenheiro civil. Estudou com dificuldade, no início de sua formação escolar, por ser arrimo de família, mas apesar das dificuldades dedicou-se aos estudos e pesquisa no pouco tempo disponível e finalmente doutorou-se em Matemática pela Universidade de Wooster, em 1888.

Loomis escreveu *Original Investigation or How to Attack an Excercise in Geometry* (LOOMIS, 1901) e *Pythagorean Proposition*. Neste último, compila mais de 350 provas do teorema de Pitágoras, e é considerado seu melhor trabalho; foi este um dos motivos pelo qual sua contribuição foi integrada a este trabalho.

Suas técnicas para resolução de problemas geométricos, direcionadas aos alunos e professores, são uma fonte importante de estudo e pesquisa para o processo de resolução de problemas (LOOMIS, 1901), juntamente com a compilação de provas (LOOMIS, 1968).

Loomis orientou seu trabalho referente à resolução problemas e teoremas geométricos, que ele chama de ataque, através da apresentação de fatos, princípios, métodos e ilustrações, no entendimento de que para o sucesso nesta atividade é preciso saber o que implicam os objetos e proposições, e como cada um deles está relacionado com o grande conjunto das verdades geométricas.

À sua época o ensino da geometria envolvia a demonstração de teoremas e a resolução de problemas, nos moldes do praticado pelos antigos matemáticos gregos, como Pappus (POLYA, 2006).

Um teorema é definido como uma afirmação em geometria pura que requer demonstração, prova, enquanto um problema é uma declaração, em linguagem geométrica, de certas relações da geometria que requer solução para sua validade.

A demonstração de um teorema qualquer é desenvolvida de forma sintética ou analítica, dedutiva ou indutiva. A prova através de síntese é dita direta e a prova através da análise é dita indireta. Estes processos têm, cada um deles, seu lugar e estão associados no processo investigativo de forma a se corresponderem ou estabelecerem relação de consequência. De forma geral a análise é utilizada para o descobrimento das verdades geométricas enquanto a síntese demonstra as verdades descobertas.

Loomis (1901, p.02) define assim, o processo de síntese:

> Especificamente, na geometria, síntese é um processo cujo raciocínio se realiza do todo para a parte, do geral para uma verdade particular e assim é chamado raciocínio dedutível. Trata-se de uma espécie de raciocínio no qual uma verdade específica ou individual é inferida de uma verdade geral, lei ou princípio, dado como um ponto de partida, através da relação razão e consequência.

Análise e síntese são processos que têm desenvolvimento opostos, da parte para o todo e do todo para a parte, respectivamente, mas que se completam. A síntese apresenta um resultado, mas não mostra o processo de sua obtenção, o que é feito pela análise. A síntese parte das verdades gerais, as leis e os princípios, e a análise parte dos elementos primitivos daquilo que se deseja provar.

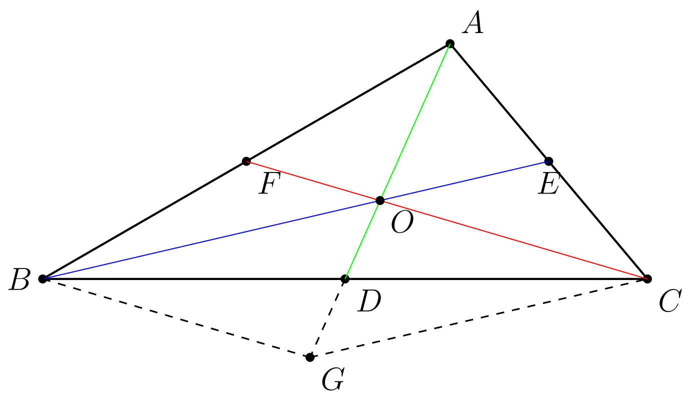
Pappus em (BICUDO, 2009, p.51), exemplificando sobre os tipos de dados no processo de análise, mostra a relação com a síntese:

> Esta começa com uma construção suposta que satisfaça as condições propostas. Tais condições, sendo convertidas em elementos dados da figura, envolvem outros que são dados por implicação, e esses, por sua vez, envolvem outros, até que, passo a passo, cada um deles é legitimado, e chega-se a uma construção da qual se obtém a síntese (BICUDO, 2009).

Não existem dois teoremas absolutamente iguais e não existem regras definidas para proceder em cada caso, contudo, podem ser recomendados princípios que auxiliem na resolução de teoremas, sejam eles: inicialmente considerá-lo verdadeiro e elaborar um desenho geral e preciso, estudar atentamente o desenho e se necessário produzir construções auxiliares oportunas e baseadas em verdades previamente garantidas, dar o encaminhamento analítico assumindo como verdadeiras as consequências da base sintética ou como uma outra forma de finalização, caso haja contradição com alguma verdade conhecida, concluir que a suposição preconcebida é falsa.

4.1 Primeiro Exemplo

Figura 9 – Desenvolvendo análise e síntese



Fonte: (LOOMIS, 1901, p.07, reprodução nossa).

Loomis em (1901, p.7), para expor a aplicação dos princípios que ele preconiza soluciona de forma comentada o seguinte teorema:

As medianas de um triângulo são concorrentes e encontram-se num ponto comum que é uma trissecção de cada mediana.

Desenho ilustrado na figura 9 com as medianas traçadas de cada vértice e uma construção auxiliar, prolongamento de AD, $\overline{DG} = \overline{OD} = \frac{\overline{AD}}{3}$.

<u>Demonstração Direta.</u>

Os dados são: um triângulo $\triangle ABC$, qualquer e suas medianas AD, CF e BE.

Deseja-se demonstrar que os segmentos AD, BE e CF se encontram no ponto O. Que $\overline{OD} = \frac{\overline{AD}}{3}$, $\overline{OE} = \frac{\overline{BE}}{3}$, $\overline{OF} = \frac{\overline{CF}}{3}$ A prova se fará utilizando a análise inicialmente, como convém nesta forma de demonstração, considerando que o resultado é verdadeiro, mas partindo de elementos básicos do cenário geométrico, por isso o desenho é importante:

- Passo 1: ABC é um triângulo, e assim AB, AC e BC não são paralelas entre si.

- Passo 2: As medianas AD, BE e CF ficam entre os lados do triângulo e portanto não são paralelas entre si e devem se interceptar entre si.

- Passo 3: Conforme desenho, 9, tomar em AD, $\overline{OD} = \frac{\overline{AD}}{3}$

- Passo 4: Construir DG de tal forma que $\overline{DG} = \overline{OD}$, ligando os segmentos, BG e GC.

- Passo 5: Assim, $BGCO$ é um quadrilátero, e como as diagonais estão divididas ao meio no ponto O, $\overline{DG} = \overline{OD}$, $\overline{BD} = \overline{DC}$, $BGCO$, é um paralelogramo.

- Passo 6: Observando-se o triângulo AGC tem-se que $\overline{AE} = \overline{EC}$ e como $\overline{BE}||\overline{GC}$, $\overline{AO} = \overline{OG}$ e $\overline{OD} = \overline{DG}$, por construção, tem-se que $\overline{OD} = \frac{\overline{AD}}{3}$.

- Passo 7: Desta forma, BO e OE são ambos paralelos a GC, e assim BOE é uma linha reta e coincide com mediana BE.

A análise mostrou que as medianas são concorrentes em O e este é o ponto de trisseção das medianas. A Síntese, agora, partirá do fato de que se duas medianas se encontram no ponto O a outra mediana também passará por O:

- Passo 1:Encolhe-se CF e BE que interceptam-se no ponto O.
- Passo 2: Prolongando-se AO até cortar BC em D.
- Passo 3: Uma construção auxiliar fazendo $\overline{BG}||\overline{FO}$, assim AO cortará BG certamente, já que BG e FO são paralelas.
- Passo 4: Como $\overline{AF} = \overline{FB}$, propriedade relacionada as medianas, e como BG e FO são paralelas, então $\overline{AO} = \overline{OG}$.

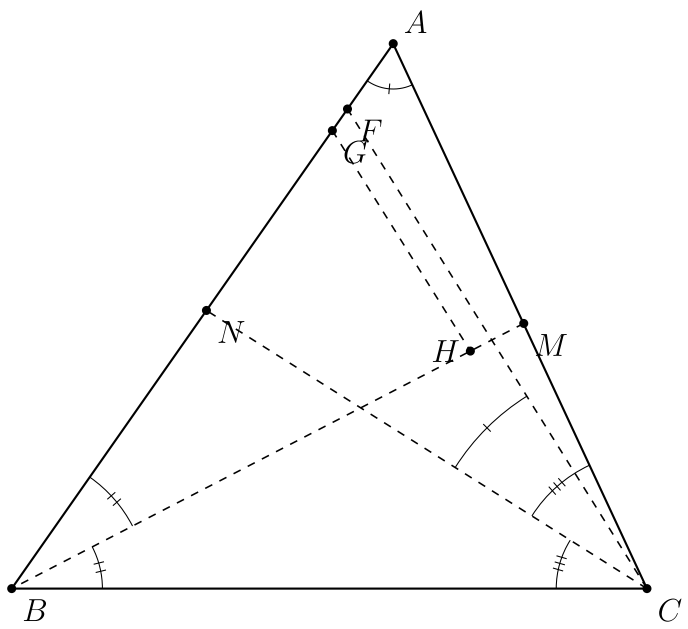
- Passo 5:Já que $\overline{AO} = \overline{OG}$, então, analogamente tem-se $\overline{AE} = \overline{EC}$.
- Passo 6: Então $BOCG$ é um paralelogramo e AD mediana passando por O.

4.2 Segundo Exemplo

A resolução para um outro teorema proposta por Loomis visando expor melhor seus princípios é desenvolvida como uma demonstração indireta.

Se as bissetrizes de dois ângulos de um triângulo são iguais então o triângulo é isósceles.

Figura 10 – Problema das bissetrizes do triângulo isósceles



Fonte: (LOOMIS, 1901, p.09, reprodução nossa).

Provar: Que o triângulo é isósceles.

Análise, iniciando pelos elementos mais primitivos do cenário geométrico, ilustrado pela figura 10 e suas construções:

- Passo 1: Há três possibilidades: $\angle B > \angle C$, $\angle B < \angle C$ ou $\angle B = \angle C$.
- Passo 2: Supor que $\angle B < \angle C$. Assim, metade do ângulo B é menor que metade do ângulo C.
- Passo 3: Construir $\angle FCN = \angle MAF$.
- Passo 4: Desta forma no triângulo FBC tem-se que FB é maior que FC, já que o maior lado se opõe ao maior ângulo.

- Passo 5: Traçar $\overline{BG} = \overline{CF}$ e $\overline{GH} \parallel \overline{FC}$.
- Passo 6: Então os triângulos BGH e CNF são iguais, um lado de BGH igual a outro de CNF e dois ângulos iguais. Assim, $\overline{BH} = \overline{NC}$, o que é absurdo pois $\overline{NC} = \overline{BM}$ por hipótese, e BH é só uma parte de BM. Da mesma maneira não se pode mostrar que $\angle B > \angle C$. Concluindo-se que $\angle B = \angle C$.
- Passo 7: O triângulo ABC é isósceles.

Pode-se verificar que o processo de **síntese** é desnecessário já que da **análise** se conclui que o triângulo é isósceles.

Loomis faz observações sobre os problemas desenvolvidos no sentido de que o aluno deve expressar os passos de análise e síntese de forma plena, sem omissões, sem inquietações ou impaciência e insiste para que o aluno se certifique que a solução obtida esteja correta.

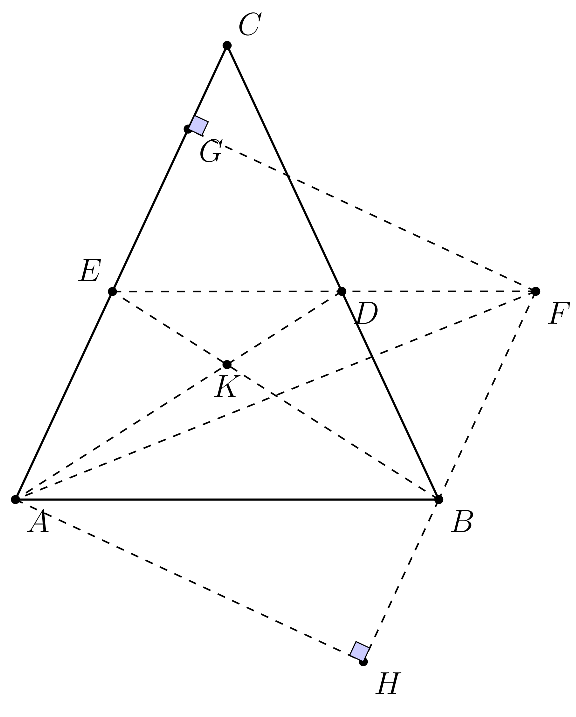
4.3 Terceiro Exemplo

Entre o uso de demonstrações de forma direta ou indireta Loomis, argumenta que o aluno pode entender que a primeira seja mais fácil, o que deixa para ser decidido usando o problema anteriormente demonstrado indiretamente.

Dado o triângulo ABC, no qual as bissetrizes AD e BE são iguais.

Provar: Que o triângulo é isósceles.

Figura 11 – Construções auxiliares na resolução de problemas geométricos



Fonte: (LOOMIS, 1901, p.11, reprodução nossa).

Elaborar a figura 11 e as construções auxiliares a seguir sugeridas:

- Fazer o ângulo $\angle BEF = \angle BAD$ e traçar o triângulo BEF de tal forma que $\angle FBE = \angle ADB$.
- Traçar por F uma perpendicular a AC em G e traçar por A uma perpendicular ao prolongamento de BF em H. Ligar A e F. EF e BF se encontram por construção do triângulo BEF. Os triângulos ABD e EFB são congruentes.

Demonstração.

- Como consequência da construção auxiliar, $BD = BF$ e $AB = EF$.
- $\angle AKB = \angle KAE + \angle AEK$, mas $\angle KAE = \angle BAD = \angle BEF$
- Logo, $\angle AKB = \angle AEF$
- Da mesma forma, $\angle AKB = \angle KBD + \angle BDK$, mas $\angle KBD = \angle ABK = \angle FBE$
- Logo, $\angle AKB = \angle FBA$ e $\angle AEF = \angle FBA$
- Logo, $\angle FEG = \angle ABH$ e $\angle FGE = \angle AHB$
- Assim, $GE = EB$ e $GF = HA$
- Os triângulos FGA e AHF são congruentes.
- Desta feita, $GA = HF$ e $AE = FB = BD$.
- Os triângulos ABE e BAD são congruentes.
- $\angle EBA = \angle BAD$, $\angle CBA = \angle BAC$.
- $CA = CB$. O triãngulo ABC é isósceles.

□

Um dos elementos importantes na resolução deste teorema é a engenhosa utilização das **construções auxiliares**. A rotação virtual do triãngulo ADB no sentido horário pelo ponto e vértice B até o vértice A encontrar o ponto E, foi a base da construção desta solução, ver atentamente na figura 11. Um outro aspecto que Loomis desejou apresentar é que a demonstração direta nem sempre é tão simples.

4.4 Problemas Geométricos

Loomis diferencia teorema de problema definindo este último como uma proposição na qual algo é requerido para ser feito, sendo sua solução a conclusão do que foi solicitado.

Os problemas se resolvem com análise que consiste na resolução através do inter-relacionamento entre os elementos dos mesmos até o domínio do processo culminando na solução desejada.

Uma das recomendações marcantes de Loomis está relacionada ao conhecimento dos conteúdos, e o sucesso no processo de resolução dos problemas está associado às definições e os princípios fundamentais. Ele afirma que sem este conhecimento não haverá sucesso no processo investigativo, na realização da análise.

Os problemas são classificados como: determinados, indeterminados, sobre-determinados e impossíveis.

Os problemas são chamados determinados quando possuem um número finito de soluções, como a distância entre dois pontos A e B, possui uma única solução, ou a determinação da tangente comum a dois círculos, que possui quatro.

Os problemas com número infinito de soluções são ditos indeterminados, como para descobrir um ponto equidistante de dois pontos dados. Já os problemas ditos sobre-determinados são aqueles que necessitam de mais informações para que a solução seja dada, como para construir um triângulo dados dois ângulos e dois lados. Faz-se necessário que restrições sejam acrescentadas para que o problema seja solucionado, como a soma dos ângulos deve ser menor que dois retos.

Um problema é dito impossível quando não possui solução como para construir um triângulo cuja soma das medidas dos lados seja menor que a medida do terceiro lado.

O aluno não necessariamente deve determinar a classe de problemas que está solucionando mas ter noção de que pode se deparar com uma destas situações, e a impossibilidade é uma delas, pois em se tratando de problemas de construção ou traçado, isso pode ocorrer por não ser possível expressar quantidades envolvidas.

Os passos para a solução de um problema segundo Elisha Loomis são: o enunciado geral do problemas, os dados envolvidos, as informações sobre os objetos do problema e a figura, o desenho que simboliza a situação, o que se deseja fazer, a análise, o raciocínio para determinação dos objetos ou relações desejadas, a efetiva construção requerida, a prova de que o que foi construído corresponde às condições do enunciado, avaliação geral e numérica do problema.

Cabe alguns registros de Loomis sobre esta sistemática. Não há uma regra geral para que a análise seja efetiva, mas é importante a construção de uma representação do problema para auxiliar na tentativa de resolução. Os problemas podem ser tão simples que uma análise seja dispensável, no entanto isto é uma exceção. Em geral uma solução depende de teoremas e até de problemas já desenvolvidos em situações análogas.

O processo de resolução de problemas reúne o estabelecimento de relações entre os objetos e o encaminhamento para o resultado desejado. A prática trará ao aluno o desenvolvimento de capacidade inventiva juntamente com a disciplina mental necessária para buscar estratégias adequadas.

Apesar de não existirem regras bem estabelecidas para a condução do processo de resolução de problemas, Loomis sugere sete princípios gerais:

1. Tendo encontrado um caminho possível para a solução de um problema, deve-se efetuar a simbolização adequada, uma figura;
2. Estudar os elementos desta figura que apontam para a suposta solução;
3. Se relações suficientes não forem encontradas, é preciso partir para construções auxiliares, proceder novamente como em 2;
4. Caso as relações procuradas entre os elementos do problema forem encontradas, concluir as construções requeridas;
5. Se a solução e construção do problema depender de algum teorema ou problema conhecido, efetuar a demonstração de forma mais simples possível;
6. Não existindo erros o resultado é a solução do problema;
7. Determinar o número de soluções possíveis e limitações.

4.5 Uma Resolução, Passos e Princípios

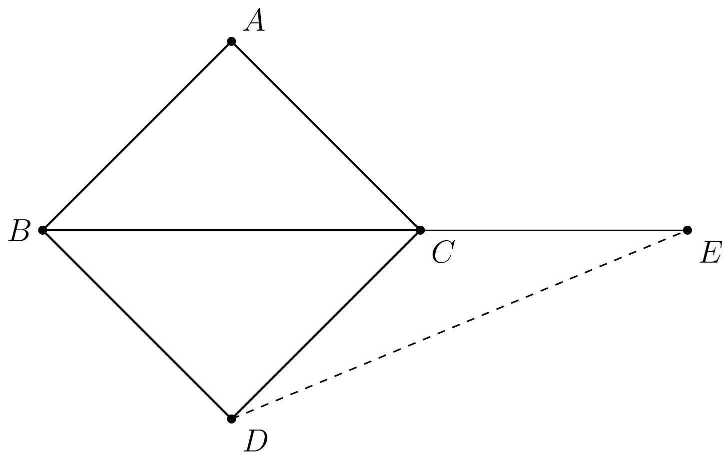
A construção de um quadrado sendo dado a soma de uma diagonal e um lado é simples problema de traçado que foi utilizado por Loomis para explicitar, de forma resumida, seus princípios na resolução de problemas puramente geométricos.
Os dados: Segmento AE é constituído da soma da diagonal do quadrado mais um de seus lados.
O que se deseja: Construir um quadrado através de AE que corresponde a sua diagonal e um lado.
Análise:

- Em primeiro lugar imagina-se a figura já construída, figura 12, onde BC é a diagonal e $CE = DC$.
- Ligar B a E.
- Os triângulos BDC e DCE são isósceles. Os ângulos $\widehat{CBD}$ e $\widehat{DCB}$ medem $45°$.
- Como o ângulo $\widehat{DCB}$ é igual a duas vezes $\widehat{DEC}$. $\widehat{DEC}$ e $\widehat{CDE}$ medem $22\frac{1}{2}°$.
- Assim ficam definidos os vértices D e A e a construção é possível.

Construção:

- Construa a linha AE resultado da soma da diagonal, BC, e lado, CE, dados.

Figura 12 – Um problema de traçado



Fonte: (LOOMIS, 1901, p.24, reprodução nossa).

- Construa por B uma reta que faça com BE um ângulo de 45^o, há duas possibilidades, escolha uma como na figura 12, por exemplo.
- Por E trace uma reta que faça com BE um ângulo de $22\frac{1}{2}^{\circ}$, novamente há duas possibilidades, escolha conforme a figura 12. Prolongue as retas até se encontrarem em D.
- Com centro em D e raio DB trace um arco que intercepte AE em C e centro em C e raio DB trace um arco intercepte o arco BC em A. O quadrado $ABCD$ esta construído ligando seus vértices.

4.6 Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Tem sido considerada a maior contribuição de Loomis (1968), a coletânea de demonstrações do Teorema de Pitágoras, entre 900 A.C. e 1940, que não se limitou apenas a uma coletânea de demonstrações, como também apresentação de seus autores, a classificação quanto a ferramenta e modalidade de resolução, o que faz deste livro um universo de aprendizado para o processo de resolução de problemas geométricos. Incentiva-se o professor a apreciar, analisar e instrumentar-se com as diversas formas de ataque a uma única proposta, que é a de encontrar a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.

As demonstrações foram classificadas em algébricas através de relações lineares:

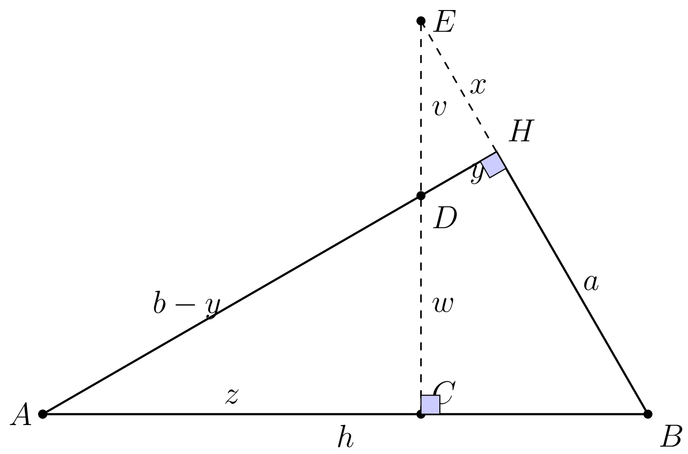
- Semelhança de triângulos retângulos;
- Uso do Círculo: uso de um círculo, dois círculos, método das cordas, método das secantes, método das tangentes;

- Relação entre áreas entre outros.

E ainda, demonstrações geométricas utilizando quadrados e demonstrações algébricas e geométricas. Um número significativo de possibilidades engenhosas, utilizando construções auxiliares, com o intuito de encontrar um caminho para a resolução de um objetivo final, bem ao estilo necessário para a resolução de problemas.

Interessante acompanhar uma demonstração algébrica desenvolvida através de técnicas utilizando semelhança de triângulos: Toma-se um ponto D, qualquer sobre o cateto AH

Figura 13 – Construção auxiliar para uma prova do teorema de Pitágoras



Fonte: (LOOMIS, 1968, p.27, reprodução nossa).

do triângulo ABH e constrói-se uma perpendicular a hipotenusa AB no ponto C, figura 13. Traçar o prolongamento de DC até o encontro com o prolongamento de BH.
Rotulando $AB = h$, $BH = a$, $AH = b$, $AD = b - y$, $DH = y$, $DC = w$, $EH = x$, $ED = v$.
A solução será conduzida por semelhança de triângulos retângulos e utilizando relações lineares. Assim, considerando os triângulos ACD e ABH, que são semelhantes:

$$\frac{b-y}{h} = \frac{z}{b}$$

$$b^2 - yb = hz$$

Considerando agora os triângulos EHD e ECB, que também são semelhantes:

$$\frac{x+a}{h} = \frac{h-z}{a}$$

$$xa + a^2 = h^2 - hz$$

Utilizando o resultado obtido anteriormente.

$$b^2 - yb = h^2 - xa - a^2$$

$$a^2 + b^2 = h^2 + ya - xa$$

Finalmente, os triângulos EHD e ABH, que também são semelhantes:

$$\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$$

$$yb = xa$$

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Algebricamente este problema poderia ser resolvido de diversas maneiras com esta construção auxiliar estrategicamente inventada. Esta ferramenta, construção auxiliar, é muito poderosa no processo de resolução de problemas, contudo exige imaginação, criatividade e oportunismo geométrico. Grande parte das demonstrações coletadas por Loomis para a solução do teorema de Pitágoras utilizam desta ferramenta.

4.7 Relação entre Áreas

Alguns matemáticos utilizaram o método das áreas para solucionar problemas e na coletânea de demonstrações do teorema de Pitágoras apresentada por Loomis esta abordagem também aparece.

- Toma-se o triângulo retângulo ABH da figura 14, onde $AH = b$, $BH = a$ e $AB = h$. Constrói-se, a partir do ponto H, DE paralelo a AB, pelo ponto A, AC paralelo a BH e pelo ponto B, BC paralelo a AH.
- Os triângulos AEH, BDH e ABC são semelhantes. Logo, suas áreas são proporcionais ao quadrado dos lados.
- Tem-se os triângulos retângulos AEH de área y, BDH de área x e ABC de área z.

Observa-se que os triãngulos ABH e ABC são congruentes. Assim a área do triângulo ABC é z. E assim:

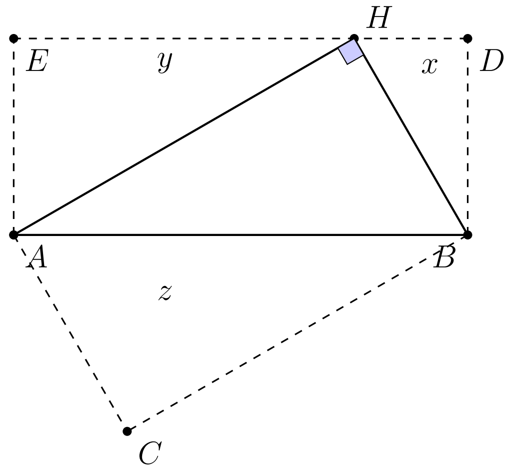
$$z = x + y$$

Então:

$$\frac{z}{y} = \frac{h^2}{b^2}$$

$$\frac{z}{x} = \frac{h^2}{a^2}$$

Figura 14 – Técnica das áreas para a prova do teorema de Pitágoras



Fonte: (LOOMIS, 1968, p.84, reprodução nossa).

$$z = \frac{za^2}{h^2} + \frac{zb^2}{h^2}$$

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Observa-se uma estratégia engenhosa utilizando as propriedades de relações entre triângulos semelhantes e suas áreas. Por outro lado uma construção geométrica inventiva e oportuna para reunir conceitos e a solução desejada. Apesar da solução fortemente algébrica a construção auxiliar puramente geométrica e visual esta ao alcance de um bom observador ou investigador.

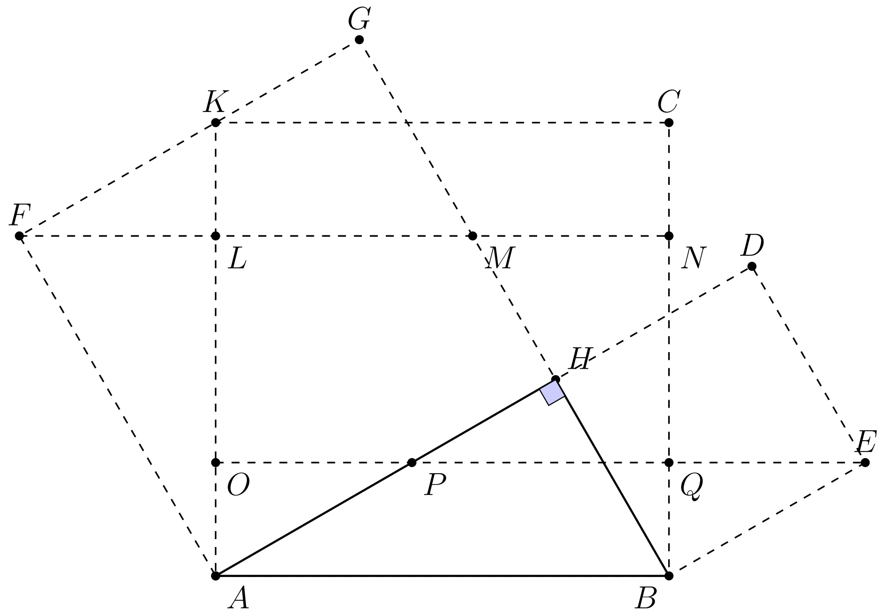
4.8 Demonstrações Geométricas usando Quadrados

A coletânea de demonstrações utilizando construção de quadrados, como mais uma forma da prova do teorema de Pitágoras, é muito grande e é composta de construções simples até arranjos complexos. A solução utiliza a relação entre áreas dos quadrados e é classificada como prova geométrica com um número de possibilidade sem limite, segundo Loomis (LOOMIS, 1968).

Dados o triângulo retângulo ABH construir quadrados de lados iguais aos seus catetos e hipotenusa, conforme figura 15. A partir dos ponto F, do quadrado $AHGF$ e do ponto E do quadrado $HBED$, traçam-se paralelas a AB. Estas paralelas interceptam os segmentos AK, nos ponto L e O, e BK, nos pontos N e Q. Observando as áreas das figuras construídas, tem-se:
A área do quadrado $ABCK$ é igual a soma das áreas dos retângulos $ABQO$ e $OQCK$:

$$S_{ABCK} = S_{ABQO} + S_{OQCK}$$

Figura 15 – Construção de quadrados para a prova do teorema de Pitágoras



Fonte: (LOOMIS, 1968, p.147, reprodução nossa).

Observa-se que os triângulos FLK e EQB são congruentes. As consequências são que os triângulos APO e BEQ são congruentes, os retângulos $LNCK$ e $ABQO$ são congruentes e os triângulos ALF e BNM, também são congruentes.
Assim sendo, analisando detalhadamente as áreas obtém-se.

$$S_{ABCK} = S_{ABEP} + S_{ABNL}$$

$$S_{ABNL} = S_{ABMF}$$

$$S_{ABEP} = S_{HBED}$$

$$S_{ABCK} = S_{HBED} + S_{FAHG}$$

Fazendo, $AB = h$, $AH = b$ e $BH = a$, tem-se:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Há uma preocupação com a técnica geométrica, o método de solução dos problemas, as estratégias e a cultura dos geômetras gregos no processo de resolução apresentado por Loomis. Entretanto ele manifesta uma preocupação com o aluno e com a forma como o professor pode colaborar para o aprendizado. Observa-se o desejo de autonomia para o aluno, a necessidade de acompanhar suas atitudes mentais, a busca do aprender a raciocinar, o aprendizado por imitação que já havia sido citado por Polya, apesar de pertencerem a gerações diferentes de matemáticos. Ambos acreditavam na possibilidade de aprender a resolver problemas como se aprende a nadar ou andar de bicicleta, ou seja, existe dentro de cada pessoa um mecanismo que capacita a resolução de problema e é necessário que cada um descubra como despertá-lo. O ensino pode contribuir para tal.

5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO TERENCE TAO

Terence Tao, prodigioso matemático australiano, filho de imigrantes chineses oriundos de Hong Kong, considerado o Mozart da matemática, com inúmeras contribuições e reconhecido com a medalha Fields em 2006, escreveu sobre sua visão do tema resolução de problemas, ainda aos quinze anos, em *Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective* (TAO, 2013), primeira edição publicada em 2006.

A visão de Tao sobre a resolução de Problemas é de uma viagem hipotética com destino a ser descoberto. À frente do viajante, o resolvedor, estão diversos caminhos, nem todos levarão ao destino final. As escolhas são simples e lógicas de acordo com o objetivo, mas é possível estar de novo no local de partida iniciando tudo outra vez, de forma incansável.

Numa entrevista em 2006, registrada no prefácio de seu livro, Tao reporta que quando criança sua ideia de resolver problemas difíceis era em momentos de inspiração. A abordagem atual é testar uma ideia e verificar o progresso que ela oferece. Se não for percebido algum progresso, significa que não esta funcionando e uma outra ideia deve ser tentada, ou pode ocorrer que a ideia anterior, mesmo apresentando incertezas, pode permitir a associação de uma nova abordagem surgindo um atalho, uma nova perspectiva. São os sinais de progresso que delineiam o caminho na busca de uma solução, algo que já tinha sido apresentado em Polya (2006).

O que na verdade surpreende em Terence Tao é a capacidade de elaborar questionamentos coordenados na medida em que caminha na solução dos problemas. Trata-se de um monólogo em torno dos elementos do problema e seu cenário, algo que precisa ser imitado.

Tao expressou, em seu livro, suas estratégias para resolução de problemas começando pela percepção do problema. "Que tipo de problema é este?"E apontou três tipos de problemas (TAO, 2013, p.2):

- Problemas do **Tipo I** Mostre que[...] ou Calcule[...] Identificando um problema através destas ações o resolvedor deverá orientar-se no sentido de demonstrar que uma dada afirmação é verdadeira ou desenvolver uma expressão no sentido de encontrar um determinado resultado.

- Problemas do **Tipo II** Encontre[...] ou Encontre todos[...] Identificando problemas deste tipo o papel do resolvedor está em determinar algum objeto ou todos os objetos segundo certas restrições apontadas.

- Problemas do **Tipo III** Existe ou Não[...] Para estes tipos de problema o resolvedor deverá provar a existência de uma dada afirmação ou oferecer um contra-exemplo.

O conhecimento do tipo de problema como os do **tipo I** define de certa forma uma abordagem que deriva da reunião dos dados oferecidos no sentido de calcular o valor de alguma expressão ou obter a relação entre dois ou mais elementos.

Para os problemas do **tipo II**, o resolvedor enfrenta o fato de ir ajustando o objeto às condições impostas pelo problema de forma que fará tentativas reativadas a cada insucesso. Precisará ajustar o espaço de soluções a seu dispor no sentido de clarear e facilitar cada ver mais o problema e direcioná-lo para a solução.

Tao entende que os problemas do **Tipo III** são os mais difíceis, pois além da decisão sobre a existência de um dado objeto é necessário apresentação de uma prova ou um contra-exemplo.

Tao deixou claro que nem todos os problemas estão definidos segundo os tipos por ele citados mas fica entendido que uma pergunta de certa forma sinaliza para uma estratégia a seguir, uma ideia a ser tentada.

Percebido o problema, Tao recomenda que os dados do mesmo sejam entendidos, o que significa saber quais são e como se relacionam os dados entre si, quais suas propriedades, que técnicas exigem e quais as notações adequadas. Caso o problema seja geométrico podemos estar tratando de lados, ângulos, áreas, entre outros e figuras como triângulos e círculos que se correlacionam.

O próximo passo está no entendimento do objetivo, o problema propõe encontrar um dado objeto ou uma relação entre objetos, ou verificar uma determinada propriedade do mesmo ou ainda um parâmetro associado. O entendimento daquilo que se deseja alcançar auxilia o resolvedor na busca de ferramentas para atingir o objetivo, em estabelecer onde atacar em primeiro lugar e assim por diante.

Percebido o problema, entendido os dados e suas relações e o objetivo do mesmo pode-se nomear os objetos de forma adequada explicitando a ideia geral em papel através de um desenho, uma ilustração, se geométrico, ou diagrama conforme o tipo de problema, estabelecendo uma relação visual com os elementos com que está se tratando, dando oportunidade para a criação de novas ideias, novas conexões.

Agora é possível listar as relações entre os objetos baseados no modelo desenhado, perceber redundâncias, desvios em relação ao objetivo, exageros ou relações desnecessárias apontadas pelas conexões estabelecidas pela ampla leitura do problema em questão.

Imaginando que dificuldades existam, Tao sugere modificar o problema ligeiramente, o que pode significar avaliar casos especiais do problema, extremos, ou uma simplificação do mesmo ou mesmo considerar um problema análogo, uma opção que remonta à **lista** de Polya, ou generalizando. O objetivo nestes casos é tentar despertar no resolvedor novas ideias, novos olhares. É claro que estes exercícios devem ser efetuados de maneira controlada para não sair em demasia do contexto do problema e não perder o espírito do mesmo, pois o que se deseja é encontrar estratégias promissoras.

Durante todo o processo de entendimento do problema, da associação de seus objetos e ajustes de seus objetivos, atenção deve ser dada aos teoremas e verdades pertinentes presentes neste contexto.

Solucionando os problemas apresentados em (TAO, 2013), ele reúne, leitor, alunos e professores nesta caminhada, no enfrentamento do problema proposto, como quando se refere às notações em papel sobre dados, figuras e diagramas:

> Mas há de ter cuidado para não escrevermos coisas supérfluas nem enchermos o papel com detalhes miúdos; em vez disso, podemos destacar os fatos que nos parecem mais úteis, e por aquelas ideias mais dúbias, redundantes ou malucas num outro canto da folha de rascunho. (TAO, 2013, p.5)

A solução de problemas na ótica de Tao é de uma investigação, onde todos os dados são levantados, as verdades são apuradas, os argumentos são apresentados no sentido de orientarem na condução do trabalho oferecendo uma atitude de busca perpétua.

5.1 Um Exemplo

O livro de Terence Tao possui muitos problemas por eles solucionados e apresentando sua abordagem e entre eles alguns geométricos: Seja $ABCD$ um quadrado, uma circunferência l com centro em B e passando por A, e k a semicircunferência de diâmetro AB contida no quadrado. Sejam, E um ponto de k e F o ponto onde a semireta BE interseta l. Mostre que $\angle DAF = \angle EAF$.

O problema de Geometria em pauta é do tipo **Mostre que**. Estamos relacionando dois ângulos, $\angle DAF = \angle EAF$ e uma *figura* é absolutamente necessária e esclarecedora. O enunciado não apresenta valores para os objetos do problema e assim devemos por ora nos fixar no posicionamento dos ângulos.

O ângulo $\angle DAF$ não esta associado a nenhum triângulo, no entanto tem uma relação interessante com a circunferência k, $\angle DAF$ é um ângulo de segmento. Assim, temos uma relação entre o ângulo $\angle DAF$ e o ângulo central $\angle ABF$.

$$\angle DAF = \frac{\angle ABF}{2}$$

Encontramos uma relação interessante entre $\angle DAF$ e o ângulo $\angle ABF$ que esta associado a outros objetos do cenário deste problema ilustrado na figura 16. Agora vamos focar em $\angle FAE$.

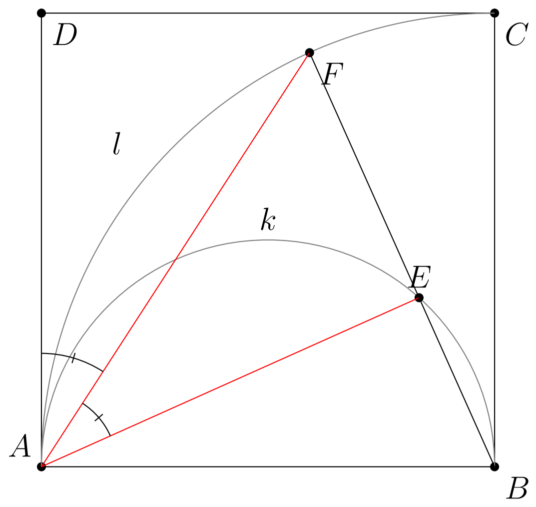
Observamos que, $\angle FAE = \angle FAB - \angle EAB$ e que $\angle FAB$ esta relacionado com $\angle DAF$.

$$\angle FAB = \angle DAB - \angle DAF$$

Como AD e AB são os lados do quadrado $ABCD$, $\angle DAB = 90°$ e assim.

$$\angle FAB = 90^o - \angle DAF$$

Figura 16 – Os amigos do resolvedor de problemas: triângulos, quadrados, circunferências



Fonte: (TAO, 2013, p.91, reprodução nossa).

Logo,

$$\angle FAE = 90^o - \angle DAF - \angle EAB$$

Temos que encontrar, agora, uma relação entre $\angle EAB$ e os objetos do problema, por exemplo o triângulo AEB. Observamos que $\angle BEA$ esta inscrito na semicircunferência k estando inscrito num arco de 180^o, $\angle BEA = 90^o$. Assim sendo, $\angle EAB = 180 - 90 - \angle ABE$, onde $\angle ABE = \angle ABF$.

$$\angle EAB = 90 - \angle ABF$$

Encontrou-se anteriormente uma relação entre $\angle ABF$ e $\angle DAF$.

$$\angle DAF = \frac{\angle ABF}{2}$$

Desta feita podemos relacionar $\angle DAF$ e $\angle EAB$. Assim,

$$\angle EAB = 90 - 2\angle DAF$$

Como temos uma relação entre $\angle FAE$ e $\angle EAB$, podemos concluir:

$$\angle FAE = 90^o - \angle DAF - \angle EAB$$

$$\angle FAE = 90^o - \angle DAF - (90^o - 2\angle DAF)$$

$$\angle FAE = 90^o - \angle DAF - 90^o + 2\angle DAF$$

$$\angle FAE = \angle DAF$$

Uma solução que, de certa forma, tropeçou-se nela através das relações entre estes dois ângulos com os objetos do problema. Nem sempre é assim que ocorre, alerta Tao!

Terence Tao ainda apresenta as características que o resolvedor de problemas matemáticos deve buscar: em primeiro lugar tranquilidade, efetuando comentários óbvios, constantes no enunciado, para que se possa dar os primeiros passos. Depois, categorizar o problema se for o caso e elaborar analogias para bem se situar. Estudar e entender atentamente os elementos, os dados do problema e as relações existentes buscando a tomada de decisões segundo o objetivo perseguido.

E finalmente, confiança e naturalidade, Tao dialoga durante a resolução dos problemas como que dissecando cada elemento intuitivo na busca de tornar o caminho da solução, mais evidente.

6 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO PAUL ZEITZ

O Professor Paul Zeitz é matemático, docente da Universidade da São Francisco, EUA, e escreveu o livro *The Art and Craft of Problem Solving*, tendo como interesse principal atualmente, o problema matemático. Durante o ensino médio venceu a Olimpíada de Matemática dos EUA, em 1974, e competiu na primeira equipe dos Estados Unidos da América a participar da Olimpíada Internacional de Matemática na Alemanha Oriental.

O professor Zeitz em seu livro, divide os resolvedores de problemas, em experientes e não experientes. Os não experientes são aqueles que desistem por algumas razões: não saber como começar, pela falta de progresso nas tentativas iniciais e pelo acúmulo de tentativas frustradas.

Os ditos experientes, são aqueles que tentam, aplicam estratégias específicas, progridem e às vezes solucionam seus problemas. Segundo Zeitz, os experientes operam estratégias psicológicas e matemáticas, aplicam táticas matemáticas diversas e truques, em situações específicas. Mas não há uma regra definida, um padrão para a resolução de problemas Assim a ideia do livro é ajudar na investigação que é a postura assumida pelo resolvedor na opinião de Zeitz. Para o professor a investigação é quase sempre o coração da solução de um problema..

Como orientações iniciais, diante de um problema, o professor orienta como a primeira etapa segundo George Polya:

- Ler cuidadosamente o problema. Prestar atenção aos detalhes.
- Identificar se o problema é de descoberta ou prova.
- Identificar com atenção hipótese e conclusão.
- Avaliar se um problema similar já tenha sido solucionado.

O professor insiste para que o resolvedor não se apresse em deixar esta etapa tão brevemente, reler o enunciado novamente e repassar as impressões iniciais cuidadosamente (ZEITZ, 2021, p.41).

> Time spent thinking about a problem is always time worth spent. Even if you seem to make no progress at all (ZEITZ, 2021, p.27). [1]

Zeitz compara o processo de resolução de problemas ás atividades preliminares da prática de montanhismo, interessante pela alusão a elementos heurísticos do processo. Na base da montanha é que se inicia a escalada ao cume e há várias formas de iniciar, pela face norte ou pela face sul da montanha ou por um outro caminho alternativo. Cada uma das opções apresentará uma série de obstáculos a serem transpostos, rios, pedras, entre outros e para cada

[1] O tempo gasto pensando em um problema sempre vale a pena. Mesmo que não pareça haver progresso algum (Tradução nossa).

um dos obstáculos haverá um conjunto de ferramentas a serem utilizadas e técnicas específicas a serem utilizadas.

A analogia entre alcançar o cume de uma montanha e solucionar um problema é bem adequada. Não se faz este ataque sem um planejamento inicial da mesma forma como não iniciamos a solução de um problema, imediatamente.

O processo de investigação assume diversas formas e pode ser iniciado com uma intuição, uma ideia inicial, uma ideia brilhante, como diria Polya, uma analogia com um outro problema. Se o resolvedor não é experiente, devera munir-se de mais elementos para tornar sua abordagem mais organizada e dar passadas mais seguras. É por isso que ajuda é necessária, a insistência é fundamental e o fato de que é preciso ser prazeroso, motivador, incansável até a conclusão.

Zeitz valoriza estratégias psicológicas, ligadas a obstinação e persistência, e quando sair de cena, que seja apenas quando for absolutamente necessário, e assim mesmo, de forma temporária.

Não faz sentido para ele que alguém deseje solucionar um problema sem a vontade imperiosa de fazê-lo. Por outro lado deve haver confiança de que é possível obter sucesso, e para tal é preciso criar condições para que a solução seja possível dividindo o problema, modificando a abordagem, se esta sendo aplicada há muito tempo sem resultados.

Além destas posturas, a concentração é fundamental: o foco no problema, seus objetos e suas definições, suas estratégias e a execução do plano. E por fim a criatividade, estar aberto a novas ideias, atenção às oportunidades no ambiente do problema.

Zeitz expõe sobre táticas, que em relação à resolução de problemas matemáticos, são formas de observação de objetos e métodos, objetivando a simplificação ainda maior do problema. Uma das táticas é a da **procura por ordem**, que tem na simetria um de seus tópicos efetivos.

Simetria, é um conceito de que se tem conhecimento prévio. As pessoas compreendem sem muitas explicações quando se refere a objetos simétricos. Temos o círculo como um objeto simétrico em relação ao seu diâmetro, o quadrado, em relação a cada uma de suas diagonais, a geometria como possuidora de diversos objetos simétricos em condições especiais e eles guardam propriedades, que oportunamente, podem auxiliar na resolução de problemas.

Um outro artifício tático está contido no **princípio do extremo**, que pode ser muito bem utilizado quando temos muitos objetos, fazendo parte do problema, há de se verificar o maior de todos ou o menor de todos e extrair disso uma forma de conduzir a solução do problema.

Zeitz também possui uma lista, que são recomendações a nível de táticas, estratégias e ferramentas, para uso durante o processo de resolução de problemas, que ele direciona aos iniciantes, para melhor organizá-los (ZEITZ, 2021, p.283)

- Faça suas ilustrações ou diagramas, cuidadosamente, não incorra em erros pela má reprodução de um cenário que deve orientá-lo;

- Desenhe objetos auxiliares, mas seja parcimonioso para evitar uma representação confusa que o desnorteará. Trata-se de uma poderosa ferramenta que deve ser usada com bastante criatividade;
- Seus melhores amigos são: triângulos retângulos, retas paralelas e pontos na circunferência. Deles se extraem uma variedade de relações entre os objetos aos quais estão associados.
- Compare áreas. Tanto a congruência quanto a semelhança de objetos, associados à áreas, trarão resultados promissores no andamento da tarefa de resolução de um problema.
- Explore de forma implacável a existência de triângulos semelhantes. Se sua intuição apontar para a existência destes objetos, persiga-os.
- Fique atento a existência de simetrias entre objetos. observe bem estas estruturas.

6.1 Exemplo Comentado

Seja ABC um triângulo isósceles com $\overline{AB} = \overline{AC}$. Uma perpendicular do ponto A para $\overline{BC}$, encontra BC em D. Uma perpendicular de D para AC, encontra AC em E. Seja F o ponto médio de ED. Prove que $AF \perp BE$.

Construindo a figura para posteriormente acompanhar a solução segundo Zeitz que inicia avaliando a situação que o problema apresenta: é tentador, segundo ele, entender que os ângulos formados pelos segmentos AF e BE são retos, mas o segmento AF não oferece informação angular útil pois AF é a mediana do triângulo ADE. Muito menos oferece informações BE.

Zeitz aponta para um outro caminho entendendo que este pode falhar e se questiona, como identificar segmentos perpendiculares? Busca o argumento que em triângulos retângulos inscritos, quando a hipotenusa é o diâmetro da circunferência, o vértice oposto à hipotenusa é formado por um ângulo reto.

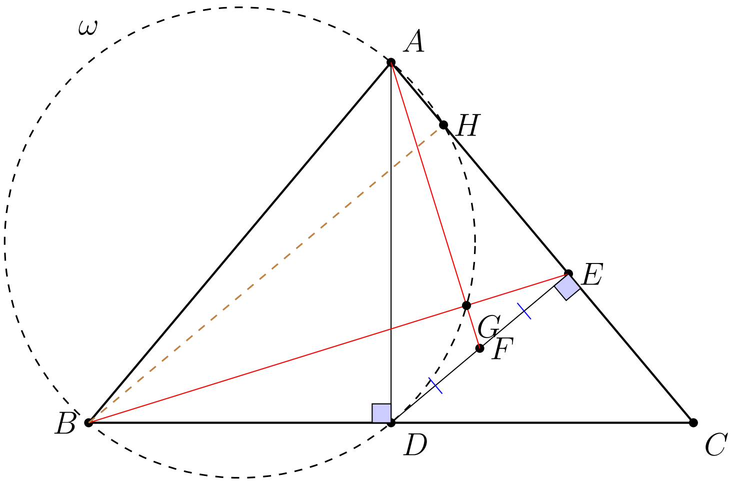
E analisando a figura 17 tem-se o triângulo ABD, que é retângulo, e pelo ponto médio de AB, hipotenusa, pode-se traçar a circunferência ω em que o triângulo ABD esta inscrito.

Observando a figura 17, para que $\overline{AF} \perp \overline{BE}$, o ponto G deve pertencer a circunferência ω, o triângulo AGB será retângulo, o $\angle AGB = 90^o$ e então $\overline{AF} \perp \overline{BE}$.

Mas, como chegar até este resultado? Observando o arco DG, dois ângulos inscritos em ω se submetem a ele, $\angle DAG$ e $\angle DBG$ e portanto são iguais. Desta forma, para que o ponto G esteja na circunferência, ω, $\angle DAG = \angle DBG$. E assim tem-se uma solução!

Mas, como chegar a este resultado? Observa-se que o problema mudou, agora buscamos a igualdade $\angle DAG = \angle DBG$. Há muitos segmentos, mas vamos trabalhar com os

Figura 17 – Um problema composto de vários problemas



Fonte: (ZEITZ, 2021, p.291, reprodução nossa).

triângulos. Observando o triângulo DEC, retângulo, pode-se construir um outro triângulo retângulo se for traçada a altura do triângulo ABC pelo vértice B incindindo sobre AC no ponto H. Tem-se $\triangle BHC \approx \triangle DEC$, semelhantes pois possuem ângulos retos e um ângulo comum, $\widehat{DCE}$.

Observa-se ainda no triângulo DEC que os ângulos $\widehat{EDC}$ e $\widehat{DCE}$ são complementares, e assim $\angle ADE = \angle DCE$, o que torna os triângulos ADE e BHC, semelhantes. Em virtude deste resultado o triângulo ADF, formado pela mediana AF de $\triangle ADE$ e o triângulo BCE, formado pela mediana de $\triangle BHC$, são semelhantes o que faz com que $\angle GAD = \angle GBD$. Era o esperado.

7 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO ALFRED S. POSAMENTIER

Um livro, *Challenging Problems in Geometry*, impulsionado pela necessidade de contribuir para a resolução de problemas foi escrito na década de 1980 pelos professores Alfred S, Posamentier e Charles T. Salkind. Naquela época a National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) solicitava aos educadores prioridade na identificação e análise de estratégias específicas para resolução de problemas e o desenvolvimento e disseminação de exemplos de bons problemas e estratégias. A intenção de livro foi a de contribuir para que os educadores do ensino de matemática da escola secundária se munissem de material para implementação da recomendação.

Os autores foram sucintos nas recomendações sobre a preparação para a resolução de problemas, mas contribuíram com um volume considerável de problemas solucionados (cerca de duzentos), propondo, entre problemas, abordagens diferentes, nível de dificuldade variado, contemplando congruência e paralelismo, proporção entre triângulos, teorema de Pitágoras, círculos e relações entre áreas, atentando para o fato de que as soluções podem ter maneiras diferentes de serem implementadas.

Com relação às suas recomendações os autores apontam um cuidadoso e selecionado uso da analogia para resolução de problemas. Atentam para o uso de atitudes flexíveis para evitar frustrações e dar mais leveza ao processo de descoberta e constante investigação, onde não pode haver desistência.

Para que um dado problema seja resolvido com sucesso e que gere aprendizado, os autores fazem três recomendações:

1. Descubra a sua solução e se ela não é a única, e neste caso investigue cada solução encontrada para certificar-se de que ela é aceitável.

2. Estimar a resposta antes de concluída a solução de um problema, se isso for adequado ou oportuno, implicará na prevenção de erros durante o desenvolvimento do problema;

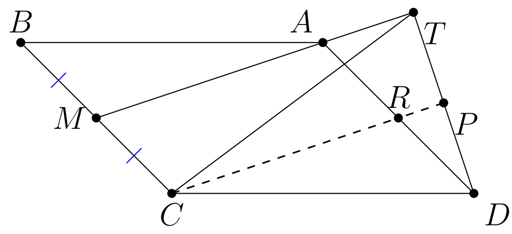
3. De posse do resultado de um problema, submeta-o a uma verificação alterando dados e avaliando as consequências para o resultado obtido. Estude e avalie restrições possíveis.

Os exemplos solucionados pelos autores não se diferenciam dos demais exemplos existentes em obras similares, no entanto correspondem a material variado para a prática de resolução de problemas.

7.1 Exemplo

Em um paralelogramo $ABCD$, M é o ponto médio de BC. DT é desenhado do ponto D perpendicular a MA, conforme figura 18. Prove que $\overline{CT} = \overline{CD}$.

Figura 18 – Construções auxiliares como técnica de resolução



Fonte: (POSAMENTIER; SALKIND, 2012, p.05, reprodução nossa).

Uma característica do processo de solução de problemas de Alfred S, Posamentier e Charles T. Salkind é o uso de construções auxiliares. No presente problema a opção encontrada e não comentada é da ligação entre o ponto C com o ponto médio do lado AD do paralelogramo e seu prolongamento até encontrar DT.

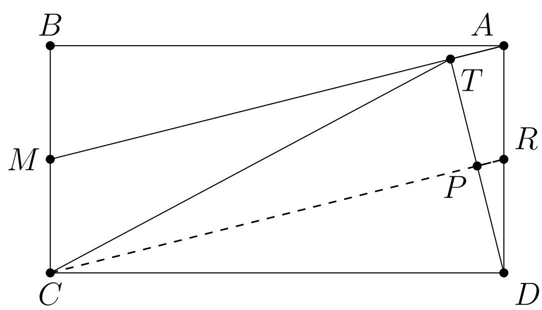
Assim, tem-se $\overline{AR} = \frac{\overline{AD}}{2}$ e $\overline{MC} = \frac{\overline{BC}}{2}$ e desta feita $\overline{AR} = \overline{MC}$, e como $AR||MC$, tem-se que $ARCM$ é um paralelogramo.

Desta feita tem-se $CP||MT$, $RP||AT$ e RP passa pelo ponto médio de AD o que faz com que passe também pelo ponto médio de TD.
Como $MT||CP$ e $MT \perp TD$, $CP \perp TD$ e divide TD ao meio e assim $\triangle CTD$ é isósceles e $\overline{CT} = \overline{CD}$.

Os autores propõem para alguns problemas sugeridos e desenvolvidos, desafios que se constituem em modificações da estrutura do problema para uma nova proposta de solução.

Estes desafios correspondem ao exercício mental sugerido pelos professores quando das recomendações para generalização ou particularização do problema, analisar restrições contidas nos mesmos ou buscar problemas análogos. Para o problema em questão o desafio foi o de efetuar as mudanças necessárias e solucionar o problema para $ABCD$ sendo retângulo, conforme figura 19.

Figura 19 – Problema desafio



Fonte: Criação e reprodução nossa.

Os autores, portanto, promovem uma revisitação do problema solucionado permitindo novas visualizações, uma revisão da solução tomada, uma oportunidade para analogias futuras, entre outros exercícios incluídos nas recomendações e sugestões de abordagem de Tao e Polya.

7.2 Motivação

Alfred S. Posamentier contribuiu ainda, em parceria com Stephen Krulik, professor emérito de educação matemática na Universidade Temple, Filadélfia, através da obra, *A arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática*, com estratégias de motivação (POSAMENTIER; KRULIK, 2014).

Considerando as dificuldades para ensinar matemática, devido a sua aspereza e consequente falta de ânimo dos alunos, os professores necessitam implementar estratégias para tornar as aulas motivantes e resgatar alunos desinteressados, conquistando-os e trazendo-os para se envolverem neste maravilhoso universo matemático.

As estratégias visam explorar os elementos motivantes que despertam o interesse do aluno e se, coordenadamente aplicados, auxiliarão na receptividade tornando o processo de resolução de problemas, base do aprendizado matemático, mais fácil e eficaz.

Os autores desejam atender aos interesses próprios dos alunos, que de uma maneira geral buscam desenvolver competências, são guiados pela curiosidade natural, característica humana, desejam também se sentirem autônomos.

Cabe ao professor entender as motivações básicas do grupo de alunos com o qual está trabalhando para poder produzir um elenco de atividades motivacionais, adaptadas à sua personalidade. Os autores recomendam que estas atividades motivacionais sejam regulares, de preferência no início das aulas, breves, devem possuir um objetivo dentro do plano de trabalho, estar no nível da habilidade dos alunos e devem estar baseadas nas reais motivações dos mesmos. Por isso é importante conhecer os alunos, observá-los, e até provocá-los, para estar ciente de quais são seus interesses. A aplicação desta estratégia motivacional vai tomar tempo relativo à busca de elementos, pesquisa e criação de atividades Além disso estas deverão estar alinhadas aos objetivos do aprendizado e ao conteúdo em curso.

Os autores apresentaram algumas ideias para aplicação no Ensino Médio que podem ser adaptadas pelo professor às necessidades segundo o posicionamento de seus alunos na cadeia de aprendizado. Assim, as técnicas devem explorar os interesses do alunos através de um evento histórico pertinente que seja breve relevante e atrelado ao conteúdo, por exemplo, a coletânea de mais de 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras por Elisha Loomis. Deve ser bem elaborada, apesar de ser breve, deve instigar a curiosidade dos alunos:

"Quantas demonstrações do teorema de Pitágoras existem?"

"Sabiam que um ex-presidente dos EUA desenvolveu uma demonstração do teorema de Pitágoras?"

"Qual e quem foi o responsável pela demonstração mais rápida e a mais longa e complexa?"

Esta poderia ser transformada numa atividade argumentativa, explorando aspectos dos conceitos de complexidade matemática e tempo de execução de demonstrações.

Interessante que o professor registre o que deseja atingir com a estratégia, qual a relevância para o conteúdo em aplicação e quais são os resultados observados. Para o devido planejamento da atividade, materiais ou equipamentos necessários, texto explicativo e orientativo para aplicação da atividade.

Há muitos interesses dos alunos que podem ser explorados, outro exemplo é sobre a utilidade de um tema matemático: semelhança de triângulos. Os autores sugerem que se desenvolva uma atividade que se proponha medir a altura do mastro da bandeira brasileira ou do estado ou município existente na escola, ou todas estas, se existirem, ou a altura de um outro elemento de estrutura análoga, utilizando este tema.

Outras sugestões são preparar a atividade, ater-se ao tempo da mesma, pois haverá deslocamentos que podem oferecer dificuldades para os propósitos da mesma, observar antes o local e as condições para realização; listar seus objetivos e resultados desejados, materiais (hastes com medidas determinadas previamente) ou equipamentos, planejar atentamente a abordagem e desejar um dia ensolarado.

Muitas atividades motivacionais são realizadas por professores, contudo o planejamento, o tempo e as atitudes mentais esperadas não tem sido avaliadas e os impactos buscados podem não serem obtidos podendo a atividades não serem bem entendidas pelos alunos, descaracterizando-as.

7.2.1 Uma Atividade Motivacional

O objetivo desta atividade proposta em (POSAMENTIER; KRULIK, 2014, p.29), é o de explorar o interesse que normalmente os alunos possuem em completar lacunas existentes em seus conhecimentos. A ideia é despertar os alunos para detalhes simples existentes em qualquer conteúdo matemático que após descoberto ajusta o conhecimento esclarecendo e permite a meditação até sobre outras possibilidades, ampliando a pesquisa sobre o tema. Deve ser escolhido apropriadamente pelo professor consultando seu planejamento, pertinência e oportunidade de aplicação.

Para esta atividade, entre outras possibilidades foi escolhido um tema que trará surpresa para os alunos, pela sua inusitada facilidade, levando-os a conclusão da existência de uma lacuna em seus conhecimentos. Interessante que o tema esteja sendo tratado, ou será tratado oportunamente, para que os efeitos motivadores seja melhor estabelecidos.

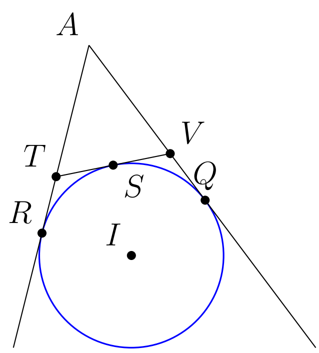
<u>O tema</u> : segmentos tangentes ao mesmo círculo, que exigirá simplesmente o quadro. A Figura 20, ilustra o problema, cujo enunciado é:

Os segmentos AQ, AR e TV são tangentes ao círculo com centro em O nos pontos R, Q e S, respectivamente. Solicita-se que os alunos encontrem o perímetro do triângulo ATV, sendo que $AQ = 8$cm.

A atividade está perfeitamente adequada ao tempo que se dedica a temas motivadores, pois é simples e rápida. Entretanto, os autores, tendo aplicado anteriormente esta atividade percebem que os alunos, inicialmente, entendem que falta algo para a resolução do referido problema pois desconhecem AT, AV, TV. O conteúdo que foi ou será apresentado, estabelecerá que os segmentos tangentes a um círculo provenientes de um único ponto exterior ao mesmo, são iguais. Isto faz com que $TR = TS$ e $VS = VQ$ e ainda, $AR = AQ$. Assim, $AR = AT + TR = 8$ ou $AR = AT + TS = 8$, e desta forma $AQ = AV + VQ = AR = 8$ ou $AQ = AV + VS = AR = 8$, concluindo que o perímetro do triângulo ATV é de 16 cm.

Certamente este problema será tratado de uma forma mais eficiente do ponto de vista de interesse e aprendizado após esta atividade, pelo elemento surpresa, se houver, pela facilidade, pela imediata aplicação.

Figura 20 – Atividades motivantes



Fonte: (POSAMENTIER; KRULIK, 2014, p.26, reprodução nossa).

7.2.2 Estratégias

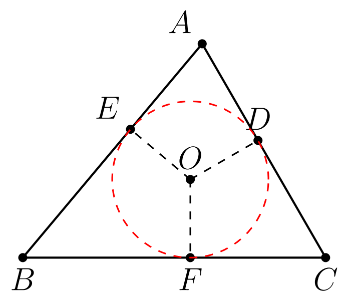
Sabe-se, pela experiência, que não há uma forma única para resolver problemas, seja de uma maneira geral, problemas práticos do cotidiano, sejam os problemas geométricos, ou matemáticos. No entanto, existem abordagens que, se convenientemente avaliadas, frente aos cenários apresentados podem bem conduzir a solução de alguns problemas. Em (POSAMENTIER; KRULIK, 2015), os autores examinam estratégias sugerem formas de lidar com as mesmas de maneira que a melhor abordagem seja escolhida pelo resolvedor. Apresentam a abordagem comum e a exemplar, mostrando as diferenças. A ideia é fazer com que no processo de resolução de problemas haja espaço para a decisão efetiva e apropriada da estratégia a ser seguida.

Estratégias abordadas:

- **Raciocínio lógico**; Parece estranho e redundante devotar uma estratégia como raciocínio lógico para resolução de problemas matemáticos, mais especificamente geométricos. É que em certos problemas a estratégia lógica é mais contundente, o que não é comum a qualquer problema. Observe-se o exemplo:

Considere um triângulo, cujo perímetro é numericamente igual a sua área. Qual é o raio do círculo inscrito a este triângulo?

Figura 21 – Técnicas das áreas na resolução de problemas



Fonte: (POSAMENTIER; KRULIK, 2014, p.05, reprodução nossa).

- **Abordagem Comum**: Uma ideia seria atribuir valores à área do triângulo e seu perímetro. Pode ser utilizada como uma abordagem que pode tornar-se frustrante com inúmeras tentativas.

- **Solução Exemplar**: Observando atentamente a figura 21, tem-se que o raio do círculo inscrito é a altura dos triângulos AOB, BOC e COA, e a soma das áreas destes triângulos é igual a área de ABC. Então:

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.r + \frac{1}{2}AC.r + \frac{1}{2}BC.r$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}r(AB + AC + BC)$$

  Mas $AB + AC + BC = p$ é o perímetro de ABC. Como $S_{ABC} = p = \frac{1}{2}rp$, então $r = 2$.

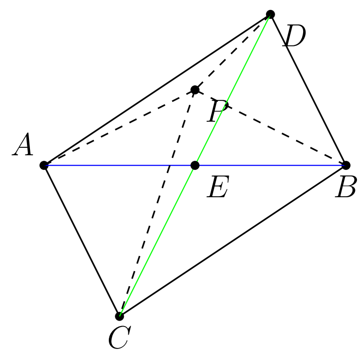
- **Trabalhando para trás**; Nos problemas práticos ou da vida real por vezes encaramos problemas em que esta estratégia é oportuna. Avaliando um acidente de trânsito a polícia trabalha de trás para frente, do cenário final ao cenário do acidente.

  Encontre o ponto no interior de um polígono convexo onde a distância aos vértices do mesmo é mínima.

- **Abordagem Comum**: É possível que alguém encontre por tentativa e erro que o encontro das diagonais do polígono é este ponto. Estaria tropeçando na resposta correta com muitas indagações sobre o método.

- **Solução Exemplar**: Desenhada a figura 22 observa-se que nos triângulos APB e PDC, tem-se $\overline{PA} + \overline{PB} > \overline{AB}$ e $\overline{PD} + \overline{PC} > \overline{CD}$, pelo fato da soma de quaisquer dois lados de um triângulo ser maior que o terceiro. Assim, $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PB} > \overline{AB} + \overline{AC}$. Desta feita tem-se que o ponto E satisfaz a condição do problema.

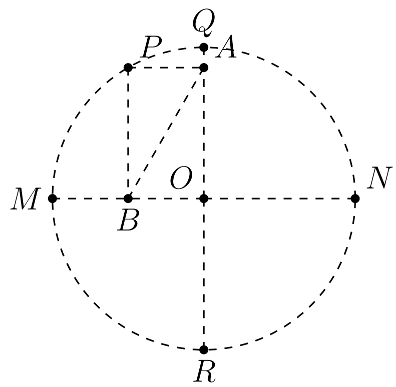
Figura 22 – Trabalhando para trás



Fonte: (POSAMENTIER; KRULIK, 2015, p.37, reprodução nossa).

- **Adotando um diferente ponto de vista**; Utilizando a solução de um problema geométrico para mostrar a aplicação desta estratégia: Tem-se um ponto P selecionado numa circunferência de um circulo de centro no ponto O. Seja PA e PB perpendiculares aos diâmetros também perpendiculares conforme figura 23. Se $AB = 12$, qual a área do círculo?

Figura 23 – Adoção de diferente ponto de vista



Fonte: (POSAMENTIER; KRULIK, 2015, p.47, reprodução nossa).

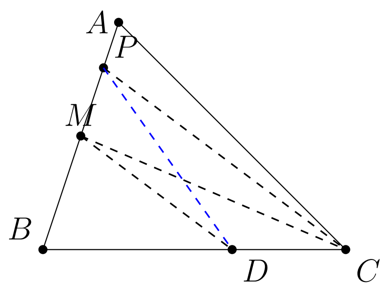
- **Abordagem Comum**: O primeiro impulso é a utilização do Teorema de Pitágoras. Entretanto, não há dados para sua aplicação.

- **Solução Exemplar**: Pode-se abordar o problema utilizando os extremos do cenário apresentado, ou seja, colocando o ponto P no lugar de Q. Desta forma $AB = QO = 12$ e a área do círculo seria 144π. Olhando sob outro ponto de vista tem-se que o polígono $PAOB$ é retângulo e AB sua diagonal que é igual a PO. $PO = 12$ e a área do círculo 144π.

- Considerando casos extremos; É inevitável fazer analogias com as experiências do dia a dia. Por vezes tem-se problemas cotidianos e pergunta-se: *O que poderia ser pior que isso?* Nos negócios avaliando conjecturas pergunta-se também: *Qual o pior cenário para esta situação?* O que acontece é que leva-se alguns elementos do problema ao extremo para tentar encontrar uma saída ou melhor enxergar com o que se esta lidando. Este tipo de estratégia pode ser utilizada na resolução de problemas. Com o exemplo geométrico a seguir pretende-se esclarecer esta abordagem.

- O ponto M é o ponto médio do lado AB de um triângulo ABC. O ponto P é um ponto situado em AM. Uma reta parte de M, paralela a PC, encontra BC no ponto B. Qual a relação entre a área do triângulo BDP e a área do triângulo ABC?

Figura 24 – Considerando casos extremos



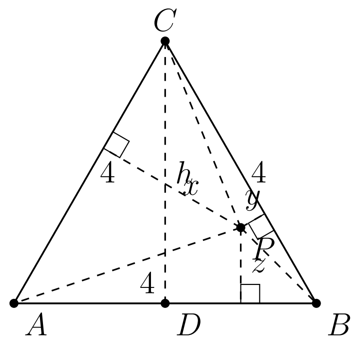
Fonte: (POSAMENTIER; KRULIK, 2015, p.73, reprodução nossa).

- **Abordagem Comum**: Na figura 24, construída através do enunciado, traçando MC, tem-se dois triângulo de áreas iguais, ACM e BMC, posto que a mediana divide o triângulo em dois com áreas iguais. A área de $S_{BMC} = S_{BMD} + S_{CMD} = S_{BMD} + S_{MPD}$. Mas, $S_{BPD} = S_{BMD} + S_{MPD}$ e as áreas de CMD e MPD, são iguais. Logo, $S_{BPD} = S_{BMC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$.

- **Solução Exemplar**: Uma resolução simples pode ser desenvolvida utilizando a localização extrema do ponto P. P possui dois extremos, os pontos M e A. Em M os segmentos PC, MD e MC se fundem num único segmento, MC. O triângulo BDP e MCB seriam os mesmos e $S_{BDP} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Assumindo o outro extremo, tem-se que os pontos P e A se fundem num único ponto, e AD passa a ser a mediana relativa ao lado BC. E assim $S_{BDP} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. É preciso oportunismo e atenção no estudo geométrico do problema para avaliar o uso desta estratégia.

- **Solucionando um problema análogo mais simples**; Há problemas que aparentam ser muito complexos à primeira impressão, seja pelo grande número de dados, seja pela complexidade com a qual os objetos do problema estão inter relacionados. Independente da natureza da aparente complexidade passa ser interessante tentar uma simplificação do problema, tornando-o mais fácil de ser conduzido. Esta é a estratégia apresentada através de um exemplo ilustrado pela figura 25.

Figura 25 – Utilização de problemas análogos na solução de problemas



Fonte: (POSAMENTIER; KRULIK, 2015, p.87, reprodução nossa).

- De um ponto interno a um triângulo equilátero, a soma das distâncias aos lados do mesmo é igual a altura relativa a um dos vértices. Se o lado do triângulo tem comprimento de quatro unidades, qual a soma destas distâncias?

- **Abordagem Comum**: A maneira mais simples de solucionar este problema é utilizar as distâncias relativas ao ponto P à cada lado como as alturas dos triângulos APB, APC e BPC. A soma das áreas destes triângulos é igual a área do triângulo ABC:

$$S_{ABC} = S_{APC} + S_{APB} + S_{BPC}$$

$$\frac{1}{2}(4)(h) = \frac{1}{2}(4)(y) + \frac{1}{2}(4)(x) + \frac{1}{2}(4)(z)$$

$$h = x + y + z = 2\sqrt{3}$$

- **Solução Exemplar**: Um problema análogo a ser considerado é aquele em que P assume a posição de A, fazendo com que as alturas x e y tornem-se nulas e a altura $z = h = 2\sqrt{3}$. Tem-se aqui duas estratégias em uma: casos extremos e problema análogo mais simples.

8 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR RENÉ DESCARTES

Não seria possível tratar o tema resolução de problemas sem citar o filósofo e matemático René Descartes, dono de contribuições indiscutíveis para a matemática. Ele nasceu em 1596 em Haye, na França, teve uma enfermidade que tomou conta de sua juventude, em 1617 alistou-se e ao deixar o exército, viajou pela Europa durante cinco anos e estabeleceu-se na Holanda.

Descartes fez contribuições para a filosofia, ciências em geral, mas foi na matemática, especificamente na geometria que produziu uma inovação que acrescentou uma nova concepção à geometria, incrementando à ela a aritmética, (SAPUNARU; BRANT, 2018). O físico , Leonard Mlodinow (2004, p.10) referiu-se a essa inovação como o casamento da geometria com os números.

É atribuído a George Bernard Shaw, um texto que define muito bem René Descartes:

"The reasonable man adapts himself to the world; the unreasonable one persists in trying to adapt the world to himself"(MICHALEWICZ; FOGEL, 2013, p.01).

"Therefore all progress depends on the unreasonable man"(MICHALEWICZ; FOGEL, 2013, p.01).[1]

Descartes criticava e sempre mostrou-se inconformado com a geometria grega. Achava que eram cansativas e enfadonhas suas demonstrações, era necessário economizar o trabalho mental, e assim reuniu geometria e números (MLODINOW, 2004). Para entender a inconformidade de Descartes, compare as definições de Euclides e dele sobre o círculo:

*(*Euclides:) "Um círculo é uma figura plana contida por uma linha [isto é, uma curva] tal que todas as linhas retas que vão até ela de um certo ponto de dentro do círculo - chamado centro - são iguais entre si"(MLODINOW, 2004, p.87).

Descartes: "Um círculo é todo x e y que satisfaça a $x^2 + y^2 = r^2$ para algum número r"(MLODINOW, 2004, p.87).

O método de Descartes de associar a geometria e a álgebra deu origem ao que hoje descrevemos como geometria analítica. O trabalho de Descartes permitiu o desenvolvimento de uma geometria que estruturou a Teoria da Relatividade Geral, a Geometria Diferencial e a geometria assistida pelo computador, a geometria dinâmica.

Em, *O Discurso do Método*, segunda parte, Descartes trata sobre resolução de problemas, amparado no que aponta como as vantagens da filosofia, lógica e matemática, e enunciou seus preceitos(DESCARTES, 2015):

> Não aceitar jamais alguma coisa como verdadeira que eu não conhecesse como tal; isto é, evitar a precipitação e a prevenção, e nada incluir em meus julgamentos senão o que se apresentasse de maneira tão clara e distinta a meu espírito que eu não tivesse nenhuma ocasião de colocá-lo em dúvida (DESCARTES, 2015, p.49-p.50).

[1] Tradução nossa: Os conformados adaptam-se ao mundo; os inconformados persistem tentando adaptar o mundo a eles. Assim, todo o progresso depende dos inconformados.

"Dividir cada uma das dificuldades que eu examinasse em tantas parcelas possíveis e que fossem necessárias para melhor resolvê-las"(DESCARTES, 2015, p.50).

> Conduzir por ordem meus pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para subir aos poucos, como por degraus, até o conhecimento dos mais compostos, e supondo mesmo uma ordem entre os que não se precedem naturalmente uns dos outros (DESCARTES, 2015, p.50).

"Fazer em toda parte enumerações tão completas, e revisões tão gerais, que eu tivesse a certeza de nada omitir"(DESCARTES, 2015, p.50).

O segundo e o terceiro preceito de Descartes remetem à Lista de Polya:

"Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?"(POLYA, 2006, p.XIX)

"Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível?"(POLYA, 2006, p.XIX)

Polya amparou-se, provavelmente, em Descartes, pois encontra-se em seu trabalho muito do pensamento do filósofo francês.

9 A ESCOLA RUSSA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os russos estimulam e atraem seus estudantes para as ciências através de torneios e eventos promovidos pelas universidades de forma extracurricular. São competições que duram até cinco horas aproximadamente e de Moscou se expandiram para outras cidades. A ideia é despertar a atenção e curiosidade dos estudantes diante de uma significativa quantidade de competições ocorrendo simultaneamente.

Os mais famosos destes eventos são os Círculos Matemáticos que na Universidade Estatal de Moscou já existem há mais de um século. São constituídos de encontros entre quinze e trinta estudantes e de três a seis instrutores, estudantes universitários, e um experiente professor de matemática por sala. Qualquer pessoa pode participar de um círculo matemático, que são gratuitos.

A dinâmica dos encontros pode mudar de um ano para outro, há preocupação dos organizadores com a heterogeneidade dos participantes e utilizam estratégias para lidar com esta realidade. Os estudantes que obtém sucesso num determinado encontro são remanejados para um círculo matemático regular, os que encontram dificuldades são melhor trabalhados. Tudo isso exige bons instrutores. Os círculos ocorrem durante semanas e compatibilizam as férias escolares, o inverno e eventos escolares importantes.

As sessões são conduzidas iniciando com a distribuição de textos com os problemas para serem resolvidos, em qualquer ordem salvo sugestão do instrutor, que estará disponível para atender qualquer estudante. O progresso de cada estudante é registrado em um diário especial, onde são computados os problemas resolvidos. Isto é feito durante o transcorrer da sessão para oportunizar o surgimento de dificuldades gerais e a necessidade de sua identificação e medidas de apoio.

Há sempre problemas geométricos em forma de quebra-cabeças ou geometria clássica que requer conhecimentos mínimos. (DORICHENKO, 2016, p.x-xvi)

> O objetivo dos círculos matemáticos não é o de explorar problemas de um determinado tipo ou dominar uma coleção de fatos, mas interessar os estudantes em matemática, mostrar que é uma ciência linda e interessante, ensiná-los a raciocinar e a distinguir uma solução de algo que não é solução. (DORICHENKO, 2016, p.xvii)

A contribuição da Escola Russa para a educação matemática, através dos círculos matemáticos, é invejável do ponto de vista educacional, os jogos atraem os jovens de forma intensa e contínua, isto acontece no xadrez, onde jovens permanecem horas discutindo uma abertura ou uma final de difícil condução. Tornar a matemática uma ciência de extremo interesse através da resolução de problemas é viável. Como o xadrez tem-se a geometria, complexa e elegante. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2010, p.167)

Os pesquisadores V. Gusev, V. Litvinenko e A. Mordkovich são os representantes da escola matemática russa. Eles escreveram o livro *Solving Problems in Geometry* onde abordam métodos tradicionais de resolução de problemas proposição que dar bastante ênfase aos mesmos e é amparada com um coleção de problemas.

Os autores se preocuparam com a escolha adequada dos problemas apresentados para, em primeiro lugar, atender as necessidades metodológicas do aprendizado e em seguida que a coleção de problemas seja ampla e completa. Entendem que ao resolver problemas geométricos existem três métodos disponíveis: o geométrico, o algébrico e o método misto, geométrico e algébrico. Além disso os seus casos especiais, o método do elemento de referência que se a referência é área, designa-se, o método das áreas e o método de um parâmetro auxiliar.

Independente da forma ou meio utilizado na resolução de problemas, os autores alertam para o conhecimento dos teoremas e para o desenvolvimento do hábito de resolver problemas, no sentido da obtenção de êxito neste processo.

Como ponto de partida os autores realizam uma revisão de teoremas básicos, propriedades geométricas fundamentais sobre triângulos e quadriláteros (propriedade das bissetrizes, medianas, relações métricas), círculos e áreas de figuras planas.

Do ponto de vista dos métodos apresentados os autores deram atenção à importância da verificação da congruência entre segmentos e ângulos e sua aplicação na resolução de problemas.

Alertam para o método de construções auxiliares, tais como:

- Desenho de linhas paralelas ou perpendiculares para dar ênfase a algum elemento em uma figura;
- A duplicação do comprimento de uma mediana de um triângulo com o objetivo de criar um paralelogramo e usufruir de suas propriedades na busca de soluções para um dado cenário;
- A construção de círculos, a ligação do raio ao ponto de contato de tangentes ao mesmo círculo, sempre buscando evidenciar associações de suas propriedades ao problema em fase de plano de execução.

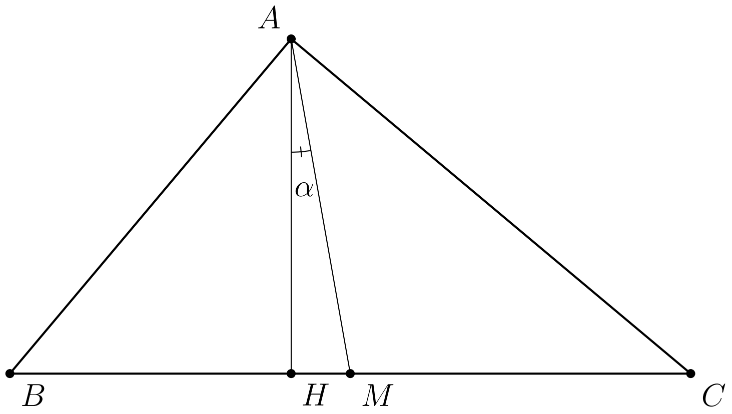
O método de introdução de um parâmetro auxiliar é utilizado, normalmente quando existe a necessidade de descobrir uma relação entre lados, comprimentos ou áreas e procede-se desta forma: Supõe-se que um dos elementos da relação linear desejada é conhecido, expressa-se as quantidades desejadas em relação a este elemento e monta-se a relação.

9.0.1 Método de Introdução de um Parâmetro Auxiliar

Será usado para exemplificar o método de introdução de um parâmetro auxiliar o problema ilustrado pela figura 26, cujo enunciado é:

A altura e a mediana de um triângulo retângulo ABC, possuem entre si um ângulo $\angle HAM = \alpha$. Sabe-se que o $\cos\alpha = \frac{40}{41}$. Encontrar a relação entre $\frac{AB}{AC}$.

Figura 26 – Método de introdução de um parâmetro auxiliar



Fonte: (GUSEV; LITVINENKO; MORDKOVICH, 1988, p.21, reprodução nossa).

Sabe-se então a relação entre $\frac{AH}{AM} = \frac{40}{41}$. Aplicando o método, supõe-se $AH = k$, então,

$$\frac{k}{AM} = \frac{40}{41}$$

$$AM = \frac{41}{40}k$$

$$HM = \sqrt{AM^2 - AH^2}$$

$$HM = \sqrt{(\frac{41}{40})^2 - h^2} = \frac{9}{40}h$$

Utiliza-se a propriedade do triângulo retângulo onde o comprimento da mediana, relativa ao ângulo reto, é metade do comprimento da hipotensa. Assim:

$$AM = MC = MB = \frac{41}{40}k$$

$$BM = BH + HM$$

$$BH = BM - HM = \frac{41}{40}k - \frac{9}{40}k = \frac{4}{5}k$$

$$HC = HM + MC$$

$$HC = \frac{9}{40}k + \frac{41}{40}k = \frac{5}{4}k$$

$$AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{(\frac{4}{5}k)^2 + k^2} = \frac{k}{5}\sqrt{41}$$

$$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{(\frac{5}{4}k)^2 + k^2} = \frac{k}{4}\sqrt{41}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

Trata-se de uma solução pelo método algébrico utilizando o caso especial de introdução de um parâmetro auxiliar, bem adequado.

9.0.2 Um Exemplo utilizando Construções Auxiliares

O próximo método é desenvolvido de forma geométrica, ilustrado pela figura 27 e contará com o caso especial de abordagem utilizando construções auxiliares. Seu enunciado é:
Mostre que se a altura e a mediana, traçadas de um único vértice de um triângulo escaleno, ficarem dentro do triângulo e formarem com seus lados laterais, ângulos iguais, o triângulo é retângulo.

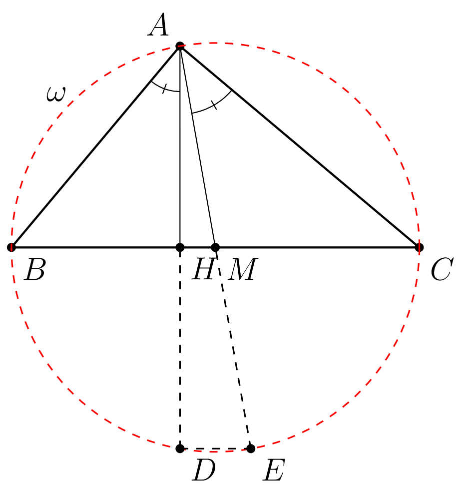
Como inicialmente foi mencionado será utilizado o método geométrico e procedimento inicial ilustra-se na figura 27.

A ideia é mostrar que se os ângulos $\angle BAH$ e $\angle MAC$ forem iguais o triângulo será retângulo. Os autores sugerem, inicialmente, a realização de uma construção auxiliar, um círculo, circunscrevendo o triangulo, a circunferência que como (Tao, 2013, p.91), comenta, trata bem os ângulos e como os autores esperam, a utilização das propriedades do novo cenário.

A construção se desenvolve, ver figura 27, com o prolongamento da altura AH e da mediana AM até interceptarem a circunferência, ω, nos pontos D e E.

Tomando-se os ângulos $\angle BAH$ e $\angle EAC$, iguais por hipótese, os arcos BD e EC também serão iguais, o que faz com que os segmentos DE e BC sejam paralelos. Assim sendo, como o ângulo $\angle AHM = 90^o$, pois AH é a altura do triângulo ABC relativa ao vértice A, o ângulo $\angle ADE$ também é reto. Desta forma, o triângulo ADE é retângulo de hipotenusa AE, que é portanto o diâmetro da circulo, ω.

Figura 27 – Construções auxiliares na resolução de problemas



Fonte: (GUSEV; LITVINENKO; MORDKOVICH, 1988, p.39, reprodução nossa).

Assim sendo, o centro desta circunferência esta no segmento AE, que é o diâmetro, e na mediatriz relativa a BC que passa pelo ponto M, logo, M é o centro da circunferência e

BC também é diâmetro de ω. Se BC é diâmetro de ω, então $\angle BAC$ é um ângulo reto e o triângulo ABC, é retângulo.Para V. Gusev, V. Litvinenko e A. Mordkovich, a exercitação fortalece o aprendizado necessário para resolução de problemas, em virtude disso, o livro possui cerca 1000 problemas geométricos, entre problemas comentados e assistidos pelos professores e problemas para serem resolvidos sem assistência. Além do que foram elaborados, cuidadosamente, para que todos os métodos fossem apresentados de diversas formas, para problemas iguais, quando pertinente, e em nível de complexidade variada. O livro tem como público alvo estudantes de matemática de instituições russas, candidatos a futuros professores.

10 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Ao iniciar este trabalho imaginou-se que as técnicas de prova, demonstração e determinação e as ferramentas da lógica seriam os principais elementos no processo de resolução de problemas. Ou seja, o pensar matemático precisaria ser investigado a fundo, como modo de encontrar estratégias e técnicas que orientem o ensino e aprendizagem para resolução de problemas. Isto está presente na dinâmica do processo de resolução de problemas, contudo outros elementos que fogem ao rigor matemático adquirem importância como: as atitudes mentais, a intuição, a imitação, a inventividade, elementos inerentes ao ser humano.

A heurística, citada várias vezes por George Polya, constitui-se de elementos de criatividade e invenção e é parte importante destes elementos do processo. Desta feita, a resolução de problemas matemáticos, e neste caso os problemas geométricos, envolvem os diversos aspectos e atitudes mentais e visuais de cada indivíduo.

A natureza humana é heterogênea e isso faz com que as pessoas sejam diferentes e com recursos pessoais diversos, em número e potencial. O que se quer dizer é que nem todas as pessoas possuem a aparelhagem matemática, o pensar matemático bem resolvido como estrutura mental de raciocínio. Estes elementos podem ser adquiridos por exercitação mas certamente movidos por muita motivação. O matemático David Hilbert não foi o prodigioso aluno em matemática como seu colega Minkowski(1864-1909) como relatado em (YANDELL, 2001). Mais tarde, Hilbert tornou-se um dos mais dinâmicos matemáticos do final do século XIX ao início do século XX, autor de inúmeras contribuições para a matemática. Um aluno com dificuldades no trato com a matemática não significa que não pode ser bem encaminhado, motivado e vir a ter, com esta ciência, uma atuação favorável.

Para solucionar problemas geométricos inicialmente se faz necessário conhecer geometria, axiomas, teoremas, definições, seus elementos e linguagem. A exercitação é uma forma muito aplicada pelo ser humano para o aprendizado das coisas, dos ofícios, da música, dos esportes e da matemática entre outras áreas do conhecimento, e portanto da geometria. É baseada no processo repetitivo, mas existem outros, como a habilidade de encontrar analogia entre problemas despertando métodos para encontrar uma solução. Há também a imitação, princípio da formação de inúmeros ofícios que passam de pai para filho e que permeia as atitudes humanas, os questionamentos e as posturas diante de um problema, os mecanismos de busca, a representação gráfica, a estruturação inventada para dar mais visibilidade ao problema, mesmo que geométrico. Imitar a boa prática de colocar-se diante do enunciado de um problema, com o objetivo de entendê-lo muito bem, será muito proveitosa principalmente se esta convergir para encontrar o jeito pessoal de fazê-lo mais tarde. A resolução de problemas oferece uma forma de aprendizado inserida num processo de contínuo aprendizado.

George Polya estruturou o processo de resolução de problemas definindo etapas: Compreender o problema, Estabelecer um plano, Executar este plano e Examinar a solução. Num conjunto de definições e comentários, que nominou como sendo um dicionário, definiu, explicou e exemplificou, cada uma das etapas, suas características e elementos como analogia, intuição, invenção, imitação que podem ser combinadas no que chamou de heurística. (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002)

As diversas contribuições buscadas para realizar este trabalho já haviam de alguma forma sido encaminhadas por Polya ou por aqueles pesquisadores em que ele se amparou para sua visão sobre resolução de problemas. Elas, no entanto, foram ampliadas, esmiuçadas e tratadas de maneira específica e até de forma aplicada. Alguns pesquisadores como Posamentier e Zeitz introduziram aspectos psicológicos e valorizaram por exemplo, a motivação, outros as atitudes mentais, as técnicas matemáticas ou geométricas, a visualização.

A pesquisa mostra algumas convergências quanto ao processo de resolução de problemas, entre os autores. Apesar de não estabelecer etapas bem definidas como George Polya o fez (compreensão, planejamento, execução e reexame), o entendimento do problema aparece em todas as recomendações dos autores seguido de uma mescla entre o planejamento e a execução de um plano. Ainda na etapa de compreensão do problema todos os autores recomendam a elaboração de diagramas, desenhos, para melhor entendimento do cenário que o problema oferece.

Quanto aos métodos, George Polya, Paul Zeitz, Elisha Loomis e Alfred Posamentier apontam que a análise e síntese, à moda de Pappus de Alexandria, como forma de resolução de problemas, está em desuso com mudança do significado destes termos, já em suas épocas.

Ainda sobre métodos e técnicas de abordagem durante o processo de resolução de problemas, as construções auxiliares, autêntico mecanismo de heurística e a busca por semelhança entre triângulos, são uma unanimidade entre os autores. Relação entre áreas é um recurso frequentemente utilizado apesar de sua especificidade.

Os autores dividem os problemas quanto a modalidade em teoremas e problemas, como os gregos, problemas de determinação e demonstração e problemas de determinação e prova.

Quanto a forma de resolução os problemas geométricos tem sido divididos em algébricos, puramente geométricos (baseados em construções geométricas ou utilizando apenas objetos da geometria) e mistos.

Todos os autores revelaram, a sua maneira, as impressões próprias sobre as atitudes mentais durante o processo de resolução de problemas. Aspectos psicológicos que influenciam nas atitudes do resolvedor e no seu processo de criatividade.

É nítida, e foi apontada em várias etapas deste trabalho, a influência de René Descartes, Jaques Hadamard (2009) e Pappus de Alexandria, na obra de Polya.

O uso de mecanismos baseados em analogia, heurística, a arte da invenção e descoberta, na interpretação de cada autor, perfazem todas as recomendações.

Não foram detectadas divergências específicas que mereçam apontamento. No entanto, fica claro que Polya escreve para o professor, enquanto Loomis escreve para o aluno. Os demais autores escrevem para um público mais amplo. Zeitz, por exemplo aponta o professor, o aluno e interessados em Matemática como seus possíveis leitores. Posamentier e Krulik (2014) escrevem para o professor visando a motivação para alunos do ensino médio, enquanto V. Gusev, V. Litvinenko e A. Mordkovich, escreveram para alunos dos cursos de formação de professores de Matemática.

O resolvedor de problemas tem na primeira etapa, a compreensão do problema, que avaliar a clareza do enunciado do mesmo, seus elementos, reconhecer as verdades existentes em torno deste, talvez aguardar que a clareza se estabeleça com o tempo, se julgar necessário. No entanto se não estiver motivado ou se o problema não motivá-lo, nada ocorrerá. Também pode ser vítima da pressa que pode encolher a reflexão e inibir a materialização dos objetos do problema.

A segunda etapa ocorre com a clareza de objetivos, com a identificação das características do problema em questão, momento para avaliar o ferramental disponível para traçar um plano. Pode vir com um forte apoio intuitivo mostrando caminhos ou a descoberta de um problema análogo a ser avaliado, outra opção de caminhos. Intuição e analogia são elementos incertos, transitórios, por isso a paciência para efetuar análises quanto maior for a dificuldade do problema.

São etapas importantíssimas, sem as quais o desenvolvimento do processo de resolução de problemas perde em objetividade, podendo levar a caminhos tortuosos, incertos e inseguros para a obtenção de resultados.

A execução do plano e o exame da solução encontrada são etapas relevantes quer o resolvedor tenha ou não sucesso. Se houve sucesso isto significa que o plano escolhido e sua execução foram bem desenvolvidos e o exame da solução encontrada garante o resultado, já que não é interessante que este resultado seja do conhecimento do resolvedor por antecipação. Caso haja um insucesso, ele certamente será identificado durante a execução do plano ou o exame da solução e promoverá o retorno para a primeira etapa.

De uma maneira geral, a combinação entre as técnicas e verdades matemáticas, com as percepções humanas, para que estas sejam acionadas no momento adequado e em sintonia com as experiências vivenciadas pelo resolvedor, são os elementos do processo de resolução de problemas. É preciso levar o aluno, o resolvedor, a praticar maneiras de perceber de forma oportuna suas intuições, aplicar um plano utilizado num problema anterior que pareça análogo, descobrir uma forma de tratar heuristicamente uma passagem, seja algébrica ou geométrica ou ambas. É preciso, antes de tudo, descobrir seus talentos matemáticos e adquirir confiança na sua aplicação.

11 AO PROFESSOR

11.1 Preparação

Em relação as abordagens, estratégias, táticas, orientações e contribuições dos autores que escreveram sobre resolução de problemas, é necessário elencar pontos que os professores devem priorizar em relação as atividades de ensino e aprendizagem. Em primeiro lugar, o conhecimento de cada um de seus alunos, cada indivíduo, cada ser humano, da forma mais objetiva. Isto se faz necessário ainda mais já que os processos de aprendizagem e resolução de problemas, se passam segundo as características humanas de cada um dos aluno. Os elementos motivadores, as capacidades de enfrentamento de suas próprias dificuldades, durante este processo, estão contidas no universo de cada indivíduo. O ferramental heurístico com o qual cada aluno lida para buscar e solucionar seus problemas matemáticos, são próprios e indissociáveis. Contudo é possível aprender uns com os outros, isto precisa ser considerado.

Em segundo lugar, o conjunto dos conteúdos relativo ao universo a ser explorado, através da resolução de problemas, neste caso específico, motivação deste trabalho, a geometria, seus objetos, definições, teoremas e verdades geométricas, técnicas de traçado, entre outros, deve ambientar a sala de aula, deve ser discutido com naturalidade, deve fazer parte da rotina dos alunos.

Combinando estes dois elementos deve existir um ambiente cooperativo, proporcionado pela vontade de resolver problemas entre alunos, e deve ser estabelecido pelo professor. Os alunos devem ser municiados com as estratégias a serem pinçadas e sistematizadas, do conjunto das contribuições analisadas, auxiliando-os a se encontrarem na caminhada rumo à resolução de problemas. Mas, como isto pode ser feito? Pode ser realizado explorando:

1. A heurística desenvolvida e fundamentada por George Polya para a resolução de problemas, sua *lista*, considerações, e recomendações em *A Arte de Resolver Problemas*;

2. Provas de teoremas e resolução de problemas, as técnicas demonstrativas, estratégias, imitações, elementos heurísticos desvendados, ações inventivas e até adivinhações percebidas;

3. Elementos motivadores em todas as atividades desenvolvidas, voltadas para a resolução como processo, voltadas para atitudes mentais, voltados para os interesses dos alunos;

4. A percepção de cada indivíduo das atitudes mentais, as estratégias próprias durante o processo de resolução de problemas revelado em reuniões em grupo ou com o mediador.

Propõe-se um conjunto de atividades didáticas onde o aluno é a figura central; o professor deve orientar o processo, mediando o grupo, agindo como um timoneiro, ditando o ritmo do processo, proporcionando a cooperação mútua entre indivíduos, os grupos, entre os pares, trazendo para si aqueles que mais se desenvolverem, permitindo-os contribuir para o grupo, sem permitir desigualdades passíveis de desestruturação do ambiente e ainda buscando independência de cada indivíduo.

Caberá ao professor planejar atividades, **estudar e vivenciar** cada problema, construindo estratégias e avaliando o que oferece quanto aos caminhos possíveis e as estratégias permissíveis, a fim de estimular o grupo de forma gradativa, na medida, para alguns, da dificuldade ou da capacidade de invenção individual. O processo de resolução de problemas deve fluir como um processo **investigativo**, conforme sugerido pelos autores pesquisados.

Como ponto de partida a *lista* de Polya possui a estrutura básica para a ambientação na construção do processo de resolução de problemas perfazendo os passos relativos a compreensão de cada desafio, a definição do plano de ataque, a execução deste plano e o exame minucioso de sua solução. Cada passo permeado pelos questionamentos frente a cada dificuldade encontrada, as reflexões que podem ser solitárias ou conjuntas.

Caberá ao professor explorar de maneira dinâmica o potencial da *lista* de Polya oferecendo possibilidades individuais de orientação, em pares homogêneos e heterogêneos ou trabalhando em grupo. Caberá também opções quanto à explicitação por parte do aluno ou do grupo de dificuldades, sugestões de caminhos, busca da compreensão e entendimento dos passos ou etapas.

O professor poderá iniciar ataques focando cada etapa de forma individual, oferecendo compreensão e entendimento explícito, claro e justificável. O objetivo é que cada aluno se encontre de forma efetiva no processo e até crie questionamentos próprios frente aos dispostos por Polya na *lista*.

Ainda com base nas fases definidas por George Polya, para cada uma delas existem comportamentos possíveis assumidos pelos alunos que merecem a atenção e observação atenta do professor que precisa atuar preventivamente:

- Compreensão do Problema
  Inicialmente pode ocorrer a tentativa de progressão sem uma ideia definida, também uma angústia pela falta de uma resposta de antemão sobre o problema, um *insight* sequer, ou mais provável a compreensão incompleta do problema.

- Concepção de um Plano
  A espera que uma resposta surja, como que por mágica, não é de todo improvável. Não pensar num plano não é incomum. O medo de seguir levado por uma ideia e ter que abandonar, ou ter que voltar ao princípio, leva à insegurança na adoção de um planejamento minucioso.

- Execução do Plano
  Costuma acontecer a falta de paciência para a verificação de cada passo, o problema passa a ser um incômodo.

- Verificação do Resultado
  Solucionado o problema, o mesmo é abandonado. A falta do exame e verificação da solução adotada tem sido uma postura comum. A reflexão sobre as circunstâncias nas quais a solução foi encontrada, os caminhos e sua relação com os adotados em outros problemas não é efetuada. Por vezes o próximo problema é análogo e não se percebe.

11.2 Atividades

Uma forma encontrada para o ensino e aprendizagem do processo de resolução de problemas geométricos é o desenvolvimento de um conjunto de atividades, devidamente programadas para este fim, envolvendo professor e seus alunos.

O desenvolvimento deve ser elemento facilitador para a observação, o despertar da capacidade inventiva e criativa e aprimoramento das técnicas e abordagens que os alunos já possuem, demonstrativas, determinísticas e heurísticas, visando o processo de resolução de problemas geométricos no plano.

Estas atividades poderiam ser melhor planejadas e avaliadas por uma equipe multidisciplinar, professores, pedagogos e psicólogos, fazendo com que os múltiplos aspectos encontrados no processo de resolução de problemas fossem tratados.

Visa-se a aplicação a alunos oriundos do processo de formação de professores de Matemática.

Cada atividade será iniciada por um momento motivacional, de no máximo quinze minutos e a apresentação de uma situação-problema, ou a exposição de um conteúdo ou conceito, ou uma atividade experimental para vivenciamento, *feedback* e debate em grupo.

O objetivo é praticar os passos preconizados por Polya, utilizar e explorar a sua *lista*, explorar suas recomendações e sugestões, no processo de resolução de problemas, e oferecer oportunidade para experimentação por parte dos alunos e do professor, descobrindo suas próprias práticas heurísticas e lógicas, deterministas ou demonstrativas.

A prática das atividades desenvolvidas pelos autores pesquisados, suas estratégias de ataque aos problemas geométricos, seus questionamentos inventivos, suas atividades motivacionais, estratégicas e exemplos, farão parte das atividades propostas.

Um elemento extremamente importante se refere ao estabelecimento de cenários que promovam a independência e autonomia do aluno.

As atividades estão formatadas em conteúdos de Geometria Plana e atendem a um conjunto diversificado de métodos de resolução de problemas geométricos.

As atividades propostas contam com registros da opinião e das experiências vividas pelos alunos no transcorrer das mesmas. Estes registros servem para que o professor tenha conhecimento, do ponto de vista do resolvedor de problemas, de suas reações, atitudes e opiniões, preferencialmente compartilhadas com o grupo.

- Área do Conhecimento: MATEMÁTICA
- Assunto: Resolução de Problemas Geométricos no Plano
- Conteúdos Abordados: Passos de George Polya para Resolução de Problemas. A Lista. Problemas Geométricos. Método das Construções Auxiliares. Método do Elemento de Referência. Método das Áreas. Método da Introdução de Parâmetro Auxiliar.
- Tema: Raciocínio Determinístico, Demonstrativo e Raciocínio Plausível ou Aceitável. Percepção. Experimentação.
- Conteúdos Matemáticos: Geometria dos Triângulos e Polígonos. Geometria do Círculo.
- Justificativa: Os conteúdos abordados se constituem de métodos heurísticos e lógicos para o processo de resolução de problemas. A experimentação dos métodos se fará através da resolução de problemas propostos, de desafios e situações didáticas propostas pelo professor.
- Competências: Compreender os passos, estratégias e técnicas no processo de resolução de problemas geométricos.
- Objetivos: Desenvolver habilidade de resolver problemas geométricos. Aprender ações inventivas. Reconhecer atitudes mentais restritivas ao processo de resolução de problemas. Entender suas próprias estratégias e contribuir para o desenvolvimentos das estratégias do grupo.
- Recursos: Quadro branco, Projetor Multimídia, Computador, Aplicação de Geometria Dinâmica (Geogebra), folhas de papel.
- Avaliação: Ao final de cada atividade, mesa de debate, *brainstorming*, experiências, reconhecimento de padrões de resolução, estratégias utilizadas, elementos da Lista utilizado.

11.2.1 Atividade 1 - Fases da Resolução de problemas e a *Lista*

- Atividade Motivacional - Uma história pertinente: O professor iniciará a atividade contando sobre a história do Matemático americano Elisha Scott Loomis e sua coletânea de 370 (1940) demonstrações do Teorema de Pitágoras. Fará um breve resumo da biografia de Loomis, apresentará pelo menos três provas sem detalhamento, apenas as ilustrações, e nomeará alguns dos criadores das demonstrações coletadas (HELLMEISTER, 2013, p.1-10).
- Atividade Principal: Os passos de George Polya e sua Lista
- Em forma de apresentação, o professor colocará os alunos em contato com a teoria de George Polya sobre o processo de resolução de problemas de uma forma geral. Em sua abordagem, detalhará os passos definidos para o processo, as expectativas do resolvedor, o papel do mediador no processo e apresentará a Lista, como elemento orientador e gerador de ações heurísticas. Explicará sobre o termo heurística, sua importância no processo e a necessidade da percepção de cada aluno no desenvolvimento de suas habilidades próprias.(POLYA, 2006)
- Avaliação: Cada aluno fará uma pequena exposição, escrita e oral, sobre a atividade; conhecimento prévio da mesma, as experiências próprias com resolução de problemas, a estruturação exposta e a coerência como resolvedor.

11.2.2 Atividade 2 - Resolução de Problemas Comentada

- Atividade Motivacional - Avaliando todos os dados: Para esta atividade o professor descreverá o diálogo entre dois matemáticos, Ruy e Dantas, que não se encontravam há anos. Após rápida atualização das novidades em virtude do tempo de afastamento os professores concluem que estão com histórias diferentes com relação a filhos. Dantas possui três filhos e Ruy não teve esta experiência, ainda. Por curiosidade e costume matemático, propõem um problema. Adaptado de (MICHALEWICZ; FOGEL, 2013, p.9), (ZEITZ, 2021, p.2).
  - Ruy, qual a idade dos meus três filhos, se o produto destas é 36?
  - Dantas, mesmo por força bruta e com este espaço de soluções, há insuficiência de dados.
  - OK! Esqueça meses e dias, a soma das idades é igual ao número de janelas deste edifício, aqui em frente.
  - Hum! Mas, ainda não é suficiente...
  - Certo, Ruy!... Os olhos do mais velho são azuis!
  - Perfeito... Agora tenho as idades de seus filhos.

- O professor deve permitir um pequeno espaço de tempo para alguma manifestação sobre o resultado, antes de prosseguir.

- Atividade Principal: O professor preparou, previamente, a resolução dos seguintes problemas: Dado o retângulo $ABCD$, nos lados AB e CD os pontos F e E, respectivamente, são escolhidos de forma que $AFCE$ seja um losango. Se $AB = a$ e $BC = b$ encontre a medida de EF.(POSAMENTIER; SALKIND, 2012, p.12)

- Segundo problema: O triângulo ABC é isósceles e retângulo, sendo o ângulo C, reto e $AC = BC = 1$. D é o ponto médio de AC e CP é perpendicular a BD em P. Encontre a distância do ponto P ao baricentro do triângulo ABC.
  A resolução será portanto desenvolvida pelo professor apresentando todos o desenvolvimento, elencando suas impressões pós enunciado, ilustração, compreensão do mesmo, plano de resolução e sua execução, raciocínio determinista e heurístico. Aspectos envolvendo orientação frente aos objetos do cenário e questionamentos pertinentes. ((POSAMENTIER; SALKIND, 2012),p.13)

- Avaliação: Cada aluno deve expressar de forma escrita e oral, o que mudaria ou acrescentaria em relação ao processo de resolução apresentado. Quanto tempo demorou ou que elemento ou elementos dificultaram a compreensão de cada um dos problemas. Que aprendizados geométricos os problemas trouxeram?

11.2.3 Atividade 3 - Resolução de Problemas Individualmente

- Atividade Motivacional - Intuição: O professor apresentará um desafio narrado da seguinte forma; Imagine ser possível passar uma corda através da Terra ajustando-a à linha imaginária do equador. Em seguida, retira-se a corda aumentando seu comprimento em 1(um) metro. Recoloca-se de volta a corda novamente em torno da Terra formando uma circunferência concêntrica com a anterior. As duas circunferências terão raios diferentes. Usando apenas a intuição, qual o valor da diferença entre estes raios? Através do vão formado pela diferença dos raios das circunferências será possível passar um celular?

- O professor aguardará respostas levadas pela intuição e incentivará para que os alunos calculem o valor da diferença entre os raios.

- Atividade Principal: O professor apresentará o enunciado dos problemas, serão três, por escrito, para resolução individual. os problemas devem ser resolvidos na sequência, conforme enumeração dos mesmos. Não há tempo para a conclusão da atividade que poderá ser retomada na próxima situação.

- Problema 1: Seja ABC um triângulo em que $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AB}$. O ponto D divide BC ao meio, $BD = DC$, e E divide BD ao meio, $\overline{BE} = \overline{ED}$. Mostre que AD é bissetriz de $\widehat{CAE}$.(AREF; WERNICK, 2010, p.4)

- Problema 2: Seja ABC um triângulo. Tem-se que os pontos D e E situam-se, respectivamente em AB e AC. Sabe-se que as bissetrizes dos ângulos $\widehat{ABE}$ e $\widehat{ACD}$ se encontram no ponto F. Mostre que $\angle BDC + \angle BEC = 2\angle BFC$. (AREF; WERNICK, 2010, p.5)

- Problema 3: Seja ABC um triângulo reto em A com $AB > AC$. O ponto D divide BC ao meio e DE é perpendicular a BC, e encontra a bissetriz do ângulo A em E. Mostre que $\overline{AD} = \overline{DE}$ e $\angle DAE = \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$.

- Avaliação: As resoluções serão entregues ao professor que avaliará a forma de resolução de cada problema por cada aluno. Todos os alunos se manifestarão de forma oral e escrita sobre cada processo de resolução após o encerramento da mesma. O resultado correto será discutido entre os alunos e o professor para cada problema. O grupo escolherá a resolução mais original. Os pontos que conferem originalidade serão estabelecidos em comum acordo entre professor e grupo de alunos. (AREF; WERNICK, 2010, p.5)

11.2.4 Atividade 4 - Resolução de Problemas em Grupo

- Atividade Motivacional - Encontre um Padrão: O professor apresentará desta feita uma tarefa para ser desenvolvida. Reconhecimento de padrões. E será desenvolvida através da experiência dos alunos sobre a soma dos ângulos internos de polígonos regulares. Tome-se como base o icoságono (vinte lados). Qual a soma de seus ângulos internos? Interessante examinar a soma dos ângulos internos do triângulo ao icoságono. estabelecer um padrão!
- O professor aguardará a solução dos alunos, o provável encontro de um padrão e o comentário dos mesmos sobre a atividade. (POSAMENTIER; KRULIK, 2014, p.32)
- Atividade principal: Novamente o professor apresentará o enunciado dos problemas, serão três, por escrito, para resolução em grupo. Inicialmente definidos pelo professor em função de suas observações relativas às resoluções e atitudes mentais explicitadas.
- Problema 1 relativo ao grupo 1: Seja $ABCD$ um quadrado e P um ponto no interior do mesmo de modo que $\angle PAB = \angle PBA = 15^{\circ}$. Mostre que PDC é um triângulo equilátero.
- Problema 2 relativo ao grupo 2: Seja $ABCD$ um quadrado de lado igual a uma unidade de medida. Os pontos P e Q, situam-se respectivamente nos lados AD e AB e o segmento PQ forma um ângulo de $QPA = 45^{\circ}$. PQ é o diâmetro de um semi-círculo que tangencia os lado DC e CB, respectivamente nos pontos X e Y. Encontre a área do semi-círculo.
- Seja ABC um triângulo onde foram criados dois quadrados, $ABDE$ e $BCKM$ utilizando os lados AB e BC. Unindo os pontos D e M, tem-se o triângulo DBM. Mostrar que $DM = 2.BP$, sendo BP a mediana do triângulo ABC.(GUSEV; LITVINENKO; MORDKOVICH, 1988, p.22-23)
- Todos os grupos devem solucionar a sua maneira os problemas. Cada grupo nomeará um **interlocutor** para fazer contato, caso necessário, com o mediador, o professor, e um **registrador do processo**, para o registro de todos os detalhes de cada resolução. Estas funções podem e devem serem modificadas a cada problema. O processo de mediação será controlado pelo professor que promoverá intervalos de tempo para que os interlocutores o procurem. Ao final cada grupo apresentará um relatório sucinto da resolução dos três problemas identificando: Dificuldades na Compreensão de cada problema, o plano de resolução e sua execução para cada problema, a revisão dos planos, as heurísticas desenvolvidas, alterações existentes no plano inicial, atitudes

mentais encontradas e detectadas, que afetaram o grupo, o que se aprendeu geometricamente.

- Avaliação: Relatório será lido e apresentado aos grupos com possíveis comentários.

11.2.5 Atividade 5 - Manipulando Estratégias

- Atividade Motivacional - Espaço de Soluções : Mais uma vez o professor apresenta ao grupo de alunos um pequeno problema. Sobre uma mesa repousam seis palitos de fósforo. Cinco deles estão arranjados formando dois triângulos equiláteros e um deles esta solitário. O desafio é utilizar o palito de fósforo isolado para construir quatro triângulos equiláteros.

- É provável que os alunos cheguem a solução muito rapidamente e aí é importante, caso tenha havido algum atraso na conclusão do desafio entender o que estava emperrando a resposta.

- Atividade Principal - Montando Estratégias Relâmpago: Para cada uma dos problemas relacionados apontar a melhor estratégia para a criação de um plano de ataque. Esta atividade também será desenvolvida em grupo.

- Problema 1: Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, sendo $\overline{AB} = \overline{CD}$. Sejam também E e F os pontos médios de BC e AD. As extensões de BA e CD se encontram com a extensão de EF, nos pontos M e N, respectivamente. Mostre que $\angle BME = \angle CNE$.

- No triângulo equilátero ABC, os pontos D, E e F são pontos médios de AB, AC e BC, respectivamente. G é um ponto de FC. Mostrar que $\overline{FG} = \overline{EH}$ se o triângulo DGH for equilátero.

- AB é o diâmetro de um círculo com centro em O. C é um ponto na circunferência. P também é um ponto na circunferência. Por P passa uma reta que é perpendicular a AB em D. PD encontra AC em E. BC e PD encontram-se em F. Mostre que $\overline{DP}^2 = \overline{DE} \cdot \overline{DF}$.

- Utilizem construções auxiliares e resolvam todos os problemas.

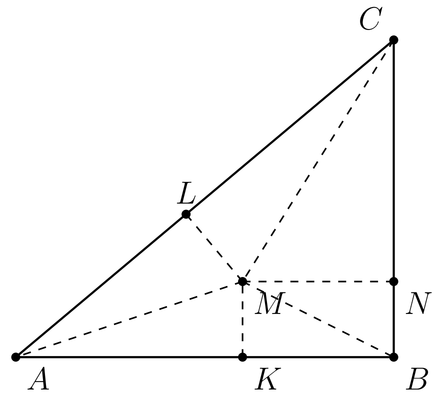
- Seja um triângulo ABC e um ponto P no interior do mesmo. Trace, por P, retas paralelas aos lados do triângulo. Haverá a formação de três triângulos menores. Nomeie como t_1, t_2 e t_3. Encontre a área de ABC em função de t_1, t_2 e t_3.

- Seja o triângulo ABC. Construa uma extensão de AB, AF, onde $\overline{AB} = \overline{BF}$. Faça uma outra construção estendendo BC, BD, onde $\overline{BC} = \overline{CD}$ e finalmente estenda CA até E onde $\overline{CA} = \overline{AE}$. Encontre a relação entre as áreas de DEF e ABC.

- Utilizem o método das áreas. Não há tempo estabelecido para esta atividade.

- Encontre um erro na seguinte *demonstração* do fato de que, em um triângulo retângulo, a hipotenusa tem o mesmo comprimento que um dos catetos(Figura 28).

Figura 28 – Desconstruindo uma demonstração



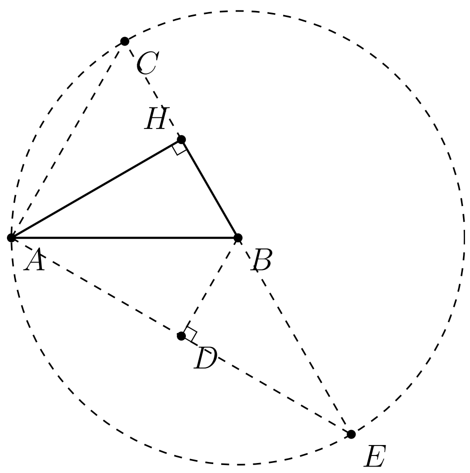
Fonte: (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2010, p.178, reprodução nossa).

- Demonstração: O ponto M é a interseção da bissetriz do ângulo C com a mediatriz de AB. Os pontos K, L e N são os pés das perpendiculares de M aos lados do triângulo ABC. Os triângulos AMK e MKB são congruentes, já que suas hipotenusas e seus catetos são iguais. Assim, $\overline{AM} = \overline{MB}$ e os triângulos ALM e MNB são congruentes pela mesma razão. Portanto, $\overline{AL} = \overline{NB}$ e $\overline{AC} = \overline{AL} + \overline{LC} = \overline{NB} + \overline{NC} = \overline{BC}$. Mostre que há erro nesta demonstração. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2010, p.178)

11.2.6 Atividade 6 - O Teorema de Pitágoras

- Atividade Motivacional - Curiosidades Geométricas: Esta atividade será melhor desenvolvida através de um aplicativo de Geometria Dinâmica, **GeoGebra**, por exemplo. O professor solicitará aos alunos que desenhem um quadrilátero, não necessariamente um quadrado ou retângulo. Em seguida, localizar o ponto médio de cada lado e efetuar a ligação dos mesmos apresentando o resultado.
- O professor deverá solicitar a manifestação de todos em virtude das características do novo quadrilátero encontrado. Apresentar explicações sobre o ocorrido.
- Atividade Principal - Provas do teorema de Pitágoras: Serão apresentadas três estratégias para demonstração do Teorema de Pitágoras que deverão ser desenvolvidas e estão ilustradas nas figuras 29, 30 e 31. Cada grupo, no entanto deverá apresentar uma estratégia inventada para a demonstração do Teorema de Pitágoras e desenvolvê-la.
- Estratégia desenvolvida por **Leibniz** para prova do teorema de Pitágoras, figura 29:

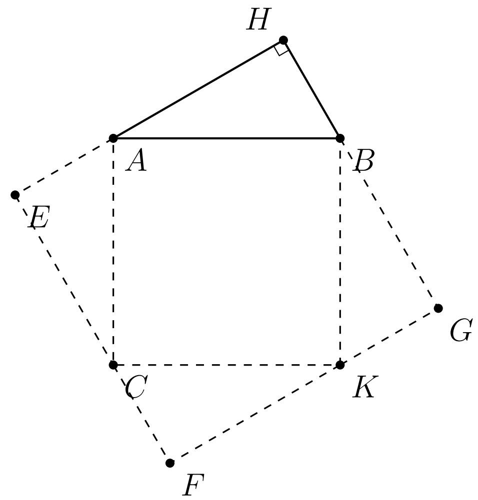
Figura 29 – Prova do teorema de Pitágoras por Leibniz, construção auxiliar



Fonte: (LOOMIS, 1901, p.59, reprodução nossa).

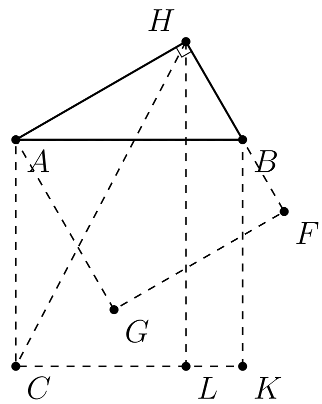
- Estratégia desenvolvida para prova do teorema de Pitágoras, figura 30:
- Estratégia desenvolvida para prova do teorema de Pitágoras, figura 31:

Figura 30 – Quadrados e triângulos retângulos na prova do teorema de Pitágoras



Fonte: (LOOMIS, 1901, p.223, reprodução nossa).

Figura 31 – Construção auxiliar de mais uma estratégia para a prova do teorema de Pitágoras



Fonte: (LOOMIS, 1901, p.220, reprodução nossa).

- Estratégia do Grupo para a prova do teorema de Pitágoras: Cada grupo deve estudar, apresentar uma estratégia e desenvolvê-la com o objetivo da obtenção de uma prova do Teorema de Pitágoras. Estimula-se a invenção e imitação.

12 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho, através da contribuição de pesquisadores, matemáticos, filósofos e educadores, aponta para uma matemática muito mais próxima do ser humano do que normalmente se imagina. Uma proximidade com espaço para, além da lógica e seu rigor, mostrar que há necessidade de intuição, criatividade, paciência, espírito de descoberta, inventividade e confiança, entre outros, no processo de resolução de problemas matemáticos.

Voltando a questão de pesquisa: Como estão apresentadas as diferentes perspectivas dos métodos de resolução de problemas matemáticos, mais especificamente, de problemas geométricos?

A pesquisa revela, na experiência dos autores registradas em suas obras, que os métodos de resolução de problemas se apresentam sobre dois aspectos. O primeiro através do rigor das técnicas e verdades matemáticas de formas variadas e adequadas a cada cenário construído pelos problemas. O segundo aspecto esta reservado ao entendimento que cada ser humano tem do mundo ao seu redor, capaz de permitir o disparo de mecanismos baseados em analogia, heurística, intuição, atitudes indutivas. Movidos pela experimentação, agregando experiências a cada resolução concluída e avaliada, preparando ferramental para o próximo problema.

É indiscutível que o processo de ensino e aprendizagem reside dentro de um ser humano que pela sua heterogeneidade trás uma ampla gama de possibilidades e variações tanto nas técnicas e abordagens possíveis, quanto na receptividade das soluções propostas. Na verdade o indivíduo, a medida que amadurece, precisa oferecer meios para sua autodescoberta e permitir experimentar caminhos para que este objetivo seja atingido.

Estes elementos estabelecem a noção de que o aprendizado desta ciência, entre outras, está relacionado à descoberta de atitudes e potenciais pessoais de cada ser humano. Cabe aos professores estimularem e ambientarem seus planos de ensino para que cada aluno encontre espaço para a descoberta dos potenciais matemáticos de forma crescente, verdadeira, independente e compartilhem suas experiências com os demais. É uma tarefa monstruosa e desafiadora. Contudo, observa-se que ela ocorre, por vezes naturalmente, quando alguns alunos se destacam e evoluem, de outra forma sua ocorrência se dá longa e vagarosamente e até de forma aleatória.

Há no processo de aprendizado, de qualquer conteúdo, uma consequente contribuição para a descoberta de seus talentos pessoais, de suas habilidades, do uso e desenvolvimento de ferramentas específicas que diferenciam cada ser humano. Também o desenvolvimento de inúmeras habilidades e é por isso que ela deve ser iniciada mais cedo nas escolas, levando os alunos a buscarem aquilo que mais gostam de fazer e onde encontram mais confiança para desenvolverem. A resolução de problemas deve ser iniciada na infância, dentro e fora da sala de aula, levando as etapas propostas por Polya e outros pesquisadores, cujos trabalhos foram aqui abordados, de forma apropriada, às novas gerações.

REFERÊNCIAS

AREF, M.; WERNICK, W. **Problems and solutions in Euclidean geometry**. Mineola, New York: Courier Corporation, 2010.

BICUDO, I. **Os elementos**. São Paulo: Unesp, 2009.

DESCARTES, R. **Discurso do método**. Porto Alegre: L&PM Pocket, 2015.

DORICHENKO, S. **Um círculo matemático de Moscou**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

FERREIRA, A. B. d. H. **Mini Aurélio**: o dicionário da língua portuguesa. Curitiba, PR: Curitiba: Positivo, 2008.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos matemáticos**: a experiência russa. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

GUSEV, V.; LITVINENKO, V.; MORDKOVICH, A. **Solving problems in geometry**. Moscou: Mir Publishers, 1988.

HADAMARD, J. **Psicologia da invenção na matemática**. Rio de Janeiro, RJ: Contraponto, 2009.

HELLMEISTER, A. C. P. **Geometria em sala de aula**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

HUME, D. **Investigações sobre o entendimento humano e sobre os princípios da moral**. São Paulo: UNESP, 2003.

JAYNES, E. T. **Probability theory**: the logic of science. St. Louis: Cambridge University Press, 2003.

KANT, I. **Critique of pure reason**. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1998.

LOOMIS, E. S. **Original investigation**: or, how to attack an exercise in geometry with many model solutions and a complete discussion of the principles underlying the same. Boston: Ginn & Company, 1901.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean proposition.** Washington D.C: NCTM, 1968.

MICHALEWICZ, Z.; FOGEL, D. B. **How to solve it**: modern heuristics. New York: Springer Science & Business Media, 2013.

MLODINOW, L. **A janela de Euclides**: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

MORAIS, R. d. S.; ONUCHIC, L. d. l. R. Abordagem histórica da resolução de problemas. In: ONUCHIC, L. d. l. R. *et al.* (Ed.). **Resolução de problemas**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 17–34.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. George Polya. **From The MacTutor**, 2002.

POLYA, G. **How to solve it**: a new aspect of mathematical method. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2004. v. 85.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POLYA, G. **Mathematics and plausible reasoning**: induction and analogy in mathematics. Princeton, New Jersey: Martino Fine Books, 2014.

POSAMENTIER, A. S.; KRULIK, S. **A arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática**. New York: AMGH Editora, 2014.

POSAMENTIER, A. S.; KRULIK, S. **Problem-solving strategies in mathematics**: from common approaches to exemplary strategies. Singapore: World Scientific, 2015.

POSAMENTIER, A. S.; SALKIND, C. T. **Challenging problems in geometry**. New York: Courier Corporation, 2012.

SAPUNARU, R. A.; BRANT, F. B. O problema das quatro linhas de Pappus e a geometria analítica. **Luminária**, v. 19, n. 02, 2018.

SERRAZINA, L. Resolução de problemas e formação de professores: um olhar sobre a situação de Portugal. In: ONUCHIC, L. d. l. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Ed.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 55–83.

STEWART, I. **Concepts of modern mathematics**. Middlesex, England: Courier Corporation, 1995.

STEWART, I. **Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos**. Rio de Janeiro, RJ: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2014.

TAO, T. **Como resolver problemas matemáticos.**: uma perspectiva pessoal. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

YANDELL, B. **The honors class**: Hilbert's problems and their solvers. Boca Raton, FL: AK Peters/CRC Press, 2001.

ZEITZ, P. **The art and craft of problem solving**. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2021.