ppgmat

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ROSIMEIRI DA SILVA DE MORAIS

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DO 5º ANO AO ARGUMENTAR MATEMATICAMENTE A RESPEITO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

CORNÉLIO PROCÓPIO
2022

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ROSIMEIRI DA SILVA DE MORAIS

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DO 5º ANO AO ARGUMENTAR MATEMATICAMENTE A RESPEITO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

MATHEMATICAL REASONING PROCESSES MOBILIZED BY 5TH GRADE STUDENTS WHEN ARGUING MATHEMATICALLY ABOUT PLANE GEOMETRIC FIGURES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman

CORNÉLIO PROCÓPIO

2022

-

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

ROSIMEIRI DA SILVA DE MORAIS

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DO 5º ANO AO ARGUMENTAR MATEMATICAMENTE A RESPEITO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 27 de Setembro de 2022

Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Simone Luccas, Doutorado - Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp)

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível graças colaboração e estímulo de várias pessoas, na qual aqui demonstro meu respeito, carinho e gratidão, pois contribuíram de forma direta ou indireta para esta pesquisa.

Primeiramente, agradeço a Deus, por me abençoar com saúde e disposição no decorrer do mestrado em todos os momentos da minha vida, principalmente durante os anos de pandemia do COVID-19.

Agradeço imensamente a minha orientadora Eliane Araman, pelo conhecimento compartilhado, atenção e estímulo nos momentos difíceis, pela paciência e delicadeza em suas orientações, se mostrando, além de uma excelente educadora, um ser humano maravilhoso, aqui também expresso minha admiração.

Meus agradecimentos aos membros da banca, professor André Trevisan e professora Simone Luccas, pela disponibilidade na leitura e contribuições que ajudaram a enriquecer o trabalho.

Gostaria de agradecer aos residentes e a coordenadora do Programa Residência Pedagógica /2018, pelo incentivo que foi tão importante na minha decisão de curar o mestrado.

Sou grata aos colegas do grupo de pesquisa pela atenção e contribuições.

Também agradeço às novas amigas Janete Belini e Juliana Gonçalves, pela atenção, companheirismo e apoio nos momentos de dúvida e ansiedade e pela troca de conhecimentos.

As amigas Cláudia e Juliana Grocholski pelo apoio e companheirismo.

Meu agradecimento especial à minha família, meu esposo Claudemir, meus filhos Luiz Felipe e Gabriel Henrique, pela compreensão, força, atenção, carinho, por estarem sempre ao meu lado, por acreditarem em mim, me dando suporte durante esses anos de estudo.

A minha mãe, que mesmo sem ter tido a oportunidade de estudar me conduziu e incentivou no caminho dos estudos.

Agradeço aos excelentes professores do PPGMAT na qual cursei as disciplinas, Andressa Justulin, Emerson Tortola, Jader Dalto, Linlya Sachs e Eliane Araman.

Também agradeço à direção da escola na qual realizei a coleta de dados pela atenção e receptividade e agradeço aos alunos que participaram da pesquisa com muita responsabilidade e dedicação.

Por fim, agradeço à UTFPR e ao programa PPGMAT pela oportunidade de realizar o sonho de cursar mestrado, e em uma instituição com excelência na qualidade do ensino.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção” (PAULO FREIRE, 2003).

MORAIS, Rosimeiri S**. Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes do 5º ano ao argumentar matematicamente a respeito de figuras geométricas planas**.2022. 155 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2022.

RESUMO

Esta pesquisa qualitativa e interpretativa tem, como objetivo, compreender os argumentos matemáticos elaborados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Cornélio Procópio, Paraná, Brasil, ao resolverem, de forma colaborativa, uma sequência de tarefas exploratórias envolvendo figuras geométricas planas. Como questões de pesquisa, elencamos: (i) quais conceitos matemáticos são utilizados por estudantes do 5º ano ao argumentar matematicamente a respeito de figuras geométricas planas? (ii) quais processos de raciocínio matemático sustentam essa argumentação? Para isso, apresentamos um estudo teórico sobre o raciocínio matemático e seus processos, sobre tarefas exploratórias e seu potencial para o raciocínio matemático e sobre o ensino de Geometria Plana nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. A pesquisa segue os pressupostos metodológicos da Investigação Baseada em Design. Os dados foram coletados por meio de observação dos participantes apoiada em gravações de áudio e vídeo e pela coleta dos registros escritos feitos pelos alunos durante a resolução das tarefas. Os dados foram analisados a partir da transcrição das discussões entre duas duplas de alunos e discutidos à luz da fundamentação teórica. Como resultados, destacamos que as tarefas de caráter exploratório aplicadas nesta pesquisa contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, possibilitando, a partir de argumentações entre as duplas e com o professor, o desenvolvimento dos conceitos relacionados de Geometria Plana e o desenvolvimento de alguns processos de raciocínio matemático: conjecturar, comparar, classificar, justificar e generalizar.

Palavras-chave: Educação Matemática**;** Raciocínio Matemático; Tarefas Exploratórias; Geometria Plana; Processos de Raciocínio.

MORAIS, Rosimeiri S. **Mathematical reasoning processes mobilized by 5th grade students when arguing mathematically about plane geometric figures**. 2022. 155 p. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio.2022.

ABSTRACT

This qualitative and interpretative research aims to understand the mathematical arguments developed by 5th grade students from a public school in Cornélio Procópio, Paraná, Brazil, when they collaboratively solve a sequence of exploratory tasks involving plane geometric figures. As research questions we listed: (i) what mathematical concepts are used by 5th grade students when making mathematical arguments about plane geometric figures? (ii) what mathematical reasoning processes support these arguments? For this, we present a theoretical study on mathematical reasoning and its processes, on exploratory tasks and their potential for mathematical reasoning, and on the teaching of plane geometry in the Early Years of Elementary School. The research follows the methodological assumptions of Design-Based Research. Data was collected through participant observation supported by audio and video recordings and also by collecting the written records made by the students while solving the tasks. The data were analyzed from the transcript of the discussions between two pairs of students and discussed in light of the theoretical foundation. We conclude that the exploratory tasks applied in this research contributed to the development of mathematical reasoning of the students, enabling arguments between pairs and with the teacher, the development of related concepts of plane geometry specifically related to the area and perimeter of plane figures. Opportunity to develop the processes of mathematical reasoning: conjecture, compare, classify justify, and generalize.

Keywords: Mathematics Education; Mathematical Reasoning; Exploratory Tasks; Plane Geometry; Reasoning Processes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Um modelo de processos de raciocínio matemático e seus entendimentos essenciais 21
Figura 2 - Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura 23
Figura 3 - Modelo de Geoplano com figuras formadas pelos alunos 37
Figura 4 - Construção apresentada por Anny e Lavínia no Geoplano -Tarefa 1(a) 58
Figura 5 - Resposta apresentada por Anny e Lavínia na malha pontilhada -Tarefa 1(a) 58
Figura 6 - Resposta escrita por Anny e Lavínia - Tarefa 1(a) 58
Figura 7- Construção apresentada por Paula e Renata no Geoplano -Tarefa 1(a) 63
Figura 8 - Resposta apresentada por Paula e Renata na malha pontilhada -Tarefa 1(a) 63
Figura 9 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 1(a) 64
Figura 10 – Resposta escrita por Anny e Lavínia -Tarefa 1(b) 67
Figura 11 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 1b 70
Figura 12 - Resposta escrita por Anny e Lavínia - Tarefa 1(c) 73
Figura 13 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 1(c) 75
Figura 14 - Construção apresentada por Anny e Lavínia no Geoplano -Tarefa 2.1 78
Figura 15 - Resposta apresentada por Anny e Lavínia na malha pontilhada -Tarefa 2.1 79
Figura 16 - Resposta escrita por Anny e Lavínia -Tarefa 2.1 79
Figura 17 - Construção apresentada por Paula e Renata no Geoplano -Tarefa 2.1 82
Figura 18 - Resposta apresentada por Paula e Renata na malha pontilhada -Tarefa 2.1 82
Figura 19 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 2.1 82
Figura 20 - Resposta apresentada por Anny e Lavínia na malha pontilhada -Tarefa 2.2 86
Figura 21 - Construção apresentada por Anny e Lavínia no Geoplano -Tarefa 2.2 87
Figura 22 - Resposta escrita por Anny e Lavínia -Tarefa 2.2 87
Figura 23 - Construção apresentada por Paula e Renata no Geoplano -Tarefa 2.2 96
Figura 24 - Figuras geométricas formada no Geoplano por Paula e Renata para a resolução da tarefa 2.2 97
Figura 25 - Resposta apresentada por Paula e Renata na malha pontilhada -Tarefa 2.2 97
Figura 26 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 2.2 98
Figura 27 - Resposta escrita apresentada por Anny e Lavínia -Tarefa 3 104
Figura 28 - Figuras geométricas formada no Geoplano por Anny e Lavínia para a resolução da tarefa 3 105

Figura 29 - Apresentação da tarefa 3 feita por Anny e Lavínia durante a plenária. 105
Figura 30 - Resposta escrita apresentada por Paula e Renata -Tarefa 3..............................115
Figura 31 - Resposta escrita apresentada por Paula e Renata -Tarefa 3..............................116
Figura 32 - Figuras geométricas formada no Geoplano por Paula e Renata para a resolução da tarefa 3 116
Figura 33 - Apresentação da tarefa 3 feita por Paula e Renata durante a plenária...............116
Figura 34- Resposta na malha pontilhada apresentada por Anny e Lavínia -Tarefa 4..........121
Figura 35 - Resposta escrita apresentada por Anny e Lavínia -Tarefa 4..............................121
Figura 36 - Resposta na malha pontilhada apresentada por Paula e Renata -Tarefa 4..........127
Figura 37 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 4..128
Figura 38 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 4..128
Figura 39 - Figuras geométricas formada no Geoplano por Paula e Renata para a resolução da tarefa 4 129

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Processos relacionados a busca de semelhanças e diferenças 19
Quadro 2 - Processos relacionados a validação 20
Quadro 3 - Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático .26
Quadro 4 - Principais aspectos de cada fase dos ciclos de investigação.................................41
Quadro 5 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Anny e Lavínia. 59
Quadro 6 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata 64
Quadro 7 – Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Anny e Lavínia 67
Quadro 8 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata 70
Quadro 9 – Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Anny e Lavínia 73
Quadro 10 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata 75
Quadro 11 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata 79
Quadro 12 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata 83
Quadro 13 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Anny e Lavínia 87
Quadro 14 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata 98
Quadro 15 – Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Anny e Lavínia 106
Quadro 16 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata 117
Quadro 17 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Anny e Lavínia 122
Quadro 18 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata 129
Quadro 19 - Processos de raciocínio desenvolvidos durante as tarefas 131

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
COVID-19	Coronavírus Disease 2019
DBR	Design-Based Research
IBD	Investigação Baseada em Design
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TMSSR	Teacher Moves for Supporting Student Reasoning Framework
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **13**

1 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO **16**

1.1 PROCESSOS DE RACIOCÍNIO 17

1.2 TAREFAS EXPLORATÓRIAS 22

1.3 AÇÕES DO PROFESSOR 24

1.4 O TRABALHO COLABORATIVO E A ARGUMENTAÇÃO 27

2 GEOMETRIA E MEDIDAS, PERÍMETRO, ÁREA E RECURSOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA **30**

2.1 GEOMETRIA 30

2.2 RELAÇÕES ENTRE GEOMETRIA E GRANDEZAS E MEDIDAS 32

2.3 ÁREA E PERíMETRO 34

2.4 RECURSOs PARA O ENSINO DE GEOMETRIA - GEOPLANO 36

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS **39**

3.1 ABORDAGEM QUALITATIVA E INVESTIGAÇÃO BASEADA EM DESIGN (IBD) 39

3.2 DESCRIÇÃO DA PESQUISA 42

3.3 AS TAREFAS 45

3.3.1 Tarefa 1 .... *47*

3.3.2 Tarefa 2 .... *48*

3.3.3 Tarefa 3 .... *48*

3.3.4 Tarefa 4 .... *49*

3.4 ANÁLISE DOS DADOS 50

3.5 PRODUTO EDUCACIONAL 51

4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS **54**

4.1 TAREFA 1 54

4.1.1 Dupla 1 – Anny e Lavínia – Tarefa 1(a) *54*

4.1.2 Dupla 2 - Paula e Renata – Tarefa 1(a) *60*

4.1.3 Dupla 1 - Anny e Lavínia – Tarefa 1(b) *65*

4.1.4 Dupla 2 - Paula e Renata – Tarefa 1(b) *68*

4.1.5 Dupla 1 – Anny e Lavínia – Tarefa 1(c) *72*

4.1.6 Dupla 2 - Paula e Renata – Tarefa 1(c)........ *74*

4.2 TAREFA 2 76

4.2.1 Dupla 1 - Anny e Lavínia – tarefa 2.1........ *77*

4.2.2 Dupla 2 - Paula e Renata – Tarefa 2.1 .... *80*

4.2.3 Dupla 1 - Anny e Lavínia – tarefa 2.2........ *84*

4.2.4 Dupla 2 - Paula e Renata – tarefa 2.2 .... *88*

4.3 TAREFA 3........ 100

4.3.1 Dupla 1 – Anny e Lavínia – Tarefa 3........ *100*

4.3.2 Dupla 1 – Paula e Renata – Tarefa 3 .... *107*

4.4 TAREFA 4........ 118

4.4.1 Dupla 1 – Anny e Lavínia – Tarefa 4........ *119*

4.4.2 Dupla 2 – Paula e Renata – Tarefa 4 .... *122*

4.5 DISCUSSÃO DAS ANÁLISES........ 131

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS........ 137

REFERÊNCIAS........ 140

APÊNDICE A – TAREFA 1 143

APÊNDICE B – TAREFA 2 145

APÊNDICE C – TAREFA 3 147

APÊNDICE D – TAREFA 4 148

ANEXO A – TCLE 149

ANEXO B – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL 152

INTRODUÇÃO

Compreender como os alunos raciocinam matematicamente faz-se necessário para entendermos a maneira como eles aprendem a matemática desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. A BNCC - Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) apresenta o raciocínio matemático, para os alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, com o compromisso de desenvolver o letramento matemático.

A importância do raciocínio matemático é apontada por muitos pesquisadores (JEANNOTE; KIERAN, 2017; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; MATA-PEREIRA; PONTE, 2018; STYLIANIDES, 2009), porém, não há consenso na definição e no modo como o termo raciocínio é apresentado, que “tende a ser vago, assistemático e até mesmo contraditório, de um documento para o outro” (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 2). Essa polissemia torna difícil a caracterização do raciocínio matemático bem como os resultados dos estudos sobre o tema. Para Araman e Serrazina, (2020, p. 119), “o raciocínio matemático é reconhecido como fundamental por numerosos autores, que sublinham uma variedade de aspectos”.

De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011), o entendimento do raciocínio matemático exige que o professor não somente conheça os conceitos matemáticos importantes, mas também reconheça como esses conceitos se relacionam. Para Jeannotte e Kieran (2017, p. 7), “o raciocínio matemático é um processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos”.

É importante destacar que para o desenvolvimento do raciocínio matemático os alunos “precisam mobilizar conhecimentos anteriores e atribuir sentido aos novos” (CARNEIRO, 2021, p. 12). Faz-se necessário então compreender o raciocínio matemático em seus dois aspectos definidos por Jeannotte e Kieran (2017): o **aspecto estrutural** e o **aspecto de processos.** No primeiro caso, as formas da estrutura apresentadas pelas autoras são a dedução, indução, e a abdução. Já os **processos** estão relacionados: (i) à **busca de semelhanças** e diferenças como: generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar e classificar; (ii) os **processos de validação** são justificar, provar e provar formalmente. As autoras ainda destacam o processo de exemplificação, que dá suporte aos demais processos. Nesta pesquisa, os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pelos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem tarefas exploratórias, foram analisados de acordo com os aspectos de processos definidos por Jeannotte e Kieran (2017).

As tarefas exploratórias assumem um papel importante na aprendizagem e no desenvolvimento do raciocínio matemático e dos processos de raciocínio. De acordo com Ponte (2014, p. 17), "as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática". As tarefas apresentadas pelo professor em sala de aula são fundamentais no ensino que este realiza. Elas "são elementos fundamentais na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos" (PONTE, 2005, p. 23).

Ponte (2014) destaca, também, a importância de os alunos trabalharem com tarefas exploratórias pois desenvolvem maior interação, fazendo com que eles busquem novas formas de resolução, desenvolvendo também maior confiança e aceitando as normas apresentadas.

Outro ponto importante a destacar na realização de tarefas que promovem o raciocínio matemático é a ação do professor na realização dessas tarefas, conforme modelo proposto por Araman, Serrazina e Ponte (2019). Ponte (2014, p. 188) ressalta o papel do professor "na orientação da discussão coletiva que se inicia a partir do trabalho desenvolvido pelos alunos e se desenvolve unindo as ideias que produziram e fazendo-as avançar para um pensamento matemático mais poderoso, eficiente e rigoroso".

Acerca dos materiais que o professor pode utilizar em aulas de Matemáticas, o material manipulável é um recurso importante para a aprendizagem do aluno, principalmente no contexto da Geometria Plana, foco de interesse deste trabalho. Destacamos que "o desenvolvimento do pensamento geométrico é um processo lento e complexo, construído a partir das experiências vivenciadas pelo aluno, sendo que os materiais concretos e os desenhos exercem grande influência no processo de construção conceitual" (AMANCIO; GAZIRE, 2015, p. 126). O Geoplano foi escolhido para utilização na intervenção realizada, por ser um material manipulável na qual o aluno pode construir e desconstruir, ou seja, alterar facilmente suas construções, podendo visualizar as mudanças em suas dimensões, refletindo sobre as mudanças que ocorreram e formando suas conjecturas ao realizarem as tarefas.

A pesquisa segue os pressupostos metodológicos da Investigação Baseada em Design. (IBD). Esta investigação apresenta diversos tipos de ciclos, destacando as fases de preparação, realização e análise retrospectiva de uma experiência de design, de acordo com Ponte *et al.* (2016). Nesta pesquisa foi cumprido o primeiro ciclo da IBD, sendo que, na fase de preparação foi realizado o estudo teórico do raciocínio matemático, das tarefas exploratórias, das ações do professor e os conceitos relacionados à Geometria Plana, foi estabelecida a conjectura e os objetivos de aprendizagem, elaborada a sequência de tarefas exploratórias, estipulado o período da aplicação e coleta dos dados. A fase de preparação contou com a aplicação das tarefas na turma de 5º ano do Ensino Fundamental e a coleta dos dados, a análise dos dados das tarefas buscando identificar se a conjectura estabelecida para esse trabalho foi alcançada. Na análise retrospectiva, foi realizada a discussão dos resultados obtidos, a reformulação das tarefas visando a aprendizagem matemática, que poderá ser aplicado num segundo ciclo da IBD, no projeto ao qual esta pesquisa está inserida.

Com isso são discutidos nessa pesquisa os aspectos teóricos do raciocínio matemático em uma perspectiva escolar, na qual o foco está, principalmente, nos processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos ao pensar sobre um problema ou situação matemática.

Sendo assim, o objetivo de aprendizagem é que os alunos compreendam algumas propriedades de figuras geométricas planas. Diante disso, nossa conjectura é de que uma sequência de tarefas exploratórias sobre figuras geométricas planas, aplicadas num ambiente colaborativo, possibilita o desenvolvimento de processos de raciocínio matemático e, consequentemente, a aprendizagem matemática. Portanto, esta pesquisa tem como objetivo compreender os argumentos matemáticos elaborados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem, de forma colaborativa, uma sequência de tarefas exploratórias envolvendo figuras geométricas planas. Como questões de pesquisa, elencamos: (i) quais conceitos matemáticos são utilizados por estudantes do 5º ano ao argumentar matematicamente a respeito de figuras geométricas planas? (ii) quais processos de raciocínio matemático sustentam essa argumentação?

Além desta introdução, o primeiro capítulo desta dissertação apresenta os pressupostos teóricos do raciocínio matemático, os processos de raciocínio, as tarefas exploratórias e as ações do professor na realização dessas tarefas, o trabalho colaborativo e argumentação. No segundo capítulo, são discutidos aspectos relacionados ao ensino de Geometria Plana, Grandezas e medidas, área e perímetro, sendo estes os conteúdos abordados nas tarefas aplicadas, e a descrição do Geoplano.

No capítulo três, são discorridos os procedimentos metodológicos abordando a Investigação Baseada em Design (IBD), a descrição da pesquisa e das tarefas aplicadas, análise dos dados e Produto Educacional. O quarto capítulo traz a apresentação dos dados coletados, detalhando as resoluções das tarefas e a identificação dos processos de raciocínio matemático desenvolvidos na realização das tarefas e discussão das análises das tarefas. Finaliza-se com o quinto capítulo, apresentando algumas considerações finais.

1 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO

Neste capítulo, serão apresentadas as definições referentes ao raciocínio matemático, aos processos que apoiam o raciocínio matemáticos, as tarefas exploratórias e as ações do professor.

A compreensão do raciocínio matemático nos ajuda a entender porque existem relações matemáticas que são fundamentais para o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda da Matemática. A BNCC - Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) destaca a importância do raciocínio matemático para os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental:

> Deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas. (BRASIL, 2018, p. 266).

Assumir o raciocínio matemático como um processo implica compreender porque certas ideias são matematicamente apropriadas e ser capaz de resolver tipos específicos de problemas. "Entender o raciocínio matemático exige que você não apenas conheça ideias matemáticas importantes, mas também reconheça como essas ideias se relacionam e encontram novas conexões entre as conhecidas" (LANNIN; ELLIS; ELLIOTT, 2011, p. 3).

Por sua vez, Morais, Serrazina e Ponte (2018, p. 555) definem o raciocínio matemático como "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumida como verdadeiras (conhecimento prévio)". A importância de o aluno desenvolver novos conhecimentos a partir de um conhecimento já existente é destacado na NCTM-Normas Profissionais para o ensino da Matemática: as exigências da "compreensão do que os alunos sabem e precisam aprender e, em seguida os desafia e apoia para que aprendam bem" (NCTM, 2000, p. 16).

O entendimento de que o raciocínio matemático implica obter novos conhecimentos partindo de outros conhecimentos já existentes, é definido por Jeannotte e Kieran (2017, p.7) como "processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos".

Para esta pesquisa, estamos considerando a definição de raciocínio matemático apresentada por Jeannotte e Kieran (2017), bem como os processos apresentados por elas que estão na próxima seção.

1.1 PROCESSOS DE RACIOCÍNIO

Para Lannin, Ellis e Elliott (2011), “o raciocínio matemático é o ato de pensar em uma relação de ideias, representação, regras, padrão ou outra propriedade matemática e vê-lo em um domínio mais amplo”. É relacionar novos conhecimentos com os conhecimentos que já possui. Ao pensar como os alunos desenvolvem o raciocínio matemático, é necessário observar como aprendem e que a aprendizagem “vai além do conteúdo trabalhado, existindo uma diferença entre o que precisa saber e o que espera que os alunos aprendam” (LANNIN; ELLIS; ELLIOTT, 2011, p. 3). Jeannotte e Kieran (2017) apresentam dois aspectos do raciocínio matemático: o estrutural e o de processos. Embora sejam estudados separadamente, apresentam relação entre si. As estruturas são partes do aspecto de processos de raciocínio matemático e os processos contribuem para a construção dessas estruturas. Embora as autoras Jeannotte e Kieran (2017) apresentem esses dois modos de ver o raciocínio matemático, para esta pesquisa consideramos, nas análises, apenas o aspecto relacionado aos processos de raciocínio matemático.

O aspecto estrutural refere-se em geral a uma característica mais estática, que está relacionada à forma de um dado do raciocínio matemático. Jeannotte e Kieran (2017, p.7), especificam o aspecto estrutural como “a maneira pela qual os elementos discursivos se combinam em um sistema ordenado que descreve os elementos e sua a reação entre si”. Apresentam três formas mais citadas de raciocínio na literatura: a dedução, a indução e a abdução. Jeannotte e Kieran (2017, p. 7), afirmam que “Toulmin e Pierce (2007) são as referências mais usadas para discutir o aspecto estrutural na literatura” e que esquematizam este aspecto em quatro elementos, que são de natureza narrativa e servem para estruturar o discurso matemático:

> [...] elementos básicos (dados, reinvindicação, garantia), junto como o qualificador (vinculado ao valor epistêmico), o suporte (para apoiar ainda mais a garantia) e a réplica (para antecipar possíveis contra-argumentos à reivindicação). Todos esses elementos são de natureza narrativa servem para estruturar o discurso matemático (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 7).

A forma dedutiva do raciocínio “desempenha um papel importante nos processos de prova e prova formal, os quais requerem restruturação dedutiva” (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 8). As inferências dedutivas são caracterizadas por dois aspectos centrais: “i) a certeza, que diz respeito à relação necessária entre as premissas e a conclusão e ii) a irrefutabilidade das conclusões, que determina que não existem dúvidas quanto à validade das conclusões" (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, p. 782).

O raciocínio indutivo, por sua vez, está ligado ao processo de generalização. "As inferências indutivas surgem frequentemente associados a processos como a generalização, identificando uma propriedade, conceito ou ideia de uma classe alargada de objetos matemáticos" (MATA-PEREIRA, PONTE, 2018, p. 783). As autoras Jeannotte e Kieran (2017, p. 8) afirmam que "o raciocínio indutivo é definido de maneira inconsciente, em parte porque se refere a todo raciocínio que não é dedutivo". O raciocínio indutivo infere uma garantia a partir dos dados e da afirmação sobre os dados. O valor epistêmico (isto é, o qualificador) que é possibilitado pela conclusão da etapa indutiva é de possível (ou provável).

Ao contrário do raciocínio dedutivo, o raciocínio indutivo não leva necessariamente a conclusões válidas, mas é importante para a criação de novos conhecimentos (ARAMAN; SERRAZINA, 2020).

O raciocínio abdutivo, para Araman e Serrazina (2020), relaciona-se principalmente, com os processos de generalizar e conjecturar. O raciocínio abdutivo, para Jeannotte e Kieran (2017, p. 8), é uma estrutura menos discutida que é, por vezes, misturada à etapa indutiva, "a estrutura de raciocínio abdutivo pode ser um elemento de todo o processo do raciocínio matemático, gerando dados e justificando a busca de semelhanças e diferenças".

Para Jeannotte e Kieran (2017), a indução está ligada ao processo de generalização. Já o raciocínio adutivo é o aspecto na qual elaboram-se as conjecturas consiste, na formulação de hipóteses razoáveis sobre determinados fenômenos.

Mata-Pereira e Ponte (2018), por sua vez, diferenciam os três raciocínios da seguinte forma:

> O raciocínio indutivo é aquele por meio do qual se elaboram conjecturas a serem verificadas posteriormente. Diferente do raciocínio dedutivo, o indutivo não conduz necessariamente a conclusões válidas, mas é importante para a criação de novo conhecimento. Já o abdutivo consiste em formular hipóteses razoáveis sobre determinado fenômeno. O raciocínio abdutivo, assim como o indutivo, não conduzem necessariamente a uma afirmação válida. (MATA-PERIRA; PONTE, 2018, p.783)

Na literatura, alguns verbos de ação estão ligados ao raciocínio matemático, verbos que transmitem a natureza temporal. No entanto, poucos textos apresentam o raciocínio matemático como um processo. Jeannotte e Kieran (2017, p. 9) definem que "o raciocínio matemático é um conjunto de processos cognitivos e metadiscursivo, ou seja, que deduzem narrativas sobre objetos ou relações explorando as relações entre objetos". Surgem nove processos de raciocínio, oito foram classificados em processos relacionados à busca de semelhanças e diferenças ou processos relacionados à validação. O nono processo, o de exemplificar, foi classificado como suporte para as outras duas categorias.

Os processos relacionados à busca de semelhanças e diferenças são: generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar e classificar. Já os processos relacionados a validação são: justificar, provar e provar formalmente.

O quadro abaixo (Quadro 1) apresenta os processos relacionados a busca de semelhanças e diferenças, de acordo com Jeannotte e Kieran (2017).

Quadro 1 - Processos relacionados a busca de semelhanças e diferenças

Processos	**Definição**
Generalizar	É o processo que infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos do conjunto a partir de um subconjunto desse conjunto. Chega a conclusões válidas.
Conjecturar	É a busca pelas semelhanças e diferenças, mostrada em um relato sobre alguma regularidade com um valor epistêmico que seja provável e que possui a potencialização da teorização formativa. É um processo cíclico envolvendo: i) enumerar uma conjectura; ii) verificar todos os casos e eventos; iii) desconfiar tentando refutá-la; iv) descobrir porque é verdadeira ou modificar. A conjectura precisa do apoio de outros processos para determinar se é verdadeiro ou falso.
Identificar padrão	É um processo de raciocínio matemático que, pela busca de semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas.
Comparar	É um processo do raciocínio matemático que está vinculada ao raciocínio indutivo e ao raciocínio dedutivo. A comparação pode ocorrer junto com outros processos como generalização, identificação de um padrão e validação. Comparar é a busca de semelhanças e diferenças de uma narrativa sobre objetos ou situações matemáticas.
Classificar	O processo de classificação do raciocínio matemático pode ser definido como um processo que infere, pela busca e semelhanças e diferenças entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos baseada em prioridades e definições matemáticas.

Fonte: A autora, baseado em Jeannotte e Kieran (2017)

Os processos relacionados à validação, segundo Jeannotte e Kieran (2017, p.11) visam “alterar o valor epistêmico de uma narrativa”. Diferente de conjecturar que infere uma narrativa provável, os processos de validação visam alterar o valor epistêmico de uma narrativa de uma maneira ou de outra, podendo ser de provável para verdadeira, de provável a falsa ou até improvável. O Quadro 2 apresenta as definições de Jeannotte e Kieran (2017) para os processos relacionados a validação.

Quadro 2 - Processos relacionados a validação

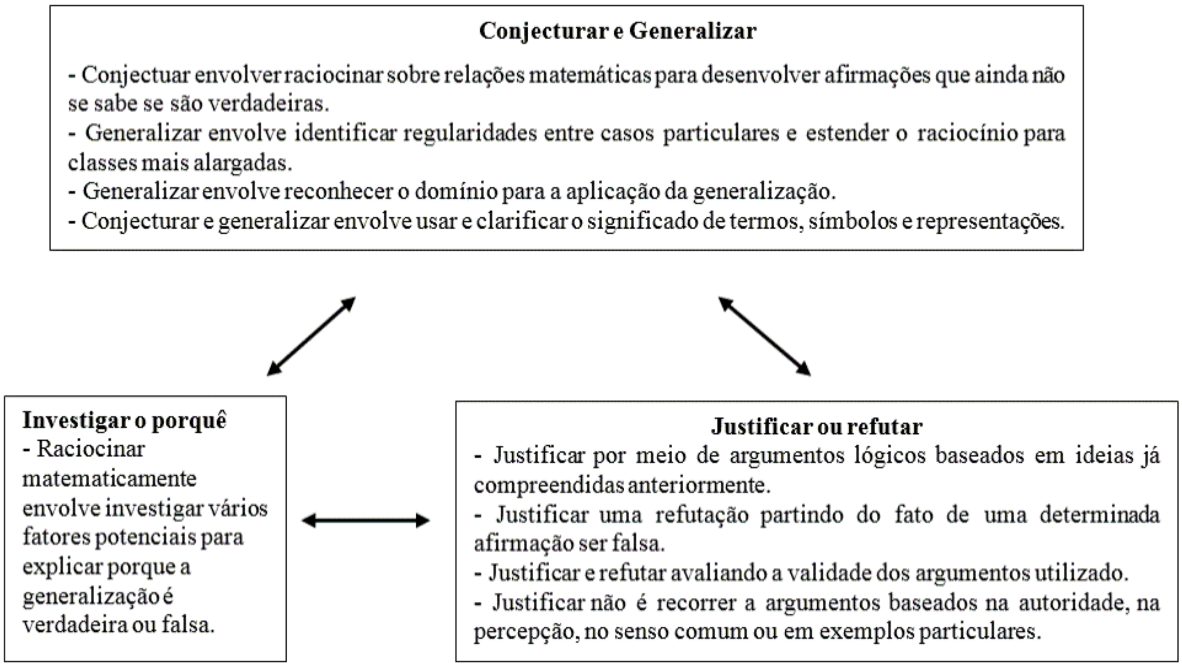
Processos	**Definição**
Justificar	É um processo de procura de dados, afirmações e suporte para modificar o valor epistêmico de provável para mais provável. Justificar é um processo social, podendo assumir dois formatos: i) justificar a conjectura que surgiu no processo ii) relatar a validade que altera o valor epistêmico.
Provar	É a afirmação de argumentos, está ligado a mudar o valor epistêmico de uma narrativa. A prova é um processo de raciocínio matemático que, pesquisando dados, garantias e apoio, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeiro.
Provar formal	Fornece ao pesquisador uma razão matemática que, ao buscar dados, informações e apoio, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeira. Esta prova é limitada por i) narrativas aceitas pela comunidade; ii) uma reestruturação dedutiva final; iii) realizações formais.

Fonte: A autora, baseado em Jeannotte e Kieran (2017)

De acordo com Jeannotte e Kieran (2017, p. 14), o nono processo é a exemplificação, que é um suporte para outros processos de raciocínio matemático, inferindo exemplos que auxiliam: “i) na busca de semelhanças e diferenças; ii) na busca de validação”. Afirmam também que a exemplificação gera elementos que servirão para generalizar, conjecturar e até validar. Os processos de raciocínio matemático são inter-relacionados, permitindo o desenvolvimento uma linguagem cada vez mais completa.

A figura abaixo apresenta os três principais aspectos do raciocínio matemático e seus entendimentos essenciais de acordo com Lannin, Ellis e Elliott (2011) e adaptados por Trevisan e Araman (2021).

Figura 1 - Um modelo de processos de raciocínio matemático e seus entendimentos essenciais



Fonte: TREVISAN; ARAMAN (2021, p.163)

Para Lannin, Ellis e Elliott (2011), conjecturar é uma maneira natural dos alunos entrarem no processo de raciocínio. Ao formular conjecturas e investigar suas ideias iniciais, os alunos naturalmente entram no raciocínio matemático e, à medida em que os alunos tentam entender as situações matemáticas, geram conjecturas inválidas juntamente com as válidas. Além disso, os alunos apoiam suas conjecturas em raciocínio inválido e válido.

Conjecturar é pensar sobre relações matemáticos para desenvolver afirmações que podem ser testadas como verdadeiras, mas que ainda não são conhecidas. “As conjecturas muitas vezes podem existir apenas na mente dos alunos, mas quando são escritas podem envolver o uso de símbolos matemáticos formais ou combinações de palavras e símbolos matemáticos” (LANNIN; ELLIS; ELLIOTT, 2011, p. 13).

A generalização pode estar relacionada ou não com as regras ou equações algébricas. “Os alunos generalizam quando se concentram em um aspecto particular e um problema ou ideias e pensam sobre esse aspecto de maneiras ampla” (LANNIN; ELLIS; ELLIOTT, 2011, p. 17). Os alunos podem generalizar sobre padrões, estratégias, processos, relacionando qualquer área do conteúdo matemático. (LANNIN; ELLIS; ELLIOTT, 2011, p. 23).

O processo de investigar o porquê é um processo essencial no raciocínio matemático de conjecturar e generalizar. “Investigar o porquê envolve atender a características particulares que fornecem insights sobre relacionamentos que podem explicar se uma generalização é verdadeira ou falsa” (LANNIN; ELLIS; ELLIOTT, 2011, p. 30).

De acordo com Carneiro (2020, p. 45), “um trabalho mais constante do raciocínio matemático poderia aprimorar a capacidade dos estudantes de mobilizar os processos do raciocínio matemático”. Portanto, uma das possibilidades de promover o raciocínio matemático e os processos de raciocínio em sala de aula é o trabalho com tarefas exploratórias. Segundo Ponte (2005, p. 16), ao resolverem as tarefas exploratórias “os alunos apresentam o seu trabalho, relatam as suas conjecturas e conclusões, apresentam as suas justificativas e questionam-se uns aos outros”.

1.2 TAREFAS EXPLORATÓRIAS

O trabalho com tarefas exploratórias é importante no desenvolvimento do raciocínio matemático. Pesquisas atuais têm dado atenção a aspectos relacionados à “seleção das tarefas e a comunicação nas salas de aula, sublinhando a natureza do questionamento, a negociação de significados e os processos de redizer” (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 55). De acordo com Ponte (2005, p. 23), as tarefas “são um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos”.

As tarefas rotineiras são diferentes das tarefas que estimulam o raciocínio matemático. É essencial, para que os alunos ampliem sua capacidade de pensar e mobilizem os processos de raciocínio, a organização de ambientes de ensino e de aprendizagem de matemática envolvendo a resolução de tarefas de natureza exploratória (PONTE, 2005).

As tarefas que o professor apresenta na sala de aula precisam ter significado para mobilizar os processos de raciocínio matemático no aluno. Segundo o NCTM (2014, *apud* PONTE, p. 17):

> O professor de Matemática deve colocar tarefas aos alunos que sejam baseadas (i) em Matemática correta e significativa; (ii) no conhecimento das compreensões, interesses e experiências dos alunos, e (iii) no conhecimento das diversas maneiras como diferentes alunos aprendem matemática.

De acordo com o NCTM (1994) as tarefas matemáticas devem respeitar as seguintes características:

- Apelar para a inteligência dos alunos.
- Desenvolver a compreensão e aptidão matemática.

- Estimular os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas.
- Apelar para formação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático.
- Promover a comunicação sobre a matemática.
- Mostrar a matemática como uma atividade humana permanente.
- Mostrar sensibilidade apoiar-se nas experiências e disposições dos alunos.

Para Ponte (2005, p. 1), "o que os alunos aprendem resulta de dois fatores principais: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam". Quando o aluno está envolvido em uma atividade realiza uma certa tarefa, a tarefa é o objetivo da atividade.

As tarefas são classificadas em duas dimensões, que são o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio matemático, de acordo com Ponte (2005, p. 7), está relacionado de maneira "estreita com a percepção da dificuldade de uma questão e constitui uma dimensão desde há muito usada para guardar as questões que se propõe aos alunos". Pode variar entre os polos de desafio reduzido e elevado.

Já o grau de estrutura varia entre os polos abertos e fechados. A tarefa fechada é aquela "onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido ou em ambas as coisas" (PONTE, 2005, p.7 e 8). Com essas duas dimensões, obtêm-se quatro quadrantes situando os tipos de tarefas. A Figura 2 apresenta a organizadores dos diferentes tipos de tarefas apresentadas por Ponte, (2005). Para esta pesquisa optamos por tarefas de exploração, uma vez que permitem aos alunos usarem diferentes estratégias de resolução e discutirem e apresentarem seus argumentos para essa resolução.

Figura 2 - Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura

Fonte: PONTE (2005, p.8)

Para Ponte (2005, p. 9), em relação a realização de tarefas, “existe muitas vezes a ideia que os alunos não podem realizar uma tarefa se não tiverem sido ensinados diretamente a resolvê-la. É uma ideia falsa”. Os alunos utilizam, na sala de aula, muitos conhecimentos aprendidos fora da escola.

Ponte (2014) destaca a importância de os alunos trabalharem com tarefas exploratórias, pois desenvolvem maior interação, faz com que eles busquem novas formas de resolução e desenvolvem, também, maior confiança aceitando as normas apresentadas:

> Os alunos, ao interagirem uns com os outros na exploração de uma tarefa matemática, encontram-se num meio envolvente potencialmente mais confortável para falar e pensar em voz alta. Nesse processo de interação desenvolvem uma maior confiança em si próprios e estão mais aptos a acompanhar e a participar ativamente nas discussões que ocorrem em um grande grupo. A aceitação de normas que propiciem a elaboração e refutação de conjeturas [...] proporciona o desenvolvimento do raciocínio nos alunos (PONTE, 2014, p.188).

Além da realização de tarefas exploratórias, para o desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno, as ações desempenhadas pelos professores são essenciais nesse processo. Para Ponte (2005, p. 23), o professor, ao apresentar uma estratégia adequada com diversos tipos de tarefas e momentos específicos para a exploração, reflexão e debate entre os alunos, proporciona uma grande oportunidade para a aprendizagem. Dessa forma, serão discutidas, a seguir, as ações do professor na realização de tarefas exploratórias.

1.3 AÇÕES DO PROFESSOR

Araman, Serrazina e Ponte (2019) afirmam que as ações do professor são destacadas por apresentarem potencial para que os alunos desenvolvam o raciocínio matemático. Para Wood (1998), os professores precisam repensar as normas estabelecidas em sala de aula, criar ambientes que proporcionem oportunidades para pensar, em vez de estabelecer regras e procedimentos padronizados. As tarefas colocadas para os alunos em sala de aula também são partes importantes no desenvolvimento do raciocínio matemático e dos processos de raciocínio “uma boa postura do professor é a de colocar questões que façam com que os alunos comparem, verifiquem, busquem convencê-lo de suas respostas, sempre por meio da justificação” (CARNEIRO, 2021, p. 118).

De acordo com Ponte, Mata-Pereira, Quaresma (2013), estudos mostram que as ações do os professores se integram em duas categorias: construir conexões matemáticas e atender as concepções incorretas dos alunos, mostrando como as ações dos professores são diferentes no memento das discussões, sendo importante valorizar as ações que buscam melhorar o pensamento dos alunos.

Segundo Wood (1998), nas salas em que acontece a troca entre professor e aluno é possível observar três padrões de interação que são: relatar, inquirir e argumentar.

Araman, Serrazina e Ponte (2019), definem que o primeiro padrão, relatar, ocorre quando o aluno conta como resolveu o problema. O professor é visto como participante. No segundo padrão de interação, inquirir, o aluno continua contando como resolveu o problema, o professor pede para que ele explique por que fez daquela maneira, esclarecendo a todos o que fez e como fez. Já no terceiro padrão de interação, que é argumentar, os alunos contam como resolveram o problema, entretanto, o professor faz, também, perguntas requerendo justificação, como: "Como você sabe disso?" "Você pode provar isso?"

As perguntas feitas pelo professor estão diretamente relacionadas com as oportunidades de desenvolvimento das capacidades de pensamento matemático dos alunos. Dessa forma, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) desenvolveram um modelo de ações do professor considerando duas dimensões: as ações diretamente relacionadas aos tópicos e processos matemáticos e as relacionadas com a gestão da aprendizagem. Estão organizadas em quatro categorias: convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar.

Ações de convidar são aquelas que levam o aluno a um contato inicial com o que está sendo ou será discutido. As ações guiar/apoiar conduzem os alunos, de forma discreta ou explicita, a continuar participando da resolução de um problema, por meio de perguntas ou outras intervenções. Em informar/sugerir, "o professor assume o papel de introduzir informações, proporcionar argumentos, ou validar respostas dos alunos" (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59). Na categoria desafiar, o professor "coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar" (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59).

Outro modelo que categoriza as ações do professor é o TMSSR (*Teacher Moves for Supporting Student Reasoning Framework*), elaborado por Ellis, Özgür e Reiten (2018). Esse modelo apresenta quatro ações dos professores, categorias: elicitar, responder, facilitar e estender. Os autores consideram que, para apoiar a aprendizagem dos alunos, "as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemática importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos" (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018, p. 2).

Araman, Serrazina e Ponte (2019), tendo por base modelos de ações do professor apresentados e discutidos por Wood (1997), Ponte, Mata-Pereira e Quaresmo (2013) e Ellis, Özgür e Reiten (2018), organizaram um quatro categorias de ações que apoiam o raciocínio matemático conforme consta no Quadro 3.

Quadro 3 - Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático

CATEGORIAS	AÇÕES
Convidar	- Solicita respostas para questões pontuais - Solicita relatos de como os alunos fizeram.
Guiar/Apoiar	- Fornece pistas aos alunos. - Incentiva a explicação. - Conduz o pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. - Encoraja os alunos a (re)dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a (re)elaborarem suas respostas.
Informar/Sugerir	- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - (Re)elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.
Desafiar	- Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão. - Pressiona para generalização.

Fonte: ARAMAN; SERRAZINA; PONTE (2020, p. 446)

Araman, Serrazina e Ponte (2020, p. 447), destacam que "as ações desempenhadas pelo professor não precisam ocorrer em todas as interações, mas algumas delas apresentam maior potencial para apoiar o raciocínio". As categorias citadas não necessitam ser desempenhadas pelo professor na mesma sequência que foram apresentadas.

É necessário destacar a importância o planejamento das tarefas e das ações, pois permite ao professor estabelecer objetivos claros para a discussão e síntese, que podem aumentar a exploração das tarefas, a formulação de novas tarefas que podem contribuir para o raciocínio matemático do aluno. O papel do professor é destacado por Araman, Serrazina e Ponte (2020, p. 445) como essencial nas discussões, "desde a seleção das tarefas apropriadas, definir sobre quando e como estimular o pensamento dos alunos até incentivar a assumir a responsabilidade intelectual de construir e defender as próprias ideias matemáticas".

Sintetizando essas discussões, entendemos que, para que o aluno possa desenvolver raciocínio matemático, além da interação entre professor e aluno, é necessário que o professor apresente métodos adequados para a resolução das tarefas. De acordo com Ponte (2005, p. 23), "ao estabelecer uma estratégia adequada, contemplando diversos tipos de tarefa e momentos próprios para exploração, reflexão e discussão, o professor dá um passo importante para criar oportunidade que favoreçam a aprendizagem dos alunos".

Embora, nesta pesquisa, o foco da análise dos dados não sejam as ações do professor, não é possível separar a resolução da tarefa do modo como o professor conduz o trabalho com essa tarefa em sala de aula. Elementos como selecionar boas tarefas, optar por um ensino que permita ao aluno protagonizar sua aprendizagem, fazer boas perguntas e conduzir uma boa discussão são fundamentais para apoiar o raciocínio matemático dos alunos.

1.4 O TRABALHO COLABORATIVO E A ARGUMENTAÇÃO

A resolução de tarefas exploratórias e o trabalho colaborativo proporcionam aos alunos o desenvolvimento do raciocínio matemático pois, quando resolvidas em duplas, trios ou grupos, oportunizam a interação e a troca de conhecimentos a partir de argumentações. Nesta seção, são apresentados os conceitos relacionados ao trabalho colaborativo e à argumentação.

A colaboração está presente no trabalho em grupo; no entanto, "saber trabalhar em grupo, de forma interativa, envolve capacidades e competências que qualquer indivíduo deve desenvolver na trajetória de participação ao longo da vida" (MACHADO, 2014, p. 37).

Trabalhar em grupo não implica necessariamente que temos interação com outras pessoas, pois "existem formas de atuação e de reação, bem como mensagens implícitas, às quais devemos estar atentos, para podermos escutar, respeitar, valorizar e partilhar, ou seja, sabermos incluir os contributos dos diversos participantes" (MACHADO, 2014, p. 37).

A colaboração, de acordo com Boavida e Ponte (2002, p. 1), "constitui uma estratégia fundamental para lidar com problemas que se afiguram demasiado pesados para serem enfrentados em termos puramente individuais". A colaboração apresenta vantagens e, dentre elas, destacamos uma apresentada por Boavida e Ponte (2002), na qual afirma que:

> Juntando diversas pessoas que interagem, dialogam e refletem em conjunto, criam-se sinergias que possibilitam uma capacidade de reflexão acrescida e um aumento das possibilidades de aprendizagem mútua, permitindo, assim, ir muito mais longe e criando melhores condições para enfrentar, com êxito, as incertezas e obstáculos que surgem (BOAVIDA; PONTE, 2002, p. 3).

A colaboração na educação formal, em sala de aula, é destacada por Machado (2014) em três formas de trabalho interativo, as quais organizam os alunos em díades, tríades ou pequenos grupos, sendo eles o trabalho colaborativo, o ensino cooperativo e o scaffolding. Nessa pesquisa, estamos considerando o trabalho colaborativo.

No ensino cooperativo, a "noção de trabalhar em grupo é dividir tarefas, cada um fazer a sua parte e, sem discussão prévia e consensos sobre o que foi feito, juntar as várias partes e obter um produto final" (MACHADO, 2014, p. 39).

Machado (2014), com base nos estudos de Wood (1976), define scaffolding como "um processo que ajuda a criança ou jovem a resolver um problema, uma tarefa ou atingir um objetivo que estaria para lá das suas capacidades. O scaffolding consiste essencialmente no "controle" do adulto nos elementos da tarefa" (MACHADO, 2014, p. 40).

Por fim, o trabalho colaborativo, para os autores Boavida e Ponte (2002), existe a partir de uma relação em que não há diferenças, que possa possibilitar a todos trabalharem de maneira igual, com uma atitude de mútua ajuda que permite não só atingir os objetivos pretendidos, mas também que todos possam se beneficiar com o trabalho realizado.

Em um trabalho colaborativo, de acordo com Boavida e Ponte (2002), é necessário haver abertura por parte de todos os participantes na forma como se relacionam entre si. É importante estar disposto não só a transmitir os seus pontos de vista e as suas ideias, mas também a receber, com respeito pela diferença, outros pontos de vista e outras opiniões, numa responsabilização conjunta na resolução dos problemas.

Para Machado (2014), o trabalhar de forma colaborativa valoriza as contribuições dos outros respeitando a identidade que cada um assume numa comunidade de aprendizagem.

O trabalho colaborativo permite que os alunos desenvolvam diálogos que resultam em argumentações. A expressão "argumentação matemática" é usada por Boavida (2005) para se referir aos diálogos desenvolvidos na aula de Matemática, que levam à formação de raciocínios de caráter explicativo e justificativo, de modo a diminuir riscos de erro ou incerteza na escolha de um caminho ou para convencer um público a aceitar ou não certos enunciados, ideias ou posições, a partir de justificativas.

Boavida (2005, p. 4) afirma que o "destaque atribuído ao raciocínio matemático se entrelaça com a importância de aprender Matemática com compreensão", além disso, nas "aulas em que é valorizado o raciocínio, a explicação e a justificação são aspectos chave da atividade dos alunos". Também de acordo com seus estudos, "uma ênfase no raciocínio, em todos os níveis da educação matemática, atrai a atenção para a argumentação e justificação" (BOAVIDA, 2005, p. 4).

O desenvolvimento da capacidade de argumentar e justificar raciocínios são alguns aspectos diretamente relacionados ao letramento matemático. A BNCC (BRASIL, 2018) destaca que os estudantes devem desenvolver habilidades referentes à investigação, à construção de modelos e de resolução de problemas: "eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos" (BRASIL, 2018, p. 529).

Os estudos aqui apresentados e relacionados às tarefas exploratórias, ao trabalho colaborativo, à argumentação e às ações do professor possuem relações. As tarefas exploratórias trabalhadas com alunos devem levar à compreensão, promover a comunicação, estabelecer conexões coerentes entre ideias matemáticas a partir do trabalho colaborativo, realizado em duplas, trios ou grupos, desenvolvendo argumentações. Em relação às ações do professor, é importante destacar a elaboração, adaptação ou seleção de tarefas matemáticas que levem os alunos à reflexão. Na aplicação das tarefas, o professor deve criar ambientes que proporcionem oportunidades para pensar, em vez de estabelecer regras e procedimentos padronizados, e desenvolver ações como as de convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar para que os alunos desenvolvam o raciocínio matemático.

Dessa forma, consideramos que criar um ambiente para a aprendizagem matemática, pautada no desenvolvimento do raciocínio matemático, pressupõe a seleção de boas tarefas matemáticas que favoreçam o trabalho colaborativo e a argumentação, e ainda, ações de professores que apoiem todo esse processo, como o que propomos nessa pesquisa.

2 GEOMETRIA E MEDIDAS, PERÍMETRO, ÁREA E RECURSOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Esta pesquisa propõe a análise do desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático a partir da resolução de tarefas exploratórias e de discussões feitas pelos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental envolvendo o conteúdo de Geometria Plana, mais especificamente área e perímetro, conceitos que apresentam interface com o estudo de Grandezas e Medidas. Neste capítulo, destacamos a importância do estudo da Geometria, a relação com as Grandezas e Medidas, definições de área e perímetro e a importância do trabalho com recursos manipuláveis, como o Geoplano, para o ensino da Geometria Plana.

2.1 GEOMETRIA

O conhecimento da Geometria é destacado por Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), como de grande importância para a vida quotidiana. Os conhecimentos básicos das formas geométricas servem para orientar uma pessoa, estimar distâncias, apreciar a ordem e a estética na natureza e na arte. Já na comunicação, é importante na apresentação de informações para chegar em um determinado lugar.

Dessa forma, a Geometria proporciona circunstâncias favoráveis para que os alunos se envolvam em atividades matemática, desenvolvendo assim a comunicação matemática, permitindo "estabelecer conexões entre diferentes áreas da Matemática, por exemplo, as representações geométricas poderão ajudar a dar significado a diferentes conceitos como o da área ou de fração" (BREDA, *et al*., 2011, p. 13).

Para esses autores, a Geometria é um importante meio para que a criança conheça o espaço em que se move, e "constitui um meio privilegiado de desenvolvimento da intuição e da visualização espacial[1]. Sendo uma boa fonte de problemas de matemática, contribui para melhorar a capacidade de resolução de problemas" (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999, p. 59).

No estudo da Geometria, a resolução de problemas geométricos é importante, pois faz com que os alunos compreendam melhor o mundo a sua volta, adquirindo uma compreensão

---

[1] A visualização espacial envovle a capaciadade de imaginar o movimento de objetos e as formas espaciais, como a construção e manipulação de representações mentais de objetos bi e tri-dimensional e a percepçao de um objeto a partir de diferentes perspectitva (NCTM, 2000, p. 44)

mais profunda da Geometria Plana e suas propriedades. De acordo com Breda *et al.* (2011, p. 9), essa compreensão acontece "quando observam o resultado da combinação de duas formas para formarem uma nova forma, quando preveem o que acontece quando se altera o número de lados de uma forma" ou "quando alteram suas dimensões", estabelecendo, então, novas medidas para as figuras formadas. As autoras também afirmam que geometria é um campo favorável para o desenvolvimento do pensamento matemático e à realização de investigações e de outras tarefas que envolvem aspectos essenciais da natureza da matemática, como fazer conjecturas e validar essas conjecturas.

Na mesma direção, Lorenzato (1995) afirma que se uma pessoa não tiver a possibilidade de aprender Geometria, ela não poderá utilizá-la para facilitar a compreensão e resolução de outras áreas do conhecimento, pois "sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida" (LORENZATO,1995, p. 5).

Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), a aprendizagem da Geometria é realizada baseando-se em experiências concretas, que evoluem para processos mais formais e conduzem ao desenvolvimento de capacidade de organização lógica do pensamento. As orientações mais recentes sobre o ensino da geometria remetem para a utilização de experiências concretas, com uma diversidade de objetos geométricos.

Assim, a compreensão por parte do aluno torna-se mais clara quando se dá a partir do uso de materiais manipuláveis, dentre eles o Geoplano. Breda e*t al*. (2011, p. 11) afirmam que "há necessidade de realizarem experiências concretas de manipulação e observação, mas progressivamente, a ênfase deve ser colocada no raciocínio espacial e no desenvolvimento de capacidades de visualização espacial".

Na BNCC (BRASIL, 2018), a Geometria é apresentada como "o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento" (BRASIL, 2018, p. 271).

O estudo das formas geométricas é descrito nesse documento com os objetivos de que os "alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa". Espera-se, também, que os alunos "nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos" (BRASIL, 2018, p. 272).

Em especial, no caso 5º ano do Ensino Fundamental, na unidade temática Geometria, em seu objeto do conhecimento, a Geometria Plana e suas características, representações e ângulos. Apresenta como habilidades a serem desenvolvidas a "ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes" e "reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 296).

2.2 RELAÇÕES ENTRE GEOMETRIA E GRANDEZAS E MEDIDAS

É importante para os alunos saberem qual é a unidade de medida adequada para medir e fazer comparações, portanto, estabelecer uma relação entre Grandezas e medidas e a Geometria faz-se necessário. Caraça (1951) afirma que para utilizar as medidas é importante começar por escolher uma unidade, considerando a praticidade. Apenas mais tarde há a comparação de grandezas, entre essa unidade e o que se quer medir. De acordo com Caraça, medir é uma operação que é utilizada com grande frequência todos os dias:

> A dona de casa ao fazer as suas provisões de roupa, o engenheiro ao fazer o projeto duma ponte, o operário ao ajustar um instrumento de precisão, o agricultor ao calcular a quantidade de semente a lançar à terra do que dispõe, toda a gente nas mais variadas circunstâncias, qualquer que seja sua profissão tem necessidade de medir. (CARAÇA,1951, p. 29).

Há, então a necessidade de estabelecer um único termo de comparação para todas as grandezas. Caraça (1951, p. 31) afirma que "estabelecer um estado único de comparação para todas as grandezas da mesma espécie chama-se unidade de medida da grandeza de que se trata, é por exemplo, o centímetro para os comprimentos, o grama-peso para os pesos".

Dos conteúdos matemáticos estudados, a Geometria e as Medidas são áreas da Matemática, fundamentais para o cotidiano das pessoas, a Geometria é destacada nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1998) do Ministério da Educação e Cultura (MEC) como:

> Um campo fértil para trabalhar com situações problemas e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades. (BRASIL,1998, p.51).

Os PCN (BRASIL, 1998) afirmam que "na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano". (BRASIL, 1998, p. 51-52).

Por sua vez, a BNCC (BRASIL, 2018) ressalta a importância de que o estudo de medidas tem para compreensão e consolidação de outros conteúdos de outras disciplinas.

> As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, a unidade temática Grandezas e medidas, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico. (BRASIL, 2017, p. 273).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 273), nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, "a expectativa é que os alunos reconheçam que medir é comparar uma grandeza com uma unidade e expressar o resultado da comparação por meio de um número". Além disso, os alunos, no decorrer do Ensino Fundamental, devem também "resolver problemas oriundos de situações cotidianas que envolvem grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área (de triângulos e retângulos) e capacidade e volume (de sólidos formados por blocos retangulares)" (BRASIL, 2018, p. 296).

No que se refere a Grandezas e medidas, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 527), propõe que os estudantes construam e ampliem a "noção de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, e obtêm expressões para o cálculo da medida da área de superfícies planas e da medida do volume de alguns sólidos geométricos".

Nas habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, 5º ano, a BNCC (BRASIL, 2018) apresenta a relação entre as médias e a Geometria:

- Habilidade (EF05MA19) - Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais. Algumas relações entre áreas e perímetros de figuras poligonais.
- Habilidade (EF05MA20) - Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.

- Habilidade (EF05MA19) - Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.

Os autores Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) apresentam a conexão da aprendizagem do tema Medidas com aprendizagem de outros temas escolares, sobretudo os temas geométricos.

> A medida é um meio privilegiado para se estabelecerem conexões, quer dentro da própria Matemática, quer na ligação a outras disciplinas. Na medida, estão interligados conceitos geométricos, aritméticos, trigonométricos, bem como a capacidade de formulação e de resolução de problemas e várias destrezas. Há uma forte ligação deste tópico à geometria (por exemplo, o perímetro e a área são características mensuráveis de certas figuras geométricas)" (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999, p. 64).

Desta forma, a compreensão de Grandezas e medidas para o estudo da Geometria Plana na medida do comprimento e largura para o cálculo do perímetro e área das figuras planas faz-se necessária. Os conceitos de medida e geometria estão estritamente relacionados. O desenvolvimento dos conceitos de perímetro e área são um bom exemplo desta relação.

2.3 ÁREA E PERÍMETRO

Nesta pesquisa, apresentaremos a construção de conceitos de figuras planas, dentre elas, o retângulo, o quadrado e o cálculo de sua área e seu perímetro, realizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental ao participarem da resolução de tarefas exploratórias.

As noções de perímetro e área começam por ser estudadas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, momento em que os estudantes começam a trabalhar estas duas grandezas e a relacioná-las.

A definição de perímetro normalmente é apresentada aos alunos como a soma das medidas dos lados da figura plana ou como a medida do contorno de uma superfície fechada. Dessa maneira, conseguem entender o conceito de perímetro para a resolução de suas tarefas. Mas é necessária uma definição melhor de perímetro. De acordo com Mori (2012, p. 233), "a palavra polígono significa muitos ângulos, pois poli significa muitos e gono ângulo". Se possui muitos ângulos, também possui muitos lados. Para Moreira (2014, p. 11), "polígonos são linhas fechadas, planas, formados por segmentos de reta que não se cruzam, estes chamados de lados do polígono". Então é preciso deixar claro que perímetro se trata do tamanho do contorno da figura. Uma definição para perímetro, de acordo com Moreira (2014, p. 11), é a "soma das medidas de todos os lados estando eles na mesma unidade de medida". Para essa pesquisa, será considerado como perímetro o resultado da soma das medidas dos lados da figura formada pela unidade de medida, a distância entre os pregos no Geoplano.

No estudo de perímetro e área, a BNCC (BRASIL, 2018), apresenta como umas das habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, no 4º ano, "(EF04MA20) - Medir e estimar comprimentos (incluindo perímetros), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local" (BRASIL, 2018, p. 293).

Por sua vez, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 297) destaca, no 5º ano do Ensino Fundamental, que o estudo de áreas e perímetros de figuras poligonais deve possibilitar ao estudante estabelecer algumas relações, "sendo por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes". Também é apresentado como objetivo do conhecimento a "ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas e reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes" (BRASIL, 2018, p. 296).

O conceito de área é definido por Walle (2009) como "o espaço bidimensional dentro de uma região". O autor afirma que as atividades de comparação entre áreas servem para ajudar os alunos a distinguir entre tamanho (ou área) e forma, comprimento e outras dimensões. "Um longo e fino retângulo pode ter menos área do que um triângulo com lados menores" (WALLE, 2009, p. 412).

É importante destacar que é comum, ao falar de área de uma figura, relacionar um número real positivo a figura, mas de acordo com Breda *et al.* (2011, p. 124), a área e a medida da área não são conceitos semelhantes, pois área é uma grandeza geométrica e pode ser medida utilizando as unidades de medida adequadas, já a medida da área de uma figura é um número real positivo que provém da comparação entre a figura que se pretende medir e a figura utilizada como unidade.

Para Bonjorno, Júnior, Sousa (2020), a área S de um retângulo de lados de medidas b e h, com b e h reais positivos, é dada pelo produto da medida da base b pela medida da altura h, então S = b. h. Com relação ao conceito de retângulo e quadrado, os autores afirmam que "todo quadrado é um retângulo com lados de medidas iguais. Logo, a área de um quadrado é igual ao produto das medidas de seus lados" (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2020, p.12).

Souza e Garcia (2016, p. 157) afirmam que um "retângulo é todo quadrilátero que possui os quatro ângulos internos retos. Quadrado é todo quadrilátero que possui os quatro ângulos internos retos e os quatro lados com a mesma medida. Assim podemos dizer que o quadrado é um caso particular de retângulo".

Para este estudo, será considerado as medidas dos lados do quadrado e do retângulo como diferença entre eles.

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 293) considera ainda "medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área".

Para essa pesquisa, será considerado como cálculo da área do retângulo e do quadrado a contagem de quadradinhos ou metade de quadradinhos, no Geoplano e na malha pontilhada, e a multiplicação dos lados do quadrado e do retângulo.

2.4 RECURSOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA - GEOPLANO

Ventura (2013, p. 3) destaca que recursos como os "materiais manipuláveis, dos quais faz parte o Geoplano, estão fortemente associados ao ensino da Geometria e são referidos, variadas vezes, no programa do ensino da Matemática e nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar".

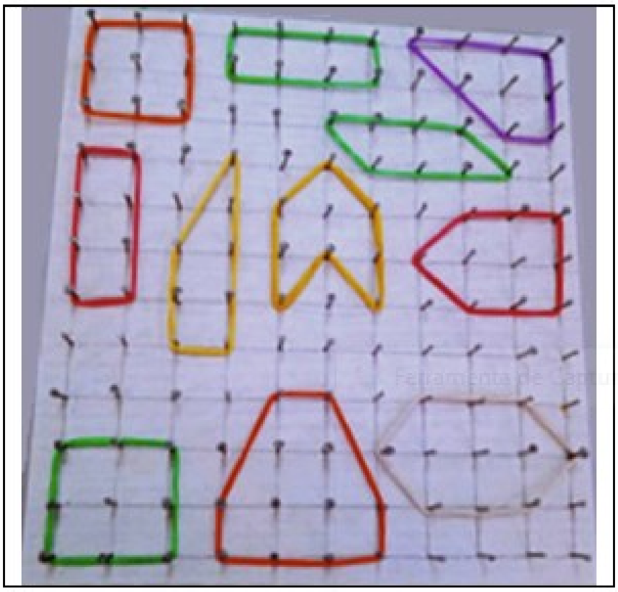
A utilização de materiais manipuláveis facilita a formação de imagens mentais, que não são possíveis somente com a apresentação de conceitos. Para Paes (2000), a formação das imagens mentais é consequência da experiência com objetos e com desenhos, já que "as imagens mentais possuem natureza abstrata e subjetiva. Por serem abstratas, podem ser relacionadas aos conceitos, mas devido ao seu aspecto subjetivo e particular, se afastam dos conceitos matemáticos" (AMANCIO; GAZIRE, 2015, p. 115).

Paes (2000) afirma que é importante estimular um vínculo constante entre a manipulação de materiais e situações significativas para o aluno construir os conceitos geométricos e que o material didático deve ser usado como um instrumento para a aquisição de conhecimentos geométricos, e não com um fim em si mesmo. Assim, "a manipulação deve estar associada a uma atividade intelectual, para que o aluno possa estabelecer relação entre a prática e a teoria" (AMANCIO; GAZIRE, 2015, p. 114).

O Geoplano é um material manipulável importante para o trabalho com as figuras planas, possibilitando ao aluno a manipulação das formas e contribuindo para que ele adquira uma visualização espacial e compreenda diversos temas de geometria. "A visualização espacial pode ser desenvolvida, inicialmente, por meio da construção e manipulação de representações concretas, utilizando materiais manipuláveis e posteriormente pela representação mental de formas, relações e transformações" (BREDA *et al.,* 2011, p. 10).

Existem vários tipos de Geoplano, tais como circular, oval, triangular e quadrado. O Geoplano mais utilizado é o quadrado construído com um pedaço de madeira no qual são fixados pequenos pregos, formando um reticulado de madeira, que pode ser explorado utilizando elásticos. A figura a seguir (Figura 3) mostra um modelo de Geoplano com figuras formadas.

Figura 3 - Modelo de Geoplano com figuras formadas pelos alunos



Fonte: Dados da pesquisa

Esse recurso foi escolhido para a realização das tarefas por ser um material manipulavél que está fortemente associado ao ensino da Geometria, no qual os alunos podem construir as formas geométricas, podendo desfazer e alterar sempre que necessário, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Ressaltando que "o desenvolvimento do pensamento geométrico é um processo lento e complexo, construído a partir das experiências vivenciadas pelo aluno, sendo que os materiais concretos e os desenhos exercem grande influência no processo de construção conceitual" (AMANCIO; GAZIRE, 2015, p. 126).

Os recursos didáticos, como o Geoplano e a malha pontilhada, são componentes que servem como mediador entre professor e aluno para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Para Paes (2005), esses recursos estão relacionados a "elementos utilizados como suporte experimental na organização do processo de ensino e de aprendizagem". Destaca também que a finalidade é de servir como "mediadora para facilitar na relação entre professor, aluno e o conhecimento em um momento preciso da elaboração do saber" (PAES, 2005, p. 3).

A importância da utilização de material manipulável como mediação entre professor e aluno também destacado por (BREDA *et al.,* 2011):

> Os materiais manipuláveis (como o Geoplano, o tangram, formas poliganis, *polydrons* ou cubos encaixáveis) podem ter um papel fundamental como medidadores na aprendizagem do diversos temas de geometria, para além dos materiais próprios deste tema (como régua, esquadro, compasso, transferidor) (BREDA *et al*., 2011, p. 20).

O Geoplano apresenta um potencial que permite trabalhar com as figuras planas e com os conceitos de perímetro e área. Nessa pesquisa, há uma importância para a resolução das tarefas e a compreensão que envolve esses conceitos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

São apresentadas, neste capítulo, as características da pesquisa, a metodologia aplicada, os participantes da aplicação, as tarefas elaboradas, a coleta dos dados e a forma na qual os dados foram analisados.

3.1 ABORDAGEM QUALITATIVA E INVESTIGAÇÃO BASEADA EM DESIGN (IBD)

Esta pesquisa qualitativa de caráter interpretativo compreender os argumentos matemáticos elaborados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Cornélio Procópio, Paraná, Brasil, ao resolverem, de forma colaborativa, uma sequência de tarefas exploratórias envolvendo figuras geométricas planas.

Esta pesquisa tem perspectiva qualitativa de cunho interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994), faz parte de um projeto de pesquisa mais amplo desenvolvido na Universidade Tecnológica Federal do Paraná intitulado “Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática” (aprovado pelo comitê de Ética sob parecer nº 5.161.835), segue os princípios da Investigação Baseada em Design (PONTE *et al.,* 2016) e busca compreender os argumentos matemáticos elaborados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Cornélio Procópio, Paraná, Brasil, ao resolverem, de forma colaborativa, uma sequência de tarefas exploratórias envolvendo figuras geométricas planas. Como questões de pesquisa, elencamos: (i) quais conceitos matemáticos são utilizados por estudantes do 5º ano ao argumentar matematicamente a respeito de figuras geométricas planas? (ii) quais processos de raciocínio matemático sustentam essa argumentação?

A pesquisa qualitativa, de acordo com Esteban (2010), implica uma preocupação direta com a experiência tal como é vivida, sentida ou experimentada.

Das pesquisas aplicadas no campo da cognição, a Design-Based Research (DBR) é uma metodologia de pesquisa recente. De acordo com Matta, Silva e Boaventura (2014), essa metodologia é:

> Uma inovadora abordagem de investigação que reúne as vantagens das metodologias qualitativas e das quantitativas, focalizando no desenvolvimento de aplicações que possam ser realizadas e de fato integradas às práticas sociais comunitárias, considerando sempre sua diversidade e propriedades específicas, mas também aquilo que puder ser generalizado e assim facilitar a resolução de outros problemas (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014, p. 23).

Ponte *et al.* (2016) apresentam essa metodologia como Investigação Baseada em Design (IBD), sendo utilizada nesta pesquisa. Esta metodologia estuda investigação educacional baseada em promover aprendizagem ou mudanças e compreender os processos que lhe são subjacentes. “O foco dos estudos pode estar na aprendizagem dos alunos, no ensino realizado pelos professores na produção de novos currículos ou materiais educacionais na formação de professores ou em mudanças nos sistemas educativos”. (PONTE *et al*., 2016, p. 77).

A IBD é um tipo de investigação adequada para estudos cujo principal interesse é encontrar soluções eficientes e práticas para problemas educacionais. Alguns elementos são importantes para a aprendizagem como:

> As tarefas que os alunos são convidados a resolver, os tipos de discurso que são incentivados, as normas de participação estabelecida, as ferramentas e meios materiais fornecidos e os processos práticos pelos quais os professores podem orquestrar as relações entre esses elementos na sala (PONTE *et al*., 2016, p. 80).

Mata-Pereira e Ponte (2018) apresentam alguns princípios gerais de design definidos para as tarefas aplicadas sendo: aplicar tarefas de natureza diversa, com ênfase em tarefas que incluam questões exploratórias, tarefas que incluam questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução e tarefas com diferentes graus de desafio.

Com relação aos princípios gerais de design para as ações do professor, no sentido de promover o raciocínio matemático dos alunos, Mata- Pereira e Ponte (2018), destacam:

> a) propor tarefas de natureza diversa, com ênfase em tarefas que incluam questões exploratórias e/ou problemas, b) propor tarefas que incluam questões que incitem a formulação de generalizações, c) propor tarefas que incluam questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução, d) propor tarefas que incluam questões com diferentes graus de desafio (MATA- PEREIRA; PONTE, 2018, p. 788).

Esta investigação apresenta diversos tipos de ciclos, entre eles, as fases de preparação, realização e análise retrospectiva de uma experiência de design. O quadro a seguir (Quadro 4) apresenta os principais aspectos de cada fase dos ciclos de investigação de acordo com Ponte *et al*. (2016).

Quadro 4 - Principais aspectos de cada fase dos ciclos de investigação

Fases	**Aspectos**
Preparação	- Definir a intenção teórica como as ideias disciplinares e capacidades que constituem os objetivos de aprendizagem de um ponto de partida. - Elaborar uma conjectura a ser testada e aperfeiçoada no discurso de investigação.
	-Nesta pesquisa, na etapa de preparação, foi: a) realizado o estudo teórico do raciocínio matemático, das tarefas exploratórias, das ações do professor e os conceitos relacionados à Geometria Plana; b) estabelecida a conjectura e os objetivos de aprendizagem de acordo com a teoria estudada; c) elaborado a sequência de tarefas exploratórias, bem como o material manipulável a ser utilizado de acordo com o ensino a ser aplicado; d) estipulado o período da aplicação e coleta dos dados.
Realização	- Assumir uma perspectiva clara dos possíveis percursos de aprendizagem e manter ativos os meios para cultivar as relações com os atores do terreno. - Não perder de vista os objetivos, sendo necessário movimentos de reflexão.
	- A etapa da realização contou com a aplicação das tarefas na turma de 5º ano do Ensino Fundamental e a coleta dos dados. - Foi feito, também nessa etapa, a análise dos dados das tarefas para identificar se a conjectura estabelecida para esse trabalho foi alcançada.
Análise retrospectiva	- Realizar, ao final de cada ciclo, uma análise. - Colocar a experiência de design num contexto teórico mais amplo.
	- Na análise retrospectiva, foi realizado a discussão dos resultados obtidos na análise dados coletados, concluindo que a conjectura foi alcançada, e evidenciar os processos de raciocínio matemático desenvolvidos, de acordo com o referencial teórico de Jeannotte e Kieran (2017), a reformulação das tarefas visando a aprendizagem matemática, que poderá ser aplicado num segundo ciclo da IBD, no projeto ao qual esta pesquisa está inserida.

Fonte: A autora, baseado em Ponte *et al.* (2016).

Para Ponte *et al.* (2016), apesar da IBD apresentar recursos metodológicos relativamente recentes para a investigação em Educação Matemática, ela apresenta potencialidades interessantes para investigar certos tipos de problemas e produzir resultados relevantes que ajudam a perceber como conduzir o processo ensino-aprendizagem.

Para esta pesquisa, na etapa de preparação (PONTE *et al.*, 2016), temos, como objetivo de aprendizagem, que os alunos relacionarem as propriedades de figuras geométricas planas. Diante disso, nossa conjectura é a de que uma sequência de tarefas exploratórias, resolvidas de forma colaborativa, sobre figuras geométricas planas, possibilite a mobilização de processos de raciocínio matemático e, consequentemente, a aprendizagem matemática.

Conseguimos, nesta pesquisa, realizar um primeiro ciclo de análise, como foi descrito no quadro acima (Quadro 4), que subsidiará a sequência de tarefas que irão compor o Produto Educacional que acompanha esta dissertação.

3.2 DESCRIÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada em dezembro de 2021, numa escola pública no município de Cornélio Procópio, no estado do Paraná, localizada na região central da cidade, onde a autora atua como professora há 12 anos[2]. A escola funciona em Turno Único, ou seja, em período integral, matutino e vespertino. No ano de 2021, contava com 185 alunos distribuídos em 8 turmas, 1ºA, 1ºB, 2ºA, 3ºA, 4ºA, 5ºA, 5º B e Classe Especial.

É necessário relatar que, devido a Pandemia do COVID-19, as aulas iniciaram normalmente em fevereiro, mas em março de 2020 e no ano de 2021, as aulas passaram para o sistema remoto. As famílias buscavam material impresso com os conteúdos para os alunos estudarem em casa, recebiam orientações via WhatsApp e vídeo com explicações gravados. A partir do mês de março de 2021, as aulas do 5º ano passaram a ser ministradas via Google Meet, nas quais 22 alunos participavam diariamente. Dois alunos não tinham celular e nem internet para participar das aulas online, então, continuaram estudando com o material impresso e auxílio de vídeos gravados e explicações via WhatsApp. No mês de agosto de 2021, as aulas iniciaram no sistema semipresencial: metade da turma recebia material impresso e participava das aulas online e a outra metade estudava presencialmente na escola. Após a segunda quinzena de outubro de 2021, todos os alunos retornaram presencialmente.

Este estudo foi aplicado na turma do 5º A, na qual a autora era professora regente no turno matutino e estudavam 24 alunos com idade entre 9 e 13 anos. Os alunos eram participativos e mostravam interesse em aprender, estudavam juntos desde o 1º ano e já estavam familiarizados uns com os outros. Durante as aulas presenciais, antes da pandemia, eles eram acostumados a trabalhar em grupos. Nas aulas online, estavam sempre presentes e demonstravam responsabilidade na participação das aulas e na entrega do material impresso com as atividades resolvidas.

---

[2] Rosimeiri da Silva de Morais, graduada em Licenciatura em Ciências – Habilitação em Matemática, pela Faculdade Estadual de Filosofia Ciências e Letras de Cornélio Procópio – FAFI, em 1996. Professora dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental pela Secretaria Municipal da Educação de Cornélio Procópio, há 12 anos e professora dos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio pela Secretaria Estadual da Educação do Paraná (SEED), há 16 anos.

Os conteúdos trabalhados durante as aulas online, com material impresso e no presencial, na área da Matemática, referentes a unidade temática Geometria, foram as formas planas diferenciando os polígonos dos não polígonos, o cálculo do perímetro na malha quadriculada a partir da contagem dos lados dos quadradinhos como unidade de medida e o cálculo da soma das medidas dos lados das figuras planas. Para o cálculo da área, foram utilizadas a contagem dos quadradinhos e meios quadradinhos na malha quadriculada e a forma algébrica, ou seja, a multiplicação das medidas dos lados dessas figuras. Os sólidos geométricos foram apresentados como formas tridimensionais e as suas planificações. Foi trabalhada a diferença entre as suas superfícies retas e arredondadas, conceituando-as como poliedros, e não poliedros. Em relação a unidade temática Grandezas e medidas, foram trabalhadas as medidas de comprimento: metro, centímetro, decímetro, milímetro, quilômetro e as relações entre essas medidas.

Mesmo após o retorno presencial de todos os alunos, não foi possível a aplicação das tarefas imediatamente, pois para a realização das tarefas exploratórias e para o desenvolvimento dos processos de raciocínio, é importante que os alunos interajam, sendo necessária a realização do trabalho em duplas ou grupos, numa perspectiva colaborativa. Então, devido a necessidade do cumprimento das normas de distanciamento, previsto no Decreto Municipal de retorno às aulas, que previa o distanciamento de um metro entre os alunos, não foi possível a formação de grupos naquele momento para a realização das tarefas. Além disso, era necessária a readaptação dos alunos ao ambiente escolar, já que estavam muito tempo longe da escola e distantes um dos outros, podendo não haver a interação entre eles.

Nas duas semanas que antecederam a aplicação das tarefas exploratórias, foi revisado com a turma o conteúdo relacionado à Geometria Plana, destacando as formas geométricas mais conhecidas por eles, como o quadrado, o retângulo, o triângulo, o pentágono, o hexágono e o círculo. Assim como o cálculo de área e perímetro do retângulo e do quadrado, o qual já havia sido trabalhado de forma online, mas os alunos apresentaram pouco conhecimento.

O mês escolhido para a aplicação foi o mês de dezembro, nos dias 06, 07 e 09, pois seriam resolvidas, pelos alunos, quatro tarefas, e, nesses dias, eles poderiam usar as quatro horas de aula seguidas caso fosse necessário. Na sexta-feira, dia 03 de dezembro, apresentamos, aos alunos, o Geoplano, para que conhecessem e apenas brincassem sem nenhuma regra estabelecida. Todos gostaram muito pois era um material diferente e gostaram, também, de manipular os elásticos coloridos que utilizavam na construção das formas planas. Foram utilizados doze Geoplanos, sendo dois de tamanho maior e dez de tamanho menor, dos quais cinco foram emprestados da UTFPR e sete construídos para esta pesquisa. Nesse dia também, foi pedido para os alunos que tivessem e pudessem levar, com a autorização dos pais, um celular, pois havia somente três gravadores e duas câmeras para serem utilizados na gravação da aplicação das tarefas.

Para a aplicação das tarefas exploratórias, a turma foi dividida em 12 duplas, tendo em vista que todos os pais autorizaram a participação na pesquisa, assinando o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ANEXO A). A escolha das duplas foi espontânea: cada aluno escolheu seu par de acordo com a proximidade entre eles. Essa escolha foi feita na sexta-feira que antecedeu a aplicação das tarefas.

No dia 06 de dezembro, primeiro dia da aplicação, dois alunos faltaram, sendo necessário reorganizar as duplas, então ficaram 11 duplas, num total de 22 alunos, para participar da resolução das tarefas. Conforme havia sido solicitado, 8 alunos levaram o celular com gravador de voz já instalado, e esses celulares foram utilizados nos grupos para a gravação dos diálogos. Para o primeiro e segundo dia da aplicação das tarefas, a escola permitiu que uma estagiária estivesse presente para auxiliar na coleta de dados.

Após a organização dos grupos, foi pedida a autorização para a gravação de áudio e vídeo, como já havia sido explicado anteriormente. Em seguida, foi explicado como seria a realização da tarefa 1, ou seja, cada dupla iria ler o enunciado da tarefa, e, logo em seguida, deveria resolvê-la utilizando o Geoplano. Depois, seria necessário passar as figuras formadas para a malha pontilhada e responder à questão dissertativa. Após todos finalizarem a tarefa, seria realizado a plenária, na qual cada dupla apresentaria suas respostas oralmente à toda turma. Essa sequência seria seguida nos três dias da aplicação. Em seguida, foi distribuído o material que iriam utilizar: o Geoplano, um para cada dupla, aproximadamente 10 elásticos coloridos para a dupla, podendo solicitar mais caso fosse necessário, uma folha com a tarefa impressa e a malha pontilhada para cada aluno. Na sequência, foi feita a leitura do enunciado e autorizado o início da tarefa.

Após finalizarem a primeira tarefa, foi feita a plenária e a maioria dos alunos tiveram dificuldade em apresentar suas respostas porque estavam envergonhados. Logo após o intervalo, iniciaram a resolução da tarefa 2 seguindo a mesma dinâmica da primeira tarefa. Na realização da plenária, eles já estavam mais tranquilos e adaptados. Os alunos levaram em média uma hora e meia para finalizarem cada tarefa.

No dia 07 de dezembro, segundo dia da aplicação, um aluno faltou, sendo necessário formar um trio para a inserção do aluno que ficou sem parceiro, ficando, então, nove duplas e um trio, somando 21 alunos. Nesse dia, foi aplicada a tarefa 4 deixando a tarefa 3 para o dia seguinte, pois os alunos tinham se adaptado à construção das figuras no Geoplano, e a tarefa 4 seria melhor para a sequência das tarefas criadas. Nesse dia, a estagiária que auxiliava nas gravações ficou somente por uma hora.

No dia 09 de dezembro, a estagiária não pôde estar presente, sendo que toda a coleta dos dados foi feita somente pela autora. Finalizando com a aplicação da tarefa 3, que exigia, além da formação do desenho da figura solicitada, o cálculo de áreas e perímetros na sua resolução. Nesse dia, faltaram mais dois alunos, necessitando então formar uma nova dupla com os alunos que ficaram sem seus pares, formando então, 9 duplas totalizando 18 alunos para finalizar as tarefas.

Ao final de cada dia de aplicação, os áudios e vídeos gravados nos celulares, nos gravadores e câmeras, foram salvos, com cuidado, para não perder nenhuma gravação, pois continham as discussões das resoluções das tarefas feitas pelos alunos.

Para a análise apresentada nesta dissertação, foram escolhidas duas duplas, que tiveram seus nomes alterados para garantir o anonimato. A escolha dessas duplas foi devido à boa qualidade dos áudios, ao envolvimento das alunas nos diálogos, apresentação de discussões envolvendo argumentos matemáticos e desenvolvimento dos processos de raciocínio na resolução das tarefas e também pelo fato dessas duplas terem se mantido as mesmas durante toda a coleta de dados.

Foram elaboradas, para essa pesquisa, quatro tarefas[3]. A coleta dos dados foi feita por meio da observação dos participantes durante a aplicação, apoiada em gravações de áudio e vídeo e pela coleta dos registros escritos feitos pelos alunos durante a resolução das tarefas.

A partir da transcrição dos diálogos entre as duplas, os dados foram analisados de acordo com os processos de raciocínio matemático apresentados por Jeannotte e Kieran (2017).

3.3 AS TAREFAS

A tarefa exploratória precisa ter uma execução que leve os alunos a um modo de refletir sobre ela, fazer comparações, elaborar conjecturas, e não apresentar uma única resposta. Para Mata-Pereira e Ponte (2018), as tarefas constituem um dos aspectos centrais para o sucesso dos alunos. São especialmente relevantes os tipos de tarefas em que os alunos se envolvem, os modos como se envolvem e as interações que podem surgir em torno dessas tarefas.

---

[3] As tarefas são apresentadas na íntegra e em tamanho real nos APÊNDICES A, B, C e D.

Para o desenvolvimento do raciocínio matemático, as tarefas têm extrema importância. Portanto, foram desenvolvidas quatros tarefas para aplicação nessa pesquisa. Foram pensadas de forma que os alunos pudessem discutir sobre suas resoluções, elaborar conjecturas falsas ou verdadeiras, fazer comparações, generalizar, chegar às resoluções a partir dos conhecimentos que já possuem e formar novos conhecimentos; objetivando, também, colaborar com o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos na qual são “necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes” (BRASIL, 2018, p. 271).

O conteúdo matemático selecionado para a elaboração das tarefas foi a Geometria Plana, abordando as propriedades de figuras geométricas planas, destacando a área e perímetro, buscando o reconhecimento dos lados na formação das figuras e a diferenciação do perímetro e da área a partir da construção no Geoplano. A Geometria Plana foi escolhida devido à pouca importância que é dada a ela nos anos iniciais do Ensino Fundamental, levando os estudantes a apresentar dificuldades. A BNCC (BRASIL, 2018) destaca, em suas competências específicas da matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental, a importância do reconhecimento das figuras planas, afirmando que, dos alunos, “espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos” (BRASIL, 2018, p. 272).

A escolha pelo conteúdo de perímetro e área está relacionada à observação da dificuldade que os alunos apresentam ao resolverem as tarefas propostas pelo professor, poucos sabem a forma de calcular a área e o perímetro. Ou seja, poucos alunos conseguem utilizar a multiplicação dos lados para obter a área da figura e a soma dos lados para obter o perímetro. Não apresentam entendimento do que é e nem conseguem diferenciar perímetro e área. De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), a geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume” (BRASIL, 2018, p. 272), havendo a necessidade de levar o aluno a compreender realmente área e perímetro.

É importante destacar que, ao elaborar essas tarefas, houve a preocupação em verificar como estaria o nível de aprendizagem dos alunos no momento da aplicação, pois os alunos do 5º ano estudaram em casa durante dois anos, devido à Pandemia do COVID-19. Ou seja, fizeram o 4º e boa parte do 5º ano, sem estar em sala de aula, recebendo orientações a distância e, muitas vezes, tinham somente a ajuda dos familiares para compreender o conteúdo.

Diante disso, percebemos a necessidade de trabalhar com material manipulável e com tarefas que motivassem e envolvessem os alunos em discussões, de forma a buscar os conhecimentos já adquiridos para utilizar na resolução das tarefas.

Segue a descrição e objetivos das tarefas elaboradas para a aplicação com os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

3.3.1 Tarefa 1

Aluno:____Turma:____Data:___/____/___

Renato tem um Geoplano e gosta de construir figuras geométricas nele. Mas agora ele tem algumas questões para resolver utilizando seu Geoplano. Vamos ajudá-lo?

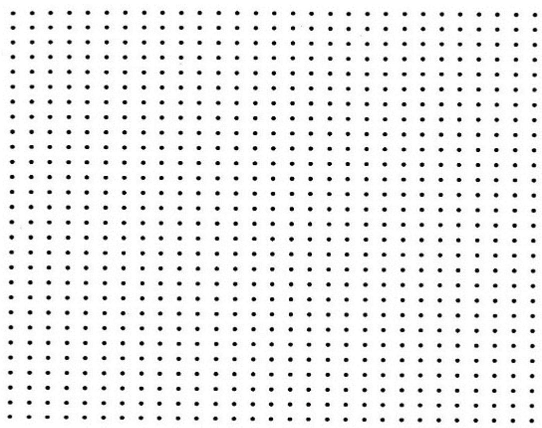
1) Construa no Geoplano um retângulo e um quadrado e depois desenhe na malha pontilhada.

a) O que você pensou para formar esses polígonos? Explique.

b) O que os polígonos que você construiu tem igual e o que eles têm de diferente? Como chegou a essas conclusões?

c) Explique se é possível formar um círculo utilizando o mesmo critério que utilizou para formar os polígonos acima?

Malha pontilhada para tarefa 1



Para a resolução desta tarefa, os alunos devem formar, no Geoplano um retângulo e um quadrado, depois, desenhá-las na malha pontilhada e, em seguida, descrever suas semelhanças e diferenças.

Esta tarefa foi elaborada com os objetivos de promover aos alunos o entendimento de que os polígonos são figuras bidimensionais formadas por lados, ou seja, segmentos de retas, compreender que a medida e a quantidade dos lados determinam a forma geométrica plana que será formada, entender que as figuras geométricas planas, os polígonos, sãos formados de acordo com os lados e suas medidas, entender que o retângulo e o quadrado são figuras geométrica planas e que são polígonos e quadriláteros, mesmo apresentando uma diferença entre a largura e o comprimento e diferenciar polígonos e não polígonos, destacando o círculo como uma figura formada por linhas curvas, sendo um não polígono.

3.3.2 Tarefa 2

1) Renato precisa construir duas figuras geométricas (polígonos) diferentes que apresentam o mesmo perímetro. Vamos ajudá-lo formando as figuras no Geoplano e depois escrevendo o que você pode concluir após comparar essas figuras.

2) Renato precisa construir duas figuras geométricas (polígonos) diferentes que apresentam a mesma área. Ajude-o construindo duas figuras geométricas com a mesma área e escreva o que pode observar nessas duas figuras.

Na tarefa 2.1, os alunos devem construir, no Geoplano, duas figuras geométricas diferentes, apresentando o mesmo perímetro, podendo formar retângulo, quadrado, triângulo, pentágono, hexágono, entre outros. Entretanto, as duas figuras precisam ser diferentes. Na sequência, devem elaborar, de forma escrita, as conclusões que chegaram ao comparar as duas figuras. Espera-se que eles façam a relação entre a área e o perímetro dessas figuras.

Na tarefa 2.2, os alunos devem construir formas geométrica diferentes, mas com a mesma medida de área. Na sequência, desenhar as figuras na malha pontilhada e, para finalizar, descrever o que observaram nas figuras formadas, as semelhanças e diferenças que encontraram ao fazer as comparações.

Com essa tarefa, pretende-se que os alunos concluam que figuras geométricas planas podem ter áreas iguais e perímetros diferentes, e que figuras com áreas diferentes podem ter perímetros iguais.

3.3.3 Tarefa 3

1) Renato formou no Geoplano um quadrado com área 9 cm^2 e precisa encontrar o perímetro, depois preencher a tabela abaixo:

	Figura 1	**Figura 2**	**Figura 3**
Área	**9 cm^2**	**O dobro da área da figura 1**	**O triplo da área da figura 1**
Perímetro			

Agora mostre para Renato como fez para formar essas figuras escrevendo ou realizando os cálculos.

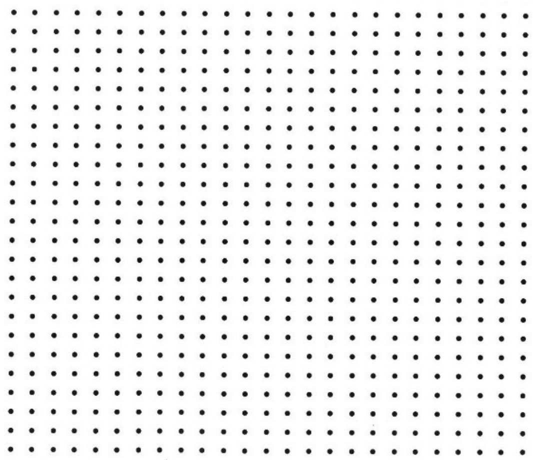
Nesta tarefa, os alunos, em um primeiro momento, devem formar, no Geoplano, um quadrado com 9 cm^2 de área, sendo a figura 1, formada por eles. Na sequência, formar a figura 2, que será uma outra figura que tem o dobro da área da figura 1. Essa figura terá 18 cm^2 de área. Em seguida, formar a figura 3, com o triplo da área da figura 1, sendo uma figura com área de 27 cm^2. Os alunos poderão formar mais de uma figura com as áreas pedidas.

Logo após formar as figuras, os alunos deverão encontrar o perímetro. Na sequência, deverão apresentar os cálculos e os critérios que utilizaram para encontrar as respostas, descrevendo suas conclusões.

Espera-se, com essa tarefa, que os alunos construam formas geométricas planas diferentes com o dobro e o triplo da área indicada, calculem o perímetro das figuras construídas, entendam que, ao dobrar a área das figuras, o mesmo não acontecerá com o perímetro, utilizem a operação de multiplicação no cálculo das áreas e perímetros das figuras e percebam que, ao dobrar a área de um quadrado, nem sempre se obterá um outro quadrado.

3.3.4 Tarefa 4

1) Construa várias figuras com o perímetro igual a 8 cm. Todas as figuras tem a mesma área? O que você pode concluir?



Nesta tarefa, os alunos devem iniciar a tarefa construindo várias formas geométricas no Geoplano e todas devem apresentar o mesmo perímetro de 8 cm. Em seguida, comparar as figuras e escrever as conclusões que chegaram em relação ao tamanho da área de cada figura formada com o mesmo perímetro e as conclusões em relação ao formato destas figuras.

Para esta tarefa, espera-se que os alunos compreendam que é possível formar figuras diferentes com áreas iguais e entendam que o formato da figura geométrica plana depende da quantidade de lados na qual é formada.

3.4 ANÁLISE DOS DADOS

Após a elaboração, aplicação e coleta da resolução das tarefes, foi feita a análise dos dados, que seguiu a perspectiva qualitativa. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), as principais questões do estudo são o fio condutor da análise de conteúdo, que caracteriza, na sua essência, a análise de dados. Para esta pesquisa, as seguintes questões de estudo nortearam a análise dos dados: (i) quais conceitos matemáticos são utilizados por estudantes do 5º ano ao argumentar matematicamente a respeito de figuras geométricas planas? (ii) quais processos de raciocínio matemático sustentam essa argumentação?

Para Matta, Silva, Boaventura (2014), a metodologia da Investigação Baseada em Design, a qual esta pesquisa segue os pressupostos metodológicos, tem como foco o desenvolvimento de intervenções pedagógicas que se realizam efetivamente em sala de aula.

Os dados foram analisados de acordo com a fundamentação teórica estudada relacionada ao raciocínio matemático e os processos de raciocínio desenvolvidos por Jeannotte e Kieran (2017), observando se as tarefas possibilitaram o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático e a aprendizagem matemática. As tarefas foram resolvidas antecipadamente pela pesquisadora, com o objetivo de prever as possíveis resoluções dos alunos, buscando antecipar, dessa forma, as prováveis dúvidas e respostas. Mas é importante destacar que não é possível prever todas as resoluções e dúvidas que possam surgir. Mesmo assim, faz-se necessário a resolução antecipada das tarefas. Carneiro (2021) apresenta alguns motivos para a resolução antecipada das tarefas, sendo eles: “compreender o conteúdo matemático por elas abordado, reduzir a quantidade de estratégias não previstas, antecipar questionamentos que poderiam ser feitos aos estudantes e melhorar a qualidade dos momentos de discussão das tarefas” (CARNEIRO, 2021, p.47).

Uma etapa das análises foi a transcrição dos áudios, permitindo assim estar em contato com as discussões de todas as duplas e observar as resoluções apresentadas no Geoplano e as resoluções escritas com mais clareza. Na transcrição dos áudios, podemos observar a interação entre as duplas e a interação com a professora. A ação da professora foi importante para esclarecer dúvidas em relação à interpretação das tarefas, na explicação para utilizar o material manipulável, o Geoplano, na transferência das figuras para a malha pontilhada, pois alguns alunos não sabiam como utilizar a malha pontilhada e na apresentação de questionamentos que auxiliassem na escrita dos argumentos utilizados na resolução das tarefas. Os alunos apresentaram dificuldades, pois não estavam acostumados a escrever as justificativas das suas resoluções, bem como na compreensão de alguns conceitos.

Outra etapa foi a realização, com mais atenção e cuidado, das análises dos diálogos realizados pelas duplas, com o objetivo de identificar os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pelos alunos durante a realização das tarefas, com base na literatura estudada sobre o raciocínio matemático e os processos de raciocínio. A análise feita ouvindo várias vezes os áudios das duplas, fazendo anotações e comparando com a literatura estudada de acordo com os aspectos de processos definidos por Jeannotte e Kieran (2017), que são relacionados à busca de semelhanças e diferenças: conjecturar, generalizar, identificar padrão, comparar e classificar; e os relacionados a validação: justificar, provar e provar formal. A análise foi feita comparando os diálogos dos alunos com as respostas escritas e as fotos tiradas das resoluções no Geoplano.

Para a identificação dos processos de raciocínio desenvolvidos, é necessário que exista o diálogo entre os alunos e que eles argumentem sobre suas ideias e suas dúvidas. Os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pelas duplas ao argumentar matematicamente, durante a realização das quatro tarefas, foram: conjecturar, comparar, justificar, validar e generalizar.

Os processos de raciocínio desenvolvidos pelas duas duplas na realização das tarefas foram descritos em quadros após a descrição da resolução do diálogo das duplas.

3.5 PRODUTO EDUCACIONAL

O comunicado n.º 001/2012[4], da Capes, pressupõe, na produção acadêmica dos mestrados profissionais na área de ensino, a elaboração de um Produto Educacional. Esse documento prevê que, na área de Ensino, um produto educacional deve poder ser utilizado por professores e por outros profissionais envolvidos com o Ensino em ambientes formais ou informais. Apresentamos alguns exemplos de Produto Educacional de acordo com o documento: mídias educacionais, protótipos educacionais e materiais para atividades experimentais, material textual, materiais interativos, atividades de extensão, propostas de ensino, sendo essas, sugestões de experimentos e outras atividades práticas, sequências didáticas, propostas de intervenção, entre outros.

[4]http://arquivos.info.ufra.br/arquivos/2017122049df6139378536b7e6d35c881/Comunicado_CAPES_2012.pdf

A resolução PPGMAT/UTFPR n.º 1[5] estabelece que o Produto Educacional deve ter sido aplicado ou ser aplicável em situações reais. Diante disso e da conjectura de pesquisa, “uma sequência de tarefas exploratórias sobre figuras geométricas planas, aplicadas num ambiente colaborativo, possibilita o desenvolvimento de processos de raciocínio matemático e, consequentemente, a aprendizagem matemática”. Após a análise retrospectiva, na terceira etapa da IBD, na qual foi realizada discussão das análises, decidimos por elaborar o Produto Educacional nomeado “Uma sequência de tarefas exploratórias no Geoplano”, com objetivo de auxiliar o professor em sua prática, principalmente no trabalho com tarefas exploratórias, proporcionando conhecimento e maior compreensão a respeito do raciocínio matemático e os seus processos.

O Produto Educacional foi elaborado a partir da dissertação e das análises da sequência de tarefas aplicadas, objetivando facilitar a compreensão de alguns conceitos nela apresentados. Dentre eles, o raciocínio matemático e os processos de raciocínio, as tarefas exploratórias e as ações realizadas pelo professor durante a aplicação das tarefas, o trabalho colaborativo, a argumentação, o material manipulável, no caso, o Geoplano, a apresentação das tarefas aplicadas e a análise dos processos de raciocínio desenvolvidos pelos alunos. O produto elaborado contempla também a metodologia para aplicação das tarefas, no qual foram elencados os materiais, o tempo de aplicação estimado, o desenvolvimento das tarefas, os conteúdos e objetivos relacionados à Geometria Plana, possíveis processos de raciocínio a serem desenvolvidos pelos alunos na realização das tarefas e tarefas reformuladas para serem aplicadas na sala de aula.

Nesta pesquisa realizamos o primeiro ciclo de analise conforme preconiza a metodologia da IBD. Diante disso, após analisarmos as resoluções feitas pelos alunos, realizamos algumas modificações na sequência das tarefas a serem apresentadas no Produto Educacional, objetivando maior compreensão e desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático.

Assim, todas as tarefas foram nomeadas, facilitando a identificação dos conteúdos abordados. Na primeira tarefa, foram modificados os enunciados para maior compreensão dos alunos. Na tarefa dois, foi modificada a numeração, pretendendo melhorar a sua sequência.

---

[5]http://portal.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/stricto-sensu/ppgmat/documentos/regulamentos-e-normas-2021-resolucao_01-2021_produtos_educacional.pdf/@@download/file/2021%20-%20Resolucao_01.2021_produto_educacional.pdf

Após a aplicação, a tarefa três passou a ser a quarta tarefa, sendo considerada melhor para a sequência e o raciocínio do aluno. Recebeu modificações nas informações contidas no quadro, pois durante a aplicação os alunos apresentaram dúvidas na compreensão do que pedia a tarefa. A quarta tarefa então passou a ser a terceira tarefa e também recebeu modificações no enunciado.

O Produto Educacional apresentado busca despertar, no professor, interesse pelo conhecimento das tarefas exploratórias e dos processos de raciocínio desenvolvidos durante suas resoluções e apoiá-lo caso pretenda aplicá-lo em sala de aula.

4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Nesse capítulo, serão apresentados os diálogos das duplas Anny e Lavínia, Paula e Renata (nomes fictícios), do 5º ano A do Ensino Fundamental, ao resolverem as tarefas exploratórias 1, letras (a), (b), (c), tarefa 2.1 e 2.2, tarefa 3 e tarefa 4 e os quadros com a análise dos processos de raciocínio matemático desenvolvidos pelas alunas e os conceitos matemáticos utilizados para a resolução das tarefas.

4.1 TAREFA 1

Aluno:____Turma:____Data:___/____/___

Renato tem um Geoplano e gosta de construir figuras geométricas nele. Mas agora ele tem algumas questões para resolver utilizando seu Geoplano. Vamos ajudá-lo?

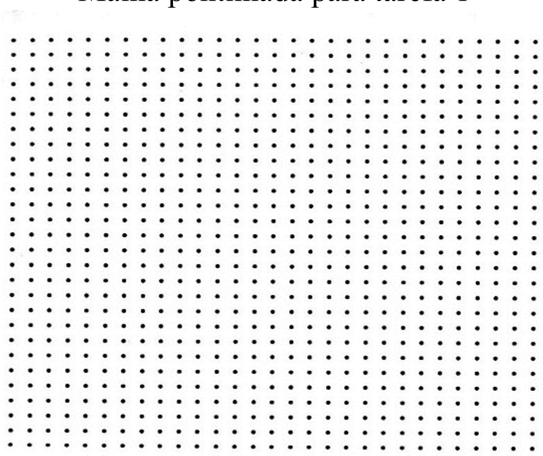
1) Construa no Geoplano um retângulo e um quadrado e depois desenhe na malha pontilhada.

a) O que você pensou para formar esses polígonos? Explique.

b) O que os polígonos que você construiu tem igual e o que eles têm de diferente? Como chegou a essas conclusões?

c) Explique se é possível formar um círculo utilizando o mesmo critério que utilizou para formar os polígonos acima?

Malha pontilhada para tarefa 1



4.1.1 Dupla 1 – Anny e Lavínia – Tarefa 1(a)

Trecho 1 do diálogo

Anny: Vamos começar fazendo retângulo?
Lavínia: O retângulo a gente pode fazer de quanto em quanto?
Anny: Não, vamos começar fazendo o quadrado, porque o quadrado fica aqui em cima e o retângulo aqui embaixo.
Lavínia: Aí a gente faz tipo assim, o retângulo a gente pode colocar 5.
Anny: Sim naquele lado grande, e quatro naquele lado pequeno.
Anny: Mas aqui olha ele vai ficar muito pequeno 1,2,3,4,5.
Anny: O quadrado pode ter 8 de altura pronto 1,2,3,4,5,6,7,8.
Lavínia: 1, 2, 3 ,4,5.
Anny: 6,7,8 aqui.
Anny: O pior que vai ficar parecendo um retângulo então precisa ser 8 aqui também.
Anny: 1,2,3,4,5,6,7,8 assim. Olha o quadrado lindo!
Lavínia: Tá, então cada lado tem 8.
Anny: Sim. Tá agora vamos marcar na folha.

Anny e Lavínia conversam sobre qual das figuras irão formar primeiro no Geoplano. Anny sugere iniciar pelo retângulo, e, então, Lavínia questiona sobre qual medida irão utilizar para formar os lados da figura. Logo em seguida, Anny muda de ideia e diz que é melhor começar fazendo um quadrado, porque quer que o quadrado fique na parte de cima do Geoplano, ou seja, antes do retângulo.

Lavínia foca na medida que será utilizada para formar os lados do retângulo. Sugere 5 cm, parecendo não diferenciar as duas figuras que precisarão formar. Anny confirma que pode ser 5 cm no lado maior (comprimento) e sugere 4 cm no lado menor (altura). Anny começa a fazer o retângulo com a medida 5 cm de um lado, porém parece achar que a medida é pequena e inicia a medida do lado para formar um quadrado, desistindo de formar o retângulo. Sugere colocar 8 cm na medida de altura. Lavínia conta, como medida do outro lado, 5 cm. Anny mostra contando que precisa colocar mais 3 cm para formar um quadrado, fazendo a observação de que a figura que formaram com 8 cm por 5 cm é um retângulo, e não um quadrado. Anny gosta do quadrado formado, dizendo que ficou lindo, e Lavínia, após observar a figura, afirma que tem que ter 8 cm cada lado do quadrado, conseguindo compreender que o quadrado tem as mesmas medidas de cada lado.

Trecho 2 do diálogo

Anny: Agora eu tenho que formar o retângulo.
Lavínia: O retângulo pode ser de 9 não pode?
Anny: Não, olha aqui ficou horrível!
Anny: Pode ser 12, pronto.
Lavínia: Será que 12 é demais, faz um de 10.
Anny: Não vai ficar bonita.
Lavínia: Faz um de 10.
Anny: Lavínia vamos fazer menorzinho porque vai ficar muito grande, o meu está aparecendo muito errado.
Lavínia: Deixa-me ver com 2,3,4,5,6,7,8 e 1,2,3,4,5,6,7,8, não.

Lavínia: Olha Anny, o que você achou é um retângulo? Olha ele tem 1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Anny: Então o retângulo tem 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Aqui tem 9 também.
Lavínia: Olha 1,2,3,4,5,6,7,8,9 e aqui também 1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Anny: Não pode fazer assim igual, é um retângulo, isso, aqui tem que ser um quadrado.
Lavínia: 1,2,3,4,5,6,7,8, agora 3,6,7,8, 9, então, esse é um quadrado, ali era para ser um quadrado agora tem que ser retângulo.
Anny: Pode ser assim? O que o você acha?
Lavínia: Boa ideia fica melhor 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ... Agora tem 10 Anny.1,2,3,6,7,8, agora tem que colocar aqui embaixo Anny. 3,6,7,8. Tem que completar mais dois aqui.
Anny: Por quê?
Lavínia: Porque aqui tem 10, certo? E aqui tem oito, 3,6,7,8.
Anny: Mas é para ficar esse lado menor. Então tem que aumentar a largura.
Lavínia: Eu acho que é largura, não eu acho que é aqui.
Anny: Então deixa menor aqui aí fica um retângulo mais adequado.

Neste trecho, a dupla prossegue discutindo sobre como formar o retângulo. Lavínia questiona se o retângulo pode ter 9 cm de lado. Anny forma o retângulo com essa medida, e não gosta da figura formada, afirmando que ficou horrível e sugere que ele tenha 12 cm de lado. Lavínia então pede para fazer com a medida 10 cm, acreditando que 12 cm possa ser muito grande. Anny não concorda, dizendo que não ficará bonito. Lavínia sugere então 10 cm de lado. Já Anny quer que a medida do lado seja menor, porque não está gostando dos retângulos que estão formando.

Elas fazem vários retângulos no Geoplano e comparam um com o outro. Como as figuras estão com as medidas dos lados próximas, 8 cm e 9 cm, não apresentam uma diferença visual que possa identificar se é um retângulo ou quadrado. Lavínia segue contando a medida que colocou, comparando um lado do retângulo com o outro lado, conclui que ele tem 8 cm em cada lado e afirma que não é um retângulo. Ela observa a figura formada por Anny e questiona se é um retângulo, uma vez que tem 9 cm de lado. Anny, então, conta também e conclui que todos os lados têm 9 cm, afirmando que as medidas dos lados não podem ser iguais, porque seria um quadrado, e não o retângulo que elas precisavam formar.

Continuam contando e comparando as medidas dos lados. Lavínia observa que um lado tem 8 cm e muda para 9 cm. Faz a observação de que a figura formada era um quadrado e, agora, tem de ser um retângulo, ou seja, precisam transformar o quadrado em um retângulo. Anny então muda as medidas do seu quadrado para 9 cm e 10 cm. Lavínia observa o seu quadrado, que tinha 8 cm de lado, e diz que precisa completar o lado de baixo com mais 2 cm para formar um retângulo a partir do quadrado. Anny não compreende o porquê de Lavínia mostrar as medidas de cada lado 10 cm e 8 cm. Anny confirma para a Lavínia que precisa aumentar a largura da figura. As duas concordam com as modificações que fizeram na largura. Na Figura 4, temos a construção da dupla ao final dessa discussão. As duas então iniciam a conversa sobre como representar, na malha pontilhada, sua construção e responder ao item (a) da tarefa. É então que a professora entra na discussão conforme transcrição a seguir.

Trecho 3 do diálogo

Lavínia: Vamos responder.
Anny: O que você pensou para formar o polígono?
Anny: Já pensei em tudo, mas a gente tem que pensar junto, então eu pensei assim, nós pensamos em aumentar, nós fizemos um quadrado menor e colocamos aqui.
Professora: Tudo certo aí?
Lavínia: Sim.
Anny: Não, nada certo, a gente tá aqui, olha aqui professora, qual é o retângulo e qual que é o quadrado, olha aqui professora.
Professora: O que você considerou para formar um retângulo e outro quadrado. O que faz com que você distinguisse entre o retângulo e o quadrado?
Anny: A gente colocou, mas parece um quadrado. Porque isso aqui tem todos os lados que a gente colocou, mas tá parecendo um quadrado. Ele parece, mas não é porque esse lado tá diferente, e outra coisa eu achei diferente a largura aqui olha a largura, isso que difere um do outro.
Anny: Não, a largura da primeira é diferente da segunda.
Professora: Ah! Você está tentando entender o que que você utilizou para fazer o retângulo e o quadrado. Qual foi seu pensamento?
Anny: A gente pensou que a diferença é a da largura.
Professora: Vocês chegaram a mesma conclusão?
Lavínia: Sim.
Anny: Sim
Lavínia: A gente pensou professora, na diferença da largura.
Anny: O quadrado tem lados iguais, e colocamos ele no Geoplano, ficou perfeito! E para formar um retângulo a gente só foi aumentando e vendo o tamanho que dava.

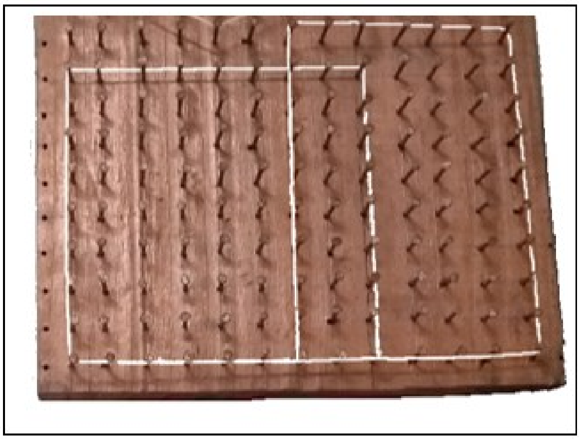
No início desse trecho, Anny diz que já pensou em tudo, mas que precisa da resposta da Lavínia, afirmando que pensaram em aumentar as medidas do lado do quadrado. A professora chega e questiona à dupla se estão conseguindo finalizar a tarefa. Lavínia diz que sim. Já Anny diz que não, porque ainda não consegue visualizar a diferença entre o quadrado e o retângulo, já que as medidas da largura das figuras são próximas, deixando as figuras parecidas visualmente, mas justifica dizendo que a diferença está na largura. A professora entende a dúvida de Anny e percebe que ela busca explicações para diferenciar as figuras tão parecidas visualmente. A professora então diz para ela escrever o que pensou quando estava formando as figuras. Anny responde que pensou na diferença da largura. Ao final, elas compreendem que basta mudar a medida de um dos lados do quadrado para que ele se torne um retângulo.

É importante destacar a ação da professora neste trecho do diálogo. A professora faz questionamentos para Anny de forma que ela compreenda que, mesmo sendo pouca a diferença entre as medidas dos lados das figuras, essas medidas determinam a figura formada.

As respostas apresentadas pelas alunas estão representadas nas figuras (4,5 e 6) a seguir.

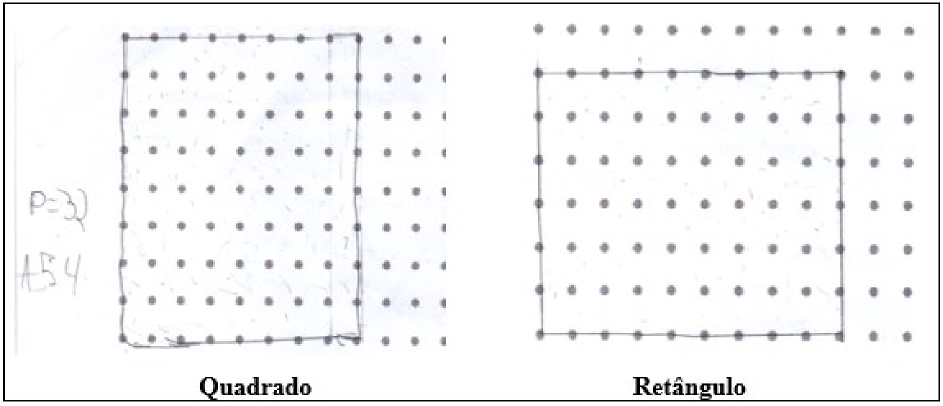
Seguem as respostas no Geoplano, na malha pontilha e escrita da tarefa 1(a) feita pela dupla Anny e Lavínia.

Figura 4 - Construção apresentada por Anny e Lavínia no Geoplano -Tarefa 1(a)



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 5 - Resposta apresentada por Anny e Lavínia na malha pontilhada -Tarefa 1(a)



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 6 - Resposta escrita por Anny e Lavínia - Tarefa 1(a)

a) O que você pensou para formar esses polígonos? Explique.

Nós pensamos que como o quadrado tem lados iguais colocamos cada lado do mesmo jeito, e como o retângulo tem lados diferentes nós só aumentamos os lados para eles ficar diferente.

Fonte: Dados da pesquisa

Foi organizado um quadro (Quadro 5), a partir dos áudios transcritos, no qual buscamos identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados pela dupla Anny e Lavínia ao discutirem a tarefa, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito de propriedades do retângulo e do quadrado.

Quadro 5 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Anny e Lavínia.

Trechos	**Processos de raciocínio**	**Conceitos matemáticos utilizados**
Anny: Sim naquele lado grande e quatro naquele lado pequeno. Anny: O pior que vai ficar parecendo um retângulo então precisa ser 8 aqui também. Lavínia: Tá, então cada lado tem 8. Lavínia: 3,6,7,8. Tem que completar mais dois aqui.	Conjecturar	Anny apresenta uma conjectura ao afirmar que o lado grande, ou seja, o comprimento do retângulo pode ser 5 cm e o lado pequeno, ou seja, a altura, pode ter 4 cm. Ela mostra ter conhecimento de que as medidas dos lados opostos do retângulo têm de ser diferentes. Anny apresenta outra conjectura ao perceber que o retângulo pode ser transformado em um quadrado, bastando, para isso, deixar os outros lados também com 8 cm de comprimento. Ela evidência compreender que os lados do quadrado têm a mesma medida. Ao concordar que cada lado do quadrado formado precisa ter 8 cm, Lavínia reforça a conjectura feita por Anny. Lavínia realiza uma conjectura ao perceber que, para transformar o quadrado em um retângulo, é necessário aumentar o lado do quadrado e afirma que precisa de mais 2 cm.
Lavínia: Deixa-me ver com 2,3,4,5,6,7,8 e 1,2,3,4,5,6,7, não. Anny: Então o retângulo tem 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Aqui tem 9 também. Anny: Não pode fazer assim igual, é um retângulo, isso aqui tem que ser um quadrado. Lavínia: 1,2,3,4,5,6,7,8, agora 3,6,7,8, 9, então, esse é um quadrado, ali era para ser um quadrado agora tem que ser retângulo.	Comparar	Lavínia e Anny fazem uma comparação ao contar as medidas dos lados nas figuras formadas no Geoplano, pois compreendem que as medidas dos lados do retângulo têm que ser diferentes, partem da conjectura já formada por elas que o quadrado tem as medidas dos lados iguais. Anny faz novamente uma comparação ao afirmar que o retângulo não pode ser a figura que formaram pois tem a certeza de que o retângulo tem a lados diferentes independente das medidas que o formam. Lavínia percebe, utilizando a comparação e a contagem dos lados das figuras, a diferença entre os lados do quadrado e do retângulo diferenciando as duas figuras.

Anny: Mas é para ficar esse lado menor. Então tem que aumentar a largura. Anny: Então deixa menor aqui aí fica um retângulo mais adequado. Anny: O quadrado tem lados iguais e colocamos ele no Geoplano ficou perfeito e para formar um retângulo a gente só foi aumentando e vendo o tamanho que dava.	Justificar	Anny valida a conjectura de Lavínia ao justificar que um dos lados tem que aumentar a medida. Ocorre a validação de uma conjectura elaborada por Lavínia, com a justificativa de que é preciso aumentar um lado do quadrado deixando menor o outro lado. No momento em que Anny conclui suas explicações sobre como fizeram para formar o retângulo ela valida a resposta justificando que para transformar o quadrado em retângulo basta aumentar um os lados, ou seja, o comprimento.

Fonte: Autoria própria

4.1.2 Dupla 2 - Paula e Renata – Tarefa 1(a)

Trecho 1 do diálogo

Renata: Eu estava pensando de a gente fazer um quadrado 4 por 5, porque ele é maior.
Paula: Sim, mas tipo, 5 por 5 é um retângulo?
Renata: É? Então você faz o quadrado e eu faço o retângulo.
Paula: Está bem. O quadrado é 4 por 4 não é?
Renata: É, ele é menor.
Paula: 4 então.
Renata: Ou pode ser de 3 por 3, eu acho melhor de 3.
[Cada uma delas faz uma figura.]
Paula: Consegui fazer um quadrado de 4 por 4. Eu pensei em fazer 4 por 4 porque, sabe, fica 1,2,3, de perímetro, 1,2,3 e 1,2,3 e 1,2,3. Você fez por quanto esse retângulo, 5 por 3, porque desse lado aqui tem que ter 3 e desse lado tem que ter 5. Você fez 5 por 3.
Paula: Faz um retângulo. Você fez por quanto esse retângulo, 5 por 3?
Renata: Você fez 5 por 3, porque desse lado aqui tem que ter 3 e desse lado tem que ter 5. Você fez 5 por 3.
Paula: Não espere aí 1,2,3,4.

A dupla Paula e Renata, antes de formar as figuras geométricas no Geoplano, conversam sobre qual figura e a medida irão utilizar. Demonstram ter dificuldade em diferenciar retângulo e quadrado, quando apresentam as medidas 4 cm por 5 cm e 5 cm por 5 cm. Paula questiona sobre a medida do lado do retângulo e deixa Renata pensativa, logo em seguida, afirma que ela fará o retângulo e sugere que Paula faça o quadrado. Chega então à conclusão de que as medidas iniciais que apresentou são de um retângulo, pois ele é maior. Paula então afirma que fará um quadrado 4 cm por 4 cm e Renata sugere que pode ser também 3 cm por 3 cm.

Cada uma faz uma figura e, a seguir, a dupla conversa sobre as figuras geométricas que formaram de modo independente. Paula mostra para Renata o quadrado que formou e diz que o retângulo de Paula mede 5 cm por 3 cm.

Após fazerem suas figuras geométricas no Geoplano, tentam passar para a malha pontilhada. Renata tem dúvida em como vai desenhar as figuras na malha e questiona a professora.

Trecho 2 do diálogo

Renata: Professora, professora!
Renata: Aqui [Geoplano] a gente fez assim, só que a aqui [malha] a gente vai ter que fazer um quadrado?
Professora: Sim, o que você fez no Geoplano vai fazer aqui com as mesmas medidas.
Paula: É 4 por 4 que eu fiz.
Professora: Agora você vai passar do Geoplano para a malha, o que vai utilizar?
Renata: A régua.
Professora: Sim. Mas depois você tem que pensar no que para passar essa figura para a malha?
Renata: Onde fica o lado?
Professora: Isso, põe lá então.
Renata: 1,2,3,4,5, 5 por 3. Acabei.
Renata: O que pensamos para fazer o quadrado Paula?
Paula: Eu pensei…
Renata: Eu pensei em fazer um retângulo primeiro, eu o marquei e depois eu fiz.
Paula: Já eu pensei em um quadrado, fiz um quadrado quatro por quatro.
Renata: Eu pensei em fazer o retângulo 5 por 3, pois de largura dele é maior e de tamanho ele é menor e por isso eu pensei e depois eu fiz.
Paula: É, pode ser.
Renata: Professora aqui se fala comprimento?
Professora: Sim, é o comprimido.
Renata: Obrigada!
Paula: Eu pensei no tamanho de 3 de largura.
Renata: Deixa ver, eu pensei primeiro no tamanho 3 cm.
Paula: De altura?
Renata: É de 3 de altura. É tem que ser, de 3 de altura.
Renata: Olha eu pensei primeiro no tamanho 3 de altura e de comprimento 5 porque o comprimento do retângulo é maior.

A professora orienta a dupla a desenhar na malha as figuras geométricas com as mesmas medidas que haviam escolhido no Geoplano e questiona o que deverão considerar para construir as figuras na malha. Renata pensa e responde que seria a régua; a professora insiste na pergunta, e a aluna responde que precisa observar os lados da figura, mostrando que reconhece a necessidade de levar em conta a medida dos lados para a construção da figura plana.

A dupla elabora sua resposta conversando sobre o que pensaram para a construção das figuras. Paula diz que pensou em fazer o quadrado com as medidas 4 cm por 4 cm. Renata, no entanto, afirma que pensou em fazer um retângulo com as medidas 5 cm por 3 cm, porque a largura tem que ser maior e o tamanho menor. Em seguida, Renata questiona a professora sobre o nome do tamanho de um dos lados da figura que formou, mostrando interesse em conhecer melhor a nomenclatura correta para os lados dessa figura. A professora a informa que é o comprimento. Então, Renata afirma que o retângulo formado tem 3 cm de altura e 5 cm de comprimento, porque o comprimento do retângulo é maior.

Trecho 3 do diálogo

Renata: Agora a gente vai conversar sobre o quadrado.
Paula: O retângulo é maior que o quadrado.
Renata: O que você pensou para fazer o quadrado?
Paula: Eu pensei na largura, não é largura aqui do lado né?
Renata: De assim olha.
Paula: Vamos falar mesmo da mudança da altura.
Paula: O tamanho que é tipo assim, ou tamanho que é 1,2,3 ,4.
Renata: Já sei.
Paula: É quatro por quatro.
Renata: No quadrado pensamos no tamanho por primeiro.
Paula: Sim, no tamanho. Quatro por quatro na altura e no comprimento.
Renata: Nós pensamos primeiro no tamanho de 3 de altura e de 5 de comprimento, porque o comprimento do retângulo é maior e no quadrado pensamos outra três por três.
Paula: Quatro por quatro.
Renata: É 4 por 4 na altura e no comprimento o quadrado tem partes iguais, não, o quadrado tem todas as partes iguais.

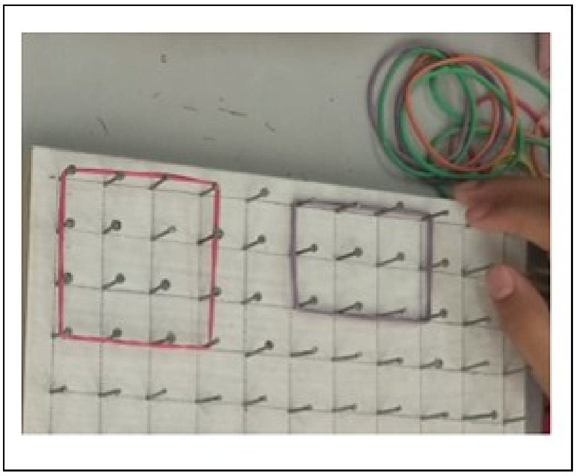
Neste momento do diálogo, Paula e Renata conversam sobre o que pensaram para formar o quadrado e como diferenciá-lo do retângulo, sempre pensando no tamanho dos seus lados. Paula afirma que o retângulo é maior que o quadrado, referindo-se ao tamanho dos lados das figuras geométricas que formaram.

Renata pergunta a Paula o que ela pensou para formar o quadrado, que responde ter pensado na largura. Mostra o lado do quadrado feito e a medida 4 cm por 4 cm que colocou. Renata então diz que pensaram primeiro no tamanho que teria o quadrado. Paula afirma que as medidas são 4 cm de altura e 4 cm de comprimento. Renata mostra as medidas do retângulo, 3 cm por 5 cm, afirmando que o comprimento do retângulo é maior e que o quadrado tem as medidas 3 cm por 3 cm. Paula corrige dizendo que as medidas do quadrado que fez são 4 cm por 4 cm, e não 3 cm por 3 cm. Renata então chega à resposta final aceita pelas duas, de que a medida 4 cm na altura e 4 cm no comprimento do quadrado é porque todos os seus lados são iguais.

É importante destacar que a dupla compreendeu a diferença entre o retângulo e o quadrado e as medidas que utilizaram, mas as alunas se confundem ao utilizar a representação da unidade de medida dos lados das figuras. Elas deveriam considerar a distância entre os pregos como unidade de medida, provavelmente por não estarem familiarizadas com o material. Renata percebe esse erro ao afirmar que o quadrado formado é 3 cm por 3 cm, mas Paula convence Renata de que está correto. Ao passarem suas respostas do Geoplano para a malha pontilhada (Figuras 7 e 8), apresentam o mesmo erro na representação formando um quadrado 3 cm por 3 cm e um retângulo 2 cm por 4 cm. No diálogo, haviam mencionado que o quadrado tinha 4 cm por 4 cm e o retângulo 3 cm por 5 cm, utilizando a medida correta, ou seja, a distância entre os pregos como unidade de medida. Esses valores são também mencionados na Figura 9. Ao iniciar a tarefa seguinte, a professora explica para a dupla que a unidade de medida que devem utilizar é a distância entre os pregos no Geoplano.

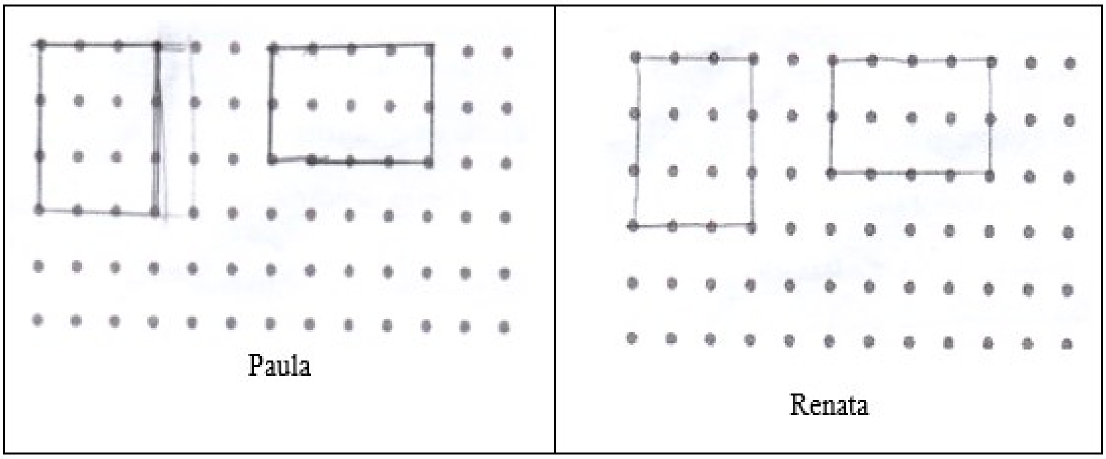
Seguem as respostas no Geoplano e escrita da tarefa 1(a) feita pela dupla Paula e Renata.

Figura 7- Construção apresentada por Paula e Renata no Geoplano -Tarefa 1(a)



Fonte: Dados da pesquisa

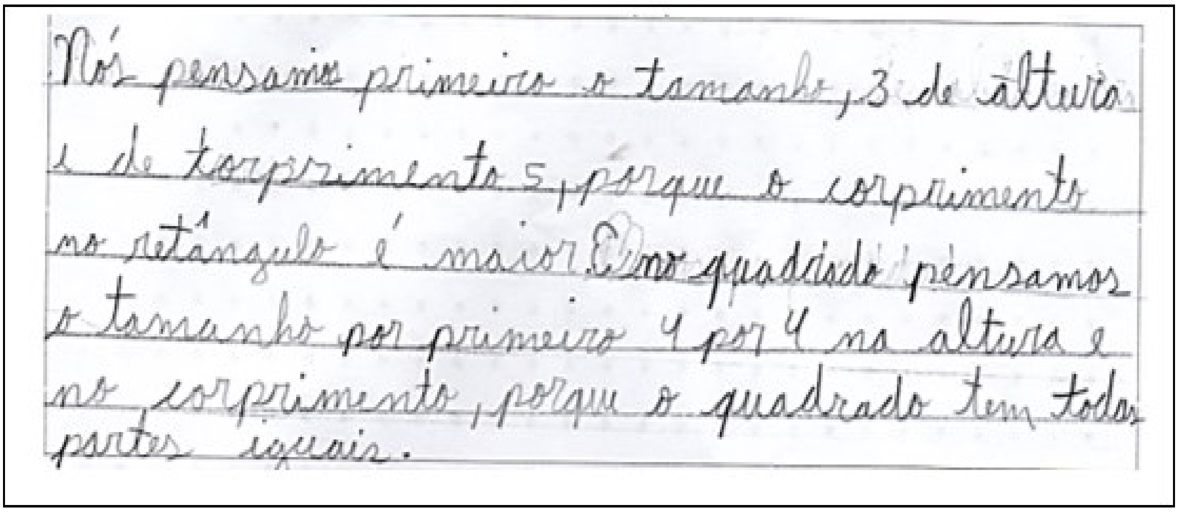
Figura 8 - Resposta apresentada por Paula e Renata na malha pontilhada -Tarefa 1(a)



Fonte: Dados da pesquisa

Na resposta apresentada na Figura 9, a dupla apresenta um erro ortográfico: o termo “corprimento” significa comprimento.

Figura 9 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 1(a)



Nós pensamos primeiro o tamanho, 3 de altura e de comprimento 5, porque o comprimento no retângulo é maior. E no quadrado pensamos o tamanho por primeiro 4 por 4 na altura e no comprimento, porque o quadrado tem todas partes iguais.

Fonte: Dados da pesquisa

O quadro a seguir (Quadro 6) apresenta os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pela dupla Paula e Renata ao resolverem a tarefa, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito de propriedades do retângulo e do quadrado.

Quadro 6 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata

Trechos	**Processos de raciocínio matemático**	**Conceitos matemáticos utilizados**
Renata: Eu estava pensando de a gente fazer um quadrado 4 por 5, porque ele é maior. Paula: Sim, mas tipo 5 por 5 é um retângulo?	Conjecturar	Renata realiza uma conjectura ao apresentar as medidas que pensa serem necessárias para formar um quadrado, afirmando que um dos lados deveria ser maior. Paula, ao questionar se 5 cm por 5 cm é uma medida válida para formar um retângulo, realiza um processo de refutação da conjectura apresentada por Renata, possivelmente, utilizando seu conhecimento prévio de que um retângulo deve apresentar medidas diferentes.
Renata: Ou pode ser de 3 por 3, eu acho melhor de 3.	Generalizar	Renata faz uma generalização ao afirmar que um quadrado pode ser formado com 4 cm por 4 cm ou 3 cm por 3 cm, mostrando entendimento de que o importante são as medidas dos lados serem iguais independentemente do tamanho. Ela generaliza, mas não apresenta justifica para a sua generalização.

Paula: O retângulo é maior que o quadrado. Renata: Nós pensamos primeiro no tamanho de 3 de altura e de 5 de comprimento, porque o comprimento do retângulo é maior e no quadrado pensamos outra três por três.	Comparar	Ao afirmar que o retângulo é maior que o quadrado, Paula faz uma comparação entre o tamanho dos lados das duas figuras. Realizam essa comparação quando Renata diz que as medidas dos lados do retângulo, que são 3 cm por 5 cm, são maiores que a do quadrado, que tem as medidas 3 cm por 3 cm.
Renata: Eu pensei em fazer o retângulo 5 por 3, pois de largura dele é maior e de tamanho. Paula: Sim, no tamanho, quatro por quatro, na altura e no comprimento. Renata: É 4 por 4 na altura e no comprimento o quadrado tem partes iguais, não, o quadrado tem todas as partes iguais.	Justificar	Renata apresenta uma justificativa para as medidas que utilizou na construção do retângulo quando afirma que o retângulo tem que ser 5cm por 3 cm porque a largura é maior e o tamanho é menor. Paula muda o valor epistêmico de uma conjectura de provável para mais provável, ao apresentar a justificativa de que a figura formada é um quadrado porque a altura e o comprimento são iguais. Renata apresenta uma justificativa ao afirmar que a medida do quadrado é 4 cm na altura e 4 cm no comprimento porque o quadrado tem todos os seus lados iguais. Nesse momento ela valida a generalização que fez no início da tarefa, concluindo que independente da medida que seja utilizada nos lados, essa figura será um quadrado desde que os lados, sejam medidas iguais.

Fonte: Autoria própria

4.1.3 Dupla 1 - Anny e Lavínia – Tarefa 1(b)

Trecho 1 do diálogo

Lavínia: Anny, eu acho diferente nas formas que a gente fez a altura.
Anny: O tamanho?
Lavínia: É largura.
Lavínia: A altura e a largura.
Lavínia: Olha o tamanho do retângulo. Olha aqui para você ver se a gente pegar o retângulo e colocar aqui olha tamanho que ele vai ficar pronto.
Anny: Vamos tentar organizar a nossa ideia para ficar mais fácil.
[Anny e Lavínia tentam formular uma resposta escrita para a tarefa.]
Lavínia: Eles têm de diferente a largura e o tamanho. Porque se for medir eles terão uma grande diferença.
Anny: Tá legal, mas falta a palavra porque que não vai ter a largura e altura.
[Procuram encontrar as palavras corretas para escrever o que pensam.]
Lavínia: Eles têm de diferentes a largura, o tamanho é o quê?
Anny: A largura e altura.
Lavínia: Então eles têm de diferentes alturas e a largura.
Lavínia: Porque se for medir vai dar muita diferença.
Anny: E então de igual eles têm?

Lavínia: É de igual eles têm o que?
Anny: Calma aí.
[Anny pensa por um momento.]
Lavínia: O que eles podem ter de igual? Elas formam figuras planas!
Anny: Eles são figuras planas.
Anny: Eles formam figuras planas.
Lavínia: Tá então deixa eu ver se eu entendi de igual eles são figuras planas.
Anny: Tá é isso.
Anny: Então nós chegamos essa conclusão porque observarmos bem as figuras. É isso.

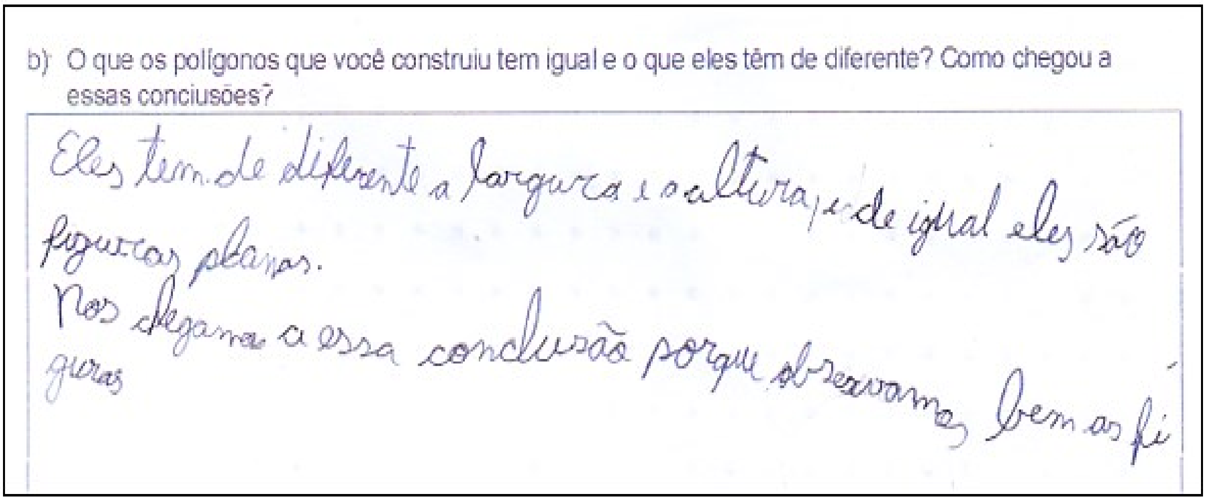
Na realização da tarefa 1(b), Lavínia inicia o diálogo dizendo que a diferença entre as formas geométricas que fizeram está na medida da altura. Anny afirma que é no tamanho a diferença entre elas. Apresentam essa dificuldade, porque as figuras que formaram apresentam tamanhos parecidos. Lavínia completa a sua observação afirmando que tem diferença também na largura, ou seja, elas são diferentes em suas duas dimensões: comprimento e largura. Lavínia segue comparando as duas figuras para provar que a diferença entre elas está mesmo no tamanho dos seus lados.

Elas continuam tentando elaborar uma resposta escrita para suas observações. Lavínia afirma que, se medir as figuras, elas apresentarão diferença no tamanho. Continuam conversando e tentando encontrar o melhor termo para utilizar na resposta escrita. A dúvida é em relação aos lados do quadrado e do retângulo: não sabem se utilizam os termos largura, comprimento ou altura. Mostram ainda não dominar os termos adequados para nomear as dimensões das figuras, que são comprimento e largura.

Em seguida, tentam observar a igualdade dessas figuras e encontram dificuldade, porque não conseguem observar que ambas são quadriláteras, ou seja, figuras formadas por quatro lados. Lavínia afirma então que elas são iguais, porque as duas são figuras planas, mostrando conhecer a classificação das formas geométricas, que são formas planas (bidimensionais) e formas não planas (tridimensionais). Anny fica pensativa em relação à afirmação da companheira. Lavínia insiste na sua observação. Anny então concorda com a afirmação feita por Lavínia, e definem que a igualdade entre o quadrado e o retângulo, que formaram, está apenas na classificação das figuras, como sendo duas figuras planas.

Segue a resposta escrita da tarefa 1(b) feita pela dupla Anny e Lavínia.

Figura 10 – Resposta escrita por Anny e Lavínia -Tarefa 1(b)


b) O que os polígonos que você construiu tem igual e o que eles têm de diferente? Como chegou a essas conclusões?

Eles tem de diferente a largura e a altura, e de igual eles são figuras planas.
Nos chegamos a essa conclusão porque observamos bem as figuras

Fonte: Dados da pesquisa

No Quadro 7, apresentamos os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pela dupla Anny e Lavínia ao resolverem a tarefa, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito de propriedades do retângulo e do quadrado e representação das formas bidimensionais.

Quadro 7 – Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Anny e Lavínia

Trechos	**Processos de raciocínio matemático**	**Conceitos matemáticos utilizados**
Lavínia: Anny, eu acho diferente nas formas que a gente fez a altura. Lavínia: Então eles têm de diferentes alturas e a largura. Lavínia: O que eles podem ter de igual? Elas formam figuras planas! Anny: Eles formam figuras planas.	Conjecturar	Lavínia apresenta uma conjectura ao afirmar que a diferença entre o quadrado e o retângulo está nas medidas da altura e da largura do quadrado e do retângulo. Elas compreendem que a diferença entre o quadrado e o retângulo são as medidas dos lados, ou seja, o quadrado possui quatro lados com medidas iguais, e o retângulo apresenta os lados opostos com a mesma medida. Lavínia forma uma conjectura ao buscar a semelhança entre o quadrado e o retângulo formado. Ela afirma que o quadrado e o retângulo são figuras planas, demonstrando o entendimento que tem em relação à classificação das formas planas (bidimensionais) e formas não planas (tridimensionais).
Lavínia: Olha o tamanho do retângulo. Olha aqui para você	Comparar /Justificar	Lavínia realiza um processo de comparação e apresenta uma justificativa para essa

ver se a gente pegar o retângulo e colocar aqui, olha tamanho que ele vai ficar, pronto.		comparação ao mostrar a diferença entre o tamanho dos lados das duas figuras, afirmando que suas dimensões são diferentes.

Fonte: Autoria própria

4.1.4 Dupla 2 - Paula e Renata – Tarefa 1(b)

Trecho 1 do diálogo

Paula: O quadrado tem todas as partes iguais.
Paula: Eles têm igual que os dois são poliedros.
Renata: Os dois são poliedros.
Renata: Já sei, eu acho que a gente tem que colocar primeiro o que tem de igual. Eles têm de iguais que os dois são poliedros e que os dois são considerados da família do quadrado.
Renata: Fala uma coisa que eles têm de iguais?
Paula: O quê?
Renata: Eles têm de iguais?
Renata: Professora, de iguais os dois são da família do quadrado, porque os dois são quadrados. E por que houve só uma coisa de igual neles só uma.
Professora: Você acredita que os dois são parecidos com quadrados por quê?
Renata: Sim.
Professora: Mas tem diferença entre o quadrado e o retângulo?
Renata: O comprimento do retângulo é maior que do quadrado. Essa é uma diferença de iguais eles têm que os dois são da família dos poliedros.
Professora: Não é poliedro que diz é polígono. Então escreva sua observação.
Paula: De igual eles só têm …
Renata: Os dois são da família dos polígonos.
Renata: Agora a diferença eu não sei você sabe alguma coisa?
Paula: Porque ele é mais grande que esse aqui essa é a única diferença.
Renata: Não, a diferença é que um retângulo tem comprimento maior que o quadrado.
Paula: Então vamos colocar isso.
Renata: E também outra diferença é que retângulo, ele tem, o quadrado tem partes iguais, o retângulo não tem.
Paula: Escreve que a diferença é que o retângulo tem o comprimento maior.
Renata: Tá bom!

Neste trecho do diálogo, as alunas conversam sobre as semelhanças e diferenças entre o quadrado e o retângulo.

Paula inicia a conversa procurando mostrar o que as figuras têm em comum utilizando o conhecimento apresentado na tarefa 1(a) de que o quadrado tem todos os lados iguais, mas precisam procurar as semelhanças entre as duas figuras. Em seguida, ela apresenta, um conhecimento prévio que tem relacionado a classificação das formas planas e não planas, outra certeza: a de que eles são "poliedros". É importante destacar que ela usa, de forma incorreta, o termo "poliedro", pois poliedros são formas não planas, ou seja, são formas que apresentam três dimensões, e elas estão formando, no Geoplano, figuras planas, ou seja, com duas dimensões. As formas planas são classificadas em polígonos e não polígonos, e as formas não planas são classificadas em poliedros e não poliedros. Paula quer dizer que as figuras formadas são da família dos polígonos.

Renata confirma que são poliedros, utilizando também a terminologia errada, e apresenta uma nova afirmação: a de que o quadrado e retângulo são da família dos quadrados. Possivelmente, relacionando a quantidade de lados que as duas figuras têm, ou seja, quatro lados, sendo então o quadrado e o retângulo são quadriláteros. Elas ainda não dominam o conhecimento de que o quadrado é um retângulo com todos os lados iguais e o de que o quadrado e o retângulo são quadriláteros que possuem os quatro ângulos internos retos. Os conceitos relacionados aos ângulos internos das figuras planas não haviam sido, ainda, explorados nas aulas de Geometria do 5º ano.

Renata não consegue justificar o argumento elaborado, de que a semelhança entre as figuras quadrado e retângulo se dá porque ambas são da família dos quadrados, pois não encontra o termo e nem a explicação correta para evidenciar que a semelhança está na quantidade de lados e de ângulos que possuem. Portanto, ela não fica satisfeita com a sua afirmação e busca novas formas de explicar como está pensando.

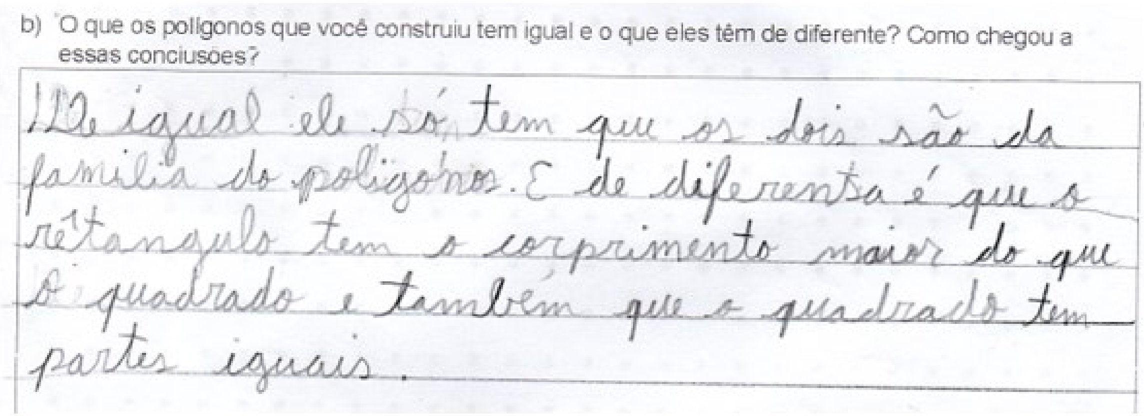
Nesse momento, a professora se aproxima e interage com a dupla. Renata explica as conclusões que chegou tentando buscar mais argumentos para a conjectura relacionada às semelhanças entre as figuras. A professora instiga a aluna a pensar sobre a semelhança das figuras formadas com o quadrado, tentando fazê-la perceber que a semelhança está na quantidade de lados das duas. Renata continua com a afirmação que apresentou, mas não consegue justificar o porquê dessas figuras serem da família dos quadrados.

A professora então questiona sobre as diferenças entre as figuras, buscando direcionar a observação da aluna quanto à quantidade de lados que possuem. No entanto, ela consegue explicar somente que os lados são iguais. Concluem então que a diferença entre as figuras está na medida dos lados e que a igualdade se dá por serem polígonos, utilizando, nesse momento, o termo correto. Após a correção da professora, apresentam a forma correta de nomear as figuras, trocando poliedros por polígonos, e concordam que a igualdade entre elas se dá por serem da família dos polígonos. Renata não apresenta mais a afirmação de que as duas figuras formadas, quadrados e retângulos, são da família dos quadrados por não conseguir buscar um conhecimento para explicar sua afirmação. A professora constrói um diálogo com as alunas a solicitando respostas, buscando a compreensão das semelhanças e diferenças entre as figuras formadas, também faz a correção do termo utilizado de forma errado pelas alunas. Durante a plenária, momento em que as duplas apresentam suas respostas para a turma, a professora explicou para as alunas e para toda a turma que as duas figuras são quadriláteros por apresentarem a mesma quantidade de lados e de ângulos.

A dupla utiliza em seus diálogos, a terminologia relacionada à classificação das figuras planas como polígonos e não polígono e às formas não planas poliedros e não poliedros, conceitos trabalhados nas aulas anteriores a realização das tarefas. Elas se confundem ao utilizar os termos, provavelmente por não dominarem completamente esses conceitos; diferente da dupla anterior, que utiliza "figuras planas" como terminologia ao mencionarem as figuras que construíram na resolução das tarefas.

Segue a resposta escrita da tarefa 1(b) feita pela dupla Paula e Renata.

Figura 11 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 1b


b) O que os polígonos que você construiu tem igual e o que eles têm de diferente? Como chegou a essas conclusões?

De igual ele só tem que os dois são da familia do poligonos. E de diferenta é que o retangulo tem o corprimento maior do que o quadrado e tambem que o quadrado tem partes iguais.

Fonte: Dados da pesquisa

O Quadro 8 apresenta os processos de raciocínio matemático mobilizados pela dupla Paula e Renata ao resolverem a tarefa, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito das propriedades do retângulo e do quadrado e da classificação das figuras planas.

Quadro 8 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata

Trechos	**Processos de raciocínio matemático**	**Conceitos matemáticos utilizados**

Paula: O quadrado tem todas as partes iguais. Paula: Eles têm igual que os dois são poliedros. Renata: Os dois são poliedros. Renata: ...Eles têm de iguais que os dois são poliedros e que os dois são considerados da família do quadrado. Renata: Os dois são da família dos polígonos. Paula: Porque ele é mais grande que esse aqui essa é a única diferença	Conjecturar	Paula inicia o diálogo com uma conjectura formada ao argumentar matematicamente na tarefa 1(a). Afirma que o quadrado tem a medida dos quatro lados iguais. Logo em seguida, forma uma conjectura inválida ao afirmar que o quadrado e o retângulo são da família dos poliedros. Essa é uma conjectura inválida, pois utiliza o termo poliedros de maneira equivocada. O termo correto seria polígono. Nesse caso, ela apresenta uma confusão ao buscar por um conhecimento relacionado à classificação das formas planas e formas não planas. Renata concorda com a conjectura inválida apresentada por Paula ao afirmar que elas são da família dos poliedros, demonstrando também não conhecer o termo correto. Ela valida a conjectura de Paula, mas não apresenta uma justificativa. Renata elabora uma conjectura falsa ao afirmar que o quadrado e o retângulo são da família dos quadrados, mas não consegue justificar essa conjectura por falta de conhecimento prévio sobre as propriedades do quadrado e do retângulo. Ao afirmar que as duas figuras são da família dos polígonos, Renata apresenta, agora, uma conjectura válida, corrigindo a nomenclatura utilizada anteriormente. Paula apresenta uma conjectura ao afirmar que a única diferença entre as figuras formadas por elas é apenas no tamanho que cada uma tem, comprovando conhecer a propriedade relacionada às dimensões das figuras que formaram.
Renata: E também outra diferença é o que retângulo, ele tem, o quadrado tem partes iguais, o retângulo não tem. Paula: Escreve que a diferença é que o retângulo tem o comprimento maior.	Justificar	Ao determinar a diferença entre as figuras, Renata justifica sua conjectura apresentando uma conjectura já mencionada na tarefa 1(a), demonstrando estar certa de que a diferença entre as figuras, quadrado e retângulo, está no tamanho do comprimento dos lados. Paula valida a conjectura ao afirmar que a diferença se dá no comprimento do retângulo.

Fonte: Autoria própria

4.1.5 Dupla 1 – Anny e Lavínia – Tarefa 1(c)

Trecho 1 do diálogo

Anny: Vamos tentar fazer um círculo?
Lavínia: Não será possível!
Anny: É, mas nós vamos ter que tentar.
[Lavínia faz a leitura do enunciado da questão 1c novamente.]
Lavínia: Anny não está dando certo.
[Tentam várias vezes formar o círculo no Geoplano.]
Anny: Não é possível.
Lavínia: Não é possível fazer o círculo no Geoplano.
Professora: Agora vocês precisam explicar por que que não dá para formar em círculo.
Anny: Porque ele é, não entendi!!
Professora: E você Lavínia, o que você entendeu, porque não dá para formar esse círculo, você tentou, tentou e não deu certo. Por quê?
Lavínia: Eu vi os lados, porque, porque ele não é…
Anny: Porque ele não é um polígono.
Professora: Por que que ele não é um polígono, o que que ele tem que não é um polígono?
Lavínia: Porque ele não tem as partes retas.
Anny: Porque ele não tem como é que chama… como é que chama aqui?
Professora: Lados você quer dizer?
Anny: Sim, lados.
Lavínia: Porque ele não tem lado e porque ele não é um polígono.
Anny: Ele não é um polígono e por isso ele não tem lados, é isso.

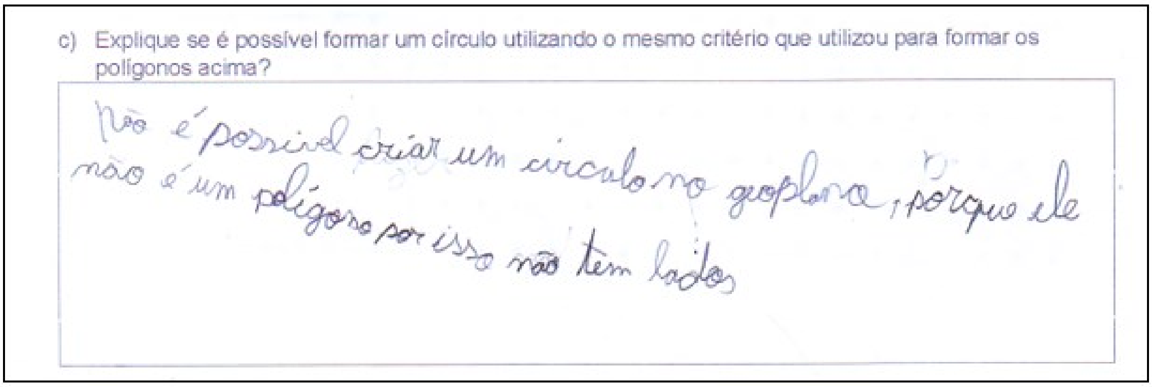
Anny e Lavínia começam a argumentar sobre como vão formar um círculo no Geoplano. Lavínia logo afirma que não é possível. Anny diz que precisam tentar. Tentam por um tempo, e então Anny conclui também que não é possível, concordando com sua companheira. A professora, após observar o diálogo entre elas, informa que precisam explicar o porquê da conclusão que chegaram. Lavínia diz que observou os lados e tenta explicar porque chegou a essa conclusão buscando uma palavra para completar sua explicação.

Anny, logo em seguida, afirma que é porque ele é um não polígono, referindo-se à classificação das formas planas que são polígonos e não polígonos. A professora continua a conversa pedindo para que expliquem porque elas acham que o círculo é um não polígono. Lavínia explica que é devido a essa figura não ter partes retas. Anny tenta explicar pedindo para a professora tirar a dúvida em relação ao nome do contorno da figura. A professora informa que é lado. Então, Anny continua explicando que é porque ele não tem lados. Lavínia também confirma que não dá para formar o círculo porque ele não tem lados e porque ele não é um polígono. A resposta apresentada pela dupla está correta, porque no Geoplano conseguimos formar somente figuras com linhas retas e fechadas, que são os polígonos. Já o círculo é formado por linhas curvas, não sendo possível ser construído no Geoplano.

Neste trecho do diálogo, a professora busca a compreensão das alunas para o conceito de polígonos, conduzindo-as a partir de questionamentos e solicitando relatos das suas conclusões.

Segue a resposta escritas da tarefa 1(c) feita pela dupla Anny e Lavínia.

Figura 12 - Resposta escrita por Anny e Lavínia - Tarefa 1(c)


c) Explique se é possível formar um círculo utilizando o mesmo critério que utilizou para formar os polígonos acima?

Não é possivel criar um circulo no geoplano, porque ele não é um poligono por isso não tem lados

Fonte: Dados da pesquisa

O quadro a seguir (Quadro 9) apresenta os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pela dupla Anny e Lavínia ao resolverem a tarefa 1(c), bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito das propriedades e classificação das figuras planas.

Quadro 9 – Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Anny e Lavínia

Trechos	**Processos de raciocínio matemático**	**Conceitos matemáticos utilizados**
Anny: Vamos tentar fazer um círculo? Lavínia: Não será possível! Lavínia: Anny não está dando certo. Anny: Não é possível. Lavínia: Não é possível fazer o círculo no Geoplano	Conjecturar	Anny e Lavínia formam juntas a conjectura de que não é possível formar o círculo no Geoplano. Lavínia a forma logo no início, ao ler a tarefa, e Anny após tentar construir o círculo. A conjectura é verdadeira, pois as figuras formadas no Geoplano são as figuras planas, ou seja, os polígonos que são formados por linhas retas e fechadas. Elas buscam mais argumentos, ou seja, buscam conhecimentos prévios para justificar a conjectura formada.
Anny: Porque ele não é um polígono. Lavínia: Porque ele não tem as partes retas.	Justificar	Nesse momento, Anny apresenta uma justificativa para a conjectura formada por elas, utilizando o conhecimento que tem sobre as formas planas, que são classificadas como polígonos e não polígonos. Ela consegue

		entender que é uma explicação para não conseguir formar um círculo. Lavínia utiliza os conhecimentos apresentados por Anny e completa justificando que o círculo não tem partes retas, então, não pode ser formado como pede a tarefa.
Lavínia: Porque ele não tem lado e porque ele não é um polígono. Anny: Ele não é um polígono e por isso ele não tem lados, é isso.	Generalizar	Lavínia e Anny realizam um processo de generalização ao concluírem que o círculo não pode ser formado no Geoplano, porque não tem lados, e, por não ter lados, ele não é um polígono. O conhecimento que elas têm é que os polígonos têm lados retos e o círculo tem forma arredondada. Elas tentam explicar que o círculo não pode ser formado no Geoplano, porque é formado por linhas curvas e os polígonos são figuras formadas por segmentos de retas, por isso são classificados como polígonos e que são as figuras planas que são formadas no Geoplano. Portanto, não conseguem formar o círculo, porque ele tem forma arredonda.

Fonte: Autoria própria

4.1.6 Dupla 2 - Paula e Renata – Tarefa 1(c)

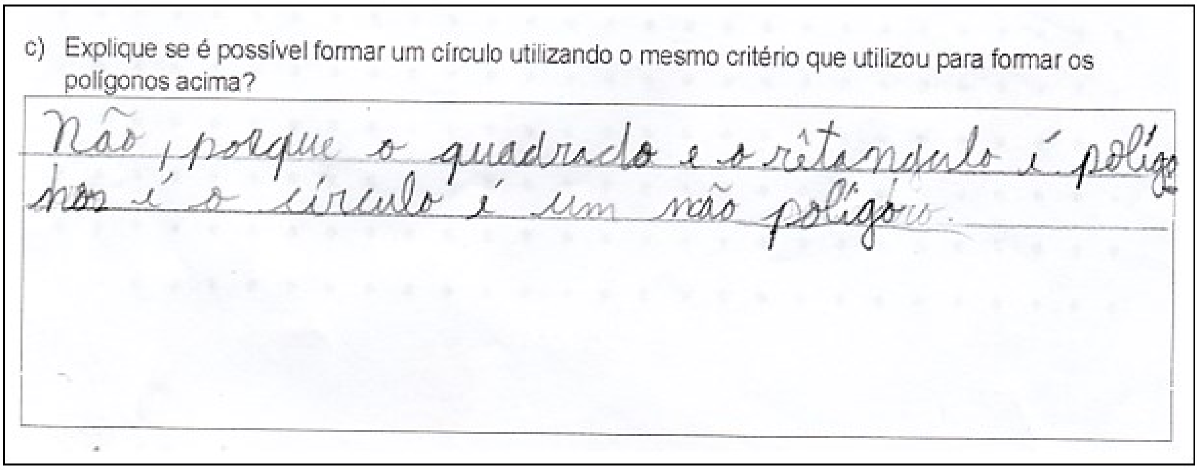
Trecho 1 do diálogo

Renata: Coloca não, a resposta é não.
Paula: Não! Mas tem que explicar.
Renata: Olha, você concorda que não dá para formar ele, porque ele é um não poliedro e o quadrado e o retângulo são poliedros, entendeu porque ele não consegue?
Renata: Quer acrescentar mais alguma coisa?
Paula: Não a resposta é essa mesma.

Nesta tarefa, a dupla Renata e Paula tentam, de várias maneiras, formar um círculo no Geoplano, mas logo descobrem que não é possível. Paula diz que é necessário explicar porque chegaram a essa conclusão. Renata então busca uma explicação utilizando os conhecimentos que tem sobre a classificação das figuras planas e figuras não planas, afirma que o círculo é um "não poliedro" e que o quadrado e o retângulo são "poliedros". Elas utilizam a nomenclatura incorreta, como já fizeram nos itens 1(b) e 1(c). Como a professora fez a intervenção e as correções, como mostra o diálogo da tarefa 1(b), portanto a resposta apresentada na figura a seguir (Figura 13) já aparece com o termo correto. O correto seria dizer "polígono" e "não polígono" devido à classificação das figuras planas, na qual os polígonos são formados por segmentos de retas fechadas e os não polígonos são formados por linhas curvas abertas ou fechadas. Na sequência, Renata não consegue argumentar matematicamente a sua resposta e questiona Paula, buscando uma explicação para a situação apresentada. Ela apenas concorda com as conclusões que chegaram e as duas finalizam o diálogo. É importante destacar que, apesar de trocarem os termos, a dupla demonstra compreender a diferença entre as figuras planas, as quais estão sendo formadas no Geoplano, e as formas não planas.

Segue a resposta escrita da tarefa 1(c) feita pela dupla Paula e Renata.

Figura 13 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 1(c)


c) Explique se é possível formar um círculo utilizando o mesmo critério que utilizou para formar os polígonos acima?

Não, porque o quadrado e o rêtangulo é polígnos é o círculo é um não polígono.

Fonte: Dados da pesquisa

O quadro apresentado a seguir (Quadro 10) mostra os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pela dupla Paula e Renata ao discutirem a respeito da tarefa, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente os conceitos relacionados as propriedades e classificação das figuras planas.

Quadro 10 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata

Trecho	**Processos de raciocínio matemático**	**Conceitos matemáticos utilizados**
Renata: Olha você concorda que não dá para formar ele porque ele é um não poliedro e o quadrado e o retângulo são poliedros entendeu porque ele não consegue.	Conjecturar	Após tentarem resolver a tarefa no Geoplano, a dupla apresenta um diálogo rápido, mas já com uma conjectura formada, na qual afirmam que não é possível formar o círculo no Geoplano.

	Justificar	Elas buscam validar a conjectura com a justificativa de que ele é um não poliedro, e o quadrado e o retângulo, que conseguiram formar no Geoplano, são poliedros, mas apresentam os termos incorretos: “poliedro” e “não poliedro”, na verdade, deveriam ser “polígono” e “não polígono”. Mas demonstram ter a compreensão de que apenas os polígonos podem ser representados no Geoplano, por serem formados por segmentos de retas, já o círculo é formado por linhas curvas.

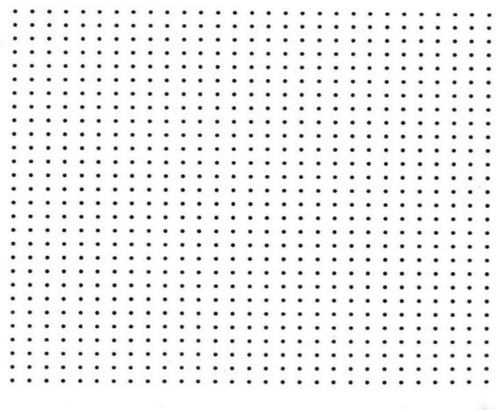
Fonte: Autoria própria

4.2 TAREFA 2

1) Renato precisa construir duas figuras geométricas (polígonos) diferentes que apresentam o mesmo perímetro, vamos ajudá-lo, formando as figuras no Geoplano e depois escrevendo o que você pode concluir após comparar essas figuras.

2) Renato agora precisa saber se é possível formar figuras que tenha a mesma área. Ajude-o construindo duas figuras geométricas com a mesma área e escreva o que pode observar nessas duas figuras.

Malha pontilhada para tarefa 1



Para o cálculo do perímetro nas tarefas, a unidade de medida utilizada é a distância entre os pregos, mesmo nas figuras como triângulos, pentágonos, entre outros. Mesmo quando a distância entre os pregos na diagonal divide o quadrado ao meio formando dois triângulos retângulos, cuja hipotenusa apresenta o tamanho um pouco maior que a distância entre os pregos na posição vertical ou na horizontal, para essa pesquisa essa diferença não será considerada pois estes conceitos ainda não são abordados no 5º ano do Ensino Fundamental, no qual a pesquisa foi aplicada.

4.2.1 Dupla 1 - Anny e Lavínia – tarefa 2.1

Trecho 1 do diálogo

Lavínia: O que a gente pode formar?
Anny: Eu pensei, o primeiro é o perímetro igual, né? 1,2, 3,4, 5, cinco por cinco certo?
Lavínia: Tá o perímetro então é 1,2,3,4, 5 ... 20.
Anny: 1,2, 3, 4... 20 certo. Conseguimos.
Lavínia: Nossa de primeira!
Lavínia: Aqui olha, Renato precisa construir duas figuras diferente, está aqui então.
Anny: Você gostou?
Lavínia: Tá então, a gente faz 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Anny: Tá agora você fez o quadrado 1,2,3,4,5, 6.
Lavínia: Olha você faz quadrado 1, 2, 3, 4, 5, 6, opa, deu errado!
Anny: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10… 20.
Anny: 1,2,3... 20 agora deu 20.
Anny: Pronto terminei, tem que fazer assim, por exemplo, tem que dar 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 5 voltas, entendeu?
Lavínia: Não
Anny: Porque olha aqui só um, 1, 2, 3, 4, 5, 6 tem seis preguinhos, mas tem cinco ...
[Explica que para contar o perímetro tem que contar é a distância (espaço) entre os pregos.]
Anny: Vamos ver quantos pregos ou vamos ver quantos perímetros 1,2, 3, 4, 5, 6, 7. É só contar 7 não precisa desses oito.
[Explica que 8 pregos têm 7 espaços.]
Lavínia: 1,2,3, 4,5,6,7, pronto terminei.
Lavínia: Pronto acho que deu certo aqui tem 7 e 7.
Anny: Agora conta o perímetro.
Lavínia: Deu certo, deu 20.
Lavínia: Vamos responder.
[Leem novamente o enunciado da tarefa]
Anny: Eu pensei em formar as figuras, podemos concluir que conseguimos fazer figuras com perímetros iguais e figuras diferentes.

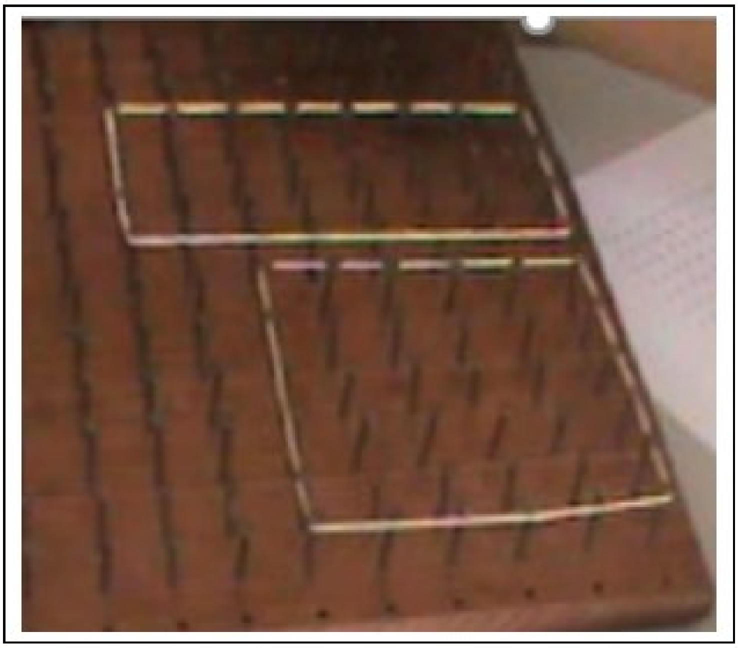
Após lerem o enunciado, Lavínia começa a pensar em quais figuras geométricas podem formar no Geoplano para responderem a tarefa. Anny começa primeiro, formando um quadrado com 5 cm de comprimento e de largura. Lavínia forma um quadrado com perímetro igual a 20 centímetros. Logo em seguida, fazem a comparação entre as figuras que formaram e concluem que conseguiram formar as duas figuras com áreas diferentes. Iniciam a construção de outra figura: outro quadrado 6 cm por 6 cm. Lavínia apresenta dúvida ao contar a medida dos lados da figura, não conseguindo contar o perímetro. Anny explica para ela novamente que tem que contar os espaços entre os pregos e dar a volta na figura formada, ou seja, contar os espaços dos lados da figura.

Lavínia ainda não compreende, então Anny explica que não são os preguinhos que tem que contar, mas sim a distância entre eles e que há um preguinho a mais que a distância entre eles. Nesse momento, Lavínia consegue contar corretamente o perímetro da figura com os lados de tamanhos diferentes, formando então um retângulo com o mesmo perímetro do primeiro quadrado que formaram. Formam um retângulo com medidas 3 cm por 7 cm, totalizando 20 cm o perímetro e 21 cm^2 a área e um quadrado com medidas 5 cm por 5 cm, n qual o perímetro mede 20 cm e a área 25 cm^2, conforme mostra, a seguir, as figuras (Figuras 14 e 15). Em seguida, conversam sobre como construíram as figuras e sobre as diferenças entre elas. Concluem então que conseguiram construir figuras diferentes com perímetros iguais.

Nessa tarefa, a dupla mostra ter compreendido o conceito de área e perímetro ao saber contar e diferenciar o perímetro da área das figuras planas, realizando, de forma correta, a tarefa.

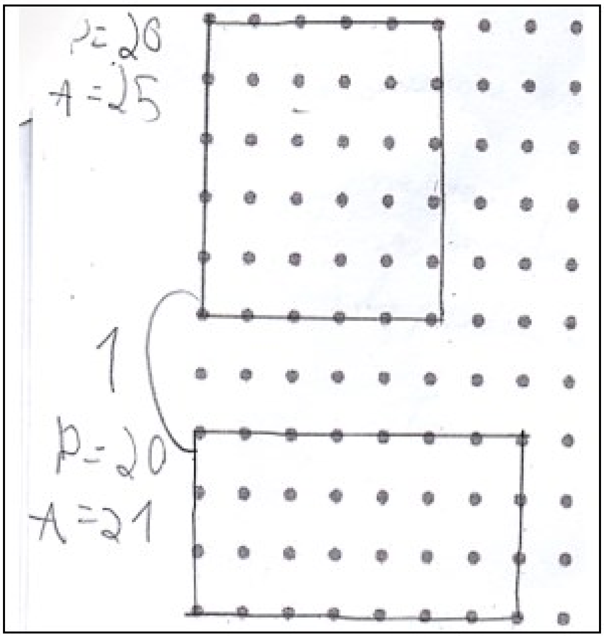
Seguem as respostas no Geoplano, na malha pontilhada e escrita da tarefa 2.1 feitas pela dupla Anny e Lavínia.

Figura 14 - Construção apresentada por Anny e Lavínia no Geoplano -Tarefa 2.1



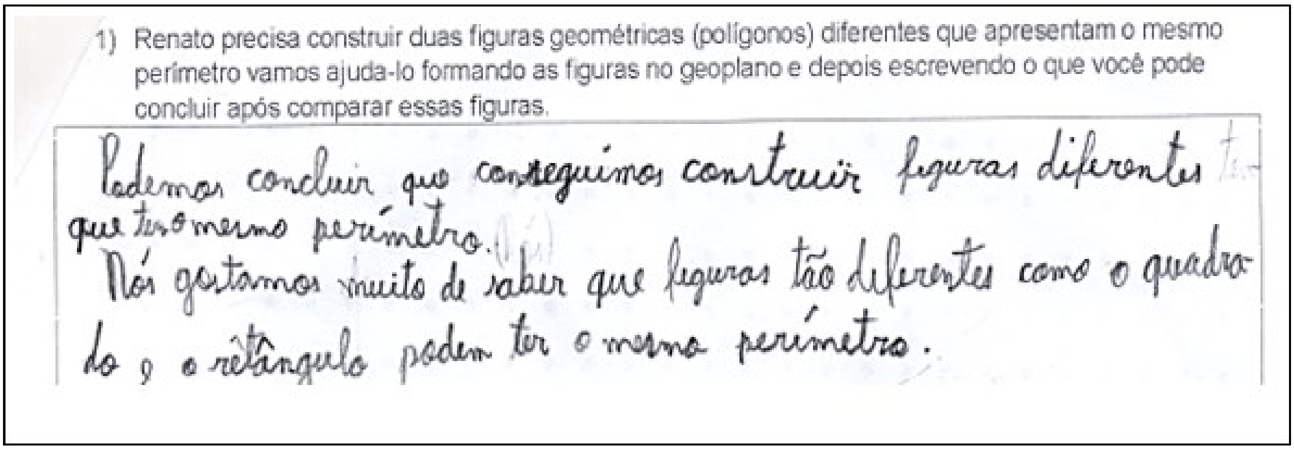
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 15 - Resposta apresentada por Anny e Lavínia na malha pontilhada -Tarefa 2.1



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 16 - Resposta escrita por Anny e Lavínia -Tarefa 2.1



1) Renato precisa construir duas figuras geométricas (polígonos) diferentes que apresentam o mesmo perímetro vamos ajuda-lo formando as figuras no geoplano e depois escrevendo o que você pode concluir após comparar essas figuras.

Podemos concluir que conseguimos construir figuras diferentes que tem o mesmo perímetro.
Nós gostamos muito de saber que figuras tão diferentes como o quadrado, o rêtângulo podem ter o mesmo perímetro.

Fonte: Dados da pesquisa

No quadro a seguir (Quadro 11), estão organizados os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pela dupla Anny e Lavínia ao dialogar sobre a tarefa, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito da Geometria Plana – Área e perímetro.

Quadro 11 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata

Trechos	**Processos de raciocínio matemático**	**Conceitos matemáticos utilizados**

Lavínia: Tá o perímetro então é 1,2,3,4, 5 ... 20. Anny: 1,2,3,4... 20 certo. Conseguimos.	Comparar	Lavínia e Anny identificam a área e o perímetro das figuras e, nesse momento, desenvolvem o processo de comparação ao comparar suas áreas e o perímetros, pois buscam os conceitos que possuem para chegar às respostas corretas das suas tarefas.
Anny: Pronto terminei, tem que fazer assim, por exemplo, tem que dar 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 5 voltas, entendeu? Anny: Vamos ver quantos pregos ou vamos ver quantos perímetros 1,2, 3, 4, 5, 6, 7. É só contar 7 não precisa desses oito. Anny: Eu pensei em colocar as figuras, podemos concluir que conseguimos fazer figuras com perímetros iguais e figuras diferentes.	Conjecturar	Anny elabora uma conjectura para explicar à Lavínia como identificar, no Geoplano, o perímetro da figura formada. Ela explica que a unidade de medida utilizada para contar é a distância entre os pregos, pois compreende corretamente a unidade que estão utilizando para contagem do perímetro. Ao apresentar suas conclusões, a dupla forma uma nova conjectura: a de que as figuras podem apresentar perímetros iguais, mas não necessariamente ter o mesmo formato, demonstrando ter compreendido o conceito de área e perímetro ao diferenciá-los nas figuras formadas.

Fonte: Autoria própria

4.2.2 Dupla 2 - Paula e Renata – Tarefa 2.1

Trecho 1 do diálogo

Renata: Primeiro a gente vai fazer o quê tem o mesmo número de lados, vamos tentar o quadrado.
Paula: Vamos tentar o quadrado então.
Renata: Calma você tenta outra forma.
Renata: Não, essa forma eu acho que não.
Paula: É uma pirâmide quadrangular.
[Paula se refere ao triângulo.]
Renata: Ela quer um polígono.
Renata: Conta o perímetro Paula.
Renata: 1, 2, 3, 4... 14.
Paula: O meu tem 1,2, 3,4... 16.
[Renata faz um retângulo e Paula um quadrado]
Renata: Ah! Não! Tem que diminuir.
Renata: Calma, mas não pode ser a mesma forma.
Paula e Renata:1, 2, 3, 4, ...
Renata: Vamos tentar de novo.
Renata e Paula: 1, 2, 3, 4, cinco, 6, 7.
Renata: Olha.
Paula: Espera! 1, 2, 3.
Renata: Tem que aumentar.
Paula: Um retângulo.
Paula: Olha aqui 1, 2, 3, 4, 5... 14.

Renata: Sério!
Paula: Perímetro 14!
[Descobrem nesse momento que o perímetro das figuras que formaram é igual]
Renata: 1,2, 3,4, 5,6... 14
Paula:14.
Renata: Sim, 14.
[Comemoram felizes porque encontraram o mesmo perímetro.]

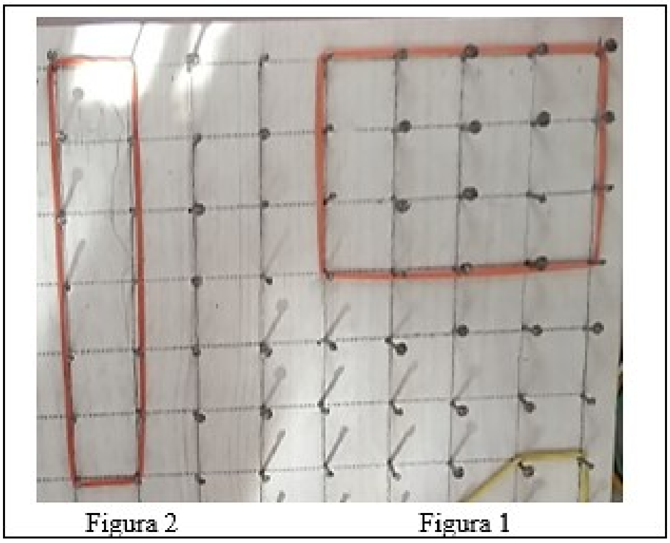
Após a dupla fazer a leitura da tarefa, Renata inicia seu diálogo afirmando que primeiro vão fazer um quadrado, porque ele tem o mesmo número de lados. Paula concorda, mas Renata pede para ela fazer outra forma geométrica, mostrando que gostaria de duas formas diferentes para compararem o perímetro das figuras que construíram. Paula faz uma figura, mas Renata diz para fazer outra, porque a figura que formou não vai dar certo. Paula então sugere fazer uma "pirâmide quadrangular", termo que ela utiliza de forma incorreta. Ela se refere ao triângulo, pois ainda não consegue diferenciar os termos relacionados às figuras planas e não planas. Então Renata a corrige, dizendo para ela que a professora quer um polígono, mostrando saber a diferença entre as formas planas e formas não planas.

Em seguida, as duas formam as figuras no Geoplano, elas contam o perímetro e fazem a comparação das figuras. Renata apresenta uma figura com perímetro 14 cm, e a figura da Paula apresenta o perímetro de 16 cm. Renata afirma que será necessário diminuir o perímetro da figura que Paula fez, mas observa que se diminuir as duas figuras, elas ficarão com o mesmo formato. Segue formando novas figuras e contando o perímetro para comparar com a figura formada por Renata. Paula forma então uma figura com medidas diferentes, e Renata sugere aumentar as dimensões. Ao fazer a alteração, elas comemoram felizes, porque conseguem formar duas figuras diferentes com o mesmo perímetro.

No início da tarefa, Renata afirma que queria fazer um quadrado, porque gostaria que a outra figura formada tivesse um formato diferente do quadrado. No entanto, a dupla formou dois retângulos diferentes com perímetros iguais, apresentando uma resposta parcialmente correta, porque a tarefa pede que as figuras geométricas formadas sejam diferentes e que tenham perímetros iguais.

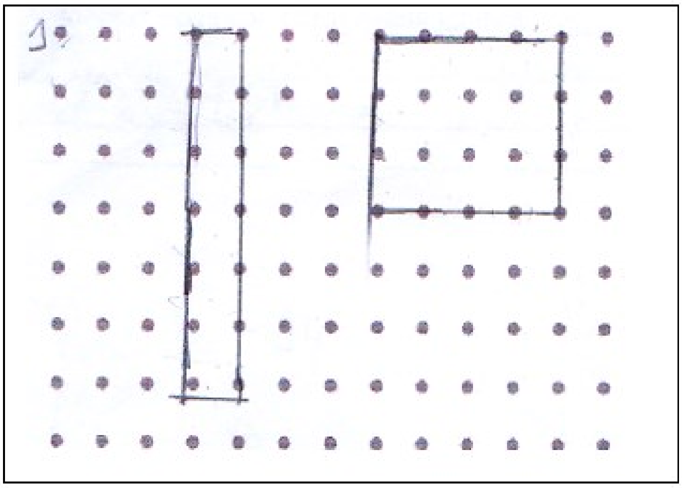
Seguem as respostas no Geoplano, malha pontilhada e escrita da tarefa 2.1 feitas pela dupla de Paula e Renata.

Figura 17 - Construção apresentada por Paula e Renata no Geoplano -Tarefa 2.1



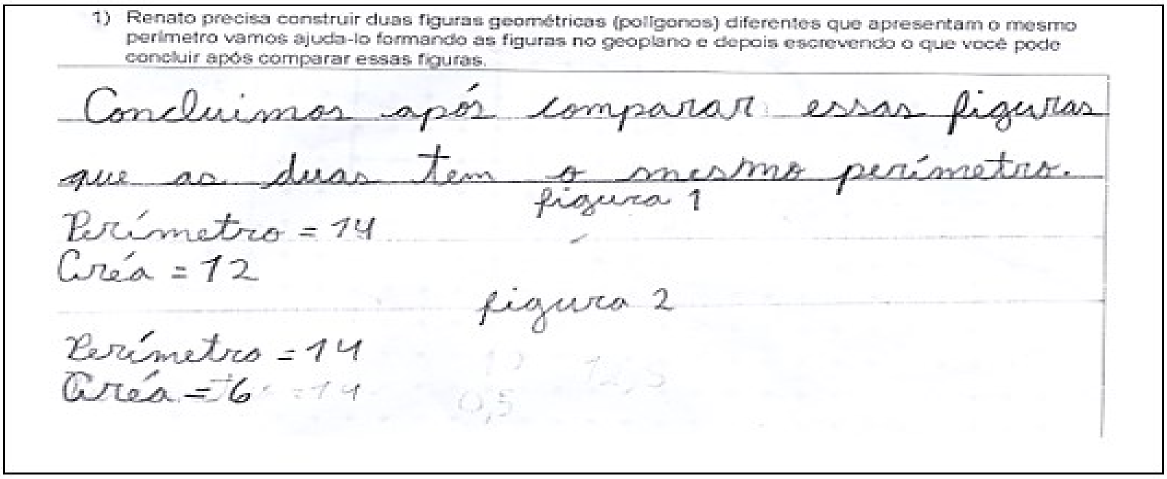
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 18 - Resposta apresentada por Paula e Renata na malha pontilhada -Tarefa 2.1



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 19 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 2.1



1) Renato precisa construir duas figuras geométricas (polígonos) diferentes que apresentam o mesmo perímetro vamos ajuda-lo formando as figuras no geoplano e depois escrevendo o que você pode concluir após comparar essas figuras.

Concluimos após comparar essas figuras que as duas tem o mesmo perímetro.

figura 1

Perímetro = 14
Aréa = 12

figura 2

Perímetro = 14
Aréa = 6

Fonte: Dados da pesquisa

No quadro a seguir (Quadro 12), estão organizados os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pela dupla Paula e Renata ao resolverem a tarefa, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito da Geometria Plana – Perímetro e área.

Quadro 12 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata

Trechos	**Processos de raciocínio matemático**	**Conceitos matemáticos utilizados**
Renata: Primeiro a gente vai fazer o quê tem o mesmo número de lados, vamos tentar o quadrado. Paula: O meu tem 1,2, 3,4... 16. Renata: Ah! Não! Tem que diminuir. Renata: Tem que aumentar.	Conjecturar	Renata, ao afirmar que primeiro vão fazer um quadrado, porque tem o mesmo número de lados, forma uma conjectura baseada no conhecimento que já tem em relação às propriedades das figuras planas: o de que o quadrado tem os quatro lados com a mesma medida. Após a comparação entre as figuras, Renata apresenta uma conjectura. Afirma que será necessário diminuir a medida para formar a figura, buscando uma regularidade para formar a figura com o mesmo perímetro. Renata forma uma nova conjectura ao refutar a conjectura anterior quando percebe que será necessário aumentar a medida da figura, e não diminuir como pensava.
Renata: Ela quer um polígono.	Classificar	Renata apresenta um processo de classificação quando busca apresentar a diferença entre a figura que Paula quer formar e a figura pedida na tarefa, quando reconhece que a professora quer que forme polígonos, ela demonstra conhecer a classificação das formas planas.
Renata: Calma, mas não pode ser a mesma forma.	Justificar	Renata apresenta uma justificativa para dar suporte a conjectura mostrando que as figuras precisam ser diferentes, demonstrando compreender que as formas geométricas planas são diferentes, no entanto, formam dois retângulos com formatos diferentes, ou seja, a mesma figura com dimensões diferentes.

Fonte: Autoria própria

4.2.3 Dupla 1 - Anny e Lavínia – tarefa 2.2

Trecho 1 do diálogo

Anny: Olha, deixa eu vou fazer um aqui pra ver, tá eu vou fazer um quadrado e você também tentar fazer um quadrado.
Lavínia: Anny sabe que eu pensei em fazer figuras diferentes que não sejam nem o quadrado, nem o retângulo, mas não tem figuras diferentes. Na minha opinião não tem figuras diferentes com a mesma área.
Lavínia: Vamos repetir o quadrado?
Anny: Não sei contar, é um trapézio.
Lavínia: Mas eu sei contar trapézio.
Anny: Ninguém sabe contar trapézio.
Anny: 1,2,3,4,5,6. Não, isso não é um quadrado né, pensando bem 1,2,3, 4,5... 25, tenta formar um com 25 de área. É muito!
Anny: Isso é um retângulo, não um bicho de sete cabeças.
Anny: Lavínia, mas isso passou tá muito grande meu, Deus do céu!
Lavínia: A gente conta, se passou a gente tira.
Lavínia: 1,2,3,4,6,7,8,9 … 24.
Lavínia: Falta só um.
Anny: 1,2,3,4,5,6,7 ... 15, 16, 17…24.
Lavínia: Acho que é só na largura.
Lavínia: Então vamos fazer uma figura com 24.
Anny: Calma aí, tem alguma figura com 3 que dá 24?
Lavínia: Tem a do cinco.
Anny: Calma vamos ver. Vamos usar a força da mente.
Lavínia: Tem na tabuada do 5.
Anny: Só tem 21 e 24 na tabuada do 3 e do 4. Tem que ter alguma tabuada que tem 25.
Lavínia: Tem 25 na tabuada do cinco.
Anny: Isso! 5 x 5 é 25.
Anny: 1,2,3,4,5. 1,2,3,4,5. 1,2,3,4,5,6, 7... 25, he! Só que o problema é que é igual.

Após lerem o enunciado da tarefa, Anny sugere iniciar fazendo um quadrado e pede para Lavínia construir um quadrado também. Lavínia, no entanto, diz que gostaria de tentar fazer outros tipos de figuras diferentes do retângulo e do quadrado, mas está certa de que não tem figuras diferentes das que já formaram e que apresentam a mesma área. A conjectura formada por Lavínia faz com que ela nem tente construir figuras com formatos diferentes das que já formou. Ela pergunta se podem fazer outro quadrado.

Anny, após ouvir ideia da Lavínia, constrói uma figura no Geoplano (Figura 21) e diz ser um trapézio e que não sabe contar a área e o perímetro do trapézio, na verdade, ela constrói um hexágono. Lavínia diz que sabe, já Anny afirma que ninguém sabe contar a área dessa figura, então desistem de tentar construir figuras diferentes. Anny, apesar de construir um diálogo com Lavínia, sempre critica as ideias da companheira. Mas Lavínia aparenta calma e continua argumentando para a resolução das tarefas.

Seguem então tentando construir um quadrado com área de 25 cm^2. Anny critica novamente Lavínia, dizendo que o que ela formou não é um quadrado e sim um retângulo e sugerindo que não é tão difícil formar um quadrado e que a figura formada por Lavínia é muito grande. Lavínia então afirma que se passar da medida, ela pode diminuir somente na largura. Anny continua contando e comparando a área e o perímetro sem encontrar figuras com as mesmas áreas. Lavínia sugere que façam uma figura com 24 cm^2 de área. Anny aceita a ideia, e elas começam então a pensar na multiplicação para ajudá-las a formar as figuras. Anny pensa em formar uma figura com 3 cm de lado e com área 24 cm^2, mas ainda estão pensando somente no quadrado e tentam descobrir se tem um número que multiplicado por ele mesmo tem como resultado 24. Lavínia diz que, na tabuada do cinco, tem. Nesse momento, Lavínia e Anny conseguem raciocinar juntas utilizando um conhecimento prévio, ou seja, a multiplicação dos lados da figura para calcular a área, podendo assim deixar de utilizar apenas tentativas. Após Lavínia sugerir a tabuada do cinco, Anny pensa nos resultados das tabuadas e explica que os mais próximos são o 21 na tabuada do três e 24 na tabuada do quatro. No entanto, elas precisam da quantidade 25 como resultado. Lavínia insiste que tem 25 na tabuada do cinco, Anny com seu pensamento rápido, chega à resposta de que cinco vezes cinco é igual a 25, e ficam felizes por encontrar a figura com a área procurada. No entanto, descobrem que é igual ao quadrado que fizeram na tarefa 2.1 e não podem utilizar a mesma figura. Entretanto, elas poderiam utilizar essa figura, pois a tarefa não diz que as figuras precisam ser diferentes das figuras formadas na tarefa anterior, mas que precisam ter a mesma área.

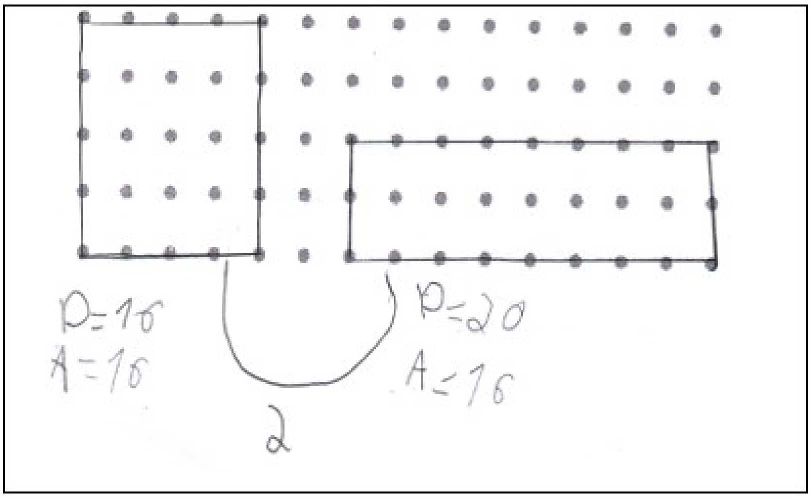
Trecho 2 do diálogo

Lavínia: Eu disse vamos fazer uma figura de 24.
Anny: 4, é 4. Dá 24 é uma boa ideia. 4 x 6 igual a 24.
Anny: Esse deu 14 né?
Lavínia: Não deu 20.
Anny: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8...25.
Lavínia: 1,2,3,4,5,6... 20. Vinte, vamos fazer a figura de 20.
Anny: Fiz um quadrado 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10... 16.
Anny: Não, está dando errado!
Lavínia: Vamos ver 8 vezes 2 é 16 né?
Lavínia: 8 vezes 2 é 16, a gente tá usando a força da multiplicação pra conseguir. Pensei da gente fazer umas das figuras de 20, e a de 25, a gente foi na tabuada do cinco para saber. Agora para saber uma figura com 16 a gente vai na tabuada do 8 pra saber.
Anny: 8, 9, 11 ,12 13 14. 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ... 16. Eh! Conseguimos!!
Lavínia: Agora tem que colocar na malha.

Após chegarem à conclusão de que não poderiam utilizar o quadrado com 25 cm^2 de área, a dupla inicia a construção de uma nova figura. Lavínia continua insistindo em formar uma figura com 24 cm^2. Nesse momento, elas já conseguem utilizar a multiplicação para encontrar as medidas que querem. Anny então pensa na medida quatro para o lado e gosta da ideia. Pensa em quais algarismos multiplicados tem como resultado 24 e chega à conclusão de que seis vezes quatro é igual a 24. Continuam comparando e calculando as áreas das figuras formadas. Lavínia mostra que fez uma figura com área 20 cm^2 e Anny mostra que fez um quadrado com 16 cm^2 de área, mas afirma que está dando errado, porque não conseguem formar figuras com a mesma área. Lavínia pensa então na multiplicação oito vezes dois que é 16, e forma um retângulo com 2 cm de largura por 8 cm altura, formando a área 16 cm^2, que é a mesma área do quadrado formado por Anny. Explica que pensou na multiplicação para conseguir, pois, quando fez as figuras com 20 cm^2 e 25 cm^2, ela utilizou a tabuada do cinco e quando pensou no 16, utilizou a tabuada do oito. Ficam contentes porque conseguiram encontrar as respostas procuradas para a resolução correta da tarefa: um quadrado com medidas 4 cm por 4 cm e área 16 cm^2 e um retângulo com dimensões 2 cm por 8 cm e área 16 cm^2. Seguem desenhando na malha pontilha e escrevendo a resposta para finalizar a tarefa.

A seguir as respostas malha pontilhada, no Geoplano e escrita da tarefa 2.2 feitas pela dupla de Anny e Lavínia

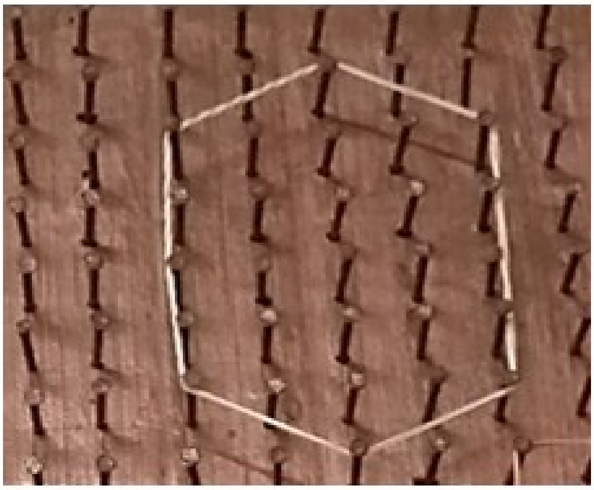
Figura 20 - Resposta apresentada por Anny e Lavínia na malha pontilhada -Tarefa 2.2



Fonte: Dados da pesquisa

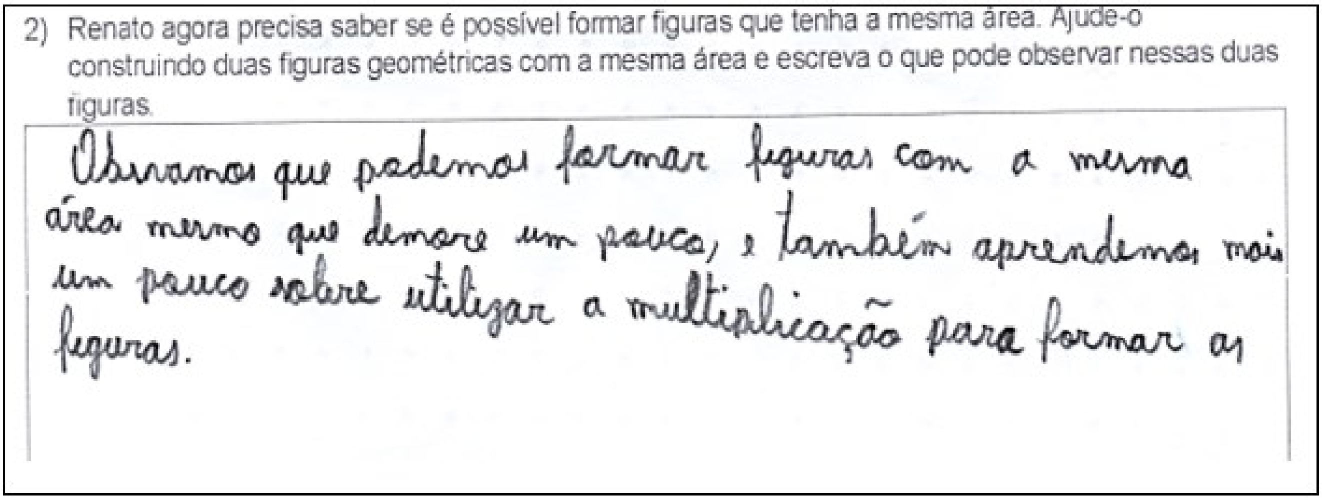
No início do diálogo, Anny diz que fez uma figura que não sabia contar, a qual chamou de trapézio por apresentar dificuldade na nomenclatura das figuras planas. Na verdade, a figura construída por ela foi um hexágono, como mostra a figura a seguir (Figura 21). A professora, ao final, da tarefa informou aos alunos o nome correto.

Figura 21 - Construção apresentada por Anny e Lavínia no Geoplano -Tarefa 2.2



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 22 - Resposta escrita por Anny e Lavínia -Tarefa 2.2



2) Renato agora precisa saber se é possível formar figuras que tenha a mesma área. Ajude-o construindo duas figuras geométricas com a mesma área e escreva o que pode observar nessas duas figuras.

Observamos que podemos formar figuras com a mesma área mesmo que demore um pouco, e também aprendemos mais um pouco sobre utilizar a multiplicação para formar as figuras.

Fonte: Dados da pesquisa

No quadro a seguir (Quadro 13), estão organizados os processos de raciocínio matemáticos desenvolvidos pela dupla Anny e Lavínia ao resolverem a tarefa, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito da Geometria Plana –Área e perímetro.

Quadro 13 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Anny e Lavínia

Trechos	**Processos de raciocínio matemático**	**Conceitos matemáticos utilizados**

Lavínia: Anny sabe que eu pensei em fazer figura diferente que não sejam nem o quadrado, nem o retângulo, mas não tem figuras diferentes. Na minha opinião não tem figuras diferentes com a mesma área. Lavínia: A gente conta, se passou a gente tira. Lavínia: Acho que é só na largura. Anny: Calma aí, tem alguma figura com 3 que dá 24? Lavínia: Tem na tabuada do 5. Anny: Só tem 21 e 24 na tabuada do 3 e do 4. Tem que ter alguma tabuada que tem 25. Lavínia: Tem 25 na tabuada do cinco. Anny: Isso! 5 x 5 é 25 Anny: 4, é 4. Dá 24 é uma boa ideia. Anny:4 x 6 igual a 24. Lavínia: Vamos ver 8 vezes 2, é 16 né?	Conjecturar/ Justificar	Lavínia apresenta, logo no início do diálogo, uma conjectura ao afirmar que não há figuras diferentes com a mesma área, sendo uma conjectura falsa, pois existem figuras geométricas diferentes com a mesma área. Apresenta essa conjectura provavelmente por não conhecer outros tipos de figuras. Ela não consegue buscar um conhecimento prévio para relacionar as diferentes formas das figuras planas. Lavínia forma uma outra conjectura ao demonstrar que encontrou um jeito para deixar a figura menor, bastando tirar unidades da medida do lado e, em seguida, justificando que pode tirar somente da largura. Anny forma uma nova conjectura que auxiliará na resolução da tarefa ao perceber que podem utilizar a operação de multiplicação para encontrar a área. Lavínia justifica a conjectura ao afirmar que pode encontrar, na tabuada do cinco, o resultado, percebendo que podem ter o auxílio da tabuada para encontrar a área procurada, $25cm^2$. Anny justifica a conjectura quando afirma que cinco vezes cinco é 25 e quando afirma que quatro vezes seis é 24. Lavínia também justifica apresentando oito vezes dois, que é 16, ou seja, percebem que podem utilizar o cálculo da área a partir da multiplicação das dimensões das figuras (b x h).
Lavínia: 8 vezes 2 é 16, a gente tá usando a força da multiplicação pra conseguir. Pensei da gente fazer umas das figuras de 20, e a de 25, a gente foi na tabuada do cinco para saber. Agora para saber uma figura com 16 a gente vai na tabuada do 8 pra saber.	Generalizar	Lavínia, ao perceber que pode utilizar a multiplicação para descobrir outros valores da área, faz também uma generalização. Demonstra, ao utilizar em outro momento, o conhecimento adquirido, ou seja, quando pensou na tabuada do oito para encontrar a área 16 $cm^{2,}$ que era a mesma área do quadrado encontrado.

Fonte: Autoria própria

4.2.4 Dupla 2 - Paula e Renata – tarefa 2.2

Trecho 1 do diálogo

Renata: Agora vamos ver a área. Vamos fazer aqui.
Renata: Agora vamos fazer outras formas.
Paula: Tá bem, mas aqui é o que um paralelepípedo e aqui é um quadrado?
Renata: Mas esse é um retângulo.
[Renata corrige a Paula dizendo o nome correto, retângulo e não paralelepípedo.]
Paula: Um círculo. Ah! círculo não dá.
Renata: Uma pirâmide.
[Se refere ao triângulo.]
Paula: Você sabe contar a área da pirâmide?
Renata: 1,2,3,4, calma é dentro.
Renata: Professora vem aqui.
Paula: Acho que dá pirâmide, não dá.
Renata: Vamos ver com a professora.
Renata: Professora.
[Chama a professora de maneira insistente]
Renata: Professora a gente já fez a área, a gente queria fazer não um quadrado, mas uma pirâmide, só que a gente não sabe contar.
Professora: A pirâmide não dá, pirâmide não é uma forma plana, pirâmide é um poliedro como chama esse que você acabou de fazer?
Renata: Pirâmide.
Professora: Não é uma pirâmide.
Renata: Mas então só o quadrado pode fazer.
Professora: Não, você não pode dizer que uma pirâmide é um triângulo, é isso que eu estou dizendo. Veja se você consegue montar um triângulo com a mesma área.
Paula: A área tem que ser igual.
Renata: Calma. Vamos tentar.
Paula: O meu eu já fiz.
Renata: Tá vai contar aí quanto que o seu tem.
Paula: O perímetro ou a área?
Renata: Área é por dentro.
Paula: 1,2, 3,4, 5, 6, 7,8.
Renata: 8.

Paula e Renata iniciam a construção das figuras com áreas iguais pensando em fazer formas geométricas diferentes das que fizeram nas tarefas anteriores. Paula observa as figuras que formou e pergunta se é um “paralelepípedo” ou um quadrado. Renata corrige logo em seguida dizendo que é um retângulo, se referindo à nomenclatura que Paula utilizou para o retângulo que formou. A dupla apresenta dificuldade em nomear as formas planas, confundindo a nomenclatura com o das formas não planas. Paula, em seguida, diz que poderia ser um círculo, mas logo afirma que não dá, pois utiliza o conhecimento adquirido da tarefa 1(c), na qual chegaram à conclusão de que não é possível formar um círculo no Geoplano, pois é uma forma arredondada.

Renata sugere formar uma “pirâmide”, também trocando o nome da forma plana que formou, no caso, o triângulo. Elas pensam em como contar a área do triângulo. Renata começa a contar os quadradinhos que estão dentro da figura e afirma que a área são os quadradinhos de dentro. Ela tem conhecimento de área das figuras planas, mas apresenta dúvidas na contagem da área do triângulo e pede auxílio para a professora. A professora esclarece que o nome correto da figura que formaram é um triângulo, por ser uma forma plana, e que a pirâmide é um poliedro. Renata tenta justificar o porquê de não poder formar uma pirâmide, questionando se somente o quadrado pode ser formado no Geoplano. A professora explica novamente que a forma que ela quer construir é um triângulo, e não uma pirâmide. Elas compreendem e seguem contando a área das figuras. Renata afirma novamente que a área é o espaço que está dentro da figura. Confirmam que a figura que formaram tem 8 cm^2 de área.

Durante a realização desta tarefa, a professora, corrige as respostas incorretas apresentadas por Renata, conduzindo-a a resposta correta a partir de argumentações.

Trecho 2 do diálogo

Renata: Professora vem aqui por favor.
Renata: Professora aqui a gente pegou essa forma dá para contar essa parte?
Professora: Sim, mas lembra o que nós conversamos o que você utiliza como área?
Renata: Aqui dentro.
Professora: Isso!
Renata: Mas aqui não é dentro.
[Mostra a metade do quadradinho que ficou dentro da figura separada pelo elástico]
Renata: Então deu 15.

Após terem certeza de que a área das figuras é a parte interna e de que não podem formar, no Geoplano, as formas não planas, como a pirâmide e paralelepípedo, as alunas formam um triângulo e tentam contar a área. Renata pergunta para a professora se dá para contar o lado do triângulo, que apresenta somente a metade dos quadradinhos, ou seja, meia unidade de área. Os quadradinhos são as unidades de medidas de área utilizada para a contagem. A professora afirma que sim e relembra com a aluna que conta a área. Ela confirma que é a parte de dentro da figura e mostra a metade do quadradinho, que não está dentro da figura formada pelo elástico. Ela faz a contagem, chegando a 15 cm^2 de medida da área. Essa contagem está incorreta, porque ela considera os quadradinhos que estão com a metade fora da figura como inteiros na sua contagem.

Trecho 3 do diálogo

Professora: Essa é a metade do que aqui?
Paula: Da área.
Renata: Do perímetro
Professora: Quadradinho.
Renata: A gente pode contar?

Professora: O que você acha?
Renata: Pode.
Professora: Por que você acha que pode contar?
Renata: Porque ela está dentro mesmo estando fora.
Professora: Ele está com a metade para dentro como você conta?
Renata: 1,2,3, 4... 15.
Paula: Mas é a metade, não pode contar os inteiros.
[Nesse momento Paula mostra para Renata a metade do quadradinho que está dentro da figura formada]

Após observar que Renata havia contado errado a área do triângulo e que ela não consegue perceber que, para a contagem da área, ela precisa utilizar somente a metade do quadradinho, a professora faz uma intervenção inferindo questionamentos que possam levar as alunas, principalmente Renata, a perceber que somente a metade da área dos quadradinhos do lado fazem parte da área da figura que elas construíram. A professora aponta para o quadradinho dividido com o elástico e pergunta se aquela metade está dentro ou fora da figura. Paula responde que é metade da área e Renata que é da metade do perímetro. A professora afirma que é a metade da área do quadradinho. Renata questiona se aquela parte pode ser contada como área, e a professora a instiga a pensar, perguntando o que ela acha. Renata afirma que sim, pode ser contada. Nesse momento, a professora busca saber porque ela chegou à conclusão de que pode contar a parte que está dentro da figura. Renata afirma que é porque "ela está dentro mesmo estando fora". Ela percebe que, mesmo não estando o quadradinho todo dentro da figura, ela pode contar somente a metade que o elástico separa para dentro do triângulo. Então, ela conta os quadradinhos inteiros, chegando novamente a 15 cm^2 de área, não conseguindo ainda utilizar a metade como forma correta para a contagem. Paula afirma que não pode contar como inteiro, porque é metade, mesmo assim, ela conta sem perceber o erro.

Trecho 4 do diálogo

Professora: Tá, se é metade e não pode contar como inteiro como eu conto então?
Renata: 5.
Professora: Então espera Renata, você tem que organizar a forma que você vai pensar para ver o que vai fazer primeiro.
Renata: Vou contar os quadradinhos inteiros.
Paula e Renata: 1, 2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7, 8, 9 ,10.
Professora: Esses quadradinhos estão de que jeito?
Renata: Eles estão todos dentro.
Professora: Mas estão iguais a esse aqui?
[Professora mostra o quadradinho em que o elástico está dividindo-o ao meio].
Renata: Pela metade.
Professora: Isso. E esses que você contou?
Renata: Inteiro.
Professora: Anota então quantos inteiros deu.
Renata: 10 quadradinhos.

Professora: Muito bem, agora como faço para contar os outros?
Renata: 5 por 5, então 10, 15.
Professora: Espera um pouquinho. Esses são os inteiros e aí como fez para contar esses que não estão inteiros?
Renata: A gente vai contando 5 por 5 e depois junta.
Professora: Porque 5 por 5?
Renata: Porque ele está pela metade.
Paula: É, a metade é 5.
Professora: A metade é 5?
Renata: A metade de 10 é 5.
Professora: Tudo bem a metade de 10 é 5, mas e aí a metade é do quê?
Renata: É a metade do quadradinho, então fica 5.
Professora: Porque 5?
Renata: Porque só a metade está aqui.
Professora: Mostra no papel para mim o que você está pensando.
Renata: Assim.
[Ela escreve 0,5 no papel.]
Paula: Dez vírgula cinco.
Professora: Cinco décimos você usa para representar a forma decimal, mas na hora de contar você utiliza a mesma coisa?
Professora: Isso Paula.
Paula: 10 e meio.
Professora: Então eu utilizo o quê para contar esse aqui, você já disse o que ele é.
Renata: Vamos contar de 5 em 5.
Professora: 5 em 5, mas eu tenho 5 quadradinhos aí?
Renata: Ah! Vamos contar.
Professora: A forma que representa é de um jeito, e aqui é de outro. Aqui você conta, aqui você vai pensar em tamanho, o que você tem aqui?
Paula: A metade.
Professora: Isso a metade.
Paula: Então dez, dez e meio.
Professora: Ah! Então você está juntando aí muito bem Paula!
Paula: 10 e meio mais meio 11, 11 e meio, 12, 12 e meio.
Professora: Então você está utilizando os números decimais.
Renata: Como vou juntar o 10?
Professora: Mas você já juntou aqui, dá uma olhadinha para você ver.
Renata: 1,2, 3,4, 5, 6,7, 8, 9 e 10, 10 e meio, 11,11 e meio 12. Ah! Ta!

A professora busca compreender por que Renata chega à resposta de 15 cm^2, questionando a aluna Renata sobre como conta o quadradinho que está dividido ao meio, pois a resposta correta seria 12,5 cm^2. É interessante esse momento, porque Renata responde que a metade do quadradinho é cinco. A professora então pede para ela organizar a resolução da tarefa, então Renata resolve que vai primeiro contar os quadradinhos inteiros e chega à resposta de 10 unidades de área. Nesse momento, a professora pede para ela observar os quadradinhos inteiros e os que estão somente com a metade, pedindo para ela anotar. A professora pergunta como ela vai contar as metades, e ela diz que é cinco por cinco, então, dez somado à cinco dá quinze.

A professora, buscando fazer a aluna compreender que a metade não pode ser contada como cinco, pede para que ela explique como chega na contagem cinco por cinco. Então, a aluna diz que cinco é metade de dez e, por isso, soma cinco aos dez quadradinhos inteiros que contou. Apesar de ela visualizar no Geoplano a metade do quadradinho, ela relaciona essa metade à metade da quantidade de quadradinhos inteiros, ou seja, se tem dez quadradinhos, então a metade de dez é cinco e acrescenta na soma total para dar 15 cm^2 o total da área. A professora então pede para ela representar no papel o que está explicando. Renata escreve 0,5. Então, a professora percebe que ela faz uma comparação errada, se confunde ao pensar na metade da quantidade de quadradinhos inteiros e na metade de um, que é um número decimal.

Logo em seguida, Paula consegue entender a contagem e diz que é 10,5. A professora percebe, mas continua explicando para a Renata que, para a representação numérica da metade de um, é utilizado 0,5, mas ali é necessário pensar em tamanho, ou seja, tem que usar, como leitura, meio quadradinho, e não 0,5 cada quadradinho. Paula, sempre atenta, responde rapidamente que é a metade. A professora confirma para a Paula, que inicia a contagem utilizando a forma correta de juntar os quadradinhos de meio em meio. Mas Renata ainda continua com dúvida, pois consegue juntar os dez quadradinhos inteiros às metades, mas ela ainda não consegue ver que cada duas metades formam um quadradinho inteiro. A professora afirma que ela já juntou e pede para ela observar. Renata então conta, e, nesse momento, consegue compreender que não é de cinco em cinco, mas sim de meio em meio que se conta. Neste trecho do diálogo, é importante destacar a ação da professora ao inferir questionamentos que levaram as alunas à compreensão dos conceitos relacionados à forma correta de utilizar as medidas e os números decimais no cálculo da área, compreendendo um pouco mais sobre Geometria Plana.

Trecho 5 do diálogo

Renata: Já sabemos que essa é muito grande não acha não!
Renata: Nós vamos diminuir.
Paula: Calma, não vai dar certo porque aqui tem quadradinho e meio.
Renata: Calma, mas aqui também.
Paula: Vamos diminuir.
Renata: Aqui também, vamos diminuir a mesma coisa que é menor ainda, daí não fica meio, então é um inteiro.
[Elas dão risada dessa afirmação]
Professora: Pra ficar inteiro você precisa de quê?
[Renata fica em silêncio pensado para responder]
Professora: Então você pegou meio e meio e formou um inteiro igual você disse. Então o que você vai ver para formar um inteiro?
Renata: Eu vou ver se ele está inteiro!

Professora: Isso, mas você utilizou aqui partes, certo? Então o que vai utilizar ai?
[As duas conversam baixinho]
Paula: Partes, partes!
Renata: Ah! Já sei, já sei, olha assim ele fica pela metade.
Paula: Oh! Inteligente!
Renata: Obrigada. Vamos tentar desse jeito.

Nesse momento da realização da tarefa, elas já conseguem compreender que o elástico separa o quadradinho em duas partes iguais e que, se juntar as duas partes, terão um quadradinho inteiro e já conseguem contar utilizando a forma correta, então tentam formar outra figura com a área igual. Paula apresenta insegurança ao diminuir o lado da figura que apresenta somente a metade do quadradinho. Renata, agora já confiante, ao dizer que "diminuir a mesma coisa que é menor ainda, daí não fica meio, então é um inteiro", mostra que, se tirar a metade, sobra um quadradinho inteiro.

A professora instiga as alunas para saber se elas realmente compreenderam a diferença entre contar a metade e um quadradinho todo, então Paula e Renata respondem confiantes e mostram quando formam o inteiro e a metade a partir do inteiro, demonstrando, dessa forma, ter adquirido um novo conhecimento.

Trecho 6 do diálogo

Paula e Renata: 1,2,3,4…12,12 e meio, 13.
Renata: A gente tem que diminuir, diminuir. Prontinho vamos ver.
Paula: 1,2,3,4,5, 6,10,10 e meio, 11, 11 e meio.
Renata: Aqui. Calma, aumenta.
Paula: 1,2,3,1,5…10,11, 11 e meio.
Renata: Não aqui.
Paula: 1,2,3,4, 5... 12 e meio.
Renata: Agora cabe uma metade ai?
Paula: Não. Vamos fazer desse lado aqui olha!
Paula: Olha, tem uma metadinha aqui.
Renata: Pronto.
Paula: Que figura é essa?
Renata: 1,2,3, 4...12
Paula: 1,2,3, 4... 12.
[Formam um retângulo.]
Paula: Mas deu uma figura boa, deu certo. Mas, que figura é essa, parece uma barra de chocolate, comida.
Renata: Vamos elaborar a resposta. Vamos ler a resposta da outra tarefa e relacionar as duas.
Paula e Renata: Nós concluímos após ver e comparar essas figuras que as duas tem a mesma área só não tem o mesmo perímetro.
Paula: Vamos pensar em outra figura.
Paula: Não. 12 não.
Renata: Sim
Renata: 1,2,3,4,5 ... 10,10 e meio, 11, 11 e meio, 12.
[Renata não apresenta mais dúvidas na contagem.]

Paula: Não, porque aqui vai ficar 12.
Renata: Não, mas não precisa porque agora fica 12 a gente tirou uma metade.
[Se refere a figura que formaram acima, o triângulo]
Paula: Agora fica 12, olha esse daqui.
Renata: 1,2,3… 12, sim a gente tirou, pronto.
Renata: Eu já vi essa figura.
Paula: Isso é um retângulo. Deu certo na figura 2 e 4.
[Conseguem formar duas figuras com a mesma área.]
Paula: Qual a resposta que vamos colocar então.
Renata: Nós podemos observar que as duas figuras são diferentes, mas as duas têm a mesma área.

Continuam a realização da tarefa tentando formar uma figura que tenha a mesma área do triângulo que formaram anteriormente com 12,5 cm^2. Diminuem e aumentam os lados das novas figuras, contando sempre a área e utilizando corretamente a contagem e a junção das metades dos quadradinhos com os inteiros. Logo, resolvem tirar a metade que forma a ponta superior do triângulo, chamando-a de "metadinha", como mostra as Figuras 24 e 25, e observam que formaram uma nova figura com 12 cm^2 de área, concordando que não conhecem essa figura. Formaram um quadrilátero apresentado nas Figuras 23 e 25.

Discutem então qual seria a melhor resposta formada a partir dos seus novos conhecimentos e concluem dizendo "após ver e comparar essas figuras que as duas tem a mesma área só não tem o mesmo perímetro". Continuam tentando formar uma figura com 12 cm^2 de área para comparar com o quadrilátero e conseguem então formar um retângulo. Decidem que a figura 2, o quadrilátero, e a figura 4, o retângulo, serão as respostas da tarefa. Em seguida, passam para a malha pontilhada e concluem que as duas figuras formadas são diferentes, mas as duas têm a mesma área.

Na tarefa anterior, a resposta estava parcialmente correta, já nessa tarefa, elas conseguem apresentar a resposta correta, pois era necessário formar figuras geométricas diferentes com a mesma medida da área.

Trecho 7 do diálogo

Professora: Terminaram minhas queridas?
Renata: Sim a gente estava em dúvida se essa parte aqui existe. Só que a gente tirou 1 desse para ficar valendo 12 e esse para dar certo.
Professora: Esse o que aí? Esse qual?
Renata: A gente tirou metade do quadrado que ficou 12 a gente contou e aqui estava dando errado.
Paula: A gente tirou essa orelhinha.
Renata: A gente tirou esse porque não sabia se aquela forma existia e ficou 12 também.
Professora: Sim, todas elas existem. Quantos lados ficou aqui?
Paula: Era assim.
Professora: Qual é a última que deu certo? Quantos lados tem?

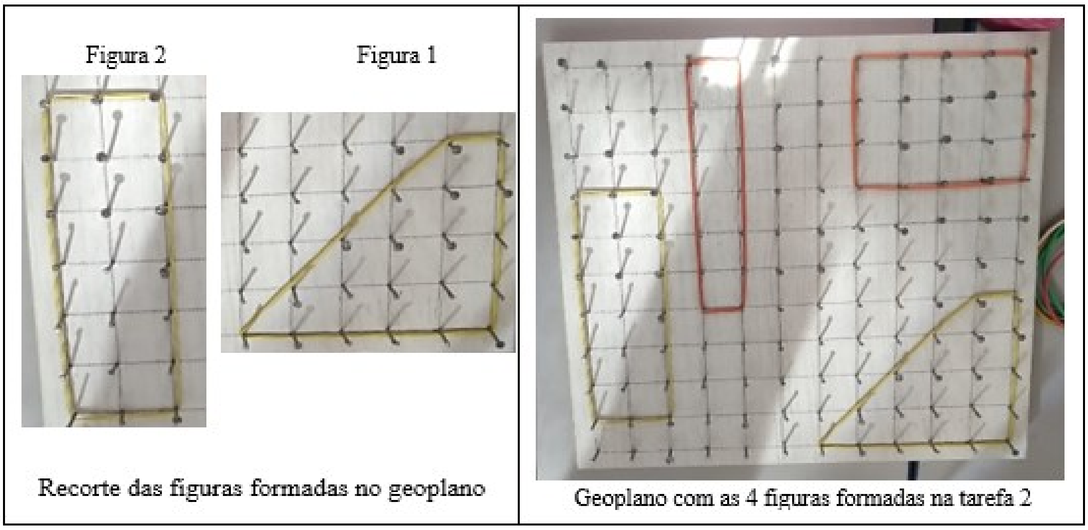
Renata: Foi essa aqui ponto.
Professora: Muito bem aqui você tinha uma unidade inteira e teve que tirar uma para igualar?
Renata: A metade.
Professora: Ok!
Renata: Porque aqui estava assim como a gente pensou que essa não ia dar certo, a gente foi procurando outra, daí eu tirei essa a daqui e ficou 12 a que tinha tirado essa metade porque não sabia se existia, a gente contou e ficou doze também só que sem metades.

Gostaríamos de destacar, nesse trecho do diálogo, a forma segura que Renata justifica como chegou a figura que formou a partir do triângulo, o quadrilátero, que apresenta como resposta final. Afirma que tirou uma “orelhinha”, ou seja, a metade do quadradinho, para que a figura passasse de 12,5 cm^2 para 12 cm^2 de área e quando afirma “a gente contou e ficou doze também só que sem metades”, demonstrando claramente que obteve um novo conhecimento ao utilizar, na contagem e na representação da metade da unidade de medida, o quadradinho, que no início não conseguia definir como meio quadradinho e sim cinco, compreendendo que duas metades formam um inteiro.

Nesta tarefa, o diálogo da professora com as alunas, foi importante para a compreensão da contagem da área das figuras formadas. A professora solicitou as alunas que explicassem a forma que estavam pensando para calcular a área, forneceu pistas, incentivou as explicações referentes as estratégias utilizadas para a resolução, validou as respostas corretas e corrigiu as respostas incorretas, apresentou argumentos, dessa forma contribuiu para que as alunas compreendessem de maneira correta, a contagem da área na figura formada.

A seguir as respostas no Geoplano, malha pontilhada e escrita da tarefa 2.2 feitas pela dupla de Paula e Renata.

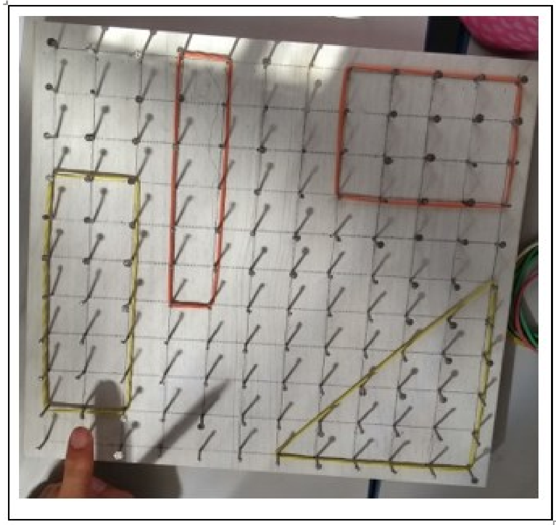
Figura 23 - Construção apresentada por Paula e Renata no Geoplano -Tarefa 2.2



Fonte: Dados da pesquisa

A figura abaixo (Figura 24) mostra as figuras geométricas formadas pela dupla ao resolver as tarefas, inclusive o triângulo que se referem no diálogo, que foi transformado em um quadrilátero para a resposta final da tarefa.

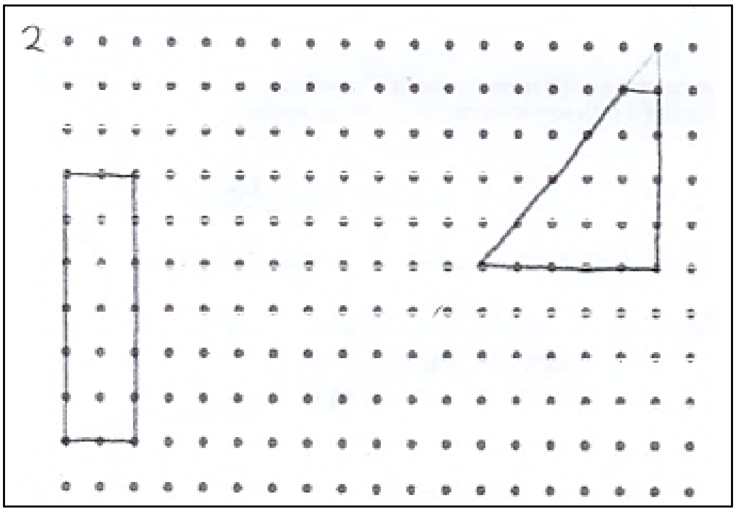
Figura 24 - Figuras geométricas formada no Geoplano por Paula e Renata para a resolução da tarefa 2.2



Fonte: Dados da pesquisa

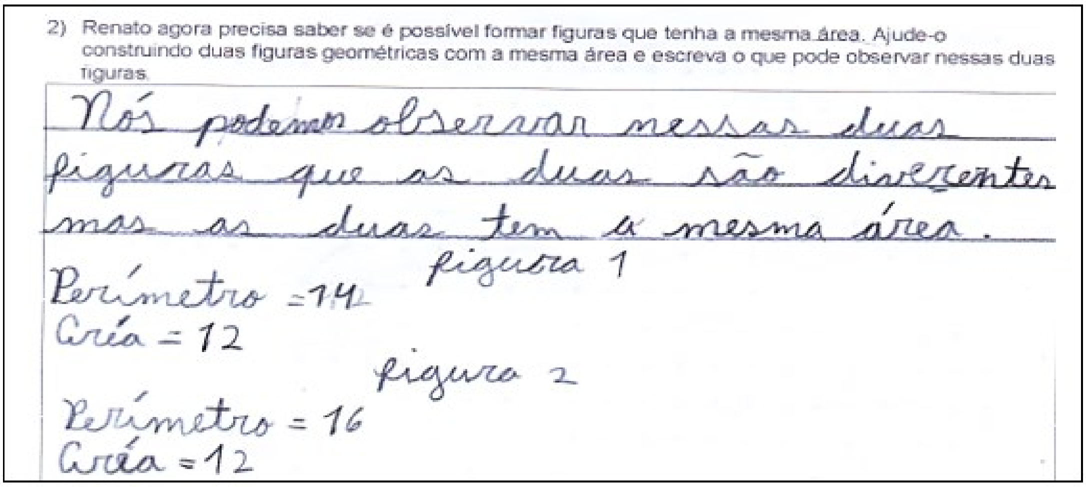
A resposta da figura a seguir (Figura 25) mostra a metade que Renata apaga da figura formada anteriormente para que a área fique com 12 cm^2, a metade que ela se refere como "orelhinha" em seu diálogo com Paula.

Figura 25 - Resposta apresentada por Paula e Renata na malha pontilhada -Tarefa 2.2



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 26 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 2.2


2) Renato agora precisa saber se é possível formar figuras que tenha a mesma área. Ajude-o construindo duas figuras geométricas com a mesma área e escreva o que pode observar nessas duas figuras.

Nós podemos observar nessas duas figuras que as duas são diferentes mas as duas tem a mesma área.

figura 1

Perímetro = 14

Área = 12

figura 2

Perímetro = 16

Área = 12

Fonte: Dados da pesquisa

Nos quadros a seguir (Quadros 14), estão organizados os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pela dupla Paula e Renata ao resolverem a tarefa, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito da Geometria Plana –Área e perímetro.

Quadro 14 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata

Trechos	**Processos de raciocínio matemático**	**Conceitos matemáticos utilizados**
Paula: Um círculo. Ah! círculo não dá. Renata: 1,2,3,4, calma é dentro. Paula: Acho que da pirâmide, não dá. Renata: Mas então só o quadrado pode fazer. Renata: Porque ela está dentro mesmo estando fora.	Conjecturar/ Justificar	Ao afirmar que não consegue formar o círculo, Paula apresenta uma conjectura trazendo o conhecimento que obteve na resolução da tarefa 1(c). Renata apresenta uma conjectura de que a área é a parte interna da figura plana, ou seja, os quadradinhos que estão no interior da figura são os que devem ser contados, demonstrando ter dominado o conceito de área. Paula faz uma conjectura ao dizer que a pirâmide não pode ser formada, mas ela não consegue justificar essa conjectura. Talvez, por não saber diferenciar completamente a nomenclatura das figuras planas e das não planas, pois se refere ao triângulo formado ou por não saber contar a área dessa figura. Renata não compreende porque não pode formar uma pirâmide (se referindo ao

Paula: Mas é a metade, não pode contar os inteiros. Renata: A gente vai contando 5 por 5 e depois junta. Renata: Porque ele está pela metade. Renata: É a metade do quadradinho, então fica 5. Paula: Dez vírgula cinco. Paula: 10 e meio.		triângulo) no Geoplano, apresentando uma justificativa não válida quando afirma que só é possível formar quadrados. Renata, em seguida, forma uma conjectura ao compreender que somente a metade do quadradinho que está dentro da figura será utilizado para formar a área total do triângulo. Paula justifica a conjectura, afirmando que a metade não pode ser contada como inteiro. Renata utiliza um conhecimento prévio ao dizer que, cada metade do quadradinho, ela considera cinco e que junta de cinco em cinco, formando então uma conjectura falsa para a contagem da área do triângulo. Renata justifica a conjectura ao afirmar que conta dessa forma porque está pela metade. Após analisar o triângulo e os questionamentos da professora, Paula forma uma conjectura ao utilizar a forma decimal para a contagem, mas logo em seguida se corrige, utilizando a linguagem correta para a contagem da metade do quadradinho, ou seja, meio quadradinho. Conseguindo encontrar a área da figura formada.
Renata: Aqui dentro. Renata: Mas aqui não é dentro.	Comparar	Renata realiza um processo de comparação ao identificar a parte que considera estar dentro e fora da superfície da área do triângulo formado.
Paula: Calma, não vai dar certo porque aqui tem quadradinho e meio.	Conjecturar	Paula forma uma conjectura inválida ao afirmar que não dá para diminuir a área, porque tem um quadradinho e meio, não apresentando o conhecimento necessário para tirar meio quadradinho da figura e, assim, diminuir o tamanho da área.

Renata: Aqui também, vamos diminuir a mesma coisa que é menor ainda, daí não fica meio, então é um inteiro. Paula e Renata: Nós concluímos após ver e comparar essas figuras que as duas tem a mesma área só não tem o mesmo perímetro.		Renata, após compreender a relação entre metade e inteiro, faz uma conjectura ao afirmar que, tirando a metade "menor" que está do lado do quadrado inteiro, ele fica inteiro, ou seja, deixa de ser um e meio para ficar um inteiro. Assim, monstra ter formado um novo conhecimento o qual não tinha antes: a relação entre o meio e o inteiro da unidade de área utilizada na contagem da área. Apresentam uma conjectura ao elaborar suas conclusões, afirmando que as duas figuras formadas têm a mesma área, mas não o mesmo perímetro. Elas demonstram que conseguem diferenciar a área e o perímetro das figuras apresentadas em suas respostas finais.
Paula: 10 e meio mais meio 11, 11 e meio, 12, 12 e meio.	Generalizar	Paula generaliza ao demonstrar que pode utilizar a contagem de meios e inteiros, juntando os quadradinhos inteiros com suas metades no cálculo da área.

Fonte: Autoria própria

4.3 TAREFA 3

1) Renato formou no Geoplano um quadrado com área 9 cm^2 e precisa encontrar o perímetro, depois preencher a tabela abaixo:

	Figura 1	**Figura 2**	**Figura 3**
Área	**9 cm^2**	**O dobro da área da figura 1**	**O triplo da área da figura 1**
Perímetro			

Agora mostre para Renato como fez para formar essas figuras escrevendo ou realizando os cálculos.

4.3.1 Dupla 1 – Anny e Lavínia – Tarefa 3

Trecho 1 do diálogo

Lavínia: Eu vou tentar formar uma figura e você forma uma figura.

Anny: Não. Tem que ser um quadrado.
Anny: Eu fiz um quadrado 3 por 3 que deu 9. Olha 1,2,3,4,5,6,7,8,9 agora a gente tem que somar o perímetro. 3, 6, 9, 12 perímetro 12.
Lavínia: Perímetro 12.
Anny: O dobro da área da figura 1.
Anny: O dobro 9 x 2 é igual a 18. Você não sabe!
Lavínia: Eu estava fazendo a conta. Anny a gente vai ter que aumentar mais um pouco para dar 18?
Anny: 1,2, 3, 4...13,14,15,16.
Lavínia: Hum! Não vai dar Anny.
Anny: Vai dar sim se a gente fizer de outro jeito.
Anny: É impossível fazer com 18.
Lavínia: É uma figura!
[Lavínia tenta mostrar para Anny que agora não é necessário ser um quadrado.]
Anny: É um quadrado. Obrigatoriamente tem que ser um quadrado. Entendeu?
Anny: 1, 2, 3, 4, 5...11, 12, 18, mas não é um quadrado.
Professora: Porque foi que você está preocupada?
Anny: Porque eu não consigo formar um quadrado com área de 18.
Professora: O que você está pensando em fazer, o dobro da área?
Anny: Eu não estou pensando em nada professora.
Professora: Em que você está pensando? Está contando, está somando?
[Anny não responde porque está brava, a professora as deixa conversando mais um pouco.]

Anny e Lavínia iniciam a tarefa 3. Lavínia diz que vai construir uma figura e pede para Anny construir outra. Anny diz que a figura tem que ser um quadrado, e não uma figura diferente. Então, ela consegue mostrar que fez um quadrado com 3 cm por 3 cm, totalizando 9 cm^2 de área. Em seguida, conta o perímetro de três em três e chega à medida de 12 cm. Lavínia confirma o perímetro encontrado. São capazes de diferenciar área e perímetro e saber identificar as medidas das figuras no Geoplano.

Em seguida, buscam a resposta para a sequência da tarefa. Anny compreende que, para encontrar o dobro de um número, é necessário multiplicar esse número por dois, descobrindo que a área da próxima figura formada deverá ser 18 cm^2. Lavínia então afirma que estava tentando encontrar a área pedida fazendo a conta e, com base na resposta da companheira, afirma que será necessário aumentar o tamanho da figura 1. As duas fazem tentativas para formar um quadrado com área 18 cm^2, mas não conseguem e formam uma figura com área 16 cm^2. Então, Lavínia percebe que não precisa formar um quadrado, e sim qualquer figura com a área procurada. Anny afirma, com certeza, que é necessário formar um quadrado, mesmo não conseguindo formá-lo.-Aparentemente, ela faz a relação com a primeira figura, por ser um quadrado, acreditando que as outras figuras formadas também devem ser um quadrado, A professora aproxima-se da dupla e as questiona sobre a sua resolução. Anny então explica que não consegue formar o quadrado com o dobro da área da primeira figura. A professora então procura saber qual estratégia ela está usando para resolver a tarefa questionando-a, mas ela responde irritada, por não estar conseguindo resolvê-la. A professora insiste fazendo outro questionamento para saber a forma pela qual que ela está pensando, ou seja, porque ela acha que é necessário formar um quadrado, mas Anny não responde e continua tentando formar a figura. A professora então decide deixá-las tentando resolver sozinhas até a Anny se acalmar.

Trecho 2 do diálogo

Anny: Deu 18, mas não é um quadrado. Não dá para achar 18.
Lavínia: Aqui dá 16 olha! Mas aí teria que aumentar mais dois para dar 18 então não dá 18.
Anny: 16 é impossível, não tenta fazer o 16.
Lavínia: Será que é obrigatório fazer um quadrado?
Anny: Sim, está na tarefa.
Lavínia: Anny sabe uma coisa legal que a gente pode fazer, olhar na tabuada. Olha 6 vezes 3.
Anny: Mas tem que ser um quadrado, no quadrado tem que ter todos os lados iguais.
Anny: 1,2,3,4,5,6…
Anny: Professora.
Anny: Eu não estou conseguindo pensar se tivesse conseguindo pensar eu conseguia fazer eu estou fazendo coisas aleatórias.
Anny: Se eu colocasse dois, com dois daria 18.
[Ela se refere ao quadrado que formou com área 16 cm^2]
Anny: Tem que ser um quadrado professora? É obrigatório?
Anny: A gente já formou um monte de figura, mas não quadrado.
Professora: Mas o que eu quero aqui? Leia aqui na tarefa.
Anny: O dobro área, o dobro da área dessa figura.
Professora: O dobro dessa figura.
Anny: Então ela não precisa ser um quadrado.
Professora: Umas perguntinhas para vocês pensarem: É necessário ser um quadrado? Nessas suas tentativas você conseguiu descobrir um quadrado? Será que consegue formar um quadrado?
Anny: Então ela não precisa ser um quadrado.
Anny: Não, porque é impossível.

Continuam tentando resolver a tarefa formando figuras no Geoplano. Anny forma uma figura com a área que precisa de 18 cm^2, mas não fica satisfeita, porque não é um quadrado. Lavínia faz um quadrado com 16 cm^2 e percebe que, se aumentar dois quadradinhos, encontraria a área procurada, mas a figura formada também não seria um quadrado. Anny afirma novamente que é impossível formar o quadrado com essa área. Lavínia questiona Anny se é realmente necessário formar um quadrado, provavelmente por perceber que não tem como formar essa figura com área 18 cm^2. Ela está correta, pois, para o cálculo da área do quadrado, é necessário multiplicar duas dimensões, sendo a multiplicação de medidas iguais. No entanto, não há um número que multiplicado por ele mesmo, ou elevado ao quadrado, tem como resultado 18, portanto é impossível formar um quadrado com essa medida de área. Lavínia então procura mudar de estratégia argumentando que poderiam olhar na tabuada, ou seja, utilizar a multiplicação para encontrar as medidas da figura procurada e mostra que três vezes seis é igual a 18. Anny afirma insistentemente que tem de ser um quadrado na qual os lados têm a mesma medida, ou seja, as medidas dos lados não podem ter 3 cm por 6 cm, porque são diferentes, ela continua tentando formar a figura no Geoplano e chama a professora novamente. Afirma que não está conseguindo pensar e, por isso, está “fazendo coisas aleatórias”, fazendo tentativas. Observa o quadrado 4 cm por 4 cm formado e afirma que, se pudesse acrescentar dois quadradinhos, encontraria a área procurada.

Nesse momento do diálogo, Anny começa a aceitar que pode não ser um quadrado a figura que precisa formar e questiona a professora. A professora instiga a aluna pedindo para ela ler novamente o enunciado da tarefa. Anny lê e percebe que a tarefa pede uma figura com o dobro da área da figura 1, mas não especifica que precisa ser um quadrado, então ela percebe que não precisa necessariamente formar um quadrado com essa área e afirma que é mesmo impossível. A professora confirma o entendimento de Anny.

Trecho 3 do diálogo

Anny: 3, 4, 5, 6 ...15.
Lavínia: Deu 24 esse.
Anny: Tem que dar 18. Olha 9 vezes 2 são 18.
Lavínia: Deixa eu fazer uma pergunta: como a gente vai fazer uma figura com 9 para dar 18.
Anny: Olha o 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,11, 12, 13, 14, 1,5 16, 17,18, pra gente confirmar.
Lavínia: Agora nós precisamos colocar o perímetro.
Anny: Olha com a professora Rosimeiri é esperta, olha aqui ela coloca o dobro da área, mas não quer dizer que é o dobro do perímetro, ela quer o perímetro.
Anny: 1,2,3,4,5,6 eu tô contando o perímetro aqui 18, o perímetro também é 18.
Anny: Agora é o triplo.
Lavínia: Agora tem que somar mais três.
Anny: Tem que somar mais nove Lavínia.
Anny: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, quanto que é 9 x 3 é igual a 27 não é?
Lavínia: Não sei!
Anny: Lavínia! 9, 18, 27 ,36, 45. Espera é 27. Presta bem atenção no que eu vou fazer. Olha como eu sou esperta é só colocar três aqui, mais 3 e 4,5,6, 7,8 e 9. Eh!!
[Ela aumenta a área do retângulo que formou anteriormente]
Anny: 1,2,3,4,5,6,7,8,9… 27.
Anny: O perímetro é 24.
Anny: Lavínia o perímetro é 24cm e a área é 27 cm.
Anny: Figura 1. Coloca 9 x 2 = 18
Anny: Nós pensamos em…
Lavínia: Usar a tabuada.
Anny: Agora figura 2. Então coloca 9 x 3 = 27, nós utilizamos a multiplicação, e também fomos aumentando até chegar no resultado.
Anny: Na figura 1 a gente não fez nada, só multiplicou por 1.

Continuam tentando resolver a tarefa agora com mais facilidade. Lavínia mostra a figura formada com a área de 24 cm^2, mesmo não sendo a resposta desejada. Anny já utiliza a multiplicação para encontrar as medidas dos lados e a área procurada. Ela sugere nove vezes dois, por ter como resultado 18. Encontram então a figura, um retângulo 9 cm por 2 cm e iniciam a contagem do perímetro. Anny comenta com a Lavínia que a professora é esperta ao colocar no enunciado o dobro da área da figura1, pois ela pensou que o dobro da área da figura 1, que seria 18 cm^2, formaria um novo quadrado, e não uma outra figura, então ela só pensou em formar o quadrado e nem pensou no perímetro.

Seguem resolvendo a tarefa, agora formando uma figura com o triplo da área da figura 1. Lavínia afirma que é necessário acrescentar mais três quadradinhos, que representam a unidade que estão utilizando na área da figura 2. Anny corrige Lavínia dizendo que tem que acrescentar mais nove, pois fez o cálculo mentalmente do triplo de nove que é a área da figura 1 e afirma que é 27. Em seguida, questiona Lavínia sobre o resultado da multiplicação de nove por três, e Lavínia reponde que não sabe.

Anny então conta de três em três para mostrar que nove vezes três é 27. Em seguida, mostra animada que é só aumentar os quadradinhos da área da figura 2 para formar a área que procuram e afirma que o perímetro do retângulo formado é 24 cm e a área 27 cm^2. Elaboram a resposta escrita da tarefa concluindo que utilizaram a multiplicação e as medidas dos lados das figuras, aumentando os tamanhos até encontrarem o resultado e que, na figura 1, apenas utilizaram a multiplicação por um.

Nesta tarefa, a professora solicita respostas, buscando a compreensão das alunas para as dúvidas apresentadas na resolução da tarefa, levantou questionamentos, de forma a contribuir para as conclusões corretas das tarefas.

Seguem as respostas escritas e no Geoplano feitas pela dupla de Anny e Lavínia.

Figura 27 - Resposta escrita apresentada por Anny e Lavínia -Tarefa 3

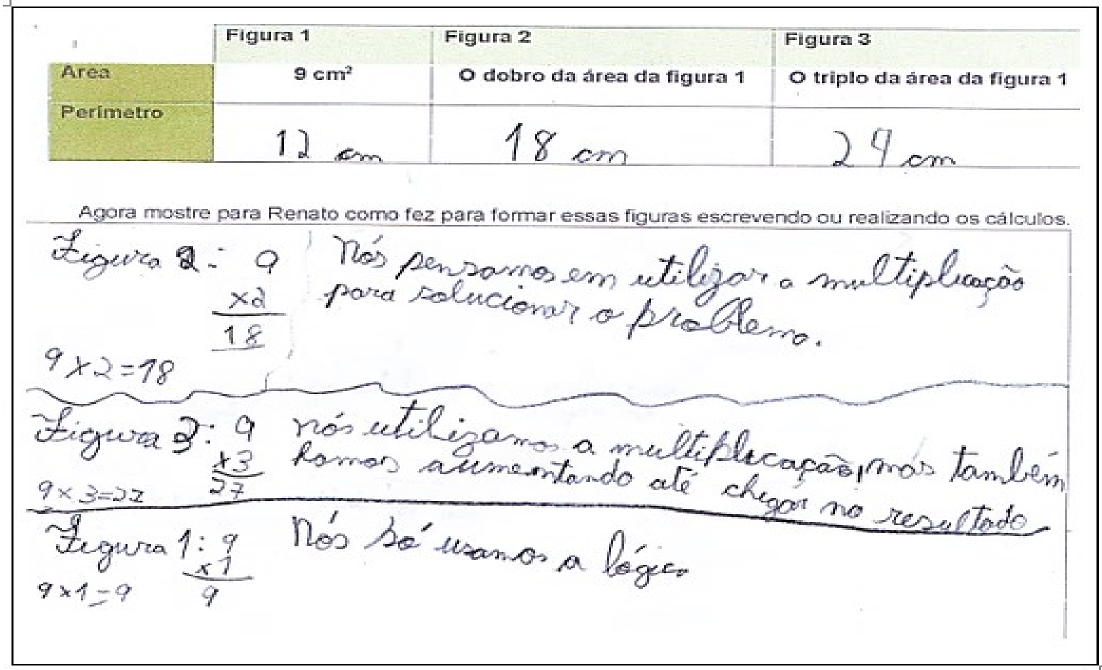


	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Área	9 cm^2	O dobro da área da figura 1	O triplo da área da figura 1
Perímetro	12 cm	18 cm	24 cm

Agora mostre para Renato como fez para formar essas figuras escrevendo ou realizando os cálculos.

Figura 2: 9 x2 18

9x2=18

Nós pensamos em utilizar a multiplicação para solucionar o problema.

Figura 3: 9 x3 27

9x3=27

nós utilizamos a multiplecação, mas também fomos aumentando até chegar no resultado

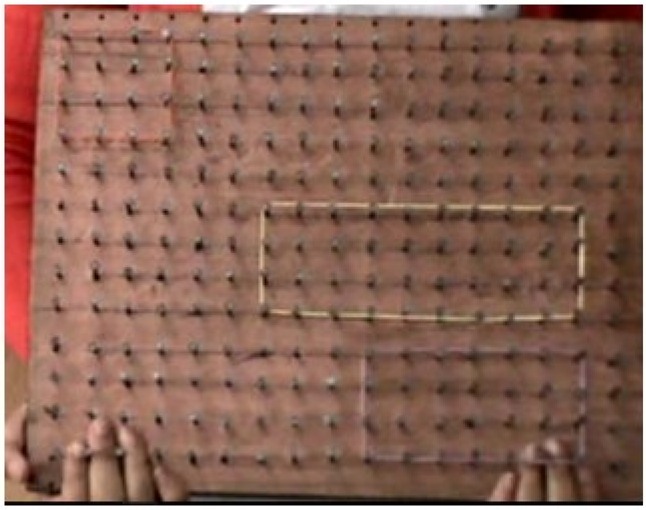
Figura 1: 9 x1 9

9x1=9

Nós só usamos a lógica

Fonte: Dados da pesquisa

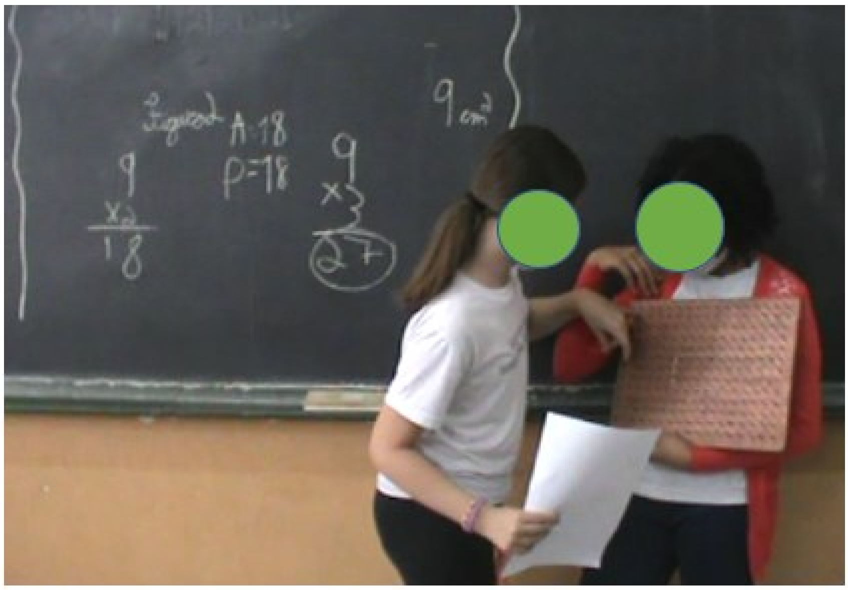
Figura 28 - Figuras geométricas formada no Geoplano por Anny e Lavínia para a resolução da tarefa 3



Fonte: Dados da pesquisa

A figura a seguir (Figura 29) mostra o momento em que as alunas explicam, para a turma, a resolução da tarefa realizada.

Figura 29 - Apresentação da tarefa 3 feita por Anny e Lavínia durante a plenária.



Fonte: Dados da pesquisa

No quadro a seguir (Quadro 15), estão organizados os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pela dupla Anny e Lavínia ao resolverem a tarefa, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito da Geometria Plana – Área e perímetro.

Quadro 15 – Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Anny e Lavínia

Trechos	**Processos de raciocínio matemático**	**Conceitos matemáticos utilizados**
Anny: Eu fiz um quadrado 3 por 3 que deu 9. Olha 1,2,3,4,5,6,7,8,9 agora a gente tem que somar o perímetro 3, 6, 9, 12 perímetro 12. Anny: O dobro da área da figura 1. Anny: O dobro 9 x 2 é igual a 18 igual. Lavínia: Anny a gente vai ter que aumentar mais um pouco para dar 18? Anny: É impossível fazer com 18. Lavínia: É uma figura! Lavínia: Aqui dá 16 olha! Mas aí teria que aumentar mais dois para dar 18 então não dá 18. Anny: 16 é impossível, não tenta fazer o 16. Lavínia: Será que é obrigatório fazer um quadrado? Anny: Sim, está na tarefa. Lavínia: Anny sabe uma coisa legal que a gente pode fazer, olhar na tabuada. Olha 6 vezes 3. Anny: Mas tem que ser um quadrado, no quadrado tem que ter todos os lados iguais.	Conjecturar/ Justificar	Anny apresenta duas conjecturas: uma ao afirmar que fez um quadrado de 3 cm por 3 cm para chegar à área 9 cm^{2,} e a segunda ao afirmar que é necessário somar os lados do quadrado para encontrar o perímetro, demonstrando denominar os conceitos relacionados ao cálculo da área e do perímetro das figuras planas. Anny também realiza uma conjectura ao informar à Lavínia que, para encontrar o dobro de uma quantidade, é necessário multiplicar essa quantidade por dois. Lavínia apresenta uma conjectura ao concluir que é preciso aumentar a área da figura para encontrar o dobro da área. Demonstra compreender o conceito de área das figuras planas. Anny forma uma nova conjectura quando afirma que não é possível formar um quadrado com área de 18 cm^2. Lavínia também apresenta uma conjectura ao explicar que devem formar uma figura qualquer, não especificamente um quadrado. Justifica a conjectura ao afirmar que, mesmo aumentando duas unidades de medida no quadrado de 16 cm^2, não se forma um outro quadrado com área 18 cm^2. Anny justifica sua conjectura ao afirmar que é impossível. Lavínia reafirma sua conjectura ao questionar a necessidade de formar um quadrado. Anny apresenta uma conjectura falsa ao afirmar que a tarefa pede um quadrado com o dobro da área da figura 1. Lavínia apresenta uma nova conjectura ao sugerir que pode usar a tabuada, ou seja, a multiplicação para encontrar as medidas dos lados da figura. Anny justifica sua conjectura ao afirmar que não é possível formar um quadrado

Anny: O dobro área, o dobro da área dessa figura. Anny: Então ela não precisa ser um quadrado. Lavínia: Agora tem que somar mais três. Anny: Tem que somar mais nove Lavínia. Anny: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, quanto que é 9 x 3 é igual a 27 não é? Anny: Lavínia! 9, 18, 27 ,36, 45. Espera é 27. Anny: Agora figura 2. Então coloca 9 x 3 = 27, nós utilizamos a multiplicação, também fomos aumentando até chegar no resultado.		com 18 cm^2, porque ele tem todos os lados iguais. Anny modifica sua conjectura inicial tornando-a verdadeira ao afirmar que a figura não precisa ser um quadrado, ela percebe que pode formar qualquer figura desde que tenha 18 cm^2 de área. Lavínia e Anny formam conjecturas ao argumentar sobre a possível resposta para a tarefa 3. Lavínia forma uma conjectura falsa dizendo que é necessário somar três unidades na área da figura 1 para se obter o dobro dessa área. Anny refuta a conjectura de Lavínia ao afirmar que é necessário acrescentar mais nove unidades e justifica dizendo que nove vezes três é 27, ou seja, para calcular o tripo é necessário multiplicar por três a área da figura 1. Ela justifica novamente ao contar de três em três para mostrar como se calcula o triplo da área que a tarefa pede. Ao finalizam o diálogo, apresentam uma justificativa para o raciocínio que tiveram, mencionando que utilizaram a multiplicação e a adição para a resolução da tarefa.

Fonte: Autoria própria

4.3.2 Dupla 1 – Paula e Renata – Tarefa 3

Trecho 1 do diálogo

Renata: Vamos primeiro fazer o quadrado.
Renata: O quadrado com 9 cm quadrados de área, pronto fiz um.
Paula: Fiz também.
Renata: Não está com 9 de área.
Paula: Espera fiz errado.
Paula: 9 cm de áreas.
Renata: Tá. Agora vamos contar 1,2, 3,4, cinco, ... 12 perímetros.
Paula: Perímetro 12.
Renata: Professora vem aqui por favor.
Renata: Eu não sei se é para fazer o dobro do 9 ou de 12.
Paula: Da área, o dobro da área da figura 1, área.
Paula: 15.
Renata: Não! O dobro! O dobro de 9 é 18, o dobro de 12 é 24.
Paula: Tá. 1,2,3,4, 5...18. Certinho
Renata: Olha, mas a gente não sabe se é dessa ou do 12.

Paula: O dobro da área Renata.
Renata: O dobro da área da figura 1. Ah! Está bom.

A dupla inicia a tarefa formando quadrados com 9 cm^2 de área. Cada uma forma um quadrado. Paula observa que o seu quadrado está com dimensões erradas e já corrige. As duas contam o perímetro do quadrado formado, chegando a 12 cm, a resposta correta. Renata tem uma dúvida ao tentar entender o que a tarefa pede: Se a próxima figura que será formada precisará ter o dobro da área ou o dobro do perímetro da figura 1. E chama a professora. Paula diz que é o dobro da área da figura 1 e que, para isso, é necessário aumentar dois para ter o dobro. Ela não compreende que, para calcular dobro, no caso da tarefa que estão resolvendo, é necessário multiplicar a medida da área por dois, e não somar duas unidades como ela afirma. Logo em seguida, diz que a resposta será quinze. Renata corrige Paula explicando que o dobro de nove é 18 e que o dobro de doze é 24, se referindo à área e ao perímetro do quadrado formado. Paula forma a figura com área 18 cm^2, mas Renata ainda tem dúvida em relação ao que a tarefa pede, e Paula afirma que é o dobro da área. Renata aceita a explicação dada pela companheira.

Trecho 2 do diálogo

Renata: O triplo da área, calma o triplo de 9 é 27.
Paula: 27?
Renata: é 27.
Paula: 27 cm.
Renata: 27 cm quadrados, se fala assim.
Paula: Agora a gente vai multiplicar.
Paula: Pera, vamos somar 12 com 9.
Renata: Não o dobro de 12 é 24, o triplo de 24 não sei vamos fazer vezes 3.

A dupla continua resolvendo a tarefa após encontrar 18 cm^2 como o valor do dobro da área da figura 1. Elas tentam encontrar o triplo do valor da área dessa mesma figura, como pede a tarefa. Renata diz que o dobro de nove é 27. Paula, aparentemente, dúvida da afirmação de Renata, mas Renata confirma que é mesmo esse valor. Então, Paula diz que a forma correta de dizer é 27 centímetros. Renata corrige Paula apresentando a forma correta de se fazer a leitura, sendo 27 centímetros quadrados, por se tratar da área da figura. Paula menciona que poderiam utilizar a multiplicação, mas logo em seguida apresenta outra sugestão: somar a área com o perímetro da figura 1, que são respectivamente 9 cm^2 e 12 cm; demonstrando que ainda não compreendeu como calcular o dobro e o triplo das áreas pedidas. Renata não concorda com Paula, dizendo que o dobro de doze, que é o perímetro do quadrado, é 24 e que, o triplo de 24, ela não sabe calcular mentalmente, mas dá para calcular multiplicando por 3.

Trecho 3 do diálogo

Renata: Professora vem aqui por favor.
Renata: A gente já colocou e aumentou mais para fazer o triplo.
Professora: Então, vamos ver como vocês fizeram a figura com o dobro da área.
Renata: Calma, me dá aqui o elástico e o Geoplano Paula.
Paula: Aqui tem 18.
Renata:1,2,3,4, 5, ...16,17,18 só ia dar dois desse assim por isso que não faz sentido porque não é um quadrado.
[Ela mostra que conseguiu fazer dois retângulos.]
Professora: Mas está falando que tem que ser um quadrado? Vocês conseguiram formar um quadrado?
Paula: Nós fizemos.
[Se refere ao primeiro quadrado.]
Professora: Vocês conseguiram formar um quadrado com área de 18 cm quadrados?
Renata: Não.
Professora: O que vocês conseguiram formar com área de 18 cm quadrados?
Paula: Retângulo.
Professora: Você entendeu? Vocês precisam agora calcular o dobro da área e ver quando dobra a área da figura qual figura forma, qual perímetro tem.
Renata: Assim, olha professora!
Professora: Essa é a sua figura dois, agora então você vai fazer as comparações.
Renata: 1,2,3,4…
Professora: Esse era um quadrado, quando dobrou a área dele o que aconteceu, o que vocês podem me dizer sobre a área dele?
Renata: Mas é também 18.
Professora: Então o que aconteceu quando dobrou a área, qual é o perímetro?
Professora: Coloca lá. Agora vocês vão fazer essa análise, do quadrado inicial com as duas figuras, precisam comparar.

Neste trecho, Renata solicita a presença da professora. Logo que a professora chega, ela explica como obtiveram o triplo da área utilizando o Geoplano, no caso, aumentou a área da figura 1. A professora inicia as argumentações com a dupla, buscando compreender quais são as suas dúvidas. Pede para elas mostrarem como obtiveram o dobro da área, e Renata mostra, no Geoplano, como fizeram. Paula conta a área da figura e afirma que tem 18 cm^2, ou seja, o dobro da área da figura 1. Renata mostra que conseguiu formar somente dois retângulos com essa área, e que não faz sentido, pois queria formar um quadrado. A professora questiona se é mesmo necessário formar um quadrado e pergunta se conseguiram formá-lo com a área de 18 cm^2. Paula diz que sim, mas se referindo a primeira figura, ou seja, o quadrado de 9 cm^2 do início da tarefa. Renata compreende a pergunta e responde que não conseguiram. A professora continua os questionamentos, perguntando qual figura conseguiram formar com o dobro da área da figura 1. Renata responde que conseguiu formar o retângulo. A professora continua explicando que, após encontrarem o dobro da área, devem formar a figura, observar que figura formaram e calcular o perímetro. Renata mostra o retângulo formado. Então, a professora diz que essa é a figura 2, formada com o dobro da área da figura 1. Explica que antes era um quadrado e, após dobrar a área, elas precisam comparar e dizer o que aconteceu com a área e o perímetro, ou seja, se continuam com a mesma medida e pede para que façam as análises da resolução da tarefa.

A ação da professora neste momento foi importante, para organizar os dados encontrados pela dupla, pois elas conseguiram calcular o dobro e triplo da área das figuras, encontrar a área e o perímetro, no entanto, não conseguiam definir como utilizar esses dados, e nem como aplicar nas suas respostas. Após a intervenção e questionamentos da professora, a dupla conseguiu compreender seus cálculos e continuar a resolução da tarefa.

Trecho 4 do diálogo

Renata: Tá é o triplo.
Paula: 27.
Renata: 18, 19, 20, 27. Não!
Paula: Aqui olha Renata, não precisa ser quadrado.
Paula: Então nem retângulo precisa.
Renata: Sim.
Renata: Mas tem que ser uma figura que exista.
Renata: Agora tem que ter 27 de área.
Renata: Deixa eu ver.
Paula e Renata: 1,2,3,4, 5...20.
Paula: 21.
Renata: Não 20, 20 e meio. Tá deixa eu ver.
Paula: Calma aqui não tem 20 e meio.
Renata: Vamos comprar 1,2,3,4... 20
Paula e Renata: 20 e meio 21.
Paula: 26, 27. Agora sim.
[Formaram o retângulo no Geoplano.]
Renata: Não, mas eu não quero essa figura, eu quero uma figura diferente.
[Formaram o retângulo no Geoplano.]
Paula: Agora sim vai dar, que figura é essa? Essa figura não existe.
Renata: Existe sim.
Paula: Olha de 27, acho que eu consegui fazer e existe? 1, 2, 3, ... 27. Deu certinho 27.
Renata: Nossa ficou perfeito! Tá agora vamos contar o perímetro.
Renata e Paula: 1,2, 3,20.
Renata: 20.
Paula: É 20, certinho.
[Formaram o pentágono no Geoplano.]
Renata: Era esse que estava faltando.
Paula: Como a gente vai desenhar uma figura que não existe.
Renata: Eu sei que existe.
Paula: Então qual é o nome dela.
Renata: Não sei.

Após as explicações da professora, a dupla inicia a construção da figura com o triplo da área da figura 1, já sabendo que o triplo de nove é 27. Paula afirma que não precisa necessariamente formar quadrados, e Renata confirma. Paula então conclui que não precisa ser necessariamente um retângulo também, provavelmente porque entendeu que pode formar figuras planas, que sejam polígonos e que tenham 27 cm^2 de área. Formam as figuras geométricas e contam suas áreas a procura de uma figura que tenha a área desejada. Conseguem formar um retângulo conforme mostra a Figura 30. Renata não fica contente, porque gostaria de formar figuras com formatos diferentes do retângulo e do quadrado. Paula forma uma outra figura e mostra para a companheira, afirmando que não existe. A figura formada por elas é um pentágono irregular. Os pentágonos são formados por cinco segmentos de reta consecutivos.

Renata diz que existe, fica contente por ser uma figura com formato diferente e diz que é perfeita. Em seguida, contam o perímetro. A figura tem 27 cm^2 de área e 20 cm de perímetro, conforme mostra a Figura 30. Renata diz que era a figura que faltava, mas Paula ainda tem dúvidas se essa figura existe mesmo e faz um questionamento sobre o nome dela. Renata continua afirmando que existe, mas não sabe o nome da figura formada. Durante a plenária, a professora informou à dupla e à turma que o nome da figura que formaram era um pentágono. O cálculo algébrico da área dessa figura não foi ensinado, porque estavam utilizando a contagem de quadradinhos no Geoplano para o cálculo e porque o conceito de área do pentágono não faz parte dos conteúdos do 5º ano do Ensino Fundamental, somente os conceitos relacionados ao cálculo da área do retângulo e do quadrado. É importante destacar também que, para o cálculo do perímetro, a unidade de medida que estão utilizando é a distância entre os pregos, mesmo sabendo que a distância entre os pregos na diagonal é maior, como já mencionado no início da descrição da tarefa 2.

Trecho 5 do diálogo

[Elas começam a fazer os cálculos que utilizaram nas resoluções]
Renata: O que é isso? Não é fórmula!
Paula: É sim.
Paula: 9 centímetros.
Paula: 9, 18, 27.
Renata: Deixa eu testar um negocinho aqui rapidinho. Quero fazer diferente. Tem 18 na tabuada do 3?
Paula: Tem sim.
Renata: Tem por 6.
Renata: Eu consegui, consegui, é só você fazer o número que a gente quer que é o 9 e a gente quer o dobro dele e eu dividi por 3 que deu 3. Deu a conta exata. Daí desse eu peguei o 9.
Paula: Para!
Renata: 9 menos 3 que deu 6 daí eu peguei o resultado dessa e dessa que deu 18. Eu quero algo diferente, sabe! Conjectura
Renata: Vou te deixar louca.
Paula: Tá, mas aqui? Aqui tem que fazer do 27.
Renata: Professora vem aqui.

Renata: Vou tentar formar o de 27, e eu vou fazer os cálculos, eu posso te questionar e você me questionou.
Renata: Sabe que eu estava pensando de fazer algo diferente.
Renata: Porque olha pensa, 9 x 2 = 18 ia ser só muito sem graça e aí quero assim algo interessante.

Continuam a tarefa apresentando os cálculos matemáticos que utilizaram na resolução. Renata faz algumas contas e questiona Paula se seria uma fórmula o que ela está usando, provavelmente porque durante as aulas foi ensinado a fórmula para calcular a área e o perímetro do retângulo e do quadrado. Paula confirma que sim. Provavelmente, Renata está utilizando algumas operações como tentativa de entender como calcular o dobro e o triplo da área da figura 1. Elas argumentam sobre a área das figuras, mencionam 9, 18 e 27. Renata, sempre querendo fazer algo diferente, pensa na tabuada, ou seja, na multiplicação para ajudá-la a representar matematicamente a área da figura formada, o retângulo com 18 cm^2 de área. Questiona a companheira se há 18 na tabuada do três e ela confirma que sim. Renata conclui que tem por seis: três vezes seis, que é igual a 18. Argumenta sobre o cálculo que utilizou, diz que é só pegar o número que quer o dobro e dividir por três que se obtém um número exato. Em seguida, ela subtraiu três de nove e obteve, como resultado, seis. Na sequência, multiplicou seis por três e encontrou o valor 18 que precisava. A sequência dos cálculos feitos por ela: (9: 3) = 3, (9 – 3) = 6, (6 x 3) =18. Os cálculos foram tentativas de encontrar o valor das dimensões e da área do retângulo que formaram no Geoplano. Ela não percebe que pode multiplicar altura da figura pelo comprimento para obter a área ou dividir uma das dimensões pela área que encontra a outra dimensão da figura. Paula não compreende a explicação e pergunta sobre a área com 27 cm^2. Renata brinca dizendo que vai deixá-la louca. Em seguida, chama pela professora e começa a pensar no próximo cálculo, dizendo à Paula que elas podem questionar uma à outra e continua afirmando que quer fazer algo diferente, que somente fazer nove vezes dois seria “sem graça”, se referindo à forma de encontrar o valor 18.

Trecho 6 do diálogo

Renata: Professora a gente queria algo diferente, então a gente não queria só multiplicar, daí eu fiz a divisão 9:3 que é 3 e fica zero eu peguei esse e tirei desse e deu seis e peguei esse resultado desse que deu 18, pode assim?
Professora: Você pensou em dividir por quê?
Renata: Porque eu ia ver se dava certo.
Professora: Mas dava certo para quê? O que você estava procurando quando dividiu 9 por 3?
Renata: Eu ia fazer qualquer conta.
Professora: Tá, mas você estava procurando o quê, o valor da área, do perímetro, o valor do lado, quando você estava fazendo a divisão. Você pensou em encontrar o quê?
Renata: O resultado 18.
Professora: O resultado 18 é o que?

Renata: Dezoito é o dobro de nove.
Professora: Muito bem, então você vai ter uma área com 18 cm^2 e o perímetro 18? É isso? E qual é essa figura?
Renata: Foi essa.
Professora: Então essa figura vai ter quanto de lado para que a área dê 18?
Renata: 3.
Professora: E aqui?
Renata: Hum! Calma! 4,5,6.
Professora: Então que figura é essa que formou?
Renata: Um "paralelepípedo"
Professora: É um retângulo, um paralelepípedo é uma figura não plana tá. Entendeu?
Renata: Sim.
Professora: Então você obteve um retângulo quando você quis formar a área 18 centímetros quadrados, você conseguiu formar a mesma figura inicial.
Renata: Não.
Renata: É que eu pensei que se eu dividir por 2 vai dar outro resultado que ia dar um, se eu dividisse por 4 ia sobrar e ser o resultado maior.
Professora: Aí você foi dividindo até encontrar o dezoito?
Renata: Esse com esse e multipliquei que deu 18.
Professora: Esse 18 você estava procurando a área ou o perímetro?
Renata: A área.
Renata: Que era para multiplicar esse [lado] por esse [lado] e esse por esse, que vai ser agora.
Professora: Os três aqui foi tentativa é isso?
Renata: Sim.
Professora: O daqui foi tentativa.
Renata: Primeiro eu fiz com três e não deu certo.
Professora: Conseguiu montar no Geoplano?
Renata: Sim.
Professora: E que figura formou?
Paula: Um retângulo.

Na sequência desse diálogo, a professora busca, a partir de questionamentos e explicações fazer Renata compreender como encontrou os cálculos já mencionados acima.

Renata inicia o diálogo mostrando os cálculos que fez para chegar à medida de 18 cm^2. A professora pergunta por que ela utilizou a operação de divisão, e ela responde que queria encontrar essa medida. A professora questiona sobre o que estava procurando ao dividir nove por três, e ela responde que estava fazendo tentativas. A professora insiste e pergunta se ela estava procurando a medida da área, do perímetro ou o valor dos lados da figura, e ela diz que queria encontrar o resultado 18. A professora procura saber se ela sabe o que representa essa medida na figura. Renata responde que é o dobro de nove. A professora explica que 18 cm^2 representa a medida da área e o perímetro da figura formada também é 18 cm. Em seguida, pergunta qual é a figura formada com essas medidas, pois elas tinham formado três figuras no Geoplano. Renata mostra a figura e a professora pergunta quanto mede os lados. Ela responde 3 cm e 6 cm. A professora questiona sobre o nome da figura. Renata responde "paralelepípedo", ainda apresentando dúvida no conceito relacionado à nomenclatura de algumas formas planas e não planas. A professora corrige Renata, explicando que a figura é um retângulo e não um paralelepípedo, porque o paralelepípedo é uma forma não plana.

A professora segue com os questionamentos, buscando a compreensão de Renata sobre o cálculo da área das figuras planas e as diferenças entre elas, no caso, o quadrado e o retângulo. A professora pergunta se as duas figuras formadas são iguais à primeira figura. Ela responde que não. Renata então explica que dividiu a área de 18 cm^2 por dois e obteve a área da figura 1 e que também tentou dividir por quatro, mas a conta não seria exata e precisaria de um valor maior. A professora pergunta se ela foi dividindo até conseguir encontrar 18, e ela afirma que multiplicou a medida dos lados seis e três e obteve, como resultado, 18. A professora instiga a aluna, buscando saber se consegue diferenciar a área do perímetro, porque as duas medidas têm 18 como resultado. Ela responde corretamente que encontrou a área, parecendo ter compreendido o cálculo da área do retângulo. Explica que, nas outras figuras, falta multiplicar os lados para encontrar o resultado da área. A professora pergunta então se todas as figuras foram formadas a partir de tentativas, ela responde que sim. Algumas figuras estavam desenhadas no papel, e a professora pergunta se conseguiram formar também no Geoplano. Elas informam que sim. A professora pergunta novamente sobre o nome da figura que formaram e elas respondem corretamente que foi um retângulo.

Trecho 7 do diálogo

Renata: Ai já vi que deu um retângulo pra cima, muito pra cima, esse está bem difícil, a gente precisa que tenha 27. Eu vou multiplicar por 4.
Paula: Pera 9 x 3, dá 27.
Renata: Mais onde que vai dar três nessa aqui?
Paula: 9 x 3 é 27.
Renata: 9 x 3, deixa eu ver 27. Tá, mas onde a gente vai arranjar o 27. Calma.
Paula: Na tabuada a única…
Renata: Quanto eu preciso tirar para dar 3. Calma eu tenho 18. Faz oito na sua mão.
Paula: 8?
Renata: É quanto precisa tirar para dar 3.
Renata: Preciso de 15.
Paula: 15.
Renata: Aqui deu 3, calma. Essa deu 3 a gente vai precisar de mais cálculos. Tá essa deu três e essa deu 9.
Renata: 3 x 9 é 27.

Neste trecho do diálogo, elas argumentam sobre os cálculos que fizeram para chegar à medida da área e do perímetro na figura com o triplo da área 1 para fazer a resposta escrita.

Renata observa um outro retângulo construído, comenta que vai ser difícil chegar à área com 27 cm^2 e diz que vai multiplicar por quatro, ou seja, vai buscar na tabuada do quatro a medida procurada. Paula então percebe que nove vezes três resulta em 27, e Renata questiona qual lado teria a medida 3 cm. Paula insiste na afirmação anterior, mas Renata não compreende como vai apresentar o cálculo para chegar no valor 27, e Paula continua afirmando que é na tabuada, ou seja, basta utilizar as dimensões 3 cm e 9 cm. Renata continua buscando outros cálculos para validar a medida, pois quer fazer de forma "diferente" como ela mesmo diz. Então, Renata pensa na quantidade 18, provavelmente por esta quantidade estar relacionada à área da figura formada anteriormente. Ela pede para Paula levantar oito dedos e pergunta o quanto precisa tirar para obter três. Então, conclui que é quinze, ou seja, (18 – 15) = 3, chegando à resposta que queria, o número três, pois três vezes nove é igual a 27, conforme mostra a Figura 30. Ela confirma que a medida dos lados da figura são 3 cm e 9 cm.

Renata busca formas de expressar matematicamente as medidas dos lados e a medida da área do retângulo que formaram. Ela acerta apenas no cálculo da área, quando multiplica nove por três. Renata e Paula poderiam ter pensado em dividir a medida da área, 27 cm^2, pela medida de um dos lados de 3 cm e encontraria a medida do outro lado de 9 cm ou dividir a medida da área por 9 cm para encontrar a medida de 3 cm, pois já sabiam que três vezes nove é 27. Os cálculos realizados a partir de tentativas por Renata foram considerados, pois ela mostrou ter compreendido os conceitos de área e perímetro e o cálculo da área a partir da multiplicação dos lados da figura, destacando o retângulo e o quadrado.

Seguem as respostas escritas e no Geoplano da tarefa 3 feitas pela dupla Paula e Renata.

Figura 30 - Resposta escrita apresentada por Paula e Renata -Tarefa 3

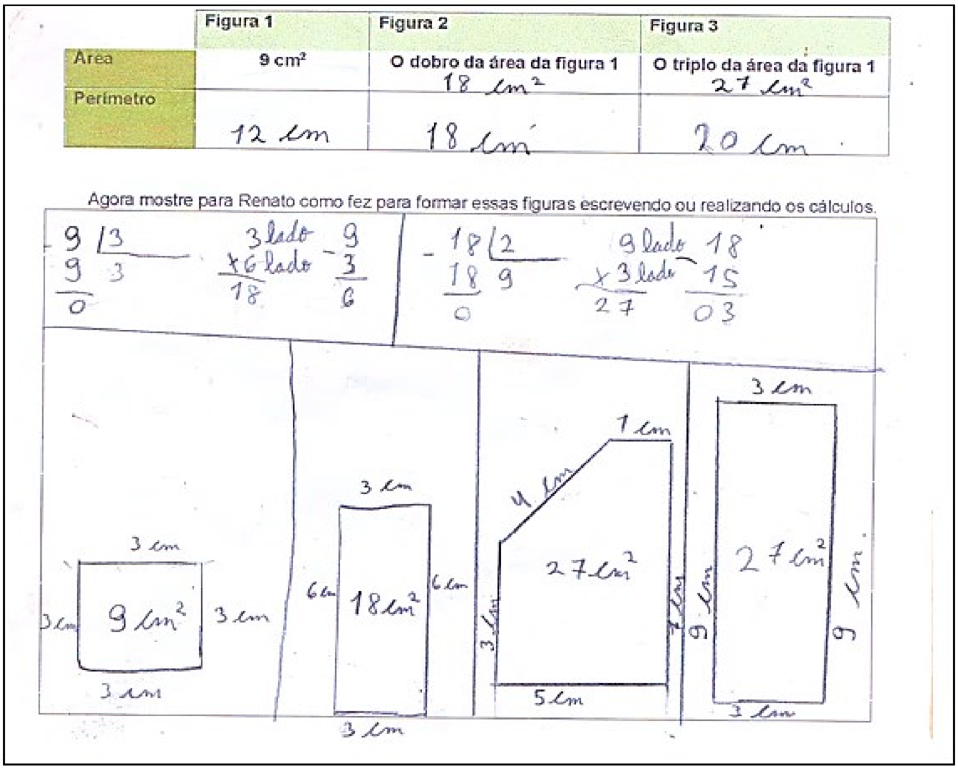
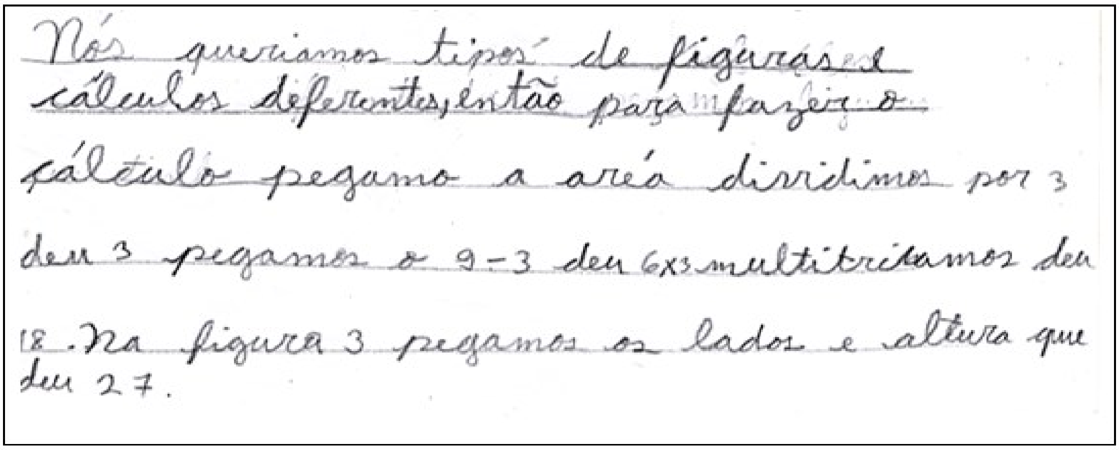


	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Área	9 cm²	O dobro da área da figura 1 18 cm²	O triplo da área da figura 1 27 cm²
Perímetro	12 cm	18 cm	20 cm

Agora mostre para Renato como fez para formar essas figuras escrevendo ou realizando os cálculos.

Fonte: Dados da pesquisa

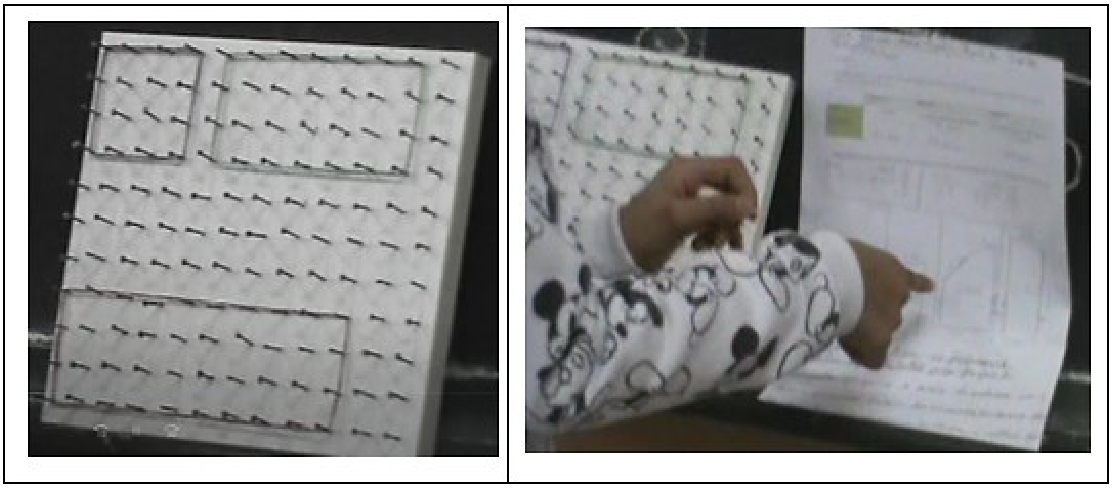
Figura 31 - Resposta escrita apresentada por Paula e Renata -Tarefa 3


Nós queriamos tipos de figuras e cálculos diferentes, então para fazer o cálculo pegamo a areá dividimos por 3 deu 3 pegamos o 9-3 deu 6x3 multitricamos deu 18. Na figura 3 pegamos os lados e altura que deu 27.

Fonte: Dados da pesquisa

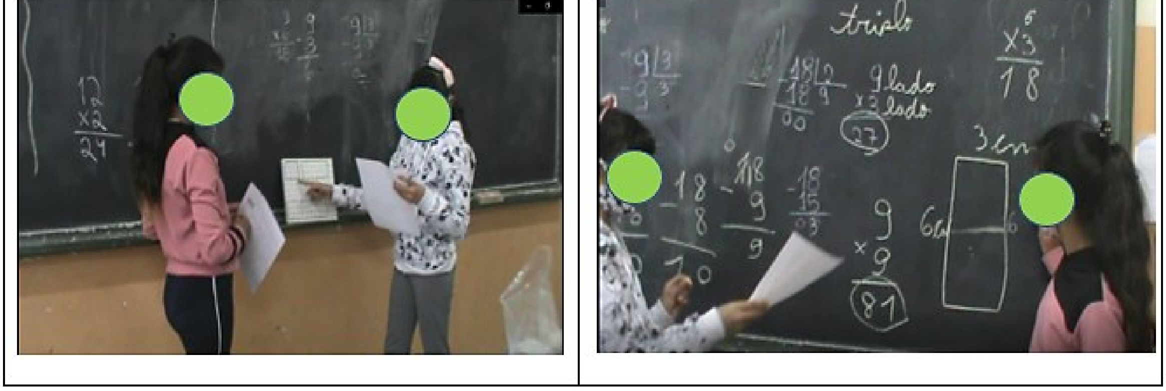
As figuras a seguir (Figura 32 e 33), as quais foram retiradas da filmagem, mostram o momento da plenária, ou seja, o momento em que as alunas apresentavam suas resoluções para a turma.

Figura 32 - Figuras geométricas formada no Geoplano por Paula e Renata para a resolução da tarefa 3



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 33 - Apresentação da tarefa 3 feita por Paula e Renata durante a plenária



Fonte: Dados da pesquisa

No quadro a seguir (Quadro 16), estão organizados os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pela dupla Paula e Renata ao resolverem a tarefa 3, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito da Geometria Plana – Área e perímetro.

Quadro 16 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata

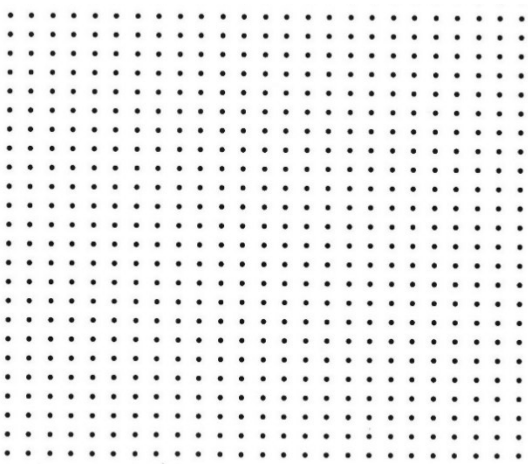
Trechos	Processos de raciocínio matemático	Conceitos matemáticos utilizados
Paula: Da área, o dobro da área da figura 1, área! O dobro vai ter que aumentar dois. Renata: Não! O dobro! O dobro de 9 é 18, o dobro de 12 é 24. Paula: O dobro da área Renata. Renata: O dobro da área da figura 1. Ah! Está bom.	**Conjecturar/ Justificar**	Paula forma uma conjectura ao compreender que é preciso aumentar duas unidades de medidas para obter o dobro da área da figura 1. Sua conjectura é inválida, pois demonstra não dominar o conceito de dobro. Renata refuta a conjectura de Paula, apresentando os valores corretos do dobro da área e do perímetro das figuras formadas. Renata demonstra compreender o conceito relacionado ao dobro de uma quantidade. Na sequência Paula, apresenta a conjectura de que a tarefa pede o dobro da área.
Renata: O triplo da área, calma o triplo de 9 é 27. Paula: Agora a gente vai multiplicar. Paula: Pera, vamos somar 12 com 9. Renata: Não o dobro de 12 é 24, o triplo de 24 não sei vamos fazer vezes 3.		Renata apresenta uma conjectura válida ao afirmar que o triplo de nove é 27. Paula também forma uma conjectura ao dizer que, para calcular o triplo, é necessário utilizar a operação de multiplicação, aparentando ter compreendido o conceito relacionado ao cálculo do triplo de uma quantidade, mas, em seguida, faz uma nova conjectura sugerindo a soma da área e do perímetro da figura 1 para obter o triplo da área da figura procurada. Essa conjectura é inválida e demonstra que ela não compreende o conceito relacionado ao cálculo do triplo. Renata refuta a conjectura de Paula mostrando entender o conceito de triplo de uma quantidade, necessário para a resolução de parte da tarefa.
Paula: Aqui olha Renata, não precisa ser quadrado. Então nem retângulo precisa. Renata: Sim, mas tem que ser uma figura que exista. Renata: Não, mas eu não quero essa figura, eu quero uma figura diferente.		Paula forma uma conjectura ao perceber que não é necessário formar somente quadrados e retângulos, mas figuras que tenham o dobro da área do quadrado inicial, e que figuras com formatos diferentes podem ter a mesma área. Renata concorda com Paula, validando a conjectura ao justificar que precisa ser uma figura que exista.

Paula: Agora sim vai dar, que figura é essa? Essa figura não existe.		Paula, ao construir uma figura diferente do quadrado e do retângulo formado, apresenta a conjectura, dizendo que não existe a figura que formaram. Essa figura é um pentágono, elas ainda não dominam o conceito relacionado à nomenclatura das formas planas a qual depende da quantidade de lados para ser nomeada.
Renata: Eu consegui, consegui, é só você fazer o número que a gente quer que é o 9 e a gente quer o dobro dele e eu dividi por 3 que deu 3. Deu a conta exata. Daí desse eu peguei o 9. Renata: 9 menos 3 que deu 6 daí eu peguei o resultado dessa e dessa que deu 18. Eu quero algo diferente, sabe!		Renata forma uma conjectura para calcular, de forma diferente, a área e o valor dos lados das figuras que formou: "é só você fazer o número que a gente quer que é o 9... o dobro dele e eu dividi por 3 que deu 3. Daí desse eu peguei o 9. 9 menos 3 que deu 6 daí eu peguei o resultado dessa e dessa que deu 18". Ela utilizou, através de tentativas, os conceitos de divisão, multiplicação e subtração para obter o resultado que precisava e o conhecimento que tinha sobre área das figuras planas.
Renata: Ai já vi que deu um retângulo pra cima, muito pra cima, esse está bem difícil, a gente precisa que tenha 27. Eu vou multiplicar por 4. Paula: Pera 9 x 3, dá 27.		Renata, ao buscar a medida de área 27 cm^2, forma uma conjectura inválida, dizendo que vai multiplicar por quatro, ou seja, buscar, na tabuada do quatro, o valor 27. Paula refuta essa conjectura e apresenta uma válida ao afirmar que nove vezes três é igual a 27, mostrando que a multiplicação que precisam fazer é por três, e não por quatro.

Fonte: Autoria própria

4.4 TAREFA 4

1) Construa várias figuras com o perímetro igual a 8 cm. Todas as figuras tem a mesma área? O que você pode concluir?



4.4.1 Dupla 1 – Anny e Lavínia – Tarefa 4

Trecho 1 do diálogo

Lavínia: Que figura você está pensando em fazer?
Anny: Só um pouquinho deixa eu pensar. Olha fiz uma figura com perímetro 8. Eu acho que é um retângulo.
Anny: É retângulo não é Lavínia?
Lavínia: Sim**,** agora faz um quadrado.
Anny: Eu acho que eu fiz a mesma figura só virei ela de ponta cabeça.
Anny: 1,2,3,4,5,6,7,8.
Lavínia: Então eu pensei em fazer uma figura assim 1,2,3,4,5,6,7,8. deu errado.
Anny: Mas deu 8, 8 é o certo.
Lavínia: É, mas aí vai ficar pequeno.
Anny: Professora, vem aqui por favor. Isso aqui é exato né, esse aqui?
[Anny mostra, no losango, os quadradinhos inteiros e quadradinhos que são metades.]
Professora: Para contar a área aqui é um inteiro, agora esse mais esse aqui, dá um inteiro esse mais esse outro inteiro.
Anny: Aqui é 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, olha então tá certo.
Professora: Sim. E esse é o perímetro?
Anny: Isso!
Lavínia: Ficou legal! Gostei! Parabéns!

A dupla Anny e Lavínia iniciam a resolução da tarefa dialogando sobre quais figuras iriam formar. Anny pede um tempo para formar a figura. Em seguida, mostra o retângulo com perímetro 8 cm. Na sequência pede para Lavínia confirmar se é realmente um retângulo. Ela confirma e sugere que Anny faça um quadrado. Anny, após construir uma figura, diz "só virei ela de ponta cabeça", provavelmente, ao tentar fazer o quadrado, ela coloca o elástico, que representa os segmentos de reta, na posição diagonal e faz um losango, como mostra a Figura 34. Ela demonstra não conhecer essa figura, confirma a medida do perímetro contando no Geoplano e mantêm a figura construída. Lavínia constrói uma figura e diz que ficou errada. Anny confere o perímetro, que mede 8 cm, e diz que está correta. Lavínia, ainda insegura, diz que a figura ficou pequena: ela construiu um quadrado 2 cm por 2 cm. Anny chama a professora, pois está com dúvida para contar a área do losango que fez. Mostra para a professora os quadradinhos inteiros, pergunta se eles contam como exatos, ou seja, se conta como uma unidade de área e pergunta como conta os outros que estão separados ao meio pelo elástico. A professora afirma que os inteiros contam como uma unidade de área. Na sequência, mostra os quadradinhos separados ao meio e explica que duas metades formam uma unidade de área, ou seja, um quadradinho. Ela demonstra compreender e conta a área do losango, afirmando ser 8 cm^2.

Trecho 2 do diálogo

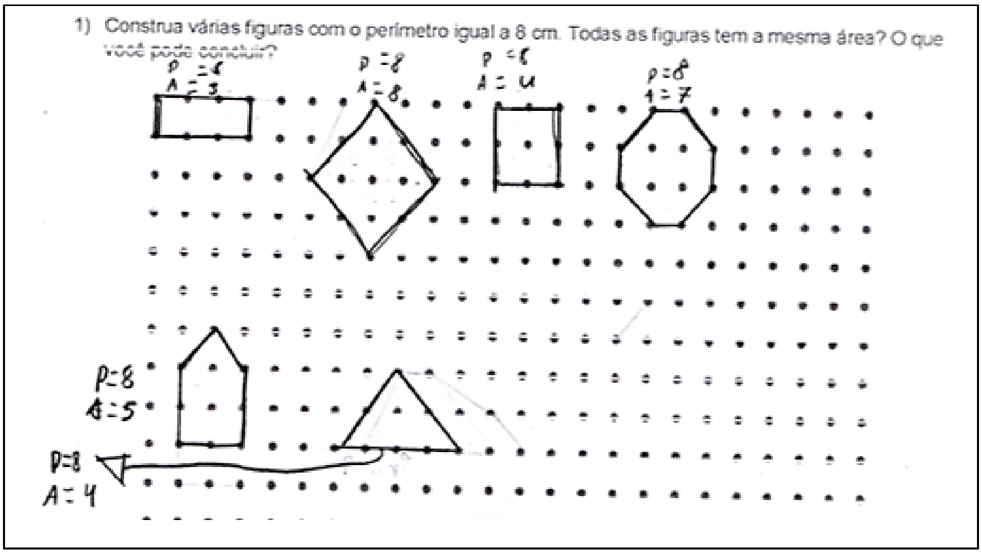
Anny: Vamos ver o que dá oito, 1 vezes 8 é 8 então…
Anny: 1,2,3,4,5,6,7,8.
Lavínia: Anny isso não é uma figura.
Anny: Acho que não é, melhor não.
Lavínia: Professora, a Anny fez isso aqui e perguntou se é uma figura?
Professora: Não meu amor essa é uma reta.
Anny: Mas deu oito professora, olha 1,2,3,4,5,6,7,8.
Professora: Uma forma plana tem que ter altura e comprimento e essa figura só tem comprimento.
Lavínia: Mas parabéns pela observação Lavínia.
Lavínia: Olha outra figura com 8. 1,2,3,4,5,6,7,8.
Anny: Então vai fazendo uma figura que vem, a sua mente e depois vai baixando até dar, assim que eu fiz. Olha só que bonito. Vou fazer uma pizza.
[Diz para diminuir a medida do perímetro.]
Anny: Eu fiz oito, deu oito. Mas vamos colocar ao contrário né?
Lavínia: Ah! Não! Deixa eu contar essa aqui que eu fiz. 1,2,3,4,5,6,7,8.
Anny: Olha 1,2,3,4,5,6,7,8 eu quis fazer um pedaço de pizza.
Anny: Fiz outra com 8. É tipo um trapézio só que com dois.
Lavínia: Fiz um quadrado 2 por 2.
Anny: É 2 por 2. Agora vamos contar a área e o perímetro.
Anny: Então temos seis figuras.
Lavínia: Coloca P para perímetro e A para área. Vamos contar a área e o perímetro.
Anny: Vamos concluir então.
Anny: Todas as figuras não tem a mesma área. Podemos concluir que cada uma das figuras tem sua área e perímetro.

Neste trecho do diálogo, elas iniciam com um questionamento sobre a figura formada por Anny no Geoplano. Anny inicia o diálogo dizendo que uma vez oito é oito e faz uma figura no Geoplano, Lavínia interrompe Anny afirmando que não é uma figura o que ela formou. Anny também fica com dúvida, e chamam a professora. Lavínia mostra a figura que formou e questiona se pode ser ou não uma figura. A professora explica que ela formou uma linha reta. Anny insiste e diz que deu 8 cm. A professora explica que, para ser uma figura plana, ela deve ter altura e comprimento e que a figura formada só tem comprimento. A professora procura explicar, de uma forma que as alunas do 5º ano do Ensino Fundamental compreendam, que na reta não há como calcular a área e o perímetro. Uma explicação mais adequada seria que a reta é um elemento da Geometria Plana formada pela união de infinitos pontos e possui comprimento, mas não possui largura e, para a tarefa, elas precisam formar figuras planas que sejam polígonos. A professora parabeniza Lavínia pela observação. Lavínia mostra que conseguiu formar mais uma figura com perímetro 8 cm. Anny compartilha com Lavínia como pensa para formar as figuras, diz que é para fazer a figura que vier à mente e depois diminuir até chegar ao perímetro que precisam. Ela elogia a figura que fez e, em seguida, afirma que vai fazer uma com formato de pizza. Mostra outra figura formada, diz que parece com um trapézio e faz uma observação: "só com dois". Provavelmente, se referindo ao hexágono formado. Lavínia diz que formou um quadrado 2 cm por 2 cm. Afirmam que fizeram seis figuras geométricas, precisam contar a área e o perímetro delas e que utilizaram "P-" para indicar a medida do perímetro e "A –" para indicar as áreas das figuras formadas. E concluem que as figuras não têm a mesma área, que cada uma tem sua área e seu perímetro.

É importante destacar que, para o cálculo do perímetro, a unidade de medida que estão utilizando é a distância entre os pregos, mesmo sabendo que a distância entre os pregos na diagonal é maior. É considerada correta a contagem da dupla ao calcular o perímetro das figuras formadas, como o triângulo, o losango, o pentágono e o octógono, como mostra a Figura 34.

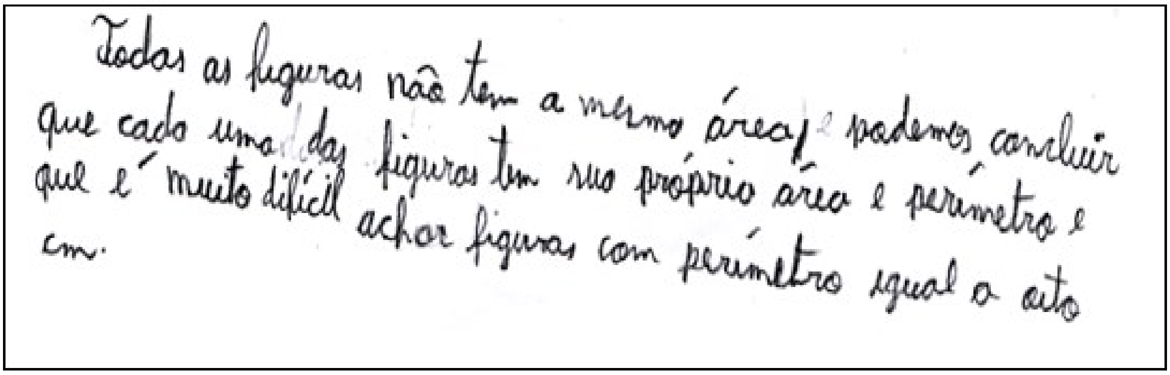
Seguem as respostas na malha pontilhada e escrita da tarefa 4 feitas pela dupla de Anny e Lavínia.

Figura 34- Resposta na malha pontilhada apresentada por Anny e Lavínia -Tarefa 4



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 35 - Resposta escrita apresentada por Anny e Lavínia -Tarefa 4



Fonte: Dados da pesquisa

No quadro a seguir (Quadro 17), foram organizados os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pela dupla Anny e Lavínia ao resolverem a tarefa 4, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito da Geometria Plana – Área e perímetro dos polígonos.

Quadro 17 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Anny e Lavínia

Trechos	**Processos de raciocínio matemático**	**Conceitos matemáticos utilizados**
Anny: Professora, vem aqui por favor. Isso aqui é exato né esse aqui? Lavínia: Anny isso não é uma figura. Anny: Acho que não é, melhor não. Anny: Então vai fazendo uma figura que vem, a sua mente e depois vai baixando até dar, assim que eu fiz. Anny: Todas as figuras não tem a mesma área. Podemos concluir que cada uma das figuras tem sua área e perímetro.	Conjecturar	Anny forma uma conjectura ao observar que o quadradinho inteiro é exato. Ela tem o conhecimento formado de que a unidade de medida utilizada para contar a medida da área das figuras no Geoplano, o "quadradinho", representa um inteiro, e não partes. Lavínia apresenta uma conjectura ao identificar que a figura formada por Anny não é uma figura semelhante às que estão formando nas tarefas. Anny confirma a conjectura de Lavínia, mas elas não conseguem formar uma justificativa para a conjectura. Elas não conseguem explicar que a reta formada por elas não é um polígono ou que a reta possui somente uma dimensão, sendo o comprimento. A explicação de Anny sobre como formar as figuras geométricas no Geoplano é uma conjectura, pois ela diz que forma uma figura maior e vai diminuindo o perímetro até chegar à medida desejada. Ela demonstra compreender o conceito de perímetro. Anny forma uma conjectura ao apresentar as conclusões que chegou ao resolver a tarefa. No caso, a de que as figuras com perímetros iguais não têm a mesma área, e que as figuras planas podem ter áreas e perímetros diferentes.

Fonte: Autoria própria

4.4.2 Dupla 2 – Paula e Renata – Tarefa 4

Trecho 1 do diálogo

Paula: Vamos fazer qual figura?
Renata: Vamos começar com o quadrado que é mais fácil.
Paula: Quadrado?

Renata: Tem que ter perímetro igual a 8 cm. 1,2, 3,4, 5, 6, 7, 8, Não! Vamos fazer assim olha.
Paula: De 3 cm aqui?
Renata: Não, precisa de oito. Vamos fazer assim, calma 1,2, 3,4, 5, 6,7. Eita, isso vai ser difícil.
Renata: 2,3, 4,5, 6,7, 8, tive uma ideia.
Paula: Você vai fazer o quadrado?
Renata: Sim.
Paula: Você faz o quadrado e eu faço o triângulo.
Renata: Tem que ser figuras diferentes olha, construa várias figuras com o mesmo perímetro.1, 2,3, 4,5, 6,7, 8.
Paula: Deu certo?
Renata: Sim.

Paula e Renata iniciam resolução da tarefa escolhendo a figura geométrica que será formada. Renata sugere formar o quadrado primeiro, por ser uma figura mais fácil de construir, provavelmente por já dominar a construção dessa figura geométrica. Paula questiona sobre o quadrado, e Renata lembra que o perímetro precisa ter 8 cm. Paula sugere fazer com 3 cm de lado. Renata não aceita a sugestão da companheira e alerta sobre a medida do perímetro novamente. Tenta formar uma figura, mas não consegue. Paula pergunta a Renata se ela vai fazer mesmo o quadrado. Renata confirma, e Paula diz que vai fazer um triângulo. Renata lembra à companheira que as figuras precisam ser diferentes, mas com o mesmo perímetro. Paula pergunta à Renata se deu certo a figura que formou, e ela diz que sim.

Trecho 2 do diálogo

Paula: Agora vou fazer o triângulo.
Renata: 1,2 1,3, 4,5, 6,7, 8,9,10 e 1,2,3,4,5,6,7,8.
Paula: Nós fizemos quadrado, triângulo e retângulo.
Renata: Calma eu acho que está mais bonito.
Paula: Faz, espera aprendi fazer triângulo.
Renata:1,2 1,3, 4, 5, 6.
Renata: Não vai dar certo, 1,2 1,3, 4,5, 6,7, 8.
Paula: Deu certinho 1,2 1,3, 4,5, 6.
Renata: 6? Calma acho que agora deu, eu acrescentei mais dois negocinhos então fica 8.
Renata: Deu certo.
Paula e Renata:1,2 1,3, 4,5, 6,7, 8.
Paula e Renata: Certinho.
Paula: Nós fizemos quatro figuras quadrado, retângulo, como é o nome disso?
Renata: Não faço a menor ideia.
Renata:1,2 1,3, 4,5, 6,7, 8. A flecha.
Renata: Vai fazendo várias formas geométricas.
Paula: Retângulo, assim!
Renata: Professora vem aqui?
Paula: O que você quer falar com a professora
Renata: O nome dessa aqui.

Paula inicia a construção do triângulo. Renata conta o perímetro das figuras que formou. Paula observa as formas que fizeram e conclui que construíram um quadrado, um triângulo e um retângulo. Nessa tarefa, elas já conseguem nomear corretamente o retângulo e o triângulo, na tarefa anterior apresentaram dificuldade. Renata elogia uma figura que formou, dizendo que ela é bonita. Paula afirma à Renata que aprendeu a construir o triângulo, mas na resposta apresentada por elas na Figura 36, não há triângulo. Já Renata continua tentando construir figuras que respondam à tarefa e demonstra não conseguir, mas ao contar o perímetro de uma figura que construiu, chega à medida de 6 cm e entende que, se aumentar mais duas unidades, as quais ela denomina "negocinhos", ela obtém 8 cm. Na sequência, elas contam juntas e confirmam ter o perímetro desejado. Paula confirma que fizeram quatro figuras até o momento e que são: dois quadrados, um retângulo e uma outra que não sabe o nome. Renata também não sabe o nome e a chama de "flecha", por ter formato de uma flecha. Seguem construindo outras formas. Paula constrói um retângulo e mostra à companheira. Renata chama a professora, e Paula pergunta sobre a dúvida que tem. Renata diz que é para saber qual é o nome da figura que ela chamou de "flecha".

Trecho 3 do diálogo

Renata: Fala sério, vamos observar ao nosso redor várias formas.
Paula: Ah! Não dá para fazer a cerquinha né?
Renata: Estrela.
Paula: Estrela, não.
Renata: Até dá eu acho.
Paula: Vamos tentar, mas acho que vai precisar de um elástico.
Renata: E se não der certo a gente tentou.
Paula: Ah! Quase, estou quase conseguindo!
Paula: O que é, uma estrela?
Renata: Professora uma estrela, mas não vai dar.
Professora: Tem que obedecer a regra que a tarefa pede.
[A professora percebe que a figura formada não tem o perímetro pedido.]
Paula: Olha uma árvore de Natal!
Professora: Mas, por que você acha que não pode formar com 8 cm a árvore de Natal?
Professora: Já tentaram construir com 8 cm?
Paula:1,2 1,3, 4,5, 6,7…12.
Renata: Vamos tentar fazer menor, calma.
Paula: Ficou mais uma casa do que uma árvore?
Renata: Calma, é só fazer esse daqui 1,2, ...
Paula: Entorta aqui também, aqui também, aquela árvore estava linda.
Renata: O que está aparecendo agora?
Paula: Uma casa, um biscoito.
Renata:1,2 1,3, 4,5, 6,7, 8 calma 1,2 1,3, 4,5, 6,7, 8.

Renata quer formar figuras geométricas diferentes, então fala para a Paula observar ao redor, ou seja, quer dizer que as formas geométricas fazem parte do cotidiano, que estão em toda parte. Paula parece compreender o que ela diz e questiona se é possível fazer uma cerquinha. Renata sugere construir uma estrela. Nesse momento, elas buscam dar sentido aos conceitos que estão adquirindo ao realizar as tarefas propostas, demonstram entender que a Geometria Plana não está apenas nos conceitos aprendidos ou nos desenhos e figuras feitas no Geoplano. Percebem que formaram algo parecido com uma estrela, mas não tem o perímetro que foi pedido. Mostram para a professora a estrela formada e a professora diz que é necessário seguir o que a tarefa pede, por perceber que a figura formada não tem o perímetro pedido. Paula então constrói uma figura que acha parecida com uma árvore de Natal e mostra para a professora. A professora questiona se é possível formar a árvore e se já tentaram com a medida do perímetro desejada. Elas mostram que estão tentando construir. Então, Paula conta o perímetro e Renata sugere diminuir o tamanho da árvore. Percebem que, ao modificar as dimensões, chegaram a uma figura que tem o formato de uma casa. Renata continua tentando. Paula sugere "entortar", provavelmente pede para diminuir a unidade de medida, o quadrado para meio quadrado e lamenta por mudar, porque achou que a árvore tinha um formato lindo. Terminam a figura e concluem que ficou parecida com uma casa ou um biscoito, não com a árvore desejada, mas formaram a figura com perímetro 8 cm. A figura formada por elas foi um pentágono.

Trecho 4 do diálogo

Paula: Então o que fizemos aqui, o quadrado, retângulo, não sei o nome desse.
Renata: O que é!
Paula: Não sei o nome disso.
Paula: Aqui não pode casinha, casinha deitada. Não o que você está fazendo?
Renata: Qualquer forma que der.
Renata: A professora disse que podia fazer qualquer forma 1,2 1,3, 4,5, 6,7, 8.
Renata: Deu certo.
Paula: 8?
Renata: Professora.
Paula: Olha o tanto de forma que a gente fez?
Paula: Esse daqui é a flechinha.
Renata: Essa calma, conta para ver 1,2, 1,3, 4,5, 6,7, 8, certinho.
Paula: Mas essa flechinha fica mais elaborada.
Renata: Calma, vamos fazer várias formas geométricas.
Paula: Vamos fazer o quadrado a gente já repetiu várias formas porque não repetir o quadrado?
Renata: Já vamos tirar esse. Vamos fazer um quadrado.
Paula: Tá, 1,2 1,3, 4,5, 6,7, 8, 9 ,10.
Renata: Agora vamos fazer na folha. Vamos começar pelo quadrado.
Paula: A gente fez um monte.
Renata: Professora, a gente fez 11, olha o jeito que ficou o meu.

Na sequência, observam novamente as figuras que formaram e afirmam que são: um quadrado, um retângulo e uma outra figura que não sabem o nome. Paula diz que é "casinha" ou "casinha deitada", se referindo ao pentágono. Renata continua construindo mais formas geométricas e afirma que está fazendo qualquer uma, não pensa em nenhuma figura plana específica. Ela constrói uma figura e chama a professora, mas não diz o que deseja saber. Paula mostra a quantidade de figuras que já montaram e mostra uma delas, dizendo que parece com uma flechinha. Depois de contarem o perímetro, Renata diz que é uma “flechinha mais elaborada”. A figura que elas formaram foi um hexágono irregular, ou seja, um polígono formado com seis lados e as medidas dos lados diferentes. Na sequência, resolvem formar mais um quadrado e tiram uma das figuras formadas, mas não justificam a decisão. Resolvem passar as figuras formadas no Geoplano para a malha pontilhada. Mostram à professora que formaram onze figuras.

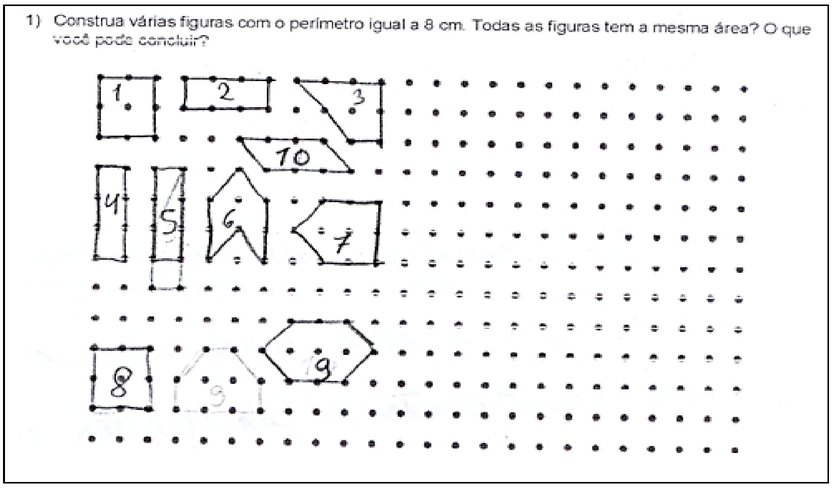
Trecho 5 do diálogo

Renata: Professora terminamos e agora.
Professora: Agora numera e coloca o perímetro e a área e escreve as conclusões que tiveram.
Renata: A gente precisa numerar é mais seguro.
Paula: 1,2 ,3, 4,5, 6,7, 8, 9, 10.
Renata: Calma a gente precisa de uma estratégia, a gente começa pelo mais fácil bom, eu conto por fora.
Paula: Mas todos vão dar 8 o perímetro.
Renata: Então você coloca P = 8.
Paula: Área 4 no primeiro, 3 na segunda e 3 e meio, não quatro na terceira.
Renata: Aqui é 2 aqui é 3, aqui é 4 de área.
Renata: A quinta é essa aqui.
Paula: Copia até a nona.
Renata: Tirei a nona.
Renata: Tira a nono e quinta.
Paula: Mas pode arrumar a quinta.
Renata: 2,3, 4,5, 6,7, 8.
Paula: Qual á o sétimo.
Renata: É essa aqui.
Paula: Esse.
Renata: É
Paula: 1,2,3,4, 4 e meio e 5.
Paula: Qual é o oitavo.
Renata: Essa daqui.
Renata: A nona não tem.
Paula: Lembra que tiramos a 9?
Renata: Eu coloquei nesse apaguei e coloquei no dez.
Paula Então 10.
12 Paula: 10, esse daqui.
Paula: Agora falta o resumo.
Renata: Agora a gente vai ter que escrever tudo que aprendeu sobre isso
Paula: A gente aprendeu formas geométricas.
Renata: Nós podemos concluir que, algumas formas não tem área igual, mas outras tem, porque independente da forma, pode ser um quadrado, vale meio e quando

As alunas chamam a professora para mostrar que terminaram de formar as figuras e perguntam sobre a sequência da tarefa. A professor diz a elas para colocarem o número em cada figura como forma de organização, indicar a área e o perímetro de cada figura e escrever as conclusões as quais chegaram. Renata e Paula seguem numerando as figuras. Renata sugere uma maneira de organizar a sequência das figuras e a contagem da área e do perímetro. Ao passar para a malha pontilhada, propõe começar pela figura mais fácil de desenhar e contar o perímetro das figuras. Paula, atenta, diz que todos os perímetros serão 8 cm, ou seja, não há a necessidade de contar. Renata sugere colocar, como legenda, "P = 8", ou seja, para indicar o perímetro com a letra P. Continuam o diálogo contando a área das figuras: a primeira figura tem 4 cm^2 de área, sendo um quadrado; a segunda área, de 3 cm^2, é um retângulo na posição horizontal; uma outra figura, com 4 cm^2 de área, é um quadrilátero, sendo a terceira figura. Renata confirma as medidas apresentadas por Paula, mostra a quinta figura, e Paula sugere copiar até a nona. Renata diz que excluiu a nona figura e pede para arrumar a quinta, mas não menciona a razão da exclusão das duas figuras. Na imagem das respostas da tarefa, na Figura 36, ela mostra que o perímetro era maior. Elas não percebem que, após modificar a figura 5, formaram dois retângulos iguais, na posição vertical. Essas figuras estão na quarta e quinta posição. Não mencionam a sexta figura, sendo ela um hexágono irregular com área de 4 cm^2. Localizam a sétima figura: um pentágono irregular com 5 cm^2 de área. Definem a oitava figura como um quadrado de 4 cm^2 de área, sendo uma figura que repete a primeira. Não sabem qual é a nona figura, pois a apagaram, e, então, a décima figura ficou sendo a nona, um hexágono irregular com 6 cm^2 de área. Elas formam, no total, nove figuras. Em seguida, argumentam sobre as conclusões as quais chegaram ao resolver a tarefa 4. Concluem que algumas figuras geométricas não têm a área igual, mas outras, sim, independentemente do formato da figura, ou seja, podem ter área com medidas exatas ou não exatas.

Seguem as respostas na malha pontilhada, escritas e no Geoplano da tarefa 4 feitas pela dupla Paula e Renata.

Figura 36 - Resposta na malha pontilhada apresentada por Paula e Renata -Tarefa 4



Fonte: Dados da pesquisa

A imagem a seguir (Figura 37) apresenta as medidas da área e do perímetro das figuras apresentadas na Figura 36. A área da figura 5 foi alterada para 3 cm², mesmo apagada, restou uma sombra, parecendo ser 3,5 cm².

Figura 37 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 4

1) Perímetro = 8 Aréa = 4
2) Perímetro = 8 Aréa = 3
3) Perímetro = 8 Aréa = 4
4) Perímetro = 8 Aréa = 3
5) Perímetro = 8 Aréa = 3,5
6) Perímetro = 8 Aréa = 4
7) Perímetro = 8 Aréa = 5
8) Perímetro = 8 Aréa = 4
9) Perímetro = 8 Aréa = 6
10) Perímetro = 8 Aréa = 3

Fonte: Dados da pesquisa

A figura seguinte (Figura 38) apresenta a resposta com a análise da dupla após finalizar a tarefa. Renata, ao escrever as conclusões, apresenta alguns erros ortográficos como: "aréa", que representa área, "insterpententi", que significa independente, "valhe", que quer dizer vale, "quado", que representa quando. Ela representa 0,5 como metade do quadradinho utilizado como contagem da área das figuras planas.

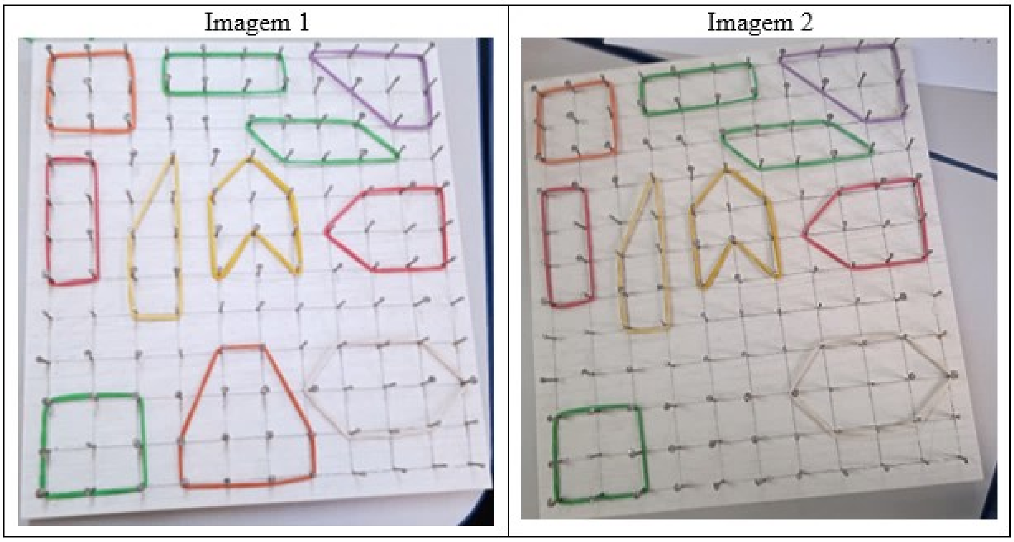
Figura 38 - Resposta escrita por Paula e Renata -Tarefa 4

Concluir
Nós podemos concluir que algumas formas não tem a aréa igual mas outro tem, porque interpentendi da figura pode ter um quadrado e meio oque é isso, isso é um quadrado que valhe 0,5 e quado junta vira 1 quadrado.

Fonte: Dados da pesquisa

A figura a seguir (Figura 39) apresenta as respostas formadas no Geoplano para a resolução da tarefa. A imagem 1, do primeiro Geoplano apresenta algumas das primeiras construções que fizeram e mostra as onze figuras formadas, como mencionado no diálogo. A imagem 2, do segundo Geoplano, mostra as respostas que foram passadas para a malha pontilhada, no entanto, a foto foi tirada antes delas modificarem a figura 5, a primeira figura amarela, que, na resposta final, passou a ter o formato retangular.

Figura 39 - Figuras geométricas formada no Geoplano por Paula e Renata para a resolução da tarefa 4



Fonte: Dados da pesquisa

No quadro a seguir (Quadro 18), foram organizados os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pela dupla Paula e Renata ao resolverem a tarefa 4, bem como os conceitos matemáticos utilizados pela dupla ao argumentar matematicamente a respeito da Geometria Plana – Área e perímetro dos polígonos.

Quadro 18 - Síntese dos processos de raciocínio matemático da dupla Paula e Renata

Trechos	**Processos de raciocínio matemático**	**Conceitos matemáticos utilizados**
Renata: Vamos começar com o quadrado que é mais fácil. Renata: Tem que ser figuras diferentes olha, construa várias figuras com o mesmo perímetro.	Conjecturar	A primeira conjectura dessa dupla é formada por Renata ao sugerir formar o quadrado primeiro. Nesse momento, ela demonstra ter o conhecimento prévio das propriedades do quadrado ao dizer que sua construção é mais fácil. Também, forma uma conjectura ao concluir que as figuras formadas precisam ser diferentes e quando afirma que acrescentou mais unidades de medida para aumentar o perímetro para chegar à medida

Renata: 6? Calma acho que agora deu, eu acrescentei mais dois negocinhos então fica 8.		que precisam, demonstrando ter compreendido os conceitos relacionados às propriedades das figuras planas quando consegue diferenciá-las.
Renata: Fala sério, vamos observar ao nosso redor várias formas. Paula: Ah! Não dá para fazer a cerquinha né? Renata: Estrela.		Buscando novas formas geométricas para construir, Renata forma uma conjectura ao perceber que as formas geométricas estão presentes no nosso cotidiano. Ela consegue relacionar os conceitos matemáticos com a realidade. Paula considera válida a conjectura de Renata ao sugerir fazer uma “cerquinha”. Renata sugere fazer uma estrela.
Renata: Calma a gente precisa de uma estratégia, a gente começa pelo mais fácil bom, eu conto por fora.		Renata, ao procurar uma forma de organizar as figuras na malha pontilhada, faz uma conjectura mostrando o entendimento de que é melhor desenhar as figuras mais fáceis primeiro e de que o perímetro deve ser contado por fora, ou seja, o perímetro é o contorno da figura. Assim, ela demonstra compreender o conceito para calcular os perímetros, que são a soma das medidas dos lados das figuras.

Fonte: Autoria própria

Ao final de cada tarefa, foi realizada a plenária, o momento em que os alunos apresentavam suas respostas para a turma. Nesse momento, foi feita a correção oral das tarefas e foram apresentados alguns conceitos, como os relacionados à nomenclatura das figuras geométricas planas, pois surgiram muitas dúvidas ao nomeá-las, talvez por serem figuras as quais os alunos não tinham muito contato e por não dominarem completamente conceitos relacionados aos quadriláteros, ao pentágono, ao hexágono e ao octógono.

Durante a aplicação das tarefas, foi possível observar que os alunos raciocinaram matematicamente, pois as tarefas realizadas em duplas proporcionam o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático, a partir das argumentações formadas com seus companheiros ou com a professora. Foi possível verificar que os alunos desenvolveram os processos de raciocínio comparar, classificar e generalizar e, em especial, conjecturar e justificar.

4.5 DISCUSSÃO DAS ANÁLISES

Durante a análise da resolução das tarefas, compreendemos que os alunos raciocinaram matematicamente, pois as tarefas realizadas em duplas proporcionaram a mobilização de processos de raciocínio matemático a partir das argumentações com seus companheiros ou com a professora, e, dessa forma, fazendo uso de diferentes conceitos matemáticos relacionados à Geometria Plana. Dentre esses conceitos, destacamos: propriedades do quadrado e do retângulo, diferença entre as dimensões altura e comprimento, classificação das figuras planas e não planas, reconhecimento e cálculo da área e perímetro e cálculo do dobro e do triplo da área dos polígonos. Foi possível verificar que os alunos desenvolveram alguns processos de raciocínio como conjecturar, justificar, comparar, classificar e generalizar (JEANNOTTE; KIERAN, 2017), com destaque para conjecturar e justificar. Salientamos que, nestas análises, em alguns momentos durante as discussões entre as duplas, foi essencial a ação da professora (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2020), possibilitando a continuidade na resolução das tarefas.

O Quadro 19 a seguir apresenta os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pelas duplas durante a resolução das tarefas.

Quadro 19 - Processos de raciocínio desenvolvidos durante as tarefas

Duplas	Tarefa	Processo
Dupla 1	Tarefa 1 (a)	Conjecturar, justificar, comparar.
	Tarefa 1 (b)	Conjecturar, justificar, comparar.
	Tarefa 1 (c)	Conjecturar, justificar, generalizar.
Dupla 2	Tarefa 1 (a)	Conjecturar, justificar, comparar, generalizar.
	Tarefa 1 (b)	Conjecturar, justificar.
	Tarefa 1 (c)	Conjecturar, justificar.
Dupla 1	Tarefa 2.1	Conjecturar, comparar.
	Tarefa 2.2	Conjecturar, justificar, generalizar.
Dupla 2	Tarefa 2.1	Conjecturar, justificar, classificar.
	Tarefa 2.2	Conjecturar, justificar, comparar, generalizar.

Dupla 1	Tarefa 3	Conjecturar, justificar.
Dupla 2	Tarefa 3	Conjecturar, justificar.
Dupla 1	Tarefa 4	Conjecturar.
Dupla 2	Tarefa 4	Conjecturar.

Fonte: Autoria própria

Na realização da primeira tarefa, os processos desenvolvidos foram conjecturar, justificar, comparar e generalizar. Ao construíram um quadrado e um retângulo, conforme o enunciado, os alunos argumentaram matematicamente para formar essas figuras, ou seja, encontraram estratégias para estabelecer relações entre as medidas dos seus lados. As duplas tiveram, de início, dificuldade em definir as duas figuras, mas o trabalho em duplas proporcionou as discussões e a elaboração de estratégias para encontrar as resoluções corretas, sustentando a hipótese de que o trabalho colaborativo proporciona a interação, o diálogo e a reflexão, possibilitando a aprendizagem mútua (BOA VIDA; PONTE, 2002). Ao formarem conjecturas, buscaram semelhanças e diferenças a partir de relatos, procurando uma regularidade em suas respostas (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). A conjectura inicial formada pela primeira dupla no trecho do diálogo: *"Lavínia: Aí a gente faz tipo assim, o retângulo a gente pode colocar 5. Anny: Sim naquele lado grande e quatro naquele lado pequeno"*. Essa fala evidencia a compreensão das propriedades do retângulo ao resolverem a tarefa. Já quando dizem *"Mas é para ficar esse lado menor. Então tem que aumentar a largura"*, apresentam um processo de justificação, o qual Trevisan e Araman (2021) definem como um modo de argumentar de maneira lógica com ideias já compreendidas.

Ainda na tarefa 1, foi possível evidenciar o raciocínio matemático das alunas Paula e Renata ao formarem uma conjectura, mesmo que inválida, e ao refutarem essa conjectura, quando argumentaram que: "*Renata: Eu estava pensando de a gente fazer um quadrado 4 por 5, porque ele é maior. Paula: Sim, mas tipo 5 por 5 é um retângulo?"*. Ao buscarem por uma justificativa, mostraram ter conhecimento dos conceitos relacionados às figuras planas, os quais precisaram ser analisados por elas ao definirem as figuras retângulo e quadrado. Durante a conjectura, é importante verificar todas as possibilidades, desconfiar e refutar se necessário, buscando modificar ou não o valor epistêmico da narrativa (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

Esta tarefa proporcionou também às duas duplas o desenvolvimento dos processos de generalizar e comparar. A comparação, de acordo com Jeannotte e Kieran (2017), é a busca de semelhanças e diferenças a partir de relatos sobre objetos ou situações matemáticas, desta forma, ela foi evidenciada pelas duplas ao compararem suas figuras, fazendo as relações entre seus lados, comparando suas áreas e perímetros. Ao reconhecerem que esse conceito, elaborado nessa resolução, pode também ser aplicado na resolução de outras tarefas que envolvam a construção do quadrado, a dupla apresentou um processo de generalização. A segunda dupla, Paula e Renata, também desenvolveu o processo de generalização, quando elas chegaram à conclusão de que, para formar um quadrado, é necessário que ele tenha todos os lados com a mesma medida, não importando a medida utilizada. Para Jeannotte e Kieran (2017), generalizar é um processo que leva a conclusões válidas, ou seja, a partir de narrativas sobre um conjunto de ideias ou relações entre essas ideias, com base em suas conclusões.

Na resolução da segunda tarefa, foi possível compreender o raciocínio matemático das duplas em suas argumentações ao resolverem a tarefa. Para Jeannotte e Kieran (2017, p.7), "o raciocínio matemático desenvolve a partir da comunicação com outras pessoas ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos". As duplas desenvolveram os processos de raciocínio: conjecturar, comparar, justificar, classificar e generalizar.

O processo de comparação, que é a busca de semelhanças e diferenças entre situações matemática de acordo com Jeannotte e Kieran (2017), é apresentado pela dupla Anny e Lavínia logo no início da tarefa 2, ao construírem figuras diferentes e compararem a medida do perímetro entre as figuras. A segunda dupla, Paula e Renata, fez a comparação entre os espaços que determinam a área do triângulo formado por elas, apresentando narrativas para mostrarem que o elástico, ao dividir o "quadradinho" ao meio, a qual é unidade de medida utilizada para contagem da área no Geoplano e na malha pontilhada, também determina o espaço interno do triângulo, sendo esse espaço a área da figura.

As conjecturas surgiram ao longo da realização das tarefas de forma a colaborar com as respostas finais das duplas, deste modo, "conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que ainda não se sabe se são verdadeira" (TREVISAN; ARAMAN, 2021, p. 163). Na tarefa 2, a dupla 1, Anny e Lavínia, forma conjecturas ao tentar compreender de que maneira podem determinar o perímetro da área da figura que formaram no Geoplano, elas chegaram à conjectura verdadeira ao compreenderem que podem formar figuras com perímetros iguais e áreas diferentes.

A segunda dupla, Paula e Renata, ao iniciar a resolução da tarefa 2.1, na qual precisavam formar figuras diferentes com o mesmo perímetro, mobilizam uma conjectura já elaborada na resolução da tarefa 1, *"o quadrado tem o mesmo número de lados"*. A dupla busca os conhecimentos prévios para aplicar na resolução da tarefa formando uma nova conjectura ao afirmar que *"o quadrado tem os quatro lados com a mesma medida"*.

Ao argumentarem sobre as figuras que precisam formar na resolução dessa tarefa, Paula e Renata desenvolvem o processo de classificação, sendo demonstrado neste trecho do diálogo: *"Renata: Ela quer um polígono"*. Ela mostra conhecer a classificação das figuras planas. De acordo com Jeannotte e Kieran (2017), o processo de classificar é um processo que pela busca de semelhanças e diferenças entre os conceitos matemáticos, apresentando narrativas baseadas em propriedades de definições matemáticas. Na sequência do diálogo, elas apresentam uma justificativa para a construção das figuras: *"Renata: Calma, mas não pode ser a mesma forma"*. Elas compreendem que a figuras precisam ter formatos diferentes e polígonos.

Na resolução da tarefa 2.2, na qual as duplas precisavam formar figuras geométricas planas que apresentassem a mesma área, as alunas Anny e Lavínia mostraram compreender um pouco mais sobre a área e o perímetro das figuras planas, pois iniciaram a tarefa formando as figuras por meio de tentativas e, durante a realização da tarefa, utilizaram os conhecimentos que já obtinham em relação à multiplicação para encontrar o valor da área desejada, ou seja, conseguiram aplicar o conceito relacionado ao cálculo da área, apresentando seu raciocínio, a partir de conjecturas e justificativas. Para Morais, Serrazina, Ponte (2018, p.555), o raciocínio matemático é "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo), a partir de proposições conhecidas ou assumida como verdadeiras (conhecimento prévio)". Ao compreenderem que podem utilizar a multiplicação para encontrar a medida dos lados e a medida da área nas figuras, entenderam que podem utilizar esse conceito na resolução de outras tarefas, realizando um processo de generalização, pois "generalizar envolve identificar regularidades entre casos particulares e estender o raciocínio para classes mais alargadas" (TREVISAN; ARAMAN, 2021, p.163).

Na realização da tarefa 2.1, é importante destacar o desempenho da segunda dupla e a ação da professora. Ao resolverem a tarefa, a dupla formada por Paula e Renata, ao contrário da primeira dupla, encontrou maior dificuldade na resolução, pois precisaram de conceitos matemáticos que ainda não dominavam completamente. Ao formar figuras que não estavam acostumadas, como triângulo e quadriláteros diferentes do retângulo e do "quadrado", não conseguiam encontrar o tamanho da área de maneira correta, pois não compreendiam a contagem da metade do quadradinho utilizado como unidade de medida de área, onde duas metades juntas formam uma unidade de medida. Foi importante a intervenção da professora para que as alunas compreendessem os conceitos de contagem da área das figuras formadas. A professora solicitou resposta pontuais, forneceu pistas, incentivou as explicações referentes às estratégias utilizadas para a resolução, validou as respostas corretas e corrigiu as respostas incorretas, apresentou argumentos e, dessa forma, contribuiu para que as alunas compreendessem a maneira correta da contagem da área na figura formada, demonstrando que o professor assume um papel importante na realização das tarefas ao “introduzir informações, proporcionar argumentos, ou validar respostas dos alunos” (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59). Após argumentarem entre elas e com a professora, formarem conjecturas e apresentaram justificativas, conseguiram concluir a tarefa e compreender os conceitos que não dominavam. Foi possível observar também o processo de generalização. Ao compreenderem a contagem da metade do quadradinho, elas conseguiram utilizar a contagem em outras figuras formadas.

Na realização da tarefa 3, em que as alunas precisavam construir figuras geométricas planas apresentando o dobro e o triplo da área da primeira figura, as duas duplas conseguiram chegar às respostas corretas, desenvolvendo os processos de conjecturar e justificar. A dupla formada por Anny e Lavínia, parte de uma falsa conjectura apresentada por Anny, ela acreditava que as figuras que precisavam formar deveriam ser quadradas, pois a figura inicial era um quadrado com 9 cm^2 de área, como mostra o trecho do diálogo: “Anny*: Mas tem que ser um quadrado, no quadrado tem que ter todos os lados iguais”*. Lavínia algumas vezes refuta essa conjectura, como mostra o trecho do diálogo: “*Lavínia: Será que é obrigatório fazer um quadrado?”* Elas dialogam buscando argumentos para suas conjecturas e solicitando a ajuda da professora, que, a partir de questionamentos, leva as alunas a compreenderem que a tarefa não especificava qual figura seria formada. As alunas precisavam perceber, a partir da área encontrada, qual figura seria possível formar. A dupla então refuta a conjectura inicial, formando uma nova conjectura, que é verdadeira, como mostra o trecho do diálogo: “Anny*: Então ela não precisa ser um quadrado*”. De acordo com Jeannotte e Kieran (2017), conjecturar é um processo no qual os alunos desconfiam tentando refutar, buscam descobrir porque é verdadeira ou falsa e, se for preciso, buscam modificar a conjectura. Ao final, compreenderam que era impossível formar um quadrado com as medidas encontradas.

Paula e Renata buscaram resolver a terceira tarefa, formando figuras diferentes das figuras já formadas nas outras tarefas para justificar as medidas dos lados e a área das figuras formadas, a partir de tentativas no Geoplano e de cálculos, utilizando as operações de multiplicação, divisão e subtração. Essa dupla também apresentou a mesma dúvida da dupla anterior, mas logo chegaram à conclusão de que não seria um quadrado a figura que precisavam formar, pois sua conjectura inicial era formar figuras diferentes das que já conheciam. Para

Ponte (2005), o trabalho com tarefas exploratórias permite aos alunos usarem diferentes estratégias de resolução, discutirem e apresentarem seus argumentos para essa discussão.

Foi possível observar, durante os diálogos das alunas, que essa tarefa necessitava de uma reformulação em seu enunciado, pois as duplas apresentaram a mesma dúvida na interpretação.

Na quarta tarefa, as duas duplas mobilizaram o processo de conjecturar. A partir dos diálogos foi possível perceber que as duplas já dominavam os conceitos relacionados às propriedades das figuras planas, reconhecendo suas dimensões, compreendendo que a quantidade de lados das figuras determina a sua forma, os conceitos de área e perímetro das figuras planas. Apesar dessa tarefa ter apresentado somente um processo de raciocínio, ela demonstra ser importante para que os alunos reconheçam os diferentes formatos dos polígonos. As duplas construíram vários polígonos, buscaram saber se as formas construídas existiam e qual era o nome dado a elas.

Durante a aplicação e análise das tarefas, foi possível verificar que os alunos dominavam poucos conceitos de Geometria Plana: não conseguiam diferenciar o retângulo do quadrado e a maioria não diferenciava área e perímetro, não compreendiam a diferença entre polígonos e poliedros. De início, as duplas apresentaram timidez ao iniciar os diálogos, pois estavam acostumados com as aulas online e aulas expositivas. O trabalho com as tarefas exploratórias, a mudança no ambiente da sala de aula, envolvendo o trabalho colaborativo entre os grupos, a utilização do material didático, como o Geoplano e malha pontilhada e a troca ideias levando à construção de argumentos para validar ou invalidar conjecturas proporcionaram o domínio dos conceitos com os quais os alunos apresentavam dificuldade e a formulação de respostas corretas para as tarefas.

É importante, para compreensão o raciocínio matemático dos alunos, que o professor fique mais atento à forma de pensar do aluno, aos seus questionamentos e às formas de resolverem as tarefas na sala de aula.

Trabalhos recentes sobre o raciocínio matemático e os processos que apoiam o raciocínio matemático, como os apresentados por Carneiro (2021), buscam mostrar, de forma clara, esses conceitos e as características, considerando em sua pesquisa que os principais desafios do professor para desenvolver o raciocínio matemático no aluno são: encontrar tarefas com variedades de conteúdos matemáticos, conduzir a tarefa de modo que os alunos compreendam, colocar questionamentos que não limitem o raciocínio matemático e não reduzam o nível da tarefa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa teve como objetivo geral compreender os argumentos matemáticos elaborados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem, de forma colaborativa, uma sequência de tarefas exploratórias envolvendo figuras geométricas planas. Além do objetivo geral, nos propomos a responder duas questões de pesquisa: (i) quais conceitos matemáticos são utilizados por estudantes do 5º ano ao argumentar matematicamente a respeito de figuras geométricas planas? (ii) quais processos de raciocínio matemático sustentam essa argumentação?

Para responder às questões de pesquisa, realizamos uma pesquisa teórica sobre o raciocínio matemático e seus processos, sobre as tarefas exploratórias e como elas apoiam o raciocínio matemático e sobre o ensino de Geometria Plana nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

A partir desses estudos teóricos e considerando os pressupostos teóricos da investigação Baseada em Design, foi elaborado o objetivo de aprendizagem da pesquisa, na qual se refere aos alunos compreenderem algumas propriedades de figuras geométricas planas e foi estabelecida a conjectura de que uma sequência de tarefas exploratórias sobre figuras geométricas planas, aplicadas num ambiente colaborativo, possibilitando o desenvolvimento de processos de raciocínio matemático e, consequentemente, a aprendizagem matemática.

Diante da conjectura estabelecida e do objetivo da pesquisa, foi elaborada uma sequência de tarefas exploratórias sobre figuras geométricas planas, mais especificamente sobre perímetro e área. Tal sequência foi aplicada com alunos de uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental. A aplicação da tarefa forneceu alguns elementos essenciais para que pudéssemos analisar os resultados obtidos a partir das resoluções e discussões feitas pelos alunos durante a realização das tarefas.

Com a aplicação das tarefas foi possível verificar que o objetivo de aprendizagem e a conjectura foram alcançados, pois a realização das tarefas exploratórias em ambiente colaborativo, utilizando material manipulável, como o Geoplano, oportunizou aos alunos resolverem as tarefas exploratórias, a partir de diálogos desenvolver argumentações entre as duplas. Nesse contexto os alunos mobilizaram alguns conceitos matemáticos relacionados à Geometria Plana, como, as propriedades do retângulo e do quadrado ao diferenciarem essas figuras a partir das medidas dos lados, identificaram e diferenciaram a área e perímetro, compreenderam a classificação das figuras planas sendo polígonos e não polígonos, respondendo assim nossa primeira questão de pesquisa. Durante as análises das tarefas de acordo com Jeannotte e Kieran (2017), foi possível evidenciar o desenvolvimento de alguns processos de raciocínio matemático, respondendo assim segunda questão de pesquisa, a partir dos diálogos, as duplas desenvolveram alguns processos de raciocínio matemático, na qual são destacados os processos relacionados a busca de semelhanças e diferenças sendo: conjecturar, comparar, classificar e generalizar e o processo relacionado a validação: justificar.

A aplicação das tarefas, nesse estudo, passou por alguns desafios devido aos quase dois anos de quarentena impostos pela pandemia de COVID-19, impossibilitando os alunos de frequentarem presencialmente as aulas, sendo ministrada apenas de forma remota, tornando um desafio a aplicação das tarefas na perspectiva do trabalho colaborativo. O retorno presencial aconteceu em agosto de 2021, mas a aplicação das tarefas só foi possível em dezembro do mesmo ano, pois havia a necessidade de adaptação dos alunos no ambiente escolar, assim como a adaptação com os colegas de turma, com os professores e também a retomada de conteúdos.

Outro desafio foi elaborar tarefas que levassem em conta o conhecimento prévio dos estudantes, ainda assim, permitissem que eles avançassem nos conceitos matemáticos, pois apresentavam atraso em relação aos conteúdos que são trabalhados no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental. Com a aplicação das tarefas foi possível observar que esses obstáculos foram superados, pois os alunos participaram de forma efetiva, chegando as respostas corretas e a compreensão de algumas propriedades das figuras geométricas planas.

Um dos pontos positivos a destacar nesta pesquisa, está relacionado a aplicação das tarefas, que ocorreu de forma tranquila, pois os alunos participaram ativamente, dialogando como seus companheiros, mostrando interesse e muito empenho ao buscar seus conhecimentos para resolvê-las. Foi possível comprovar a satisfação nos diálogos, um exemplo é a fala da dupla Anny e Lavínia, na resolução da tarefa 4, ao terminar a construção das figuras formadas afirmam que elas ficaram lindas. A dupla Paula e Renata mostrou muito interesse na resolução de todas as tarefas, dialogaram bastante e apresentaram muitos argumentos para suas respostas, ficando evidenciado o interesse das duplas na resolução da tarefa 3, ao afirmarem que queriam fazer de forma diferente as respostas, ou seja, buscar formas diferentes para resolver a tarefa. Foi possível também verificar o interesse dos aulos pela unidade temática Geometria, sendo pouco trabalhada seus conceitos nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Foi possível constatar também que as ações do professor na resolução das tarefas foram fundamentais para a promoção do raciocínio matemático e mobilização/desenvolvimento de seus diferentes processos. O professor deve auxiliar os alunos com questionamentos durante a resolução das suas tarefas com cautela, de maneira que eles cheguem às respostas sem que o professor as forneça, deixando que os alunos formem suas conjecturas, façam comparações e verificações de modo que a descoberta e a construção do conhecimento partam dos alunos (PONTE, 2005).

Essa pesquisa contribuiu, de forma pessoal, para meu enriquecimento profissional, pois a partir desse estudo, passei a compreender e valorizar o raciocínio dos alunos, em que muitas vezes, são apresentados a partir de questionamentos e argumentos que os levam aos processos de raciocínio matemático, na qual não dava atenção, por não ter o conhecimento do estudo aqui apresentado. Fez com que despertasse para a elaboração de tarefas que levem os alunos a desenvolver o raciocínio matemático, sendo essas exploratórias. O entendimento também da necessidade de mudar o ambiente de sala de aula para que as tarefas possam atingir os objetivos de desenvolver o raciocínio matemático nos alunos com compreensão.

Nessa pesquisa foi realizado o primeiro ciclo da Investigação Baseada em Design (IBD), na qual possibilitou a aplicação das tarefas e a reformulação das mesmas, dando oportunidade para o início um novo ciclo de aplicação e análise. Deixamos como contribuição o Produto Educacional denominado "Uma sequência de tarefas exploratórias no Geoplano", fruto das análises e reformulações realizadas nesse primeiro ciclo da IDB. O Produto Educacional que acompanha esta dissertação é direcionado para que o professor possa conhecer e compreender um pouco sobre o raciocínio matemático e os seus processos, as tarefas exploratórias, o trabalho colaborativo e argumentação e a importância das ações do professor na realização dessas tarefas, podendo utilizar o material em sua prática de sala de aula.

Apresentamos, como propostas futuras, a possibilidade de aplicação dessas tarefas em outras turmas do 4º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais e também do 6º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, buscando maior compreensão do raciocínio matemático e dos processos de raciocínio matemático.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Lurdes; OLIVEIRA, Isolina. **A matemática na Educação Básica.** 1.ed. **Lisboa**, Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica, 1999.

AMÂNCIO, Roselene; GAZIRE, Eliane. O desenvolvimento do pensamento geométrico e as contribuições dos recursos didáticos no estudo dos quadriláteros. **Vidya**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 113-117, jul./dez., 2015.

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes. Processos de Raciocínio Matemático na Resolução de Tarefas Exploratórias no 3º Ano de Escolaridade, **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 09, n. 18, p. 118 – 136, jan.-jun. 2020.

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, Pedro. Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. **Bolema**, Rio Claro, v. 34, n. 67, p. 441 – 461, ago. 2020.

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, Ponte. "Eu perguntei se o cinco não tem metades": ações de uma professora dos primeiros anos que que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, 466-490, 2019.

BOAVIDA, Ana; PONTE, Ponte. Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. **ResearchGate**, jan.2002 In GTI (Org), Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp. 43-55). Lisboa: APM.

BOAVIDA, Ana. **A argumentação em Matemática Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração**. 2005. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2005.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC,1998.

BREDA, Ana. *et al*. **Geometria e medida do ensino** – Brochura de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) para o ensino da Geometria e Medida. Direção-geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC), 2011.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora,1994.

BONJORNO, José; JÚNIOR, José; SOUSA, Paulo. **Matemática – Ensino Médio Área do conhecimento:** Matemática e suas Tecnologias Geometria**.** FTD, São Paulo, 2020.

CARAÇA, Bento. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa, Tipografia Matemática, 1951.

CARNEIRO, Luís; ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes. Processos do Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes do 6º Ano do Ensino Fundamental ao Resolverem uma Tarefa de Geometria. **JIEEM,** v.13, n.1, p.35-45, 2020.

CARNEIRO, Luís. **Processos do Raciocínio Matemático Mobilizados por Alunos do Ensino Fundamental**. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

ELLIS, Amy.; ÖZGÜR, Zekive; REITEN, Lindsay. Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, Melbourne, v. 30, n. 2, p. 1-26, jun. 2018.

ESTEBAM, Maria. **Pesquisa qualitativa em educação** – Fundamentos e tradições. Ed. 1. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda., 2010.

JEANNOTTE, Doris; KIERAN, Carolyn. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 96, n. 1, p. 1-16, mai. 2017.

LANNIN, John; ELLIS Amy; ELLIOTT, Rebekah. **Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten** – grade 8. Reston: National Council of Teacher of Mathematics, 2011.

LORENZATO, Sergio. Por que não ensinar Geometria? - **Educação Matemática em Revista- SBEM**, São Paulo, SP, v. 4, n. 4, p. 3-13, jan./jun.1995.

MACHADO, Ricardo. **Trabalho colaborativo e matemática:** Um estudo de caso sobre o instrumento de avaliação de capacidades e competências do projeto Interacção e Conhecimento. 2014. Tese (Doutorado em Ciência Educação) - Faculdade de Ciências e Tecnologia Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2014.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, Pedro. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781–801, dez, 2018.

MATTA, Alfredo; SILVA, Francisco; BOAVENTURA, Edivaldo. Design-based research ou Pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v. 23, n. 42, p. 23-36, jul./dez. 2014

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 4, p. 552-570, set. 2018.

MOREIRA, Plinio. **Banco Geométrico**: uma maneira divertida de aprender. 2014. 31 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Ensino de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014.

MORI, Iracema.; ONAGA, Dulce. **Matemática: Ideias e desafios, 8º ano**. São Paulo: Saraiva, 2012.

NCTM. **Normas Proficionais para o ensino da Matemática**. Lisboa: IIE e APM.1994.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston,2000.

PAES, Luís. Uma análise do Significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria**. 23ª Reunião Anual - ANPED,** Caxambu, 2000. Disponível em: www.anped.org.br/23/textos/19/1919t.pdf. Acesso em 01 de junho de 2022.

PIERCE, Charles. The collected papers of Charles Sanders Peirce. **Electronic**, Charlottes Ville, 2007.

PONTE, Pedro; MATA-PEREIRA, Joana. QUARESMA, Marisa. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, Lisboa, v. 22, n. 2, p. 55-81, 2013.

PONTE, Pedro. Gestão Curricular em Matemática. **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa, p.11-34, 2005.

PONTE, Pedro. *et al.* Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, Lisboa, v. 25, n. 2, p. 77-98, 2016.

PONTE, Pedro. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. **#Contato Matemático**. FTD, São Paulo, 2016.

STYLIANIDES, Gabriel. Reasoning-and-proving in School Mathematics Textbooks**. Mathematical Thinking and Learning**, v. 11, n. 4, p. 258-288, 2009.

TREVISAN, André.; ARAMAN, Eliane. Processos de Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes de Cálculo em Tarefas Envolvendo Representações Gráficas**. Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 69, p. 158-178, abr. 2021.

TOULMIN, Stephen. **The uses of argument.** New York: Cambridge University Press, 2007.

VAN DE WALLE, John. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Ed. 6, Porto Alegre: Artmed, 2009.

VENTURA, Sara. **O geoplano na resolução de tarefas envolvendo os conceitos de área e perímetro: um estudo no 2.º Ciclo do ensino básico. 2013.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa Instituto de Educação, Lisboa, 2013.

WOOD, Terry. Creating classroom interactions for mathematical reasoning: beyond "natural teaching". In: ABRANTES, P., PROFÍRIO, J.; BAÍA, M. (Org.), **The interactions in the mathematics classroom: proceedings, of the CIEAEM 49.** Setúbal: Escola Superior de Educação, p. 34-43, 1997.

APÊNDICE A – TAREFA 1

Aluno:____Turma:_______Data:___/____/____

- Tarefa Exploratória 1

Renato tem um Geoplano e gosta de construir figuras geométricas nele. Mas agora ele tem algumas questões para resolver utilizando seu Geoplano. Vamos ajudá-lo?1) Construa no Geoplano um retângulo e um quadrado e depois desenhe na malha pontilhada.

d) O que você pensou para formar esses polígonos? Explique.

e) O que os polígonos que você construiu tem igual e o que eles têm de diferente? Como chegou a essas conclusões?

f) Explique se é possível formar um círculo utilizando o mesmo critério que utilizou para formar os polígonos acima?

Aluno:____Turma:_____Data:____/_____/_

Malha pontilhada para tarefa 1

APÊNDICE B – TAREFA 2

- Tarefas Exploratórias 2

1) Renato precisa construir duas figuras geométricas (polígonos) diferentes que apresentam o mesmo perímetro vamos ajudá-lo formando as figuras no Geoplano e depois escrevendo o que você pode concluir após comparar essas figuras.

2) Renato agora precisa saber se é possível formar figuras que tenha a mesma área. Ajude-o construindo duas figuras geométricas com a mesma área e escreva o que pode observar nessas duas figuras.

Aluno:____Turma:_____Data:____/_____/_

Malha pontilhada para tarefa 2

APÊNDICE C – TAREFA 3

- Tarefa 3

2) Renato formou no Geoplano um quadrado com área 9 cm^2 e precisa encontrar o perímetro, depois preencher a tabela abaixo:

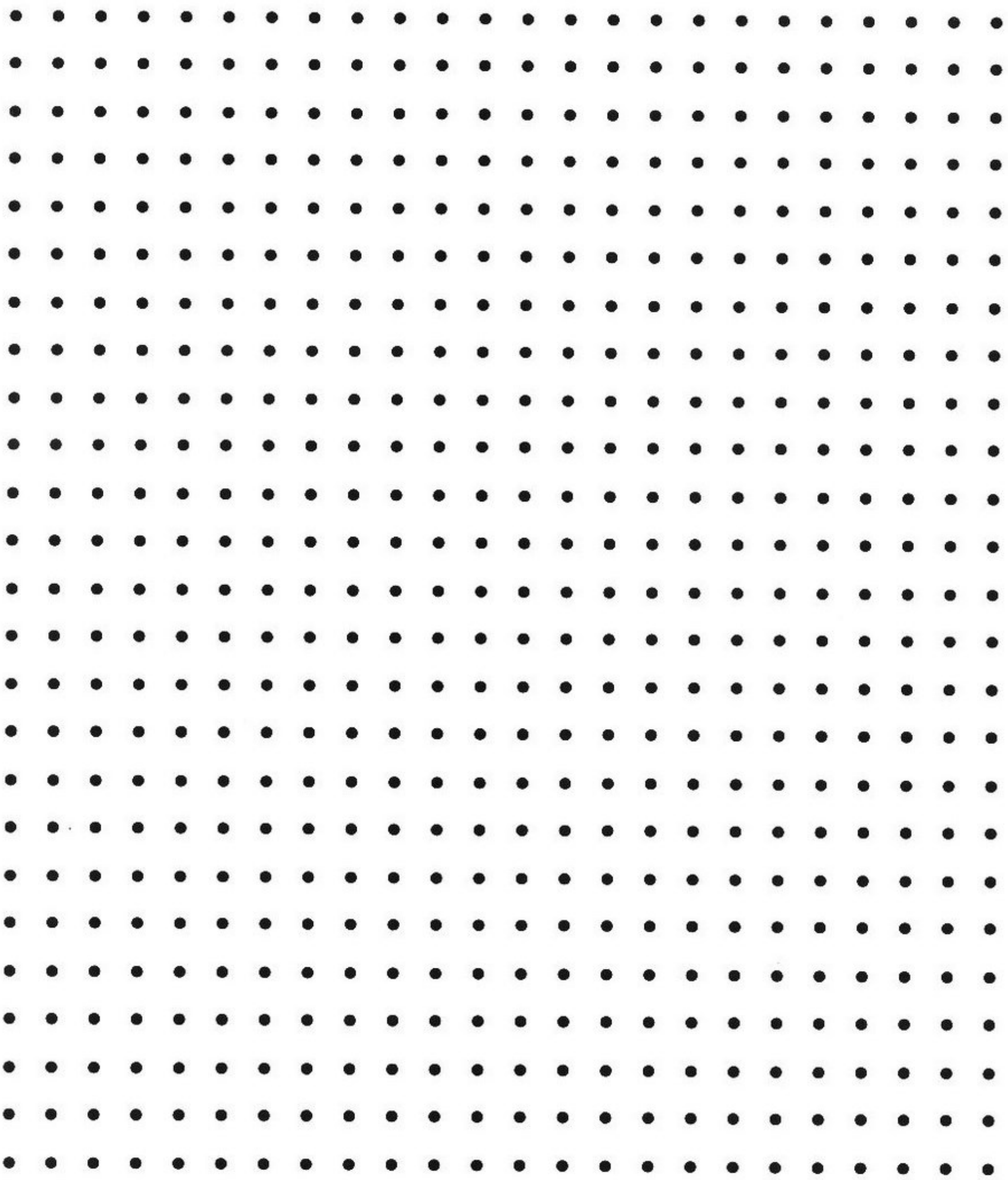
	Figura 1	**Figura 2**	**Figura 3**
Área	**9 cm^2**	**O dobro da área da figura 1**	**O triplo da área da figura 1**
Perímetro			

Agora mostre para Renato como fez para formar essas figuras escrevendo ou realizando os cálculos.

APÊNDICE D – TAREFA 4

- Tarefa exploratória 4

1) Construa várias figuras com o perímetro igual a 8 cm. Todas as figuras tem a mesma área? O que você pode concluir?



ANEXO A – TCLE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Coordenação do PPGMAT
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio e Londrina

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) PARA OS RESPONSÁVEIS

Título da pesquisa: Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática
Pesquisador(es/as) ou outro (a) profissional responsável pela pesquisa, com Endereços e Telefones:
Eliane Maria de Oliveira Araman, Avenida Alberto Carazzai, 1640 CEP 86300-000 – Cornélio Procópio – Pr (43) 991453870

Local de realização da pesquisa: Escola Municipal Vereador Damasco Adão Sottile. Endereço: Av. Alberto Carazzai, 1516, Cornélio Procópio - PR, 86300-000. Telefone: (43) 39041097.

A) INFORMAÇÕES AO PARTICIPANTE

Gostaríamos de convidar o aluno pelo qual você é responsável a participar da pesquisa **"Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática"**, a ser realizada em aulas de matemática, da escola participante. As informações sobre a pesquisa seguem abaixo:

1. Apresentação da pesquisa.

Esta pesquisa visa o estudo de ambientes educacionais e tarefas exploratórias para o ensino e a aprendizagem matemática pensado a partir de um conjunto de fatores, com potencial para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos e, em consequência disso, a aprendizagem matemática. Nosso propósito é caracterizar o raciocínio matemático e seus processos, pensar tarefas que o integre nas aulas de matemática, promover formação de professores que implementem tais ações em salas de aula e investigar dados oriundos das aulas resultantes desses processos.

2. Objetivos da pesquisa.

O objetivo dessa pesquisa é compreender de que modo a realização de tarefas exploratórias pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes, bem como de que forma as ações dos professores apoiam esse processo.

3. Participação na pesquisa.

A participação do aluno pelo qual você é responsável é muito importante e ela se dará no contexto das próprias aulas de Matemática. Nós queremos ver que tipo de resoluções ele *apresenta, que estratégias utiliza para resolver as tarefas, ou seja, qual é o seu raciocínio. Fazemos essa pesquisa para analisar se as tarefas são adequadas para o ano em que ele estuda, se são muito difíceis ou muito fáceis. Queremos ver também quais conhecimentos matemáticos ele usa para resolvê-las e como você pensa e organiza suas ideias. Esta pesquisa pode trazer vários benefícios para ele e também para outros alunos, pois vai ajudar os professores de Matemática a proporem tarefas mais desafiadoras que ajudem os alunos a compreenderem os conceitos matemáticos. Para nossa pesquisa, precisamos de fotocópias do caderno de Matemática do aluno, no trabalho com 4 tarefas que serão propostas pelo seu professor. Cada tarefa será trabalhada em uma aula de 50 minutos. Informamos que vamos manter o sigilo sobre o nome dele e o seu e também dessas fotocópias. Não há riscos em participar da pesquisa, ele vai fazer a mesma coisa que sempre faz nas aulas, resolver as tarefas entregues pelo professor. Não há custos envolvidos, nem previsão de ressarcimento. Talvez ele sinta um pouco de vergonha por permitir que outras pessoas vejam o seu caderno. Mas, não se preocupe, ele não será avaliado ou julgado, e esse material não interfere em sua nota. Apenas nos ajudará a compreender melhor seu raciocínio. Se concordar com a participação, é importante que mantenha guardado esse documento, assinado por você e pelos pesquisadores, como forma de garantia e proteção.*

4. Confidencialidade.

O nome do aluno pelo qual você é responsável e o seu não serão divulgados de forma alguma. Suas informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade dos envolvidos.

5. Riscos e Benefícios.

5a) Riscos: *Considera-se um risco mínimo de constrangimento durante a coleta de dados, podendo o participante optar por sua não participação na pesquisa, sem prejuízo pedagógico.*

5b) Benefícios: *Os benefícios esperados são de contribuir de forma significativa para a aprendizagem dos alunos e para a formação de professores, visto que envolve a implementação de tarefas exploratórias diferenciadas, que estimulam a participação ativa do aluno e desenvolvimento de habilidades como a formulação de hipóteses, a busca de soluções viáveis, o uso dos recursos com eficácia, a organização e o trabalho em grupos, enfim, vários componentes que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático.*

6. Critérios de inclusão e exclusão.

6a) Inclusão: *Alunos que, juntamente com seus responsáveis, autorizarem a coleta de dados durante as aulas.*

6b) Exclusão: *Não se aplica.*

Rubrica do pesquisador   Rubrica do participante da pesquisa

7. Direito de sair da pesquisa e a esclarecimentos durante o processo.

Esclarecemos que o aluno pelo qual você é responsável pode deixar o estudo a qualquer momento assim como, pode solicitar esclarecimentos em qualquer etapa da pesquisa. Tanto ele quanto você têm a liberdade de recusar ou retirar o seu consentimento a qualquer momento sem penalização para seu aprendizado nem sua avaliação. Caso não deseje participar, ou interromper sua participação, você continuará participando das aulas normalmente, e suas resoluções não serão usados pelos pesquisadores. Os resultados da pesquisa poderão ser de seu conhecimento, bastando fazer a manifestação de interesse:

( ) quero receber os resultados da pesquisa (email para envio :___________________)
( ) não quero receber os resultados da pesquisa

Nome do aluno pelo qual você é responsável: ___________________________________

Dados e assinatura do responsável:
Nome Completo: ____
RG:______________Data de Nascimento:___/___/_____Telefone:_______________
Endereço: ____
CEP: ________________ Cidade:____________________ Estado: _______________
Assinatura: _______________________________ Data: ___/___/______

Eu declaro ter apresentado o estudo, explicado seus objetivos, natureza, riscos e benefícios e ter respondido da melhor forma possível às questões formuladas.

Nome completo: **Rosimeiri da Silva de Morais**
Assinatura pesquisador (a): __________________ Data:___/___/__
(ou seu representante)

Para todas as questões relativas ao estudo ou para se retirar do mesmo, poderão se comunicar com Eliane Maria de Oliveira Araman, via e-mail: elianearaman@utfpr.edu.br ou telefone: (43) 991453870.

ANEXO B – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes do 5º ano ao argumentar matematicamente a respeito de figuras geométricas planas
Título do Produto/Processo Educacional	Uma sequência de tarefas exploratórias no Geoplano
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Rosimeiri da Silva de Morais
	Orientador/Orientadora: Eliane Maria de Oliveira Araman
	Outros (se houver):
Data da Defesa	

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (x) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); *L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática* (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *Apenas um item pode ser marcado. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	( ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (x) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.	( ) Local ( ) Regional ( ) Nacional (x) Internacional Justificativa (*obrigatória*): O Produto Educacional por ficar disponível no Repositório Institucional pode ser aplicado tanto no Brasil quanto em países de língua portuguesa.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *Apenas um item pode ser marcado.	( ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (x) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada	( ) Econômica;

*<u>Apenas um item pode ser marcado</u>.	( ) Saúde; (x) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; ( ) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *<u>Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u>	(x) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (x) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (x) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. (x) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (x) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	**Instituição**
Eliane Maria de Oliveira Araman	UTFPR
Simone Luccas	UENP
André Luis Trevisan	UTFPR