

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

JANETE APARECIDA DE MELO BELLINI

RACIOCINANDO SOBRE MEDIDAS

LONDRINA

2022

JANETE APARECIDA DE MELO BELLINI

RACIOCINANDO SOBRE MEDIDAS

REASONING ABOUT MEASUREMENTS

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Eliane Maria de Oliveira Araman

1

1



4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina**



JANETE APARECIDA DE MELO BELLINI

**PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NO ENSINO FUNDAMENTAL: TAREFAS
EXPLORATÓRIAS SOBRE MEDIDAS DE COMPRIMENTO**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 21 de Setembro de 2022

Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

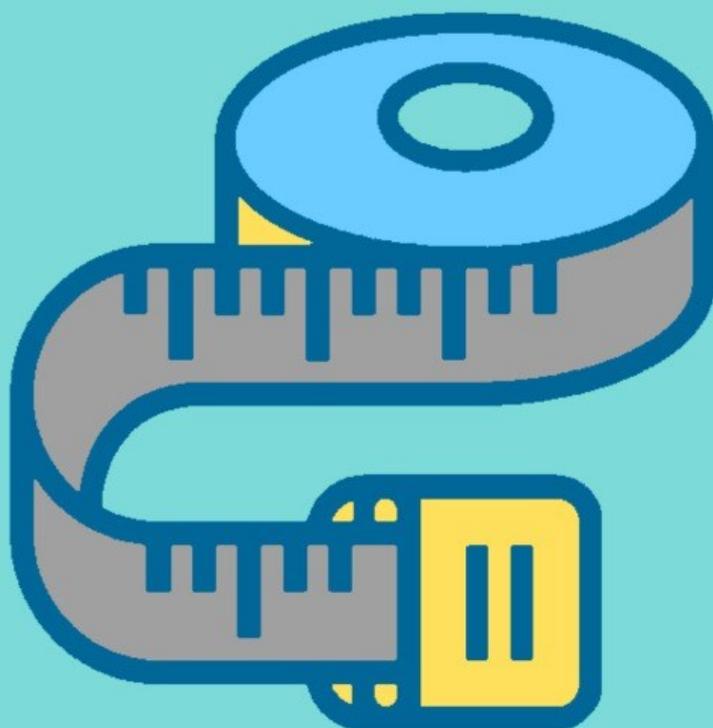
Dra. Adriana Quimentao Passos, Doutorado - Escola Municipal Reverendo Odilon Gonçalves Nocetti

Dr. Henrique Rizek Elias, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 21/09/2022.



Raciocinando sobre medidas



Janete Aparecida de Melo Bellini
Eliane Maria de Oliveira Araman

Londrina 2022

SUMÁRIO

CARO(A) PROFESSOR (A)	6
VOCÊ SABE O QUE É RACIOCÍNIO MATEMÁTICO?	7
O QUE É ENSINO-APRENDIZAGEM EXPLORATÓRIO?	12
MATERIAL DIDÁTICO	15
COMO CONSTRUIR O MATERIAL DIDÁTICO	15
TAREFAS EXPLORATÓRIAS.....	17
PROCEDIMENTOS PARA RESOLVER AS TAREFAS	21
CONSIDERAÇÕES FINAIS	30
REFERÊNCIAS	37

CARO(A) PROFESSOR (A)

É com muita alegria que apresentamos este Produto Educacional, que foi elaborado a partir dos resultados da dissertação intitulada “Processos de raciocínio matemático no Ensino Fundamental: tarefas exploratórias sobre medidas de comprimento”, apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Londrina.

Este Produto Educacional se trata de um guia didático, que foi elaborado pelas autoras com o objetivo de trazer conhecimento aos professores sobre o raciocínio matemático. Explicar como as tarefas exploratórias aliadas às ações dos professores podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Este guia didático é composto pela primeira parte com a fundamentação do raciocínio matemático e a abordagem de ensino-aprendizagem exploratório. Na segunda parte, apresentamos como confeccionar o material didático, as tarefas exploratórias, os procedimentos para aplicar em sala de aula e as resoluções das tarefas, em que os alunos evidenciaram os processos de raciocínio matemático.

As tarefas exploratórias apresentadas neste Produto Educacional foram aplicadas em uma turma do quarto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Londrina, e os resultados dessa aplicação podem ser vistos na dissertação que originou este Produto.

O ensino-aprendizagem exploratório tem potencial para promover novas aprendizagens sobre o conteúdo de medidas especificamente para compor o metro. Esta é uma abordagem destacada pelas ações do professor e pela comunicação dos alunos em duplas ou trios, sendo muito importante para que eles desenvolvam habilidades de interagir uns com os outros, mobilizarem processos de raciocínio matemático e serem capazes de aprender com compreensão e autonomia.

Agradeço a todos os professores que estão buscando, neste Produto Educacional, aprimorar a sua prática na sala de aula.

As autoras.



VOCÊ SABE O QUE É RACIOCÍNIO MATEMÁTICO?

Quando se trata do ensino e da aprendizagem da matemática, constantemente ouvimos dizer que é preciso desenvolver o raciocínio matemático dos alunos ou, ainda, que determinado aluno não tem raciocínio matemático, mas, afinal, o que é raciocínio matemático? O raciocínio matemático é importante, pois possibilita ao aluno a aprendizagem com compreensão de conceitos. Durante as resoluções, cria-se um ambiente de discussões, de inferências, de explicações, de justificativas e de argumentações, coloca-se o aluno como protagonista, que exerce autonomia para elaborar e defender ou refutar as conjecturas.

Autores nacionais e internacionais estudam e reconhecem a importância do raciocínio matemático desde os anos iniciais. Algumas dessas pesquisas são:

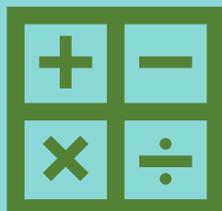
- “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019).
<https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/40696/1/Aramam%2c%20Serrazina%2c%20Ponte%20EMP%202019.pdf>
- “Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade” (ARAMAN; SERRAZINA, 2020).
<https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6189/4212>
- Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2020).
<https://www.scielo.br/j/bolema/a/MkXMBRtxsbRdw5YNrQQ8Ngs/?for=mat=pdf&lang=pt>
- Processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do Ensino Fundamental (CARNEIRO, 2021).
<https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/26491/1/processosraciocinio-matematicomobilizados.pdf>
- Conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

file:///C:/Users/janet/Downloads/ESM_c_mineurfinal.pdf

- Explorar e Investigar em Matemática: desafio para os alunos e professores (PONTE, 2013).

<https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3971/1/06-Ponte-UFF-Explorar%20e%20Investigar.pdf>

Para entender melhor sobre o raciocínio matemático, apresentamos algumas definições.



ALGUMAS DEFINIÇÕES DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Quadro 1 - Definições de raciocínio matemático

Jeannotte e Kieran (2017, p. 7)	Um “processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos”.
Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 12)	Afirmam que o raciocínio matemático “envolve uma variedade de processos de raciocínio que incluem a formulação de questões, a formulação e teste de conjecturas e a justificação”.
Morais, Serrazina e Ponte (2018, p. 555)	Consideram como sendo um “conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novos conhecimentos, a partir de conhecimentos anteriores conhecidos ou assumidos como verdadeiros (conhecimento prévio)”.

Fonte: A autora

O raciocínio matemático possibilita, aos alunos, elevarem suas funções superiores cognitivas, apoiarem-se em conteúdos já adquiridos e avançarem no conhecimento, sendo um “contributo para a aprendizagem da Matemática enquanto disciplina lógica e coerente, para a aprendizagem da Matemática com compreensão” (MATA- PEREIRA, 2018, p. 1).

O raciocínio matemático é essencial no ensino de Matemática, pois ele favorece ao aluno pensar, elaborar, redizer, dar razões, levantar hipóteses e justificar o que fez. Dessa forma, a aprendizagem matemática passa a ter um significado que motiva o aluno a aprender.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC destaca a necessidade de inserir o aluno em um processo de aprendizagem que privilegie “novas possibilidades de ler e de formular hipóteses sobre os fenômenos, de testá-las, de refutá-las, de elaborar conclusões, em uma atitude ativa na construção de conhecimentos” (BRASIL, 2018, p. 58).

Diante dessas afirmações sobre a importância do raciocínio matemático por pesquisadores e pela BNCC, disponibilizamos este produto educacional que fornece dados da pesquisa desenvolvida com os alunos do quarto ano do Ensino Fundamental. Nele, o professor poderá conhecer um pouco sobre o raciocínio

matemático, serão apresentadas algumas definições dos processos de raciocínio matemático e as análises dos processos que foram mobilizados pelos alunos durante as resoluções das tarefas exploratórias.

Existem muitas formas de estudar o raciocínio matemático. Nesta pesquisa, ele é estudado por meio dos processos que os alunos mobilizam ao resolverem tarefas exploratórias. No Quadro 2, a seguir, estão as definições dos processos de raciocínio matemático de acordo com as autoras Jeannotte e Kieran (2017).

Quadro 2 - Processos relacionados a busca de semelhanças e diferenças

Processos	Definição
Generalizar	“Um processo que infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos de um conjunto a partir de um subconjunto deste conjunto” (p. 9). Estratégia utilizada para um caso particular que serve para os demais casos matemáticos.
Conjecturar	“Um processo de raciocínio matemático que, pela busca de similaridades e diferenças, infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico de provável ou possível e que tem potencial para teorização matemática” (p. 10). Construção de narrativa provável, argumentadas com possibilidade de validação.
Identificar padrão	“Um processo do raciocínio matemático que, pela busca de similaridades e diferenças, infere na narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas” (p. 10). Identificar o padrão que tem relação com a classe de objetos matemáticos.
Comparar	“Um processo do raciocínio matemático que infere, pela busca de similaridades e diferenças entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos baseada em propriedades e definições matemáticas” (p. 11).
Classificar	“Um processo do raciocínio matemático que infere, pela busca de similaridade e diferença entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos baseada em propriedades”. Separação por critérios matemáticos (p. 11).

Fonte: A autora, baseado em Jeannotte e Kieran (2017).

Além dos processos de busca de semelhanças e de diferenças, existem os processos de validação. Depois que os alunos elaboram as conjecturas, eles explicam para a turma e criam argumentos para justificar e comprovar por que a sua resolução está correta. No quadro 3, apresentamos os processos de validação.

Quadro 3 - Processos de validação, Jeannotte e Kieran (2017)

Processos	Definição
Justificar	“É um processo do raciocínio matemático que, pela busca de dados, garantias e suporte, modifica o valor epistêmico de uma narrativa” (p. 12). Tem potencial para modificar uma conjectura de provável para mais provável.
Prova	“Um processo de raciocínio matemático que busca dados, garantias para apoiar e modificar o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeira” (p. 12). Tem a natureza dedutiva, sem justificativa adicional.
Prova formal	“Um processo do raciocínio matemático que busca dados, garantias para modificar o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeira” (p. 13). Tem a natureza dedutiva, formalizada e reconhecida pela classe da comunidade matemática.

Fonte: A autora, baseado em Jeannotte e Kieran (2017).

O processo de exemplificar apoia todos os outros processos e auxilia na elaboração e no teste de conjecturas. Trata-se de um processo de raciocínio matemático “que suporta outros processos de raciocínio matemático inferindo exemplos que auxiliam na busca por semelhanças e diferenças e busca de validação” (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.14).



O QUE É ENSINO-APRENDIZAGEM EXPLORATÓRIO?

Segundo Ponte (2010), existem dois estilos de ensino: o ensino direto e a aprendizagem exploratória². O quadro 4, a seguir, mostra algumas diferenças entre os dois estilos.

Quadro 4 - Estilos de práticas de ensino de matemática, Ponte (2010)

Ensino direto	Aprendizagem exploratória
Tarefas <ul style="list-style-type: none"> • Tarefa padrão: Exercício; • As situações são artificiais; • Para cada problema existe uma estratégia e uma resposta certa. 	Tarefas <ul style="list-style-type: none"> • Variedade: Explorações, Investigações, Problemas, Projetos, Exercícios; • As situações são realísticas; • Com frequência, existem várias estratégias para lidar com um problema.
Papéis <ul style="list-style-type: none"> • Os alunos recebem “explicações”; • O professor e o manual escolar são as únicas autoridades na sala de aula; • O professor mostra “exemplos” para os alunos “aprenderem a fazer”. 	Papéis <ul style="list-style-type: none"> • Os alunos recebem tarefas para descobrirem estratégias para resolvê-las; • O professor pede ao aluno para explicar e justificar o seu raciocínio; • O aluno é autoridade, se usar raciocínio lógico para fundamentar as afirmações.
Comunicação <ul style="list-style-type: none"> • O professor coloca questões e fornece <i>feedback</i> imediato; • O aluno levanta dúvidas. 	Comunicação <ul style="list-style-type: none"> • Os alunos são encorajados a discutir com os colegas (trabalhando em grupos ou em pares); • No fim de um trabalho significativo, fazem-se discussões com toda a turma; • Significados negociados na sala de aula.

Fonte: PONTE (2010, p. 24)

Este quadro de Ponte (2010) apresenta algumas diferenças entre o ensino direto e o ensino na perspectiva de aprendizagem exploratória. No ensino direto, os exercícios são para treino e memorização; no ensino-aprendizagem exploratório,

² Aprendizagem exploratória e ensino-aprendizagem exploratório, referem-se a mesma abordagem, citado acima no quadro de Ponte (2010) e no artigo “A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E O TRABALHO DO PROFESSOR” (PONTE, 2020). <http://seer.upf.br/index.php/rbecm/article/view/11831/114115551>.

poderá ser utilizada a tarefa exploratória, que tem como características: várias estratégias de resolução, o aluno tem a oportunidade de discutir em pares ou em grupos para resolver as tarefas, explicar e justificar suas conjecturas para toda a turma, provocando também discussões com o grande grupo, que poderá inferir informação, aceitar ou refutar as conjecturas.

No ensino direto, primeiro, o professor expõe a matéria, explica, passa alguns exemplos e, depois, os alunos realizam os exercícios. No ensino-aprendizagem exploratório, as aulas são diferentes. Os alunos são convidados e envolvidos para resolverem em duplas ou em grupos e, em um segundo momento, para discutirem, clarificarem e justificarem o que aprenderam. Trata-se de um caminho inverso, que se inicia com a prática da tarefa que contribui para a aprendizagem matemática (PONTE, 2005, p. 15). É muito importante que os alunos “descubram um método próprio para resolver uma questão” que é diferente de aprenderem o método que o professor ensina (PONTE, 2005, p. 9).

No ensino-aprendizagem exploratório, o professor tem o papel de guiar os alunos “a partir de perguntas ou explicações, conduz o pensamento do aluno para uma determinada situação ou focaliza fatos importantes ou ainda fornece pistas encorajando a pensarem” (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 476).

Para Ponte (2013, p. 4), existem diversos tipos de tarefas. Cada uma tem suas características, sendo o exercício a mais conhecida. Existem outros tipos de tarefas como problemas, pesquisa, investigações, modelação, projetos e tarefas exploratórias. Vale ressaltar que as características que envolvem o tipo de tarefa não são absolutas, mas relativas à pessoa que a realiza, “dependendo do modo como é apresentada aos alunos, do modo como estes aceitam o desafio que lhes é proposto e do modo como evolui a situação de trabalho na sala de aula” (PONTE, 2013, p. 6).

De acordo com Ponte (2005), é necessário proporcionar aos alunos tarefas desafiadoras que permitam pensar, refletir, criticar, justificar e ter autonomia em sua aprendizagem, e as tarefas exploratórias podem ser uma opção para isso.

A tarefa exploratória é marcada pela discussão entre os alunos durante a resolução e na apresentação do seu trabalho, relatando as conjecturas, apresentando justificativas e questionamentos. O professor procura clarificar conceitos e procedimentos, “os momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento” (PONTE, 2005, p. 15).

Agora, vamos falar sobre o material didático que foi elaborado para servir de apoio às resoluções das tarefas exploratórias.



MATERIAL DIDÁTICO

O Ensino Fundamental tem o compromisso de desenvolver nos alunos habilidades e competências de “raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e **ferramentas matemáticas**” (BRASIL, 2018, p. 266).

As **Ferramentas matemáticas** podem ser: compasso, régua, ábaco, Geogebra, material dourado, *games* etc. Neste produto educacional, apresentamos o material didático que, em conjunto com as tarefas exploratórias, foi utilizado para mobilizar nos alunos os processos de raciocínio matemático.

Vamos explicar como confeccionar o material didático, os materiais necessários, a quantidade de peças de cada cor, as medidas de cada peça e como foi utilizado em sala de aula.

COMO CONSTRUIR O MATERIAL DIDÁTICO

Materiais necessários:

- EVA verde
- EVA vermelho
- EVA amarelo
- EVA azul
- Tesoura



Como construir as peças de EVA:

- Utilizando a régua ou metro, risque o EVA na largura de 2 centímetros e comprimentos:

EVA verde - 1 centímetro

EVA vermelho - 10 centímetros

EVA amarelo - 25 centímetros

EVA azul - 50 centímetros

Para cada kit são necessários:

Duzentos peças de EVA verde.

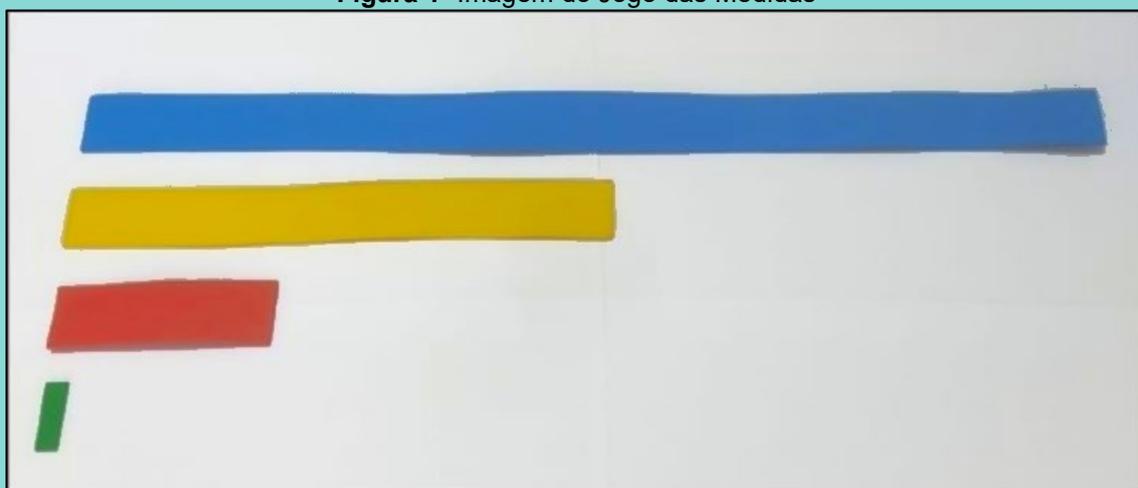
Vinte peças de EVA vermelho.

Oito peças de EVA amarelo.

Quatro peças de EVA azul.

Observação: Quando for trabalhar com os alunos, entregue também fita crepe para juntar as peças.

Figura 1- Imagem do Jogo das Medidas



Fonte: Elaborado pela pesquisadora



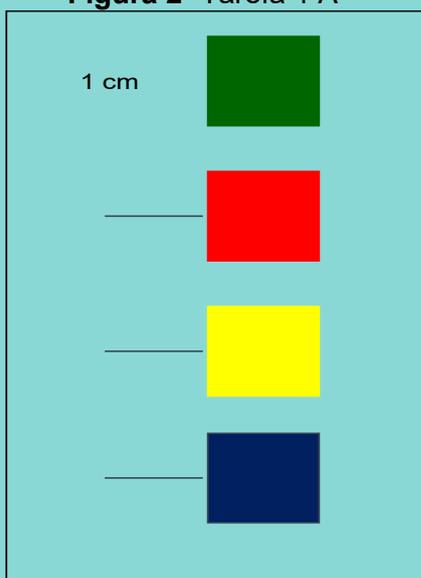
TAREFAS EXPLORATÓRIAS

As tarefas exploratórias foram elaboradas numa perspectiva do ensino-aprendizagem exploratório para mobilizar nos alunos os processos de raciocínio matemático. O material didático serviu de apoio na resolução das tarefas exploratórias que foram aplicadas aos alunos do quarto ano. Então, agora vamos explicar como foi utilizado na sala de aula. Estas foram as tarefas propostas aos alunos.

MEDIDAS DE COMPRIMENTO

TAREFA 1 A - OBSERVEM OS PEDAÇOS DE EVA E COMPLETEM A LEGENDA:

Figura 2- Tarefa 1 A



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

A- Esses pedaços de EVA são iguais? Por quê?

R. _____

B- Com estes pedaços de EVA, construa diferentes formas de compor o metro.

C- Explique como você chegou a essa medida de um metro. (Explicar oralmente, mostrando a composição em EVA).

Composição n.º 1

Registre, explicando como você chegou a essa medida.

R. _____

Composição nº2

Registre explicando como você chegou a essa medida.

R. _____

TAREFA 2 - QUAIS AS FORMAS DE COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS?

A- Com os pedaços de EVA, faça as composições.

B- Explique como você pensou para compor cada um.

Composição Nº 1 COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS:

R. _____

Composição Nº 2 COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS:

R. _____

C- O QUE UMA PARTE DESSAS REPRESENTA EM RELAÇÃO AO METRO? EXPLIQUE.

R. _____



PROCEDIMENTOS PARA RESOLVER AS TAREFAS

- 1- Organização dos alunos em duplas ou em trios.
- 2- Explicar para os alunos que estão organizados em duplas ou em grupos para discutirem entre eles, levantarem hipóteses de resoluções.
- 3- Entregar para cada dupla ou grupo um *kit* com o material didático e fita crepe.
- 4- Apresentar o material didático e a tarefa 1 A, com a legenda para descobrirem as medidas. Explicar que não podem utilizar de medidas padronizadas, somente as peças de EVA.
- 5- Entregar as tarefas 1 B e 1 C e explicar que podem compor o metro com medidas diferentes, cores de EVA diferentes e registrar a resolução, escrevendo na tarefa. O registro poderá ser como os alunos quiserem, desenhos, cálculos etc.
- 6- Assim que terminarem de resolver a tarefa, os alunos irão apresentar para a turma como resolveram. Nesse momento, poderão levar junto a composição do metro com as peças de EVA para fazer a explicação. Também poderão utilizar o quadro para demonstrar como resolveram.
- 7- Durante a explicação para a turma, os alunos devem justificar as suas conjecturas e os demais alunos podem concordar ou não, podendo inferir informações, aceitar ou refutar as conjecturas.
- 8- Apresentar a tarefa 2 e explicar que os alunos terão que compor o metro, desta vez, com medidas iguais e depois sinalizar uma das partes para responder ao enunciado “o que uma dessas partes representa em relação ao metro?”
- 9- Os alunos, assim como na tarefa 1, discutem com o grupo, resolvem a tarefa, elaboram conjecturas e depois explicam para a turma toda como resolveram justificando a conjectura.
- 10- Ao final, os alunos podem escrever um texto relatando como foi para eles participarem desta tarefa.



APLICAÇÃO DAS TAREFAS EXPLORATÓRIAS

Vamos apresentar como foi a aplicação das tarefas exploratórias com os alunos do quarto ano, como foi utilizado o material didático, a transcrição dos áudios dos alunos ao resolverem das tarefas, imagens de algumas resoluções escritas e as análises dos processos de raciocínio matemático que foram mobilizados por eles.

1.º dia – Resolução da tarefa 1 A

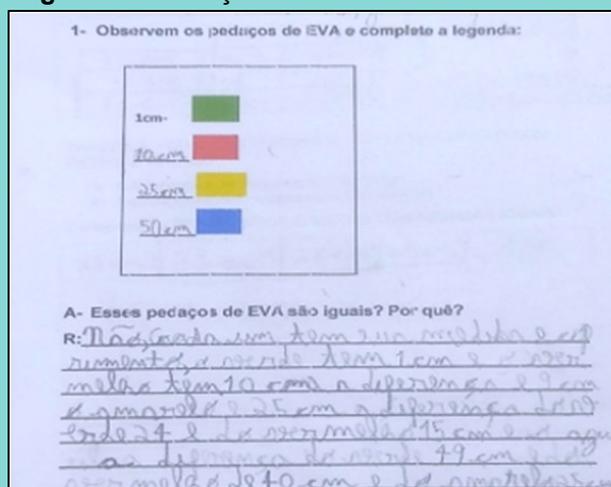
Tarefa 1 A

Em um primeiro momento, foi entregue aos alunos a tarefa contendo uma legenda com as cores verde, vermelho, amarelo e azul e um *kit* com o material didático “Raciocinando sobre Medidas”. Foi proposto aos alunos que completassem a legenda com as medidas que faltavam, referentes a cada cor de EVA.

Para descobrir as medidas dos pedaços de EVA, a professora explicou que não poderiam utilizar medidas padronizadas. A legenda apresentava somente a medida do pedaço de EVA verde de 1 centímetro; a ideia era que os alunos observassem a legenda e, a partir da medida do pedaço de EVA verde, descobrissem as demais medidas.

Após descobrirem as medidas da legenda, os alunos resolveram a tarefa respondendo ao enunciado “**Esses pedaços de EVA são iguais? Por quê?**” conforme o registro na figura 2.

Figura 2- Resolução da tarefa 1A de Antônio e Junior



Fonte: Dados da pesquisa

2º dia – Resolução da tarefa 1 B e C

Tarefa 1 B e C

Na tarefa 1 B e C, o enunciado era “**Quais as formas de compor o metro com medidas iguais?**”

B- Explique como você chegou a essa medida de um metro.

C- Explicar oralmente mostrando a composição em EVA.

Nesse momento, os alunos utilizaram as peças de EVA para compor os 100 centímetros do metro, registraram na tarefa escrita e explicaram para a turma.

Segue a transcrição do áudio de uma dupla de alunos ao resolverem a tarefa exploratória.

Junior: 10 mais 5 é 15. Vou repetir 10 mais 5 é 15.

Antonio: Sim, 15 e 15 é 30.

Junior: 15 mais 15 é 30. Mais 15 é 45. Mais 15 é 60, e agora 4 de 10.

Professora: Quanto dá esse 4 de 10?

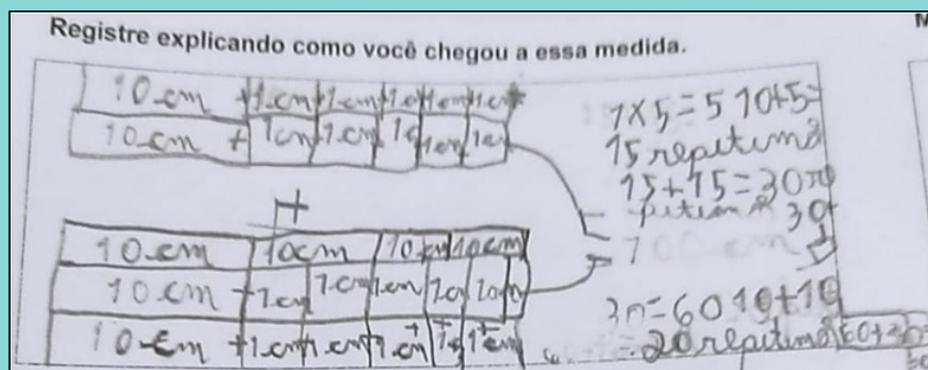
Antonio: 40.

Junior: Deu 40 mais 60 que é igual a 100.

Nesta tarefa, Júnior e Antonio iniciam considerando que o EVA vermelho mede 10 centímetros e o EVA verde 1 centímetro.

Junior iniciou com o EVA de 10 centímetros e adicionou cinco pedaços de EVA de 1 centímetro, totalizando 15 centímetros. Antonio sugeriu dobrar a mesma quantidade, totalizando 30 centímetros ($15 + 15 = 30$). Em seguida, Júnior validou a estratégia de adicionar mais 15 iniciada por Antonio e deu prosseguimento a ela. Acrescentou mais 15 centímetros, o que resultou em 45 centímetros e adicionou mais 15 centímetros resultando em 60 centímetros. Em seguida, sugeriu acrescentar quatro pedaços de EVA de 10 centímetros, considerando os 60 centímetros que já tinham para compor os 100 centímetros que precisavam, para chegar à medida do metro. Júnior justificou a conjectura, realizando o cálculo, quando afirmou que 40 centímetros mais 60 centímetros é igual a 100 centímetros. Foram descrevendo todos os valores em uma tabela e apresentando os cálculos paralelamente conforme a figura 3.

Figura 3 - Resolução da tarefa 1B de Antonio e Junior



Fonte: Dados da pesquisa

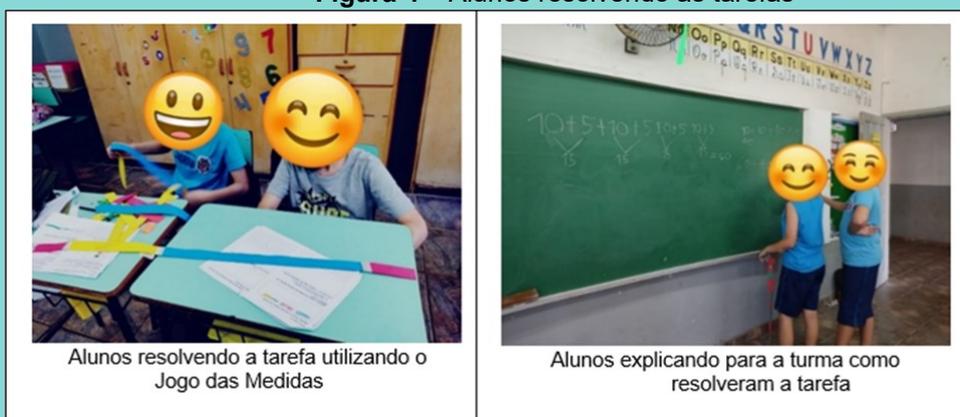
Quadro 5 - Síntese dos processos de raciocínio da dupla 1 na resolução da tarefa 1

Diálogo/escrita	Processos desenvolvidos	Explicação dos processos desenvolvidos
Junior: $15+15$ é $30 + 15$ é $45 + 15$, 60 e agora 4 de 10	Conjectura	Júnior elaborou uma conjectura quando fez os cálculos de adição chegando a 60 centímetros, após isso completou com 4 pedaços de EVA vermelho com medida de 10 centímetros cada.
Junior: Deu $40 + 60$ que é igual a 100 .	Justificação	Júnior conseguiu justificar a sua conjectura, somando os 60 centímetros que tinha obtido anteriormente com os 4 pedaços de EVA vermelho que, juntos, formam 40 centímetros, completando assim os 100 centímetros.

Fonte: Dados da pesquisa

Nesta tarefa, os alunos evidenciaram os processos de comparação, quando relacionaram as medidas para completar a legenda. Elaboraram a conjectura, juntando as peças de EVA e justificaram realizando os cálculos e comprovando que resultou em 100 centímetros. Além dos processos de raciocínio, foram utilizados os conteúdos de adição, relações entre as medidas de metro e de centímetros e estimativas de comprimento.

Figura 4 – Alunos resolvendo as tarefas

Alunos resolvendo a tarefa utilizando o
Jogo das MedidasAlunos explicando para a turma como
resolveram a tarefa

Fonte: Dados da pesquisa

Tarefa 2

Na tarefa 2 o enunciado era: **QUAIS AS FORMAS DE COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS?**

- D- Com os pedaços de EVA, faça as composições
- E- Explique como você pensou para compor cada um.
- F- O que uma parte dessas representa em relação ao metro?

Nesta tarefa, os alunos teriam que compor o metro utilizando diferentes cores de Eva. Segue um trecho da transcrição do áudio de uma dupla de alunos enquanto resolviam a tarefa.

Junior: Eu peguei um EVA amarelo, eu peguei 4 EVA amarelos.

Junior: Cada um tem 25, 25 mais 25 é 50 mais 25 é 75, mais 25, 100, é igual a um metro.

Junior: Isso amigo?

Antonio: Sim.

Junior: Agora o meu amigo vai explicar a última.

Antonio: Explica você mesmo.

Neste momento, os alunos conversam sobre a composição do metro com medidas iguais e começam a compor utilizando os pedaços de EVA. Junior faz uma conjectura pegando quatro pedaços de EVA amarelo com medida de 25 centímetros cada.

Figura 5 – Tarefa 2, resolução escrita dos alunos Antonio e Junior

TAREFA 2 – QUAIS AS FORMAS DE COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS?

A- Com os pedaços de EVA, faça as composições
B- Explique como você pensou para compor cada um.

Composição Nº 1: COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS:

$$25\text{cm} + 25\text{cm} + 25\text{cm} + 25\text{cm} = 100$$

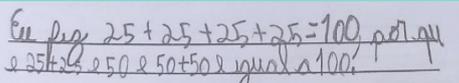
$$25 \times 4 = 100$$

Eu fiz $25 + 25 + 25 + 25 = 100$, por que
e $25 + 25 = 50$ e $50 + 50 = 100$.

Fonte: Dados da pesquisa

Após fazerem os cálculos mentalmente com os pedaços de EVA, os alunos registraram sua resolução na tarefa escrita. Na figura 5, podemos observar que Júnior desenhou quatro vezes 25 cm com o total 100. Depois, fez uma multiplicação colocando o resultado 1000, mas, em seguida, nota-se que ele conseguiu justificar a sua conjectura somando quatro vezes de 25 igual a 100, e 25 mais 25 igual é 50 e 50 mais 50 igual a 100.

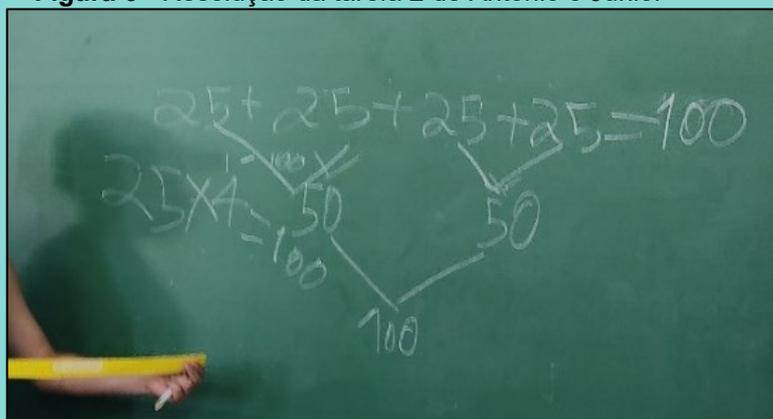
Quadro 6 - Síntese dos processos de raciocínio da dupla 1 na resolução da Tarefa 2

Diálogo/escrita	Processos desenvolvidos	Explicação dos processos desenvolvidos
Junior: Eu peguei 4 EVA amarelo.	Conjectura	Junior apresenta uma conjectura ao propor quatro pedaços de EVA amarelo que mede 25 centímetros cada.
Junior: Cada um tem 25, 25 mais 25 é 50 mais 25 é 75, mais 25, 100, é igual a um metro. 	Justificação	Nesse trecho Junior faz uma justificação, ele faz os cálculos para ter certeza de que completou 100 centímetros, o que é referente ao metro.

Fonte: Dados da pesquisa

A professora pediu aos alunos Junior e Antonio que explicassem para a turma como eles fizeram a tarefa, sendo a composição do metro com medidas iguais e qual a relação de uma parte dessa com o metro. Nesse momento, a professora dispôs o quadro para os alunos escreverem ou desenharem e explicou que não se preocupassem com o certo ou errado e que tanto os alunos que iriam explicar a tarefa quanto os alunos ouvintes poderiam interagir.

Figura 6 - Resolução da tarefa 2 de Antonio e Junior



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos demonstraram, segurando as quatro partes do EVA amarelo, e explicaram, escrevendo no quadro “ $25+25+25+25$, depois somaram $25+25=50$ e $25+25$ igual a 50, somaram $50+50$, totalizando os 100 centímetros como pode ser visto na figura 6. Após esse momento, eles fizeram outro registro no quadro conforme mostra a figura 7, representando as quatro partes de EVA, e a professora conduziu a discussão, questionando sobre o que cada parte representava em relação ao metro.

Professora: E a outra pergunta era o que cada parte dessa representa em relação ao metro?

Junior: Essa parte representa 25 de quatro.

Professora: 25 de 4 será que é isso?

Antônio: Essa parte representa uma parte de um metro.

Professora: Uma parte de um metro? Desenha pra mim e explica.

Professora: Pessoal, vocês estão vendo como eles fizeram? Vocês concordam, vocês podem concordar ou não, dar uma ideia.

Professora: Eles fizeram então 4 de 25 centímetros e agora? Uma parte dessas representa o quê, comparada ao metro?

Alunos: Não sei.

Professora: Uma parte dessa representa o quê, em relação ao metro? Circulou no quadro uma dessas partes.

Junior: Uma parte de quatro.

Alunos: A primeira parte.

Junior: Uma parte de 25.

Professora: Uma parte de 25?

Antonio: Uma parte de um metro.

Professora: Uma parte de um metro? E que parte é essa de um metro?

Junior: A primeira parte.

Professora: Muito bem.

Professora: Junior, o Antonio chegou até uma parte de um metro e você o que diz?

Junior: Uma parte de quatro.

Professora: Porque é uma parte de quatro?

Junior: Porque para formar o metro precisa quatro partes de 25.

Professora: Então quer dizer que para dar 1 metro precisou de quatro partes de 25 centímetros?

Junior: Isso.

Professora: Então, o Antônio chegou na conclusão de “uma parte de um metro” e o Junior a “uma parte de quatro”.

Figura 7 - Resolução da tarefa 2, alunos explicando para a turma



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos iniciaram uma discussão para explicar o que cada parte de 25 centímetros representa em relação ao metro. Junior disse que cada parte representava 25 de quatro. Apesar de não ser uma conjectura válida, ela deu suporte para formar uma conjectura válida. A professora questionou se era aquilo mesmo. Isso levou os alunos a pensar em outras possibilidades ou justificar o que estavam dizendo. Como podemos ver na figura 7, Antonio disse que a parte de 25 centímetros representa uma parte do metro, o que configura outra conjectura. A professora questionou os alunos e eles disseram que era a primeira parte. Junior concordou com os alunos e completou a conjectura, dizendo que era uma parte de quatro. Em seguida, a professora questionou dizendo: “Por que é uma parte de quatro?”, e ele justificou dizendo: “Porque, para formar o metro precisa quatro partes de 25”. Assim, os alunos justificaram a conjectura.

Quadro 7 - Síntese dos processos de raciocínio da dupla 1 na resolução da Tarefa 2

Diálogo	Processos desenvolvidos	Explicação dos processos desenvolvidos
Junior: Essa parte representa 25 de quatro.	Conjectura	Junior disse que uma parte do EVA de 25 centímetros comparada ao metro representa 25 de 4. Ele elaborou uma conjectura não válida.
Antonio: Essa parte representa uma parte de um metro.	Comparação e Conjectura	Antonio estava explicando que uma parte de 25 centímetros, comparada ao metro, representa uma parte de um metro, sendo uma comparação e uma conjectura.
Junior: A primeira parte.	Conjectura	Junior continuou elaborando sua conjectura, concordando com os alunos da turma e dizendo que a parte de EVA de 25 centímetros representa a primeira parte.
Junior: Uma parte de quatro.	Comparação Conjectura	Junior completou sua conjectura, quando disse que a parte de 25 centímetros representava uma parte de quatro. Nesse momento, ele fez uma comparação entre parte e todo.

Junior: Porque para formar o metro precisa quatro partes de 25.	Justificação	Quando a professora perguntou: “— Por que é uma parte de quatro”? Junior justificou, dizendo que, para formar o metro, precisava de quatro partes.
---	--------------	--

Fonte: Dados da pesquisa

Na tarefa, os alunos discutiram as suas opiniões, trabalharam em dupla, respeitando a opinião dos colegas, resolveram com autonomia e utilizaram desenhos e cálculos matemáticos. Evidenciaram os processos de comparação, de conjectura e de justificação, bem como os conteúdos de medidas de comprimento “metro”, multiplicação por parcelas iguais, dobro e adição, desenvolvendo “as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente” (BRASIL, 2018, p. 266).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este Produto Educacional apresentou parte da pesquisa sobre raciocínio matemático, as fundamentações teóricas, como o professor poderá construir o material didático, procedimentos e algumas análises dos processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos do quarto ano do Ensino Fundamental enquanto resolviam as tarefas exploratórias.

Refletindo sobre o ensino- aprendizagem exploratório, segundo Ponte (2010), na sala de aula, foi possível, aos alunos, descobrir estratégias para resolver as tarefas, discutir com os pares e, por fim, explicar e justificar para a turma como foram resolvidas as tarefas, desenvolvendo “as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente” (BRASIL, 2018, p. 266).

As tarefas exploratórias contribuíram para o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático dos alunos. Durante a resolução em duplas, os alunos evidenciaram alguns processos de raciocínio matemático, sendo eles: comparar, conjecturar e justificar, considerando que esse foi o objetivo inicial da pesquisa. Além disso, possibilitou a aprendizagem de conteúdos sobre medidas de comprimento e permite ao professor iniciar o conteúdo de frações e conversão de unidades de medidas.

Consideramos a importância da utilização dos materiais manipulativos nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A unidade temática Grandezas e medidas, como apresentada na BNCC (BRASIL, 2018, p. 289), menciona que é necessário propor aos alunos meios para “estimar, medir, comparar comprimentos, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas mais usuais (metro, centímetro e milímetro) e diversos instrumentos de medidas”, sendo o material didático aqui apresentado uma opção para efetivar essa habilidade.

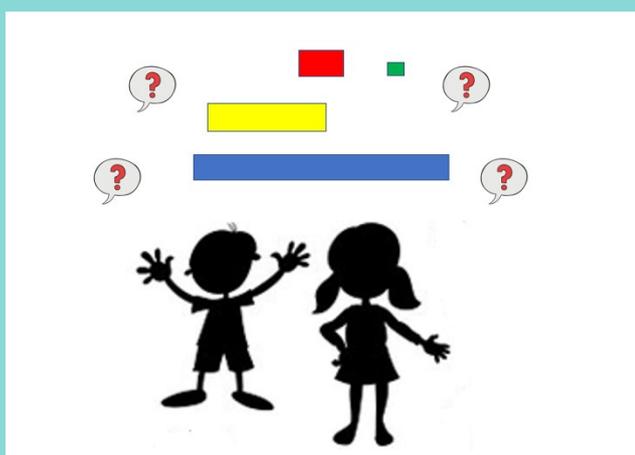
Nesta pesquisa, utilizamos a metodologia da Investigação Baseada em Design, a IBD. Essa metodologia propõe que, no percurso da pesquisa e ao final de um ciclo, ocorram modificações para a melhoria da prática com base nas teorias estudadas.

Diante disso, após a análise, sugerimos aqui uma sequência de tarefas exploratórias com algumas modificações e, como complemento, as tarefas 3, 4 e 5, seguindo a mesma unidade temática de medidas de comprimento com o apoio do material didático.

Agradeço a todos os colegas professores pela participação na leitura e por colocarem em prática na sala de aula os resultados da pesquisa deste produto educacional.

Segue a sequência de tarefas exploratórias reformuladas.

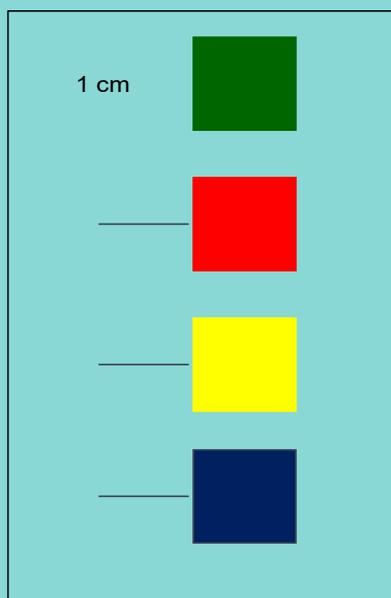
SEQUÊNCIA DE TAREFAS EXPLORATÓRIAS
MEDIDAS DE COMPRIMENTO
“METRO”



Janete Aparecida de Melo Bellini

Eliane Maria de Oliveira Araman

TAREFA 1 - OBSERVEM OS PEDAÇOS DE EVA E COMPLETE A LEGENDA:



A- Esses pedaços de EVA são iguais? Por quê?

R: _____

B- Utilizando os pedaços de EVA, quais as formas de compor o metro com diferentes medidas?

C- Explique como você chegou a essa medida de um metro. (Explicar oralmente mostrando a composição em EVA)

Composição nº 1

Registre explicando como você chegou a essa medida

Composição nº2

Registre explicando como você chegou a essa medida.

TAREFA 2 – QUAIS AS FORMAS DE COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS?

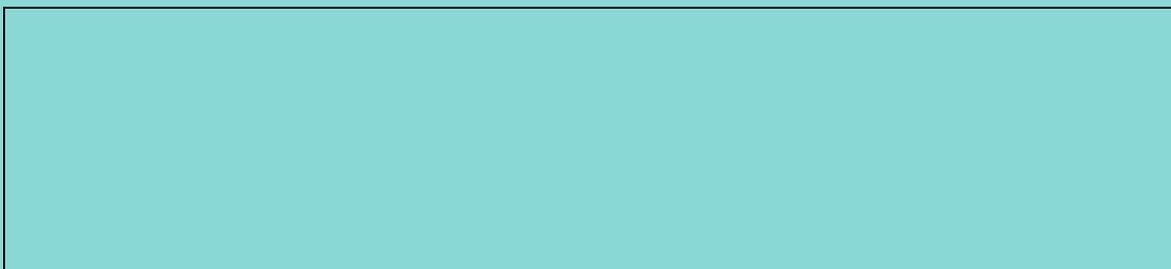
A- Com os pedaços de EVA, faça as composições

B- Explique como você pensou para compor cada um.

Composição Nº 1: COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS:

Composição Nº 2- COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS:

C- O QUE UMA PARTE DESSAS REPRESENTA EM RELAÇÃO AO METRO? EXPLIQUE



TAREFA 3– ANA INICIOU A COMPOSIÇÃO DO METRO COM 2 PEÇAS DE EVA AMARELO. QUAIS OUTRAS PEÇAS DE EVA ELA PODERÁ UTILIZAR PARA COMPLETAR O METRO?

- A- Complete a composição do metro com as peças de EVA.
- B- Explique e registre como você pensou para completar o metro.



TAREFA 4- LUIZA FEZ A COMPOSIÇÃO DO METRO UTILIZANDO DUAS CORES. QUAIS AS POSSIBILIDADES QUE LUIZA UTILIZOU PARA FORMAR O METRO?

- A- Com os pedaços de EVA faça composições do metro.
- B- Explique oralmente como você fez as composições do metro.
- C- Registre como você pensou para fazer as composições do metro.

TAREFA 5- ESCREVA UM RELATO DE COMO FOI APRENDER SOBRE O METRO COM ESSES TIPOS DE TAREFAS.

REFERÊNCIAS

- ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, João. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: **MEC**, 2018.
- JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, p. 1-16, set. 2017.
- MATA-PEREIRA, Joana.; PONTE, João. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781–801, 2018.
- MORAIS, Cristina; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, João. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n.4, p. 552-570, 2018.
- PONTE, João. Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. **Union – Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 21, p. 13-30, 2010.
- PONTE, João. Explorar e Investigar em Matemática: Desafio para os Alunos e Professores. **Movimento-Revista de Educação**, Lisboa, 2013.
- PONTE, João. Gestão Curricular em Matemática. **Associação dos Professores de Matemática**, Lisboa, p. 11-34, 2005.

Este Produto Educacional contempla, um pouco da fundamentação teórica de raciocínio matemático, sobre o ensino-aprendizagem exploratório, como construir e utilizar o material na sala de aula. Nele, o professor encontra os procedimentos para a aplicação das tarefas e algumas resoluções dos alunos do quarto ano. Também tem acesso à sequência de tarefas exploratórias que poderá ser aplicada em sala de aula com os alunos do Ensino Fundamental.

AUTORAS

Janete Aparecida de Melo Bellini

Eliane Maria de Oliveira Araman



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CAMPI CORNÉLIO PROCÓPIO E LONDRINA**

Contato: janetemelobellini3@gmail.com