

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

RUHAN PONTES POLICARPO DE SOUZA

**METODOLOGIA DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS VIA FILTRAGEM
ROBUSTA APLICADA AO MOTOR DE INDUÇÃO TRIFÁSICO**

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021

RUHAN PONTES POLICARPO DE SOUZA

**METODOLOGIA DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS VIA FILTRAGEM
ROBUSTA APLICADA AO MOTOR DE INDUÇÃO TRIFÁSICO**

**Parametric Estimation Method via Robust Filtering Applied to Three-Phase
Induction Motor**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de “Mestre em Engenharia Elétrica” no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari

Co-orientador: Prof. Dr. Alessandro Goedtel

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021



4.0 Internacional

Esta licença permite o download e o compartilhamento da obra desde que atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-la ou utilizá-la para fins comerciais.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



RUHAN PONTES POLICARPO DE SOUZA

METODOLOGIA DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS VIA FILTRAGEM ROBUSTA APLICADA AO MOTOR DE INDUÇÃO TRIFÁSICO

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Sistemas Eletrônicos Industriais.

Data de aprovação: 19 de Fevereiro de 2021

Prof Cristiano Marcos Agulhari, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Emerson Ravazzi Pires Da Silva, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, Doutorado - Universidade Estadual Paulista - Unesp

Prof Marcelo Favoretto Castoldi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Victor Baptista Frencl, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 19/02/2021.

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo amor, carinho e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me dar o dom da vida, saúde, paz e sabedoria, iluminando meu caminho, guiando-me e zelando-me, e à Virgem Maria, por me proteger e abençoar-me todos os dias.

Aos meus pais, Elson Policarpo de Souza e Maria Teresa de Pontes Ormeneze, por me darem amor, carinho, incentivo, apoio imensurável, e oportunidade de estudo, não medindo esforços para me proporcionarem uma vida melhor.

Agradeço aos amigos que o mestrado me proporcionou e, com os quais, dividi bons momentos de alegria, felicidade, conversas, e principalmente aprendizado e companheirismo. Agradeço também pelos demais amigos que a UTFPR me proporcionou, e que se tornaram para mim, nada menos que uma família.

Agradeço também ao professor Dr. Cristiano Agulhari pela grande orientação, ensinamentos e conselhos, os quais contribuíram grandemente para minha formação pessoal e profissional. Agradeço também ao professor Dr. Alessandro Goedel, pela colaboração e contribuição para o desenvolvimento deste trabalho, bem como os ensinamentos proporcionados.

Agradeço a todos meus mestres e professores, os quais contribuíram para minha formação, bem como a UTFPR, campus Cornélio Procópio, e a CAPES, por toda estrutura e ajuda de custo disponibilizada para o desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos que, neste período, tive a oportunidade de conhecer e conviver, a cada um que me fez pensar e aprender mais um pouco sobre a vida e sobre este pequeno mundo.

*“Somos una especie en viaje,
no tenemos pertenencias, sino equipaje.”
(Jorge Drexler)*

RESUMO

SOUZA, Ruhan Pontes Policarpo de. **Metodologia de Estimação de Parâmetros via Filtragem Robusta Aplicada ao Motor de Indução Trifásico**. 101p. Dissertação - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

O estudo e o desenvolvimento de um estimador de parâmetros aplicado ao motor de indução trifásico são apresentados neste trabalho. Utilizando uma metodologia de estimação adaptativa, baseada na dinâmica de estados e de saídas do motor, uma técnica de filtragem obtida via LMIs, com robustez garantida pela norma \mathcal{H}_∞ , é aplicada para a obtenção das informações necessárias, sendo que esse método é robusto a perturbações e a incertezas paramétricas. Desta maneira, um estimador de falha de curto-circuito é proposto, utilizando um novo modelo representado em espaço de estados, o qual possui um pseudo-parâmetro proporcional à severidade da falha, o qual se busca estimar. Realiza-se uma análise de factibilidade, visando determinar a influência das condições de parametrização no desempenho e na síntese dos filtros. Apresenta-se, também, o desenvolvimento do método proposto, simulações computacionais e a validação do método com dados experimentais, os quais foram obtidos em ensaios laboratoriais e, consideram condições diversas de alimentação, falha e torque de carga. O método proposto permitiu estimar os estados do motor de indução e identificar a falha de curto-circuito, demonstrando-se viável para a estimação qualitativa da falha.

Palavras-chave: Filtragem Robusta. Estimação Paramétrica. Desigualdades Matriciais Lineares. Motor de Indução Trifásico. Falha de Curto-Circuito.

ABSTRACT

SOUZA, Ruhan Pontes Policarpo de. **Parametric Estimation Method via Robust Filtering Applied to Three-Phase Induction Motor**. 101p. Dissertação - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

The study and development of a parametric estimator applied to the three-phase induction motor is presented in this work. Using an adaptive estimation methodology, based on the motor's states and outputs, a filtering technique obtained via LMIs — with guaranteed \mathcal{H}_∞ norm to assure the robustness — is applied to obtain the required informations, being the method robust to parametric uncertainties and disturbances. In this way, a short circuit failure estimator is proposed, using a new model in a state space representation with a pseudo-parameter proportional to the failure severity, which is intended to be estimated. A feasibility analysis is exposed, addressing the influence of the parameterization conditions on the performance and the synthesis of the filters. Its also presented the development of the proposed method, computational simulations and the validation with experimental data, which were obtained in laboratory tests, considering different failure, load torque and voltage supply conditions. The method demonstrated feasible to state estimation and short-circuit fault identification, proving to be viable for qualitative fault estimation.

Keywords: Robust Filter. Parameter Estimation. Linear Matrix Inequality. Three-phase Induction Motor. Stator Fault. Short Circuit Fault.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagrama de blocos representando o processo de filtragem.	20
Figura 2 – Circuito elétrico equivalente — estator com curto-circuito.	34
Figura 3 – Factibilidade - $\omega_p = 100$ rad/s.	59
Figura 4 – Factibilidade - $\Delta_\omega = 20$ rad/s.	60
Figura 5 – Norma γ obtida.	61
Figura 6 – Fluxograma de implementação.	63
Figura 7 – Bancada Experimental.	72
Figura 8 – Diagrama de implementação.	75
Figura 9 – Simulação — Velocidade e torque magnético sob falha.	77
Figura 10 – Simulação — Corrente de curto-circuito.	78
Figura 11 – Simulação — Corrente e fluxo eletromagnético sob falha.	79
Figura 12 – Simulação — Filtragem de $\hat{x}(t)$	80
Figura 13 – Simulação — Estimação temporal de severidade.	81
Figura 14 – Simulação — Evolução temporal da falha e estimação.	82
Figura 15 – Simulação — Estimação Θ_1 sob variação de carga e alimentação.	83
Figura 16 – Estimação Θ_1 - Condições equilibradas.	85
Figura 17 – Filtragem $\hat{x}(t)$ - Motor 1.	87
Figura 18 – Solução de $P(t)$ e $Q(t)$ - Motor 1.	87
Figura 19 – Filtragem $\hat{x}(t)$ - Motor 2.	88
Figura 20 – Solução de $P(t)$ e $Q(t)$ - Motor 2.	88
Figura 21 – Estimação Θ_1 - Variação de carga mecânica.	90
Figura 22 – Estimação Θ_1 - Desequilíbrio de alimentação.	91
Figura 23 – Superfície de estimação e classificação.	92

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros para síntese do filtro.	58
Tabela 2 – Parâmetros do MIT.	69
Tabela 3 – Dados de placa dos MIT utilizados.	72
Tabela 4 – Condições de teste.	74
Tabela 5 – Condições e parâmetros de falha.	77
Tabela 6 – EQM de filtragem.	80
Tabela 7 – EQM - Condições de alimentação desequilibradas.	84
Tabela 8 – EQM - Variação de carga.	84

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CC	Corrente Contínua
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i>
EQM	Erro Quadrático Médio
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i>
LPV	<i>Linear Parameter Varying</i>
LSI	Laboratório de Sistemas Inteligentes
MIT	Motor de Indução Trifásico
UKF	<i>Unscented Kalman Filter</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Justificativa	14
1.2	Objetivo	14
1.2.1	Objetivos Específicos	14
1.3	Metodologia	15
1.4	Organização do trabalho	15
2	FILTRAGEM ROBUSTA E ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS	17
2.1	Definição	17
2.2	Condições de síntese	19
2.3	Estimação paramétrica	28
2.4	Síntese do Capítulo	32
3	MODELAGEM DA FALHA DE CURTO-CIRCUITO	33
3.1	Modelo assimétrico equivalente	33
3.2	Transformação $qd0$	39
3.3	Representação em espaço de estados	45
3.3.1	Equações de estado	46
3.3.2	Dinâmica de curto-circuito $i_f(t)$	50
3.4	Síntese do Capítulo	54
4	ANÁLISE DE FACTIBILIDADE E SÍNTESE	55
4.1	Estimador de velocidade - Modelagem	55
4.2	Região de Parametrização	59
4.3	Síntese do capítulo	62
5	ESTIMADOR DE FALHA DE CURTO-CIRCUITO	63
5.1	Definição do filtro robusto	63
5.2	Bancada experimental e <i>dataset</i>	71
5.2.1	Pós-processamento	74
5.3	Síntese do capítulo	75
6	RESULTADOS COMPUTACIONAIS E EXPERIMENTAIS .	76
6.1	Resultados Simulados	76
6.1.1	Filtragem e estimação	79
6.1.2	Estimação em condições de operação desequilibradas	83
6.2	Resultados Experimentais	85

6.2.1	Estimação em operação nominal	85
6.2.2	Estimação sob variação de carga	89
6.2.3	Desequilíbrio de alimentação	91
6.3	Síntese do capítulo	93
7	CONCLUSÃO	94
7.1	Perspectivas para trabalhos futuros	95
7.2	Publicações relacionadas ao trabalho	95
	REFERÊNCIAS	96

1 INTRODUÇÃO

A aplicação de técnicas de controle, estimação e supervisão em sistemas físicos exige a detecção e captura de sinais, tais como saídas e variáveis de estados. Contudo, em ambientes industriais, onde há grande presença de perturbações internas e externas ao sistema, a aquisição destes sinais pode ser contaminada por sinais indesejados, como ruídos, prejudicando o desempenho do método aplicado (GAO; LI, 2014). Outro caso crítico nesses ambientes é a aquisição de dados relativos a variáveis não acessíveis, dadas as limitações físicas do equipamento e de sensores, bem como requisitos de projeto. Uma possível solução para este problema é a utilização da técnica de filtragem, que consiste na obtenção de uma aproximação de variáveis desejadas, robusta aos ruídos e às perturbações presentes no sistema, a partir de informações da dinâmica do sistema e de variáveis acessíveis (ANDERSON; MOORE, 2005).

Entre as primeiras técnicas de filtragem desenvolvidas, com base em sistemas representados em espaço de estados, cita-se Kalman e Bucy (1961), que trouxeram uma abordagem estocástica para o problema. Todavia, tal método exige certo conhecimento do modelo a ser aplicado, bem como considera apenas a ação de ruídos brancos com características estatísticas gaussianas. Cita-se também Luenberger (1971), como um dos primeiros trabalhos a desenvolver um observador de estados determinístico, que possibilita a obtenção de um vetor de estados não totalmente acessível. Com a popularização dos teoremas de Lyapunov (KHALIL, 2002) e o surgimento de novos métodos de programação convexa, as LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) contribuíram para o surgimento de novas e modernas técnicas de filtragem, permitindo sua aplicação, de forma robusta, em sistemas com parâmetros incertos (LACERDA; OLIVEIRA; PERES, 2011; CHANG; PARK; TANG, 2015), sistemas com atraso (ZOULAGH et al., 2018; FREZZATTO et al., 2015), bem como sua aplicação em modelos com estrutura LPV (do inglês, *Linear Parameter Varying*) (SATO, 2006; BORGES; PERES, 2006; ZHANG; YANG, 2018) e sistemas não-lineares (ABBASZADEH; MARQUEZ, 2010; CHANG; SONG; ZHAO, 2020).

Devido à sua grande versatilidade, a filtragem permite a aplicação de técnicas de controle e monitoramento de variáveis antes não acessíveis. É comum verificar seu uso de forma complementar a outras metodologias, como as técnicas de controle robusto, estimação de parâmetros e identificação de falhas. Metodologias de estimação de parâmetros que utilizam filtros para sua síntese podem ser observadas, por exemplo, em Yu et al. (2017) e Sajedi e Bozorg (2019), que modelam, de forma não linear, a dinâmica de estados e parâmetros e, então, utilizam o EKF (do inglês, *Extended Kalman Filter*) para a estimação. Por sua vez, em Agulhari et al. (2020), é apresentada uma metodologia de filtragem LPV em conjunto com estimadores adaptativos para a obtenção de parâmetros do modelo

matemático. Técnicas de identificação de falhas também têm sido desenvolvidas, como as propostas de Rodrigues et al. (2015) e Zhou et al. (2018) que, por meio da observação de resíduos de estimação, permitem a identificação e mensuração da falha. Em especial, tais métodos são comumente utilizados em aplicações aeroespaciais (VANEK et al., 2014; VARGA; OSSMANN, 2014; CHEN; PATTON; GOUPIL, 2016).

Outro campo de aplicação da filtragem é o de máquinas elétricas, em especial no Motor de Indução Trifásico (MIT), justificado pela sua grande importância no cenário industrial e econômico. No MIT, o processo de filtragem tem sido utilizado, em grande parte, para a estimação de variáveis não acessíveis, como os fluxos do estator e do rotor. Composto controladores de velocidade e de torque, é utilizado, principalmente, em técnicas de controle do tipo *sensorless*, onde a velocidade não é mensurada por sensores, e sim, estimada (KIM; SUL; PARK, 1994; HOLTZ, 2002; LASCU; BOLDEA; BLAABJERG, 2004). Contudo, a utilização de estimadores paramétricos e de falhas por meio de filtros, aplicada ao motor de indução, ainda permanece pouco explorada, com poucos trabalhos disponíveis na literatura. Dentre os trabalhos, cita-se Rayyam et al. (2016) e Ameid et al. (2017), que utilizam o EKF para a estimação das resistências de estator e do rotor. Para a estimação de falhas, Ondel et al. (2012) utiliza EKF residuais para mensurar falhas no rotor, como barras quebradas, enquanto o trabalho de Nguyen et al. (2016) utiliza um EKF para estimar parâmetros relacionados à falha de curto-circuito estatístico.

Percebe-se a constante aplicação do EKF aos motores de indução, bem como a utilização da técnica UKF (do inglês, *Unscented Kalman Filter*) (WAN; MERWE, 2000), em aplicações envolvendo MITs, já que a respectiva modelagem resulta em um sistema não linear. Uma alternativa à utilização a tais metodologias é a modelagem LPV do motor de indução, que permite representar a dinâmica não linear do MIT por um sistema de equações lineares com parâmetros variantes no tempo. Diante disto, neste trabalho propõe-se o estudo e a aplicação de uma estratégia de estimação paramétrica ao MIT, utilizando métodos de filtragem LPV. A aplicação apresentada neste trabalho utiliza como base a metodologia exposta no trabalho intitulado “*Robust real-time parameter estimation for linear systems affected by external noises and uncertainties*”, de Agulhari, C. M., Neto, J. M. M., Lacerda, M. J., Souza, Ruhan P. P., Castoldi, M. F., Goedtel, A. (2020), em que a síntese de saídas artificiais — como estados não acessíveis e combinações lineares de estados e entradas — é realizada por filtros LPV obtidos via LMIs para, então, serem aplicadas a um estimador adaptativo. Desta maneira, é possível estimar parâmetros de forma robusta, rejeitando ruídos provenientes da aquisição de sinais.

Uma aplicação prática do método é proposta e apresentada neste trabalho: um detector de falha de curto-circuito aplicado ao MIT, o qual por meio da estimação e monitoramento de um pseudo-parâmetro, modelado de forma a representar a severidade da falha aplicada, permite a identificação e mensuração da falha. Apresenta-se também

uma análise de factibilidade, com o objetivo de verificar a relação entre a parametrização do filtro, obtido via LMIs, com o respectivo desempenho e robustez. Desta forma, visa-se contribuir com novas técnicas para o monitoramento do MIT, a partir da utilização de estimadores e filtros pouco explorados na literatura.

1.1 JUSTIFICATIVA

Conforme apresentado no início deste capítulo, as técnicas empregadas na filtragem de MITs são geralmente baseadas em EKF, técnica que realiza iterativamente a linearização do modelo em relação a previsões e estimativas, a cada ciclo do EKF. Desta maneira, a implementação da filtragem LPV permite uma nova abordagem ao problema, ampliando e viabilizando novas técnicas ao MIT. No mais, com a utilização de LMIs, técnicas de filtragem e de estimação, ótimas e robustas, podem ser estudadas.

A utilização de técnicas de filtragem e estimação, em MITs, tais como a apresentada em Agulhari et al. (2020), possibilita o desenvolvimento de identificadores de falha, trazendo contribuições à respectiva área de pesquisa, já que permitem aplicações de forma robusta a ruídos, característica essencial para aplicações práticas. O método proposto realiza a estimação de forma *on-line*, ou seja, iterativamente, e considera em seu desenvolvimento as variáveis de tensões de alimentação, correntes e a velocidade mecânica, grandezas acessíveis. Dessa forma, não há necessidade de técnicas invasivas ou a inclusão e utilização de novos sensores.

1.2 OBJETIVO

O presente trabalho tem como objetivo aplicar novas técnicas de filtragem e estimação paramétrica ao MIT e, assim, desenvolver metodologias alternativas para a identificação de falhas de curto-circuito nas espiras do estator. Tais metodologias são baseadas na estimação de parâmetros que permitam mensurar a severidade da falha apresentada pelo motor, compondo um pseudo-parâmetro de estimação. A técnica é obtida por meio da utilização de filtros LPV robustos sintonizados via LMIs.

1.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Obter o modelo assimétrico com falha de curto-circuito do MIT e modelar o filtro para a estimação do pseudo-parâmetro de falha;
- Estudar e implementar o conjunto de LMIs necessárias para a síntese de filtros robustos;
- Realizar uma análise de factibilidade para identificar melhores condições de síntese;
- Sintetizar as matrizes que compõem o filtro utilizando as LMIs obtidas;

- Simular por meio do *software* MATLAB[®] o sistema de estimação proposto;
- Aplicar o método proposto em dados reais de MIT;

1.3 METODOLOGIA

Conforme exposto anteriormente, o trabalho desenvolvido baseia-se no estudo de caso de um estimador de falha de curto-circuito entre espiras do estator, aplicado ao MIT. Inicialmente será apresentada a pesquisa bibliográfica e revisão da literatura referente às LMIs para filtragem robusta e estimação de parâmetros. Nesta etapa, obtém-se o embasamento teórico para o desenvolvimento e implementação do método proposto. Contudo, dado o contexto de estimação paramétrica e análise de falhas em máquinas elétricas, aborda-se, em paralelo, trabalhos que se relacionam à modelagem assimétrica do motor de indução.

Após a revisão da literatura e a obtenção dos modelos do MIT, a modelagem da máquina assimétrica — com falha — é convertida para a representação em espaço de estados, requisito para a aplicação do método proposto, sendo esta uma das contribuições do trabalho. Define-se também, nesta etapa, a composição das saídas artificiais a serem obtidas pelo filtro, necessárias para a posterior aplicação do estimador paramétrico.

As LMIs para a síntese do filtro são, então, resolvidas computacionalmente, utilizando o *software* MATLAB[®], em conjunto com o *solver* MOSEK ApS (2019), e os *parsers* YALMIP (LOFBERG, 2004) e ROLMIP (AGULHARI et al., 2019). Realiza-se uma análise de factibilidade, com o objetivo de identificar a influência da região de parametrização na síntese do filtro. Desta forma, este trabalho segue para a simulação e implementação da metodologia com dados experimentais.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este documento é dividido em mais seis capítulos, além desta introdução, que são:

- Capítulo 2 — Apresenta o filtro robusto LPV, suas condições de síntese, bem como o processo de estimação paramétrica adaptativa a ser utilizado neste trabalho;
- Capítulo 3 — Expõe a modelagem assimétrica do motor de indução, considerando a falha de curto-circuito no estator. Este capítulo traz a contribuição de um modelo representado em espaço de estados, que permite sua simulação e implementação na metodologia de filtragem;
- Capítulo 4 — Apresenta a análise da factibilidade e síntese da LMI, considerando a condição hipotética de um estimador de velocidade robusto, demonstrando a relação entre a parametrização e o desempenho do filtro obtido;

- Capítulo 5 — Desenvolve os estimadores, definindo as saídas sintéticas necessárias para a estimação, a serem sintetizadas pelo filtro robusto. Neste capítulo, também é definida a região de operação dos estimadores, a resolução das LMIs e a obtenção das matrizes do filtro a ser implementado. Ainda, apresenta-se o *setup* experimental, os equipamentos utilizados, além das condições para as realização de testes e simulações;
- Capítulo 6 — Apresenta os resultados de simulação e resultados experimentais, para diversas condições de operação dos motores;
- Capítulo 7 — Traz as conclusões obtidas, bem como as respectivas perspectivas para futuros aprimoramentos do trabalho.

2 FILTRAGEM ROBUSTA E ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Utilizando técnicas de filtragem, a obtenção de variáveis contaminadas por ruídos e a observação de variáveis, antes não acessíveis, torna-se possível. Nos últimos anos, diversos métodos de filtragem foram apresentados, permitindo a sua aplicação em sistemas cada vez mais complexos, como a filtragem de modelos assíncronos (REN; ZONG, 2017), abordagens *Fuzzy* (YAN et al., 2017) e até mesmo explorando informações estatísticas sobre o sistema (PALMA; MORAIS; OLIVEIRA, 2020). Tais métodos permitem a obtenção de informações sobre o modelo a partir apenas da filtragem de suas saídas.

Neste trabalho, o método de filtragem será utilizado de forma complementar à estimação paramétrica. A aplicação do método de estimação paramétrica a ser proposto baseia-se no processamento de três componentes de um sistema LPV, compostas pela combinação linear de seus estados e entradas que, por sua vez, podem ser obtidas por meio da técnica de filtragem. Para garantir a robustez do processo, sem precisamente conhecer a influência do ruído sobre o mesmo, a filtragem \mathcal{H}_∞ será abordada, por meio da qual o ruído é dado como um sinal arbitrário com energia limitada (XIE; SOUZA, 1995). Neste caso, a síntese do filtro torna-se um problema de otimização, que busca encontrar um filtro que minimize a norma \mathcal{L}_2 do ruído para o erro de estimação, considerando toda a região do polítopo formado pelo sistema.

Nas próximas seções, apresenta-se as definições e o equacionamento do filtro, sua síntese baseada em LMIs, bem como o método de estimação paramétrica proposto.

2.1 DEFINIÇÃO

Considere um sistema dinâmico LPV representado pela Equação (1):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\Theta(t))x(t) + B_u(\Theta(t))u(t) + B_w(\Theta(t))w(t), \\ y(t) &= C_y(\Theta(t))x(t) + D_{yu}(\Theta(t))u(t) + D_{yw}(\Theta(t))w(t), \\ z(t) &= C_z(\Theta(t))x(t) + D_{zu}(\Theta(t))u(t) + D_{zw}(\Theta(t))w(t), \end{aligned} \quad (1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor contendo as entradas de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor das saídas mensuráveis, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ o vetor das entradas exógenas (ruídos de processo), $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é o vetor da saída artificial desejada no processo de filtragem, e $\Theta(t) \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$ é o vetor contendo os parâmetros variantes no tempo a serem estimados. Supõe-se que o sistema em malha aberta seja estável¹, as matrizes que compõem o sistema representado pela Equação (1) possuem dimensões adequadas e suas

¹ Esta suposição pode ser feita sem perda de generalidade, pois caso o sistema seja instável, pode-se gerar um sinal de controle $u(t)$ que o estabilize.

dependências ao vetor de parâmetros $\Theta(t)$, isto é, Θ_i , $i = 1, 2, \dots, n_\Theta$, são definidas por:

$$M(\Theta_1, \dots, \Theta_{n_\Theta}) = M_0 + \sum_{i=1}^{n_\Theta} \Theta_i M_i. \quad (2)$$

em que M_i é conhecida, contendo a dinâmica relativa à Θ_i . Por sua vez, o vetor $\Theta(t)$ é limitado, possuindo limitantes que satisfazem as condições apresentadas na Equação (3). Sem prejuízo, sua dependência temporal será omitida em sua notação, como se segue:

$$\underline{a}_i \leq \Theta_i \leq \bar{a}_i ; \underline{d}_i \leq \dot{\Theta}_i \leq \bar{d}_i ; 0 \in [\underline{d}_i, \bar{d}_i] ; i = 1, \dots, n_\Theta. \quad (3)$$

Na Equação (3), \underline{a}_i e \bar{a}_i são, respectivamente, os limites inferior e superior de Θ_i , enquanto \underline{d}_i e \bar{d}_i as variações mínima e máxima de Θ_i , dentro do intervalo definido. Conforme exposto na Equação (2), as matrizes que constituem o sistema dado pela Equação (1) possuem dependência em Θ e, para o desenvolvimentos das técnicas de filtragem, faz-se necessária a conversão da sua representação em função do simplex Λ_N , definido pelo Conjunto (4), e parametrizado em termos de um vetor α :

$$\Lambda_N = \left\{ \alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T \in \mathbb{R}^N ; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 ; \alpha_i \geq 0 ; i = 1, 2, \dots, N \right\}, \quad (4)$$

sendo N o número de vértices do politopo. Para $n_\Theta \geq 2$, é exposta a representação multi-simplex, apresentada na Definição 1.

Definição 1 (OLIVEIRA; BLIMAN; PERES, 2008) *O multi-simplex Λ_N é o produto cartesiano $\Lambda_{N_1} \times \dots \times \Lambda_{N_m}$ de um número finito de simplexes $\Lambda_{N_1}, \dots, \Lambda_{N_m}$, $i = 1, \dots, m$. A dimensão de Λ_N é definida pelo índice $N = [N_1, \dots, N_m]$. Para facilitar a notação, \mathbb{R}^N representa o espaço $\mathbb{R}^{N_1 + \dots + N_m}$. Um elemento $\alpha \in \Lambda_N$ é decomposto como $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]$ de acordo com a estrutura de Λ_N e, em seguida, cada $\alpha_i \subset \Lambda_i$, é decomposto na forma $[\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{iN_i}]$.*

Logo, realiza-se a conversão $M(\Theta) \rightarrow M(\alpha)$, em que cada componente Θ_i é substituída por um simplex de dois vértices, ou seja:

$$\begin{aligned} \Theta_i &= \alpha_{i1}(\underline{a}_i - \bar{a}_i) + \bar{a}_i ; \\ \alpha_{i2} &= 1 - \alpha_{i1} ; \\ i &= 1, \dots, n_\Theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Com base no sistema previamente apresentado na Equação (1), o objetivo é sintetizar um filtro ótimo, robusto à entrada exógena $w(t)$, de tal forma que a saída do filtro $z_f(t)$ convirja para $z(t)$ em tempo finito. Um filtro genérico pode ser descrito pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \dot{x}_f(t) &= A_f x_f(t) + B_{fu} u(t) + B_{fy} y(t), \\ z_f(t) &= C_f x_f(t) + D_{fu} u(t) + D_{fy} y(t), \end{aligned} \quad (6)$$

em que $x_f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ é o vetor de estados do filtro e $z_f(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é o vetor da saída estimada do filtro. As respectivas matrizes deste sistema possuem dimensões adequadas.

Considerando o acoplamento realizado pelo filtro proposto, pode-se aplicar a substituição de $y(t)$ da Equação (6) pelas saídas disponíveis na Equação (1). Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_f(t) &= A_f x_f(t) + B_{fu} u(t) + B_{fy} C_y(\alpha) x(t) + B_{fy} D_{yu}(\alpha) u(t) + B_{fy} D_{yw}(\alpha) w(t), \\ z_f(t) &= C_f x_f(t) + D_{fu} u(t) + D_{fy} C_y(\alpha) x(t) + D_{fy} D_{yu}(\alpha) u(t) + D_{fy} D_{yw}(\alpha) w(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Para este filtro, o erro de estimação é dado por $e(t) = z(t) - z_f(t)$. Realizando a representação em função do multi-simplex, tal que a conversão $M(\Theta) \rightarrow M(\alpha)$ seja válida, e definindo um conjunto de estados expandidos $\tilde{x}(t)$, tal que:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_f(t) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

tem-se o seguinte sistema LPV que define a dinâmica do acoplamento do filtro:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(\alpha) \tilde{x}(t) + \tilde{B}_u(\alpha) u(t) + \tilde{B}_w(\alpha) w(t), \\ e(t) &= \tilde{C}(\alpha) \tilde{x}(t) + \tilde{D}_u(\alpha) u(t) + \tilde{D}_w(\alpha) w(t), \end{aligned} \quad (9)$$

em que as respectivas matrizes da Equação (9) são dadas por:

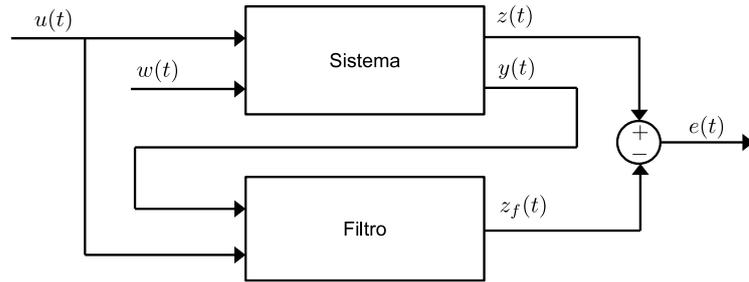
$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha) & \tilde{B}_u(\alpha) & \tilde{B}_w(\alpha) \\ \tilde{C}(\alpha) & \tilde{D}_u(\alpha) & \tilde{D}_w(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 & B_u(\alpha) & B_w(\alpha) \\ B_{fy} C_y(\alpha) & A_f & B_{fy} D_{yu}(\alpha) + B_{fu} & B_{fy} D_{yw}(\alpha) \\ C_z(\alpha) - D_{fy} C_y(\alpha) & -C_f & D_{zu}(\alpha) - D_{fu} - D_{fy} D_{yu}(\alpha) & D_{zw}(\alpha) - D_{fy} D_{yw}(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

A Figura 1 expõe um diagrama contendo uma representação simplificada do filtro, na qual é possível observar que a saída $z_f(t)$ do filtro, é dada pelo processamento do vetor contendo as entradas do sistema, $u(t)$, bem como o respectivo vetor de saída, $y(t)$, o qual pode sofrer a incidência do sinal exógeno $w(t)$. Desta maneira, as técnicas de síntese de filtros têm por objetivo determinar um conjunto de matrizes A_f , B_{fu} , B_{fy} , C_f , D_{fu} e D_{fy} , válido para todo o politopo composto por $\Theta(t)$, que minimize o erro $e(t)$ de forma robusta à $w(t)$. Apresenta-se, na Seção 2.2, um conjunto de teoremas para a solução do filtro robusto.

2.2 CONDIÇÕES DE SÍNTESE

Considere o sistema descrito na Equação (1). A norma \mathcal{H}_∞ entre $w(t)$ e $e(t)$, $\|\mathcal{H}_{ew}(s, \Theta)\|$, é dada por:

Figura 1 – Diagrama de blocos representando o processo de filtragem.



Fonte: Adaptado de Lacerda, Oliveira e Peres (2011).

$$\|\mathcal{H}_{ew}(s, \Theta)\| = \max_{w(t) \in \mathcal{L}_2} \frac{\|e(t)\|}{\|w(t)\|}. \quad (11)$$

Dessa forma, um filtro com saída robusta a ação da entrada exógena $w(t)$, com custo garantido pela norma \mathcal{H}_∞ , pode ser obtido por meio da utilização dos Teoremas 1 e 2, a seguir. Tais teoremas se diferenciam pela restrição imposta às variáveis do sistema por uma constante β , permitindo a obtenção de soluções diversas, as quais devem ser avaliadas dados os requisitos do projeto. Nos teoremas seguintes, o símbolo “ \star ” substitui blocos simétricos, tais que $a_{ij} = a_{ji}$.

Teorema 1 (AGULHARI et al., 2020) *Dados os escalares arbitrários $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e $\lambda_4 \in \mathbb{R}$, ainda dado $\beta \in \mathbb{R}^+$ que satisfaça $\|u(t)\|_2^2 \leq \beta^2 \|x(t)\|_2^2$. Se existirem matrizes positivas simétricas $P_{11}(\alpha)$, $P_{22}(\alpha)$, $\dot{P}_{11}(\alpha)$ e $\dot{P}_{22}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; matrizes parametricamente dependentes $P_{12}(\alpha)$, $\dot{P}_{12}(\alpha)$, $K_{11}(\alpha)$, $K_{21}(\alpha)$, $G_{11}(\alpha)$ e $G_{21}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $Q_{11}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$, $F_{11}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_w \times n}$ e $R_{11}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$; matrizes \hat{K} e $M_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$, $M_3 \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $D_{fu} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$, $D_{fy} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ e $C_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$; além de escalares τ e $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que:*

$$\mathcal{Q} + \mathcal{Y}\mathcal{F} + \mathcal{F}^T\mathcal{Y}^T < 0, \quad (12)$$

sendo as matrizes \mathcal{Q} , \mathcal{Y} e \mathcal{F} dadas, respectivamente, por:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \tau\beta^2\mathbf{I}_n + \dot{P}_{11}(\alpha) & \dot{P}_{12}(\alpha) & P_{11}(\alpha) & P_{12}(\alpha) & C_z^T(\alpha) - C_y^T(\alpha)D_{fy}^T & \\ \star & \dot{P}_{22}(\alpha) & P_{12}(\alpha)^T & P_{22}(\alpha) & -C_f^T & \\ \star & \star & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_z} & \\ \star & \star & \star & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_z} & \\ \star & \star & \star & \star & -\mathbf{I}_{n_z} & \\ \star & \star & \star & \star & \star & \\ \star & \star & \star & \star & \star & \\ \mathbf{0}_{n \times n_w} & & & & \mathbf{0}_{n \times n_u} & \\ \mathbf{0}_{n \times n_w} & & & & \mathbf{0}_{n \times n_u} & \\ \mathbf{0}_{n \times n_w} & & & & \mathbf{0}_{n \times n_u} & \\ \mathbf{0}_{n \times n_w} & & & & \mathbf{0}_{n \times n_u} & \\ D_{zw}(\alpha) - D_{fy}D_{yw}(\alpha) & D_{zu}(\alpha) - D_{fu} - D_{fy}D_{yu}(\alpha) & & & & \\ -\gamma^2\mathbf{I}_{n_w} & & & & \mathbf{0}_{n_w \times n_u} & \\ \star & & & & -\tau\mathbf{I}_{n_u} & \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} K_{11}(\alpha) & \lambda_1\mathbf{I}_n \\ K_{21}(\alpha) & \lambda_2\mathbf{I}_n \\ G_{11}(\alpha) & \lambda_3\mathbf{I}_n \\ G_{21}(\alpha) & \lambda_4\mathbf{I}_n \\ Q_{11}(\alpha) & \mathbf{0}_{n_z \times n} \\ F_{11}(\alpha) & \mathbf{0}_{n_w \times n} \\ R_{11}(\alpha) & \mathbf{0}_{n_u \times n} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

e

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & \mathbf{0}_n & -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_z} & B_w(\alpha) & B_u(\alpha) \\ M_2C_y(\alpha) & M_1 & \mathbf{0}_n & -\hat{K} & \mathbf{0}_{n \times n_z} & M_2D_{yw}(\alpha) & M_2D_{yu}(\alpha) + M_3 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

válidas para todo $\alpha \in \Lambda_N$, então $A_f = \hat{K}^{-1}M_1$, $B_{fy} = \hat{K}^{-1}M_2$, $B_{fu} = \hat{K}^{-1}M_3$, C_f , D_{fu} e D_{fy} são as matrizes do filtro robusto representado pela Equação (6), com norma \mathcal{H}_∞ garantida de $w(t)$ para $e(t)$ dada por γ .

Prova 1 Seja um sistema aumentado representado pela Equação (9), em que se satisfaça as seguintes condições:

$$\frac{\|e(t)\|_2^2}{\|w(t)\|_2^2} \leq \gamma^2, \quad \frac{\|u(t)\|_2^2}{\|x(t)\|_2^2} \leq \beta^2, \quad (16)$$

as quais podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} e^T(t)e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) &\leq 0, \\ u^T(t)u(t) - \beta^2 x^T(t)x(t) &\leq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Define-se uma função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t)P(\alpha)\tilde{x}(t)$, com $P(\alpha) > 0$, restrita a:

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) < 0, \quad (18)$$

As condições representadas nas Equações (17) e (18) podem ser agrupadas aplicando a técnica conhecida como \mathcal{S} -Procedure (BOYD et al., 1994), e reescritas como:

$$\underbrace{\dot{V}(\tilde{x}(t))}_I + \underbrace{e^T(t)e(t)}_{II} - \underbrace{\gamma^2 w^T(t)w(t) - \tau u^T(t)u(t) + \tau \beta^2 x^T(t)x(t)}_{III} < 0, \quad (19)$$

sendo τ um escalar positivo. O desenvolvimento da Equação (19) será realizado em três etapas — I, II e III — e as dependências temporal (t) e paramétrica (α) serão omitidas, sem prejuízo à notação.

Etapa I: Derivando a função de Lyapunov proposta, obtém-se:

$$\dot{V}(\tilde{x}) = \dot{\tilde{x}}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T \dot{P} \tilde{x} + \tilde{x}^T P \dot{\tilde{x}}. \quad (20)$$

Da Equação (9), sabe-se que $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}_u u + \tilde{B}_w w$. Portanto, substituindo-a na Equação (20), tem-se:

$$\dot{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T \tilde{A}^T P \tilde{x} + u^T \tilde{B}_u^T P \tilde{x} + w^T \tilde{B}_w^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{x}^T P \tilde{B}_u u + \tilde{x}^T P \tilde{B}_w w + \tilde{x}^T \dot{P} \tilde{x}, \quad (21)$$

que pode ser expressa matricialmente como:

$$\dot{V}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ u \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}^T P + P \tilde{A} + \dot{P} & P \tilde{B}_u & P \tilde{B}_w \\ \tilde{B}_u^T P & 0 & 0 \\ \tilde{B}_w^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ u \\ w \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Etapa II: Da Equação (9), sabe-se que $e = \tilde{C}_z \tilde{x} + \tilde{D}_u u + \tilde{D}_w w$, logo:

$$e^T = \tilde{x}^T \tilde{C}_z^T + u^T \tilde{D}_u^T + w^T \tilde{D}_w^T. \quad (23)$$

Aplicando a multiplicação distributiva em $e^T e$, e reescrevendo a Equação (23), tem-se como resultado:

$$\begin{aligned} e^T e = & \tilde{x}^T \tilde{C}_z^T \tilde{C}_z \tilde{x} + \tilde{x}^T \tilde{C}_z^T \tilde{D}_u u + \tilde{x}^T \tilde{C}_z^T \tilde{D}_w w + u^T \tilde{D}_u^T \tilde{C}_z \tilde{x} + u^T \tilde{D}_u^T \tilde{D}_u u + \\ & u^T \tilde{D}_u^T \tilde{D}_w w + w^T \tilde{D}_w^T \tilde{C}_z \tilde{x} + w^T \tilde{D}_w^T \tilde{D}_u u + w^T \tilde{D}_w^T \tilde{D}_w w, \end{aligned} \quad (24)$$

$$e^T e = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ u \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{C}_z^T \tilde{C}_z & \tilde{C}_z^T \tilde{D}_u & \tilde{C}_z^T \tilde{D}_w \\ \tilde{D}_u^T \tilde{C}_z & \tilde{D}_u^T \tilde{D}_u & \tilde{D}_u^T \tilde{D}_w \\ \tilde{D}_w^T \tilde{C}_z & \tilde{D}_w^T \tilde{D}_u & \tilde{D}_w^T \tilde{D}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ u \\ w \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Etapa III: Por fim, nesta etapa reescreve-se os termos da expressão:

$$-\gamma^2 w^T(t)w(t) - \tau u^T(t)u(t) + \tau \beta^2 x^T(t)x(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ u \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau \beta^2 I & 0 & 0 \\ 0 & -\tau I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ u \\ w \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Somando os resultados obtidos nas Etapas I, II, e III, tem-se que a Equação (19) pode ser expressa como a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T P + P \tilde{A} + \dot{P} + \tilde{C}_z^T \tilde{C}_z + \tau \beta^2 I & \tilde{C}_z^T \tilde{D}_u + P \tilde{B}_u & \tilde{C}_z^T \tilde{D}_w + P \tilde{B}_w \\ \star & \tilde{D}_u^T \tilde{D}_u - \tau I & \tilde{D}_u^T \tilde{D}_w \\ \star & \star & \tilde{D}_w^T \tilde{D}_w - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (27)$$

Partindo da Equação (27), realiza-se a substituição da segunda linha pela terceira linha, e então da segunda coluna pela terceira coluna, de forma a permitir a expressão da Equação (27) ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T P + P \tilde{A} + \dot{P} + \tau \beta^2 I & P \tilde{B}_w & P \tilde{B}_u \\ \star & -\gamma^2 I & 0 \\ \star & \star & -\tau I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{C}_z^T \\ \tilde{D}_w^T \\ \tilde{D}_u^T \end{bmatrix} [I] \begin{bmatrix} \tilde{C}_z & \tilde{D}_w & \tilde{D}_u \end{bmatrix} < 0, \quad (28)$$

a qual se encontra em um formato adequado para a aplicação do Complemento de Schur (BOYD et al., 1994). Após tal aplicação, realiza-se novas modificações na posição dos termos: troca-se os elementos da segunda linha pelos da terceira linha, e então aplica-se a troca novamente, entre os elementos da segunda coluna pelos da terceira coluna. Em

seguida, realiza-se mais uma troca: entre elementos da terceira e quarta linha e coluna, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T P + P \tilde{A} + \dot{P} + \tau \beta^2 I & \tilde{C}_z^T & P \tilde{B}_w & P \tilde{B}_u \\ \star & -I & \tilde{D}_w & \tilde{D}_u \\ \star & \star & -\gamma^2 I & 0 \\ \star & \star & \star & -\tau I \end{bmatrix} < 0. \quad (29)$$

A aplicação do Lema de Finsler (BOYD et al., 1994) é realizada a partir da Equação (29), que pode ser reformulada em formato análogo a $\mathcal{B}^{\perp T} \mathcal{Q} \mathcal{B}^{\perp}$, sendo:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \dot{P} + \tau \beta^2 I & P & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & -I & \tilde{D}_w & \tilde{D}_u \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 I & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \tau I \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{A} & 0 & \tilde{B}_w & \tilde{B}_u \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Determinando:

$$\mathcal{B}^T = \begin{bmatrix} \tilde{A}^T \\ -I \\ 0 \\ \tilde{B}_w^T \\ \tilde{B}_u^T \end{bmatrix}^T \text{ e } \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} K \\ G \\ Q \\ F \\ R \end{bmatrix}, \quad (31)$$

tal que $\mathcal{B} \mathcal{B}^{\perp} = 0$, e considerando as seguintes estruturas:

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} K_{11}(\alpha) & \lambda_1 \hat{K} \\ K_{21}(\alpha) & \lambda_2 \hat{K} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_{11}(\alpha) & \lambda_3 \hat{K} \\ G_{21}(\alpha) & \lambda_4 \hat{K} \end{bmatrix}, \\ Q &= [Q_{11}(\alpha) \quad 0], \quad F = [F_{11}(\alpha) \quad 0], \quad R = [R_{11}(\alpha) \quad 0]. \end{aligned} \quad (32)$$

Então, a estrutura de \mathcal{Y} pode ser realizada conforme a Equação (33).

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} K_{11}(\alpha) & \lambda_1 \hat{K} \\ K_{21}(\alpha) & \lambda_2 \hat{K} \\ G_{11}(\alpha) & \lambda_3 \hat{K} \\ G_{11}(\alpha) & \lambda_4 \hat{K} \\ Q_{11}(\alpha) & 0 \\ F_{11}(\alpha) & 0 \\ R_{11}(\alpha) & 0 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Fazendo $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ e, considerando que a multiplicação $\mathcal{Y}\mathcal{F}$ apresenta termos bilineares, realiza-se as substituições $M_1 = A_f \hat{K}$, $M_2 = B_{fy} \hat{K}$ e $M_3 = B_{fu} \hat{K}$, obtendo-se a respectiva matriz \mathcal{Y} apresentada em (14). Conclui-se, então, que a aplicação do Lema de Finsler faz a resolução da Equação (29) ser equivalente a $\mathcal{Q} + \mathcal{Y}\mathcal{F} + \mathcal{F}^T \mathcal{Y}^T$. No mais, substitui-se nas matrizes obtidas, as componentes equivalentes, expostas na Equação (10).

A síntese das LMIs deve considerar os parâmetros relativos ao sistema em que se deseja aplicar o filtro, bem como requisitos de projeto. Considerando o Teorema 1, aplicações que exigem β com magnitude elevada podem apresentar difícil solução, ou até mesmo tornarem-se inactíveis, já que tal condição limita a norma relacionada entre estados e a entrada de controle. Diante disto, uma nova condição é apresentada, permitindo maior flexibilidade, ao custo de limitar a norma máxima de $w(t)$, apresentada no Teorema 2. Tal condição baseia-se em Agulhari et al. (2020), modificando-a e determinando que:

$$\frac{\|w(t)\|_2^2}{\|u(t)\|_2^2} \leq \beta^2 \quad (34)$$

Teorema 2 Considere uma constante $\beta \in \mathcal{R}^+$ que satisfaça $\|w(t)\|_2^2 \leq \beta^2 \|u(t)\|_2^2$, e dados escalares arbitrários $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e $\lambda_4 \in \mathcal{R}$. Caso existam matrizes positivas simétricas $P_{11}(\alpha)$ e $P_{22}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; matrizes parametricamente dependentes $P_{12}(\alpha), K_{11}(\alpha), K_{21}(\alpha), G_{11}(\alpha)$ e $G_{21}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $Q_{11}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$, $F_{11}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_w \times n}$ e $R_{11}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$; matrizes \hat{K} e $M_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$, $M_3 \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $D_{fu} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$, $D_{fy} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ e $C_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$; e escalares τ e $\gamma \in \mathcal{R}^+$ tal que:

$$\mathcal{Q} + \mathcal{Y}\mathcal{F} + \mathcal{F}^T \mathcal{Y}^T < 0, \quad (35)$$

em que as matrizes \mathcal{Q} , \mathcal{Y} e \mathcal{F} são dadas por:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & P_{11}(\alpha) & P_{12}(\alpha) & C_z^T(\alpha) - C_y^T(\alpha)D_{fy}^T \\ \star & \mathbf{0}_n & P_{12}(\alpha)^T & P_{22}(\alpha) & -C_f^T \\ \star & \star & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_z} \\ \star & \star & \star & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_z} \\ \star & \star & \star & \star & -\mathbf{I}_{n_z} \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \mathbf{0}_{n \times n_w} & & & & \mathbf{0}_{n \times n_u} \\ \mathbf{0}_{n \times n_w} & & & & \mathbf{0}_{n \times n_u} \\ \mathbf{0}_{n \times n_w} & & & & \mathbf{0}_{n \times n_u} \\ \mathbf{0}_{n \times n_w} & & & & \mathbf{0}_{n \times n_u} \\ D_{zw}(\alpha) - D_{fy}D_{yw}(\alpha) & & D_{zu}(\alpha) - D_{fu} - D_{fy}D_{yu}(\alpha) & & \\ -(\gamma^2 + \tau)\mathbf{I}_{n_w} & & & & \mathbf{0}_{n_w \times n_u} \\ \star & & & & \tau\beta^2\mathbf{I}_{n_u} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} K_{11}(\alpha) & \lambda_1\mathbf{I}_n \\ K_{21}(\alpha) & \lambda_2\mathbf{I}_n \\ G_{11}(\alpha) & \lambda_3\mathbf{I}_n \\ G_{21}(\alpha) & \lambda_4\mathbf{I}_n \\ Q_{11}(\alpha) & \mathbf{0}_{n_z \times n} \\ F_{11}(\alpha) & \mathbf{0}_{n_w \times n} \\ R_{11}(\alpha) & \mathbf{0}_{n_u \times n} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

e

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & \mathbf{0}_n & -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times n_z} & B_w(\alpha) & B_u(\alpha) \\ M_2C_y(\alpha) & M_1 & \mathbf{0}_n & -\hat{K} & \mathbf{0}_{n \times n_z} & M_2D_{yw}(\alpha) & M_2D_{yu}(\alpha) + M_3 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

válidas para todo $\alpha \in \Lambda_N$, então $A_f = \hat{K}^{-1}M_1$, $B_{fy} = \hat{K}^{-1}M_2$, $B_{fu} = \hat{K}^{-1}M_3$, C_f , D_{fu} e D_{fy} são as matrizes do filtro robusto representado pela Equação (6), com norma \mathcal{H}_∞ garantida de $w(t)$ para $e(t)$ dada por γ .

Prova 2 Seja um sistema aumentado representado pela Equação (9), que satisfaça:

$$\frac{\|e(t)\|_2^2}{\|w(t)\|_2^2} \leq \gamma^2 \text{ e } \frac{\|w(t)\|_2^2}{\|u(t)\|_2^2} \leq \beta^2. \quad (39)$$

Reescrevendo tais condições, obtêm-se:

$$\begin{aligned} e^T(t)e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) &\leq 0, \\ w^T(t)w(t) - \beta^2 u^T(t)u(t) &\leq 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Utilizando uma função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = x^T(t)P(\alpha)x(t)$, com $P(\alpha) > 0$, restrita a:

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) < 0, \quad (41)$$

as Equações (40) e (41) podem ser agrupadas aplicando a técnica conhecida como \mathcal{S} -Procedure (BOYD et al., 1994) com $\tau > 0$, e reescritas como:

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) - \tau w^T(t)w(t) + \tau \beta^2 u^T(t)u(t) < 0, \quad (42)$$

A prova do teorema segue, então, os mesmo passos daquela desenvolvida para o Teorema 1, reescrevendo a condição em forma matricial. Contudo, a seguinte condição é obtida:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T P + P \tilde{A} + \tilde{C}_z^T \tilde{C}_z & \tilde{C}_z^T \tilde{D}_u + P \tilde{B}_u & \tilde{C}_z^T \tilde{D}_w + P \tilde{B}_w \\ * & \tilde{D}_u^T \tilde{D}_u + \tau \beta^2 I & \tilde{D}_u^T \tilde{D}_w \\ * & * & \tilde{D}_w^T \tilde{D}_w - (\gamma^2 + \tau) I \end{bmatrix} < 0. \quad (43)$$

Aplicando o Complemento de Schur (BOYD et al., 1994) a esta condição, e o Lema de Finsler (BOYD et al., 1994), com passos iguais aos apresentados para o Teorema 1, obtêm-se a LMI apresentada na Equação (35).

Os Teoremas 1 e 2 apresentados, permitem a obtenção das matrizes do filtro robusto. Contudo, tais condições possuem dependência à α e, para sua solução via algoritmos de otimização convexa, devem ser verificadas para todo $\alpha \in \Lambda_n$, se apresentando como um problema de dimensão infinita. Técnicas de relaxamento, como a homogenização polinomial apresentada em Oliveira e Peres (2007), apresentam condições suficientes para a solução, e podem ser aplicadas para a obtenção de um conjunto finito de LMIs. Neste trabalho, o *parser* ROLMIP (AGULHARI et al., 2019) será utilizado, o qual realiza computacionalmente o procedimento de homogenização, a partir da estruturação de cada variável de otimização como um polinômio homogêneo de grau h , e então, extrai automaticamente um conjunto finito de LMIs, a serem resolvidas pelo *solver* MOSEK ApS (2019).

A estrutura das matrizes que compõem o filtro será também determinada de maneira parametricamente dependente, com o intuito de reduzir o conservadorismo da solução. Neste caso, as matrizes \hat{K} , M_1 , M_2 , M_3 , C_f , D_{fu} e D_{fy} assumem a seguinte estrutura:

$$M(\alpha) = \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \dots \sum_{i_k=1}^2 \alpha_{1i_1} \alpha_{2i_2} \dots \alpha_{ki_k} M_{i_1 i_2 \dots i_k}, \quad (44)$$

em que $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ é a matriz contendo os coeficientes matriciais, e k é a dimensão do politopo composto pelos parâmetros acessíveis e conhecidos, composto por k^2 vértices. Exige-se assim que a posterior implementação do filtro realize o cálculo das matrizes do filtro, A_f , B_{f_u} e B_{f_y} , ponto a ponto, levando em consideração os respectivos α obtidos para os valores instantâneos dos parâmetros variantes acessíveis. A conversão de $\Theta \rightarrow \alpha$ pode ser realizada utilizando a expressão apresentada na Equação (5).

2.3 ESTIMAÇÃO PARAMÉTRICA

O vetor de parâmetros Θ e sua dependência com as matrizes que compõem o sistema LPV podem ser explicitados, conforme verificado e exposto na Equação (2). De acordo com Na et al. (2013), a dinâmica do modelo LPV também pode utilizar desta notação, da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = \phi(t) + \Phi(t)\Theta, \quad (45)$$

sendo $\phi(t)$ uma função limitada, contínua e sem dependência ao parâmetro variante, e $\Phi(t)$ uma função contendo a dinâmica variante do modelo, que possui dependência direta a Θ . Reescrevendo a componente diferencial da Equação (1) no formato da Equação (45):

$$\dot{x}(t) = \underbrace{A_0 x(t) + B_0 u(t)}_{\phi(t)} + \underbrace{[A_1 x(t) + B_1 u(t) \quad \dots \quad A_{n_\Theta} x(t) + B_{n_\Theta} u(t)]}_{\Phi(t)} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_{n_\Theta} \end{bmatrix} + B_w w(t), \quad (46)$$

O método proposto tem por objetivo estimar o vetor de parâmetros Θ . Uma maneira é obter uma variável $\hat{\Theta}(t)$ que convirja para Θ em tempo limitado, com convergência exponencial garantida por uma função de Lyapunov. A técnica apresentada em Agulhari et al. (2020) e Na et al. (2013) apresentam condições para sua obtenção. Primeiramente, é necessário obter as variáveis filtradas $\hat{x}(t)$, $\hat{\phi}(t)$ e $\hat{\Phi}(t)$, que podem ser obtidas definindo o seguinte vetor particionado:

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \phi(t) \\ \text{vec}\{\Phi(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{n_\Theta} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{n_\Theta} \end{bmatrix} u(t), \quad (47)$$

sendo $\text{vec} \{\Phi(t)\} = [\Phi_1^T(t) \ \dots \ \Phi_{n_\Theta}^T(t)]$. Então, as variáveis desejadas serão sintetizadas pelo filtro obtido:

$$z_f(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{\phi}(t) \\ \text{vec} \{ \hat{\Phi}(t) \} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Considerando $\Phi(t)$ persistentemente excitável, ou seja, se existirem $r > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que:

$$\int_t^{t+r} \Phi(\tau)\Phi(\tau)^T d\tau \geq \varepsilon I, \forall t > 0, \quad (49)$$

então a estimação de $\hat{\Theta}(t)$ poderá ser realizada pela resolução de três equações diferenciais matriciais de primeira ordem, apresentadas no Teorema 3.

Teorema 3 (AGULHARI et al., 2020) *Considere $z_f(t)$ composto pelas variáveis filtradas $\hat{x}(t)$, $\hat{\phi}(t)$ e $\hat{\Phi}(t)$, em que A_f , B_{fu} , B_{fy} , C_f , D_{fy} e D_{fu} são as matrizes do filtro robusto (6) que o compõe. Sejam $P(t)$ e $Q(t)$ as soluções das respectivas equações diferenciais para todo $\ell > 0$:*

$$\dot{P}(t) = -\ell P(t) + \hat{\Phi}^T(t)\hat{\Phi}(t), \quad (50)$$

$$\dot{Q}(t) = -\ell Q(t) + \hat{\Phi}^T(t) [C_{fx}(A_f x_f(t) + B_{fy}y(t) + B_{fu}u(t)) + D_{fyy}\dot{y}(t) + D_{fux}\dot{u}(t) - \hat{\phi}(t)], \quad (51)$$

com $P(0) = \mathbf{0}$ e $Q(0) = \mathbf{0}$. Portanto, para toda matriz $\Gamma > 0$, a solução da Equação:

$$\dot{\hat{\Theta}}(t) = -\Gamma W(t), \quad (52)$$

em que

$$W(t) = P(t)\hat{\Theta}(t) - Q(t), \quad (53)$$

garante que o erro de estimação $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}(t)$ convirja uniformemente para o conjunto:

$$\Upsilon = \left\{ \tilde{\Theta}(t) : \|\tilde{\Theta}(t)\|_2 \leq \frac{\zeta}{\sigma} (\rho\gamma + \|B_w\|_2) \|w\|_2 \right\}, \quad (54)$$

em que $P(t) > \sigma I$, ζ e $\rho > 1$ são limitantes que satisfazem as seguintes desigualdades:

$$\left(\int_0^t \|e^{-\ell(t-\tau)} \hat{\Phi}(\tau)\|_2^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \zeta, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (55)$$

$$\|\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)\|_2 \leq \rho \|x(t) - \hat{x}(t)\|_2. \quad (56)$$

Prova 3 A solução da Equação (50) é dada por:

$$P(t) = \int_0^t e^{-\ell(t-\tau)} \hat{\Phi}^T(\tau) \hat{\Phi}(\tau) d\tau. \quad (57)$$

Por sua vez, para resolver a Equação (51), considere a Equação (45) formada pelas respectivas variáveis estimadas. Introduz-se a esta equação um erro de estimação $\delta(t)$, logo:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{\phi}(t) + \hat{\Phi}(t)\Theta + \delta(t), \quad t \geq t_f. \quad (58)$$

Rearranjando os termos de (58), obtém-se:

$$\hat{\Phi}(t)\Theta + \delta(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \hat{\phi}(t). \quad (59)$$

Pode-se reescrever $\dot{\hat{x}}(t)$ obtendo sua saída correspondente $\hat{x}(t)$ da Equação (6) e derivando-a. Portanto, a Equação (59) torna-se:

$$\hat{\Phi}(t)\Theta + \delta(t) = C_{fx}(A_f x_f(t) + B_{fy}y(t) + B_{fu}u(t)) + D_{fyx}\dot{y}(t) + D_{fux}\dot{u}(t) - \hat{\phi}(t). \quad (60)$$

A solução de (51) torna-se, então:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_0^t e^{-\ell(t-\tau)} \hat{\Phi}^T(\tau) \left(\hat{\Phi}(\tau)\Theta + \delta(\tau) \right) d\tau, \\ &= \int_0^t e^{-\ell(t-\tau)} \hat{\Phi}^T(\tau) \hat{\Phi}(\tau)\Theta d\tau - \underbrace{\left(- \int_0^t e^{-\ell(t-\tau)} \hat{\Phi}^T(\tau) \delta(\tau) d\tau \right)}_{\psi(t)}, \\ &= P(t)\Theta - \psi(t). \end{aligned} \quad (61)$$

Agora, considere o erro de estimação paramétrica $\tilde{\Theta}(t) = \Theta - \hat{\Theta}(t)$, em que $|z(t) - z_f(t)| < \varepsilon$, $t \geq t_f$, sendo t_f o tempo mínimo de convergência. Então, a Equação (53) torna-se:

$$\begin{aligned} W(t) &= P(t)\hat{\Theta}(t) - Q(t), \\ &= P(t) \left(\Theta - \tilde{\Theta}(t) \right) - Q(t), \\ &= -P(t)\tilde{\Theta}(t) + P(t)\Theta - Q(t), \\ &= -P(t)\tilde{\Theta}(t) + \psi(t). \end{aligned} \quad (62)$$

A convergência é garantida no caso de $\Phi(t)$ ser persistentemente excitável, o que pode ser visto ao considerar-se a seguinte função de Lyapunov $V(t)$:

$$V(t) = \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T(t) \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}(t). \quad (63)$$

Derivando a função na Equação (63):

$$\dot{V}(t) = \tilde{\Theta}^T(t) \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}(t). \quad (64)$$

Desenvolvendo a Equação (64):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \tilde{\Theta}^T(t) \Gamma^{-1} \left(\dot{\Theta} - \dot{\hat{\Theta}}(t) \right), \\ &= -\tilde{\Theta}^T(t) \Gamma^{-1} \dot{\hat{\Theta}}(t), \\ &= \tilde{\Theta}^T(t) W(t), \\ &= -\tilde{\Theta}^T(t) P(t) \tilde{\Theta}(t) + \tilde{\Theta}^T(t) \psi(t). \end{aligned} \quad (65)$$

Sabendo que $P(t) > \sigma I$ e $\|\psi(t)\|_\infty \leq \varepsilon_\psi$, aplica-se o módulo nas componentes da função $\dot{V}(t)$, reescrevendo-a de forma limitada como se segue:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\sigma \hat{\Theta}^T(t) \hat{\Theta}(t) + \hat{\Theta}^T(t) \psi(t), \\ &\leq -\sigma \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\|_2^2 + \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\|_2 \|\psi\|_\infty, \\ &\leq -\left\| \tilde{\Theta}(t) \right\|_2 \left(\sigma \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\|_2 - \varepsilon_\psi \right). \end{aligned} \quad (66)$$

Logo, observa-se que o erro de estimação converge para o conjunto:

$$\hat{\Upsilon}(t) = \left\{ \tilde{\Theta}(t) : \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\|_2 \leq \frac{\varepsilon_\psi}{\sigma} \right\}. \quad (67)$$

Por fim, para demonstrar que $\hat{\Upsilon}(t) \subseteq \Upsilon$, subtraindo a componente $\dot{x}(t)$, exposta na Equação (1), em (58), e isolando $\delta(t)$:

$$\delta(t) = -\left(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \right) + \left(\phi(t) - \hat{\phi}(t) \right) + \left(\Phi(t) - \hat{\Phi}(t) \right) \Theta + B_w w(t). \quad (68)$$

Substituindo a Equação (56) em (68) e aplicando o módulo ao resultado, verifica-se:

$$\|\delta(t)\|_2 \leq \rho \left(\|x(t) - \hat{x}(t)\|_2 + \|\phi(t) - \hat{\phi}(t)\|_2 + \|\Phi(t) - \hat{\Phi}(t)\|_2 \|\Theta\|_2 \right) + \|B_w\|_2 \|w(t)\|_2. \quad (69)$$

Sabe-se que pode-se considerar $\|\Theta\|_2 < 1$, condição que pode ser obtida a partir de uma renormalização dos parâmetros. Considerando ainda a relação γ de $e(t)$ para $w(t)$, obtida pela limitação da norma \mathcal{H}_∞ , então, a Equação (69) torna-se:

$$\begin{aligned} \|\delta(t)\|_2 &\leq \rho \|e(t)\|_2 + \|B_w\|_2 \|w(t)\|_2, \\ &\leq \rho\gamma \|w(t)\|_2 + \|B_w\|_2 \|w(t)\|_2. \end{aligned} \quad (70)$$

Utilizando $\psi(t)$, explicitado na Equação (61), e aplicando a norma, tem-se:

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\|_2 &\leq \int_0^t \left\| e^{-\ell(t-\tau)} \hat{\Phi}^T(\tau) \delta(\tau) \right\|_2 d\tau \\ &\leq \int_0^t \left\| e^{-\ell(t-\tau)} \hat{\Phi}^T(\tau) \right\|_2 \|\delta(\tau)\|_2 d\tau, \\ &\leq \left(\int_0^t \left\| e^{-\ell(t-\tau)} \hat{\Phi}^T(\tau) \right\|_2^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|\delta(\tau)\|_2^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (71)$$

Considerando a condição exposta em (55), e combinando-a com a Equação (71), é possível notar que:

$$\|\psi(t)\|_2 \leq \zeta \|\delta\|_2. \quad (72)$$

Sabe-se que $\|\psi(t)\|_\infty \leq \|\psi(t)\|_2$ e, portanto, reescrevendo o conjunto apresentado na Equação (67) utilizando os termos então apresentados, é possível verificar que o erro de estimação $\tilde{\Theta}(t)$ converge para o conjunto \hat{Y} de forma que:

$$\hat{Y}(t) = \left\{ \tilde{\Theta}(t) : \|\tilde{\Theta}(t)\|_2 \leq \frac{\varepsilon_\psi}{\sigma} \leq \frac{\zeta \|\delta\|_2}{\sigma} \leq \frac{\zeta}{\sigma} (\rho\gamma + \|B_w\|_2) \|w\|_2 \right\}. \quad (73)$$

2.4 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo foram apresentadas as principais definições e teoremas necessários para o procedimento de filtragem e estimação paramétrica proposto. Apresentou-se a definição do filtro com robustez garantida pela norma \mathcal{H}_∞ , bem como condições para sua síntese via LMIs nos Teoremas 1 e 2. Por sua vez, no Teorema 3 foram expostas as condições para estimação paramétrica de um sistema LPV. Desta forma, a sua utilização na estimação paramétrica de sistemas físicos, como o motor de indução, torna-se viável e pode ser implementada com base na teoria exposta neste capítulo.

3 MODELAGEM DA FALHA DE CURTO-CIRCUITO

A modelagem matemática do motor de indução permite a representação das dinâmicas mecânicas, elétricas e magnéticas do motor, viabilizando o estudo e desenvolvimento de técnicas de acionamento, controle e monitoramento. Partindo do equacionamento eletromagnético do motor, os modelos em referencial estacionário abc permitem a representação dinâmica das grandezas como corrente, fluxo e torque do motor (KRAUSE et al., 2002). Contudo, o acoplamento magnético variante no tempo traz ao modelo não-linearidades e grande complexidade em sua análise.

Em modelos trifásicos simétricos, os quais possuem enrolamentos idênticos entre fases, espaçados de 120° , e distribuição de fluxo senoidal, a transformação de coordenadas $qd0$ (PARK, 1929) pode ser aplicada, proporcionando uma representação simplificada de suas equações diferenciais. As representações em espaço de estados do modelo matemático do motor de indução também podem ser desenvolvidas por meio de modelos LPV (KRISHNAN, 2001). Desta forma, técnicas de acionamento e controle moderno podem ser aplicadas (MIRANDA et al., 2009), bem como métodos de monitoramento e supervisão, como os observadores de estado (ALONGE; D'IPPOLITO; SFERLAZZA, 2014).

Contudo, o equacionamento dinâmico de falhas resulta em modelos assimétricos, como os obtidos para a representação de falhas estatóricas (DEVANNEAUX et al., 2003), (TOLIYAT; LIPO, 1995), falhas no rotor (JUNG; KWON, 2006; OMAR et al., 2005), bem como falhas de excentricidade (JOKSIMOVIC et al., 2000). Dentre estes modelos, os que representam a falha de curto-circuito no estator possuem características não lineares, além de serem variantes no tempo. Logo, sua representação em espaço de estados, bem como a utilização destes modelos em técnicas determinísticas de controle e supervisão, possui restrições e mostra-se diversas vezes de difícil execução.

Diante disto, desenvolve-se neste capítulo as contribuições para a representação em espaço de estados assimétrica da falha de curto-circuito de estator, permitindo a simulação e o desenvolvimento de técnicas de controle e filtragem. Apresenta-se, neste capítulo, a modelagem assimétrica do motor, sua conversão de coordenadas e contribuições para a representação do modelo matemático em espaço de estados.

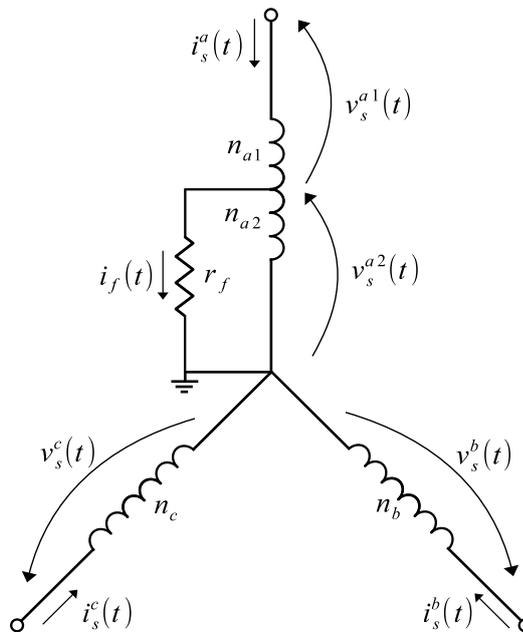
3.1 MODELO ASSIMÉTRICO EQUIVALENTE

O curto-circuito entre bobinas de uma mesma fase pode ser representado como a conexão direta entre espiras curto-circuitadas, dada uma resistência de curto-circuito de acoplamento r_f . Desta forma, as espiras curto-circuitadas apresentam um caminho direto para a corrente de fase. Tallam, Habetler e Harley (2002) apresentam o equacionamento

desta falha aplicada em uma única fase, por meio de um modelo equivalente em coordenadas abc , em que a fase a divide-se em duas componentes: um ramo de curto-circuito, que fornece um caminho de baixa impedância para a corrente de fase, e o respectivo ramo remanescente. A Figura 2 ilustra o circuito elétrico equivalente do estator, considerando a falha na fase a do modelo.

Neste circuito, as tensões das componentes remanescentes e em curto-circuito da fase a são, $v_s^{a1}(t)$ e $v_s^{a2}(t)$, respectivamente, enquanto as tensões das fases b e c são dadas por $v_s^b(t)$ e $v_s^c(t)$. Além disso, as correntes das fases abc do estator são dadas por $i_s^a(t)$, $i_s^b(t)$ e $i_s^c(t)$, e a corrente de curto-circuito é expressa por $i_f(t)$. O número de espiras nominal de cada fase é dado por n_a , n_b e n_c , enquanto o número de espiras curto-circuitadas e remanescente são, respectivamente, n_{a1} e n_{a2} .

Figura 2 – Circuito elétrico equivalente — estator com curto-circuito.



Fonte: Adaptado de Tallam, Habetler e Harley (2002).

Introduz-se o fator de severidade de falha μ , que representa a porcentagem de espiras que sofrem incidência da falha¹:

$$\mu = \frac{n_{a2}}{n_a}. \quad (74)$$

Para o equacionamento do circuito elétrico do estator, considera-se os fluxos magnéticos de acoplamento para as fases a , b e c como, $\lambda_s^{a1}(t)$, $\lambda_s^{a2}(t)$, $\lambda_s^b(t)$ e $\lambda_s^c(t)$.

¹ Ressalta-se que, a qualquer momento nesta modelagem, a representação simétrica sem falha pode ser obtida considerando $\mu = 0$.

Portanto, o circuito apresentado na Figura 2, com resistência de falha r_f e resistência de estator r_s , pode ser modelado matematicamente como a seguinte forma matricial dada por:

$$\begin{bmatrix} v_s^{a1}(t) \\ v_s^{a2}(t) \\ v_s^b(t) \\ v_s^c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\mu)r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu r_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^a(t) \\ i_s^a(t) - i_f(t) \\ i_s^b(t) \\ i_s^c(t) \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_s^{a1}(t) \\ \lambda_s^{a2}(t) \\ \lambda_s^b(t) \\ \lambda_s^c(t) \end{bmatrix}, \quad (75)$$

A representação matemática do circuito elétrico do rotor é apresentada na Equação (76), sendo a resistência elétrica do rotor dada por r_r , as tensões abc do rotor representadas por $v_r^a(t)$, $v_r^b(t)$ e $v_r^c(t)$, as correntes do rotor expressas por $i_r^a(t)$, $i_r^b(t)$ e $i_r^c(t)$, e o fluxo magnético do rotor dado por $\lambda_r^a(t)$, $\lambda_r^b(t)$ e $\lambda_r^c(t)$:

$$\begin{bmatrix} v_r^a(t) \\ v_r^b(t) \\ v_r^c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_r & 0 & 0 \\ 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_r^a(t) \\ i_r^b(t) \\ i_r^c(t) \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_r^a(t) \\ \lambda_r^b(t) \\ \lambda_r^c(t) \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Devido ao caminho direto formado pelo ramo de curto-circuito, os fluxos magnéticos de acoplamento sofrem ação da falha. Logo, o fluxo magnético de acoplamento da fase a , $\lambda_s^a(t)$, será dividido em duas componentes, $\lambda_s^{a1}(t)$ e $\lambda_s^{a2}(t)$, de forma que:

$$\begin{bmatrix} \lambda_s^{a1}(t) \\ \lambda_s^{a2}(t) \\ \lambda_s^b(t) \\ \lambda_s^c(t) \end{bmatrix} = \left(L_{ls} \begin{bmatrix} (1-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + L_{ss} \begin{bmatrix} (1-\mu)^2 & \mu(1-\mu) & 0 & 0 \\ \mu(1-\mu) & \mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + L_{sm} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1-\mu) & (1-\mu) \\ 0 & 0 & \mu & \mu \\ (1-\mu) & \mu & 0 & 1 \\ (1-\mu) & \mu & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_s^a(t) \\ i_s^a(t) - i_f(t) \\ i_s^b(t) \\ i_s^c(t) \end{bmatrix} + L_{sr} \begin{bmatrix} (1-\mu)\cos(\theta_r) & (1-\mu)\cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & (1-\mu)\cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \mu\cos(\theta_r) & \mu\cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \mu\cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_r^a(t) \\ i_r^b(t) \\ i_r^c(t) \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Na Equação (77), as indutâncias do estator, dadas por L_{ss} , L_{ls} e L_{sm} são, respectivamente, a indutância própria, a indutância de dispersão e a indutância mútua entre os

enrolamentos do estator, enquanto θ_r é o ângulo do rotor. Da mesma forma, considerando L_{rr} , L_{lr} e L_{sm} como a indutância própria, a indutância de dispersão e a indutância mútua entre os enrolamentos do rotor, e L_{sr} o valor de pico da indutância mútua estator-rotor, o fluxo de acoplamento do rotor será dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda_r^a(t) \\ \lambda_r^b(t) \\ \lambda_r^c(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{lr} + L_{rr} & L_{rm} & L_{rm} \\ L_{rm} & L_{lr} + L_{rr} & L_{rm} \\ L_{rm} & L_{rm} & L_{lr} + L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_r^a(t) \\ i_r^b(t) \\ i_r^c(t) \end{bmatrix} + \\ L_{sr} &\begin{bmatrix} (1-\mu)\cos(\theta_r) & \mu\cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ (1-\mu)\cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \mu\cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ (1-\mu)\cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \mu\cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^a(t) \\ i_s^a(t) - i_f(t) \\ i_s^b(t) \\ i_s^c(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (78)$$

Portanto, as Equações (75)-(78) estabelecem a modelagem do motor de indução trifásico com falha de curto-circuito na fase a , em referencial estacionário abc . Todavia, devido às não-linearidades e à inserção das componentes de curto-circuito, a análise deste modelo, pela técnica de filtragem previamente apresentada, torna-se inviável. Desta forma, Tallam, Habetler e Harley (2002) expõem a metodologia de separar o conjunto em duas componentes: uma nominal, que pode ser tratada pelos métodos clássicos de análise, e outra de curto-circuito, a ser desenvolvida separadamente. Sabe-se da Figura 2 que:

$$v_s^a(t) = v_s^{a1}(t) + v_s^{a2}(t), \quad (79)$$

logo, a Equação (75) torna-se:

$$\begin{bmatrix} v_s^a(t) \\ v_s^b(t) \\ v_s^c(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_s} \begin{bmatrix} i_s^a(t) \\ i_s^b(t) \\ i_s^c(t) \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_s^a(t) \\ \lambda_s^b(t) \\ \lambda_s^c(t) \end{bmatrix} - \mu \underbrace{\begin{bmatrix} r_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_{sf}} i_f(t). \quad (80)$$

Nesta abordagem, a equação das tensões do rotor permanece inalterada. Considerando $L_{sm} = -\frac{L_{ss}}{2}$ (ONG, 1998), os fluxos de acoplamento do estator e rotor se tornam, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \lambda_s^a(t) \\ \lambda_s^b(t) \\ \lambda_s^c(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ss} & L_{sm} & L_{sm} \\ L_{sm} & L_{ls} + L_{ss} & L_{sm} \\ L_{sm} & L_{sm} & L_{ls} + L_{ss} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_{ss}^{abc}} \begin{bmatrix} i_s^a(t) \\ i_s^b(t) \\ i_s^c(t) \end{bmatrix} - \mu \underbrace{\begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ss} \\ L_{sm} \\ L_{sm} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_{sf}^{abc}} i_f(t) + \\
&\underbrace{L_{sr} \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_{sr}^{abc}} \begin{bmatrix} i_r^a(t) \\ i_r^b(t) \\ i_r^c(t) \end{bmatrix}, \tag{81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \lambda_r^a(t) \\ \lambda_r^b(t) \\ \lambda_r^c(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} L_{lr} + L_{rr} & L_{rm} & L_{rm} \\ L_{rm} & L_{lr} + L_{rr} & L_{rm} \\ L_{rm} & L_{rm} & L_{lr} + L_{rr} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_{rr}^{abc}} \begin{bmatrix} i_r^a(t) \\ i_r^b(t) \\ i_r^c(t) \end{bmatrix} - \mu \underbrace{L_{sr} \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_{rf}^{abc}} i_f(t) + \\
&\underbrace{L_{sr} \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_{rs}^{abc}} \begin{bmatrix} i_s^a(t) \\ i_s^b(t) \\ i_s^c(t) \end{bmatrix}, \tag{82}
\end{aligned}$$

em que \mathbf{r}_s , \mathbf{r}_r , \mathbf{L}_{ss}^{abc} , \mathbf{L}_{sr}^{abc} , \mathbf{L}_{rr}^{abc} e \mathbf{L}_{rs}^{abc} são as matrizes de impedância nominais, e \mathbf{r}_{sf} , \mathbf{L}_{sf} e \mathbf{L}_{rf} as matrizes da impedância de curto-circuito. Reescrevendo os seguintes termos de forma vetorial:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_s^{abc}(t) &= \begin{bmatrix} v_s^a(t) & v_s^b(t) & v_s^c(t) \end{bmatrix}^T, \\
\mathbf{v}_r^{abc}(t) &= \begin{bmatrix} v_r^a(t) & v_r^b(t) & v_r^c(t) \end{bmatrix}^T, \\
\mathbf{i}_s^{abc}(t) &= \begin{bmatrix} i_s^a(t) & i_s^b(t) & i_s^c(t) \end{bmatrix}^T, \\
\mathbf{i}_r^{abc}(t) &= \begin{bmatrix} i_r^a(t) & i_r^b(t) & i_r^c(t) \end{bmatrix}^T, \\
\boldsymbol{\lambda}_s^{abc}(t) &= \begin{bmatrix} \lambda_s^a(t) & \lambda_s^b(t) & \lambda_s^c(t) \end{bmatrix}^T, \\
\boldsymbol{\lambda}_r^{abc}(t) &= \begin{bmatrix} \lambda_r^a(t) & \lambda_r^b(t) & \lambda_r^c(t) \end{bmatrix}^T. \tag{83}
\end{aligned}$$

Obtém-se, portanto, o conjunto de equações vetoriais que descrevem o comportamento do sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r^{abc}(t) &= \mathbf{r}_r \mathbf{i}_r^{abc}(t) + \frac{d\boldsymbol{\lambda}_r^{abc}(t)}{dt}, \\ \mathbf{v}_s^{abc}(t) &= \underbrace{\mathbf{r}_s \mathbf{i}_s^{abc}(t) + \frac{d\boldsymbol{\lambda}_s^{abc}(t)}{dt}}_{(i)} - \underbrace{\mu \mathbf{r}_{sf} i_f(t)}_{(ii)}, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_s^{abc}(t) &= \mathbf{L}_{ss}^{abc} \mathbf{i}_s^{abc}(t) + \mathbf{L}_{sr}^{abc} \mathbf{i}_r^{abc}(t) - \mu \mathbf{L}_{sf}^{abc} i_f(t), \\ \boldsymbol{\lambda}_r^{abc}(t) &= \underbrace{\mathbf{L}_{rs}^{abc} \mathbf{i}_s^{abc}(t) + \mathbf{L}_{rr}^{abc} \mathbf{i}_r^{abc}(t)}_{(i)} - \underbrace{\mu \mathbf{L}_{rf}^{abc} i_f(t)}_{(ii)}. \end{aligned} \quad (85)$$

Assim, as Equações (84) e (85) possuem duas componentes: (i) nominal, determinada pela dinâmica das componentes abc ; e (ii) curto-circuito, que possui dinâmica determinada pela corrente de curto-circuito $i_f(t)$. A primeira componente — nominal — possui a mesma dinâmica do motor de indução simétrico. Logo, pode-se utilizar as ferramentas de análise já desenvolvidas na literatura para este modelo. A segunda componente — curto-circuito — será tratada de modo particular.

Por sua vez, a equação que representa o torque eletromagnético exercido pelo motor, pode ser obtida por meio das expressões contendo a componente de curto-circuito. Sendo P o número de polos do MIT, o torque eletromagnético T_m para o modelo assimétrico é dado por:

$$T_m = \frac{P}{2} \begin{bmatrix} i_s^a(t) \\ i_s^a(t) - i_f(t) \\ i_s^b(t) \\ i_s^c(t) \end{bmatrix}^T L_{sr} \left(\frac{d}{d\theta_r} \begin{bmatrix} (1-\mu) \cos(\theta_r) & (1-\mu) \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & (1-\mu) \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \mu \cos(\theta_r) & \mu \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \mu \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_r^a(t) \\ i_r^b(t) \\ i_r^c(t) \end{bmatrix}. \quad (86)$$

Os termos da equação então podem ser reescritos, isolando a componente de curto-circuito:

$$\begin{aligned}
T_m = & \frac{P}{2} \begin{bmatrix} i_s^a(t) \\ i_s^b(t) \\ i_s^c(t) \end{bmatrix}^T L_{sr} \left(\frac{d}{d\theta_r} \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_r^a(t) \\ i_r^b(t) \\ i_r^c(t) \end{bmatrix} - \\
& i_f(t) \frac{\mu P}{2} L_{sr} \left(\frac{d}{d\theta_r} \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_r^a(t) \\ i_r^b(t) \\ i_r^c(t) \end{bmatrix}. \quad (87)
\end{aligned}$$

Desenvolvendo a expressão e utilizando a notação matricial apresentada em (83), tem-se então a expressão do torque eletromagnético em referencial abc , apresentada na Equação (88). De forma semelhante as demais equações dinâmicas apresentadas, o torque eletromagnético também possui duas componentes, a primeira, (i) nominal, que apresenta o mesmo comportamento do modelo simétrico, e uma segunda componente (ii), que surge devido ao curto-circuito.

$$\begin{aligned}
T_m = & \underbrace{\frac{P}{2} (\mathbf{i}_s^{abc}(t))^T \frac{d\mathbf{L}_{sr}^{abc}}{d\theta_r} \mathbf{i}_r^{abc}(t)}_{(i)} + \\
& \underbrace{\frac{\mu L_{sr} P}{2} i_f(t) \left(i_r^a(t) \sin(\theta_r) + i_r^b(t) \sin\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) + i_r^c(t) \sin\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \right)}_{(ii)}. \quad (88)
\end{aligned}$$

3.2 TRANSFORMAÇÃO $qd0$

A transformação $qd0$ (PARK, 1929) permite alterar o referencial de coordenadas estacionárias abc para um eixo de referência rotativa, chamado de $qd0$. Desta forma, indutâncias que possuem dependência em $\theta_r(t)$ podem ser reescritas, simplificando o sistema de equações resultante. Baccarini, Menezes e Caminhas (2010) desenvolvem esta conversão, aplicada ao modelo de falha de curto-circuito exposto pelas Equações (84) e (85), sendo a conversão realizada em duas etapas: primeiramente, para as componentes nominais e, em seguida, para a componente de curto-circuito. A metodologia descrita será exposta nesta seção.

Considere um eixo referencial rotacionando com velocidade ω , tal que:

$$\omega = \frac{d\theta_e}{dt}, \quad (89)$$

sendo θ_e a posição angular instantânea do eixo referencial. As transformações de referencial abc para $qd0$, e a respectiva transformação inversa, podem ser obtidas por meio das Equações (90) e (91) (ONG, 1998):

$$\begin{bmatrix} f_q(t) \\ f_d(t) \\ f_0(t) \end{bmatrix} = T_{qd0}(\theta_e) \begin{bmatrix} f_a(t) \\ f_b(t) \\ f_c(t) \end{bmatrix}, \quad (90)$$

e

$$\begin{bmatrix} f_a(t) \\ f_b(t) \\ f_c(t) \end{bmatrix} = T_{qd0}^{-1}(\theta_e) \begin{bmatrix} f_q(t) \\ f_d(t) \\ f_0(t) \end{bmatrix}, \quad (91)$$

sendo as matrizes de transformação:

$$T_{qd0}(\theta_e) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{sen}(\theta_e) & \text{sen}\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (92)$$

$$T_{qd0}^{-1}(\theta_e) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) & \text{sen}(\theta_e) & 1 \\ \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Define-se os novos vetores de tensão, corrente e fluxo com referencial $qd0$, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s^{qd0}(t) &= [v_s^q(t) \quad v_s^d(t) \quad v_s^0(t)]^T, \\ \mathbf{v}_r^{qd0}(t) &= [v_r^q(t) \quad v_r^d(t) \quad v_r^0(t)]^T, \\ \mathbf{i}_s^{qd0}(t) &= [i_s^q(t) \quad i_s^d(t) \quad i_s^0(t)]^T, \\ \mathbf{i}_r^{qd0}(t) &= [i_r^q(t) \quad i_r^d(t) \quad i_r^0(t)]^T, \\ \boldsymbol{\lambda}_s^{qd0}(t) &= [\lambda_s^q(t) \quad \lambda_s^d(t) \quad \lambda_s^0(t)]^T, \\ \boldsymbol{\lambda}_r^{qd0}(t) &= [\lambda_r^q(t) \quad \lambda_r^d(t) \quad \lambda_r^0(t)]^T. \end{aligned} \quad (94)$$

Aplicando a transformação $qd0$ nas componentes de estator e rotor, apresentadas na Equação (84), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s^{qd0}(t) &= T_{qd0}(\theta_e) \mathbf{v}_{abc}^s(t), \\ &= T_{qd0}(\theta_e) \mathbf{r}_s \mathbf{i}_s^{abc}(t) + T_{qd0}(\theta_e) \frac{d\boldsymbol{\lambda}_s^{abc}(t)}{dt} - T_{qd0}(\theta_e) \boldsymbol{\mu} \mathbf{r}_{sf} i_f(t), \end{aligned} \quad (95)$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_r^{qd0}(t) &= T_{qd0}(\theta_e - \theta_r)\mathbf{v}_{abc}^r(t), \\ &= T_{qd0}(\theta_e - \theta_r)\mathbf{r}_r\mathbf{i}_r^{abc}(t) + T_{qd0}(\theta_e - \theta_r)\frac{d\boldsymbol{\lambda}_r^{abc}(t)}{dt}.\end{aligned}\quad (96)$$

As correntes em referencial abc , $\mathbf{i}_s^{abc}(t)$ e $\mathbf{i}_s^{abc}(t)$, podem ser reescritas no novo referencial $qd0$ como:

$$\mathbf{i}_s^{abc}(t) = T_{qd0}^{-1}(\theta_e)\mathbf{i}_s^{qd0}(t), \quad (97)$$

e

$$\mathbf{i}_r^{abc}(t) = T_{qd0}^{-1}(\theta_e - \theta_r)\mathbf{i}_r^{qd0}(t). \quad (98)$$

Portanto, aplicando a substituição das Equações (97) e (98) em, respectivamente, (95) e (96):

$$\mathbf{v}_s^{qd0}(t) = \underbrace{T_{qd0}(\theta_e)\mathbf{r}_s T_{qd0}^{-1}(\theta_e)\mathbf{i}_s^{qd0}(t)}_{(i)} + \underbrace{T_{qd0}(\theta_e)\frac{d T_{qd0}^{-1}(\theta_e)\boldsymbol{\lambda}_s^{qd0}(t)}{dt}}_{(ii)} - \underbrace{T_{qd0}(\theta_e)\mu\mathbf{r}_{sf}i_f(t)}_{(ii)}, \quad (99)$$

$$\mathbf{v}_r^{qd0}(t) = T_{qd0}(\theta_e - \theta_r)\mathbf{r}_r T_{qd0}^{-1}(\theta_e - \theta_r)\mathbf{i}_r^{qd0}(t) + T_{qd0}(\theta_e - \theta_r)\frac{d T_{qd0}^{-1}(\theta_e - \theta_r)\boldsymbol{\lambda}_r^{qd0}(t)}{dt}. \quad (100)$$

A Equação (99) resulta novamente em duas componentes, (i) nominal e (ii) curto-circuito. Sua componente nominal, bem como a Equação (100), possuem componentes simétricas e sua transformação é idêntica a um motor simétrico sem a presença de falhas, a qual é apresentada em Ong (1998). Por sua vez, a componente de curto-circuito será desenvolvida a seguir, dada por:

$$\begin{aligned}T_{qd0}(\theta_e)\mu\mathbf{r}_{sf}i_f(t) &= \mu\frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos(\theta_e) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{sen}(\theta_e) & \text{sen}\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}i_f(t), \\ &= \mu\frac{2}{3}r_s\begin{bmatrix} \cos(\theta_e) \\ \text{sen}(\theta_e) \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}i_f(t).\end{aligned}\quad (101)$$

Desta forma, a representação em coordenadas $qd0$ para as equações do estator e do rotor, diante da falha de curto-circuito de espiras, são dadas pelas Equações (102) e (103):

$$\begin{bmatrix} v_s^q(t) \\ v_s^d(t) \\ v_s^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_s^q(t) \\ \lambda_s^d(t) \\ \lambda_s^0(t) \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_s^q(t) \\ \lambda_s^d(t) \\ \lambda_s^0(t) \end{bmatrix} - \mu \frac{2}{3} r_s \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) \\ \text{sen}(\theta_e) \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} i_f(t), \quad (102)$$

$$\begin{bmatrix} v_r^q(t) \\ v_r^d(t) \\ v_r^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_r & 0 & 0 \\ 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_r^q(t) \\ i_r^d(t) \\ i_r^0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega - \omega_r & 0 \\ -\omega + \omega_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ \lambda_r^0(t) \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ \lambda_r^0(t) \end{bmatrix}. \quad (103)$$

A transformação de referencial deve ser aplicada, também, à Equação (85), que corresponde ao fluxo de acoplamento do motor. Baccarini, Menezes e Caminhas (2010) desenvolvem a transformação aplicada nestas componentes, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lambda_s^{qd0}(t) &= T_{qd0}(\theta_e) \lambda_s^{abc}(t) \\ &= T_{qd0}(\theta_e) \mathbf{L}_{ss}^{abc} \mathbf{i}_s^{abc}(t) + T_{qd0}(\theta_e) \mathbf{L}_{sr}^{abc} \mathbf{i}_r^{abc}(t) - T_{qd0}(\theta_e) \mu \mathbf{L}_{sf} i_f(t). \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \lambda_r^{qd0}(t) &= T_{qd0}(\theta_e - \theta_r) \lambda_r^{abc}(t) \\ &= T_{qd0}(\theta_e - \theta_r) \mathbf{L}_{rr}^{abc} \mathbf{i}_r^{abc}(t) + T_{qd0}(\theta_e - \theta_r) \mathbf{L}_{sr}^{abc} \mathbf{i}_s^{abc}(t) - T_{qd0}(\theta_e - \theta_r) \mu \mathbf{L}_{rf} i_f(t). \end{aligned} \quad (105)$$

Substituindo as correntes abc , representadas nas Equações (97) e (98):

$$\begin{aligned} \lambda_s^{qd0}(t) &= \underbrace{T_{qd0}(\theta_e) \mathbf{L}_{ss}^{abc} T_{qd0}^{-1}(\theta_e) \mathbf{i}_s^{qd0}(t) + T_{qd0}(\theta_e) \mathbf{L}_{sr}^{abc} T_{qd0}^{-1}(\theta_e - \theta_r) \mathbf{i}_r^{qd0}(t)}_{(i)} \\ &\quad - \underbrace{T_{qd0}(\theta_e) \mu \mathbf{L}_{sf} i_f(t)}_{(ii)}, \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \lambda_r^{qd0}(t) &= \underbrace{T_{qd0}(\theta_e - \theta_r) \mathbf{L}_{rr}^{abc} T_{qd0}^{-1}(\theta_e - \theta_r) \mathbf{i}_r^{qd0}(t) + T_{qd0}(\theta_e - \theta_r) \mathbf{L}_{sr}^{abc} T_{qd0}^{-1}(\theta_e) \mathbf{i}_s^{qd0}(t)}_{(i)} \\ &\quad - \underbrace{T_{qd0}(\theta_e - \theta_r) \mu \mathbf{L}_{rf} i_f(t)}_{(ii)}. \end{aligned} \quad (107)$$

Assim, como no equacionamento para as tensões, os fluxos de acoplamento também possuem duas componentes, (i) nominal e (ii) curto-circuito. Resolvendo as componentes de curto-circuito, e sabendo que:

$$L_m = \frac{3}{2}L_{ss} = \frac{3}{2}L_{sr}, \quad (108)$$

$$L_s = L_{ls} + L_m.$$

tem-se:

$$T_{qd0}(\theta_e)\mu\mathbf{L}_{sf} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) & \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{sen}(\theta_e) & \text{sen}\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mu \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ss} \\ L_{sm} \\ L_{sm} \end{bmatrix},$$

$$= \mu \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_e)(L_{ls} + L_{ss}) + \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right)L_{sm} + \cos\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right)L_{sm} \\ \text{sen}(\theta_e)(L_{ls} + L_{ss}) + \text{sen}\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right)L_{sm} + \text{sen}\left(\theta_e + \frac{2\pi}{3}\right)L_{sm} \\ \frac{1}{2}(L_{ls} + L_{ss}) + \frac{1}{2}L_{sm} + \frac{1}{2}L_{sm} \end{bmatrix},$$

$$= \mu \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_e)L_s \\ \text{sen}(\theta_e)L_s \\ \frac{L_{ls}}{2} \end{bmatrix}, \quad (109)$$

$$T_{qd0}(\theta_e - \theta_r)\mu\mathbf{L}_{rf} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_e - \theta_r) & \cos\left(\theta_e - \theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_e - \theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{sen}(\theta_e - \theta_r) & \text{sen}\left(\theta_e - \theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta_e - \theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mu L_{sr} \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix},$$

$$= \mu \frac{2}{3} L_{sr} \begin{bmatrix} \cos(\theta_e - \theta_r)\cos(\theta_r) + \cos\left(\theta_e - \theta_r - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta_e - \theta_r + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{sen}(\theta_e - \theta_r)\cos(\theta_r) + \text{sen}\left(\theta_e - \theta_r - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(\theta_e - \theta_r + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2}\cos(\theta_r) + \frac{1}{2}\cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix},$$

$$= \mu \frac{2}{3} L_m \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) \\ \text{sen}(\theta_e) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (110)$$

Combinando as transformações da componente simétrica (ONG, 1998), com a de curto-circuito desenvolvida em Baccarini, Menezes e Caminhas (2010), obtêm-se os fluxos de acoplamento em coordenadas $qd0$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_s^q(t) \\ \lambda_s^d(t) \\ \lambda_s^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_m & 0 & 0 \\ 0 & L_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_r^q(t) \\ i_r^d(t) \\ i_r^0(t) \end{bmatrix} - \mu \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) L_s \\ \sin(\theta_e) L_s \\ \frac{L_{ls}}{2} \end{bmatrix} i_f(t), \quad (111)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ \lambda_r^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_r & 0 & 0 \\ 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_r^q(t) \\ i_r^d(t) \\ i_r^0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_m & 0 & 0 \\ 0 & L_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \end{bmatrix} - \mu \frac{2}{3} L_m \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) \\ \sin(\theta_e) \\ 0 \end{bmatrix} i_f(t). \quad (112)$$

De forma similar, pode-se obter a expressão do torque eletromagnético T_m em referencial $qd0$, conversão a qual é realizada com base na Equação (88), na qual realiza-se a substituição das correntes em referencial abc por aquelas obtidas em (98). Considere o torque eletromagnético T_m , representado por duas componentes, (i) nominal e (ii) curto-circuito, sendo reescrito como $T_m = T_m^{(i)} + T_m^{(ii)}$, onde:

$$T_m^{(i)} = \frac{P}{2} \mathbf{i}_s^{abc}(t)^T \frac{\partial \mathbf{L}_{sr}^{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{i}_r^{abc}(t), \quad (113)$$

e

$$T_m^{(ii)} = \frac{\mu L_{sr} P}{2} i_f(t) \left(i_r^a(t) \sin(\theta_r) + i_r^b(t) \sin\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) + i_r^c(t) \sin\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \right). \quad (114)$$

O desenvolvimento detalhado da transformação da componente (i) nominal $T_m^{(i)}$ pode ser observada em Ong (1998), componente a qual é expressa em componentes $qd0$ como:

$$T_m^{(i)} = \frac{3L_m P}{4} \left(i_s^q(t) i_r^d(t) - i_s^d(t) i_r^q(t) \right). \quad (115)$$

Por sua vez, de acordo com Baccarini, Menezes e Caminhas (2010), substituindo as correntes da componente (ii) por aquelas expressas em (98), tem-se então a representação de $T_m^{(ii)}$ em componentes $qd0$:

$$\begin{aligned} T_m^{(ii)} = & \frac{\mu L_{sr} P}{2} i_f(t) \left(\sin(\theta_r) \left[\cos(\theta_e - \theta_r) i_r^q(t) + \sin(\theta_e - \theta_r) i_r^d(t) + i_r^0(t) \right] + \right. \\ & \sin\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \left[\cos\left(\theta_e - \theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) i_r^q(t) + \sin\left(\theta_e - \theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) i_r^d(t) + i_r^0(t) \right] + \\ & \left. \sin\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \left[\cos\left(\theta_e - \theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) i_r^q(t) + \sin\left(\theta_e - \theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) i_r^d(t) + i_r^0(t) \right] \right). \end{aligned} \quad (116)$$

Desenvolvendo a expressão, e realizando a substituição apresentada em (108), obtém-se:

$$T_m^{(ii)} = \frac{\mu L_m P}{2} i_f(t) \left(i_r^q(t) \sin(\theta_e) - i_r^d(t) \cos(\theta_e) \right). \quad (117)$$

Reagrupando as componentes (i) nominal e (ii) curto-circuito, obtém-se então a expressão do torque eletromagnético do modelo assimétrico do motor de indução trifásico:

$$T_m = \frac{3PL_m}{4} \left(i_s^q(t)i_r^d(t) - i_s^d(t)i_r^q(t) \right) + \frac{\mu PL_m i_f(t)}{2} \left(i_r^q(t) \sin(\theta_e) - i_r^d(t) \cos(\theta_e) \right). \quad (118)$$

O conjunto representado pelas Equações (102) e (103), combinadas com as Equações (111), (112) e (118), representam a dinâmica em coordenadas $qd0$ do motor de indução sob falha de curto-circuito, considerando um fator de severidade de curto μ . Neste modelo, a determinação do ângulo referencial da coordenada $qd0$, dado por θ_e , e da velocidade ω , pode ser feito de tal modo a adequar-se à respectiva aplicação ou técnica a ser desenvolvida.

3.3 REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS

A representação em espaço de estados, forma de representação que agrupa equações diferenciais de 1ª ordem, permite o estudo e desenvolvimento de diversos métodos de controle moderno e filtragem (OGATA, 2010). Neste contexto, modelos simétricos de motores de indução em espaço de estados são encontrados na literatura, como em Krishnan (2001). Contudo, modelos assimétricos, que representam falhas e desequilíbrios em MITs, possuem dinâmica composta por não-linearidades, sendo assim, abordagens em espaço de estados não são comumente apresentadas. Nesta seção, apresenta-se como contribuição o desenvolvimento de um modelo em espaço de estados para a representação da falha de curto-circuito.

Uma representação em espaço de estados de um MIT é desenvolvida, considerando como estados do sistema as correntes estatóricas, $i_s^q(t)$, $i_s^d(t)$ e $i_s^0(t)$, bem como os fluxos do rotor, $\lambda_r^q(t)$ e $\lambda_r^d(t)$. Aqui, os equacionamentos serão realizados considerando o referencial $qd0$ com $\theta_e(t) = 0$ e $\omega(t) = 0$. Esta consideração se faz necessária para a simplificação e eliminação de termos não lineares do modelo, viabilizando a representação em espaço de estados. No mais, o desenvolvimento do estimador paramétrico apresentado na Seção 2.3 considera que a variável $\Phi(t)$ seja persistentemente excitável. Logo, um referencial rotativo com $\theta_e(t) = \theta_r(t)$ não satisfaria esta condição, pois as tensões $qd0$ teriam comportamento contínuo.

3.3.1 EQUAÇÕES DE ESTADO

Primeiramente, será detalhado o processo de obtenção das equações diferenciais referentes a dinâmica do fluxo magnético do rotor, em eixo de quadratura e direto, os quais serão definidos respectivamente como 1º e 2º estados. De acordo com a Equação (103), a tensão de eixo direto do rotor $v_r^d(t)$ é dada por:

$$v_r^d(t) = \lambda_r^q(t)\omega_r(t) + i_r^d(t)r_r + \frac{d\lambda_r^d(t)}{dt}. \quad (119)$$

A corrente de eixo direto do rotor pode ser obtida isolando $i_r^d(t)$ na Equação (112), a qual pode ser substituída na Equação (119):

$$v_r^d(t) = \lambda_r^q(t)\omega_r(t) + \left(\lambda_r^d(t)\frac{1}{L_r} - i_s^d(t)\frac{L_m}{L_r} \right) r_r + \frac{d\lambda_r^d(t)}{dt}. \quad (120)$$

Portanto, isolando o termo derivativo na Equação (120) e fazendo² $v_r^d(t) = 0$, obtém-se a primeira equação de estado :

$$\frac{d\lambda_r^d(t)}{dt} = i_s^d(t) \left[\frac{r_r L_m}{L_r} \right] + \lambda_r^q(t) \left[-\omega_r(t) \right] + \lambda_r^d(t) \left[\frac{-r_r}{L_r} \right]. \quad (121)$$

Por sua vez, a expressão de $v_r^q(t)$ é exposta na Equação (103), sendo:

$$v_r^q(t) = -\omega_r(t)\lambda_r^d(t) + i_r^q(t)r_r + \frac{d\lambda_r^q(t)}{dt}. \quad (122)$$

Para obter a dinâmica da corrente $i_r^q(t)$, pode-se isolá-la na Equação (112):

$$i_r^q(t) = \lambda_r^q(t)\frac{1}{L_r} - i_s^q(t)\frac{L_m}{L_r} + i_f(t)\frac{2\mu L_m}{3L_r}. \quad (123)$$

Aplicando a Equação (123) na Equação (122), isolando o termo derivativo e desenvolvendo a expressão, pode-se visualizar que:

$$\frac{d\lambda_r^q(t)}{dt} = i_s^q(t) \left[\frac{r_r L_m}{L_r} \right] + \lambda_r^q(t) \left[\frac{-r_r}{L_r} \right] + \lambda_r^d(t) \left[\omega_r(t) \right] + i_f(t) \left[\frac{-2\mu r_r L_m}{3L_r} \right]. \quad (124)$$

Logo, obtêm-se as Equações (121) e (124) que são, respectivamente, as expressões que determinam a dinâmica do fluxo do rotor em eixo direto e de quadratura. Em seguida,

² Consideração válida para o MIT com rotor tipo gaiola de esquilo.

desenvolve-se as equações referentes às correntes estatóricas de eixo de quadratura, direto e zero, que serão definidas então como o 3º, 4º e 5º estado, respectivamente. A tensão $v_s^d(t)$, disponível na Equação (102), é:

$$v_s^d(t) = i_s^d(t)r_s + \frac{d\lambda_s^d(t)}{dt}. \quad (125)$$

Para o equacionamento, uma substituição de variáveis se faz necessária. Explicitando o fluxo $\lambda_s^d(t)$ na Equação (111), e a corrente $i_r^d(t)$ na Equação (112):

$$\lambda_s^d(t) = i_s^d(t)L_s + i_r^d(t)L_m, \quad (126)$$

$$i_r^d(t) = \frac{\lambda_r^d(t)}{L_r} - i_s^d(t)\frac{L_m}{L_r}. \quad (127)$$

Pode-se substituí-las na Equação (125), resultando em:

$$v_s^d(t) = i_s^d(t)r_s + \frac{di_s^d(t)}{dt} \left[\frac{L_s L_r - L_m^2}{L_r} \right] + \frac{L_m}{L_r} \frac{d\lambda_r^d(t)}{dt}. \quad (128)$$

A Equação (128) pode ser resolvida substituindo o termo derivativo de $\lambda_r^d(t)$ pela Equação (121) já obtida. Definindo uma nova variável, $\sigma = L_s L_r - L_m^2$, isolando a componente diferencial e desenvolvendo as devidas manipulações matemáticas, tem-se a expressão que determina a dinâmica da corrente de eixo direto do estator:

$$\frac{di_s^d(t)}{dt} = i_s^d(t) \left[\frac{-r_s L_r^2 - r_r L_m^2}{L_r \sigma} \right] + \lambda_r^d(t) \left[\frac{\omega_r(t) L_m}{\sigma} \right] + \lambda_r^d(t) \left[\frac{r_r L_m}{L_r \sigma} \right] + v_s^d(t) \left[\frac{L_r}{\sigma} \right]. \quad (129)$$

De forma similar ao procedimento anterior, utilizando a Equação (102), a tensão $v_s^q(t)$ pode ser dada por:

$$v_s^q(t) = i_s^q(t)r_s + \frac{d\lambda_s^q(t)}{dt} - i_f(t)\frac{2\mu r_s}{3}. \quad (130)$$

Expressando a corrente $i_r^q(t)$ na Equação (112), e o fluxo $\lambda_s^q(t)$ na Equação (111):

$$i_r^q(t) = \frac{\lambda_r^q(t)}{L_r} - i_s^q(t)\frac{L_m}{L_r} + i_f(t)\frac{2\mu L_m}{3L_r}, \quad (131)$$

$$\lambda_s^q(t) = i_s^q(t)L_s + i_r^q(t)L_m - i_f(t)\mu\frac{2L_s}{3}. \quad (132)$$

Logo, combinando as Equações (131) e (132), e substituindo-as na Equação (130):

$$v_s^q(t) = i_s^q(t)r_s + \frac{di_s^q(t)}{dt} \left[\frac{\sigma}{L_r} \right] + \frac{d\lambda_r^q(t)}{dt} \left[\frac{L_m}{L_r} \right] - \frac{di_f(t)}{dt} \left[\mu\frac{2\sigma}{3L_r} \right] - i_f(t) \left[\mu\frac{2r_s}{3} \right]. \quad (133)$$

Substituindo o termo derivativo de $\lambda_r^q(t)$ pelo obtido na Equação (124), isolando o termo derivativo de $i_s^q(t)$ e, desenvolvendo as expressões matemáticas, concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{di_s^q(t)}{dt} = & i_s^q(t) \left[\frac{-r_s L_r^2 - r_r L_m^2}{L_r \sigma} \right] + \lambda_r^q(t) \left[\frac{r_r L_m}{L_r \sigma} \right] + \lambda_r^d(t) \left[\frac{-\omega_r(t) L_m}{\sigma} \right] + v_s^q(t) \left[\frac{L_r}{\sigma} \right] + \\ & i_f(t) \left[\frac{2\mu(r_s L_r^2 + r_r L_m^2)}{3L_r \sigma} \right] + \frac{di_f(t)}{dt} \left[\frac{2\mu}{3} \right]. \end{aligned} \quad (134)$$

Por fim, a tensão $v_s^0(t)$ e seu fluxo concatenado, $\lambda_s^0(t)$ são dados, respectivamente, por:

$$v_s^0(t) = i_s^0(t)r_s - i_f(t)\frac{\mu r_s}{3} + \frac{d\lambda_s^0(t)}{dt}, \quad (135)$$

$$\lambda_s^0(t) = L_{ls}i_s^0(t) - i_f(t)\frac{\mu L_{ls}}{3}. \quad (136)$$

Substituindo a Equação (136) em (135), e efetuando as devidas manipulações matemáticas, desenvolve-se a dinâmica da corrente $i_s^0(t)$:

$$\frac{di_s^0(t)}{dt} = i_s^0(t) \left[\frac{-r_s}{L_{ls}} \right] + v_s^0(t) \left[\frac{1}{L_{ls}} \right] + \frac{di_f(t)}{dt} \left[\frac{\mu}{3} \right] + i_f(t) \left[\frac{\mu r_s}{3L_{ls}} \right]. \quad (137)$$

Conclui-se, portanto, que as Equações (129), (134) e (137) permitem expressar a dinâmica das correntes estatóricas, compondo então o 3º, 4º e 5º estado da representação.

A equação que rege o comportamento mecânico do MIT pode ser obtida considerando que o torque eletromagnético deve suprir o torque de carga T_c , bem como o

torque inercial e de atrito, então a expressão que representa a dinâmica de um motor com coeficiente inercial J e coeficiente de atrito B_c é dada por:

$$T_m = T_c + J \frac{d\omega_r}{dt} + B_c \omega_r. \quad (138)$$

Isolando o termo diferencial, substituindo T_m por aquele apresentado na Equação (118), e aplicando a substituição apresentada na Equação (127), então:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{3L_m P}{4L_r J} [\lambda_r^d(t) i_s^q(t) - \lambda_r^q(t) i_s^d(t)] - \frac{\mu L_m P}{2L_r J} \lambda_r^d(t) i_f(t) + \frac{\mu L_m^2 P}{2L_r J} i_s^d(t) i_f(t) - \frac{B_c}{J} \omega_r(t) - \frac{T_c}{J}. \quad (139)$$

Combinadas as expressões desenvolvidas para as correntes estatóricas, fluxos do rotor, bem como a equação mecânica dada em (139), pode-se agrupá-las na representação de espaço de estados, o qual resulta no sistema exposto na Equação (140):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_r}{L_r} & \omega_r(t) & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_r(t) & -\frac{r_r}{L_r} & 0 & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 & 0 \\ \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & \frac{-\omega_r(t) L_m}{\sigma} & \frac{-r_s L_r^2 - r_r L_m^2}{L_r \sigma} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega_r(t) L_m}{\sigma} & \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & 0 & \frac{-r_s L_r^2 - r_r L_m^2}{L_r \sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-r_s}{L_{ls}} & 0 \\ \frac{-3L_m P i_s^d(t)}{4L_r J} & \frac{3L_m P i_s^q(t)}{4L_r J} & 0 & 0 & 0 & \frac{-B_c}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_r}{\sigma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_r}{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s^q(t) \\ v_s^d(t) \\ v_s^0(t) \\ T_c(t) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -\frac{2L_m r_r}{3L_r} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2(r_r L_m^2 + r_s L_r^2)}{3L_r \sigma} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \\ \frac{r_s}{3L_{ls}} & \frac{1}{3} \\ \frac{-L_m P \lambda_r^d(t)}{2L_r J} + \frac{L_m^2 P i_s^d(t)}{2L_r J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f(t) \\ \frac{di_f(t)}{dt} \end{bmatrix}. \quad (140)$$

Neste sistema, o sistema em espaço de estados possui dinâmica não-linear, devido ao produto de estados observados na matriz. Contudo, considerando que tais variáveis são acessíveis, pode-se utilizar uma abordagem LPV e considerá-las como parâmetros variantes.

Desta forma, o modelo do motor de indução com falha de curto-circuito, não linear, torna-se linear com parâmetros variantes no tempo. O procedimento para a representação LPV será apresentado em detalhes no capítulo seguinte.

Considerando $\mu = 0$, situação sem falha, o sistema resume-se ao modelo simétrico nominal do motor de indução. Este modelo, exposto pela Equação (141), coincide com os modelos já conhecidos na literatura (KRISHNAN, 2001), podendo seu estado $i_s^0(t)$ ser suprimido sem prejuízo à notação:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_r}{L_r} & \omega_r(t) & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 & 0 \\ -\omega_r(t) & -\frac{r_r}{L_r} & 0 & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 \\ \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & \frac{-\omega_r(t) L_m}{\sigma} & \frac{-r_s L_r^2 - r_r L_m^2}{L_r \sigma} & 0 & 0 \\ \frac{\omega_r(t) L_m}{\sigma} & \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & 0 & \frac{-r_s L_r^2 - r_r L_m^2}{L_r \sigma} & 0 \\ \frac{-3L_m P i_s^d(t)}{4L_r J} & \frac{3L_m P i_s^q(t)}{4L_r J} & 0 & 0 & \frac{-B_c}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_r}{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_r}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s^q(t) \\ v_s^d(t) \\ T_c(t) \end{bmatrix} \quad (141)$$

3.3.2 DINÂMICA DE CURTO-CIRCUITO $i_f(t)$

Nesta etapa, procura-se modelar a dinâmica da corrente de curto-circuito na forma de uma equação diferencial linear de primeira ordem, com o objetivo de acoplá-la à dinâmica em espaço de estados do motor de indução, desenvolvida na seção anterior. A expressão de $v_s^{a2}(t)$, exposta na Equação (75), é:

$$v_s^{a2}(t) = \mu r_s (i_s^a(t) - i_f(t)) + \frac{d\lambda_s^{a2}(t)}{dt}. \quad (142)$$

Contudo, por meio da análise do circuito elétrico da Figura 2, também é possível concluir que:

$$v_s^{a2}(t) = r_f i_f(t). \quad (143)$$

A fim de adequar a expressão aos estados e variáveis já utilizadas na representação em espaço de estados da Equação (141), bem como simplificar o sistema, pode-se realizar uma substituição de referencial em (142). Como citado nas Equações (97) e (98), as correntes em referencial abc podem ser reescritas em referências $qd0$. Considerando as mesmas condições para o referencial desenvolvido anteriormente, isto é, $\omega = 0$ e $\theta_e = 0$, efetua-se a substituição de referencial das correntes na Equação (142):

$$v_s^{a2}(t) = \mu r_s \left(i_s^q(t) + i_s^0(t) - i_f(t) \right) + \frac{d\lambda_s^{a2}(t)}{dt}. \quad (144)$$

Por sua vez, o fluxo de acoplamento, $\lambda_s^{a2}(t)$, apresentado na Equação (77), é:

$$\lambda_s^{a2}(t) = \begin{bmatrix} L_{ss}\mu(1-\mu) & L_{ss}\mu^2 + L_{ls}\mu & L_{sm}\mu & L_{sm}\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s^a(t) \\ i_s^a(t) - i_f(t) \\ i_s^b(t) \\ i_s^c(t) \end{bmatrix} + \mu L_{sr} \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_r^a(t) \\ i_r^b(t) \\ i_r^c(t) \end{bmatrix}. \quad (145)$$

Realizando a multiplicação dos vetores e agrupando as variáveis:

$$\lambda_s^{a2}(t) = i_s^a(t) [L_{ls}\mu + L_{ss}\mu] + i_f(t) [-L_{ls}\mu - L_{ss}\mu^2] + \mu L_{sm} [i_s^b(t) + i_s^c(t)] + \mu L_{sr} \left[i_r^a(t) \cos(\theta_r) + i_r^b(t) \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) + i_r^c(t) \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \right]. \quad (146)$$

Do mesmo modo, substituindo as correntes da Equação (146) em coordenadas abc por aquelas em coordenadas $qd0$, a Equação (146) torna-se:

$$\begin{aligned} \lambda_s^{a2}(t) = & (i_s^q(t) + i_s^0(t)) [L_{ls}\mu + L_{ss}\mu] + i_f(t) [-L_{ls}\mu - L_{ss}\mu^2] + \mu L_{sm} [-i_s^q(t) + 2i_s^0(t)] + \\ & \mu L_{sr} \cos(\theta_r) \left[\cos(\theta_r) i_r^q(t) - \sin(\theta_r) i_r^d(t) + i_r^0(t) \right] + \\ & \mu L_{sr} \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \left[\cos\left(-\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) i_r^q(t) + \sin\left(-\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) i_r^d(t) + i_r^0(t) \right] + \\ & \mu L_{sr} \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \left[\cos\left(-\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) i_r^q(t) + \sin\left(-\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) i_r^d(t) + i_r^0(t) \right]. \end{aligned} \quad (147)$$

Efetuando as simplificações trigonométricas e desenvolvendo os termos da expressão em (147), obtém-se a equação do fluxo $\lambda_s^{a2}(t)$:

$$\lambda_s^{a2}(t) = \mu L_s i_s^q(t) + \mu L_{ls} i_s^0(t) - \mu L_m i_r^q(t) + i_f(t) \left[\mu L_{ls} + \frac{2\mu^2 L_m}{3} \right]. \quad (148)$$

A dinâmica da corrente de curto-circuito $i_f(t)$ pode ser obtida combinando as Equações (142), (143) e (148), as quais determinam a tensão no ramo de curto-circuito e seu respectivo fluxo de acoplamento. Dessa maneira:

$$v_s^{a2}(t) = \mu \left(r_s (i_s^q(t) + i_s^0(t) - i_f(t)) + \frac{di_s^q(t)}{dt} L_s + \frac{di_r^q(t)}{dt} L_m + \frac{di_s^0(t)}{dt} L_{ls} - \frac{di_f(t)}{dt} \left[L_{ls} + \frac{2\mu L_m}{3} \right] \right). \quad (149)$$

A fim de adequar os termos da expressão aos estados já apresentados nos desenvolvimentos anteriores, substitui-se então a corrente $i_r^q(t)$ pela exposta Equação (131):

$$v_s^{a2}(t) = \mu \left(r_s (i_s^q(t) + i_s^0(t) - i_f(t)) + \frac{di_f(t)}{dt} \left[\frac{2\mu L_m^2}{3L_r} - \left(L_{ls} + \frac{2\mu L_m}{3} \right) \right] + \frac{di_s^q(t)}{dt} \left[L_s - \frac{L_m^2}{L_r} \right] + \frac{di_s^0(t)}{dt} [L_{ls}] + \frac{d\lambda_r^q(t)}{dt} \left[\frac{L_m}{L_r} \right] \right). \quad (150)$$

Com o intuito de simplificar a modelagem e adequá-la aos estados já desenvolvidos, pode-se substituir as dinâmicas $\frac{di_s^q(t)}{dt}$, $\frac{di_s^0(t)}{dt}$ e $\frac{d\lambda_r^q(t)}{dt}$, pelas expressas, respectivamente, nas Equações (124), (134) e (137). Desta maneira, aplicando-as na Equação (150):

$$\begin{aligned} v_s^{a2}(t) = & \mu \left(r_s (i_s^q(t) + i_s^0(t) - i_f(t)) + \frac{di_f(t)}{dt} \left[\frac{2\mu L_m^2}{3L_r} - L_{ls} - \frac{2\mu L_m}{3} \right] + \right. \\ & \left[L_s - \frac{L_m^2}{L_r} \right] \left(i_s^q(t) \left[\frac{-r_s L_r^2 - r_r L_m^2}{L_r \sigma} \right] + \lambda_r^q(t) \left[\frac{r_r L_m}{L_r \sigma} \right] - \lambda_r^d(t) \left[\frac{\omega_r(t) L_m}{\sigma} \right] + \right. \\ & \left. \underbrace{v_s^q(t) \left[\frac{L_r}{\sigma} \right] + i_f(t) \left[\frac{2\mu (r_s L_r^2 + r_r L_m^2)}{3L_r \sigma} \right] + \frac{di_f(t)}{dt} \left[\frac{2\mu}{3} \right]}_{di_s^q(t)/dt} \right) + \\ & L_{ls} \left(\underbrace{i_s^0(t) \left[\frac{-r_s}{L_{ls}} \right] + v_s^0(t) \left[\frac{1}{L_{ls}} \right] + \frac{di_f(t)}{dt} \left[\frac{\mu}{3} \right] + i_f(t) \left[\frac{\mu r_s}{3L_{ls}} \right]}_{di_s^0(t)/dt} \right) + \\ & \left. \frac{L_m}{L_r} \left(\underbrace{i_s^q(t) \left[\frac{r_r L_m}{L_r} \right] + \lambda_r^q(t) \left[\frac{-r_r}{L_r} \right] + \lambda_r^d(t) \left[\omega_r(t) \right] - i_f(t) \left[\frac{2\mu r_r L_m}{3L_r} \right]}_{d\lambda_r^q(t)/dt} \right) \right). \quad (151) \end{aligned}$$

Desenvolvendo a Equação (151), isolando seu termo derivativo e realizando a substituição apresentada em (143), obtém-se, então, a equação dinâmica da corrente curto-circuito, apresentada na Equação (152):

$$\frac{di_f(t)}{dt} = i_f(t) \left[\frac{r_f}{\mu L_{ls}(\mu - 1)} - \frac{r_s}{L_{ls}} \right] - v_s^q(t) \left[\frac{1}{L_{ls}(\mu - 1)} \right] - v_s^0(t) \left[\frac{1}{L_{ls}(\mu - 1)} \right]. \quad (152)$$

Esta expressão, válida para todo $\mu \in]0, 1[$ permite, a partir do fator de severidade μ e de uma resistência de curto-circuito r_f , modelar a dinâmica da corrente $i_f(t)$ e sua influência no MIT. Assim, pode-se estudar e simular o comportamento de tal variável em aplicações práticas. O modelo em espaço de estados do motor de indução, apresentado na Equação (140), pode ser acoplado a dinâmica da corrente de curto-circuito desenvolvida nesta seção. Substituindo a componente derivativa de $i_f(t)$ nas Equações (134) e (137):

$$\begin{aligned} \frac{di_s^q(t)}{dt} = & i_s^q(t) \left[\frac{-r_s L_r^2 - r_r L_m^2}{L_r \sigma} \right] + \lambda_r^q(t) \left[\frac{r_r L_m}{L_r \sigma} \right] - \lambda_r^d(t) \left[\frac{\omega_r(t) L_m}{\sigma} \right] + \\ & i_f(t) \left[\frac{2}{3} \left(\frac{r_r L_m^2 + r_s L_r^2}{L_r \sigma} + \frac{r_f}{\mu L_{ls}(\mu - 1)} - \frac{r_s}{L_{ls}} \right) \right] + v_s^q(t) \left[\frac{L_r}{\sigma} + \frac{2\mu}{3L_{ls}(1 - \mu)} \right] + v_s^0(t) \left[\frac{2\mu}{3L_{ls}(1 - \mu)} \right], \end{aligned} \quad (153)$$

$$\frac{di_s^0(t)}{dt} = i_s^0(t) \left[\frac{-r_s}{L_{ls}} \right] + i_f(t) \left[\frac{r_f}{3L_{ls}(\mu - 1)} \right] + v_s^q(t) \left[\frac{1}{L_{ls}} + \frac{\mu}{3L_{ls}(1 - \mu)} \right] + v_s^0(t) \left[\frac{\mu}{3L_{ls}(1 - \mu)} \right]. \quad (154)$$

Definindo-se uma nova variável $\delta = r_s L_r^2 + r_r L_m^2$, a dinâmica do motor de indução sob curto-circuito com severidade μ será dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \\ \omega_r(t) \\ i_f(t) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -\frac{r_r}{L_r} & \omega_r & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 & 0 & 0 & \mu \frac{-2r_r L_m}{3L_r} \\ -\omega_r & -\frac{r_r}{L_r} & 0 & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & \frac{-\omega_r L_m}{\sigma} & \frac{-\delta}{L_r \sigma} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \left(\frac{\mu \delta}{L_r \sigma} + \frac{\mu r_f}{L_{ls}(\mu^2 - \mu)} - \frac{\mu r_s}{L_{ls}} \right) \\ \frac{\omega_r L_m}{\sigma} & \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & 0 & \frac{-\delta}{L_r \sigma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-r_s}{L_{ls}} & 0 & \frac{r_f}{3L_{ls}(\mu - 1)} \\ \frac{-3L_m P i_s^d(t)}{4L_r J} & \frac{3L_m P i_s^q(t)}{4L_r J} & 0 & 0 & 0 & \frac{-B_c}{J} & \frac{L_m P}{2L_r J} (L_m i_s^d(t) - \lambda_r^d(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{r_f}{\mu L_{ls}(\mu - 1)} - \frac{r_s}{L_{ls}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \\ \omega_r(t) \\ i_f(t) \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_r}{\sigma} + \frac{2\mu}{3L_{ls}(1 - \mu)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_r}{\sigma} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{3L_{ls}(1 - \mu)} & 0 & \frac{1}{L_{ls}} + \frac{\mu}{3L_{ls}(1 - \mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{J} \\ \frac{1}{L_{ls}(1 - \mu)} & 0 & \frac{1}{L_{ls}(1 - \mu)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s^q(t) \\ v_s^d(t) \\ v_s^0(t) \\ T_c(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (155)$$

3.4 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo foi apresentado a modelagem assimétrica do MIT, com falha de curto-circuito no estator. A principal contribuição está na representação em espaço de estados do mesmo, permitindo sua aplicação em métodos de estimação de falha e controle robusto. Por meio deste modelo, é possível observar a influência do curto-circuito nas correntes estatóricas do motor, bem como no seu torque eletromagnético e velocidade mecânica. Nos próximos capítulos, desenvolve-se então, a aplicação da metodologia de filtragem e estimação paramétrica no modelo do MIT obtido.

4 ANÁLISE DE FACTIBILIDADE E SÍNTESE

A estimação de parâmetros aplicada a um sistema LPV, exposta na Seção 2.3, consiste no processamento de três variáveis: o vetor de estados $x(t)$, o vetor $\phi(t)$ contendo a dinâmica não parametricamente dependente à Θ , e o vetor $\Phi(t)$ contendo as dinâmicas linearmente dependentes à Θ . Na metodologia apresentada, a determinação de $x(t)$, $\phi(t)$ e $\Phi(t)$ é realizada por meio da aplicação de filtros LPV, os quais sintetizam as saídas necessárias de forma robusta. O conceito de robustez, neste caso, refere-se tanto à rejeição do ruído, o qual causa distúrbios no sensoriamento do sistema, quanto à incerteza paramétrica, que é definida de maneira politópica no problema.

Neste contexto, no processo de síntese dos filtros, as LMIs expostas no Capítulo 2 são utilizadas para encontrar um conjunto de matrizes que satisfaçam as condições de síntese, minimizando γ , considerando todo o politopo definido no projeto, garantindo assim a robustez ao parâmetro incerto. Contudo, a solução das LMIs para condições amplas pode se mostrar muitas vezes não factível. Desta forma, neste capítulo será apresentada a análise de factibilidade de um filtro LPV, sintetizado via LMIs, aplicado ao problema de estimação de velocidade de um MIT. A modelagem de um estimador de velocidade via estimação de parâmetros é apresentada, a qual será utilizada para exemplificar e analisar a parametrização e síntese do filtro. Serão, também, expostas as restrições observadas, além de possíveis abordagens para sua solução do problema.

4.1 ESTIMADOR DE VELOCIDADE - MODELAGEM

A representação em espaço de estados do motor de indução simétrico, apresentado na Equação (141), possui dependência direta de sua velocidade mecânica $\omega_r(t)$. Logo, pode-se aplicar a metodologia apresentada para a estimação da velocidade mecânica de forma simplificada, já que tal variável se relaciona de maneira linear ao sistema. Utiliza-se as técnicas de filtragem LPV expostas para então sintetizar $x(t)$, $\phi(t)$ e $\Phi(t)$ de forma robusta, permitindo, assim, o desenvolvimento do estimador paramétrico proposto.

O objetivo inicial é definir e modelar $x(t)$, $\phi(t)$ e $\Phi(t)$ para, então, desenvolver um filtro que sintetize e permita estimar, com precisão, estas variáveis. Isolando o parâmetro $\omega_r(t)$ na Equação (141) e fazendo a substituição $\Theta_1(t) = \omega_r(t)$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \end{bmatrix} &= \left(\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{r_r}{L_r} & 0 & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 \\ 0 & -\frac{r_r}{L_r} & 0 & \frac{r_r L_m}{L_r} \\ \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & 0 & \frac{-r_s L_r^2 - r_r L_m^2}{L_r \sigma} & 0 \\ 0 & \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & 0 & \frac{-r_s L_r^2 - r_r L_m^2}{L_r \sigma} \end{bmatrix}}_{A_0} + \Theta_1(t) \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-L_m}{\sigma} & 0 & 0 \\ \frac{L_m}{\sigma} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} \right) \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \end{bmatrix} + \\
&\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{L_r}{\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{L_r}{\sigma} \end{bmatrix}}_{B_0} \begin{bmatrix} v_s^q(t) \\ v_s^d(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{156}$$

Na Equação (156), as matrizes A_0 e B_0 são aquelas que não possuem dependência paramétrica a nenhum parâmetro variante, enquanto A_1 possui dependência a $\Theta_1(t)$. Considerando $x(t)$ como o vetor de estados e $u(t)$ as entradas do sistema, pode-se reescrever:

$$\frac{dx(t)}{dt} = [A_0 + \Theta_1(t)A_1] x(t) + B_0 u(t). \tag{157}$$

Adequando a Equação (157) ao formato apresentado em (45), as variáveis $\phi(t)$ e $\Phi(t)$ podem ser definidas como:

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= A_0 x(t) + B_0 u(t), \\
\Phi(t) &= A_1 x(t).
\end{aligned} \tag{158}$$

Logo, a saída, $z(t)$, que sintetiza e agrupa as variáveis $x(t)$, $\phi(t)$ e $\Phi(t)$, pode ser escrita por:

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{\phi}(t) \\ \hat{\Phi}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -\frac{r_r}{L_r} & 0 & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 \\ 0 & -\frac{r_r}{L_r} & 0 & \frac{r_r L_m}{L_r} \\ \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & 0 & \frac{-r_s L_r^2 - r_r L_m^2}{L_r \sigma} & 0 \\ 0 & \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & 0 & \frac{-r_s L_r^2 - r_r L_m^2}{L_r \sigma} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L_m}{\sigma} & 0 & 0 \\ \frac{L_m}{\sigma} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_z} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{L_r}{\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{L_r}{\sigma} \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{zu}} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D_{zw}} w(t). \quad (159)$$

Portanto, a definição de um filtro com saída $z(t)$ possibilita a obtenção das variáveis filtradas $\hat{x}(t)$, $\hat{\phi}(t)$ e $\hat{\Phi}(t)$, compondo o vetor de saída do filtro $z_f(t)$ que convergem para o respectivo vetor de variáveis desejadas. Este filtro, representado pela Equação (6), utiliza, como entradas para o processo de filtragem e obtenção de $z_f(t)$, duas variáveis, $u(t)$ e $y(t)$. Em aplicações práticas, a entrada $u(t)$ é acessível, dada pela tensão de alimentação do motor, que pode ser obtida por sensores de tensão, ou diretamente do inversor utilizado para sua alimentação. Já $y(t)$, por sua vez, pode ser estabelecida como as correntes estatóricas do motor, também acessíveis. Considerando que as saídas $y(t)$ podem sofrer com distúrbios provocados por $w(t)$, tem-se:

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_y} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{yu}} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{D_{yw}} w(t). \quad (160)$$

Para a síntese de um filtro robusto à entrada exógena $w(t)$, é preciso modelar a incidência deste ruído sobre o modelo dinâmico do motor. Considerando a incidência às correntes do estator, tal procedimento é realizado incorporando $w(t)$ à Equação (156), determinando a matriz B_w , que será dada por:

$$B_w = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T. \quad (161)$$

A próxima etapa é a obtenção das matrizes A_f , B_{fy} , B_{fu} , C_f , D_{fu} e D_{fy} que formam o filtro desejado. A síntese e obtenção destas matrizes é realizada pela solução

apresentada no Teorema 1, onde se considerou os parâmetros de um motor de indução trifásico de 3 cv, demonstrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros para síntese do filtro.

Parâmetro	Valor
Potência	3 cv
Tensão Nominal	220 V
Frequência	60 Hz
Polos	4
R_s	0,435 Ω
R_r	0,816 Ω
$L_s = L_r$	71,31 mH
L_m	69,31 mH
$L_{ls} = L_{lr}$	2 mH
J	0,089 kgm ²
B_c	5×10^{-3} Nms

Fonte: Autoria Própria.

Não há necessidade da dinâmica de $\Theta_1(t)$ ser precisamente conhecida, já que a síntese do filtro considera toda a região do *simplex* Λ_N , conforme explicitado na Equação (4). Contudo, para a determinação dos vértices do politopo, considera-se para o parâmetro Θ_1 condições de operação convencionais no primeiro quadrante do motor, ou seja, desde 0 rad/s em sua partida, até pouco mais de sua velocidade nominal. Delimita-se também sua derivada para valores compatíveis de frenagem e aceleração:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Theta_1(t) \leq 200 && [\text{rad/s}], \\ -50 &\leq \frac{d\Theta_1(t)}{dt} \leq 50 && [\text{rad/s}^2]. \end{aligned} \quad (162)$$

Logo, a matriz $A(\Theta(t))$ torna-se $A(\alpha)$, a qual é pertencente a um *simplex* de dois vértices. Para a implementação e solução do problema, utilizou-se os pacotes YALMIP (LOFBERG, 2004) e ROLMIP (AGULHARI et al., 2019) em conjunto com o *software* MATLAB[®] para a formulação dos politopos. Para a aplicação do Teorema 1, considerou-se $\beta = 11,59$, definido de acordo com a norma dos sinais de entrada e estados do sistema em regime permanente, obtidos experimentalmente; τ como variável a ser obtida diretamente pelo *solver* durante a solução das LMIs; além de um conjunto de constantes de relaxamento $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 , as quais são geradas aleatoriamente com distribuição gaussiana e média zero, por meio de uma busca exaustiva, até que se encontre um conjunto factível. Para a solução das LMIs apresentadas no Teorema 1, utilizou-se o *solver* MOSEK ApS (2019), não sendo possível a obtenção de um conjunto de matrizes factíveis. Portanto, não obteve-se solução que atendesse aos critérios pré-determinados.

Observa-se que a região na qual o parâmetro incerto Θ_1 foi definido, corresponde a toda a faixa de operação do motor no primeiro quadrante, de sua partida até sua velocidade em regime permanente, compondo um politopo de grande amplitude. Contudo, como não foi possível encontrar soluções factíveis para o problema, e considerando que o sistema é estável para todo $\Theta_1 \in [0, 200]$ rad/s, supõe-se que a infactibilidade seja causada por condições restritivas, tais como a grande amplitude do politopo. Para validar tal suposição, pode-se realizar a solução da LMI considerando novas regiões de parametrização, as quais irão compor um novo politopo, de menor amplitude.

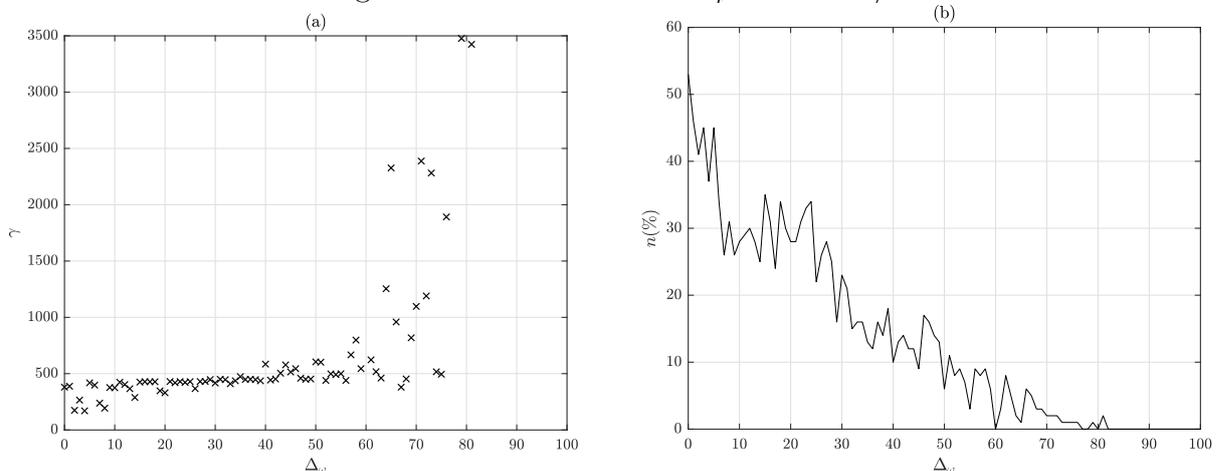
4.2 REGIÃO DE PARAMETRIZAÇÃO

Considerando a definição politópica do parâmetro desconhecido e sua influência na factibilidade da LMI, apresenta-se a definição de uma região de parametrização variável. Desta forma, pode-se observar os pontos de operação aos quais a síntese apresenta-se facilitada, bem como a influência da faixa de parametrização na síntese e desempenho do filtro. Seja um ponto central de operação do motor, dado por ω_p , a partir do qual se define-se uma possível faixa máxima de variação, Δ_ω , que limita os valores máximos e mínimos para qual o filtro a ser sintetizado possui desempenho garantido. Portanto:

$$\omega_p - \Delta_\omega \leq \Theta_1 \leq \omega_p + \Delta_\omega. \quad (163)$$

Buscou-se observar para $\omega_p = 100$ rad/s, a síntese do filtro considerando $\Delta_\omega \in]0, 100]$ rad/s, ou seja, desde um único ponto até todo o primeiro quadrante de operação do MIT. Considerou-se Δ_ω uniformemente espaçado, executando-se 100 iterações de busca para cada componente do intervalo. A Figura 3(a) apresenta a relação entre a mínima constante γ obtida, que determina a norma \mathcal{H}_∞ do filtro, com a variação de Δ_ω . Por sua vez, a Figura 3(b) demonstra o percentual de soluções factíveis e a relação com Δ_ω .

Figura 3 – Factibilidade - $\omega_p = 100$ rad/s.

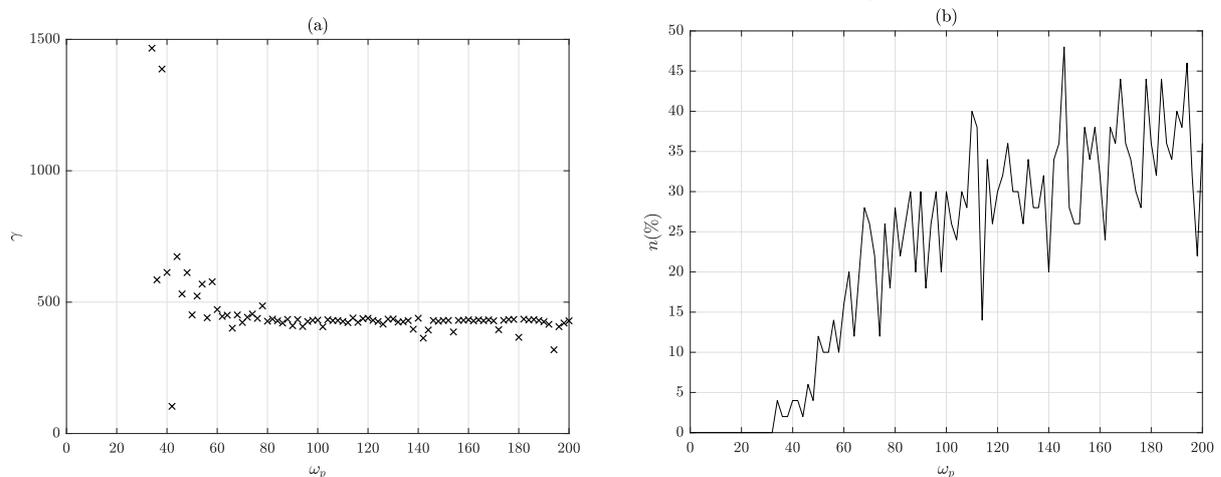


Fonte: Autoria Própria.

Na Figura 3(a), percebe-se que valores mais elevados de γ são obtidos conforme Δ_ω cresce em amplitude, ao ponto que, para um dado valor de Δ_ω , as soluções tornam-se infactíveis. Considerando que a busca por soluções ocorre por tentativa e erro, determinando o conjunto $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 de forma aleatória, observa-se também que valores mais elevados de Δ_ω ocasionam em uma dificuldade maior de se encontrar conjunto que satisfaça as condições das LMIs. Logo, a probabilidade de encontrar conjuntos factíveis também diminui com a ampliação da região de parametrização, como pode ser observado na Figura 3(b). Nos testes realizados, valores de Δ_ω superiores a 82 rad/s não levaram à solução. Ressalta-se que γ relaciona-se com o desempenho do método de duas maneiras, a primeira diretamente com a robustez do filtro, dada a norma \mathcal{H}_∞ , mas também relaciona-se com o erro de estimação adaptativo, como observado na Equação (54). Portanto, valores mais elevados de γ causam conseqüentemente maior erro de estimação. Nos testes realizados, obteve-se o melhor $\gamma = 169,78$, com $\Delta_\omega = 4$ rad/s.

Outra possível abordagem para o problema é a variação de ω_p , a qual pode indicar que algumas regiões de operação do motor podem apresentar maior dificuldade de síntese do filtro, enquanto outras, como possíveis regiões de operação nominais, um conjunto factível pode ser obtido com maior facilidade. Para validar tal suposição, realiza-se o cálculo da LMI apresentada no Teorema 1, considerando $\Delta_\omega = 20$ rad/s, variando o ponto central de operação ω_p . Para uma melhor visualização, permitiu-se a extrapolação da busca para intervalos contendo valores além daqueles observados em operação nominal, como -20 e 220 rad/s, já que para tais valores o sistema ainda se mantém numericamente estável. Utilizou-se ω_p uniformemente espaçado, considerando 100 iterações para cada conjunto ω_p . Os resultados obtidos podem ser visualizados nas Figuras 4(a) e 4(b), as quais apresentam respectivamente, o menor valor de γ e a porcentagem de soluções factíveis, por conjunto.

Figura 4 – Factibilidade - $\Delta_\omega = 20$ rad/s.

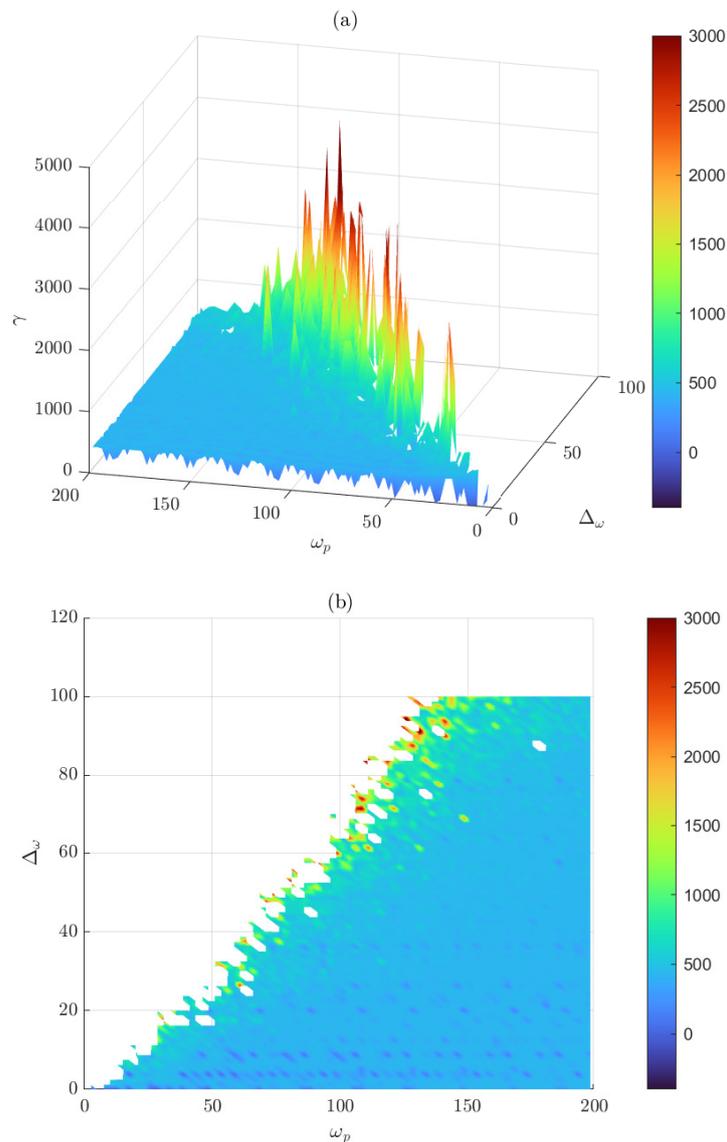


Fonte: Autoria Própria.

Pontos de operação de baixa velocidade apresentaram menor taxa de factibilidade e, quando factíveis, apresentam maior norma \mathcal{H}_∞ . Observou-se que, para $\omega_p < 33$ rad/s,

não obteve-se resultados factíveis, inviabilizando sua aplicação para a estimação de baixas velocidades e demonstrando a influência da região de parametrização na composição do politopo Λ_N , e conseqüentemente no processo de síntese do filtro. Realizou-se também a síntese de filtros considerando variações em Δ_ω e ω_p de maneira conjunta, para verificação da relação mútua entre as variáveis. Realizou-se o cálculo de 6400 conjuntos $(\Delta_\omega, \omega_p)$ uniformemente espaçados, executadas 50 iterações por conjunto, a fim de se obter o menor valor para γ . A Figura 5(a) apresenta a superfície que relaciona o menor γ obtido para a região observada, enquanto a Figura 5(b) demonstra os resultados em uma projeção bidimensional (2D) da Figura 5(a), para melhor visualização.

Figura 5 – Norma γ obtida.



Fonte: Autoria Própria.

Nota-se que regiões de baixa velocidade, em que ω_p possui pequena amplitude, mostraram-se de difícil solução, mesmo considerando faixas de operação mais restritas, o que pode indicar que conjuntos contendo elementos ω_r de baixa amplitude podem ocasionar

infactibilidade, dado o método de síntese proposto. Na Figura 5(a), nota-se a formação de uma região em que a norma γ cresce de maneira exponencial, até tornar-se infactível. É interessante notar e relacionar que diversos métodos de estimação de velocidade aplicados ao MIT possuem baixo desempenho em regiões de baixa velocidade, como citado por Sun et al. (2016), Smith, Gadoue e Finch (2016) e Zaky et al. (2010). Uma possível interpretação matemática para tal fenômeno é a dependência aos autovalores do modelo dinâmico do MIT, representado pela Equação (156), com ω_r , prejudicando a síntese de filtros para tais regiões de baixa velocidade. Na Figura 5(b), observa-se que valores mais elevados de ω_p permitem também, a obtenção de resultados factíveis com Δ_ω de maior amplitude.

Após diversos testes e observando os resultados apresentados neste capítulo, constatou-se que, para o problema proposto, a síntese do filtro desejado só é factível para intervalos compostos por Δ_ω de baixa amplitude e ω_p moderadamente elevados. Contudo, tal condição inviabiliza sua aplicação em problemas de ordem prática, já que na aplicação de um estimador de velocidade, é esperado uma ampla região de operação, condição necessária e essencial envolvendo problemas de controle e monitoramento. Além disso, mesmo regiões mais restritas apresentaram valores elevados de γ , prejudicando o desempenho e inviabilizando a aplicação da metodologia.

A utilização de novas LMIs para a síntese do filtro desejado mostra-se como uma possível solução para tal limitação, já que novas condições podem permitir a síntese de filtros factíveis e com melhor desempenho. Cita-se, por exemplo, os trabalhos de Aeinfar et al. (2019) e Zhou et al. (2018), que apresentam novas LMIs para a síntese de filtros LPV. Observando que a definição de regiões de parametrização de menor amplitude apresentam maior factibilidade, a aplicação de metodologias de filtragem *gain scheduling* pode se tornar viável, na qual realiza-se a sintonia de diferentes filtros e, então, a posterior interpolação e seleção iterativa dos filtros. Contudo, a definição de critérios de interpolação e síntese exigem revisão da literatura e pesquisas complementares. Outra possível abordagem para o problema é utilização de outras técnicas para a estimação dos estados, tais como UKF (JAFARZADEH; LASCU; FADALI, 2012), em que se pode utilizar tais estimadores de estados para a composição das saídas sintéticas $\phi(t)$ e $\Phi(t)$, e sua posterior aplicação no procedimento de estimação adaptativa, o qual se mostrou eficaz em testes e simulações em que os estados são precisamente conhecidos e acessíveis.

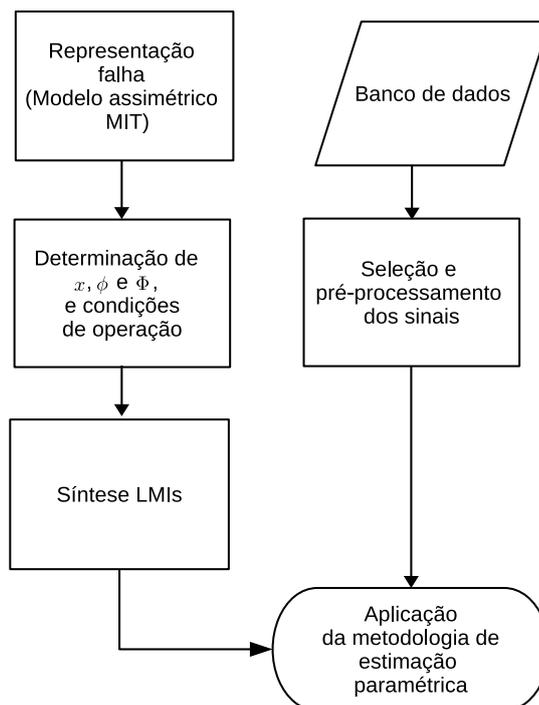
4.3 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Apresentou-se, neste capítulo, a modelagem do filtro, para a estimação de velocidade de um MIT e a análise de factibilidade da LMI utilizadas para a síntese de tal filtro. Devido a ampla faixa de operação desejada, não obteve-se resultados factíveis para o problema. Contudo, analisou-se os fatores que influenciam a factibilidade do problema, bem como possíveis soluções e alternativas, visando a implementação futura do método.

5 ESTIMADOR DE FALHA DE CURTO-CIRCUITO

Neste capítulo será apresentado o desenvolvimento da técnica de filtragem e estimação paramétrica, aplicada ao MIT, como um estimador de falha de curto-circuito. Inicialmente, será apresentada a modelagem e composição do filtro LPV, a definição das componentes $x(t)$, $\phi(t)$ e $\Phi(t)$, seu processo de síntese, bem como o filtro obtido. Em seguida, será exposta a bancada experimental e o banco de dados a serem utilizados no processo de validação da metodologia, bem como o pré-processamento aplicado ao dados, necessário para a adequação à metodologia. Também será exposto o *setup* experimental, contendo as condições de operação e testes a serem realizados. A Figura 6 apresenta um fluxograma das etapas a serem realizadas para a aplicação do método no MIT.

Figura 6 – Fluxograma de implementação.



Fonte: Autoria Própria.

5.1 DEFINIÇÃO DO FILTRO ROBUSTO

O modelo do motor de indução com falha de curto-circuito, apresentado no Capítulo 3, possibilita o estudo e a simulação dos efeitos do curto nas dinâmicas elétricas e mecânicas do motor. Neste modelo, o curto-circuito é influenciado por dois parâmetros principais, μ , fator de curto-circuito, e r_f , resistência do ramo de curto-circuito. Desta forma, a

aplicação da técnica de estimação de parâmetros neste modelo, permite detectar e identificar prematuramente a incidência de falha, trazendo confiabilidade para a operação e permitindo o desenvolvimento de técnicas de manutenção preditiva no equipamento.

A utilização da representação em espaço de estados dada pela Equação (155) se mostra inviável ao método proposto, já que os parâmetros μ e r_f são expressos de maneira não-linear, não permitindo sua adequação para o desenvolvimento do método, o qual exige dependência linear ao parâmetro que se deseja estimar. Uma solução é a aplicação da técnica de estimação paramétrica a partir da Equação (140), na qual μ é linear ao sistema. Considerando a situação em que $T_c = 0$ e, caso $i_f(t)$ seja conhecida, essa variável pode ser acoplada ao sistema como uma entrada, de maneira que a Equação (140) torna-se:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_r}{L_r} & \omega_r(t) & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_r(t) & -\frac{r_r}{L_r} & 0 & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 & 0 \\ \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & \frac{-\omega_r(t) L_m}{\sigma} & \frac{-\delta}{L_r \sigma} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega_r(t) L_m}{\sigma} & \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & 0 & \frac{-\delta}{L_r \sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-r_s}{L_{ls}} & 0 \\ \frac{-3L_m P i_s^d(t)}{4L_r J} & \frac{3L_m P i_s^q(t)}{4L_r J} & 0 & 0 & 0 & \frac{-B_c}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2\mu L_m r_r}{3L_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_r}{\sigma} & 0 & 0 & \frac{2\mu \delta}{3L_r \sigma} & \frac{2\mu}{3} \\ 0 & \frac{L_r}{\sigma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & \frac{\mu r_s}{3L_{ls}} & \frac{\mu}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu L_m P}{2L_r J} (L_m i_s^d(t) - \lambda_r^d(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s^q(t) \\ v_s^d(t) \\ v_s^0(t) \\ i_f(t) \\ \frac{di_f(t)}{dt} \end{bmatrix}. \quad (164)$$

Todavia, a corrente $i_f(t)$ não é fisicamente acessível. Neste caso, uma aproximação de sua dinâmica pode ser realizada. Utilizando com base o circuito apresentado na Figura 2, pode-se analisar que:

$$r_f i_f(t) = v_s^{a2}(t), \quad (165)$$

e uma aproximação da tensão $v_s^{a2}(t)$ é obtida por:

$$v_s^{a2}(t) \approx \mu v_s^a(t). \quad (166)$$

Combinando as Equações (165) e (166) e isolando $i_f(t)$, tem-se:

$$i_f(t) \approx v_s^a(t) \frac{\mu}{r_f}. \quad (167)$$

Com isso, a expressão de $i_f(t)$ passa a ser feita em função de uma variável acessível, $v_s^a(t)$, a tensão de alimentação da respectiva fase a . Por sua vez, o valor da componente derivativa de $i_f(t)$ pode ser obtida derivando numericamente a Equação (167). Contudo, esta aproximação traz consigo um erro associado, devido principalmente ao fato de não considerar parte da tensão induzida nas espiras relacionadas a $v_s^{a2}(t)$. Utilizando como base as Equações (75) e (77), é possível calcular o erro associado a esta aproximação:

$$\begin{aligned} e_{i_f}(t) &= \frac{v_s^{a2}(t)}{r_f} - \frac{\mu v_s^a(t)}{r_f}, \\ &= \frac{\mu^2 - \mu}{r_f} \left(L_{ls} \frac{di_f(t)}{dt} + R_s i_f(t) \right). \end{aligned} \quad (168)$$

Em condições de falha incipiente, nas quais o módulo da corrente de curto-circuito $i_f(t)$ e o fator de severidade μ são pequenos, tal aproximação permite representar com boa precisão tal grandeza. Aplicando esta aproximação na Equação (164), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{r_r}{L_r} & \omega_r(t) & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_r(t) & -\frac{r_r}{L_r} & 0 & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 & 0 \\ \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & \frac{-\omega_r(t) L_m}{\sigma} & -\delta & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega_r(t) L_m}{\sigma} & \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & 0 & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-r_s}{L_{ls}} & 0 \\ \frac{-3L_m P i_s^d(t)}{4L_r J} & \frac{3L_m P i_s^q(t)}{4L_r J} & 0 & 0 & 0 & \frac{-B_c}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} + \\ & \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_r}{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_r}{\sigma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\mu^2}{r_f} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2L_m r_r}{3L_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\delta}{3L_r \sigma} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_s}{3L_{ls}} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_m P}{2L_r J} (L_m i_s^d(t) - \lambda_r^d(t)) & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_s^q(t) \\ v_s^d(t) \\ v_s^0(t) \\ v_s^a(t) \\ \frac{dv_s^a(t)}{dt} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (169)$$

Percebe-se que a dinâmica de curto-circuito, neste modelo, ocorre em função de um pseudo-parâmetro $\frac{\mu^2}{r_f}$. Logo, pode-se utilizar a técnica de estimação de parâmetros

apresentada para sua respectiva estimação, permitindo desenvolver um método de detecção e estimação quantitativa da falha de curto-circuito. Em aplicações práticas, mesmo que o valor de r_f não seja precisamente conhecido, é possível utilizar este pseudo-parâmetro para acompanhar a evolução da falha de curto-circuito e detectar sua presença, já que ela se relaciona de maneira quadrática com o fator de severidade μ .

O primeiro objetivo é a adequação do modelo a representação LPV, ao qual será aplicada a técnica de filtragem, responsável por gerar as saídas sintéticas necessárias no processo de estimação. O primeiro parâmetro variante a ser definido é o qual se deseja estimar, ou seja:

$$\Theta_1 = \frac{\mu^2}{r_f}. \quad (170)$$

O sistema da Equação (169) apresenta-se como não-linear devido ao produto de estados, contudo, diversos estados são acessíveis e possuem grandeza limitada. Logo, pode-se utilizar uma representação LPV para tais estados e considerá-los como parâmetros variantes auxiliares, simplificando sua representação e viabilizando a aplicação da técnica. Pode-se definir tais parâmetros como:

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= \omega_r(t), \\ \Theta_3 &= i_s^d(t), \\ \Theta_4 &= i_s^q(t), \\ \Theta_5 &= v_s^a(t). \end{aligned} \quad (171)$$

Portanto, o conjunto de parâmetros variantes do sistema se torna:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \\ \Theta_4 \\ \Theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu^2}{r_f} \\ \omega_r(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^q(t) \\ v_s^a(t) \end{bmatrix}. \quad (172)$$

Pode-se substituir o conjunto de parâmetros na Equação (169), obtendo desta forma o sistema equivalente a ser utilizado para o processo de filtragem e estimação, representado pela Equação (173):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{r_r}{L_r} & 0 & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r_r}{L_r} & 0 & \frac{r_r L_m}{L_r} & 0 & 0 \\ \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & 0 & \frac{-\delta}{L_r \sigma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_r L_m}{L_r \sigma} & 0 & \frac{-\delta}{L_r \sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-r_s}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-B_c}{J} \end{bmatrix}}_{A_0} + \underbrace{\Theta_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-L_m}{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_m}{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} + \\
& \underbrace{\Theta_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-3L_m P}{4L_r J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3} + \underbrace{\Theta_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3L_m P}{4L_r J} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_4} + \underbrace{\Theta_1 \Theta_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-L_m P}{2L_r J} & 0 & \frac{L_m^2 P}{2L_r J} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{1,5}} \begin{bmatrix} \lambda_r^q(t) \\ \lambda_r^d(t) \\ i_s^q(t) \\ i_s^d(t) \\ i_s^0(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} + \\
& \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_r}{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_r}{\sigma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_0} + \underbrace{\Theta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2L_m r_r}{3L_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\delta}{3L_r \sigma} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_s}{3L_{ls}} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1} \begin{bmatrix} v_s^q(t) \\ v_s^d(t) \\ v_s^0(t) \\ v_s^a(t) \\ \frac{dv_s^a(t)}{dt} \end{bmatrix}. \tag{173}
\end{aligned}$$

Sendo $x(t)$ e $u(t)$ os respectivos vetores contendo os estados e as entradas do sistema, o modelo, então, torna-se:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A_0 + \Theta_2 A_2 + \Theta_3 A_3 + \Theta_4 A_4 + \Theta_1 \Theta_5 A_{1,5})x(t) + (B_0 + \Theta_1 B_1)u(t). \tag{174}$$

O próximo passo é definir e modelar as saídas $x(t)$, $\phi(t)$ e $\Phi(t)$, a serem utilizadas no processo de filtragem e estimação. Considerando que se deseja estimar apenas o parâmetro Θ_1 e que os demais parâmetros variantes são acessíveis para a composição do sistema, pode-se reorganizar os termos da seguinte forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \underbrace{\left(A_0 + \Theta_2 A_2 + \Theta_3 A_3 + \Theta_4 A_4 \right)}_{\phi} x(t) + \underbrace{B_0 u(t)}_{\Phi} + \left(\Theta_5 A_{1,5} x(t) + B_1 u(t) \right) \Theta_1 \quad (175)$$

Com isso, a saída desejada do filtro $z(t)$, composta pelas três variáveis, $x(t)$, $\phi(t)$ e $\Phi(t)$ torna-se, então:

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \phi(t) \\ \Phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ A_0 + \Theta_2 A_2 + \Theta_3 A_3 + \Theta_4 A_4 \\ \Theta_5 A_{1,5} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6 \\ B_0 \\ B_1 \end{bmatrix} u(t). \quad (176)$$

Neste estudo de caso, a solução de um filtro com saída $z(t)$ pode apresentar grande complexidade computacional, devido à grande dimensão dos vetores de saídas e à presença de diversos parâmetros variantes. Desta forma, algoritmos utilizados para a síntese do filtro podem gerar soluções infactíveis. Um alternativa para a obtenção do filtro é a definição de um filtro $z_f(t)$ estimador de estados, que tem como saída $\hat{x}(t)$. Desta forma, facilita-se a síntese do filtro via LMIs, já que as matrizes relacionadas a composição do filtro, C_z , D_{zu} e D_{zw} possuem dimensão reduzida. No mais, considerando que as entradas $u(t)$ e o conjunto de parâmetro Θ_2 , Θ_3 , Θ_4 , e Θ_5 são acessíveis, pode-se realizar a composição das saídas sintéticas a partir da estimação de estados obtida. Define-se uma versão simplificada de $z(t)$ dada por:

$$z(t) = \underbrace{\mathbf{I}_6}_{C_z} x(t) + \underbrace{\mathbf{0}_{6 \times 6}}_{D_{zu}} u(t) + \underbrace{\mathbf{0}_{6 \times 1}}_{D_{zw}} w(t). \quad (177)$$

Logo, as saídas sintéticas podem ser composta da seguinte maneira ¹:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= z_f(t), \\ \hat{\phi}(t) &= \left(A_0 + \Theta_2 A_2 + \Theta_3 A_3 + \Theta_4 A_4 \right) z_f(t) + B_0 u(t), \\ \hat{\Phi}(t) &= \Theta_5 A_{1,5} z_f(t) + B_1 u(t). \end{aligned} \quad (178)$$

Após a síntese do filtro estimador de estado, as saídas sintéticas são obtidas. A filtragem e a obtenção destas variáveis utilizam como sinal de entrada dois vetores, $u(t)$ e $y(t)$, em que $u(t)$ é composto pelas entradas do modelo base, ou seja, tensões de alimentação do motor, e $y(t)$ pode ser estabelecida por grandezas fisicamente acessíveis, como as correntes estatóricas em coordenadas $qd0$ e a velocidade mecânica $\omega_r(t)$. Considerando

¹ Vale salientar que os parâmetros $\Theta_2 = \omega_r(t)$, $\Theta_3 = i_s^d(t)$ e $\Theta_4 = i_s^q(t)$ são também componentes dos estados filtrados $\hat{x}(t)$, logo, pode-se utilizar as versões filtradas para uma composição com maior robustez.

também que tais sinais podem sofrer a incidência de ruídos externos, denotados pela entrada exógena $w(t)$, então:

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{I}_4 \end{bmatrix}}_{C_y} x(t) + \underbrace{\mathbf{0}_{4 \times 5}}_{D_{yu}} u(t) + \underbrace{\mathbf{1}_{4 \times 1}}_{D_{yw}} w(t). \quad (179)$$

Por fim, realiza-se a incorporação de $w(t)$ também à Equação (173), de maneira a modelar a incidência da entrada exógena $w(t)$ sobre o modelo. Nesta caso, a matriz B_w será dada por:

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (180)$$

Para o desenvolvimento e síntese das matrizes do filtro, MITs de 1 cv e de 2 cv foram utilizados, os quais são descritos em maiores detalhes na Seção 5.2. Os parâmetros utilizados para a síntese do filtro e execução das LMIs são apresentados na Tabela 2, e são disponibilizados no trabalho de Guedes (2019).

Tabela 2 – Parâmetros do MIT.

	Motor 1	Motor 2
Potência (cv)	1 cv	2 cv
R_s	12,9263 Ω	7,9640 Ω
R_r	4,0656 Ω	2,0253 Ω
$L_s = L_r$	475,2 mH	323,1 mH
L_m	452,9 mH	309,1 mH
$L_{ls} = L_{lr}$	19,4 mH	14,0 mH
J	0,0216 kgm ²	0,0285 kgm ²
B_c	0,0002 Nms	0,0002 Nms

Fonte: Adaptado de Guedes (2019).

Para a definição do *simplex* Λ_N , e a composição dos vértices do simples, dados por α_{i1} e α_{i2} , em que $i = 1, \dots, 5$, deve-se determinar a região de parametrização do filtro. A composição do *simplex* referente ao motor 1, levou-se em conta os seguintes limitantes para os parâmetros variantes do modelo:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Theta_1(t) \leq 0,04, \\
175 &\leq \Theta_2(t) \leq 190 && [\text{rad/s}], \\
-8 &\leq \Theta_3(t) \leq 8 && [\text{A}], \\
-8 &\leq \Theta_4(t) \leq 8 && [\text{A}], \\
-375 &\leq \Theta_5(t) \leq 375 && [\text{V}],
\end{aligned} \tag{181}$$

Já para o motor 2, utilizou-se os seguintes intervalos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Theta_1(t) \leq 0,04, \\
175 &\leq \Theta_2(t) \leq 190 && [\text{rad/s}], \\
-10 &\leq \Theta_3(t) \leq 10 && [\text{A}], \\
-10 &\leq \Theta_4(t) \leq 10 && [\text{A}], \\
-375 &\leq \Theta_5(t) \leq 375 && [\text{V}].
\end{aligned} \tag{182}$$

Tais limitantes foram escolhidos de forma a considerar a implementação do estimador em condições diversas de operação do MIT. Para a composição do pseudo-parâmetro incerto Θ_1 , considerou-se como limitante mínimo a condição de ausência de falha, e a máxima — crítica — como um possível curto-circuito de até 20% e resistência $r_f = 1 \Omega$. Por sua vez, para Θ_2 , sabe-se que a velocidade nominal do motor 1 e 2 é, respectivamente, 181,15 e 183,25 rad/s, portanto, determina-se os limitantes de Θ_2 para uma região próxima a tais valores nominais, considerando uma faixa para possíveis variações. Para os demais parâmetros variantes, determinou-se os limitantes baseados nos valores máximos e mínimos observados experimentalmente para cada parâmetro, considerando a influência das condições críticas de operação, tais como desequilíbrios de alimentação e efeitos do curto-circuito, que modificam a resposta do motor, causando um incremento nas correntes representadas por Θ_3 e Θ_4 .

Utilizando os pacotes YALMIP e ROLMIP em conjunto com o *software* MATLAB[®], ocorreu a formulação dos politopos e a implementação do modelo para a solução das LMIs, permitindo a síntese do filtro desejado. Considerando que a obtenção de um conjunto de LMIs factíveis é facilitada a partir de um número menor de incertezas desconhecidas, determinou-se a composição das matrizes constituinte do filtro em função dos parâmetros variantes acessíveis, obtendo então um filtro também LPV. Desta forma, as matrizes do filtro se tornam funções de α_{ij} , em que $i = 2, 3, 4, 5$ e $j = 1, 2$. Para sua posterior execução, a obtenção de α_{ij} pode ser realizada por meio da Equação (5).

A solução do Teorema 2 foi efetuada pelo solver MOSEK ApS (2019), considerando para o motor 1 o conjunto de parâmetros $\lambda_1 = -106,1582$, $\lambda_2 = 235,0457$, $\lambda_3 = -61,5602$ e $\lambda_4 = 74,8077$, definidos de forma aleatória, $\beta = 1 \times 10^{-3}$, definido de acordo com os

requisitos de projeto, e $\tau = 6,3 \times 10^{-4}$, obtido durante o processo de solução. O resultado obtido é robusto a $w(t)$, com norma \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = 2,0013$, e robusto ao parâmetro desconhecido Θ_1 , garantida para todo $\alpha \in \Lambda_N$. Para o motor 2, realizou-se a solução do Teorema 2, com os seguintes valores de parâmetros: $\lambda_1 = 29,3871$, $\lambda_2 = -78,7283$, $\lambda_3 = 88,8396$ e $\lambda_4 = -114,7070$, $\beta = 1 \times 10^{-2}$ e $\tau = 2,3838 \times 10^{-8}$, definidos a partir da mesma metodologia do motor 1, obtendo-se um filtro com norma \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = 2,0005$. Os filtros obtidos, bem como suas respectivas matrizes, possuem formato análogo ao apresentado na Equação (44), e são disponibilizados em Souza (2020).

5.2 BANCADA EXPERIMENTAL E DATASET

Para o desenvolvimento e validação da metodologia apresentada neste trabalho, realizou-se a aplicação do método de estimação utilizando um *dataset*, composto por dados experimentais, o qual possui dados de motores com falhas de curto-circuito, rolamento e rotor, obtidos sob diversas condições de carga, alimentação e severidade das respectivas falhas. Realizou-se a seleção dos dados e utilizou-se apenas os relativos a falha de curto-circuito, os quais foram coletados no Laboratório de Sistemas Inteligentes (LSI) conforme metodologia exposta em Broniera Junior (2014), utilizando dois MITs modificados. Estes motores possuem o estator rebobinado, conforme proposto por Suetake (2012), que por meio de uma caixa de conexões externa, permite o acesso a *taps* adicionais, que simulam o efeito do curto na máquina e possibilitam a representação de diferentes níveis de severidade para tal falha. Os dados de placa de ambos os motores são apresentados na Tabela 3, enquanto parâmetros elétricos e mecânicos foram previamente expostos na Tabela 2.

Para a coleta dos dados e a realização do *setup* experimental, utilizou-se a bancada experimental do LSI, projetada por Goedel (2007), a qual permite a realização de ensaios e testes em MITs sob diversas condições de operação, como tensão de alimentação e carga variável, o monitoramento de grandezas elétricas e mecânicas, como corrente, tensão, velocidade e torque, além de variáveis adicionais, tais como temperatura e vibração. A Figura 8 apresenta a bancada de testes, contendo os elementos que a compõem, sendo: 1 — motor indução, 2 — torquímetro, 3 — gerador de corrente contínua (CC), 4 — *display* do torquímetro, 5 — banco de resistores, 6 — quadro de alimentação variável, 7 — fonte CC, 8 — placa de aquisição de dados, 9 — chave de comando e 10 — computador. Por meio da utilização desta bancada experimental, diversos trabalhos relacionados à análise de falha em MITs foram recentemente realizados, dentre os quais cita-se Gongora et al. (2016), Palácios et al. (2017), Lopes et al. (2017), Guedes et al. (2019) e Bazan et al. (2020).

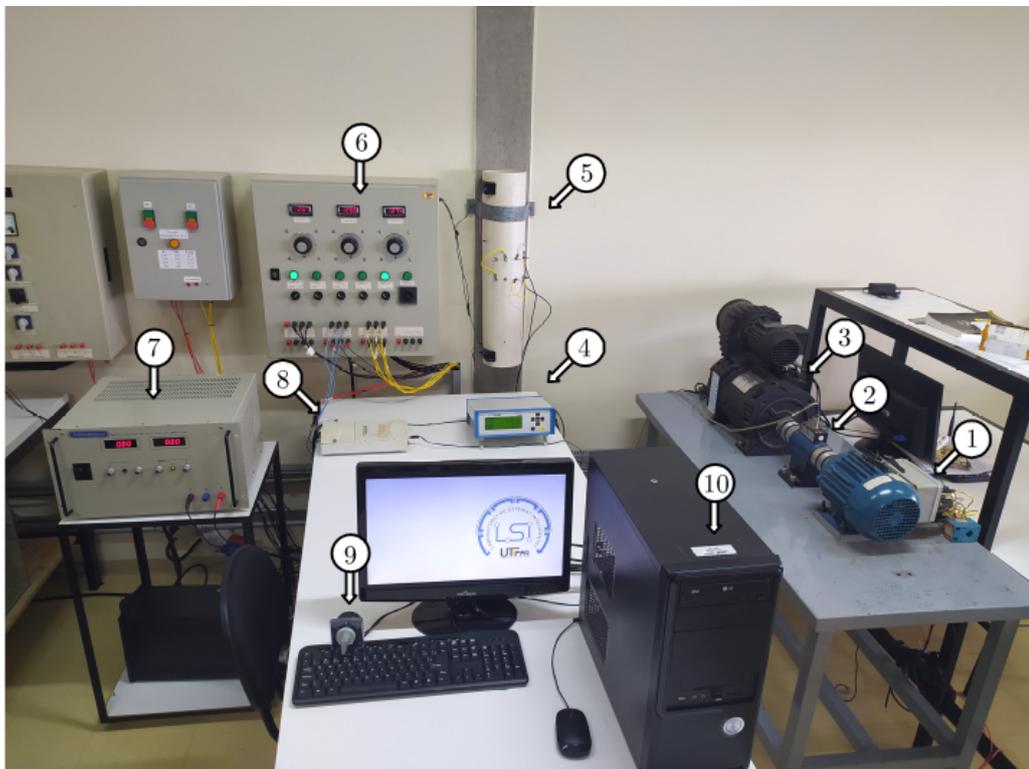
Para verificar o comportamento do motor sob diferentes condições de torque de carga, utiliza-se um gerador CC acoplado ao eixo do MIT. O gerador é da marca Varimot, modelo BN112S, 2 kW de potência, e possui a configuração de excitação de campo independente com tensão máxima de 250V, sendo seu circuito de armadura então

Tabela 3 – Dados de placa dos MIT utilizados.

	Motor 1	Motor 2
Marca	WEG	WEG
Modelo	W22Plus (IE2)	W22Plus (IE2)
Potência	1 cv	2 cv
Tensão de alimentação Δ/Y	220/380 V	220/380 V
Corrente nominal Δ/Y	3,02/1,75 A	5,98/3,46 A
Frequência	60 Hz	60 Hz
Velocidade nominal	1730 rpm	1750 rpm
I_p/I_n	6,6	7,1
Fator de serviço	1,15	1,15
Fator de potência	0,81	0,78
Rendimento (η)	0,805	0,842
Classe	A	A
Isolação	F	F

Fonte: Autoria Própria

Figura 7 – Bancada Experimental.



Fonte: Autoria Própria.

conectado a um banco de resistores. Desta forma, por meio da variação da tensão de excitação do gerador CC, obtida por uma fonte de alimentação CC Powerbras mod. 1310, é possível variar o conjugado de carga ao qual o MIT é submetido. Por sua vez, o conjugado de carga aplicado ao MIT e sua velocidade mecânica são mensurados por um torquímetro com sensor de velocidade integrado da marca Kistler, modelo 4503A50WA100C00, capaz de realizar medições de até 50 Nm. Além disso, situações de desequilíbrio de tensão podem ser simulados por meio da variação da tensão de alimentação, a qual é obtida ajustando os *variacs* ao respectivo valor desejado. Os *variacs* utilizados são do tipo monofásico, permitindo o ajuste individual das fases de alimentação, sendo alocados no quadro de alimentação da bancada experimental, junto aos dispositivos de proteção e comando, como fusíveis e contatores.

Considerando o motor conectado em delta, obtiveram-se os sinais das correntes de linha resultantes i_s^a , i_s^b e i_s^c , bem como as tensões de linha v_s^{ab} , v_s^{bc} e v_s^{ca} por meio de sensores de efeito *hall* alocados no quadro de alimentação. Estes sinais são então condicionados e, em conjunto com os demais sinais mensurados na bancada experimental, são capturados pela placa de aquisição DAQ USB6221, da National Instruments, a qual captura os sinais por meio de suas entradas analógicas, e envia-os ao computador via USB para seu posterior processamento e análise. Vale salientar que, para a utilização de tais dados no modelo proposto, deve-se realizar a adequação das correntes de linha para correntes de fase, para que assim os valores de tensão e corrente observados individualmente cada enrolamento MIT possam ser corretamente processados. O procedimento de adequação é apresentado na Seção 5.2.1.

A composição do *dataset* experimental considerou a operação em diferentes condições de alimentação, carga e falha. A variação das condições de alimentação ocorreram para desequilíbrios de tensão de até 8%, os quais ocorreram de duas formas distintas: primeiramente simulando o desequilíbrio por meio de um afundamento de tensão na fase *a*, mantendo-se as demais fases *b* e *c* em condições nominais; e em um segundo instante, mantendo-se a fase *a* em condições nominais, e aplicando-se o desequilíbrio em *b* e *c*, de forma que a fase *b* sofra elevação de tensão e a fase *c* afundamento proporcionais ao desequilíbrio aplicado. Na sequência, para a composição dos testes sob diferentes cargas mecânicas, simulou-se as operações dos motores com cargas de, aproximadamente, 0%, 25%, 50%, 75% e 100% da carga nominal de cada um dos motores, considerando o torque nominal de 4,01 Nm para o motor 1 e 8,12 Nm para o motor 2.

Por meio da conexão dos *taps* auxiliares do estator, aplicou-se ao motor a falha do curto-circuito no enrolamento da fase *a*, simulando condições de severidade de 0% — ausência de falha — até 20% de curto-circuito para o motor 1, e de 0% à 10% para o motor 2. É importante ressaltar que os testes foram realizados de forma combinada, ou seja, realiza-se a aquisição dos dados para todas as possíveis combinações de alimentação,

falha e severidade, de forma conjunta. No *dataset* experimental, os sinais de corrente, tensão e velocidade foram capturados à 15 kHz, compondo vetores com 1 segundo de duração, sendo os dados obtidos considerando o motor em condição de regime permanente. A Tabela 4 apresenta de forma resumida as condições consideradas na composição do *dataset*.

Tabela 4 – Condições de teste.

	Motor 1	Motor 2
Desequilíbrio de Alimentação	Balanceado, $-2\%V_a, \pm 2\%V_{bc},$ $-4\%V_a, \pm 4\%V_{bc},$ $-6\%V_a, \pm 6\%V_{bc},$ $-8\%V_a, \pm 8\%V_{bc}$	Balanceado, $-2\%V_a, \pm 2\%V_{bc},$ $-4\%V_a, \pm 4\%V_{bc},$ $-6\%V_a, \pm 6\%V_{bc},$ $-8\%V_a, \pm 8\%V_{bc}$
Torque de carga	0%, 25% , 50%, 75% e 100%	0%, 25% , 50%, 75% e 100%
Severidade de falha	0%, 1% , 3%, 5%, 10%, 15% e 20%	0%, 1% , 3%, 5% e 10%
Total de testes	315	225

Fonte: Autoria Própria.

Desta maneira, a aplicação do método aos dados experimentais se dará de maneira *offline*, sendo os dados processados em ambiente computacional pelo *software* MATLAB[®]. Contudo, destaca-se que após a síntese dos filtros, que deve ser realizada pela solução das LMIs, o método proposto possui as condições necessárias para sua utilização *on-line*, já que o procedimento de filtragem e estimação pode ser realizada de forma contínua, diretamente pela aplicação dos filtros obtidos.

5.2.1 PÓS-PROCESSAMENTO

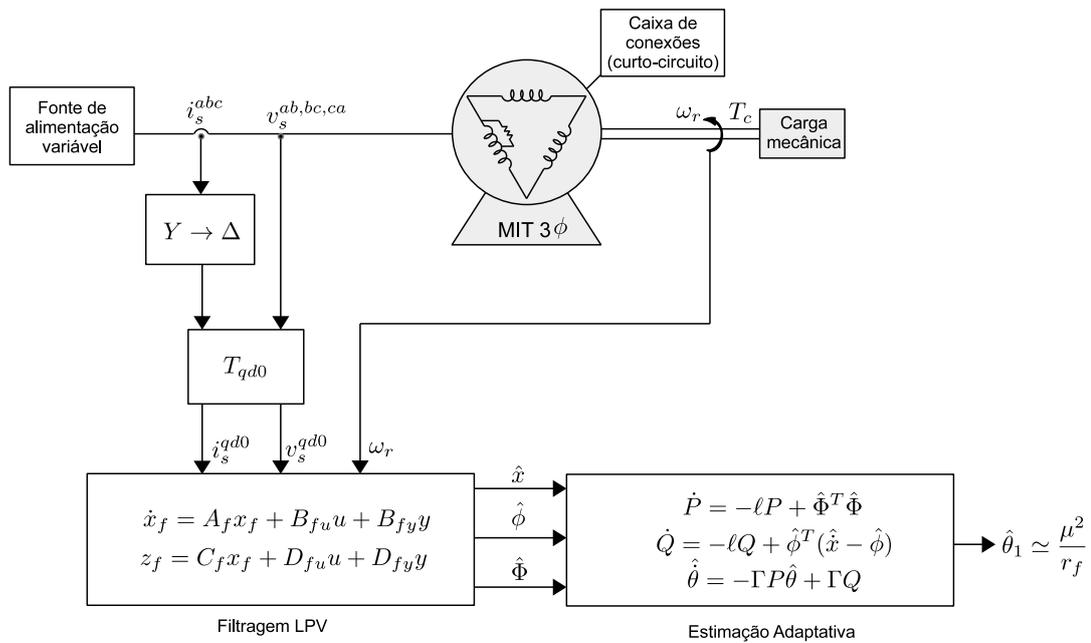
Após a definição e obtenção do conjunto de dados a ser analisado, deve-se realizar pequenos ajustes para adequação à metodologia proposta, sendo estes ajustes a conversão da corrente $Y - \Delta$, a mudança de referência estático abc para o referencial rotativo $qd0$, e a composição dos vetores $u(t)$ e $y(t)$.

No *setup* experimental, a fonte de alimentação é conectada ao motor em configuração delta, realizando a medição e aquisição das tensões e correntes de linha. A modelagem apresentada no Capítulo 3 considera o motor conectado na configuração estrela, contudo, considerando que o modelo representa individualmente as fases do MIT, este pode ser utilizado de forma adequada, sendo necessário apenas a adequação e conversão das correntes de linha para fase, para obter-se as respectivas tensões e correntes individuais, para cada fase do MIT. Tal conversão foi realizada numericamente por meio do *software* MATLAB[®]. Em seguida, realiza-se a modificação do referencial estático abc para referencial rotativo $qd0$, o qual pode ser obtido aplicando aos vetores de corrente — então adequados — e

tensão a transformação apresentada na Equação (90). Esta alteração de referencial deve-se à adequação ao referencial utilizado no desenvolvimento do modelo matemático do MIT.

Por fim, compõe-se os vetores que serão utilizados como entradas ao processo de filtragem, $u(t)$ e $y(t)$, de acordo com as Equações (173) e (179). O vetor $u(t)$ é composto pelas tensões $v_s^q(t)$, $v_s^d(t)$, $v_s^0(t)$, $v_s^{ab}(t)$, bem como pela derivada de $v_s^{ab}(t)$, que pode ser obtida derivando numericamente a tensão aplicada a fase a do motor. Para a composição de $y(t)$, utiliza-se as correntes em referencial rotativo $i_s^q(t)$, $i_s^d(t)$ e $i_s^0(t)$, juntamente com a velocidade mecânica $\omega_r(t)$. Desta forma, o procedimento de estimação paramétrica adaptativa pode ser aplicada ao MIT, com o objetivo de estimar a falha de curto-circuito do estator. De forma resumida, a Figura 8 apresenta uma ilustração contendo o processo de estimação aplicado ao MIT, expondo a metodologia utilizada.

Figura 8 – Diagrama de implementação.



Fonte: Autoria Própria.

5.3 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo apresentou-se os passos necessários para a obtenção de um estimador de falha de curto-circuito, por meio da metodologia de filtragem LPV e estimação adaptativa, previamente expostas no Capítulo 2. Desta forma, foi exposto a modelagem do filtro, contendo as componentes $x(t)$, $\phi(t)$ e $\Phi(t)$, a parametrização do filtro, bem como sua síntese. Expõe-se o *dataset* utilizado neste trabalho, além da bancada experimental, os quais serão utilizados para o desenvolvimento e validação do método. No Capítulo 6, as simulações e resultados obtidos com a aplicação do método serão apresentados.

6 RESULTADOS COMPUTACIONAIS E EXPERIMENTAIS

Neste capítulo, serão apresentados os resultados da aplicação da metodologia de estimação de falha, bem como sua análise. Tais resultados foram obtidos tanto via simulação computacional, como por meio do processamento e análise dos dados experimentais, contidos no *dataset* previamente apresentados na Seção 5.2. Desta forma, será possível verificar o comportamento da técnica em simulações e, então, validá-las com dados experimentais. Pode-se também verificar, neste capítulo, a relação entre o pseudo-parâmetro proposto e a falha aplicada ao motor.

O capítulo será dividido em duas partes, as quais apresentam respectivamente os resultados de simulação computacional e os resultados compostos por dados experimentais. Os resultados simulados foram obtidos considerando o modelo assimétrico do MIT, desenvolvido no Capítulo 3 e representado pela Equação (140), o qual permite emular o comportamento do motor sob diferentes condições e severidades de curto-circuito do enrolamento do estator. Na etapa de simulação, serão abordados os seguintes aspectos:

- Dinâmica do modelo computacional diante de falhas;
- Precisão da filtragem e da estimação do parâmetro Θ_1 ;
- Comportamento da estimação diante da evolução temporal da falha;
- Efeitos do desequilíbrio de carga e alimentação nas estimações.

Já para a aplicação da técnica considerando os dados experimentais, será avaliado o desempenho do método em três diferentes condições de operação, as quais são: 1) estimação em condições nominais de alimentação e carga; 2) estimação sob variação de carga; e 3) alimentação desequilibrada, as quais serão exposta na Seção 6.2.

6.1 RESULTADOS SIMULADOS

Realizou-se a simulação do modelo assimétrico do motor proposto, apresentado na Equação (140) simulando a operação do motor 1 (1 cv), o qual possui parâmetros apresentados na Tabela 2. O motor é acionado inicialmente em condições nominais, ocorrendo a incidência de uma falha de curto-circuito no instante $t = 1,5$ s. Utilizou-se, para as simulações, as severidades e resistências de curto apresentadas na Tabela 5. Para a representação de possíveis ruídos nos sinais a serem processados, utilizou-se a Equação (183) para a emulação do sinal exógeno, com $f = 60$ Hz.

$$w(t) = 0,05 \cos(40\pi ft) + 0,125 \sin(24\pi ft). \quad (183)$$

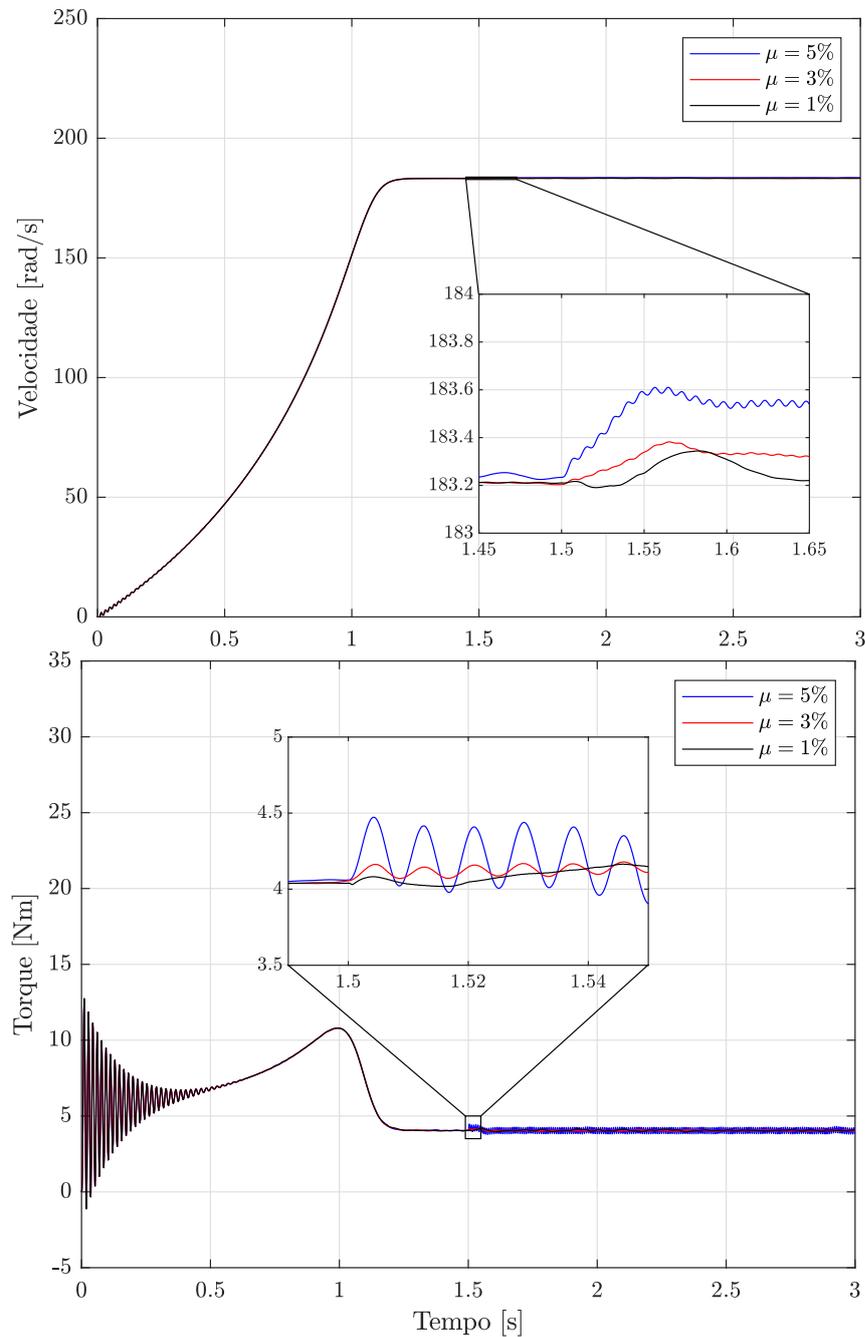
Tabela 5 – Condições e parâmetros de falha.

μ [%]	0	1	3	5	10	15	20
r_f [Ω]	∞	20	10	5	2	1	1

Fonte: Autoria Própria.

A Figura 9 apresenta a curva de velocidade mecânica e torque eletromagnético obtidos, para as condições de falha de 1%, 3% e 5%, aplicadas ao MIT.

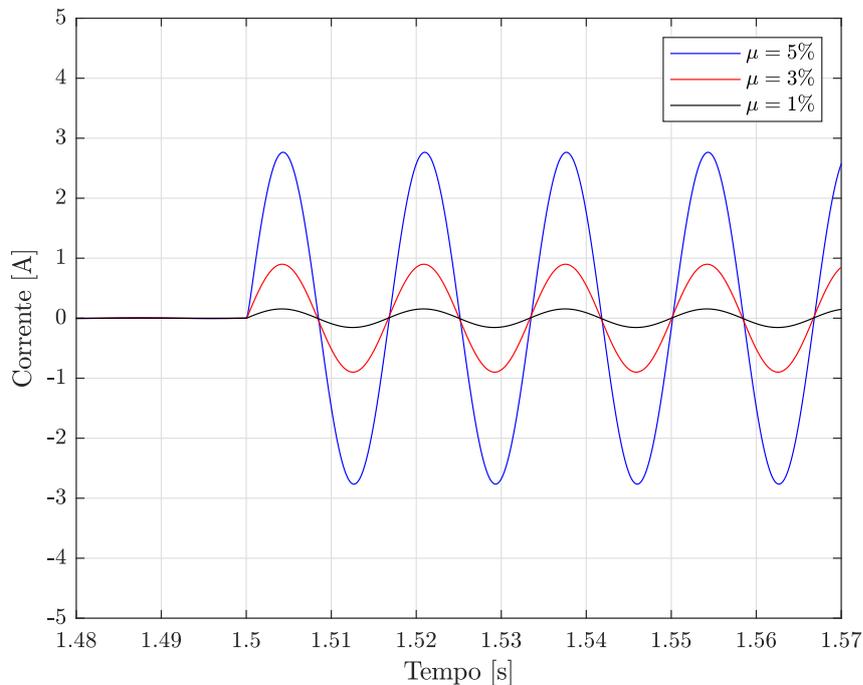
Figura 9 – Simulação — Velocidade e torque magnético sob falha.



Fonte: Autoria Própria.

É possível notar que, após a incidência da falha, ondulações são verificadas na velocidade mecânica do motor, em conjunto com uma pequena aceleração, proporcionais ao fator de severidade da falha. Este fenômeno é causado pela assimetria resultante no campo eletromagnético da máquina, causando oscilações no torque eletromagnético do motor. Este torque possui frequência de oscilação de 120 Hz e sua dinâmica é influenciada diretamente pela corrente de falha, conforme pode ser verificado pela Equação (139). No modelo proposto, a corrente de curto-circuito é modelada como um estado do sistema, podendo ter sua dinâmica observada durante a simulação. A Figura 10 apresenta as respectivas correntes de curto-circuito decorrentes das falhas de curto, observada nas fases do MIT, considerando fatores de severidade de 1%, 3% e 5%. Esta variável corresponde a corrente que circula pelo novo ramo, criada após a incidência da falha.

Figura 10 – Simulação — Corrente de curto-circuito.

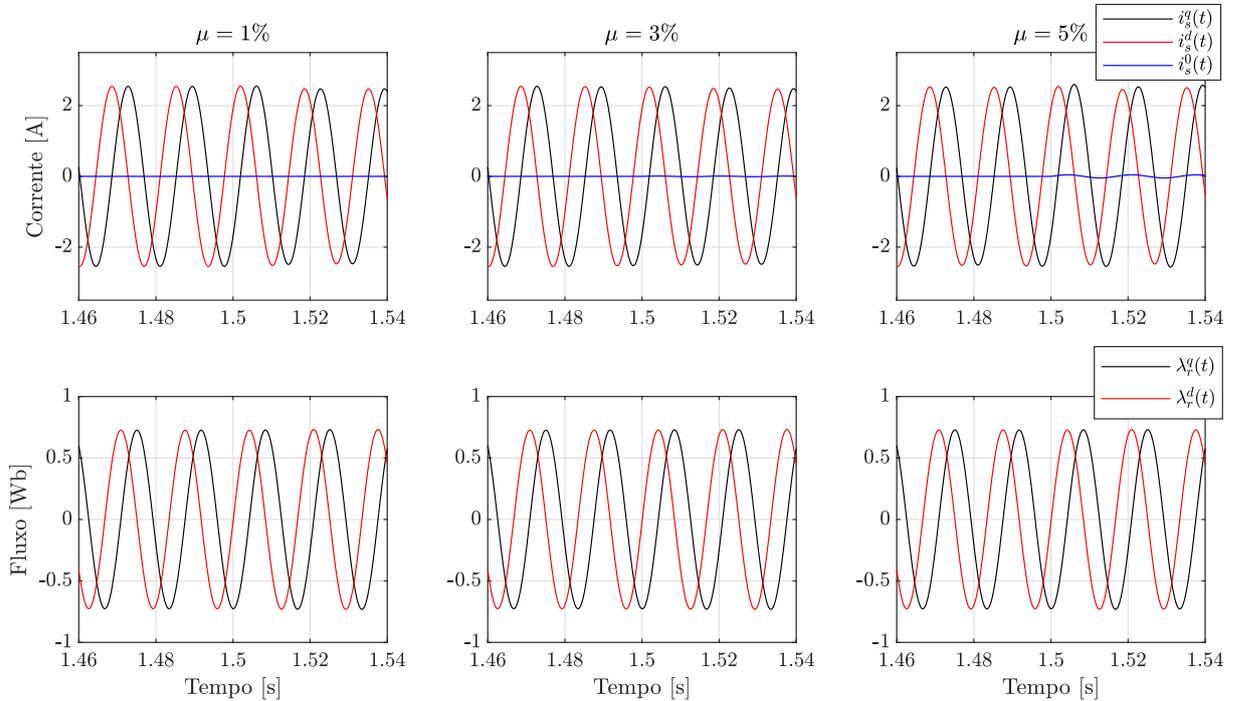


Fonte: Autoria Própria.

A Figura 11 apresenta a variação que ocorre nas correntes do estator, modeladas como estados do sistema, em que se observa, após a falha, um desequilíbrio entre as componentes $qd0$ da corrente do estator, mesmo o motor sendo alimentado por tensões equilibradas. A componente de eixo zero, que é nula para condições equilibradas, passa a ser notada. Ao analisar a Equação (155), percebe-se que a variável $i_s^d(t)$ não sofre influência direta pela corrente de curto-circuito, enquanto as variáveis $i_s^q(t)$ e $i_s^0(t)$ possuem termos com dependência ao estado $i_f(t)$, alterando-se na incidência de falha. A Figura 11 também apresenta a variação que ocorre no fluxo rotórico, em que apenas a componente $\lambda_r^q(t)$ possui

dependência a falha de curto-circuito. Contudo, nos níveis de severidades apresentados, as variações não foram observáveis.

Figura 11 – Simulação — Corrente e fluxo eletromagnético sob falha.



Fonte: Autoria Própria.

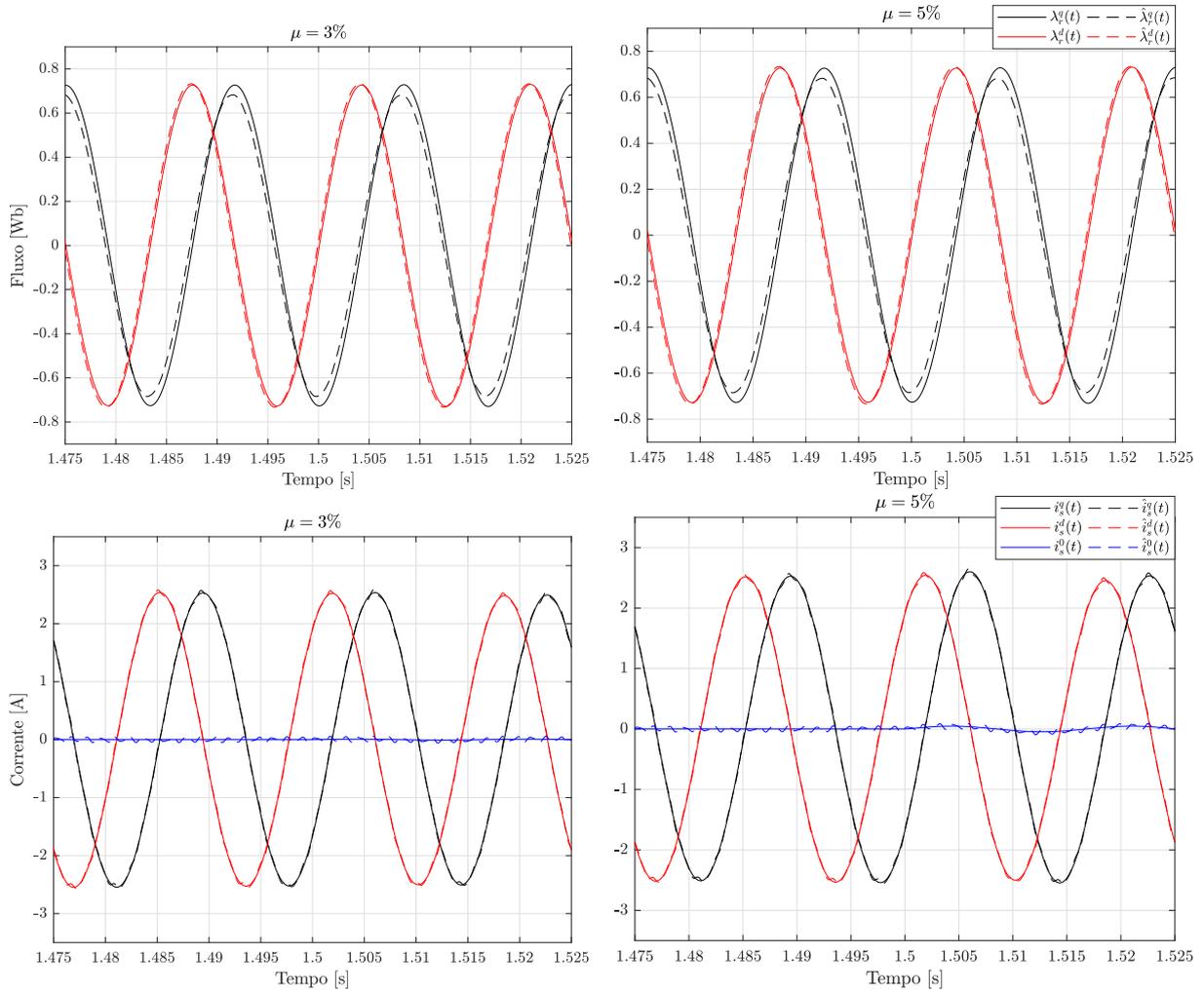
6.1.1 FILTRAGEM E ESTIMAÇÃO

Após a simulação do MIT e observados os efeitos do curto-circuito, prossegue-se para a etapa de filtragem e estimação do parâmetro desejado. A fim de avaliar o desempenho obtido na etapa de filtragem, considera-se como critério o Erro Quadrático Médio (EQM), entre as variáveis simuladas, a serem notadas por $b(t)$, e as respectivas variáveis estimadas, $\hat{b}(t)$. A Equação (184) apresenta a expressão utilizada para o cálculo do EQM:

$$E_{qm} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [b(i) - \hat{b}(i)]^2, \quad (184)$$

sendo N a quantidade total de amostras, neste caso discretizadas com frequência de 15 kHz, sendo esta a taxa de amostragem utilizada. Apresenta-se na Figura 12 a filtragem dos estados $x(t)$, aplicada ao motor 1 nas condições de 3% e 5% de falha, enquanto na Tabela 6 apresenta-se os EQMs obtidos para as estimações do fluxo, corrente, e o respectivo vetor de estados.

No instante $t = 1,5$ s, ocorre a incidência da falha, mas percebe-se qualitativamente que o filtro mantém seu desempenho após tal instante. A filtragem das correntes estáticas

Figura 12 – Simulação — Filtragem de $\hat{x}(t)$.

Fonte: Autoria Própria.

Tabela 6 – EQM de filtragem.

$\mu(\%)$	$E_{qm}(\times 10^{-3})$			
	λ_r^{qd}	i_s^{qd0}	ω_r	x
0	2,413	13,564	4,521	20,499
1	2,446	13,564	4,521	20,533
3	2,389	13,564	4,521	20,475
5	2,208	13,564	4,521	20,295
10	1,346	13,565	4,521	19,433
15	0,645	13,565	4,521	18,732
20	0,386	13,566	4,521	18,474

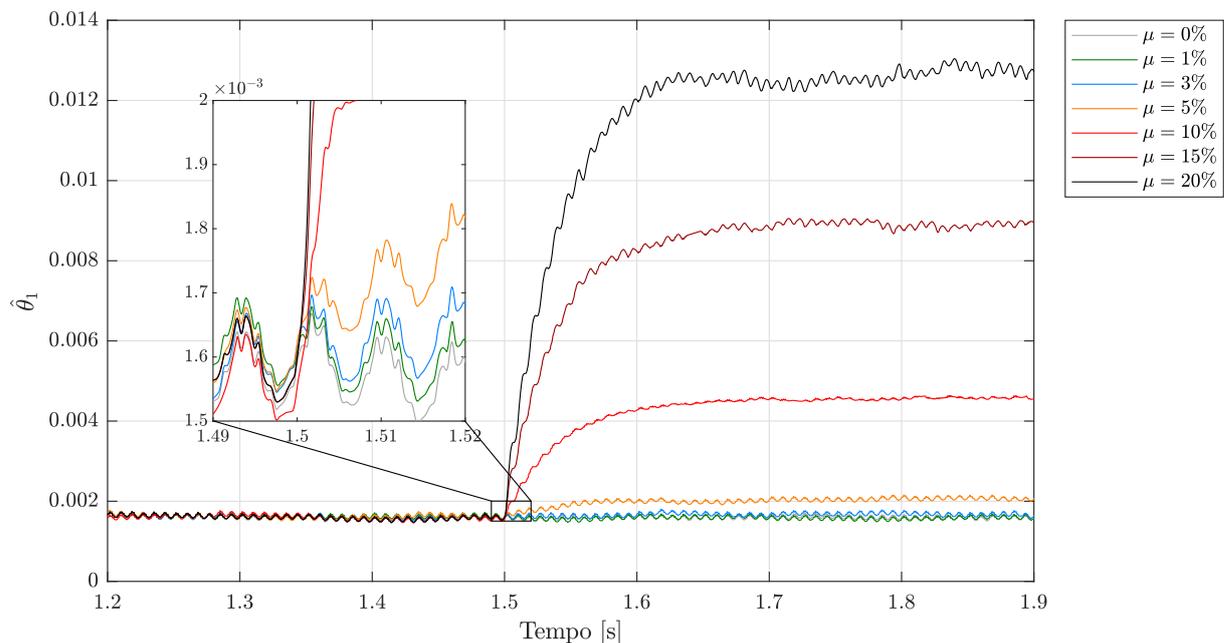
Fonte: Autoria Própria

e a velocidade mecânica apresentaram desempenho constante de filtragem, permitindo representar tais variáveis com EQMs de $13,564 \times 10^{-3}$ e $4,521 \times 10^{-3}$, respectivamente. Contudo, devido ao elevado γ obtido no processo de síntese do filtro via LMIs, apresentado

previamente na Seção 5.1, percebe-se baixa robustez ao ruído, os quais não são rejeitados corretamente. Verifica-se que o método possibilitou a obtenção dos estados $\hat{\lambda}_r^q(t)$ e $\hat{\lambda}_r^d(t)$, mesmo considerando que tais estados não são acessíveis. Observa-se que a estimação das correntes apresentou o maior erro de estimação entre as componentes. Uma possível abordagem e justificativa para esta observação é a baixa robustez ao ruído representado por $w(t)$, já que o ruído que atua nas correntes não é corretamente filtrado, prejudicando a estimação. Maiores detalhes sobre tal abordagem serão apresentadas na sequência desta seção.

Após a obtenção do vetor de estados filtrados, realiza-se a composição de $\hat{\phi}(t)$ e $\hat{\Phi}(t)$ e, então, o cálculo de $P(t)$, $Q(t)$ e $\Theta_1(t)$, por meio da solução das equações diferenciais (50)-(52). Desta forma, o resultado da estimação do pseudo-parâmetro $\hat{\Theta}_1$, para as sete diferentes severidades aplicadas, é apresentado na Figura 13. Após a aplicação da falha, a estimação adapta-se a um novo valor, buscando estimar o pseudo-parâmetro que se relaciona com a severidade da falha. Desta forma, a estimação permite representar, com certa proporcionalidade, a evolução da falha de curto-circuito.

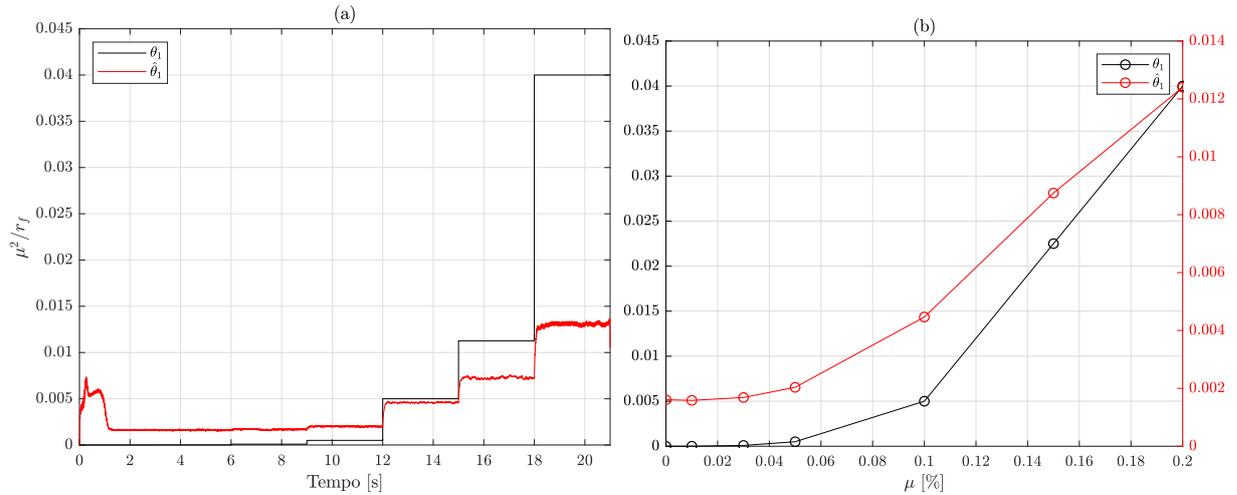
Figura 13 – Simulação — Estimação temporal de severidade.



Fonte: Autoria Própria.

Em situações reais, ocorre também a evolução temporal da falha, dada pelo crescimento da severidade e diminuição da resistência de falha presente no ramo de curto-circuito. Para observar o comportamento do método diante de tal condição, simulou-se o motor 1 em partida e operação nominal, ao qual aplicou-se a cada três segundos, um incremento na falha. Tal incremento seguiu as severidades e condições já apresentadas na Tabela 5, e os resultados obtidos são apresentados na Figura 14(a).

Figura 14 – Simulação — Evolução temporal da falha e estimação.



Fonte: Autoria Própria.

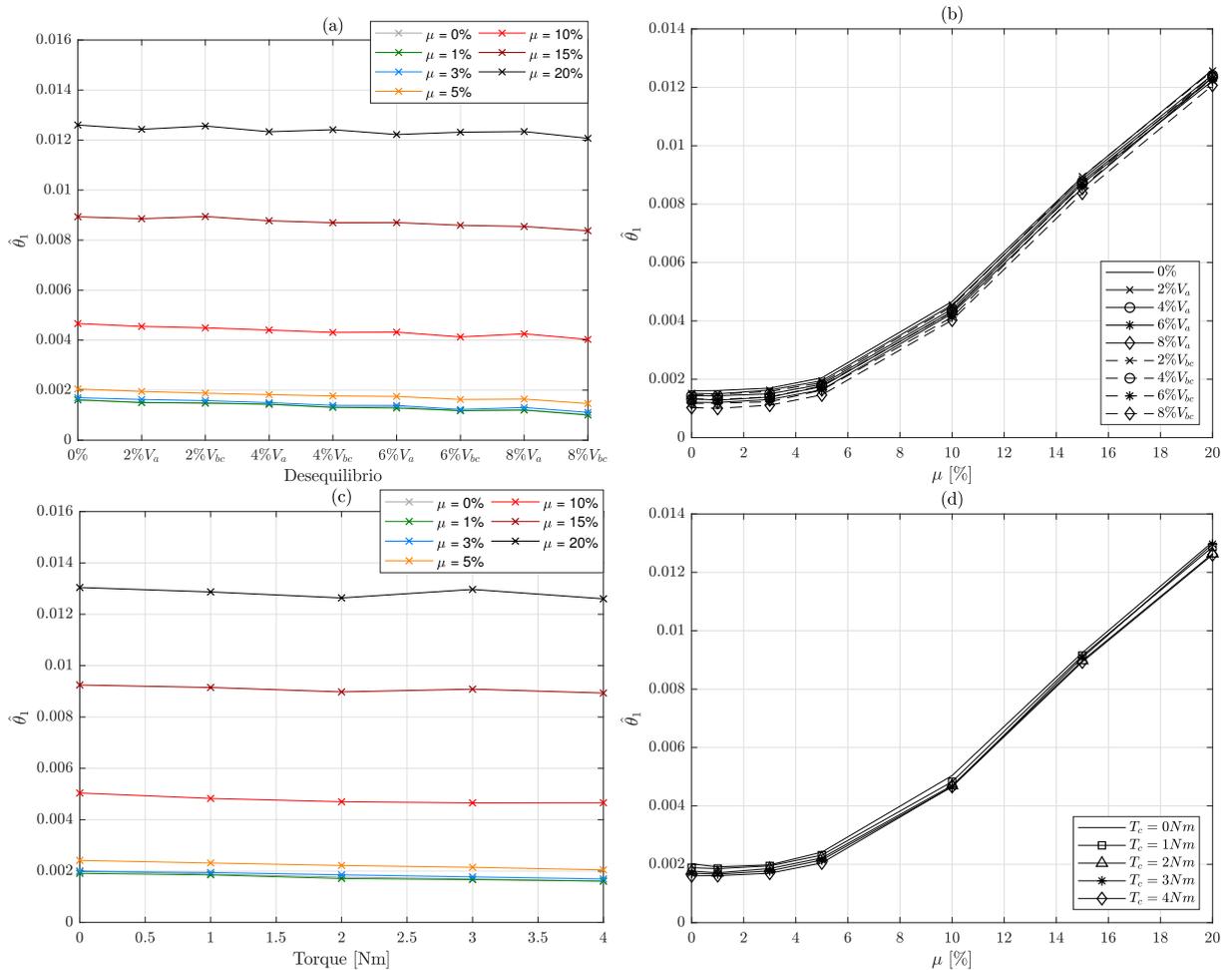
Após a partida do motor, a qual provoca variação no parâmetro estimado, $\hat{\Theta}_1(t)$ adapta-se para um valor de regime permanente. Após a incidência e evolução da falha, o pseudo-parâmetro adapta-se novamente, convergindo para um novo valor de estimação. Contudo, observa-se que a estimação relativa ao parâmetro demonstrou baixa precisão, possuindo erro de *offset* e não convergindo precisamente para os valores desejados. Nota-se que, devido à elevada norma \mathcal{H}_∞ , dada pela constante γ , a região que delimita o erro de estimação, dada pela Equação (54), pode apresentar valores elevados, prejudicando o desenvolvimento do método. A Figura 14(b) expõe a relação entre o pseudo-parâmetro estimado e a respectiva severidade de falha aplicada, em que se observa também o efeito da estimação incorreta. Ambas as curvas, estimada e simulada, apresentam comportamento e formas similares, porém em diferentes escalas, já que a estimação não apresentou sensibilidade para a correta estimação.

Percebe-se que as severidades de 1% e 3% representam, respectivamente, variações de 0,0125% e 0,225% dentro da região de parametrização definida, demandando alta sensibilidade do procedimento adaptativo para sua correta estimação. Uma possível abordagem para a solução desta limitação é a definição de regiões de parametrização de menor amplitude para o parâmetro incerto, limitando a região de operação do estimador. Tal abordagem poderia melhorar a sensibilidade do método, além de permitir a obtenção de filtros com norma \mathcal{H}_∞ mais vantajosas, trazendo maior robustez ao método. Conforme apresentado no Capítulo 4, a amplitude da região de parametrização possui influência direta na norma do filtro, e respectivamente no desempenho do método. Contudo, mesmo após verificada tal imprecisão, considerando o contexto de identificação de falhas, a detecção da ocorrência de uma falha ainda pode ser realizada, por meio da verificação de alterações e variações no pseudo-parâmetro estimado.

6.1.2 ESTIMAÇÃO EM CONDIÇÕES DE OPERAÇÃO DESEQUILIBRADAS

O desempenho do método de estimação foi também avaliado sob condições adversas de operação, tais como o desequilíbrio de alimentação e variações de carga. Tais condições são descritas em maiores detalhes na Seção 5.2. A Figura 15(a) apresenta a relação entre o valor médio estimado e a intensidade do desequilíbrio de alimentação, enquanto a Figura 15(b) expõe a relação entre a estimação e a severidade da falha aplicada. Por sua vez, as Figuras 15(c) e 15(d) expõem os resultados obtidos relativos a variação de torque de carga.

Figura 15 – Simulação — Estimação Θ_1 sob variação de carga e alimentação.



Fonte: Autoria Própria.

Com base nos resultados obtidos, observou-se pouca influência da variação das condições de operação no processo de estimação, quando comparado aos resultados em condições nominais. Percebe-se que para o motor 1, os desequilíbrios na tensão de alimentação foram os responsáveis pelas maiores diferenças observadas, em que se verifica que o aumento no desequilíbrio provocou *offset* negativo na estimação. Tal constatação também pode ser observada pelo cálculo do EQM obtido entre o vetor de estados simulado, $x(t)$, e o estimado, $\hat{x}(t)$, apresentado nas Tabelas 7 e 8. Verifica-se que os maiores erros se relacionam

a desequilíbrios elevados, tais como o de 8%. Contudo, tal diferença representa apenas cerca de 1,8% de severidade (μ) entre as curvas em condições nominais e em desequilíbrio. Ressalta-se que a aproximação da corrente de curto-circuito $i_f(t)$ apresentada na Seção 5.1, utiliza a tensão de alimentação aplicada ao enrolamento com falha, afetando diretamente tal aproximação em caso de desequilíbrio na tensão de alimentação.

Tabela 7 – EQM - Condições de alimentação desequilibradas.

$\mu(\%)$	$E_{qm}(\times 10^{-3})$								
	0%	-2% V_a	-4% V_a	-6% V_a	-8% V_a	$\pm 2\%V_{bc}$	$\pm 4\%V_{bc}$	$\pm 6\%V_{bc}$	$\pm 8\%V_{bc}$
0	20,499	20,460	20,433	20,410	20,394	20,449	20,462	20,554	20,720
1	20,533	20,587	20,434	20,425	20,447	20,493	20,472	20,573	20,761
3	20,475	20,413	20,483	20,364	20,363	20,422	20,439	20,543	20,679
5	20,295	20,251	20,209	20,194	20,163	20,236	20,241	20,313	20,479
10	19,433	19,374	19,323	19,283	19,246	19,347	19,335	19,397	19,529
15	18,732	18,678	18,635	18,598	18,579	18,645	18,630	18,684	18,809
20	18,474	18,434	18,402	18,387	18,376	18,387	18,377	18,436	18,561

Fonte: Autoria Própria.

Tabela 8 – EQM - Variação de carga.

$\mu(\%)$	$E_{qm}(\times 10^{-3})$				
	$T_c = 0Nm$	$T_c = 1Nm$	$T_c = 2Nm$	$T_c = 3Nm$	$T_c = 4Nm$
0	18,642	18,798	19,133	19,687	20,499
1	18,614	18,792	19,149	19,707	20,533
3	18,623	18,791	19,124	19,665	20,475
5	18,631	18,757	19,052	19,557	20,295
10	18,579	18,592	18,737	19,014	19,433
15	18,558	18,486	18,482	18,564	18,732
20	18,585	18,481	18,414	18,410	18,474

Fonte: Autoria Própria.

Contudo, mesmo sobre variações nas condições de operação, a curva que relaciona a estimação e a respectiva falha aplicada apresentou comportamento estável, podendo ser utilizada para inferir falhas em condições experimentais.

Desta forma apresentou-se, nesta seção, a simulação do MIT em condições de falha, bem como o processo de filtragem e estimação paramétrica aplicada. Observou-se que, apesar de apresentar baixa precisão absoluta quanto aos valores estimados, o método ainda permite identificar as falhas e mensurá-las de forma qualitativa, a partir da observação de sua variação. Os resultados obtidos permitirão a análise mais precisa dos resultados experimentais, obtidos utilizando dados reais de motores com falha e que serão expostos na seção seguinte.

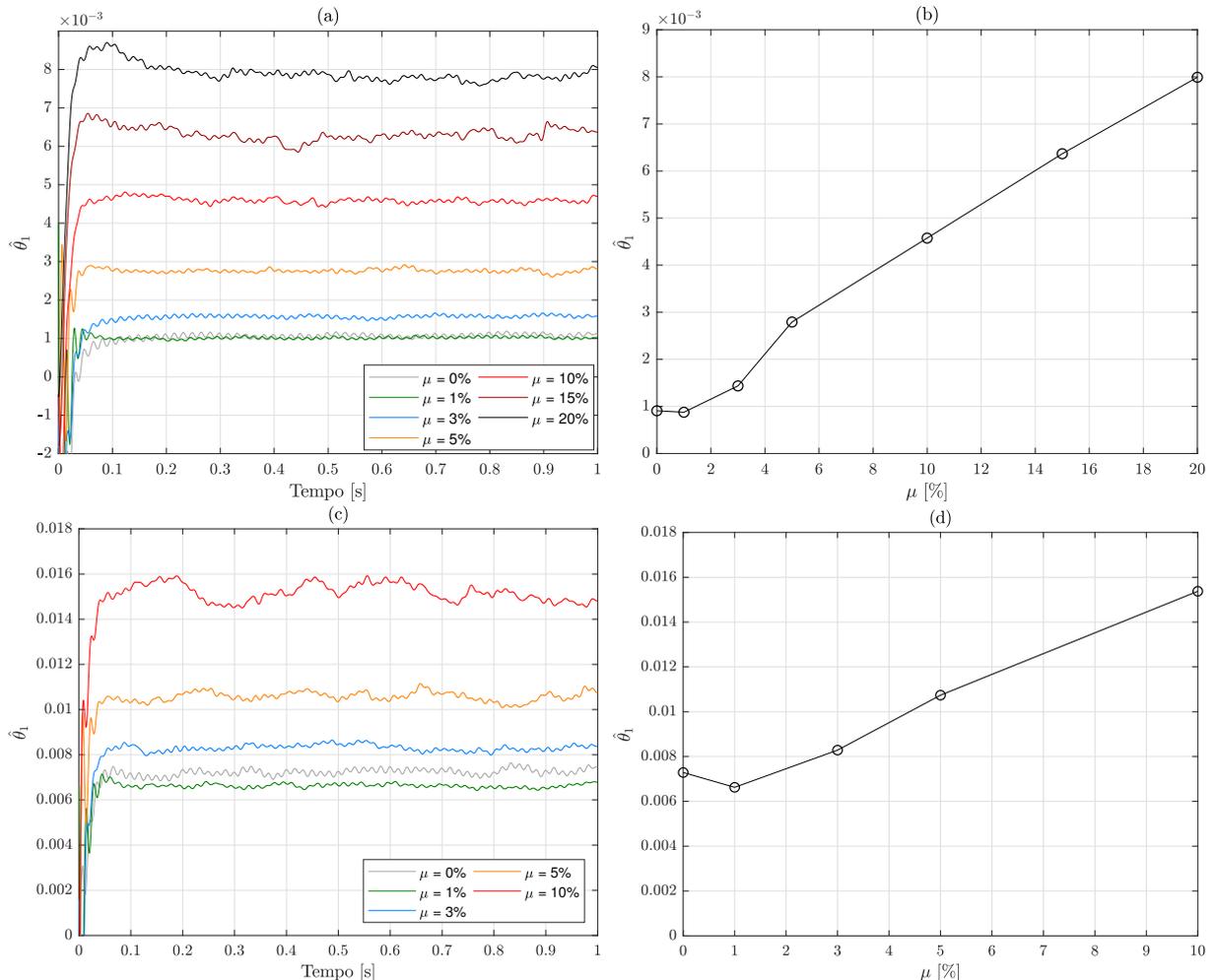
6.2 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Apresenta-se nesta seção, os resultados obtidos para a estimação do pseudo-parâmetro Θ_1 , e sua relação com a falha de curto-circuito. Os resultados foram obtidos por meio da implementação computacional do método, considerando os dados experimentais dos motores 1 e 2, e serão analisados no contexto de sua operação nominal, sob variação de carga e sob alimentação desequilibrada. Nesta seção, as figuras com referência (a) e (b) se relacionam ao motor 1, enquanto as com notação (c) e (d) são relativas ao motor 2.

6.2.1 ESTIMAÇÃO EM OPERAÇÃO NOMINAL

Considerando a operação dos MITs em condições nominais de carga e alimentados por uma fonte de alimentação trifásica equilibrada, as Figuras 16(a) e 16(c) apresentam a estimação temporal de $\hat{\Theta}_1(t)$, aplicada em motores sob falha de curto-circuito. Para o motor 1, considerou-se falhas de 0% à 20% de severidade, enquanto para o motor 2, considerou-se falhas de 0% à 10% de severidade.

Figura 16 – Estimação Θ_1 - Condições equilibradas.



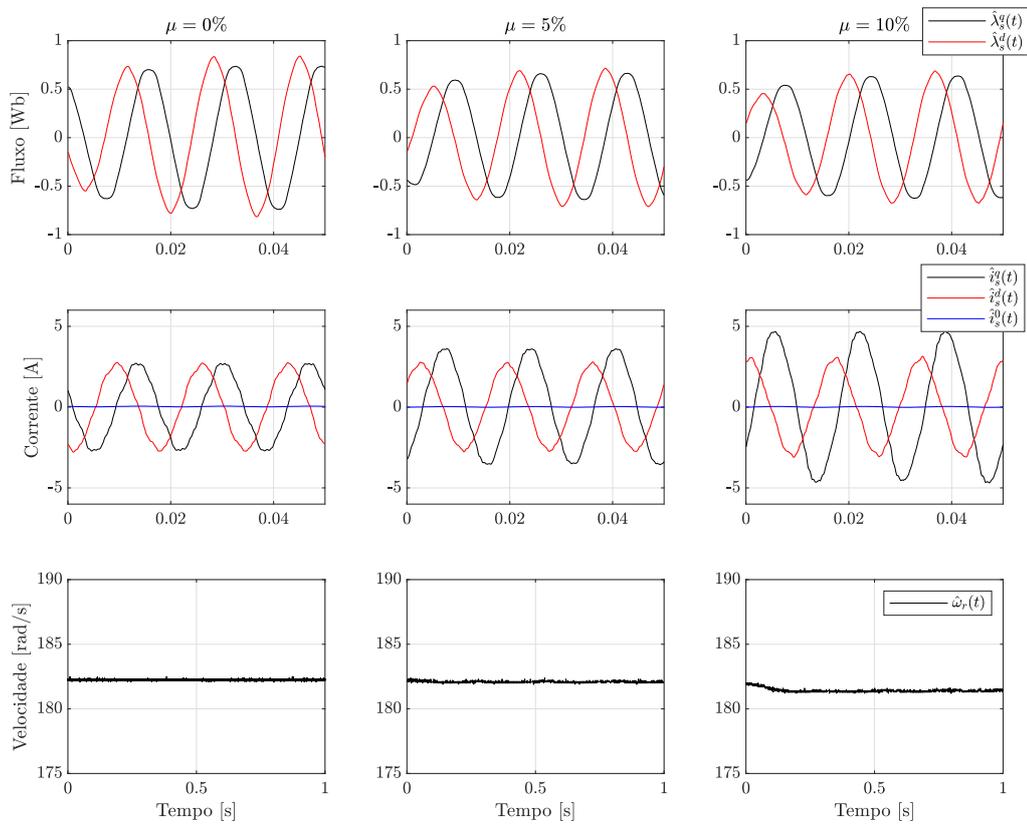
Fonte: Autoria Própria.

Observa-se nas Figuras 16(a) e 16(c) que, após a inicialização do procedimento, a qual se dá com $\hat{\Theta}_1(0) = 0$, a variável estimada modifica seu valor e rapidamente converge de forma proporcional ao nível da falha aplicada, permitindo identificar a presença de uma falha e mensurar seu nível de severidade. Para uma melhor visualização do resultado, as Figuras 16(b) e 16(d) apresentam a relação do parâmetro estimado $\hat{\Theta}_1(t)$ com a severidade da falha observada aos motores 1 e 2, respectivamente, nas quais considera-se para o cálculo, o valor médio do parâmetro estimado, obtido no período de execução.

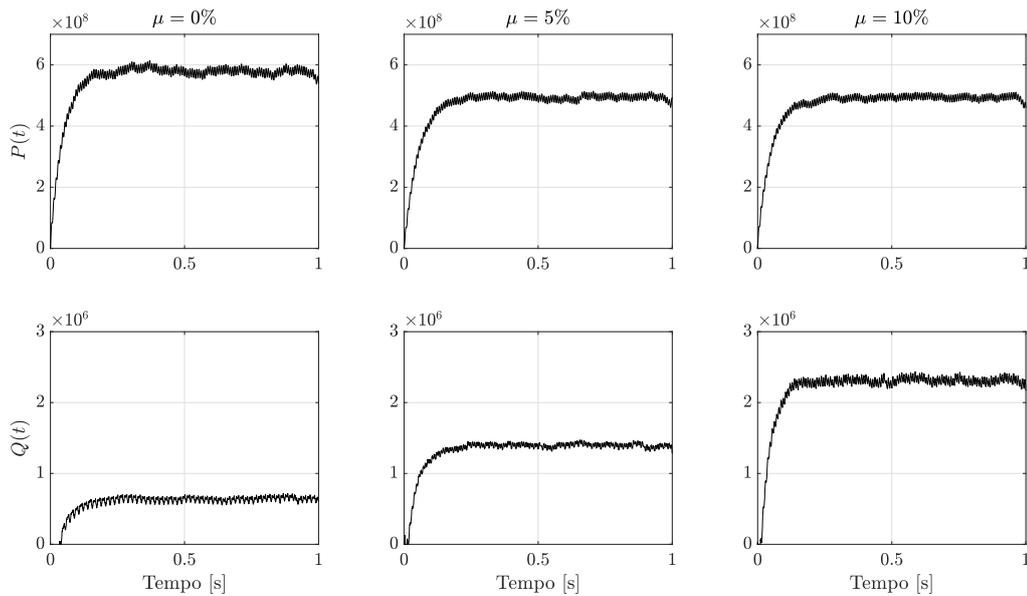
O resultado apresentado por meio da Figura 16 demonstra que o pseudo-parâmetro estimado apresenta características compatíveis com os resultados obtidos em simulação, com crescimento do valor estimado em relação a evolução da falha. Para a condição de ausência de falha ($\mu = 0\%$), nota-se que a estimação deveria apresentar valores nulos, contudo apresenta-se pequenos valores residuais, os quais podem ser justificados por erros obtidos no processo de filtragem, tais como já demonstrados nas simulações, bem como a pequenas assimetrias construtivas do motor. Ainda assim, para as severidades acima de 3%, o método apresentou maior distinção no processo de estimação, permitindo identificar e diferenciar as severidades aplicadas, bem como realizar a interpolação para valores intermediários àqueles aplicados no experimento. Observa-se que, para um mesmo valor de severidade, o valor de estimação obtido para os motores 1 e 2 apresentaram diferenças numéricas. Contudo, ressalta-se que o pseudo-parâmetro Θ_1 possui dependência a r_f , parâmetro que pode ser diferente para ambos os motores. No mais, cita-se que tal efeito é também observado em outros trabalhos disponíveis na literatura, tal como em Devi, Sarma e Rao (2015).

Para a estimação da falha e obtenção dos resultados, aplicou-se inicialmente a metodologia de filtragem, a qual permitiu a obtenção dos estados do motor considerando a assimetria e falha do motor, para a composição das variáveis $\hat{x}(t)$, $\hat{\phi}(t)$ e $\hat{\Phi}(t)$, e a solução das equações diferenciais $P(t)$, $Q(t)$ e $\Theta(t)$ relacionadas ao processo de estimação adaptativa. Apresenta-se, nas Figuras 17 e 19, os resultados da etapa de filtragem obtidos para os motores 1 e 2, respectivamente, com severidades de 0%, 5% e 10%. Após a obtenção de $\hat{x}(t)$, pode-se realizar a síntese de $\hat{\phi}(t)$ e $\hat{\Phi}(t)$. O procedimento é realizado computacionalmente e, então, prossegue-se para a solução das equações diferenciais (50) e (51), representadas nas Figuras 18 e 20 pelas variáveis $P(t)$ e $Q(t)$, respectivamente.

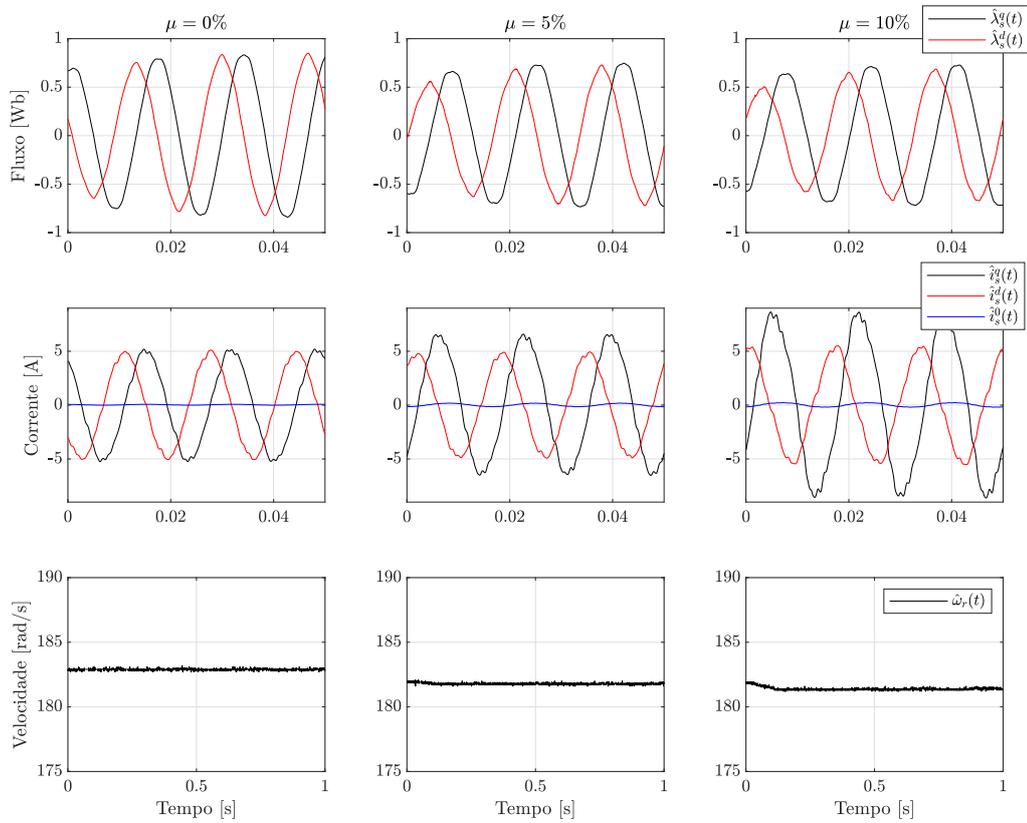
Nota-se que a obtenção dos estados $\hat{\lambda}_r^q(t)$ e $\hat{\lambda}_r^d(t)$ é vantajosa por si só, já que tais variáveis não são comumente acessíveis no motor de indução. Assim, a técnica de filtragem permite obtê-las mesmo considerando a incidência da falha no MIT. Contudo, percebe-se que, devido ao alto valor de γ obtido durante a solução das LMIs e síntese do filtro, a etapa de filtragem apresentou baixa robustez ao ruído. Desta forma, pequenos ruídos oriundos do sinal de corrente e velocidade são também visualizados nos sinais após a filtragem.

Figura 17 – Filtragem $\hat{x}(t)$ - Motor 1.

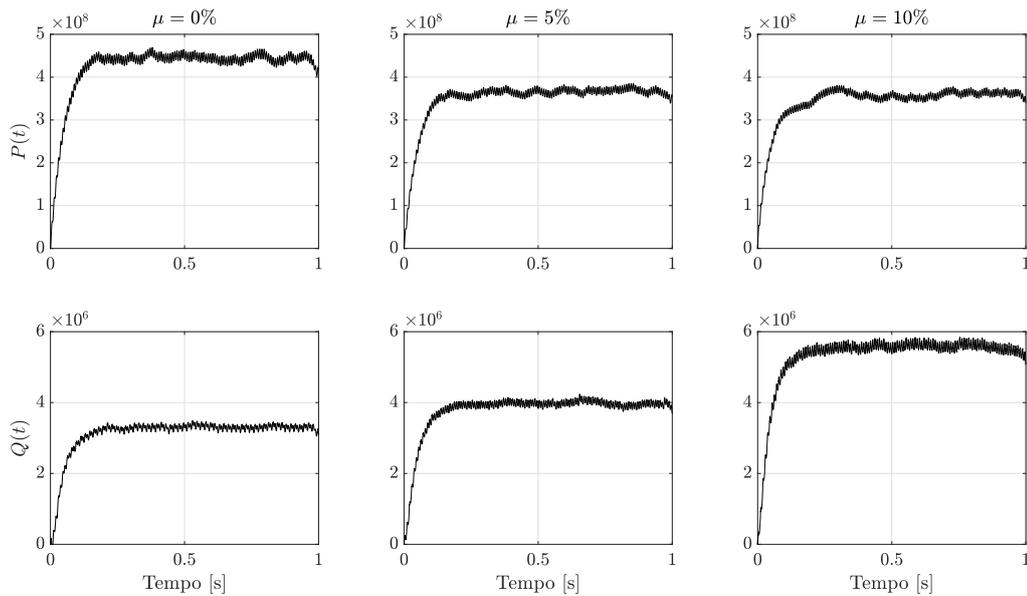
Fonte: Autoria Própria.

Figura 18 – Solução de $P(t)$ e $Q(t)$ - Motor 1.

Fonte: Autoria Própria.

Figura 19 – Filtragem $\hat{x}(t)$ - Motor 2.

Fonte: Autoria Própria.

Figura 20 – Solução de $P(t)$ e $Q(t)$ - Motor 2.

Fonte: Autoria Própria.

Contudo, nota-se que o filtro ainda é robusto à variação do parâmetro $\Theta_1(t)$, permitindo a síntese do fluxo rotórico, mesmo sob falhas. Observa-se com estes resultados também que a conversão do modelo não-linear para a abordagem LPV se mostrou eficaz, permitindo representar não-linearidades no modelo por meio dos parâmetros variantes determinados na parametrização do modelo.

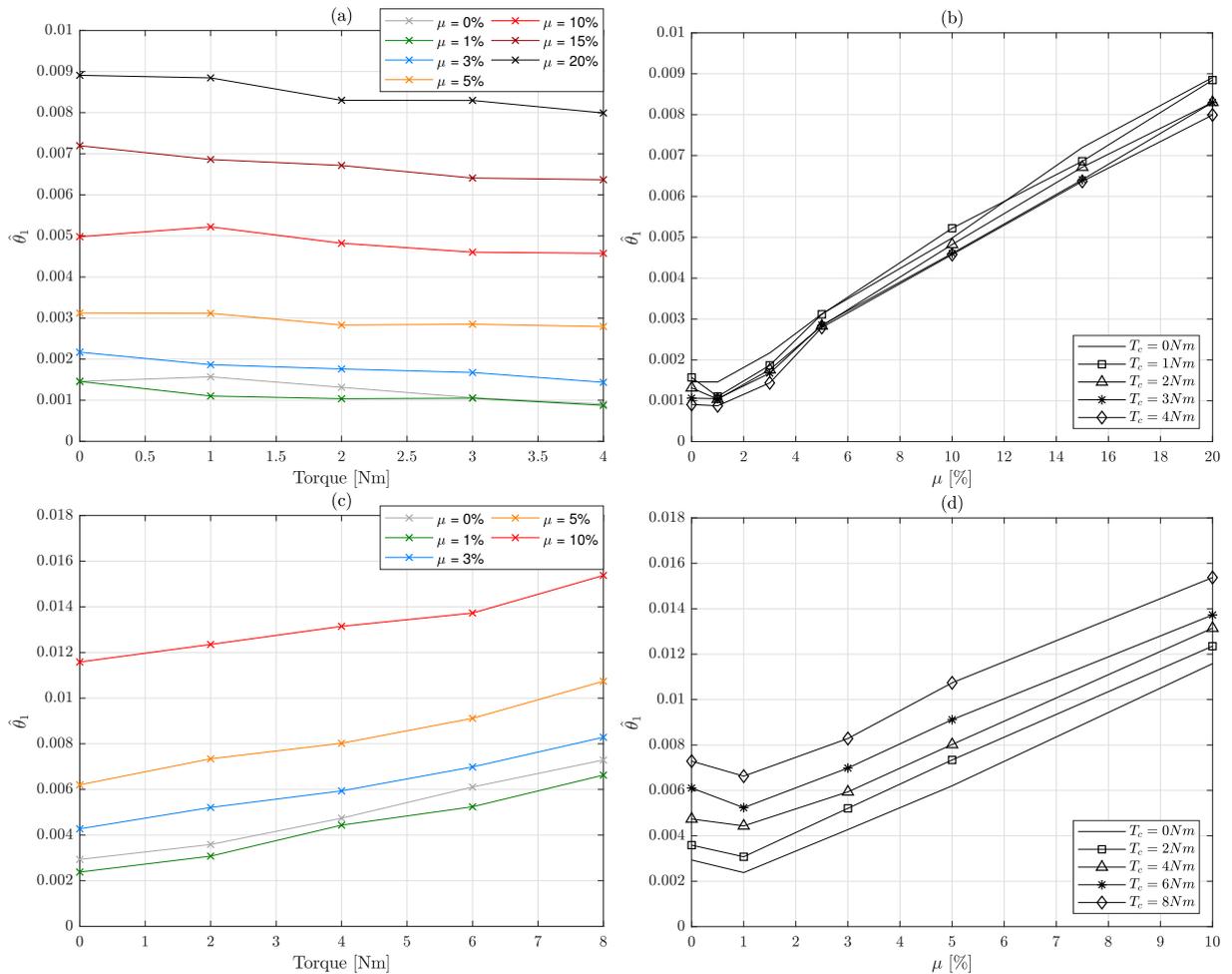
Desta maneira, a partir da estimação e monitoramento do parâmetro $\hat{\Theta}_1(t)$, pode-se inferir a evolução temporal da falha de curto-circuito no motor. A metodologia apresentada é capaz de ser aplicada em sistemas de acionamento e proteção de MITs, podendo ser utilizada para o desenvolvimento de indicativos de manutenção preditiva, alarmes ou, até mesmo, para a atuação na proteção e desligamento do equipamento em caso de falhas de alta severidade, contribuindo para a confiabilidade e segurança do sistema ao qual o MIT está aplicado.

6.2.2 ESTIMAÇÃO SOB VARIAÇÃO DE CARGA

Para a verificação da estimação paramétrica frente as variações de carga mecânica, realizou-se testes considerando diferentes cargas aplicadas aos motores 1 e 2. Tais cargas referem-se a operação do motor em condições equilibradas de alimentação, mas com cargas mecânicas de, aproximadamente, 0%, 25%, 50%, 75% e 100% do torque nominal, considerado de 4,01 Nm para o motor 1 e 8,12 Nm para o motor 2, conforme apresentado na Seção 5.2. Devido ao elevado número de amostras pertencentes ao conjunto analisado, a estimação temporal realizada não será apresentada, contudo, apresenta-se nas Figuras 21(a) e 21(c), a relação entre o valor estimado $\hat{\Theta}_1(t)$ com a carga aplicada ao motor, obtida considerando o valor médio do parâmetro estimado no período de um segundo, enquanto as Figuras 21(b) e 21(d) apresentam a relação entre o valores estimados e a severidade da falha aplicada ao motor.

Observa-se que para as diferentes severidades de falha, a variação do torque de carga trouxe oscilação ao parâmetro estimado, mas ainda permitindo boa estimação e separação entre as curvas interpoladas para diferentes severidades. De forma semelhante à observada na condição de operação nominal, valores baixos de severidade, tais como $\mu = 0\%$ e $\mu = 1\%$, apresentam uma certa mescla no resultado de estimação, prejudicando a diferenciação entre os níveis de severidade. Contudo, tal efeito também é observado e discutido em trabalhos presentes na literatura, tais como em Nguyen et al. (2017), em que valores relativamente baixos de severidade apresentam incorreta estimação e classificação. Entretanto, os demais valores de severidade permitiram distinção das diversas severidades.

Na Figura 21(b), é possível verificar que a interpolação dos dados apresentou curva semelhante aquela obtida em simulação, demonstrando a correta aplicação do método. Contudo, na Figura 21(d), percebe-se que a elevação do torque aplicado no motor leva a um *offset* mais notável para o motor 2. Considerando as condições limitantes de operação como

Figura 21 – Estimação $\hat{\Theta}_1$ - Variação de carga mecânica.

Fonte: Autoria Própria.

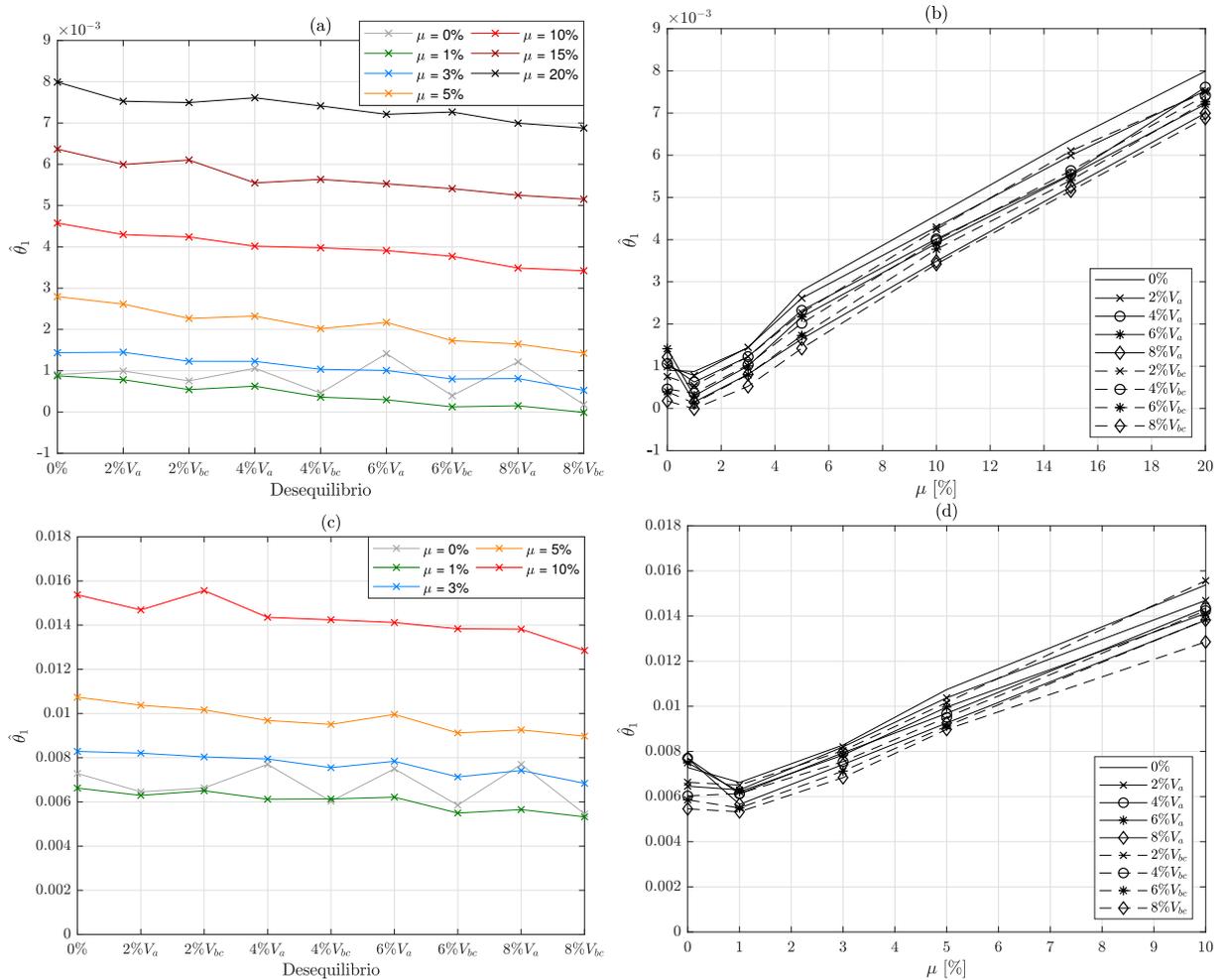
a vazio e em plena carga, pode-se definir faixas de estimação para a interpolação dos valores. Neste caso, o valor da falha não seria precisamente conhecido, mas sim pertencente a um intervalo definido; por exemplo, considerando que para o motor 1, $\hat{\Theta}_1(t) = 2 \times 10^{-3}$, pode-se inferir que $\mu(\%) \in [2, 5, 3, 8]$, da mesma forma que para o motor 2, $\hat{\Theta}_1(t) = 8 \times 10^{-3}$, $\mu(\%) \in [2, 6, 6, 6]$, compondo limitantes mínimos e máximos para a estimação da falha.

Dentre os fatores os quais podem justificar tais resultados, cita-se principalmente erros oriundos da estimação tais como observado na Seção 6.1. Percebe-se também que o modelo matemático do MIT, com o qual desenvolveu-se a metodologia, considera torque de carga nulo, levando em consideração apenas a componente de atrito. Tal condição foi determinada neste trabalho, devido à entrada de carga não satisfazer o requisito de ser persistentemente excitável. Contudo, tal definição pode apresentar-se de forma restritiva ao desempenho do método, considerando equipamentos com torque nominal mais elevado.

6.2.3 DESEQUILÍBRIO DE ALIMENTAÇÃO

Para a análise do desempenho do método diante de alimentação desequilibrada, aplicou-se a metodologia nas amostras do *dataset* com carga nominal, mas alimentadas com tensões assimétricas, conforme exposto na Seção 5.2, compondo um conjunto de 63 amostras para o motor 1 e 45 amostras para o motor 2. As Figuras 22(a) e 22(c) apresentam a estimação do parâmetro $\hat{\Theta}_1(t)$, em relação a taxa de desequilíbrio aplicada, para desequilíbrio de até 8%, enquanto as Figuras 22(b) e 22(d) apresentam a interpolação dos valores estimados com a severidade de falha aplicada aos motores.

Figura 22 – Estimação Θ_1 - Desequilíbrio de alimentação.



Fonte: Autoria Própria.

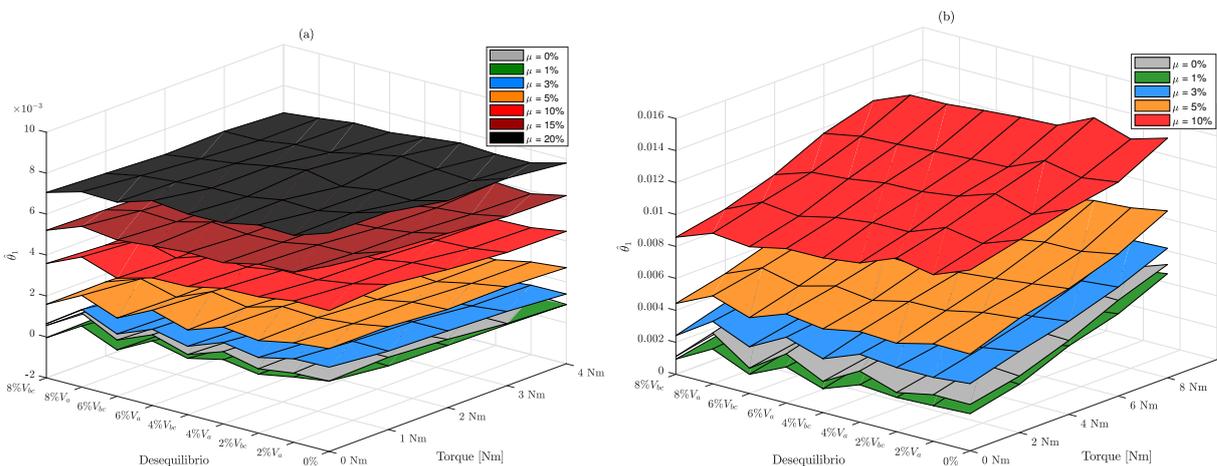
A partir das Figuras 22(a) e 22(c), observa-se que o desequilíbrio de tensão causa variações no valor estimado. Percebe-se que as condições de falha incipiente apresentaram maior combinação entre seus respectivos valores de estimação, principalmente em situações de desequilíbrio severo, tais como aqueles superiores a 4%. Contudo, de forma similar aos resultados previamente apresentados, nota-se a evolução do parâmetro frente à severidade de falha aplicada ao motor, permitindo relacionar o incremento de $\hat{\Theta}_1(t)$ com o aumento da

falha. Condições de desequilíbrio menos severas, como aquelas menores a 4% apresentaram menor variação, demonstrando a robustez do método frente a desequilíbrios moderados.

As Figuras 22(b) e 22(d) expõem, também, a curva da estimação paramétrica em relação a falha, bem como o *offset* causado pelo desequilíbrio de alimentação. Nesta abordagem, tal como na variação de carga, percebe-se que um respectivo valor de estimação pode estar contido dentro de um intervalo de severidade. Por exemplo, observa-se que para o motor 1, $\hat{\Theta}_1(t) = 2 \times 10^{-3}$ corresponde a $\mu(\%) \in [3, 83, 6, 44]$. Caso limite-se o desequilíbrio máximo permitido para 4%, este resultado pertenceria a uma faixa de estimação ainda mais restrita, em que $\mu(\%) \in [3, 83, 4, 96]$. Uma possível justificativa para as variações na estimação é a aproximação da corrente de curto-circuito $i_f(t)$ utilizando a tensão de alimentação V_{ab} aplicada a fase a do motor, apresentada na Seção 5.1. Logo, observa-se que desequilíbrios de tensão, principalmente aqueles relacionados ao enrolamento a , onde a falha está localizada, afetam diretamente a metodologia, prejudicando a aproximação da corrente de curto-circuito utilizada.

A fim de verificar a influência de modo conjunto tanto da variação de carga quanto do desequilíbrio de alimentação, as Figuras 23(a) e 23(b) apresentam a representação espacial das amostras analisadas para os motores 1 e 2, respectivamente, relacionando o nível de severidade da falha com a carga aplicada e o desequilíbrio de tensão de modo conjunto.

Figura 23 – Superfície de estimação e classificação.



Fonte: Autoria Própria.

Para esta análise, são considerados os valores médio temporais de cada uma das 315 amostras obtidas para o motor 1 e 225 amostras para o motor 2. Observa-se a partir dos resultados apresentados que, tanto a variação da carga do motor quanto o desequilíbrio na tensão de alimentação, podem afetar o processo de estimação, gerando alterações no valor observado. Contudo, percebe-se que o método permite inferir os diversos níveis de falha, possibilitando diferenciá-los e verificar a evolução de sua severidade. Nesta

figura, observa-se que para severidades maiores que 3%, as estimações formam superfícies separáveis.

6.3 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Apresentou-se neste capítulo os resultados obtidos via simulação e experimentalmente, para a técnica de filtragem e estimação aplicada a detecção e estimação da falha de estator em MITs, demonstrando a aplicação da técnica e sua viabilidade para a determinação da severidade da falha. Destaca-se que os resultados experimentais demonstraram que o pseudo-parâmetro estimado $\hat{\Theta}_1(t)$ permitiu inferir, de forma qualitativa, o nível de severidade a partir do resultado de estimação. Encontra-se na literatura diversos trabalhos que utilizam a abordagem de pseudo-parâmetros para a determinação de forma indireta da severidade da falha, dentro os quais cita-se Guedes et al. (2019), Bouzid, Champenois e Tnani (2018) e Wu, Jiang e Wang (2020).

Destaca-se que, mesmo que as variações nas condições de alimentação e de torque introduzam alterações à estimação, ainda é possível inferir faixas de severidade para a falha identificada. Desta forma, o método pode ser utilizado em condições não nominais, assegurando limitantes para a falha inferida. Desta forma, o método apresenta vantagens frente a trabalhos disponíveis na literatura, os quais não abordam variações nas condições de operação, tal como Gu (2018) e Guezmil et al. (2017).

No mais, o aprimoramento na técnica de filtragem LPV pode também trazer melhor desempenho ao método, já que uma estimação mais precisa dos estados, com maior robustez a ruídos e ao parâmetro de falha acarretará em um menor erro de estimação. Novas abordagens para a etapa de inferência, que relacionem o nível de curto-circuito no equipamento com o valor estimado podem ser realizadas, como a comparação de resultados experimentais com aqueles obtidos em condições simuladas, bem como estudos relacionados a dinâmica da resistência de curto-circuito r_f . Novos resultados podem também ser obtidos utilizando o parâmetro estimado como variável de entrada em classificadores de padrões, aprimorando os resultados destes métodos com uma nova variável que possui correlação com a intensidade da falha aplicada.

Ressalta-se que a estimação foi realizada considerando dados reais de motores com falhas, mas de forma assíncrona e *off-line*. Contudo é possível aplicar a metodologia apresentada de forma *on-line*, já que após a síntese do filtro via LMIs, o problema baseia-se na solução de equações diferenciais de primeira ordem, as quais representam a dinâmica do sistema, e podem ser solucionadas em sistemas embarcados, com baixo custo computacional. Uma outra possível abordagem para a execução em sistemas embarcados é a discretização dos sistemas resultantes, ou até sua solução de maneira assíncrona, por meio do janelamento das amostras e sua posterior solução.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma proposta de aplicação da metodologia de estimação paramétrica ao MIT, utilizando filtragem robusta LPV. Apresentou-se a teoria de filtragem e estimação, as LMIs utilizadas para a síntese do filtro, a modelagem do sistema proposto e sua simulação computacional para análise e verificação. Posteriormente, realizou-se a aplicação da metodologia em dados experimentais de MITs, sob diversas condições de falha e operação. Pôde-se observar o comportamento do método em sua aplicação, sendo possível estimar os estados de maneira robusta e realizar a identificação da falha de curto-circuito.

Durante a implementação, utilizou-se a técnica de filtragem \mathcal{H}_∞ LPV, a qual permitiu representar não linearidades do modelo utilizado por meio de parâmetros variantes. Realizou-se uma análise de factibilidade e desempenho, utilizando como base a modelagem de um estimador de velocidade aplicado ao MIT, em que se observou que a parametrização de filtros para regiões amplas de operação podem prejudicar a síntese e factibilidade do filtro desejado.

Desenvolveu-se um modelo assimétrico do MIT representado em espaço de estados, permitindo a representação de falhas de curto-circuito, sendo esta uma das contribuições deste trabalho. Neste modelo, aplicou-se a metodologia de estimação paramétrica, com o objetivo de mensurar e estimar a falha de curto-circuito no enrolamento do estator. O desenvolvimento do estimador considerou um pseudo-parâmetro, o qual se relaciona com a falha e permite acompanhar sua evolução. A comparação entre os resultados simulados e experimentais demonstrou a validade do método, bem como possibilitou observar os efeitos de desequilíbrios de tensão e carga no processo de estimação.

A técnica de estimação permitiu identificar e mensurar, de forma qualitativa, a falha aplicada. Observou-se que o parâmetro estimado se modifica de forma proporcional à falha, permitindo a definição de faixas de severidade. Observou-se que falhas incipientes, tais como 1%, apresentaram certa confusão com a condição de ausência de falha, contudo, falhas de severidade mais elevadas permitiram uma melhor identificação de falha. No mais, a metodologia empregada utiliza sinais de corrente, tensão e velocidade, sendo adequada para aplicação *on-line*. Em síntese, apresenta-se as principais contribuições deste trabalho listadas abaixo:

- Desenvolvimento de uma representação em espaços de estados do modelo assimétrico do MIT, considerando a incidência de falha de curto-circuito no estator;
- Elaboração do Teorema 2, o qual permitiu maior flexibilidade para a síntese do filtro;
- Análise de factibilidade das LMIs, dadas as condições de parametrização do motor;

- Conversão da representação não-linear do MIT para LPV, permitindo sua utilização em técnicas de filtragem ótimas;
- Aplicação de uma metodologia de filtragem e estimação adaptativa para a identificação e mensuração da falha de curto-circuito.

7.1 PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS

O método proposto neste trabalho possui pontos que podem ser aprimorados, visando a evolução do trabalho e obtenção de melhores resultados. Primeiramente, resalta-se o desempenho do filtro robusto utilizado. Novas LMIs com condições menos conservadoras podem aprimorar a filtragem, além de permitir uma estimação paramétrica mais precisa, com maior robustez. Cita-se também o estudo e investigação da metodologia de estimação paramétrica utilizando filtros estocásticos não-lineares, tais como o EKF, os quais possibilitariam a estimação da dinâmica de curto-circuito sem a necessidade de aproximações ou considerações adicionais, possibilitando um melhor desempenho.

Considerando o estudo e análise de falhas em máquinas elétricas, pode-se realizar o estudo e desenvolvimento de novos modelos, possibilitando a representação de outras falhas, tais como falhas de rolamento e de rotor, e sua respectiva detecção e mensuração com a técnica aqui apresentada. Cita-se também a implementação da metodologia em *hardware*, possibilitando a filtragem e estimação no MIT em tempo real.

7.2 PUBLICAÇÕES RELACIONADAS AO TRABALHO

Durante o desenvolvimento desta dissertação, colaborou-se e participou-se da elaboração e publicação dos seguintes trabalhos:

- AGULHARI, C. M., NETO, J. M. M., LACERDA, M. J., **SOUZA, R. P. P.**, CASTOLDI, M. F., GOEDTEL, A. Robust real-time parameter estimation for linear systems affected by external noises and uncertainties. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 35, n.2, p. 203-220, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/acs.3197>>.
- **SOUZA, R. P. P.**, AGULHARI, C. M., GOEDTEL, A., CASTOLDI, M. F., Inter-turn short-circuit fault diagnosis using robust adaptive parameter estimation. Submetido para publicação.

REFERÊNCIAS

- ABBASZADEH, M.; MARQUEZ, H. J. Dynamical robust \mathcal{H}_∞ filtering for nonlinear uncertain systems: An lmi approach. *Journal of the Franklin Institute*, v. 347, n. 7, p. 1227 – 1241, 2010. Citado na página 12.
- AEINFAR, V. et al. Parameter dependent filter design for linear continuous-time uncertain systems with arbitrarily time-varying parameters in polytopic domains. *Signal Processing*, v. 165, p. 83 – 89, 2019. Citado na página 62.
- AGULHARI, C. M. et al. Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 45, n. 3, p. 36:1–36:25, August 2019. Citado 3 vezes nas páginas 15, 27 e 58.
- AGULHARI, C. M. et al. Robust real-time parameter estimation for linear systems affected by external noises and uncertainties. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 35, n. 2, p. 203–220, 2020. Citado 7 vezes nas páginas 12, 13, 14, 20, 25, 28 e 29.
- ALONGE, F.; D’IPPOLITO, F.; SFERLAZZA, A. Sensorless Control of Induction-Motor Drive Based on Robust Kalman Filter and Adaptive Speed Estimation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 61, n. 3, p. 1444–1453, 2014. Citado na página 33.
- AMEID, T. et al. Rotor resistance estimation using Extended Kalman filter and spectral analysis for rotor bar fault diagnosis of sensorless vector control induction motor. *Measurement*, v. 111, p. 243 – 259, 2017. Citado na página 13.
- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. *Optimal Filtering*. Mineola, N.Y: Dover Publications, 2005. 357 p. Citado na página 12.
- BACCARINI, L. M. R.; MENEZES, B. R. de; CAMINHAS, W. M. Fault induction dynamic model, suitable for computer simulation: Simulation results and experimental validation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 24, n. 1, p. 300 – 311, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 39, 42, 43 e 44.
- BAZAN, G. H. et al. Information theoretical measurements from induction motors under several load and voltage conditions for bearing faults classification. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, v. 16, n. 6, p. 3640–3650, 2020. Citado na página 71.
- BORGES, R. A.; PERES, P. L. D. \mathcal{H}_∞ LPV Filtering for Linear Systems with Arbitrarily Time-varying Parameters in Polytopic Domains. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA: [s.n.], 2006. p. 1692–1697. Citado na página 12.
- BOUZID, M. B. K.; CHAMPENOIS, G.; TNANI, S. Reliable stator fault detection based on the induction motor negative sequence current compensation. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 95, p. 490 – 498, 2018. Citado na página 93.
- BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. v. 15. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 24 e 27.

BRONIERA JUNIOR, P. *Diagnóstico de curto-circuito no enrolamento de estator em máquinas de indução trifásicas utilizando redes neurais artificiais*. Dissertação (Mestrado) — Cornélio Procópio: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014. Citado na página 71.

CHANG, X.-H.; PARK, J. H.; TANG, Z. New approach to \mathcal{H}_∞ filtering for discrete-time systems with polytopic uncertainties. *Signal Processing*, v. 113, p. 147 – 158, 2015. Citado na página 12.

CHANG, X. H.; SONG, J.; ZHAO, X. Resilient H_∞ filter design for continuous-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, p. 1–1, 2020. Citado na página 12.

CHEN, L.; PATTON, R.; GOUPIL, P. Robust fault estimation using an LPV reference model: ADDSAFE benchmark case study. *Control Engineering Practice*, v. 49, p. 194 – 203, 2016. Citado na página 13.

DEVANNEAUX, V. et al. An accurate model of squirrel cage induction machines under stator faults. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 63, n. 3, p. 377 – 391, 2003. *Modelling and Simulation of Electric Machines, Converters and Systems*. Citado na página 33.

DEVI, N. R.; SARMA, D. V. S. S. S.; RAO, P. V. R. Detection of stator incipient faults and identification of faulty phase in three-phase induction motor – simulation and experimental verification. *IET Electric Power Applications*, v. 9, n. 8, p. 540–548, 2015. Citado na página 86.

FREZZATTO, L. et al. Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ memory filter design for linear uncertain discrete-time delay systems. *Signal Processing*, v. 117, p. 322 – 332, 2015. Citado na página 12.

GAO, H.; LI, X. *Robust Filtering for Uncertain Systems: A Parameter-Dependent Approach*. Switzerland: Springer International, 2014. Citado na página 12.

GOEDTEL, A. *Estimador neural de velocidade para motores de indução trifásicos*. 133 p. Tese (Doutorado) — São Carlos: Programa de Pós-Graduação Engenharia Elétrica, Universidade de São Paulo, 2007. Citado na página 71.

GONGORA, W. S. et al. Neural approach to fault detection in three-phase induction motors. *IEEE Latin America Transactions*, v. 14, n. 3, p. 1279–1288, 2016. Citado na página 71.

GU, B. Offline interturn fault diagnosis method for induction motors by impedance analysis. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 65, n. 7, p. 5913–5920, 2018. Citado na página 93.

GUEDES, J. J. *Identificação de falhas em motores de indução trifásicos utilizando algoritmos de otimização e sistemas inteligentes*. 145 p. Tese (Doutorado) — Cornélio Procópio: Programa de Pós-Graduação associado em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2019. Citado na página 69.

GUEDES, J. J. et al. Differential evolution applied to line-connected induction motors stator fault identification. *Soft Computing*, v. 23, p. 11217 – 11226, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 93.

- GUEZMIL, A. et al. Detecting inter-turn short-circuit fault in induction machine using high-order sliding mode observer: Simulation and experimental verification. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 28, p. 532–540, 2017. Citado na página 93.
- HOLTZ, J. Sensorless control of induction motor drives. *Proceedings of the IEEE*, v. 90, n. 8, p. 1359–1394, 2002. Citado na página 13.
- JAFARZADEH, S.; LASCU, C.; FADALI, M. S. State estimation of induction motor drives using the unscented kalman filter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 59, n. 11, p. 4207–4216, 2012. Citado na página 62.
- JOKSIMOVIC, G. M. et al. Dynamic simulation of dynamic eccentricity in induction machines-winding function approach. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 15, n. 2, p. 143–148, 2000. Citado na página 33.
- JUNG, J.; KWON, B. Corrosion Model of a Rotor-Bar-Under-Fault Progress in Induction Motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 53, n. 6, p. 1829–1841, 2006. Citado na página 33.
- KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. *Journal of Basic Engineering*, v. 83, n. 1, p. 95–108, 03 1961. Citado na página 12.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, Inc., 2002. v. 3. Citado na página 12.
- KIM, Y.-R.; SUL, S.-K.; PARK, M.-H. Speed sensorless vector control of induction motor using extended Kalman filter. *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 30, n. 5, p. 1225–1233, 1994. Citado na página 13.
- KRAUSE, P. et al. *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. Piscataway, N.J: IEEE Press, 2002. Citado na página 33.
- KRISHNAN, R. *Electric motor drives: modeling, analysis, and control*. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall Inc., 2001. Citado 3 vezes nas páginas 33, 45 e 50.
- LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C.; PERES, P. L. Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for uncertain linear systems via lmis and polynomial matrices. *Signal Processing*, v. 91, n. 5, p. 1115 – 1122, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 20.
- LASCU, C.; BOLDEA, I.; BLAABJERG, F. Direct torque control of sensorless induction motor drives: a sliding-mode approach. *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 40, n. 2, p. 582–590, 2004. Citado na página 13.
- LOFBERG, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 58.
- LOPES, T. D. et al. Bearing fault identification of three-phase induction motors bases on two current sensor strategy. *Soft Computing*, v. 21, p. 6673 – 6685, 2017. Citado na página 71.
- LUENBERGER, D. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 16, n. 6, p. 596–602, 1971. Citado na página 12.

MIRANDA, H. et al. Predictive Torque Control of Induction Machines Based on State-Space Models. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 56, n. 6, p. 1916–1924, 2009. Citado na página 33.

MOSEK ApS. *The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 9.0.* [S.l.], 2019. Disponível em: <<http://docs.mosek.com/9.0/toolbox/index.html>>. Citado 4 vezes nas páginas 15, 27, 58 e 70.

NA, J. et al. Robust adaptive finite-time parameter estimation for linearly parameterized nonlinear systems. In: *Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference*. Xi'an, China: [s.n.], 2013. p. 1735–1741. Citado na página 28.

NGUYEN, V. et al. Model-based diagnosis and rul estimation of induction machines under interturn fault. *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 53, n. 3, p. 2690–2701, 2017. Citado na página 89.

NGUYEN, V. et al. Fault severity estimation using nonlinear Kalman filter for induction motors under inter-turn fault. In: *IECON 2016 - 42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. Florence, Italy: [s.n.], 2016. p. 1488–1493. Citado na página 13.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. Citado na página 45.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; BLIMAN, P.; PERES, P. L. D. Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications. In: *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico: [s.n.], 2008. p. 2226–2231. Citado na página 18.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent lmis in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via lmi relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, 2007. Citado na página 27.

OMAR, T. et al. Modeling of the induction machine for the diagnosis of rotor defects. Part I. An approach of magnetically coupled multiple circuits. In: *31st Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society, 2005. IECON 2005*. Raleigh, USA: [s.n.], 2005. p. 8 pp.–. Citado na página 33.

ONDEL, O. et al. Coupling Pattern Recognition With State Estimation Using Kalman Filter for Fault Diagnosis. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 59, n. 11, p. 4293–4300, 2012. Citado na página 13.

ONG, C. *Dynamic simulation of electric machinery using Matlab/Simulink*. Upper Saddle River: Prentice-Hall PTR, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 36, 39, 41, 43 e 44.

PALÁCIOS, R. H. C. et al. Diagnosis of stator faults severity in induction motors using two intelligent approaches. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, v. 13, n. 4, p. 1681–1691, 2017. Citado na página 71.

PALMA, J. M.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F. \mathcal{H}_2 control and filtering of discrete-time LPV systems exploring statistical information of the time-varying parameters. *Journal of the Franklin Institute*, v. 357, n. 6, p. 3835 – 3864, 2020. Citado na página 17.

PARK, R. H. Two-reaction theory of synchronous machines generalized method of analysis-part I. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, v. 48, n. 3, p. 716–727, 1929. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 39.

RAYYAM, M. et al. Stator and rotor faults detection in Induction Motor (im) using the Extended Kalman Filter (ekf). In: *2016 International Conference on Electrical and Information Technologies (ICEIT)*. Tangiers, Morocco: [s.n.], 2016. p. 148–152. Citado na página 13.

REN, H.; ZONG, G. Asynchronous input-output finite-time filtering for switched LPV systems. *Journal of the Franklin Institute*, v. 354, n. 14, p. 6292 – 6311, 2017. Citado na página 17.

RODRIGUES, M. et al. Actuator fault estimation based adaptive polytopic observer for a class of LPV descriptor systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 25, n. 5, p. 673–688, 2015. Citado na página 13.

SAJEDI, Y.; BOZORG, M. Robust estimation of hydrodynamic coefficients of an AUV using Kalman and \mathcal{H}_∞ filters. *Ocean Engineering*, v. 182, p. 386 – 394, 2019. Citado na página 12.

SATO, M. Filter design for LPV systems using quadratically parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, v. 42, n. 11, p. 2017 – 2023, 2006. Citado na página 12.

SMITH, A. N.; GADOUE, S. M.; FINCH, J. W. Improved rotor flux estimation at low speeds for torque mras-based sensorless induction motor drives. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 31, n. 1, p. 270–282, 2016. Citado na página 62.

SOUZA, R. P. P. de. *Repositório contendo os filtros utilizados na dissertação "Metodologia de Estimação de Parâmetros via Filtragem Robusta Aplicada ao Motor de Indução Trifásico"*. [S.l.], 2020. Disponível em: <https://github.com/ruhanpolicarpo/estimador_falhaMIT>. Citado na página 71.

SUETAKE, M. *Sistemas inteligentes para monitoramento e diagnósticos de falhas em motores de indução trifásicos*. 126 p. Tese (Doutorado) — São Carlos: Programa de Pós-Graduação Engenharia Elétrica, Universidade de São Paulo, 2012. Citado na página 71.

SUN, W. et al. Robustness improvement of speed estimation in speed-sensorless induction motor drives. *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 52, n. 3, p. 2525–2536, 2016. Citado na página 62.

TALLAM, R. M.; HABETLER, T. G.; HARLEY, R. G. Transient model for induction machines with stator winding turn faults. *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 38, n. 3, p. 632–637, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 36.

TOLIYAT, H. A.; LIPO, T. A. Transient analysis of cage induction machines under stator, rotor bar and end ring faults. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 10, n. 2, p. 241–247, 1995. Citado na página 33.

VANEK, B. et al. Bridging the gap between theory and practice in LPV fault detection for flight control actuators. *Control Engineering Practice*, v. 31, p. 171 – 182, 2014. Citado na página 13.

VARGA, A.; OSSMANN, D. LPV model-based robust diagnosis of flight actuator faults. *Control Engineering Practice*, v. 31, p. 135 – 147, 2014. Citado na página 13.

WAN, E. A.; MERWE, R. V. D. The unscented kalman filter for nonlinear estimation. In: *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium (Cat. No.00EX373)*. Lake Louise, Canada: [s.n.], 2000. p. 153–158. Citado na página 13.

WU, Y.; JIANG, B.; WANG, Y. Incipient winding fault detection and diagnosis for squirrel-cage induction motors equipped on CRH trains. *ISA Transactions*, v. 99, p. 488 – 495, 2020. Citado na página 93.

XIE, L.; SOUZA, C. E. de. On robust filtering for linear systems with parameter uncertainty. In: *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA: [s.n.], 1995. v. 2, p. 2087–2092 vol.2. Citado na página 17.

YAN, H. et al. Distributed event-triggered \mathcal{H}_∞ state estimation for T–S fuzzy systems over filtering networks. *Journal of the Franklin Institute*, v. 354, n. 9, p. 3760 – 3779, 2017. Special issue on analysis and synthesis of control systems over wireless digital channels. Citado na página 17.

YU, Q. et al. Lithium-Ion Battery Parameters and State-of-Charge Joint Estimation Based on H-Infinity and Unscented Kalman Filters. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 66, n. 10, p. 8693–8701, 2017. Citado na página 12.

ZAKY, M. et al. Very low speed and zero speed estimations of sensorless induction motor drives. *Electric Power Systems Research*, v. 80, n. 2, p. 143 – 151, 2010. Citado na página 62.

ZHANG, Z.-H.; YANG, G.-H. Fault detection for discrete-time uncertain lpv systems using non-minimal order filter. *Journal of the Franklin Institute*, v. 355, n. 2, p. 902 – 921, 2018. Citado na página 12.

ZHOU, M. et al. $\mathcal{H} / \mathcal{H}_\infty$ fault detection observer design for a polytopic LPV system using the relative degree. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Sciendo, Berlin, v. 28, n. 1, p. 83 – 95, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 62.

ZOULAGH, T. et al. \mathcal{H}_∞ filter design for discrete time-varying delay systems: three-term approximation approach. *IET Control Theory and Applications*, Institution of Engineering and Technology, v. 12, p. 254–262, 2018. Citado na página 12.