

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

RENATA APARECIDA DA SILVA

**A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS UTILIZANDO O RPG:
UM OLHAR A PARTIR DA ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO**

CURITIBA

2022

RENATA APARECIDA DA SILVA

**A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS UTILIZANDO O RPG:
UM OLHAR A PARTIR DA ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO**

**The organization of the teaching of integers numbers using the rpg: A look from the
guiding activity of teaching**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador(a): Prof^a. Dr^a Maria Lucia Panossian

CURITIBA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

RENATA APARECIDA DA SILVA

**A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS UTILIZANDO O RPG:
UM OLHAR A PARTIR DA ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 21 de junho de 2022

Maria Lucia Panossian
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Leônia Gabardo Negrelli
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Luciana Schreiner de Oliveira
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

CURITIBA

2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente aos meus pais, Maria Roseli da Silva e Sebastião Abraão da Silva, por todo o apoio, dedicação, incentivo e confiança depositados em mim ao longo de toda a minha caminhada acadêmica.

Ao meu irmão, Rene Abraão da Silva, que mesmo implicando comigo sempre me motivou a seguir em frente e a nunca desistir dos meus sonhos.

À minha amiga Miriã Souza, se não fosse por você, eu provavelmente não teria ingressado na universidade.

Ao meu amor, Pedro de Souza, por me manter focada, por me lembrar constantemente do meu potencial e principalmente por todo o suporte emocional.

Aos professores da UTFPR, que me mostraram a importância da profissão indo além da teoria.

Em especial à professora Maria Lucia Panossian, por ter me acolhido desde o começo da minha jornada acadêmica me orientando em diversos trabalhos, pela infinita paciência e confiança, mas principalmente por ser a melhor ‘mãe’ acadêmica que eu poderia ter tido.

Aos amigos que a universidade me presenteou, Ana Inglat, Gabriel Fabri, Gabriela Martos, Isabella Shiraiwa e Natalia Oliveira, por me manterem na linha, por me mostrarem a luz quando mais precisei, pela parceria, por todo apoio e ajuda ao longo de toda a graduação. Obrigada pelos choros e risadas que compartilhamos nesse processo, vocês são minha segunda família.

Aos pibidianos, Bianca, Fabiana, Karina, Ruan, Victor e Wanderson, por me ajudarem no processo de reescrita da situação de ensino.

Às professoras da banca, Leônia Gabardo Negrelli, Mirian Maria Andrade Gonzalez e Luciana Schreiner de Oliveira, por acompanhar, acreditar e contribuir com este trabalho.

Aos amigos e todas as pessoas que torceram e acreditaram em mim.

RESUMO

Com base nos princípios da Atividade Orientadora de Ensino, este trabalho tem por objetivo elaborar e analisar uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem sobre a introdução de números inteiros, considerando elementos de seu movimento histórico e lógico. Para elaboração e análise da situação pensada para o ensino remoto e organizada no formato RPG, fez-se necessário estudar o movimento histórico-lógico do conceito de números inteiros buscando contemplar a necessidade e os nexos conceituais deste conceito na situação de ensino. Como alguns dos nexos dos números inteiros foram considerados: a representação de quantidades positivas e negativas, anulamento, existência do zero e do elemento oposto. A análise da situação elaborada conta com os elementos do histórico e lógico dos números inteiros e das percepções da pesquisadora sobre a situação, apresentando possíveis encaminhamentos para o processo de ensino. Ao fim da pesquisa, foi possível constatar que a situação criada mostrou-se um potencial recurso para professores e, com a intenção de divulgá-la e disponibilizar as análises realizadas, foi elaborado um Recurso Educacional Aberto com a síntese do movimento objetivado neste trabalho.

Palavras-chave: situação desencadeadora de aprendizagem; educação básica; rpg; números inteiros.

ABSTRACT

Based on the principles of the Teaching Guiding Activity, this work aims to elaborate and analyze a Learning Triggering Situation on the introduction of integers numbers, considering elements of its historical and logical movement. For elaboration and analysis of the situation designed for remote teaching and organized in RPG format, it was necessary to study the historical-logical movement of the concept of whole numbers seeking to contemplate the need and essential relationships of this concept in the teaching situation. As some of the essential relationships of integers numbers were considered: the representation of positive and negative quantities, cancellation, existence of zero and the opposite element. The analysis of the elaborate situation relies on the historical and logical elements of the integers numbers and the perceptions of the researcher about the situation, presenting possible referrals to the teaching process. At the end of the research, it was possible to verify that the created situation proved to be a potential resource for teachers and, with the intention of divulge it and making available the analyses performed, an Open Educational Resource was elaborated with the synthesis of the movement objectified in this work.

Keywords: learning triggering situation; basic education; rpg; integers numbers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem	12
Figura 2 - Osso de lobo pré-histórico e marcas do osso	20
Figura 3- Tokens simples utilizados na Mesopotâmia, atual Iraque, 4.000 a. C	22
Figura 4 - Tokens complexos utilizados na Mesopotâmia, atual Iraque, 4.000 a. C	22
Figura 5- Representação utilizada nos comércios	27
Figura 6 – Nexos conceituais manifestados na situação de ensino	35
Figura 7 - Plataforma <i>Google Jamboard</i>	41
Figura 8 - Feira Medieval	46
Figura 9 - Primeira versão carta de comerciante de frutas	47
Figura 10 - Primeira versão carta de comprador	47
Figura 11 - Páginas do <i>Google Jamboard</i>	54
Figura 12 - Possibilidade de representação para a carta de comerciante de frutas	56
Figura 13 - Possibilidade de representação para a carta de comerciante de verduras e legumes	57
Figura 14 - Possibilidade de representação para a carta de comerciante de verduras e legumes	58
Figura 15 - Possibilidade de representação carta compradores 1.....	59
Figura 16 - Possibilidade de resposta carta de compradores 2	60
Figura 17 - Possibilidade de resposta carta compradores 3	61

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CC	<i>Creative Commons</i>
DAMAT	Departamento Acadêmico de Matemática
D&D	<i>Dungeons & Dragons</i>
LARP	<i>Live Action Role-Playing</i>
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
REA	Recurso Educacional Aberto
RPG	<i>Role-Playing Game</i>
SEED/ PR	Secretaria da Educação e do Esporte do Estado do Paraná
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	PONDERAÇÕES SOBRE A BASE TEÓRICO-METODOLÓGICA: ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO	10
3	NÚMEROS INTEIROS: CONSIDERAÇÕES SOBRE SEU MOVIMENTO HISTÓRICO E LÓGICO	16
3.1	Notas históricas sobre números inteiros.....	19
3.2	O movimento lógico dos números inteiros.....	27
3.3	Nexos conceituais dos números inteiros.....	32
4	METODOLOGIA.....	37
5	PROCESSO DE CRIAÇÃO E REFORMULAÇÃO DA SITUAÇÃO DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM	45
5.1	Organização do Ensino a partir da Situação Desencadeadora de Aprendizagem	49
5.2	Reformulação e possibilidades de respostas da Situação Desencadeadora de Aprendizagem	52
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	62
	REFERÊNCIAS.....	64
	APÊNDICE A – Cartas de personagem	67
	APÊNDICE B – Janelas para representação <i>Google Jamboard</i>.....	71

1 INTRODUÇÃO

Esta monografia apresenta um Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática do campus Curitiba da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Antes de introduzir a pesquisa desenvolvida neste trabalho, farei¹ uma breve apresentação sobre a trajetória que me levou à escolha desta temática ‘ensino de números inteiros a partir de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem no formato RPG’.

Desde o segundo período do curso, participo de projetos de extensão vinculados ao Departamento Acadêmico de Matemática (DAMAT) da UTFPR, e estes têm agregado muito para minha formação pessoal e profissional. Entre os projetos, a Oficina Pedagógica de Matemática foi com o qual mais me identifiquei e tive a oportunidade de ser bolsista e membro da equipe-executora, desde 2019 até 2021. Neste projeto de extensão utilizamos como base teórico-metodológica a Atividade Orientadora de Ensino, teoria adotada nesta monografia.

A Atividade Orientadora de Ensino se fundamenta na estrutura de atividade de Leontiev, indicando uma necessidade “(apropriação da cultura), um motivo real (apropriação do conhecimento historicamente acumulado), objetivos (ensinar e aprender) e propõe ações que considerem as condições objetivas da instituição escolar.” (MOURA et al., 2010, p. 217).

A ação central desta base teórico-metodológica é a elaboração da Situação Desencadeadora de Aprendizagem, que parte da necessidade dos estudantes de resolver um problema até chegar à apropriação do conceito, isto é, os estudantes mobilizados pela atividade de aprendizagem têm potencial para alcançarem a apropriação do conceito. Uma das formas de se materializar a situação desencadeadora é através de um jogo com intuito educacional, outro tema de meu interesse. A utilização de jogos no ensino é algo com que sempre me identifiquei por ser um elemento lúdico e que tem o potencial de tornar as aulas mais atrativas para os estudantes.

O tema ‘jogos no ensino’ foi estudado principalmente nas disciplinas ‘Laboratório de Ensino de Matemática’ e ‘Metodologia do Ensino de Matemática’ ao longo da graduação, mas principalmente no período em que fui bolsista do Programa

¹ A introdução deste trabalho está escrita na primeira pessoa do singular, mas a partir dela o texto está escrito de forma impessoal.

Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) cujo objetivo era desenvolver algumas aulas como forma de aproximar o licenciando à realidade escolar.

Devido ao contexto pandêmico vivenciado em 2020 e 2021, o tema precisou ser adaptado dada a necessidade de se adequar ao ensino remoto de forma emergencial, por este motivo para este projeto optou-se por elaborar um jogo no formato online e entre essas possibilidades foi encontrado o *Role-Playing Game* (RPG). O RPG é um jogo que possui elementos que podem ser aproximados aos da Situação Desencadeadora de Aprendizagem, visto que ambos têm ações individuais e coletivas e uma necessidade que desencadeia um novo conhecimento.

Além dessa adaptação, no decorrer do Trabalho de Conclusão de Curso, foi necessário alterar outros elementos. Inicialmente o objetivo era de elaborar uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem e analisar a compreensão de estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de números inteiros, propondo um curso remoto, mas foi inviável efetivá-lo, pois ao final de 2021 os colégios retornaram às aulas presenciais e não haveria tempo hábil para realizar as adequações no projeto. O mesmo ocorreu com a permanência da proposta para o ensino remoto, visto que surgiu uma nova demanda onde seria necessário ter uma autorização da Secretaria da Educação e do Esporte do Estado do Paraná (SEED/ PR) para a realização da pesquisa, impossibilitando seguir o cronograma proposto na pesquisa anteriormente submetida ao Comitê de Ética.

Estas circunstâncias inviabilizaram o desenvolvimento da proposta inicial de agir diretamente com estudantes da educação básica e por isso, o objetivo deste trabalho foi reformulado conforme enunciado a seguir: elaborar e analisar uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem sobre a introdução de números inteiros, considerando elementos de seu movimento histórico e lógico. Entende-se que o movimento de estudo para a elaboração da situação proposta não teve prejuízos, pois houve grande envolvimento e me percebi no processo da atividade de ensino durante a organização do ensino dos números inteiros.

Neste sentido, este trabalho está organizado do seguinte modo: fundamentação teórico-metodológica, Atividade Orientadora de Ensino, (Capítulo 2), movimento histórico e lógico do conceito de números inteiros (Capítulo 3), metodologia desenvolvida (Capítulo 4), processo de elaboração e análise da Situação Desencadeadora de Aprendizagem sobre números inteiros (Capítulo 5) e considerações sobre esses movimentos (Capítulo 6).

2 PONDERAÇÕES SOBRE A BASE TEÓRICO-METODOLÓGICA: ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO

Conforme narrado na introdução, o projeto de extensão Oficina Pedagógica de Matemática desempenhou um importante papel nas experiências de formação inicial da pesquisadora. A base teórico-metodológica do projeto é a Atividade Orientadora de Ensino (MOURA et al, 2010), que possui como pressupostos teóricos a teoria histórico-cultural e a teoria da atividade (LEONTIEV, 1986). A leitura que aqui se propõe, consiste em considerá-la como fundamento para o processo de organização do ensino, considerando que a principal função da escola é “possibilitar a apropriação dos conhecimentos teóricos pelos estudantes” (MOURA et al., 2010, p. 226).

A Atividade Orientadora de Ensino possui ainda outra característica que se buscou contemplar durante a realização deste trabalho, a de fundamento teórico. Segundo Panossian e outros (2017), a Atividade Orientadora de Ensino enquanto fundamento teórico intenta desenvolver investigações na área da Educação e Ensino. Essa característica está centrada

[...] nos processos relativos às ações que visam aprofundar os conhecimentos sobre a atividade pedagógica e sobre o seu impacto nos processos de formação dos sujeitos que a concretizam. Isso implica em analisar os diferentes fenômenos que envolvem o processo de ensino e de aprendizagem: o ensino como atividade de trabalho para o professor e o aprender como objeto da atividade de estudo do aluno. (PANOSSIAN et al., 2017, p. 282).

Mesmo que atividade seja um termo comumente tratado, principalmente no campo educacional, como tarefas ou lições de alunos, este trabalho possui uma compreensão específica sobre o que é atividade. Esse conceito é tomado a partir de Leontiev, que a define como “[...] os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo.” (2010, p. 68).

Esse autor conjectura que um sujeito está em atividade ao realizar ações “[...] cujo motivo não coincide com seu objetivo, (isto é, com aquilo para o qual ele se dirige), mas reside na atividade da qual ele faz parte.” (ibidem, 2010, p. 69). Para tanto, espera-se que o sujeito tenha um objetivo, relacionado ao motivo da atividade no qual está inserido, para que haja uma ação e esta seja executada, onde o objeto da ação é o alvo direto reconhecido.

Um exemplo colocado pelo autor, é que uma mesma ação, como ler um livro, pode ter diferentes motivos ainda que seu objeto (o conteúdo do livro) seja o mesmo. Ao

ler o livro por uma obrigatoriedade, tal ação possui um fim em si mesma, tendo um motivo apenas compreensível. Contudo, ao ler um livro por interesse genuíno em seu conteúdo, isto é, quando o motivo da ação é o próprio objeto, tal ação se caracteriza como atividade, potencializando o desenvolvimento do sujeito em relação às aprendizagens relacionadas. Neste segundo caso, o motivo que mobiliza o sujeito é dito eficaz. Entende-se neste trabalho que o processo de ensino deve propor problemas que se configurem em motivos eficazes para a aprendizagem de conhecimentos científicos.

Toda ação, enquanto elemento da atividade ou não, possui um processo de objetivação, isto é, um processo pelo qual a ação deixa de pertencer ao plano mental e se concretiza para o sujeito como uma ideia, um ato, uma fala, etc. O modo como o sujeito objetiva suas ações “[...] pode mudar os motivos da atividade e então temos motivos eficazes (que coincidem com objetivações) e motivos compreensíveis (incapazes de produzir uma atividade autêntica)” (LEONTIEV apud TOTI; SILVA, 2018, s. p.). Assim, mesmo que inicialmente a ação possua um motivo apenas compreensível, no decorrer da interação entre os sujeitos podem surgir motivos eficazes para a realização da mesma ação.

Ao considerar a estrutura da atividade humana é necessário atentar que “[...] há uma necessidade, essa necessidade se materializa em um motivo, esse motivo está vinculado ao objetivo da atividade. Ação pode transformar-se em atividade e vice-versa em um complexo movimento” (TOTI; SILVA, 2018, s. p.). Neste sentido, a transformação dos motivos é um papel fundamental do professor, visando que atividades legítimas sejam produzidas, em conjunto com os estudantes, nos processos educativos.

A Atividade Orientadora de Ensino considera essa estrutura de atividade no contexto educativo, relacionando as ações do professor e dos estudantes. A necessidade do professor é de ensinar enquanto a necessidade do estudante é aprender. A Atividade Orientadora dispõe de elementos que permitem a organização do ensino de modo a auxiliar os estudantes no processo de apropriação de conceitos que constituem os conteúdos escolares e este movimento faz parte da atividade de ensino do professor. Na atividade de ensino, “[...] o objeto é aquilo que coincide com o motivo da atividade e é objetivado no processo de trabalho, o estudante transformado é também produto do trabalho do professor” (MOURA et al., 2010, p. 218).

Toda ação é realizada por meio de operações. Uma operação

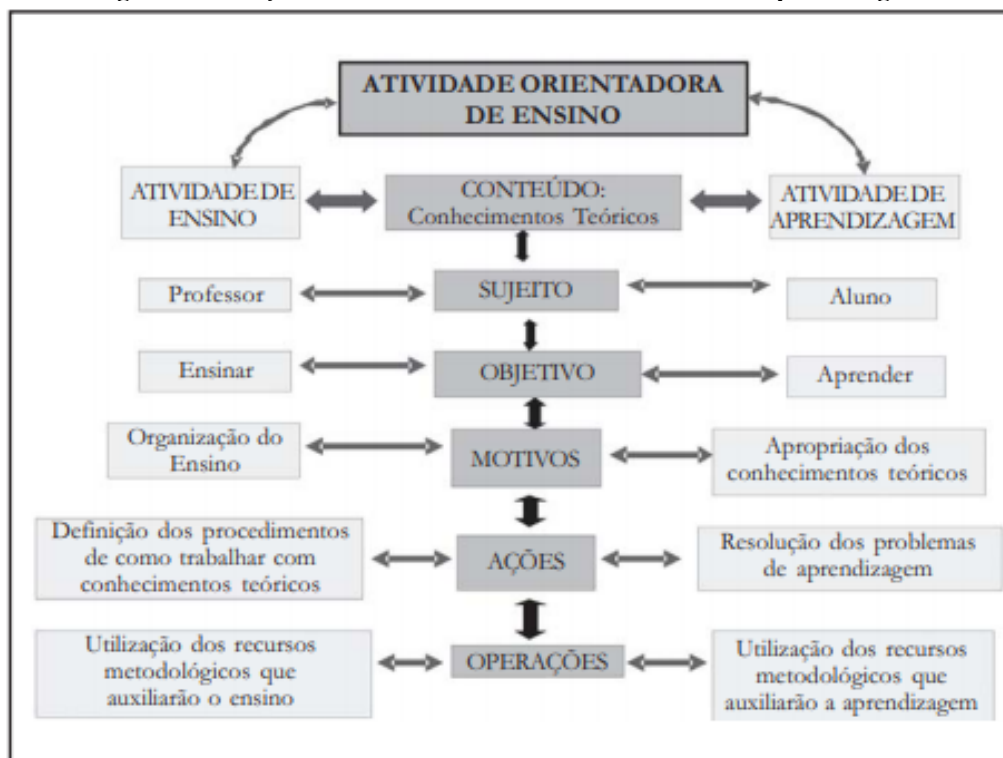
é o conteúdo necessário de qualquer ação, mas não é idêntico a ela. Uma mesma ação pode ser efetuada por diferentes operações e, inversamente, numa

mesma operação podem-se, às vezes, realizar diferentes ações: isto ocorre porque uma operação depende das condições em que o alvo da ação é dado, enquanto uma ação é determinada pelo alvo. (LEONTIEV, 2010, p. 74).

A operação é determinada pela tarefa que se objetiva realizar e, desta forma, consideram-se as condições para a sua realização intencionando a constituição de uma ação. Segundo Leontiev (2010), existe apenas um tipo de operação, a operação consciente, que é formada “[...] inicialmente como um processo dirigido para o alvo, que só mais tarde adquire a forma, em alguns casos, de hábito automático.” (LEONTIEV, 2010, p. 75). A ação/atividade de ler um livro, discutida anteriormente, pode ser executada de diferentes formas a depender das condições: pode-se ter o livro em casa, então basta buscá-lo numa estante, por exemplo, pode ser necessário ir até uma biblioteca pública procurá-lo ou então pode-se comprar online a versão e-book do livro. Todas estas operações possibilitam a ação de ler o livro em diferentes condições.

Na Atividade Orientadora de Ensino, as atividades de ensino e a de aprendizagem estão direcionadas para apropriação do conhecimento teórico. Neste sentido, as ações do professor são de natureza organizacional para que tal apropriação ocorra a partir da necessidade do conhecimento. Com base nesse movimento, a Figura 1 apresenta um esquema que busca sintetizar os elementos constitutivos de cada uma dessas atividades.

Figura 1 - Relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem



Fonte: Moura et al. (2010, p. 219)

Na atividade de ensino, o professor almeja ensinar um conteúdo (objetivo) e para isso é necessário definir procedimentos (ações) de forma que o estudante consiga aprender o conteúdo, sendo que para conseguir executar essas ações é necessária a utilização de recursos metodológicos. Por sua vez, na atividade de aprendizagem, o estudante precisa resolver problemas de aprendizagem através dos recursos metodológicos que estiverem ao seu alcance, objetivando a apropriação dos conhecimentos teóricos.

Na estrutura com necessidades, motivos, objetivos, ações e operações, os sujeitos envolvidos se mobilizam inicialmente por meio da Situação Desencadeadora de Aprendizagem que, enquanto ação central da Atividade Orientadora de Ensino, é organizada pelo professor tendo como ponto de partida os objetivos de ensino a serem apropriados pelos estudantes. As ações do professor

[...] serão organizadas inicialmente visando colocar em movimento a construção da solução da situação desencadeadora de aprendizagem. Essas ações, por sua vez, ao serem desencadeadas, considerarão as condições objetivas para o desenvolvimento da atividade: as condições materiais que permitem a escolha dos recursos metodológicos, os sujeitos cognoscentes, a complexidade do conteúdo em estudo e o contexto cultural que emoldura os sujeitos e permite as interações sócio-afetivas no desenvolvimento das ações que visam o objetivo da atividade - a apropriação de certo conteúdo e do modo geral de ação de aprendizagem (MOURA et al., 2010, p. 222).

Nesse sentido, o professor e o estudante, mobilizados a partir da situação de ensino interagem a partir de objetivos diferentes sobre o mesmo conceito: o professor deseja ensiná-lo e o estudante necessita compreendê-lo para solucionar o problema proposto. Contudo, espera-se ir além, sendo que aprender um conteúdo novo, implica também que o estudante “[...] adquiriu um modo de se apropriar de conteúdos de um modo geral” (MOURA et al. 2010, p. 223). Logo, aprender significa, na Atividade Orientadora de Ensino, se apropriar de tal forma que o conceito se torne uma ferramenta do sujeito para resolver outros problemas, semelhantes ou não ao problema inicial.

A Situação Desencadeadora de Aprendizagem, constituída como ação central da Atividade Orientadora de Ensino, pode ser apresentada na forma de um jogo com propósito pedagógico, uma história virtual do conceito ou uma situação emergente do cotidiano (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998). O jogo “coloca a criança diante de uma situação-problema semelhante à vivenciada pelo homem ao lidar com conceitos matemáticos” (MOURA; LANNER de MOURA, 1998, p. 12), a situação emergente do cotidiano busca apresentar ao estudante um problema significativo a ele e a história virtual

do conceito aborda uma situação problema semelhante com a necessidade histórica do conteúdo abordado.

Espera-se que a Situação Desencadeadora de Aprendizagem expresse a essência de um conceito procurando evidenciar a necessidade histórica que levou à sua elaboração. No movimento de apropriação e do desenvolvimento da linguagem é colocada “[...] uma necessidade impulsionadora de ações em direção ao objeto de conhecimento, que também se almeja que seja apropriado pelas novas gerações, como uma legítima herança cultural” (MOURA; ARAUJO; SERRÃO, 2018, p. 423).

As ações do professor, por sua vez, possibilitam que os estudantes se apropriem de

[...] conhecimentos e das experiências histórico-culturais da humanidade. Entretanto, dada uma vastíssima experiência da humanidade, mais importante do que ensinar todo e qualquer conhecimento, o que seria impossível, é ensinar ao estudante um modo de ação generalizado de acesso, utilização e criação do conhecimento, o que se torna possível ao considerar-se a formação do pensamento teórico. Nesse movimento, a qualidade de mediação da Atividade Orientadora de Ensino se evidencia ao possibilitar que o sujeito singular aproprie-se da experiência humana genérica. (MOURA et al., 2010, p. 219).

Nesse sentido, para o processo de elaboração de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem, o professor estuda o movimento histórico do conceito buscando mobilizar “os sujeitos a realizar ações que possibilitem a apropriação do que podemos chamar de um sistema de conceitos em que os nexos conceituais são elementos de formação do pensamento teórico do estudante (DAVÍDOV; MARKOVA, 1988)². Ela deve conter um problema desencadeador de aprendizagem, sendo esse um dos principais movimentos da ação de ensino. Segundo Oliveira e Panossian (2021), o problema desencadeador é chamado por alguns autores por situação-problema, sempre evidenciando a importância da coletividade e da participação de todos os estudantes no processo de resolução. Para Moura (1992 apud OLIVEIRA; PANOSSIAN, 2021, p. 8) “[...] a situação-problema é o momento de envolver a criança na atividade e trazê-la para o trabalho coletivo. É o momento também de colocá-la na busca do conhecimento”.

Todos os sujeitos envolvidos na resolução de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem compartilham suas hipóteses com os demais e a partir destas o coletivo pode propor um resultado comum, a síntese coletiva. Durante o processo de análise e

² DAVÍDOV, Vasili Vasilievich; MARKOVA, Alicia. El desarrollo del pensamiento em la edad escolar. In: Vasili Vasilievich Davíдов e Marta Shuare, Antologia de la psicología evolutiva y pedagógica en la URSS, Moscou: Progreso p. 173-193, 1988.

síntese, as interações entre os estudantes desencadeiam “[...] uma nova compreensão da atividade e dão a ela uma melhor qualidade ao ser colocada em prática novamente” (MOURA; ARAUJO; SERRÃO, 2018, p. 424).

Os estudantes mobilizam-se de modo que consigam realizar uma síntese coletiva, além de conhecer, atuar e transformar seu modo de agir no mundo, pois esse é o modo de se “fazer humano pelo ensino, um ensino que promove o desenvolvimento e a personalidade humana” (MOURA; ARAUJO; SERRÃO, 2018, p. 426).

Segundo Vigotski (2007), a apropriação e interiorização de um conceito é formada com base na transformação de uma atividade coletiva, experiência social, em uma atividade individual (experiência do indivíduo). Essa transformação ocorre através das interações dos sujeitos, isto é, de forma interpsicológica, e depois interior do sujeito, intrapsicológica. Todas as funções superiores “originam-se das relações reais entre indivíduos humanos” (VIGOTSKI, 2007, p. 58).

A Atividade Orientadora de Ensino em sua dimensão teórico-prática, desencadeia nos sujeitos da atividade de aprendizagem a apropriação dos conhecimentos teóricos que foram se transformando ao longo da humanidade e também através da análise das sínteses individuais e coletivas elaboradas no processo de resolução de um problema de aprendizagem. Por outro lado, na atividade de ensino, essa base teórico-metodológica subsidia elementos para o processo de organização do ensino através de discussões coletivas, análises e reflexão da atividade pedagógica tendo em vista esta atividade como “concretizadora de um objetivo social” (MOURA et al., 2010, p. 226).

Para o processo de elaboração de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem é necessário contemplar a essência do conceito, buscando explicitar a necessidade da humanidade que desencadeou a construção deste conceito. Com isso é preciso identificar “[...] os problemas e as necessidades humanas em determinada atividade e como os homens foram elaborando as soluções ou sínteses no seu movimento lógico-histórico” (MOURA et al., 2010, p. 223). Considerando que este trabalho tem por intenção o processo de organização do ensino de números inteiros, sínteses deste movimento histórico e lógico são apresentadas no próximo capítulo.

3 NÚMEROS INTEIROS: CONSIDERAÇÕES SOBRE SEU MOVIMENTO HISTÓRICO E LÓGICO

O objeto de ensino escolhido para estudo nesta pesquisa são os números inteiros, por este motivo, neste capítulo serão apresentados, brevemente, registros históricos dos números e números inteiros enquanto produção humana. Este movimento faz-se necessário para o processo de elaboração de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem. Como apresentado no capítulo anterior, uma das características da situação é conter um problema desencadeador pensado a partir da necessidade histórica que desencadeou o conceito em questão, bem como o movimento para chegar ao estágio atual de representação e conceituação. Portanto, é necessário realizar uma síntese histórica do conceito de número inteiro.

Cumprir dizer que nesta pesquisa, o estudo sobre os números inteiros foi iniciado a partir de sua apresentação como conteúdo na norma curricular vigente, no caso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), buscando compreender quais são os objetivos de ensino nacionalmente estabelecidos. A BNCC é um documento curricular que visa orientar todos os currículos do território nacional e as propostas pedagógicas das escolas públicas ou particulares. Neste documento estão presentes algumas expectativas de aprendizagens tidas como essenciais para todos os estudantes da educação básica.

O documento apresenta competências com a intenção de garantir os direitos de aprendizagem e de desenvolvimento dos estudantes. Com o termo ‘competências’ a BNCC quer dizer “[...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 8).

A BNCC propõe dez competências gerais que “[...] consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento” (BRASIL, 2018, p. 8). É válido ressaltar, que essas competências precisam estar inter-relacionadas e que o período considerado para o desenvolvimento dessas competências é de nove anos (do primeiro ao nono ano do Ensino Fundamental). Quanto às competências específicas, estas dispõem um conjunto de habilidades, que apresentam diferentes conteúdos, conceitos e processos dispostos em unidades temáticas.

Dentre as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental neste trabalho podem ser destacadas as seguintes:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- [...]
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes (BRASIL, 2018, p. 267).

Na BNCC, o ensino de Matemática no Ensino Fundamental está dividido em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. A seguir será apresentada a unidade de Números, visto que o conceito almejado neste trabalho, números inteiros, está presente nela.

A unidade temática Números objetiva produzir o pensamento numérico caracterizado pelo desenvolvimento de modos de quantificar, analisar e interpretar objetos com base em quantidades. No processo de aprendizagem sobre números, os estudantes precisarão desenvolver as ideias de aproximação, “proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática” (BRASIL, 2018, p. 268). Ao estudar os diferentes conjuntos numéricos o professor pode enfatizar “[...] registros, usos, significados e operações” (BRASIL, 2018, p. 268).

O ensino de números inteiros é mencionado a partir do sétimo ano do Ensino Fundamental e seus objetos de conhecimento são: os usos dos números inteiros, sua história, a ordenação, a associação a pontos da reta numérica e as operações dentro desse conjunto. Partindo desses objetos de conhecimento, as habilidades esperadas são:

- (EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.
- (EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros. (BRASIL, 2018, p. 307).

Contudo, não podemos considerar que tais competências humanas tenham se desenvolvido de forma desarticulada historicamente e tampouco que não estejam relacionadas com conceitos formais da matemática. Por isso faz-se necessário compreender as características dos números inteiros, seu processo histórico de desenvolvimento e as relações que fundamentaram sua criação.

Neste trabalho de conclusão de curso estes elementos teóricos e metodológicos são adotados a partir da Atividade Orientadora de Ensino e neste sentido considera-se

relevante aprofundar o estudo sobre o movimento histórico e lógico dos números inteiros, ainda que não se tenha a pretensão de esgotar a temática.

Ensinar conceitos matemáticos a partir da perspectiva histórico-lógica tem por objetivo o estudo do movimento do pensamento e com isso a percepção sobre o desenvolvimento de um conceito. Para Kopnin (1978 apud SILVESTRE; SILVA, 2019, p. 4)

o histórico do objeto é entendido no seu processo de mudança, isto é, etapas de seu surgimento e desenvolvimento, já, o lógico como meio pelo qual o pensamento realiza a reprodução do processo histórico desse objeto. Tal reprodução não significa que o pensamento deva copiar os passos da história, pois a reprodução no pensamento é formação, reconstrução e elaboração. O lógico do histórico refere-se à lógica dialética, mais ampla que a lógica formal.

No processo de ensino, o estudo histórico e lógico contribui para a elaboração de problemas desencadeadores que revelem a necessidade que encaminhou a humanidade na elaboração de determinados conceitos, evidenciando suas relações essenciais apresentadas como nexos conceituais no seu desenvolvimento.

É válido ressaltar que para Kopnin (1978) e Davydov (1982) (apud SOUSA, 2014) o termo ‘objeto’ tem a conotação de “(...) ato de conhecimento e as leis dos seus movimentos. Os nexos internos dos objetos estudados só se realizam em movimento” (SOUSA, 2014, p. 64)

Kopnin (1978) e Davydov (1982) falam sobre nexos externos e nexos internos, onde os nexos externos se limitam “(...) aos elementos perceptíveis do conceito enquanto os internos compõem o lógico-histórico do conceito” (SOUSA, 2014, p. 65).

Pode-se considerar que os nexos externos estão mais vinculados ao que é aparente no objeto de conhecimento e por isso mais relacionado à linguagem formal que os expressa e define. Por sua vez, os nexos internos ou nexos conceituais “(...) fundamentam os conceitos que contêm a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento” (SOUSA, 2014, p. 65).

A seguir será apresentado um recorte histórico que revela registros da experiência da humanidade até a aceitação e formalização do conceito de números inteiros.

3.1 Notas históricas sobre números inteiros

A seguir serão apresentados dois estudos sobre a origem dos números, sendo o primeiro baseado em Cândida (2013) e Feldens (2018), que apresentam os elementos comumente encontrado em pesquisas sobre os números inteiros, e o segundo estudo será baseado em Roque (2012).

Feldens (2018) apresenta que desde os primeiros antropóides³ até o homem Neanderthal⁴ e até algumas eras ditas recentes, o ser humano sobrevivia exclusivamente da apreensão de alimentos, frutas silvestres e caça de animais, sendo ‘caçadores-coletores’, com isso os humanos viviam em ambientes que conseguiam suprir suas necessidades.

Com o passar dos tempos foi se tornando cada vez mais difícil conseguir alimento, pois, conforme a população ia crescendo, a quantidade de caça ia diminuindo, então gerou-se a necessidade de aprender a dominar a agricultura e de criar animais. Os donos dos pastos precisavam verificar a quantidade de ovelhas que possuíam para identificar se não perderam nenhuma ovelha, mas a questão é: se os números ainda não existiam, como os pastores controlavam o rebanho?

Segundo Cândida (2013), alguns pesquisadores desse período histórico acreditam que os pastores coletavam uma pedra por ovelha quando as soltavam para pastar, e assim que a última ovelha passava, os pastores guardavam essas pedras. Quando as ovelhas retornavam, o pastor jogava uma pedra por ovelha. Assim, se sobrassem pedras ele saberia que havia perdido uma ou mais ovelhas e se faltassem pedras saberia que o rebanho aumentou. Deste modo, havia o controle sobre a quantidade de animais.

A relação apresentada, pedra-ovelha, é chamada de correspondência um a um na Matemática. Esta correspondência significa que a cada objeto de um grupo de elementos será associado a um único objeto de outro grupo de elementos, neste caso, associar cada pedra a uma ovelha. Esse conceito foi um passo essencial para o surgimento do número.

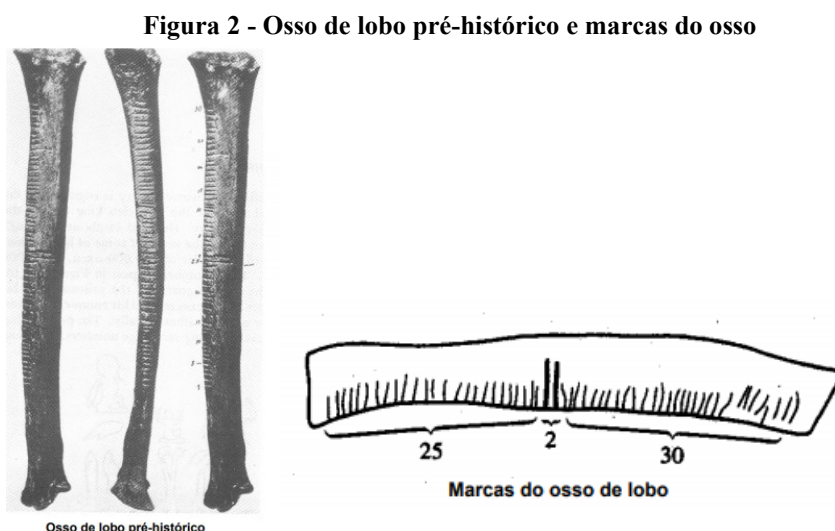
Nesse período os estudos de Cândida (2013) indicam que o método de contagem não se limitava ao uso de pedras, os pastores começaram a associar cada objeto a um dedo levantado de suas mãos, mas essa forma de registro é limitada, pois, os pastores não

³ Antropóide significa ‘que se parece com um homem’ e surgiram há 30 milhões de anos (<https://grupocataratas.com/origem-e-evolucao-humana-uma-volta-ao-passado/>).

⁴ Neanderthal é o “(...) nome dado a uma espécie extinta de hominina do gênero homo que ocorreu entre 400 mil e 35 mil anos atrás” (<https://infoescola.com/evolucao/homem-de-neandertal/>)

conseguiram guardar essas informações. O registro com as pedras era mais seguro, porém não era totalmente confiável, porque os pastores poderiam acabar perdendo as pedras durante o processo de contagem.

Como meio de registrar a contagem também eram utilizados pedaços de pau, barro, osso com marcações, cordas com nós ou, ainda, marcações nas paredes feitas em tinta ou talhadas. Na Figura 2, pode-se observar um osso de lobo com marcações que datam aproximadamente 30.000 a.C.. Este osso contém 57 marcas profundas sendo duas delas mais alongadas separando um grupo de 25 marcas de um com 30 marcas, acredita-se que essas marcações correspondem ao número de presas que um caçador possuía, sendo utilizada a correspondência um a um, isto é, cada marcação era associada a um animal.



Fonte: [https://www.ime.usp.br/~dpdias/2014/MAT1514%20-%20SistemasNumeracao\(Texto%20MariaElisa\).pdf](https://www.ime.usp.br/~dpdias/2014/MAT1514%20-%20SistemasNumeracao(Texto%20MariaElisa).pdf)

Quando existem muitas marcações o processo mais simples para contar ou verificar a quantidade é realizando agrupamentos, entretanto esse processo de agrupar não é intuitivo. Cândida (2013) acredita que o primeiro processo intuitivo a respeito de agrupamentos surgiu ao comparar os elementos a cada dedo das mãos ou dos pés, existindo deste modo os agrupamentos de cinco em cinco. Nesse processo de registrar os agrupamentos, foi preciso utilizar novas marcações para facilitar a visualização de grandes quantidades de elementos, evitando cometer tantos equívocos no processo da contagem da quantidade de riscos.

Por outro lado, Roque (2012), entende que o conceito de número foi uma necessidade concreta que gerava um conhecimento abstrato. Contar é concreto, mas “usar

um mesmo número para expressar quantidades iguais de coisas distintas é um procedimento abstrato” (ROQUE, 2012, p. 28).

Roque (2012) não acredita que o processo de registrar as informações surgiu da necessidade de armazenar informações por um período maior, mas que tenha sido um acordo comum entre indivíduos de um determinado grupo, com a intenção de deixar os registros sobre suas descobertas para seus sucessores.

Portanto, seja para registrar a quantidade de animais no pasto ou para preservar através dos conhecimentos que possuem a respeito de contagem – a necessidade de registro de informações se destaca.

Alguns registros encontrados na Mesopotâmia, datando aproximadamente do quarto milênio a.C., mostravam um modelo pictográfico, ou seja, apresentavam um desenho de tamanho reduzido em relação ao retratado. Mas, segundo Roque (2012), em alguns tabletes de argila, pode-se perceber que o desenho feito não era intuitivo, gerando um registro não padronizado, então acredita-se que cada indivíduo tinha uma forma de registro, impossibilitando a compreensão do coletivo.

Na cidade de Uruk, em 1930, foram encontrados novos tabletes datados de aproximadamente 3.000 a.C.. Neste material pode-se notar que a forma de registro não era pictográfica, pois eram poucas as figuras expressas que representavam um objeto concreto. Roque (2012), diz que o sinal que representava a ovelha era um círculo com uma cruz e não um desenho de uma ovelha.

A pesquisadora Denise Schmandt-Besserat acreditava que “a forma mais antiga de escrita teria origem em um dispositivo de contagem” (ROQUE, 2012, p. 30). Durante a pesquisa dela, foi observado que as escavações traziam regularmente pequenos tokens que ajudavam na economia controlando os produtos da agricultura e no controle de produtos manufaturados. Os tokens eram objetos feitos em argila e eram modelados em diferentes formatos, como cones, esferas, cilindros, discos, entre outros (Figura 3).

Segundo Schmandt-Besserat (2013), os tokens eram os únicos instrumentos que forneceram evidências do desenvolvimento de habilidades cognitivas entre 7.500-3.000 a.C. Esses tokens de modo especial, forneciam informações sobre a forma de contagem praticada em Ain Ghazal e em algumas outras culturas.

Figura 3- Tokens simples utilizados na Mesopotâmia, atual Iraque, 4.000 a. C



Fonte: Schmandt-Besserat (2013, p. 56)

Figura 4 - Tokens complexos utilizados na Mesopotâmia, atual Iraque, 4.000 a. C



Fonte: Schmandt-Besserat (2013, p. 56)

Em sua pesquisa, Schmandt-Besserat identificou que “o cone, as esferas e o disco representavam várias medidas de grãos; o tetraedro representava uma unidade de trabalho” (SCHMANDT-BESSERAT, 2013, p. 56, tradução nossa). Na Figura 4 estão representados, a partir da esquerda: uma vestimenta, um lingote de metal, um frasco de óleo, uma ovelha, um favo de mel e o último elemento é outra vestimenta, o único elemento não identificado pela pesquisadora é o elemento do meio da segunda fileira.

Os tokens foram utilizados, entre 7.500-3.100 a.C., através da correspondência um a um, se restringindo a determinar a quantidade de unidades selecionadas de mercadorias, principalmente grãos, potes de óleo e animais. Cada mercadoria era contada com seu próprio token mostrando que a contagem era concreta, onde por exemplo, os cones e as esferas representavam unidades pequenas e grandes de grãos, enquanto os ovóides eram utilizados para contar potes de óleo.

Estes instrumentos foram substituídos por sinais feitos com estiletes, sendo esse um passo muito importante para a escrita. Os primeiros numerais criados não representavam números abstratos, apenas representavam medidas de grãos, no segundo momento:

[...] as marcas representando as quantidades passaram a ser acompanhadas de ideogramas que se referiam aos objetos que estavam sendo contados. Esse foi um passo em direção à abstração, pois o registro das quantidades podia servir para coisas de naturezas distintas, tanto que surgiu a necessidade de se indicar o que estava sendo contado (ROQUE, 2012, p. 32).

As versões apresentadas por Cândida (2013) e Roque (2012) mostram dois processos distintos onde pode-se perceber a necessidade de um instrumento para contagem, além da necessidade de um novo modo de armazenar a quantidade observada. Segundo o estudo de Cândida (2013), armazenar por um período de tempo maior que a correspondência um a um conseguiria e para Roque (2012) a necessidade de deixar esses registros para as próximas gerações.

Os movimentos de pensar numericamente e controlar quantidades foram se desenvolvendo acompanhados do próprio desenvolvimento da Matemática, mas no processo de escrita de um sistema de numeração houve uma grande dificuldade, pois não havia um símbolo para a representação do ‘nada’, isto é, do zero. Mesmo depois de mostrarem a importância do zero, muitos matemáticos tiveram dificuldade em aceitar essa ideia de representação para o que não existe.

Segundo Boyer (2012), os babilônios não tinham um modo de representar o vazio, então eles costumavam deixar um espaço vazio para indicar o zero. Com isso, a escrita de dois números poderia ser a mesma, por mais que o contexto auxiliasse na compreensão do que era pedido, é perceptível a necessidade de um símbolo para representar o zero, pois este símbolo facilita na identificação de que 7 difere de 70, por exemplo.

O sistema de valor posicional atual surgiu com os hindus que em aproximadamente 600 d.C. utilizaram um pequeno círculo para representar o espaço vazio. Berlinghoff e Gouvêa (2012) relatam que os árabes aprenderam esse sistema no século IX e acabaram difundindo esse conhecimento pela Europa no decorrer dos séculos X, XI e XII.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2012), os símbolos utilizados para representar cada um dos algarismos sofreram algumas alterações com o passar do tempo, mas os princípios destes se mantiveram. Dentre as alterações presentes ao longo da história é que

os árabes utilizavam um pequeno círculo para representar o algarismo cinco e o símbolo utilizado para representar o ocupante de lugar era um ponto. A palavra hindu para ausência de quantidade,

sanya, tornou-se no árabe sifr, depois no latim zephirum (junto com a palavra ligeiramente latinizada cifra), e essas palavras, por sua vez, evoluíram para as palavras zero e cifra em português. Hoje em dia, o zero, usualmente como um círculo ou um oval, ainda indica que alguma potência de dez não está sendo usada. (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2012, p. 80).

Para começar a operar com o número zero, primeiro foi necessário reconhecê-lo como alguma coisa, considerar ele uma abstração tal como os algarismos 1, 2, 3, entre outros. Esse passo é importante para que seja reconhecido o valor dos números, sem ser necessário associar ele a um objeto específico, somente depois desse processo pode-se identificar o zero (0) como um número.

Para o matemático Al-Khwarizmi, o zero não era considerado um número, sendo apenas um ocupante de lugar e ele utilizava o sistema de numeração utilizando nove símbolos 1 a 9, e o papel do zero é descrito da seguinte maneira:

Mas quando [dez] foi posto no lugar de um, e foi feito na segunda posição, e sua forma era a forma de um, eles precisavam de uma forma para o dez devido ao fato de que era semelhante ao um, de modo que pudessem saber por meio dela que era [dez]. Assim, puseram um espaço em frente a ele e puseram um pequeno círculo como a letra o, para que dessa maneira eles pudessem saber que o lugar das unidades estava vazio e que nenhum número estava ali, exceto o pequeno círculo (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2012, p. 80).

Conforme esse sistema numérico se difundiu, foi necessário aprender a somar e subtrair quando um dos dígitos era zero, isso tornava o zero cada vez mais parecido como um número, mas na Europa demorou muito tempo para isso se estabelecer. Havia muitos matemáticos que não aceitavam zero como raiz de uma equação, isto é, solução de uma equação.

Por volta do século XVIII, o zero já havia sido reconhecido como número para a álgebra. Outra consideração sobre a importância desse elemento é que ele somado a outro número deixa o número invariante, por exemplo, zero somado a um é igual a um e zero vezes um número resulta em zero, esses elementos definem o zero como a ‘identidade da soma’.

Como vimos anteriormente, os números naturais ou hoje conhecidos números inteiros positivos, surgiram da necessidade de contar os elementos do meio no qual as pessoas estavam inseridas, isto é, contar dias e noites, quantidades de animais, fazer medições, entre outros. Entretanto, nesse processo não é ‘natural’ a existência de um

número menor do que zero, então como não era possível visualizar a existência desses números eles eram tidos como inexistentes ou absurdos.

Para os matemáticos gregos, não existia o conceito de número como algo abstrato, números eram inteiros positivos associados a segmentos de reta, área ou volume e diferentes tamanhos. Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2012), o matemático Diofante, no quinto livro de sua *Arithmetica*, considerou a equação $4x+20=4$ como um absurdo, pois quatro é um valor menor do que vinte. Para Diofante, “ $4x + 20$ significa adicionar alguma coisa a 20 e, portanto, não poderia nunca ser igual a 4” (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2012, p. 96).

Durante muitos anos, a diferença entre dois números $x-y$, onde x e y são números inteiros positivos, somente era definida se x fosse maior que y . Com a evolução da matemática, surgiu a necessidade de calcular $x-y$ quando $x < y$ resultando em um número negativo.

Segundo Boyer (2012) e Cândida (2013), os números negativos tiveram origens diferentes ao longo da história. Para os chineses, os números eram descritos em termos de sobras e de faltas e nesse processo eles utilizavam palitos pretos e palitos vermelhos onde os palitos vermelhos representavam excesso e as faltas eram representadas com palitos pretos. Apesar dos chineses terem aceitado a ideia de números negativos, eles não aceitavam que um número negativo poderia ser solução de uma equação.

Os matemáticos indianos se depararam com os números inteiros enquanto criavam um algoritmo para encontrar soluções de equações quadráticas. O matemático indiano Brahmagupta no século VII já considerava esses números na resolução de equações algébricas. Ele considerava “os números positivos como posse e os negativos como dívida, e também enunciou regras para somar, subtrair, multiplicar e dividir números negativos” (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2012, p. 96).

Bhaskara, por sua vez, ao se deparar com uma solução positiva e outra negativa em uma equação, considerava que a segunda não era uma resposta válida, pois ainda não existiam muitas informações a respeito dos números ditos negativos. Esse mesmo processo foi identificado nos matemáticos europeus, que ao se deparar com soluções negativas as consideravam soluções fictícias ou raízes falsas. Porém, no início do século XVII, os matemáticos não conseguiam mais negar a importância e a relevância dos números negativos em seus trabalhos.

Berlinghoff e Gouvêa (2012) acreditam que na Europa o conceito de números negativos não teve aceitação imediata porque ainda não existia o simbolismo algébrico que conhecemos atualmente. Antigamente os problemas eram resolvidos completamente através de palavras, geralmente baseando-se em interpretações geométricas.

Ainda no século XVII, pode-se perceber que os matemáticos aceitavam os números negativos, mas não sabiam exatamente onde esses números estariam posicionados em relação aos números positivos considerando a reta numérica. Em relação às operações com esses números, os matemáticos não apresentavam grandes problemas, a maior dificuldade era compreender o próprio conceito.

O matemático Euler já aceitava os números negativos no seu livro *Elements of Algebra* de 1770, ele apresenta que:

[...] os números negativos podem ser considerados como débitos, já que os números positivos representam posses reais, podemos dizer que os números negativos são menos do que nada. Assim, quando um homem não tem nada seu e deve 50 coroas, é certo que ele tem 50 coroas menos do que nada; pois se qualquer um lhe desse um presente de 50 coroas para pagar o seu débito, ele estaria ainda no ponto nada, embora estivesse realmente mais rico do que antes (EULER apud BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2012, p. 99).

Euler ao apresentar o produto de dois números inteiros não utilizou a interpretação de números negativos como débitos, passando a utilizar uma definição formal de elemento oposto, isto é, se temos a multiplicação de a negativo por b negativo, então estaremos trabalhando com o oposto de a multiplicado com b negativo $-(a) \times b$.

Segundo Cândida (2013), inicialmente os matemáticos não tinham um sinal que representasse o elemento oposto e, após muitas tentativas, conseguiram encontrar uma forma de simbolizar esses números de modo a realizar as operações aritméticas com eles. Esta representação surgiu com a prática dos comerciantes do século XIV que utilizavam essa simbologia para conseguir organizar a quantidade de produtos que tinham.

Suponhamos que um comerciante tenha duas sacas de arroz de 10kg cada. Se o comerciante vendesse 7kg, então ele anotaria no saco 7 com um traço horizontal na frente para que ele pudesse recordar que naquele saco havia 7kg a menos de arroz. Se por acaso o comerciante preferisse completar o outro saco com os 3kg, então ele anotava no saco 3 com dois traços cruzados representando que naquele saco havia 3kg a mais que a quantidade inicial (Figura 5).

Figura 5- Representação utilizada nos comércios



Fonte: Autoria própria (2022)

Com base nessa nova simbologia, os matemáticos da época, no início do Renascimento⁵, conseguiram aprimorar suas técnicas operatórias tornando possível expressar o elemento nulo e os números positivos e negativos em quaisquer situações. Deste modo, surge um novo conjunto numérico representado pela letra Z que é uma abreviação para a palavra alemã, *Zahl*, cuja tradução para o português é número.

Após apresentar esse breve recorte sobre o movimento histórico que desencadeou o conceito de números inteiros, serão destacadas a seguir algumas considerações sobre o movimento lógico que constitui este conceito.

3.2 O movimento lógico dos números inteiros

O conjunto dos números inteiros é formado pelos números inteiros positivos, números naturais, pelos números respectivamente opostos a eles e pelo número zero, ou seja, $Z = \{\dots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$. O símbolo Z^* é utilizado para apresentar o conjunto dos números inteiros sem o algarismo zero ($Z^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$), o símbolo Z^+ representa os números inteiros não-negativos ($Z^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$) Z_- representa os números inteiros não-positivos ($Z_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$), Z^{+*} representa os números estritamente positivos ($Z^{+*} = \{1, 2, 3, \dots\}$) e Z^{-*} representa os números estritamente negativos ($Z^{-*} = \{\dots, -3, -2, -1\}$).

⁵ O Renascimento foi um movimento “(...) que procurou fazer renascer a cultura e a arte da Grécia e da Roma antigas”. Esse movimento teve duração do século XIV até o século XVI. (<https://escola.britannica.com.br/artigo/Renascimento/482350>)

Este conjunto numérico foi tido como necessário muito recentemente, surgindo a partir de transações comerciais, cuja primeira utilização conhecida está apresentada numa obra indiana atribuída a Brahmagupta (628 d. C.) onde os números negativos são apresentados como dívidas. Conforme Domingues (1991, p. 88), este matemático “(...) já conhecia regras para as quatro operações com números negativos”, mas essas operações demoraram aproximadamente treze séculos para serem utilizadas.

O que fez estes números serem aceitos aos poucos na matemática foi a vasta possibilidade de interpretações atribuídas aos números negativos, entretanto desde sua descoberta esses números geraram dúvidas sobre sua legitimidade.

Segundo Milies (2001), Stieffel, em 1543, chamava estes números de absurdos, Cardano os denominava de “soluções falsas de uma equação” (MILIES, 2001, p. 12), Bhaskara (séc. XII) apresentou que todo número positivo tem duas raízes quadradas, uma positiva e uma negativa, e disse que era impossível “(...) extrair a raiz quadrada de um número negativo” (DOMINGUES, 1991, p. 88), Descartes (1596-1650) chamava estes números de raízes falsas de uma equação e Viète (1540-1603) simplesmente rejeitava esses números.

Com a aceitação dos números complexos, a ciência europeia passou a considerar o conjunto dos inteiros como tão completo quanto o dos naturais. Neste sentido, para poder explicitar a noção de inteiros primeiro é necessário apresentar a noção de Número Natural que foi fundamentada pela primeira vez por Giuseppe Peano em 1889. Essa noção é apresentada “(...) a partir de três conceitos primitivos e cinco axiomas” (MILIES, 2001, p. 13).

Nos números naturais (\mathbb{N}) a diferença $a - b$, onde a e b são naturais, apenas está definida quando $a \geq b$. Neste sentido, pretende-se apresentar todas as expressões $a - b$, com a e $b \in \mathbb{N}$, através de uma ampliação de \mathbb{N} . Informalmente, os números novos são as diferenças $a - b$ com $a < b$ sendo estes somados aos \mathbb{N} , desta união “(...) surge o conjunto dos números inteiros” (DOMINGUES, 1991, p. 89).

Admite-se no processo de construção desse conjunto numérico que $0 - 1 = 1 - 2 = 2 - 3 = \dots$, indicando essa diferença por -1 . Analogamente esse processo se repete surgindo $-2, -3, -4, -5, \dots$, gerando o conjunto dos números inteiros, indicado por \mathbb{Z} , onde $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Segundo Domingues (1991), este processo não é suficiente, sendo necessário “(...) estender adequadamente a \mathbb{Z} as operações e a relação

de ordem de \mathbb{N} , o que é bem conhecido no plano elementar” (DOMINGUES, 1991, p. 89).

Neste trabalho, para realizar uma construção formal dos números inteiros será utilizado como principal referência Domingues (1991) que objetiva apresentar um sentido matemático a quaisquer expressões do tipo $a - b$, sendo a e b dois números naturais, de modo a “(...) poder tratar como entes do mesmo conjunto tanto aquelas como $7 - 3$, $5 - 1$ e $4 - 0$ quanto aquelas como $3 - 7$, $1 - 3$ e $0 - 2$, por exemplo” (DOMINGUES, 1991, p. 162).

Cada diferença $a - b$ pode-se associar ao par ordenado $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nesse sentido se tiver, por exemplo, a seguinte igualdade pertencente aos naturais $5 - 3 = 9 - 7$ é equivalente pensar em $5 + 7 = 9 + 3$. Generalizando, sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ e $c \geq d$, vale a seguinte equivalência:

$$a - b = c - d \leftrightarrow a + d = c + b.$$

No processo de construção dos inteiros como uma ‘ampliação’ dos \mathbb{N} , essas considerações auxiliam na compreensão do caminho adotado.

Dentro do conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ será considerada a relação \sim que será definida do seguinte modo: para quaisquer $(a, b) \sim (c, d)$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c.$$

Para a relação \sim são válidas as seguintes propriedades:

Reflexiva: Para todo $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $a + b = b + a$.

Simétrica: Se $(a, b) \sim (c, d)$, então $(c, d) \sim (a, b)$

Transitiva: Se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então $(a, b) \sim (e, f)$

Logo, \sim é uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. É possível determinar nesse conjunto uma partição em classes de equivalência, onde para cada $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pode-se indicar uma classe de equivalência por $\overline{(a, b)}$, onde:

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x, y) \sim (a, b)\}$$

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + b = y + a\}$$

Exemplo: $\overline{(4, 2)} = \{(2, 0); (3, 1); (4, 2); \dots\}$

O conjunto “(...) quociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por \sim , ou seja, o conjunto de todas as classes $\overline{(a, b)}$, para qualquer $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, será indicado então por \mathbb{Z} . Então:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim = \{(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}. \text{ (DOMINGUES, 1991, p. 163)}$$

A adição é definida nesse conjunto do seguinte modo: sejam $m = \overline{(a, b)}$ e $n = \overline{(c, d)}$ dois elementos quaisquer de \mathbb{Z} . A soma de m com n , indicada por $m + n$ é o elemento de \mathbb{Z} definido por: $m + n = \overline{(a + c, b + d)}$. Na adição em \mathbb{Z} valem as seguintes propriedades:

$$A1 - \text{Associativa: } (\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)}) + \overline{(e, f)} = \overline{(a, b)} + (\overline{(c, d)} + \overline{(e, f)}).$$

$$A2 - \text{Comutativa: } \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)}.$$

$$A3 - \text{Existência do elemento neutro: Definido pela classe } \overline{(0, 0)}.$$

A4 - Existência do simétrico aditivo ou oposto: Seja $m = \overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$, o oposto pode ser denotado por $-m = \overline{(b, a)}$.

A multiplicação nesse conjunto é definida do seguinte modo: $m = \overline{(a, b)}$ e $n = \overline{(c, d)}$ elementos quaisquer de \mathbb{Z} . O produto de m com n , indicado por mn (ou $m \cdot n$) o elemento de \mathbb{Z} definido por: $m \cdot n = \overline{(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)}$. Na multiplicação em \mathbb{Z} valem as seguintes propriedades (com quaisquer m, n e $r \in \mathbb{Z}$):

$$M1 - \text{Associativa: } m \cdot (n \cdot r) = (m \cdot n) \cdot r.$$

$$M2 - \text{Comutativa: } m \cdot n = n \cdot m.$$

$$M3 - \text{Existência do elemento neutro: Definido pela classe } (1, 0).$$

M4 - Lei do anulamento do produto: Se $m, n \in \mathbb{Z}$ e $m \cdot n = 0$, então $m = 0$ ou $n = 0$.

$$M5 - \text{Distributiva: } m \cdot (n + r) = m \cdot n + m \cdot r$$

O conjunto \mathbb{Z} , com as operações de adição e da multiplicação com a relação de ordem “(...) a ser introduzida no item seguinte, é chamado conjunto dos números inteiros. E os elementos de \mathbb{Z} , nessas condições, são chamados números inteiros.” (DOMINGUES, 1991, p. 166).

Se $m \in \mathbb{Z}$, então $m = \overline{(a, 0)}$ ou $m = \overline{(0, a)}$, para algum $a \in \mathbb{N}$. Deste modo, tomando:

$$\begin{array}{ll} \overline{(0, 0)} = 0 & \overline{(0, 1)} = -1 \\ \overline{(1, 0)} = 1 & \overline{(0, 2)} = -2 \\ \overline{(2, 0)} = 2 & \overline{(0, 3)} = -3 \\ \overline{(3, 0)} = 3 & \overline{(0, 4)} = -4 \\ \dots & \dots \end{array}$$

torna-se válido escrever

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Façamos $\{0, +1, +2, \dots\} = \mathbb{Z}_+$ e $\{\dots, -2, -1, 0\} = \mathbb{Z}_-$. Os elementos de \mathbb{Z}_+ se dizem inteiros positivos e os de \mathbb{Z}_- inteiros negativos. Todo elemento $m \in \mathbb{Z}_+^* = \{+1, +2, +3, \dots\}$ é chamado inteiro estritamente positivo; e todo $m \in \mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -3, -2, -1\}$ é um inteiro estritamente negativo.

Notemos que se $m \in \mathbb{Z}_+$ (ou \mathbb{Z}_+^*), então $-m \in \mathbb{Z}_-$ (ou \mathbb{Z}_-^*) e vice-versa. De fato, se por exemplo $m = \overline{(a, 0)}$ (logo $m \in \mathbb{Z}_+$), então $-m \in \overline{(0, a)}$ (que está em \mathbb{Z}_-). (DOMINGUES, 1991, p. 166)

A relação de ordem em \mathbb{Z} define que se houverem $m, n \in \mathbb{Z}$, m é menor ou igual a n (notação: $m \leq n$), se $n = m + r$ para algum $r \in \mathbb{Z}_+$. Se $n = m + r$, com $r \in \mathbb{Z}_+^*$, então m é menor que n (notação: $m < n$) que é equivalente a dizer que n é maior que m (notação: $n > m$). Na relação de ordem em \mathbb{Z} valem as seguintes propriedades:

O1 - Reflexiva: $m \leq m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

O2 - Anti-simétrica: se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$.

O3 - Transitiva: $m \leq n$ e $n \leq q$, então $m \leq q$

O4 - $m \leq n$ ou $n \leq m$

O5 - Compatibilidade com a adição: se $m \leq n$, então $m + p \leq n + p$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

O6 - Compatibilidade com a multiplicação: se $m \leq n$ e $0 \leq p$, então $m \cdot p \leq n \cdot p$

Com base na construção apresentada sobre o conjunto dos números inteiros é possível identificar que o conjunto dos números naturais está contido nesse conjunto, isto é, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Considerando a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = \overline{(a, 0)}$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

Ou seja:

$$f(1) = \overline{(0, 0)}$$

$$f(2) = \overline{(2, 0)}$$

$$f(3) = \overline{(3, 0)}$$

...

Logo:

- $Im(f) = f(a) | a \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $f(a) = f(b) \rightarrow \overline{(a, 0)} = \overline{(b, 0)}$

- $f(a + b) = \overline{(a + b, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(b, 0)} = f(a) + f(b)$, para todo $a, b \in \mathbb{N}$
- $f(a \cdot b) = \overline{(a \cdot b, 0)} = \overline{(a, 0)} \cdot \overline{(b, 0)} = f(a) \cdot f(b)$, para todo $a, b \in \mathbb{N}$
- Se $a < b$, então $b = a + c$, para algum $c \in \mathbb{N}$. Logo: $f(b) = \overline{(b, 0)} = \overline{(a + c, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(c, 0)} = f(a) + f(c)$

Deste modo, \mathbb{Z}_+^* é uma cópia de \mathbb{N} que pode ser obtida através de f , a partir disso podemos identificar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. A função considerada, “(...) costuma ser chamada de imersão de \mathbb{N} em \mathbb{Z} ” (DOMINGUES, 1991, p. 168).

Esses são os aspectos lógicos do desenvolvimento da teoria de números e suas transformações indicam que seu princípio decorreu de atividades humanas. Nessa relação pode-se compreender a necessidade dos números inteiros em diferentes momentos da história e como os aspectos “(...) simbólicos ou nexos externos do conceito números inteiros, foram influenciadas por diversas representações de mundo guiadas por concepções filosóficas, científicas e ideológicas de diferentes épocas e culturas” (RODRIGUES, 2009, p. 113).

Os nexos externos do conceito de números inteiros contam com aspectos simbólicos, por exemplo, os sinais de + e – ou a reta numérica em \mathbb{Z} , mas além do rigor matemático pode-se considerar comonexo a representação de quantidades a mais ou a menos a partir dos palitos pretos e vermelhos utilizados pelos chineses para representação dos contrários.

Na cultura escolar ainda estão presentes alguns princípios didáticos da lógica formal que

têm simplificado e desumanizado os aspectos substanciais e simbólicos do conceito números inteiros. Extraem-se apenas um dos aspectos simbólicos do conceito, abordam-no de modo repetitivo, até que o indivíduo relacione rapidamente situações cotidianas, como a medição da temperatura, aos sinais (+) e (-) como se fossem o próprio conceito números inteiros (RODRIGUES, 2009, p. 125).

Visto sobre os movimentos histórico e lógico dos números inteiros, no próximo item serão discutidas as relações entre esses movimentos: os nexos conceituais, ou seja, qual a necessidade vinculada a esse conceito? Quais itens são essenciais dentro desse conceito?

3.3 Nexos conceituais dos números inteiros

Caraça apresenta que a Ciência pode ser vista sob dois aspectos distintos

[...] se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo que surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições. (CARAÇA, 1951, p. XIII).

Optando pelo segundo aspecto, Caraça (1951) em sua obra *Conceitos Fundamentais da Matemática* apresenta um desenvolvimento progressivo dos conceitos relacionados aos conjuntos numéricos. No primeiro capítulo da sua obra que aborda os números naturais é tido como impossível realizar algumas operações inversas, isto é, subtração, divisão e radiciação.

No decorrer dos capítulos foi possível identificar o fim das impossibilidades “[...] a da divisão no campo racional, a da radiciação no campo real e da subtração no campo relativo” (CARAÇA, 1951, p. 103). Nesse processo surgiu uma nova dúvida, como resolver uma radiciação cujo radicando é negativo? O processo de generalizar as relações que já possuem sobre radiciação pode gerar um novo campo numérico será obtido da negação dessa negação, mas Caraça (1951) não deu continuidade nesta obra sobre esse estudo.

Quando se pensa no processo de organizar um objeto de aprendizagem ou uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem é preciso realizar uma contextualização entre os nexos conceituais e o pensamento teórico do conceito, neste caso, dos números inteiros. Num movimento do substancial “[...] ao simbólico que perpassa por diversos outros conceitos, não estritamente matemáticos, possibilitando a compreensão das razões de sua criação e as relações de uns com outros” (RODRIGUES; SCHLUNZEN JUNIOR, 2008, p. 123).

Nesse estudo a respeito do desenvolvimento histórico-lógico do conceito pode-se identificar que o processo de aceitação e de formalização do conceito de números inteiros apresentam alguns elementos essenciais (RODRIGUES, 2009, p. 112), sendo eles:

- Identificar o número como uma quantidade;
- Necessidade lógica de referência para os números inteiros;
- Noções de adição e subtração, pensar o negativo como menos do que nada, “[...] lado de um quadrado de superfície menor que nada” e

“subtrair uma magnitude maior de uma menor”” (LIZCANO apud RODRIGUES, 2009, p. 112);

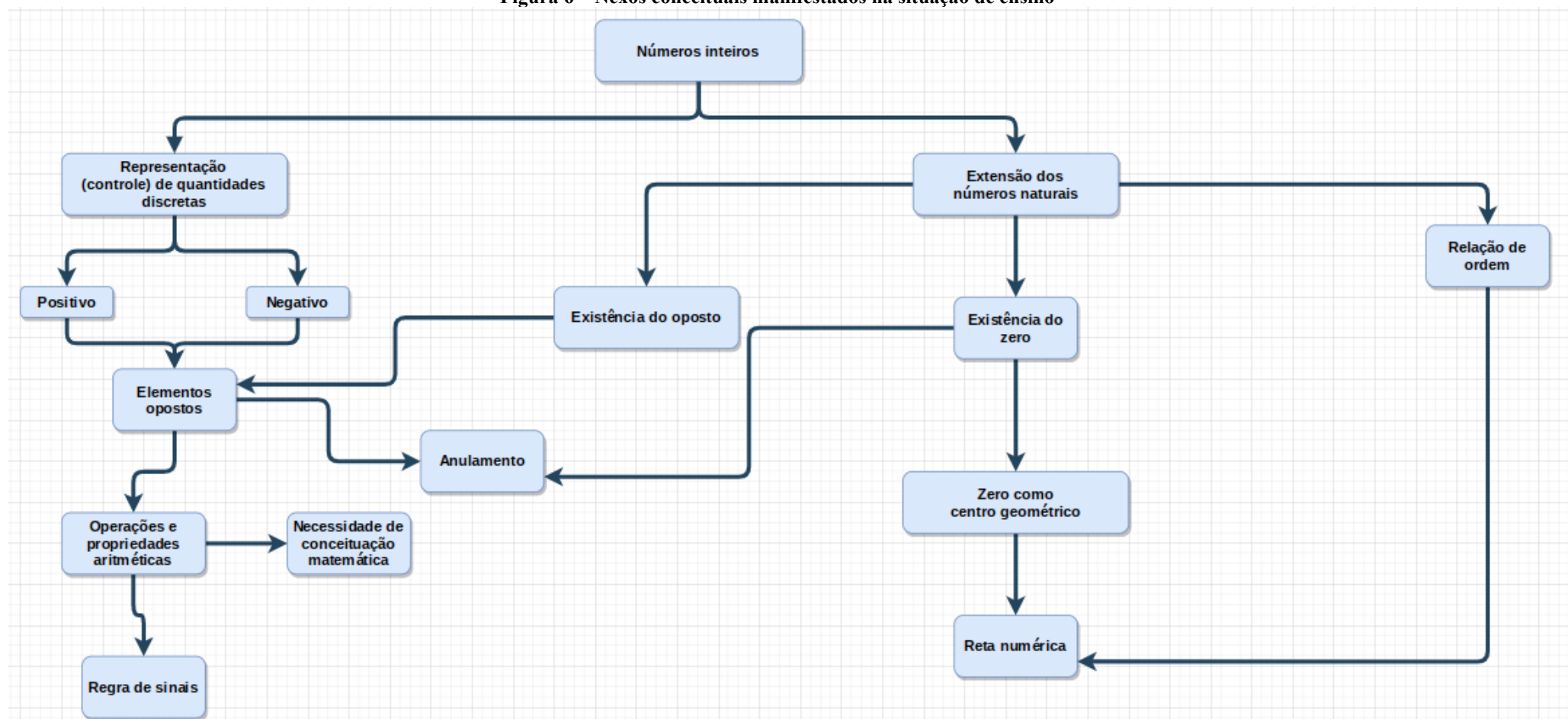
- Assumir alguns princípios para não cair em contradição.

Por outro lado, a partir do olhar histórico-cultural e das “[...] formas de negatividade chinesa, bem como das práticas comerciais suscitadas pelo Renascimento na Europa, foram apreendidos os aspectos substanciais ou os nexos conceituais dos números inteiros” (RODRIGUES, 2009, p. 112). Esses princípios podem ser caracterizados da seguinte forma:

- Princípio do movimento, contradição e simultaneidade;
- Pensar a realidade a partir de elementos contrários e opostos a partir de um centro flexível;
- Visualizar o número como um instrumento algébrico;
- Interpretar o zero como centro (geometria) e como anulação de opostos (álgebra)

Considerando os diferentes aspectos presentes ao longo da história dos números e dos números inteiros, neste trabalho foram definidos alguns nexos conceituais (Figura 6).

Figura 6 – Nexos conceituais manifestados na situação de ensino



Fonte: Autoria própria (2022)

No esquema (Figura 6) elaborado, pode-se observar que os números inteiros estão subdivididos em duas categorias: a representação (controle) de quantidades discretas e a extensão dos números naturais.

A representação/ controle de quantidades apareceu ao longo da história com a necessidade de armazenamento de informações, podendo ser na correspondência um a um com pedras e dedos ou a partir de outros recursos que estavam disponibilizados. As quantidades a serem representadas podem ser positivas ou negativas.

Os elementos opostos são os números que possuem mesma quantidade, mas um deles é positivo, enquanto o outro é negativo. Esses elementos opostos ao serem somados se anulam, isto é, -7 somado a $+7$ resulta em ‘nada’ ou ainda, em zero.

Tendo conhecimento da existência de quantidades discretas positivas e negativas, aliado a compreensão do anulamento surge a necessidade de apresentar propriedades aritméticas que permitem realizar operações com essas quantidades. A partir das propriedades aritméticas, entram as regras de sinais, que resulta em uma quantidade discreta positiva ou negativa.

Nos números inteiros, o zero é visto como um número, como resultado de elementos que se anulam e como centro geométrico. O zero, como centro geométrico, auxilia no estabelecimento de uma reta numérica que comporte tanto quantidades positivas quanto negativas e para a definição desta reta é necessária a compreensão da relação de ordem para dispor os números nela.

Os nexos apresentados na Figura 6 foram utilizados para a constituição da Situação Desencadeadora de Aprendizagem que será apresentada no próximo capítulo.

4 METODOLOGIA

O objetivo deste trabalho é elaborar e analisar uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem sobre a introdução de números inteiros, considerando elementos de seu movimento histórico e lógico. Buscando alcançar esse objetivo, são apresentadas neste capítulo as ações metodológicas.

Inicialmente, dois movimentos teóricos foram necessários: estudos da base teórico-metodológica Atividade Orientadora de Ensino; e estudos sobre o movimento histórico e lógico do conceito de números e números inteiros.

Um dos princípios da Atividade Orientadora de Ensino, como apresentado no capítulo 2 deste trabalho, é a proposta de materializar a organização do ensino, por meio da Situação Desencadeadora de Aprendizagem, que neste caso possui características de jogo e da história virtual do conceito.

Esse modo de organização do ensino proposto, considera o aspecto histórico e lógico da constituição do conhecimento. Nesta pesquisa, se trata do conceito de números inteiros, abordado ao longo do capítulo 3.

Os fundamentos teóricos estudados e sintetizados nos capítulos 2 e 3 foram considerados para estruturar a primeira versão da Situação Desencadeadora de Aprendizagem intitulada ‘A feira medieval’ de forma que houvesse processos constantes de análise e reflexão sobre a composição da situação.

A proposição da situação considera os nexos conceituais identificados pelo estudo do movimento histórico e lógico dos números inteiros. Ou seja, tanto o movimento histórico e lógico quanto os fundamentos teórico-metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino desempenham um papel duplo neste trabalho: o de estabelecer princípios para o processo de organização do ensino e de fundamento analítico-reflexivo sobre o processo de constituição da situação de ensino.

Os processos de análise e reflexão compõem os movimentos de elaboração e reelaboração da situação com o intuito de alcançar o que se objetiva na Atividade Orientadora de Ensino, a organização do ensino de modo que os estudantes se apropriem do conceito em sua forma teórica.

A proposta metodológica está organizada em três etapas: processo de elaboração da Situação Desencadeadora de Aprendizagem a partir dos princípios da atividade orientadora; reformulação da situação a partir de possíveis respostas e constituição da situação como Recurso Educacional Aberto. As etapas de elaboração e de reelaboração estão apresentadas no

próximo capítulo (capítulo 5), enquanto a etapa dos Recursos Educacionais Abertos está apresentada no produto educacional deste trabalho, na forma de um Guia Didático.

Em relação à elaboração da situação de ensino, foram utilizadas as dinâmicas do *Role-Playing Game* (RPG) cuja tradução para a língua portuguesa é ‘Jogo de Interpretações de Papéis’. Essa possibilidade foi levantada pelo fato do RPG, dependendo da forma como é organizado, gerar necessidades nos jogadores. Compreender essa prática com intenções pedagógicas, ou seja, objetivando a apropriação de conceitos, pode torná-la potencialmente uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem. Por este motivo, tornou-se necessário aprender sobre esta modalidade de jogo.

O RPG é um jogo onde um grupo de pessoas interagem a partir de narrativas. A dinâmica é composta por uma simulação através do contexto de uma história, onde há ouvintes e um mestre que conduz os acontecimentos que decorrem conforme as escolhas dos demais jogadores. Deste modo, enquanto a história é contada, ela também é elaborada e reelaborada pelas decisões dos participantes. A principal diferença entre uma história contada e o RPG é o fato dos participantes serem ativos na história, podendo modificar a história enquanto interpretam seus personagens. O RPG tem a estrutura de um jogo, pois seu enredo é constituído a partir de algumas regras bem definidas a respeito do que pode ou não ser feito ao longo de todo o processo do enredo.

A pessoa responsável por apresentar a narrativa da história e as regras é chamada de mestre. O mestre é a pessoa que escreveu/ definiu o enredo da história a ser seguida, por este motivo, o RPG se inicia com a fala deste personagem. Dentre as ações do mestre estão: definir o ambiente do jogo (cenário), os objetivos do jogo e as questões que desafiam os jogadores “[...] que, a partir de então, respondem pelas ações de seus personagens no desenrolar do jogo. Ou seja, cada jogador dá vida a seu personagem, construindo junto com o mestre, a trama que é desenvolvida na aventura.” (AMARAL, 2008, p. 15).

Existem diferentes modos de abordar os RPGs “[...] de fantasia medieval ao terror, de viagens espaciais a cenários históricos. E isso sem precisar desgrudar da cadeira e largar o refrigerante, pois tudo se passa na imaginação” (SALES, s.a, s. p.). Esta liberdade permite trazer o lúdico ao aprendizado, quando conciliada com o ensino.

No Quadro 1, será apresentado o trecho de uma mesa de RPG, a partir de um dos temas clássicos, a ‘fantasia medieval’ e de como os personagens interagem a partir do enredo estabelecido. Nele estão representados cinco personagens, sendo quatro jogadores e o mestre.

O mestre conduz a história conforme as ações individuais dos personagens e os personagens agem conforme o contexto em que estão inseridos.

Quadro 1 - Exemplo de RPG

Numa aventura típica, quatro heróis tentam resgatar a filha do justo rei Albert, sequestrada por um feiticeiro maligno:

MESTRE – Vocês seguem pelos corredores escuros e úmidos do subterrâneo da fortaleza. A luz das tochas de vocês mostra uma bifurcação à frente. Quando vocês se aproximam, percebem um brilho do lado direito, como se alguém estivesse segurando uma tocha também, além da esquina. O que vocês vão fazer?

PEDRO – Eu paro e falo baixinho para o grupo: “E aí, pessoal?”.

RENE – Eu digo: “Apaga essa tocha, senão podem nos ver também!”.

PEDRO – Boa ideia! Eu apago a tocha e faço meu cavaleiro pegar o escudo.

HENRIQUE – Eu também vou me preparar! Pode ser que tenha algum monstro ali na frente. Saco meu machado!

MESTRE – Ok. Vocês apagam as luzes e sacam suas armas, preparando-se para o pior. E você, Maria?

MARIA – Vou esperar eles pararem com essa barulheira e fazer minha personagem tentar ouvir algo, para saber se tem algum perigo ou não.

MESTRE – Ok, Maria! Vamos rolar os dados! Se você passar no teste eu lhe conto o que sua personagem ouviu.

...

Fonte: Adaptado de Sales (s. a.)

O jogo de RPG surgiu nos Estados Unidos da América em 1971 com o jogo ‘*The Fantasy Game*’ que foi rebatizado em 1974 para ‘*Dungeons & Dragons (D&D)*’, este jogo ainda existe atualmente cujo cenário é fantasia medieval e possui forte influência das obras “O Hobbit” e “O Senhor dos Anéis”.

Existem muitos formatos de RPG, os mais comuns são: tabuleiro, papel e caneta, digital e o LARP (*Live Action Role-Playing*). O RPG de tabuleiro segue a estrutura do RPG, mas a principal diferença é que esta modalidade apresenta um mapa com os principais cenários da história. RPG de papel e caneta tem como base a narração de um texto, nesta modalidade é comum ter como material de apoio mapas, livros e imagens, onde todas as ações e habilidades são registradas pelos participantes em sua folha de personagem.

O RPG digital “[...] consiste em jogos de estratégia pelo computador, havendo, inclusive, a possibilidade de aventuras online, em tempo real, com diversos jogadores conectados ao mesmo jogo via Internet” (AMARAL, 2008, p. 15). Por fim, a modalidade LARP, onde as pessoas obtêm mais detalhes a respeito do enredo e onde devem ‘agir como os personagens’ em um movimento semelhante ao de um teatro, na maioria das vezes os personagens se caracterizam conforme a história proposta.

Outra consideração sobre o RPG é que ele tem um caráter cooperativo, visto que o objetivo do jogo somente poderá ser alcançado se todos os participantes estiverem cumprindo seus deveres e auxiliando os demais. Esta escolha reforça o caráter cooperativo do aprendizado proposto pela Atividade Orientadora de Ensino, visto que os conceitos serão pensados e discutidos tanto entre as duplas quanto consolidados no processo de realização da síntese coletiva.

Neste trabalho, a modalidade de RPG adotada é o LARP onde os jogadores, no caso os estudantes, deverão incorporar o personagem destinado a eles, seguindo as regras específicas, mas não será necessário que eles se caracterizem tal como o personagem.

Este tipo de RPG foi escolhido, pois, suas características contribuem com as ações desenvolvidas com base na Atividade Orientadora de Ensino, onde os estudantes têm a possibilidade de interagir, levantar hipóteses, testá-las e fazer uma síntese coletiva das ações realizadas ao longo desse processo com a intenção de concretizar o objetivo apresentado no jogo.

No período em que essa pesquisa foi desenvolvida, a modalidade de ensino precisou ser adaptada para o ensino remoto emergencial devido ao contexto pandêmico que estava sendo vivenciado. Por este motivo, nesta pesquisa, optou-se por desenvolver uma situação que atendesse também a essa nova demanda, o ensino remoto.

Esta situação de ensino não foi desenvolvida nas escolas como havia sido previsto inicialmente, mesmo obtendo a aprovação do comitê de ética da UTFPR, visto que nesse mesmo período seria necessário obter uma autorização de pesquisa junto à Secretaria da Educação e do Esporte do Estado do Paraná (SEED/ PR) para poder desenvolver uma pesquisa com os estudantes, mesmo garantindo o anonimato.

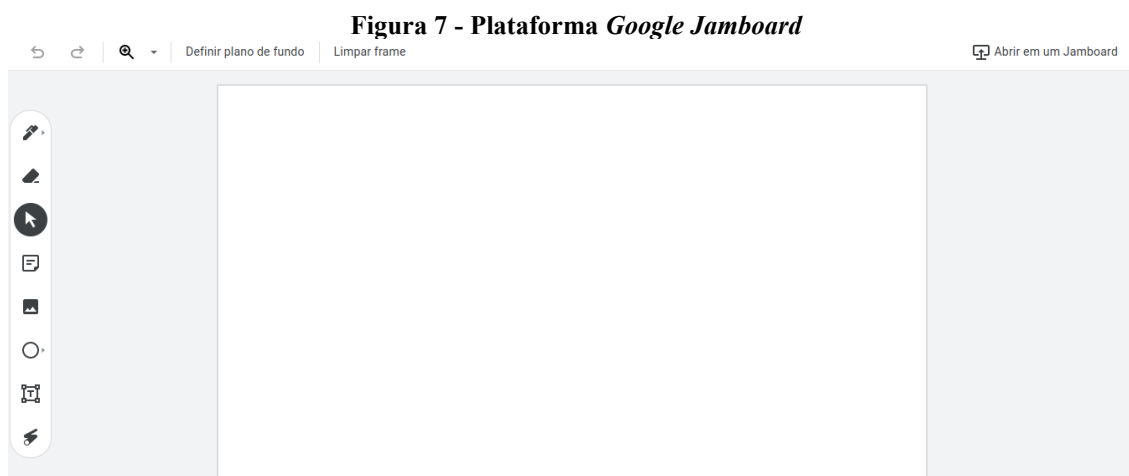
Não havendo tempo hábil para a realização da pesquisa conforme os prazos previamente estabelecidos com o comitê de ética, e tendo o processo de Ensino nas escolas da rede pública, voltado a ser presencial, optou-se por alterar a pesquisa deste Trabalho de Conclusão de Curso, buscando enfatizar os processos de estudos e de elaboração de uma

Situação Desencadeadora de Aprendizagem no formato RPG, entendendo que neste movimento garante-se o processo de formação docente, enquanto objetivo do trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática.

Na perspectiva de desenvolvimento da pesquisa, e dentro do contexto do ensino remoto, essa modalidade de RPG foi adaptada, então foi necessário pesquisar ferramentas online que pudessem ser utilizadas para suprir essa demanda. Por este motivo fez-se necessário compreender o funcionamento das ferramentas disponíveis na plataforma *Google Jamboard*.

Esta plataforma foi escolhida pela familiaridade que a autora tem com este recurso e por ser um dos recursos disponibilizados na própria plataforma *Google Meet* que é um recurso de videoconferências amplamente utilizado no ensino remoto pelas escolas estaduais do Paraná.

A plataforma *Google Jamboard* é um quadro branco digital, onde é possível escrever, desenhar e apagar utilizando as ferramentas disponíveis na parte esquerda da tela como é possível observar na Figura 7.



Fonte: Autoria própria (2022)

O primeiro ícone que aparece na parte de ferramentas é uma caneta, ao clicar nela é possível escolher entre diferentes tipos de caneta que por consequência possuem características diferentes. Neste mesmo ícone é possível escolher entre seis cores para realizar a escrita ou desenho com a caneta.

O segundo ícone é uma borracha e serve para apagar o que foi desenhado na tela, o terceiro é um ícone de seleção onde é possível arrastar objetos que estejam na tela. O quarto ícone é uma nota adesiva, onde é possível escrever utilizando as letras do teclado do computador ou celular.

O quinto serve para inserir uma imagem na plataforma, a partir de um link ou do banco de imagens do computador. No sexto é possível escolher entre oito opções de formas

geométricas, o sétimo ícone serve para inserir uma caixa de texto e o último ícone é um ‘laser’ que serve para apontar para alguma parte da tela da plataforma

Através das ferramentas da plataforma *Google Jamboard*, houve um momento de estudo e pesquisa de como estruturar a situação de ensino de forma que os estudantes pudessem interagir e representar nesta plataforma, bem como identificar recursos adicionais necessários.

Como a situação tem por princípios os aspectos do movimento histórico e lógico do conceito de números e de números inteiros, considerou-se a necessidade de que os estudantes tivessem formas diferentes de representação conforme os elementos estudados e apresentados no capítulo 3. Neste trabalho optou-se pelas formas de representação de quantidades: pedras, argila e palitos pretos e vermelhos.

Escolhidas as formas de representação com base nos registros históricos, foi pensado em como apresentar esses recursos na plataforma *Jamboard* e após diversas tentativas de representação foi definido que seriam acrescentadas algumas imagens pictóricas como representação dos palitos pretos e vermelhos e das diferentes pedras. Para a representação da argila foi definido escolher apenas um plano de fundo para que os estudantes pudessem representar livremente.

É muito importante que o professor, ocupando o lugar de mestre na situação de ensino, instigue os estudantes a conversarem e reflitam sobre o movimento que estão fazendo para que eles não utilizem o material apenas empiricamente, mas que compreendam as relações matemáticas envolvidas nesse processo.

Todo o processo de elaboração da situação, isto é, movimentos de estudo, constituição de um contexto, definição das regras, objetivos individuais e gerais e da preparação dos recursos na Plataforma *Google Jamboard*, foram pensados a partir dos elementos da atividade: necessidades, motivos, ações, operações e condições.

O que se objetiva com a situação de ensino é desencadear nos estudantes a necessidade da representação de quantidade positivas, negativas e do elemento neutro da adição.

A motivação proposta com a situação de ensino inicialmente surge com os papéis a serem desempenhados no próprio RPG, mas pretende-se redirecioná-la para o processo de apropriação do conhecimento. Assim, o objetivo principal do professor com essa situação de ensino é propiciar aos estudantes, uma transformação do motivo de participação do jogo, para a apropriação do conceito de números inteiros.

Quanto às ações dos estudantes, se propõe que estas sejam organizadas considerando o desenvolvimento do papel de cada personagem proposto pelo próprio RPG e as operações

para que isso se concretize envolvem: o acesso à plataforma, e a utilização de conceitos já apropriados.

Após a estruturação dos elementos da situação de ensino, que serão apresentados no capítulo 5, a situação foi analisada com o intuito de evidenciar a manifestação dos nexos conceituais de números inteiros e identificar possibilidades de melhorias ou informações que precisariam ser acrescentadas para evitar possíveis entraves, conceituais ou não, no decorrer da mesma. Repensadas e reformuladas as ações, foram realizadas algumas possibilidades de representação, para cada uma das seis cartas de personagem pensadas inicialmente.

Os nexos conceituais desempenham um papel central no desenvolvimento das reformulações no que tangem às relações de conteúdo da Situação Desencadeadora de Aprendizagem. Por este motivo, o processo de elaboração de uma situação não é linear, sendo necessário escrever e reescrever a proposta tendo os nexos como elemento direcionador desse movimento. Neste sentido, considerando todo o movimento de elaboração desta situação foi elaborado um Recurso Educacional Aberto (REA), composto por três vídeos que decorrem desse movimento.

Os Recursos Educacionais Abertos são

[...] materiais de ensino, aprendizado e pesquisa, em qualquer suporte ou mídia, que estão sob domínio público, ou estão licenciados de maneira aberta, permitindo que sejam utilizados ou adaptados por terceiros. O uso de formatos técnicos abertos facilita o acesso e reuso potencial dos recursos publicados digitalmente (UNESCO/COL, 2011, p.V).

Segundo as informações presentes no SAS Plataforma de Educação (2021), a maioria dos conteúdos disponibilizados na web possuem um selo *@copyright* que significa que a utilização ou cópia de um material não é permitido. No entanto, os Recursos Educacionais Abertos possuem licenças livres conhecidas como *Creative Commons* (CC), esta permissão é sinalizada por um selo (CC-BY-NC-SA) contendo as especificações de como o professor pode utilizar ou adaptar o trabalho.

Mesmo havendo a possibilidade de reprodução de uma obra com CC, os sujeitos que desejarem divulgar ou elaborar um material a partir deste, precisam referenciar o trabalho utilizado para não estar cometendo plágio.

Segundo informações da SAS - Plataforma de Educação (2021), a fundadora do projeto REA.br, Carolina Rossini, diz que os REAs se baseiam em três principais elementos:

Conteúdos de aprendizado: podem ser livros, imagens, cursos, palestras metodologias de ensino e outros materiais que possam ser utilizados com finalidade educacional;

Ferramentas tecnológicas: como softwares, programas e plataformas on-line que permitem gerenciar e divulgar os conteúdos;

Recursos para implementação: diz respeito às licenças de propriedade intelectual para publicar os materiais. (SAS, 2021, s. p.).

Os Recursos Educacionais Abertos possuem ainda quatro ‘liberdades’ que os caracterizam: usar, aprimorar, recombinar e distribuir. Essas liberdades significam:

Usar: permissão de uso do original ou da nova versão criada a partir de outro REA em diferentes contextos;

Aprimorar: é possível adaptar ou melhorar o recurso de acordo com as suas necessidades;

Recombinar: a liberdade de fazer combinações e misturas entre REAs para criar outros materiais.

Distribuir: permissão para fazer cópias do material original ou da nova versão e, também, para compartilhá-los. (SAS, 2021, s. p.).

Neste trabalho, o REA está voltado ao professor ou futuros professores e conta com três vídeos didáticos elaborados a partir da Situação Desencadeadora de Aprendizagem ‘A feira medieval’ que está apresentado no produto educacional deste TCC. Em resumo, o primeiro vídeo apresenta a situação de ensino e as regras para a execução dela; o segundo vídeo apresenta possibilidades de respostas a partir da situação de ensino; e o terceiro aborda a articulação da situação com a base teórico-metodológica e com a necessidade dos números inteiros.

O REA tem a finalidade de disponibilizar o acesso à pesquisa desenvolvida neste trabalho de conclusão de curso para professores e futuros professores de matemática, por este motivo ele contempla a situação de ensino elaborada, possibilidades de respostas e como os nexos conceituais se manifestam nessa situação, concluindo, desta forma, o que se objetiva nesta pesquisa.

No próximo capítulo serão apresentados os elementos sobre como está organizada a Situação Desencadeadora de Aprendizagem; qual a reformulação foi proposta; quais aspectos do movimento histórico e lógico estão presentes na situação; e como ela se articula com os elementos da Atividade Orientadora de Ensino.

5 PROCESSO DE CRIAÇÃO E REFORMULAÇÃO DA SITUAÇÃO DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM

Neste capítulo será apresentado o movimento de elaboração de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem voltada ao ensino dos números inteiros, a partir de um resgate histórico da necessidade que desencadeou a criação destes números. Considerando os elementos históricos, neste trabalho, optou-se por utilizar como contexto para a situação, as primeiras transações comerciais.

A Situação Desencadeadora de Aprendizagem se apresenta como a materialização dos princípios da Atividade Orientadora de Ensino para a prática pedagógica. O estudo do movimento histórico de produção de determinado conhecimento, contribui para revelar a essência deste. Essa essência é compreendida considerando formas teóricas de pensamento que superam sua forma empírica.

Em processos de pensamento empírico, o conhecimento está atrelado à aparência dos objetos e fenômenos, o ensino que se pauta apenas a partir de repetição, de exemplos particulares. Enquanto o teórico apresenta um aspecto mais profundo do conhecimento, o que se almeja com essa situação.

Além disso, a familiaridade da pesquisadora com a utilização de jogos no ensino, aliada à possibilidade da modalidade ‘jogo com propósito pedagógico’, fez com que a proposta da situação se delineasse para um RPG do tipo LARP que simularia transações comerciais em determinadas condições, com a finalidade de gerar nos estudantes uma necessidade análoga a vivenciada pela humanidade no processo de elaboração dos números inteiros, mais precisamente, dos elementos nulo e oposto. A proposta permite aos estudantes trabalharem com diferentes tipos de representação para estas trocas comerciais, além de perceberem a necessidade de adotar um símbolo que indicasse a falta de um produto, introduzindo o conceito dos números negativos. A seguir, o texto inicial da situação (Quadro 2):

Quadro 2 – Primeira versão da Situação Desencadeadora de Aprendizagem

Situação de ensino - A feira medieval

Cenário: A história irá se passar em uma feira de um vilarejo, onde os personagens serão divididos em comerciantes e compradores. Nesta feira há diferentes produtos sendo comercializados e compradores com demandas distintas entre si. O ambiente onde ocorre a história é semelhante a uma feira medieval do século XIV (Figura 8).

Figura 8 - Feira Medieval

Fonte: <https://www.deviantart.com/minnhagen/art/Medieval-Market-322692737>

Cada comerciante expõe seu produto em uma barraca, os compradores, por sua vez, compareciam às barracas para comprar itens faltantes em suas residências ou comprar itens para ter uma reserva em suas residências, considerando que a feira, na maioria das vezes, não era próxima da moradia de todos os compradores.

Nesta história, os compradores devem carregar consigo uma lista de compras contendo o registro se conseguiram comprar todos os elementos da lista e se precisaram encomendar algum item. Por sua vez, os comerciantes devem possuir uma lista para verificar a quantidade de produtos que ainda possuem, quantidades vendidas e a quantidade que precisam trazer para repor, caso seja necessário.

Nesta situação, há três grupos específicos de comerciantes: os comerciantes de frutas, comerciantes de verduras e legumes, e os comerciantes de grãos. Cada vendedor possui um material para registro: pedras, palitos ou anotação na argila. Os comerciantes de frutas utilizam pedras para o registro, os comerciantes de verduras e legumes utilizam palitos pretos e vermelhos, enquanto o comerciante de grãos utiliza a argila.

Os personagens que são compradores precisam registrar quais os alimentos que irão comprar e quais alimentos ainda precisam receber e, todos os compradores utilizam a argila como material de registro.

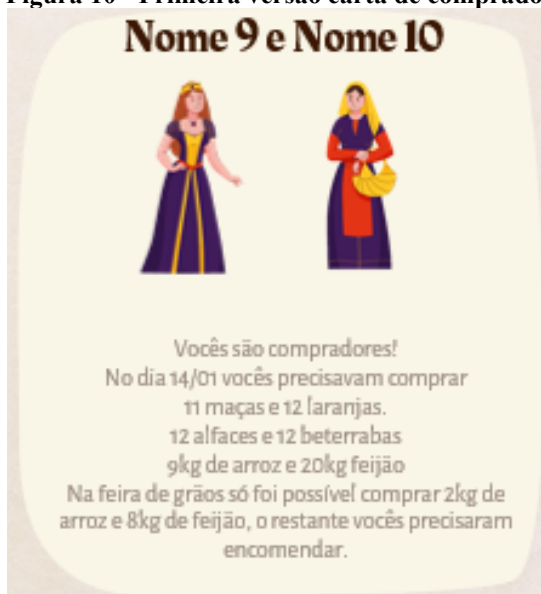
Cada jogador receberá uma carta de personagem (por exemplo, Figuras 9 e 10), em que está apresentada uma lista de compras ou uma lista com a quantidade de produtos que o comerciante possui em sua barraca e os itens que foram vendidos.

Figura 9 - Primeira versão carta de comerciante de frutas



Fonte: Autoria própria (2022)

Figura 10 - Primeira versão carta de comprador



Fonte: Autoria própria (2022)

Os compradores compram uma quantidade de alimentos de cada um dos comerciantes, entretanto, essa quantidade pode acabar excedendo a quantidade disponível na barraca. Por ser um item necessário para o comprador, ele deixará a quantia faltante encomendada para o próximo dia de feira.

Para que a feira aconteça sem maiores problemas, ambos, comerciante e comprador, devem registrar essas quantidades faltantes ou ‘a receber’, mas cada um possui sua forma e seus recursos para registrar essas informações.

Todos os estudantes serão subdivididos em duplas para representar cada um dos tipos de comércio ou para representar os compradores. Por ser uma situação pensada para o ensino remoto, os materiais utilizados (pedras, palitos e argilas) serão representados por meio de desenhos na plataforma do *Google Jamboard*.

É válido ressaltar que nesta situação de ensino os estudantes possuem regras gerais e regras específicas:

Regras gerais: Os estudantes não poderão utilizar em nenhum momento os algarismos indo-arábicos, nem os símbolos de mais e menos (+ e -), podendo utilizar como recurso apenas o nome dos personagens ou comércio onde foi comprado/ encomendado determinado produto.

Regras individuais:

- Representação com pedras: Apenas pode ser utilizado para a representação diferentes tipos de pedras, não sendo permitido nenhuma escrita (exceto nome dos personagens) ou simbologias.
- Representação com palitos: Apenas será permitido a utilização de palitos pretos ou vermelhos, não sendo permitido nenhuma escrita (exceto nome dos personagens) ou simbologias.
- Representação na argila: Não há regras específicas individuais, apenas as regras gerais se aplicam.

Objetivo do jogo: Apesar de cada personagem receber uma carta com suas respectivas listas, a representação final de todos os jogadores coincida, considerando que as informações que serão dadas para cada um será a mesma. Deste modo, o problema desencadeador da situação é: Como registrar as quantidades que se possui ou as que faltam e como se dará a comunicação a partir deste registro.

Fonte: Autoria própria (2022)

Esta situação foi organizada para o ensino remoto, por isso os materiais utilizados (pedras, palitos e argilas) serão representados por meio de desenhos na plataforma do *Google Jamboard*. Sugere-se que os estudantes sejam subdivididos em duplas para representar cada um dos tipos de comércio ou para representar os compradores.

Em sala de aula esta situação pode ser apresentada e desenvolvida em diferentes formas. Nos próximos itens deste capítulo (5.1 e 5.2) será apresentada a organização da situação de ensino, bem como a reformulação desta e uma possibilidade de resposta para cada uma das seis cartas pensadas inicialmente.

5.1 Organização do ensino a partir da Situação Desencadeadora de Aprendizagem

A situação de ensino foi organizada para ser desenvolvida de forma remota, considerando o contexto pandêmico vivenciado durante os anos de 2020 e 2021, mas ela pode ser adaptada para o movimento presencial.

Para o processo de organização do ensino utilizando a Situação Desencadeadora de Aprendizagem, inicialmente, foram propostas quatro ações de ensino:

Primeira ação de ensino: Este momento é realizado apenas entre as duplas, será definido o papel de cada dupla de estudantes, a escolha de um nome medieval para cada personagem, a apresentação das cartas e das regras.

Os estudantes são orientados a representar da forma como preferirem a quantidade de produtos faltantes, produtos excedentes ou adquiridos desde que não desobedeçam às regras gerais e regras individuais.

Segunda ação de ensino: Este momento é realizado coletivamente. O professor retoma as diferentes representações feitas pelas duplas que deverão discutir as diferenças e semelhanças presentes nessas representações procurando, na medida do possível, identificar se a representação é de um comprador ou de um comerciante.

Terceira ação de ensino: Com base no momento anterior, o professor encaminha a solução coletiva ao problema desencadeador “como registrar as quantidades que se possui ou as que faltam e como se dará a comunicação a partir deste registro”. Espera-se que os estudantes sintam a necessidade de um registro padronizado e, por este motivo, os estudantes poderão eleger uma das formas de representação (pedra, palito ou argila) feita por uma das duplas e realizar a representação novamente de suas cartas de personagem utilizando a forma escolhida pelo grupo.

Quarta ação de ensino: O professor retoma o processo histórico que desencadeou a necessidade de utilizar essas diferentes representações e apresentar a simbologia que temos atualmente para representar as faltas (-) e as sobras (+). Trata-se do momento de síntese e formalização do conhecimento sobre números inteiros.

As informações essenciais para o desenvolvimento da situação estão apresentadas na carta de personagens, vide um exemplo na Figuras 9 e 10, mas as informações presentes nas cartas de personagem, bem como a forma de representação sugerida para cada um dos comerciantes e compradores estão dispostas na Tabela 1.

Tabela 1 – Informações presentes na primeira versão da carta de personagens

Identificação do personagem	Texto da carta de personagens	Forma de representação
Comerciantes de frutas	Vocês possuem na barraca de vocês: maçãs e laranjas. No dia 14/01 vocês levaram para a feira 30 maçãs e 25 laranjas. Compradores 1 compraram 12 maçãs e 12 laranjas. Compradores 2 compraram 11 maçãs e 12 laranjas. Compradores 3 compraram 16 maçãs e 20 laranjas.	Pedras
Comerciantes de verduras e legumes	Vocês possuem na barraca de vocês: alfaces e beterrabas. No dia 14/01 vocês levaram para a feira 25 alfaces e 35 beterrabas. Compradores 1 compraram 16 alfaces e 20 beterrabas. Compradores 2 compraram 12 alfaces e 12 beterrabas. Compradores 3 compraram 11 alfaces e 15 beterrabas.	Palitos pretos e vermelhos
Comerciantes de grãos	Vocês possuem na barraca de vocês: arroz e feijão. No dia 14/01 vocês levaram para a feira 40kg de arroz e 35kg de feijão. Compradores 1 compraram 23kg de arroz e 15 kg de feijão Compradores 2 compraram 9kg de arroz e 20kg de feijão. Compradores 3 compraram 15kg de arroz e 12kg de feijão	Argila
Compradores	No dia 14/01 vocês precisam comprar 11 maçãs e 12 laranjas, 12 alfaces e 12 beterrabas; e 9kg arroz e 20kg feijão. Na feira de grãos só foi possível comprar 2kg de arroz e 8kg de feijão, o restante você precisou encomendar.	Argila

Fonte: Autoria própria (2022)

Outro elemento importante no processo de organização da situação de ensino são os nexos conceituais dos números inteiros (Figura 6) elaborados a partir do movimento histórico e lógico. Neste sentido, almeja-se que ao longo do desenvolvimento da situação, o estudante consiga apropriar alguns desses nexos.

Os nexos conceituais se manifestam na situação desde o processo de elaboração dos elementos dispostos nas cartas de personagem até o registro das suas compras ou vendas. O foco deste processo está no conteúdo dessas representações, na possibilidade de reconhecer nelas a distinção entre quantidades positivas e negativas, bem como o seu registro.

O estudante tem liberdade para realizar a representação, mas é importante que ele perceba que está trabalhando com grandezas opostas e o que a palavra ‘dever’ e ‘encomendar’ significam dentro da situação de ensino em relação a cada um dos personagens. É válido ressaltar que mesmo se tratando de uma feira, nesta situação, não será preciso trabalhar com

nenhuma moeda para a realização das transações comerciais, para que os estudantes percebam a oposição entre as quantidades existentes na situação de ensino.

A situação foi elaborada a partir dos nexos conceituais apresentados na Figura 6, pode-se observar esses elementos na situação do seguinte modo:

Representação/ controle de quantidades - processo onde os estudantes precisam apresentar os elementos dispostos em suas cartas de personagem para representarem suas compras ou vendas.

Positivo ou negativo/ elementos opostos - durante o processo de representação é importante que o estudante perceba que está trabalhando com quantidades opostas e o que a palavra ‘dever’ e ‘encomendar’ significam na situação de ensino.

Propriedades aritméticas – nesta situação, cada comerciante está devendo uma determinada quantia de produtos a um comprador, enquanto cada comprador precisou encomendar determinadas quantias de produtos. Essas quantias ‘faltantes’ precisam ser consideradas a partir de um total disponibilizado na carta de personagem, mas é necessária a realização de operações aritméticas para determiná-las.

Necessidade de conceituação matemática/ regra de sinais – pensar em quantias encomendadas requer uma atenção especial para determinar quantidades positivas e negativas, mas no momento de realizar operações é necessário compreender conceitualmente o que cada quantia significa para cada personagem e como efetivar o registro.

Existência do zero – a situação de ensino solicita que os compradores e os comerciantes tenham um registro de alimentos que trouxeram para casa e saldo final de produtos restantes ao final desse dia de feira, respectivamente. Em alguns casos, pode ser necessário registrar que não foi possível trazer nenhum alimento ou que não sobrou nenhum alimento na feira, neste sentido o estudante precisará representar essa quantidade nula.

É válido observar se neste processo os estudantes percebem que possuem recursos limitados para a representação, então a forma de registro do ‘nada’ e a diferenciação de quantidades positivas das negativas surge a partir dessa limitação e dessa necessidade da própria representação das quantidades.

Anteriormente foi apresentado que a situação foi pensada para ser desenvolvida em quatro ações de ensino e o papel do professor em cada uma delas. Feitas essas ações de ensino, pode-se pedir para que os estudantes partilhem com o coletivo como foi a experiência deles. Para isso, podem ser realizadas algumas perguntas na condução dessas discussões, entre elas: Como você operou com as quantidades? De que modo você reorganizou as operações? Que

linguagem foi utilizada para comunicação? Quais foram as dificuldades no momento do registro?

Ao longo dos movimentos de condução das discussões é natural que o professor identifique outras questões relacionadas ao conceito de números inteiros. Lembrando que essas questões não são obrigatórias e estão sendo propostas para formalizar as sínteses coletivas sobre utilização dos números inteiros.

A situação elaborada e o processo de organização do ensino não foi desenvolvido com nenhum estudante da educação básica, mas para a reformulação, houveram contribuições de graduandos e pós-graduandos onde foi possível identificar elementos que precisavam ser alterados na primeira versão da situação, tanto no jogo em relação às cartas de personagem (Tabela 1), quanto na condução da mesma referente ao processo de organização do ensino. As reformulações da situação serão apresentadas no próximo item.

5.2 Reformulação e possibilidades de respostas da Situação Desencadeadora de Aprendizagem

Com base nas percepções da autora sobre as possibilidades de resolução da situação foi possível identificar alguns problemas no processo de condução e na interpretação das informações presentes nas cartas de personagens, entre eles pode-se destacar:

- Problemas associados às cartas de personagem:

Carta dos comerciantes: necessidade de explicar que os compradores visitaram a barraca deles, na respectiva ordem apresentada na carta, pois neste caso, a ordem importa, visto que o objetivo é que as cartas de comerciantes e de compradores tenham quantidades equivalentes de alimentos ‘entregues’ e ‘encomendados’.

Carta de compradores: Na carta representada na Figura 10 pode-se observar que a indicação ‘feira de grãos’, poderia deixar margens para a compreensão de que os itens que precisavam ser encomendados eram todos os demais, isto é, todos os itens que não eram grãos, verduras e legumes ou frutas, respectivamente. Nesse processo, os estudantes poderiam não sentir a necessidade de trabalhar com grandezas negativas.

- Problemas associados à organização do ensino:

No processo de condução foram pensadas em quatro ações de ensino, entre elas, a ação de ensino 3, solicita que os estudantes elejam uma dentre todas as representações realizadas pelas duplas para padronizar o sistema de representação numérico, em seguida, eles precisam

realizar uma nova representação das informações presentes nas cartas utilizando a representação eleita.

O problema identificado nesta ação de ensino é que a dupla que criou a representação escolhida não teria que realizar uma segunda representação, teria apenas que descrever o método que escolheram para representar.

No desenvolvimento da situação de ensino, os estudantes estarão em contato com algumas das formas de representação de quantidades utilizadas ao longo da história da humanidade, mas em nenhum momento é solicitado para os estudantes representassem as informações das cartas de personagem utilizando os algarismos indo-arábicos e os sinais de + e -, frisando a importância da representação atual.

Outro possível problema identificado é que as cartas de personagens estavam no mesmo link do *Jamboard*, utilizando apenas janelas diferentes. Com isso, não garantir que os estudantes não vissem a representação dos colegas, podendo induzir os estudantes a copiarem o que viram quebrando o processo criativo de representação (Figura 11).



Fonte: Autoria própria (2022)

Deste modo foi necessária uma reformulação da situação, procurando corrigir todos os problemas identificados. Este movimento resultou na seguinte adaptação:

- O desenvolvimento da situação conta com três ações de ensino, ao invés de quatro:
 - **Primeira ação de ensino:** apresentação das cartas de personagens, apresentação da plataforma e representação das informações das cartas de personagens (movimento em duplas).
 - **Segunda ação de ensino:** comparação coletiva das quantidades e representação das cartas utilizando os algarismos indo-arábicos e os sinais de mais e de menos.

- **Terceira ação de ensino:** Apresentar o processo histórico que gerou a necessidade das diferentes representações para os números, apresentação da simbologia atual de representação e discussões sobre os elementos da situação de ensino desenvolvida.
- Reestruturação das cartas de personagens (Apêndice A).
- Estudantes que representarão comerciantes: Anotar quantos produtos trouxeram para a feira; quantos produtos restaram ou precisaram ser encomendados no final do dia; quantos produtos cada comprador comprou.
- Estudantes que representarão compradores: Registrar o que comprou; o que ficou encomendado; o que conseguiu trazer para sua residência.

É importante destacar que as quantidades compradas, encomendadas e levadas pelos compradores devem coincidir com as informações prestadas pelos comerciantes; saber o significado das suas representações feitas em duplas; e identificar quais relações matemáticas aparecem no movimento de análise, interpretação e representação das cartas.

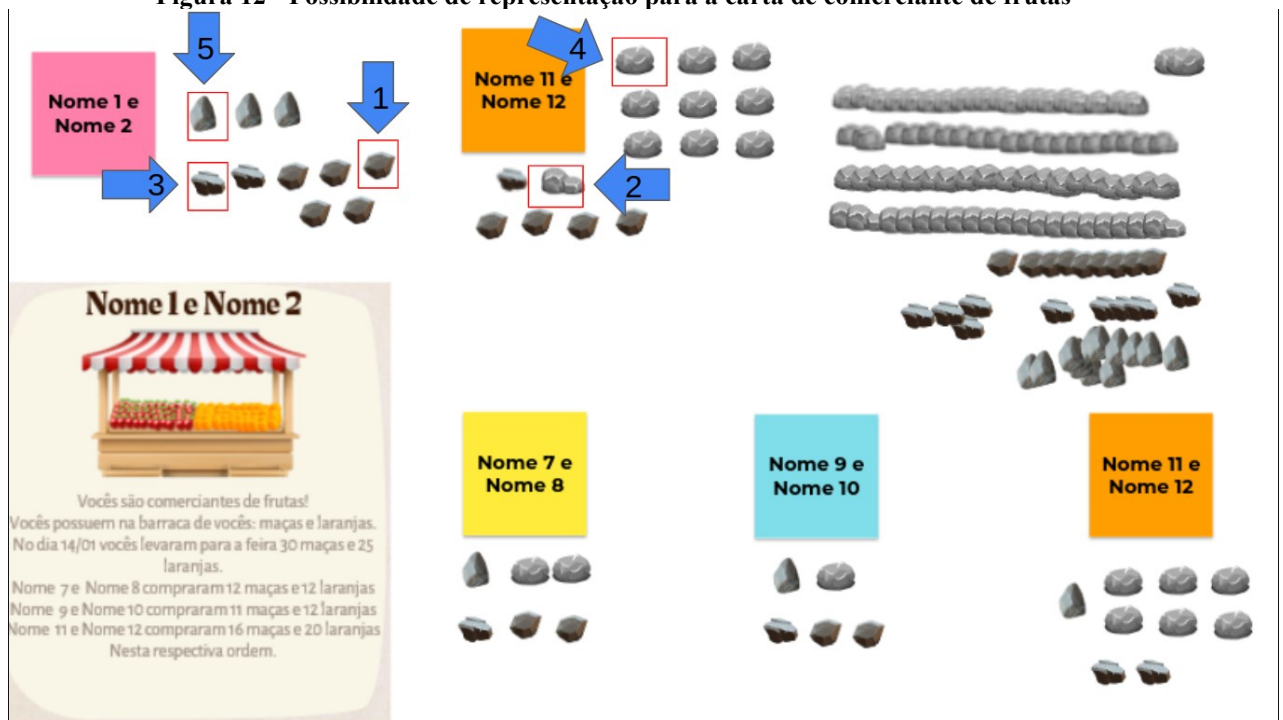
- Apresentação das cartas de personagens e materiais de representação em links diferentes da plataforma *Google Jamboard* (Apêndice B).

No processo de reformulação da primeira versão da situação de ensino (Quadro 2) não houve muitas alterações, sendo apenas acrescentado um parágrafo reforçando a importância da reformulação para desencadear a necessidade de que os participantes fizessem registros mais adequados. Neste sentido, foi acrescentado este parágrafo na Situação Desencadeadora de Aprendizagem: “Nesta história, a rainha impôs um decreto que exige que os compradores carreguem consigo um registro de todos os elementos da lista que conseguirem comprar e um registro dos itens que precisaram ser encomendados. Enquanto os comerciantes têm o compromisso de registrar a quantidade de produtos que ainda possuem, quantidades vendidas e quantidades que precisam trazer para repor, caso seja necessário. Este decreto surge com a intenção de ter um registro para a cobrança de impostos”.

Para contribuir com a compreensão sobre o processo de ensino a ser desenvolvido e a partir do processo de análises e reformulações da situação de ensino, foram pensadas em algumas possibilidades de representação que serão apresentadas com base nas cartas de personagens e no *Jamboard* (Apêndice A e Apêndice B):

- Possibilidade de representação para a carta de comerciantes de frutas:

Figura 12 - Possibilidade de representação para a carta de comerciante de frutas



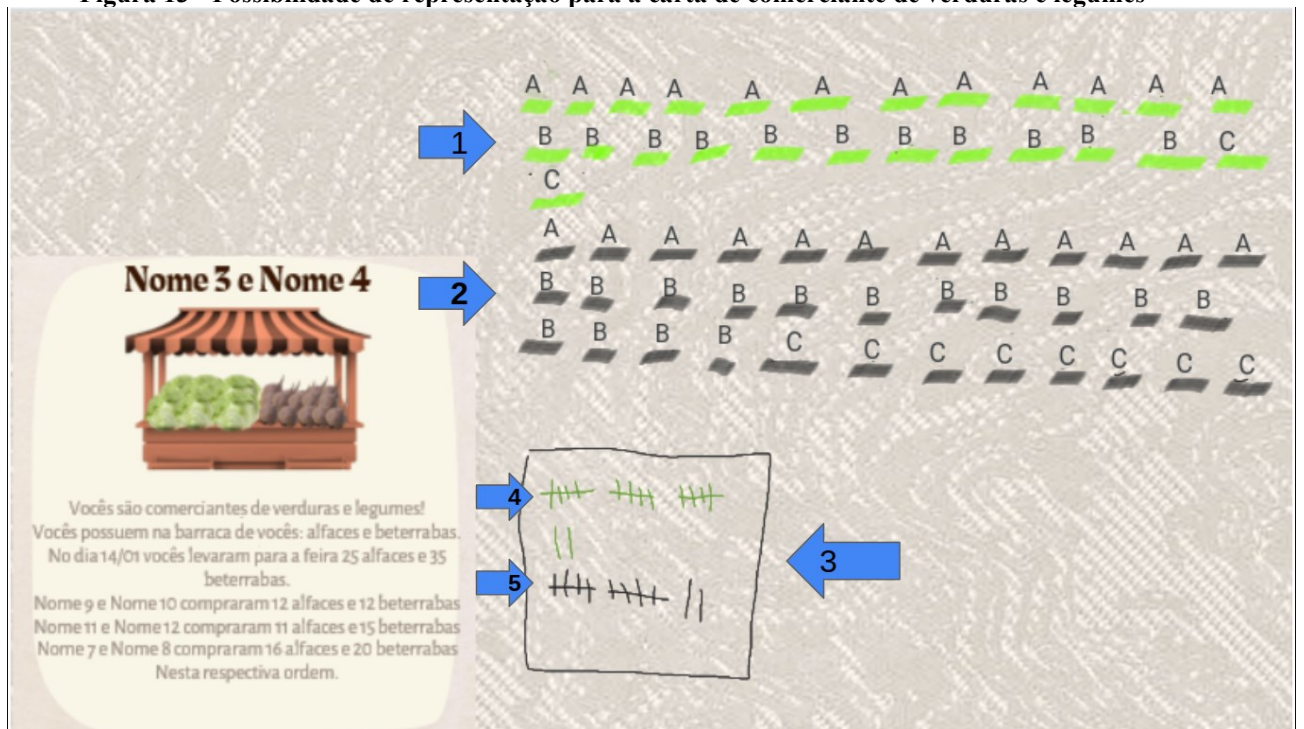
Fonte: Autoria própria (2022)

Nesta representação (Figura 12) foram utilizados quatro tipos diferentes de pedras para representar: unidade de laranja (seta 1), cinco unidades de laranja (seta 2), uma dezena de laranja (seta 3), unidade de maçã (seta 4) e uma dezena de maçã (seta 5).

Na parte superior da representação está a quantidade de frutas que os comerciantes levaram para a feira e quantidade de alimentos que será necessário trazer no próximo dia de feira e para quem será necessário entregar. Na parte inferior está a quantidade de frutas que cada comprador conseguiu levar para casa.

- Possibilidade de representação para a carta de comerciantes de verduras e legumes:

Figura 13 - Possibilidade de representação para a carta de comerciante de verduras e legumes

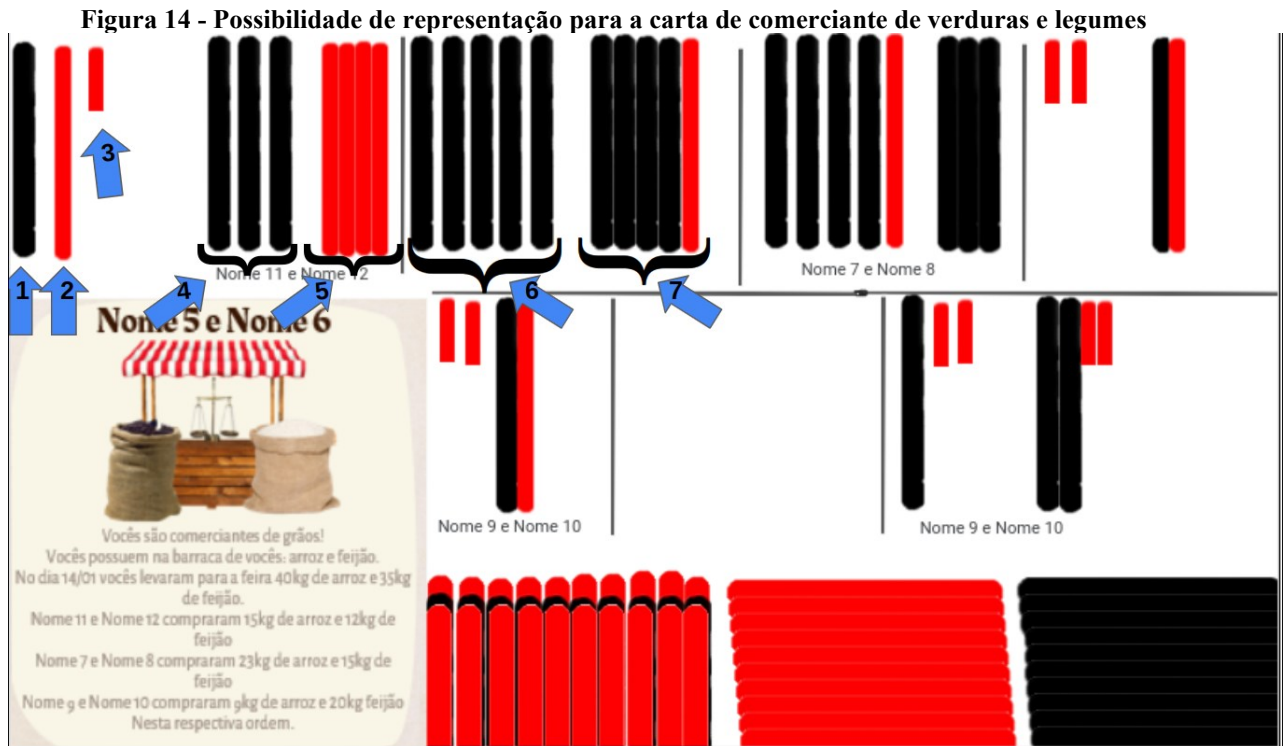


Fonte: Autoria própria (2022)

Para esta representação (Figura 13) verde representa a unidade de alface e preto representa unidade de beterraba. A quantidade de cada legume ou verdura levado a feira neste dia está representado por um risco horizontal e a letra acima de cada risco significa para qual par de compradores o vendedor vendeu. Isto é, na parte indicada pela seta 1 indica a ordem na qual foram vendidas as alfaces, na seta 2 a ordem em que foram vendidas as beterrabas.

O quadro representado abaixo dos riscos (seta 3) representa a quantia que foi necessário encomendar para o próximo dia de feira. Neste, são realizados agrupamentos de cinco unidades de cada verdura ou legume (seta 4 para as alfaces e seta 5 para as beterrabas) e estão encomendados para a última dupla representada na argila, ou seja, faltaram alfaces e beterrabas para alguma dupla de compradores.

- Possibilidade de representação para a carta de comerciantes de verduras e legumes:



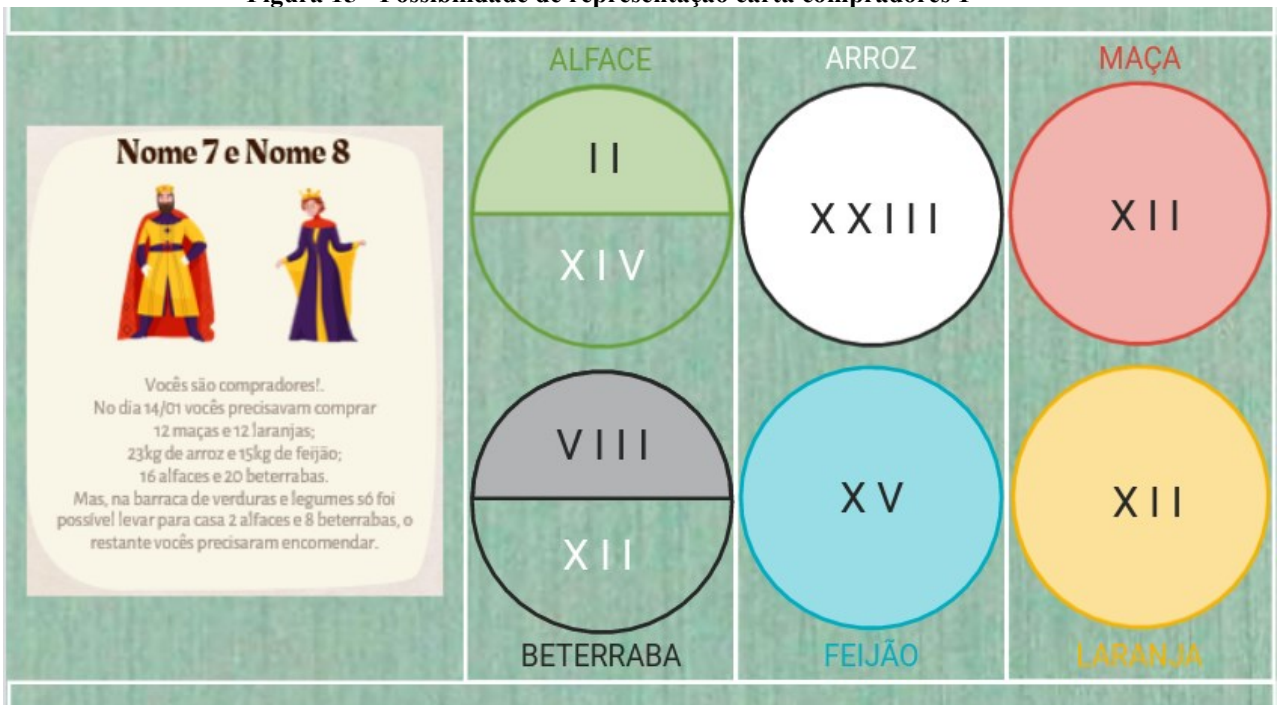
Nesta representação (Figura 14) o palito preto (seta 1) vale 5 unidades ou 5kg, enquanto o palito vermelho (seta 2) equivale a 3 unidades ou 3kg e o pedaço do palito vermelho (seta 3) equivale a 1 unidade ou 1kg. Os palitos que estão um pouco separados representam a quantidade de arroz (seta 4) e os que estão juntos (seta 5) representam a quantidade de feijão.

Pode-se perceber que nesta representação não há uma representação para o estoque inicial, mas a cada venda é representada a quantidade em estoque (setas 6 e 7). Pode-se perceber que após a terceira venda não sobrou nenhuma quantidade de arroz e de feijão, por este motivo há uma representação ‘vazia’ para simbolizar a falta de estoque. Em seguida, há uma representação do quanto foi necessário encomendar de cada um dos grãos para alguma das duplas.

É válido lembrar que na história, os chineses utilizavam palitos pretos e palitos vermelhos como sinônimos para ‘falta’ e ‘excesso’, isto é, uma cor representava quantidades positivas, enquanto a outra representava quantidades negativas. Nesta representação, a utilização dos palitos foi ressignificada, mas ainda sim, houve a possibilidade de registrar ambas as quantidades e ainda foi possível trabalhar com agrupamentos de 1kg, 3kg e 5kg.

- Possibilidade de resposta para a carta compradores 1:

Figura 15 - Possibilidade de representação carta compradores 1



Fonte: Autoria própria (2022)

Pode-se observar que a representação (Figura 15) apresenta quais frutas, verduras, legumes e grãos foram comprados, ao mesmo passo em que a representação das verduras e legumes está repartida em duas partes: quantidades encomendadas e quantidades 'levadas para casa'.

Nesta representação as quantidades foram representadas com algarismos romanos e esta representação não fere nenhuma das regras dos participantes, visto que as regras são: não utilizar os sinais de mais (+) e menos (-) e não podem ser utilizados algarismos indo-arábicos.

- Possibilidade de resposta carta de compradores 2:

Figura 16 - Possibilidade de resposta carta de compradores 2

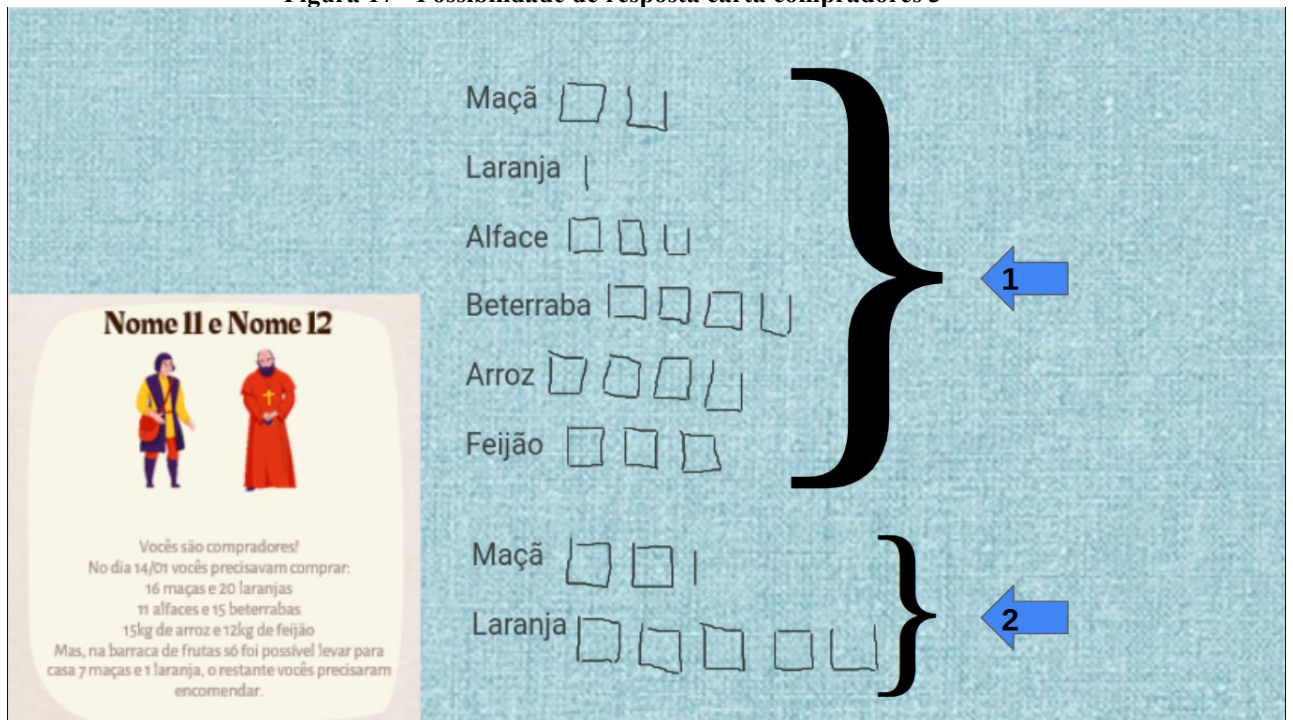


Fonte: Autoria própria (2022)

Nesta representação (Figura 16) é possível identificar a relação pictórica de cada alimento comercializado na feira, isto é, a quantidade de maçãs compradas está sendo representada por uma imagem de maçã (seta 1), a seta 2 indica a quantidade de laranjas, a seta 3 a quantidade de alfaces, a seta 4 a quantidade de beterrabas, a seta 5 a quantidade de arroz e a seta 6 a quantidade de feijão. Por ser representação na argila, o estudante tem a liberdade de escrever caso considere necessário, neste sentido, todas as informações da carta estão representadas na argila, o que foi comprado, o que foi levado para casa e o que foi encomendado.

- Possibilidade de resposta carta compradores 3:

Figura 17 - Possibilidade de resposta carta compradores 3



Fonte: Autoria própria (2022)

A representação da Figura 17 apresenta a quantidade de alimentos levados para casa, seta 1, e a quantidade de alimentos que precisam ser encomendados, seta 2. A representação contou com a utilização do nome dos alimentos e de agrupamentos de quatro unidades desses alimentos.

Finalizadas a sugestão de representação apresentadas para a Situação Desencadeadora de Aprendizagem pode-se observar as potencialidades e as relações presentes nessas possibilidades de respostas. Em geral, é possível identificar as seguintes relações: as encomendas - quantidade negativa; elemento nulo - alimentos a serem comprados ou vendidos das listas; total de frutas levados para a feira ou para casa - quantidades positivas; e agrupamentos.

Além dessas relações pode-se verificar que as representações contemplaram os nexos apresentados na Figura 6, o controle de quantidades discretas positivas e negativas, a ideia de elementos opostos, por exemplo, a cada venda o estoque inicial diminui a quantidade vendida e neste mesmo processo ocorre o anulamento. As propriedades aritméticas mostraram-se úteis durante todo o processo, visto que os itens encomendados precisaram ser retirados do estoque/da quantidade levada para casa necessitando da utilização das operações de adição ou subtração dessas quantidades.

Há ainda uma tentativa de representar o 'nada' simbolizando a necessidade de algo para representar a ausência de quantidades, entrando a necessidade do zero dentro da situação.

Estas foram algumas das relações essenciais dos números inteiros que surgiram nas representações, mas muitas outras surgem naturalmente no processo de interação entre os sujeitos, por isso a sugestão das representações desde o início serem realizadas em duplas para que depois dessa representação seja feita uma apresentação para os demais colegas da sala mostrando e comparando as representações.

Ambos os movimentos são importantes para o processo da síntese coletiva que mostra o quanto os estudantes conseguiram se apropriar dos nexos conceituais dos números inteiros. Neste movimento final é importante realizar um resgate histórico mostrando que essas representações realmente foram importantes na constituição da representação que se tem atualmente e como a representação atual é completa e possui um modo generalizado para a representação das quantidades positivas e negativas.

Todos esses movimentos são essenciais para que o estudante compreenda as relações presentes sobre números inteiros, partindo de uma situação de ensino onde eles têm a liberdade para representarem como preferirem com o recurso que possuem e na explicação da representação já há uma quantidade significativa de relações matemáticas.

Por fim, pode-se perceber as potencialidades da Situação Desencadeadora de Aprendizagem - A feira medieval para a introdução do conceito dos números inteiros, além dos que têm interesse nas dinâmicas do RPG ou de jogos no ensino de matemática, e por este motivo acredita-se que a síntese deste Trabalho de Conclusão de Curso ser divulgada através do Recurso Educacional Aberto contempla a possibilidade de auxiliar tanto os professores da rede básica de ensino, quanto licenciandos em matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, o objetivo ‘elaborar e analisar uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem sobre a introdução de números inteiros, considerando elementos de seu movimento histórico e lógico’ considera-se que foi alcançado, pois tanto a elaboração quanto a análise foram apresentadas conforme os aspectos de seu movimento histórico e lógico e orientados pela Atividade Orientadora de Ensino.

O objetivo inicial proposto para este trabalho era de analisar a compreensão de estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de números inteiros. Como não houve a pesquisa com os estudantes, não foi possível analisar a compreensão deles sobre o conceito.

Mesmo havendo a necessidade de alterar o projeto, acredita-se que a pesquisa continua válida em relação ao processo de ensino, visto que a elaboração e reelaboração da situação obteve grande envolvimento da pesquisadora durante todo o processo de estudo, análise e reflexão, movimento este que é importante para a organização do ensino.

É possível identificar os elementos da própria Atividade Orientadora de Ensino no processo de pesquisa e organização do ensino, onde a relação entre a necessidade de organizar o ensino e de superar algumas necessidades que surgiram em meio a esse processo, foram imprescindíveis para pôr a pesquisadora em movimento.

A elaboração da Situação Desencadeadora de Aprendizagem carregou consigo muito aprendizado, tornando possível estudar, organizar e comparar os elementos buscando identificar quais eram os nexos conceituais dos números inteiros e como estes poderiam se manifestar dentro da situação de forma a envolver os estudantes e colocá-los em atividade. As dinâmicas do RPG se alinharam com as almejadas na Atividade Orientadora de ensino e, simultaneamente, supriram a demanda de organizar o ensino pensando no ensino remoto (demandado pelo contexto pandêmico).

A pesquisa trazendo consigo todos os estudos necessários para a sua realização, possibilitou a mudança no olhar da pesquisadora que reconhece que o motivo inicial até poderia ser considerado compreensível, isto é, realizar a pesquisa para elaboração do TCC, mas o próprio movimento de pesquisa foi transformando-se em um motivo eficaz ao passo que houve um interesse genuíno de compreender o movimento histórico-lógico do conceito e de elaborar a situação considerando os elementos estudados.

Ainda sobre o movimento de estudo, o movimento histórico-lógico oportunizou que fossem lembrados momentos da graduação, dada a oportunidade de me deparar com assuntos

discutidos nas disciplinas de ‘Fundamentos de Matemática’ (atual Matemática Elementar A) e ‘História da Matemática’. É gratificante poder elaborar uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem que contempla assuntos vistos e discutidos dos primeiros aos últimos períodos do curso de graduação, reforçando a importância do professor estar sempre em movimento de estudo e buscando se apropriar da forma teórica desses conceitos tanto para sua formação pessoal quanto profissional.

Por fim, considera-se que o movimento de pesquisa realizado neste trabalho não se encontra esgotado apenas apresenta um caminho para outros. Por este motivo, espera-se que a organização do Recurso Educacional Aberto possa contribuir com o trabalho de outros docentes e licenciandos e almeja-se que esta situação seja desenvolvida com os estudantes da rede básica de ensino considerando a estrutura apresentada neste trabalho e as características particulares do público-alvo do ensino.

REFERÊNCIAS

- AMARAL, Ricardo Ribeiro do. **O uso pedagógico do RPG para o ensino de Física**. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências) – Universidade Federal Rural do Pernambuco. Recife, 2008. Disponível em < <https://rpgnaescola.com.br/data/documents/Dissertacao-Uso-do-RPG-Pedagogico-para-o-ensino-de-Fisica.pdf> > Acesso em: 29 jun. 2021.
- BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q.. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Helena Castro. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf> . Acesso em: 23 jun. 2021.
- CÂNDIDA, Sílvia Aparecida. O ensino dos números inteiros por meio da história da matemática. In: Paraná. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense**, 2013. Cornélio Procópio: SEED/PR.
- CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: 1951
- DOMINGUES, Hygino Hungueros. **Fundamentos de aritmética**/ Hygino H. Domingues. – São Paulo: Atual, 1991.
- FELDENS, Leopoldo. **O homem, a agricultura e a história**. Lajeado: Ed. Univates, 2018.
- LEONTIEV, Alexis. N.. **Uma Contribuição à Teoria do Desenvolvimento da Psique Infantil**. In: VIGOTSKII, Lev Semenovich, LURIA, A. R., LEONTIEV, Alexis N.. Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem. 11. ed. São Paulo: Ícone Editora Ltda., 2010. Cap. 4. p. 59-83.
- MILIES, Francisco César Polcino. **Números: Uma introdução à Matemática**/ Francisco César Polcino Milies, Sônia Pitta Coelho. – 3. Ed. – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.
- MOURA, Manoel Oriosvaldo; ARAÚJO, Elaine Sampaio; SERRÃO, Maria Isabel Batista. Atividade Orientadora de Ensino: fundamentos. **Linhas Críticas**, Brasília, v. 24, p. 411-430, 2018.
- MOURA, Manoel Oriosvaldo; ARAÚJO, Elaine Sampaio; MORETTI, Vanessa Dias; PANOSSIAN, Maria Lucia; RIBEIRO, Flávia Dias. Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, abr. 2010.
- OLIVEIRA, Natalia Mota; PANOSSIAN, Maria Lucia. Comprensiones de la “Situación Desencadenante de Aprendizaje” y el “Problema Desencadenante” expresados em investigaciones académicas. **Revista Venezolana de Investigación em Educación**

Matemática, v. 1, n. 2, p. 1- 29, 2021a. Disponível em: <<https://reviem.com.ve/index.php/REVIEM/article/view/5>>. Acesso em: 21 mar. 2022.

PANOSSIAN, Maria Lucia; MARCO, Fabiana Fiorezi; LOPES, Anemari Roesler Luersen Vieira; SOUZA, Flávia Dias; MORETTI, Vanessa Dias. A Atividade de Ensino como pressuposto teórico-metodológico de pesquisas. **Revista Reflexão e Ação**, Santa Cruz do Sul, v. 25, n. 3, p. 279-298, set./ dez., 2017.

RODRIGUES, Renata Viviane Raffa. **A construção e utilização de um Objeto de Aprendizagem através da perspectiva lógico-histórica na formação do conceito números inteiros**. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2009. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/92270>>. Acesso em: 20 out. 2021.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: José Zahar, 2012.

SALES, Matheus. "**RPG (Role-Playing Game)**"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/curiosidades/rpg.htm>. Acesso em: 06 maio 2022.

SAS - Plataforma de Educação. **Entenda o que são os Recursos Educacionais Abertos (REA)**, 2021. Disponível em: <<https://blog.saseducacao.com.br/rea/>>. Acesso em: 06 maio 2022.

SCHMANDT-BESSERAT, Denise. Tokens and Writing: the Cognitive Development, in **Symbols at 'Ain Ghazal, 'Ain Ghazal Excavation Reports** Vol. 3, Ex Oriente, The Free University Press, Berlin. Germany, 2013. Disponível em: <<https://repositories.lib.utexas.edu/handle/2152/79833> >. Acesso em: 16 jul. 2021.

SILVEIRA, Bruno Silva; SILVA, Maria Marta. A Interface Entre o Movimento Lógico-Histórico e a Organização do Ensino do conceito matemático de ângulos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 14, n. 2, p. 01-24, 2019. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-322.2019.e62982>>. Acesso em: 16 nov. 2021.

SOUZA, Maria do Carmo. O Ensino de Matemática da Educação Básica na Perspectiva Lógico-Histórica. **Revista Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, n. 13, p. 60-83, 2014. Disponível em: <<https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/490/305>>. Acesso em: 16 nov. 2021.

TOTI, Frederico Augusto; SILVA, Alessandro Costa. Motivos para educação científica: uma análise com professores de física a partir da teoria da atividade. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 20, s. p., 2018. Disponível em: <[https://www.redalyc.org/journal/1295/129558282003/html/#:~:text=O%20sentido%20que%20o%20sujeito,%20\(LAONTIEV%2C%201978\).](https://www.redalyc.org/journal/1295/129558282003/html/#:~:text=O%20sentido%20que%20o%20sujeito,%20(LAONTIEV%2C%201978).>)> Acesso em: 8 maio 2022.

UNESCO/ COL. **Diretrizes para Recursos Educacionais Abertos (REA) no ensino superior**, Fontenoy, 2011.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

APÊNDICE A - Cartas de personagem

- Comerciantes de frutas:

Nome 1 e Nome 2




Vocês são comerciantes de frutas!
 Vocês possuem na barraca de vocês: maçãs e laranjas.
 No dia 14/01 vocês levaram para a feira 30 maçãs e 25 laranjas.

Nome 7 e Nome 8 compraram 12 maçãs e 12 laranjas
 Nome 9 e Nome 10 compraram 11 maçãs e 12 laranjas
 Nome 11 e Nome 12 compraram 16 maçãs e 20 laranjas
 Nesta respectiva ordem.

- Comerciantes de verduras e legumes:

Nome 3 e Nome 4



Vocês são comerciantes de verduras e legumes!
 Vocês possuem na barraca de vocês: alfaces e beterrabas.
 No dia 14/01 vocês levaram para a feira 25 alfaces e 35 beterrabas.

Nome 9 e Nome 10 compraram 12 alfaces e 12 beterrabas
 Nome 11 e Nome 12 compraram 11 alfaces e 15 beterrabas
 Nome 7 e Nome 8 compraram 16 alfaces e 20 beterrabas
 Nesta respectiva ordem.

- Comerciantes de grãos:

Nome 5 e Nome 6



Vocês são comerciantes de grãos!
 Vocês possuem na barraca de vocês: arroz e feijão.
 No dia 14/01 vocês levaram para a feira 40kg de arroz e 35kg de feijão.


Nome 11 e Nome 12 compraram 15kg de arroz e 12kg de feijão

Nome 7 e Nome 8 compraram 23kg de arroz e 15kg de feijão

Nome 9 e Nome 10 compraram 9kg de arroz e 20kg feijão
 Nesta respectiva ordem.

- Compradores:

Nome 7 e Nome 8



Vocês são compradores!

No dia 14/01 vocês precisavam comprar
 12 maçãs e 12 laranjas;
 23kg de arroz e 15kg de feijão;
 16 alfaces e 20 beterrabas.

Mas, na barraca de verduras e legumes só foi possível levar para casa 2 alfaces e 8 beterrabas, o restante vocês precisaram encomendar.

Nome 9 e Nome 10



Vocês são compradores!
 No dia 14/01 vocês precisavam comprar
 11 maçãs e 12 laranjas.
 12 alfaces e 12 beterrabas
 9kg de arroz e 20kg feijão
 Mas, na barraca de grãos só foi possível levar para
 casa 2kg de arroz e 8kg de feijão, o restante vocês
 precisaram encomendar.

Nome 11 e Nome 12



Vocês são compradores!
 No dia 14/01 vocês precisavam comprar:
 16 maçãs e 20 laranjas
 11 alfaces e 15 beterrabas
 15kg de arroz e 12kg de feijão
 Mas, na barraca de frutas só foi possível levar para
 casa 7 maçãs e 1 laranja, o restante vocês precisaram
 encomendar.

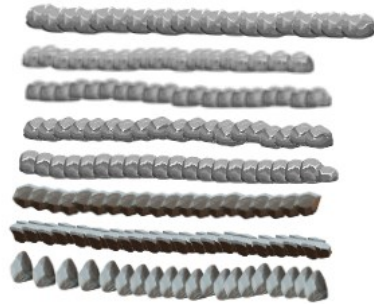
APÊNDICE B - Janelas para representação *Google Jamboard*

- Comerciantes de frutas:

Nome 1 e Nome 2



Vocês são comerciantes de frutas!
 Vocês possuem na barraca de vocês: maçãs e laranjas.
 No dia 14/01 vocês levaram para a feira 30 maçãs e 25 laranjas.
 Nome 7 e Nome 8 compraram 12 maçãs e 12 laranjas
 Nome 9 e Nome 10 compraram 11 maçãs e 12 laranjas
 Nome 11 e Nome 12 compraram 16 maçãs e 20 laranjas
 Nesta respectiva ordem.



- Comerciantes de verduras e legumes:

Nome 3 e Nome 4



Vocês são comerciantes de verduras e legumes!
 Vocês possuem na barraca de vocês: alfaces e beterrabas.
 No dia 14/01 vocês levaram para a feira 25 alfaces e 35 beterrabas.
 Nome 9 e Nome 10 compraram 12 alfaces e 12 beterrabas
 Nome 11 e Nome 12 compraram 11 alfaces e 15 beterrabas
 Nome 7 e Nome 8 compraram 16 alfaces e 20 beterrabas
 Nesta respectiva ordem.

- Comerciantes de grãos:

Nome 5 e Nome 6



Vocês são comerciantes de grãos!
Vocês possuem na barraca de vocês: arroz e feijão.
No dia 14/01 vocês levaram para a feira 40kg de arroz e 35kg de feijão.
Nome 11 e Nome 12 compraram 15kg de arroz e 12kg de feijão
Nome 7 e Nome 8 compraram 23kg de arroz e 15kg de feijão
Nome 9 e Nome 10 compraram 9kg de arroz e 20kg feijão
Nesta respectiva ordem.



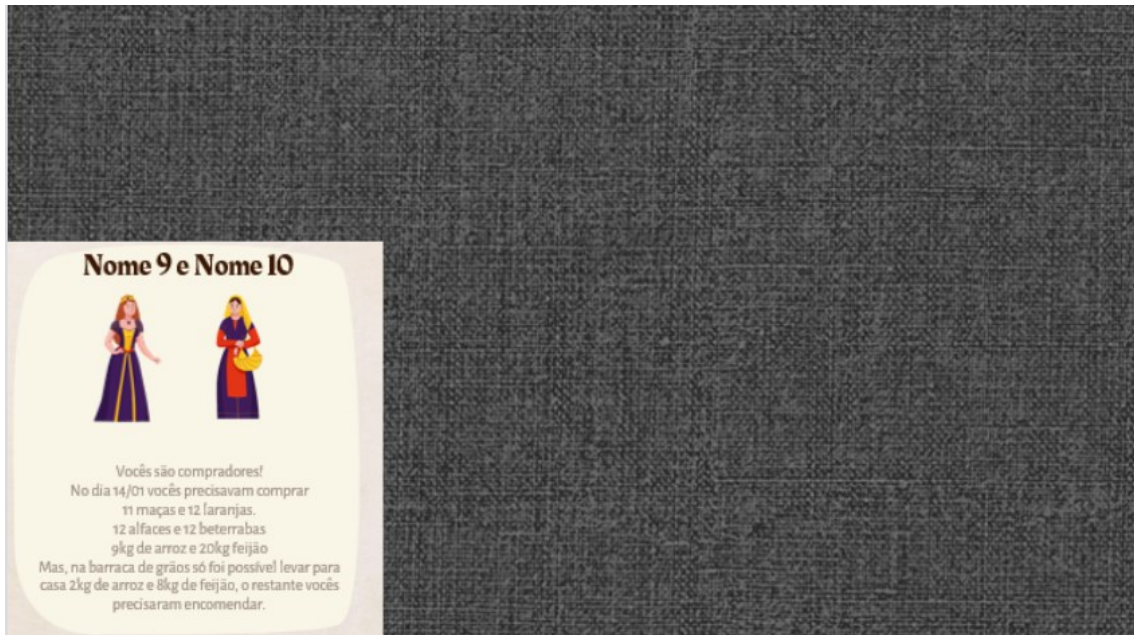
- Compradores 1:

Nome 7 e Nome 8




Vocês são compradores!
No dia 14/01 vocês precisavam comprar
12 maçãs e 12 laranjas;
23kg de arroz e 15kg de feijão;
16 alfaces e 20 beterrabas.
Mas, na barraca de verduras e legumes só foi possível levar para casa 2 alfaces e 8 beterrabas, o restante vocês precisaram encomendar.

- Compradores 2:



Nome 9 e Nome 10



Vocês são compradores!
No dia 14/01 vocês precisavam comprar
11 maçãs e 12 laranjas.
12 alfaces e 12 beterrabas
9kg de arroz e 20kg feijão
Mas, na barraca de grãos só foi possível levar para
casa 2kg de arroz e 8kg de feijão, o restante vocês
precisaram encomendar.

- Compradores 3:



Nome 11 e Nome 12



Vocês são compradores!
No dia 14/01 vocês precisavam comprar:
16 maçãs e 20 laranjas
11 alfaces e 15 beterrabas
15kg de arroz e 12kg de feijão
Mas, na barraca de frutas só foi possível levar para
casa 7 maçãs e 1 laranja, o restante vocês precisaram
encomendar.