

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MILAGROS NOEMI QUINTANA CASTILLO

**APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO PARA O CÁLCULO DA PRESSÃO
DE CONTATO EM SUPERFÍCIES RUGOSAS**

CURITIBA

2022

MILAGROS NOEMI QUINTANA CASTILLO

**APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO PARA O CÁLCULO DA PRESSÃO
DE CONTATO EM SUPERFÍCIES RUGOSAS**

**Application of Optimization Techniques for the Calculation of Contact Pressure
on Rough Surfaces**

Tese apresentada como requisito para obtenção do título de Doutora em Engenharia – Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos – do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Marco Antônio Luersen

Coorientador: Prof. Dr. Francisco José Profito

CURITIBA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Esta licença permite download e compartilhamento do trabalho desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-lo ou utilizá-lo para fins comerciais. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba



MILAGROS NOEMI QUINTANA CASTILLO

**APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO PARA O CÁLCULO DA PRESSÃO DE CONTATO EM
SUPERFÍCIES RUGOSAS**

Trabalho de pesquisa de doutorado apresentado como requisito para obtenção do título de Doutora Em Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Área de concentração: Mecânica Dos Sólidos.

Data de aprovação: 29 de Setembro de 2022

Dr. Marco Antonio Luersen, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Geralda Cristina Duraes De Godoy, Doutorado - Universidade Federal de Minas Gerais (Ufmg)

Maria Claudia Aguitoni, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Miguel Angel Uribe Opazo, Doutorado - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste)

Dr. Tiago Cousseau, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 29/09/2022.

Dedico este trabalho especialmente a Deus, cuja presença foi sentida durante a elaboração desta tese; e à minha mãe que sempre me apoiou desde o início da carreira, com os seus conselhos, amor, dedicação e compreensão.

AGRADECIMENTOS

A Deus, Pai, Criador, por me conceder as habilidades, oportunidades e condições para a realização deste trabalho e a quem devo todas as bênçãos da minha vida. Aos Anjos e Seres de Luz que estiveram presentes ao meu lado: protegendo e guiando a caminhos de muito aprendizado.

A minha amada família, em especial a minha mãe Luz Delícia e ao meu irmão Jesús André, conselhos, carinho, compreensão e pelo incentivo nesta jornada profissional.

Ao meu prezado orientador, professor Marco Luersen, pelo conhecimento transmitido, atenção e tempo dedicados durante a pesquisa e elaboração desta tese.

Aos professores Tiago Cousseau e Francisco Profito pela ideia inicial para a realização deste trabalho, e ao Prof. Francisco Profito também pelas sugestões ao longo do desenvolvimento da pesquisa.

Aos professores da UTFPR e colegas da pós-graduação, em especial à minha amiga Gracielle Lima, pela sua amizade.

Aos meus colegas da UDESC que me apoiaram para a realização dos meus estudos de doutorado, em especial a professora Elisa Henning pelo incentivo.

A todos os meus amigos que estiveram comigo neste período e por deixá-lo mais ameno, principalmente aos que continuaram presentes nesta fase final por compreender a minha ausência, em especial a minha Tia Rô (Rosane Teodoro), tia de coração.

A UDESC pelo apoio financeiro e liberação para cursar o doutorado.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. E obrigado a todos que oraram, torceram por mim e tornaram a minha vida mais alegre.

“Seja de verdade em tudo o que você faz!”
(site Pinterest).

RESUMO

O contato é um fenômeno que ocorre em vários componentes mecânicos como engrenagens, mancais de rolamentos, sistema roda-trilho de trens, para os quais a fadiga de contato é considerada uma das principais causas de falha. Por essa razão, analisar as pressões e tensões nos materiais em contato é de grande importância pois auxilia na previsão e avaliação de falhas relacionadas à superfície. Para situações reais, normalmente as pressões e tensões de contato são difíceis de serem obtidas e dependem de vários fatores como carga, propriedades dos materiais, área em contato e característica das superfícies. Todas as superfícies de componentes mecânicos são rugosas ao nível microscópico, independentemente do processo de fabricação empregado. A rugosidade da superfície afeta as características de contato como a distribuição local de pressão, as tensões na subsuperfície, a área real de contato e, conseqüentemente, a resistência de contato. Tais fatores afetam diretamente características como aderência, fricção, capacidade de carga, desgaste e fadiga dos componentes. Assim, um grande desafio está na determinação das distribuições de pressão e de tensões de contato na interface. Dentro desse contexto está inserida a presente pesquisa, cujo objetivo é propor, aplicar e avaliar métodos computacionais para calcular de forma eficiente a distribuição de pressão no contato entre superfícies rugosas. A formulação do problema de contato, considerado elástico, utiliza a abordagem de problema de complementaridade linear (LCP, do inglês *linear complementarity problem*), obtendo sua solução por diferentes técnicas de otimização: método de Lemke, programação quadrática, resolução da programação quadrática por mínimos quadrados não-negativos e o pacote Gubori. Nas simulações realizadas para os casos de contato em domínio unidimensional não ocorrem diferenças significativas entre os métodos utilizados, tanto quanto ao tempo computacional quanto aos valores das pressões e da região em contato. Já para os casos em domínio bidimensional, o método de Lemke, com uma modificação aqui proposta, apresenta vantagem com relação ao tempo computacional para obtenção da solução quando aplicado a superfícies lisas e virtuais, porém o método de resolução da programação quadrática por mínimos quadrados não-negativos se mostrou o mais rápido dentre os métodos testados quando aplicados a superfícies rugosas reais. Os resultados alcançados nas simulações, tanto para o contato onde o domínio é unidimensional quanto bidimensional, são de custo computacional baixo e são coerentes com observações de casos reais usuais, como: regiões de pressões máximas, pressões nulas em regiões sem contato, influência da rugosidade nos valores das pressões e das regiões de contato.

Palavras-chave: Contato elástico; Pressão de contato; Rugosidade; Problema de complementaridade linear; Otimização.

ABSTRACT

Contact is a phenomenon that occurs in various mechanical components such as gears, rolling bearings, wheel-rail systems, for which contact fatigue is considered one of the leading causes of failure. For this reason, analyzing the pressures and stresses in the materials in contact is of great importance as it aids in predicting and evaluating surface-related failures. In real situations, contact pressures and stresses are often challenging to obtain and depend on several factors, such as load, material properties, contact area, and surface characteristics. All mechanical component surfaces are microscopically rough, regardless of the manufacturing process employed. Surface roughness affects contact characteristics such as the local pressure distribution, subsurface stresses, real contact area and, consequently, the contact strength. Such factors directly affect characteristics such as adhesion, friction, load capacity, wear and fatigue of components. Thus, a major challenge lies in determining the interface's pressure and contact stress distributions. Within this context is inserted the present research, which objective is to propose, apply and evaluate computational methods to efficiently calculate the pressure distribution in the contact between rough surfaces. The formulation of the contact problem, considered elastic, uses the linear complementarity problem (LCP) approach, obtaining its solution by different optimization techniques: Lemke's method, quadratic programming, solving quadratic programming by non-negative least squares and the Gubori package. In the simulations carried out in one-dimensional domain contact cases, there are no significant differences among the methods used, either in terms of computational time or in the values of pressures and contact region. For the two-dimensional domain cases, the Lemke method, with a modification proposed here, presents advantages in terms of computational time to obtain the solution when applied to smooth and virtual surfaces; however, the method of solving the quadratic programming by non-negative least squares proved to be the fastest one among the tested methods when applied to real rough surfaces. The results achieved in the simulations, both for the contact where the domain is one-dimensional or two-dimensional, are low computational cost and consistent with observations of usual real cases, such as: regions of maximum pressures, null pressures in regions without contact, influence of roughness on the values of pressures and contact regions.

Keywords: Elastic contact; Contact pressure; Roughness; Linear complementarity problem; Optimization.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Tipos de Contato	26
Figura 2 - Contato Pontual	27
Figura 3 - Contato Linear	28
Figura 4 - Contato entre duas superfícies rugosas	32
Figura 5 - Contato não conforme entre dois corpos elásticos	40
Figura 6 – Indicação do deslocamento em $u(x,y)$ um ponto	41
Figura 7 - Domínio unidimensional discretizado	42
Figura 8 - Domínio bidimensional discretizado	43
Figura 9 - Distância inicial entre o Corpo 1 e o Corpo 2, domínio unidimensional	44
Figura 10 – Problema de contato liso, domínio unidimensional (condição inicial)	45
Figura 11 - Domínio unidimensional rugoso	47
Figura 12 - Domínio bidimensional rugoso	48
Figura 13 – Problema de contato rugoso (condição inicial)	49
Figura 14 - Diferença do g inicial, distância final após deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão para o contato entre dois cilindros (valores normalizados). Solução com LCPSolve ($N=128$)	62
Figura 15 - Diferença do g inicial, distância final após deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão para o contato entre dois cilindros (valores normalizados). Solução com LCPQuad ($N=128$)	62
Figura 16 - Diferença do g inicial, distância final após deformação entre os Corpos 1 e 2, e a pressão para o contato entre dois cilindros (valores normalizados). Solução com LCPGurobi ($N = 128$)	63
Figura 17 – Distribuição de pressão com $N = 64$	63
Figura 18 – Distribuição de pressão com $N = 1024$	64
Figura 19- Diferença do g inicial, distância final após deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão para o contato entre cilindro e plano (valores normalizados). Solução com LCPSolve ($N = 128$)	66
Figura 20 - Diferença do g inicial, distância final após deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão para o contato entre cilindro e plano (valores normalizados). Solução com LCPQuad ($N=128$)	66

Figura 21 - Diferença do g inicial, distância final após deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão para o contato entre cilindro e plano (valores normalizados). Solução com LCPGurobi ($N = 128$)	67
Figura 22 – Distribuição de pressão com $N = 64$	67
Figura 23 – Distribuição de pressão com $N = 1024$	68
Figura 24 – Perfil da função que representa a rugosidade a ondulação para problema de contato em domínio unidimensional.....	69
Figura 25 – Geometria do Corpo 1 para o caso de contato com ondulação unidimensional.....	69
Figura 26 – Diferença do g inicial, distância final após deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão normalizados com $N = 64$ utilizando o LCPSolve	71
Figura 27– Diferença do g inicial, distância final após deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão normalizados com $N = 64$ utilizando o LCPQuad	71
Figura 28 - Diferença do g inicial, distância final após deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão normalizados com $N = 64$ utilizando o LCPGurobi.....	72
Figura 29 Diferença do g inicial, distância final após deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão normalizados com $N = 1024$ utilizando o LCPSolve.....	72
Figura 30 - Diferença do g inicial, distância final após deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão normalizados com $N = 1024$ utilizando o LCPQuad	73
Figura 31 - Diferença do g inicial, distância final após deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão normalizados com $N = 1024$ utilizando o LCPGurobi.....	73
Figura 32 – Tempo de simulação para o contato pontual liso – Caso 1, malha 128 x 128.....	77
Figura 33 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2 após o contato, vista tridimensional (contato pontual liso – Caso 1, malha 128 x 128).....	78
Figura 34 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista bidimensional no plano xy (contato pontual liso, malha 128 x 128)	78
Figura 35 – Pressão de contato, vista tridimensional (contato pontual liso – Caso 1, malha 128 x 128)	79
Figura 36 – Pressão de contato, vista bidimensional no plano xy (contato pontual liso – Caso 1, malha 128 x 128).....	79
Figura 37 - Tempo de simulação para o contato pontual liso- Caso 2, malha 128 x 128.....	82

Figura 38 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista tridimensional (contato pontual liso – Caso 2, malha 128 x 128)	82
Figura 39 - Distância final após a deformação entres os Corpos 1 e 2, vista bidimensional no plano xy (contato pontual liso – Caso 2, malha 128 x 128	83
Figura 40 - Pressão de contato, vista tridimensional (contato pontual liso – Caso 2, malha 128 x 128)	83
Figura 41 - Pressão de contato, vista bidimensional no plano xy (contato pontual liso- Caso 2, malha 128 x 128).....	84
Figura 42 – Tempo de simulação para o contato de superfície com ondulações com variação no plano, malha 128 x 128.....	86
Figura 43 – Função da ondulação com variação bidimensional, vista tridimensional	87
Figura 44 – Função da ondulação com variação bidimensional, vista bidimensional no plano xy.....	87
Figura 45 – Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista tridimensional, malha 128 x 128	88
Figura 46 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista bidimensional no plano xy, malha 128 x 128.....	88
Figura 47 – Pressão de contato, vista tridimensional, malha 128 x 128	89
Figura 48 - Pressão de contato, vista bidimensional no plano xy, malha 128 x 128	89
Figura 49 - Tempo de simulação para o contato de superfície com ondulações com variação unidimensional, malha 128 x 128.....	92
Figura 50 - Função da ondulação com variação unidimensional, vista tridimensional	92
Figura 51 - Função da ondulação com variação unidimensional, vista bidimensional no plano xy.....	93
Figura 52 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista tridimensional, malha 128 x 128	94
Figura 53 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista bidimensional no plano xy, malha 128 x 128	94
Figura 54 – Pressão de contato, vista tridimensional, malha 128 x 128	95
Figura 55 – Pressão de contato, vista bidimensional no plano xy, malha 128 x 128....	95

Figura 56 – Rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna, vista tridimensional (malha 702 x 702)	98
Figura 57 - Rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna, vista de topo-plano xy (malha 702 x 702)	98
Figura 58 - Aproximação da rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna por malha 32 x 32 (vista tridimensional).....	99
Figura 59 – Aproximação da rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna por malha 32 x 32 (vista de topo- plano xy).....	99
Figura 60 - Aproximação da rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna por malha 64 x 64, vista tridimensional	100
Figura 61 – Aproximação da rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna por malha 64 x 64 (vista de topo - plano xy)	100
Figura 62– Aproximação da rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna por malha 128 x 128, vista tridimensional.....	101
Figura 63 – Aproximação da rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna por malha 128 x 128 (vista de topo - plano xy)	101
Figura 64 - Tempo de simulação para superfície com rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna, malha 128x128 (domínio bidimensional)	104
Figura 65 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vistas tridimensionais.....	104
Figura 66 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista bidimensional do plano xy.....	105
Figura 67 – Pressão de contato, vista tridimensional, malha 128 x 128	106
Figura 68– Pressão de contato, vista bidimensional do plano xy, malha 128 x 128 ...	106
Figura 69 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) de uma superfície de cilindro de motor de combustão interna (seção $y = 0$ mm)	108
Figura 70 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) de uma superfície de cilindro de motor de combustão interna (seção $y = 0,2$ mm).....	108
Figura 71 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) de uma superfície de cilindro de motor de combustão interna (seção $y = 0,4$ mm).....	109

Figura 72 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) de uma superfície de cilindro de motor de combustão interna (seção $y = 0,6$ mm).....	109
Figura 73 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) de uma superfície de cilindro de motor de combustão interna (seção $y = 0,8$ mm).....	110
Figura 74– Rugosidade de superfície polida com lixa 1200, vista tridimensional (malha 702 x 702)	112
Figura 75- Rugosidade de superfície polida com lixa 1200, vista do plano xy (malha 702 x 702)	112
Figura 76 - Aproximação da rugosidade de superfície polida com lixa 1200 por malha 32 x 32, vista tridimensional.....	113
Figura 77 - Aproximação da rugosidade de superfície polida com lixa 1200 por malha 32 x 32 (plano xy)	113
Figura 78- Aproximação da rugosidade de superfície polida com lixa 1200 por malha 64 x 64, vista tridimensional	114
Figura 79- Aproximação da rugosidade de superfície polida com lixa 1200 por malha 64 x 64 (plano xy).....	114
Figura 80 – Aproximação da rugosidade de superfície polida com lixa 1200 por malha 128 x 128, vista tridimensional.....	115
Figura 81– Aproximação da rugosidade de superfície polida com lixa 1200 por malha 128 x 128, (plano xy)	115
Figura 82 - Tempo de simulação para superfície polida com lixa 1200, malha 128x128 (domínio bidimensional)	118
Figura 83 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista tridimensional.....	118
Figura 84 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista bidimensional no plano xy.....	119
Figura 85– Pressão de contato, vista tridimensional malha 128 x 128.....	120
Figura 86 – Pressão de contato, vista bidimensional no plano xy, malha 128 x 128.....	120
Figura 87 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) de uma superfície polida com lixa 1200 (seção $y = 0$ mm).....	122

Figura 88 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) de uma superfície polida com lixa 1200 (seção $y = 0,2$ mm)	122
Figura 89 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) de uma superfície polida com lixa 1200 (seção $y = 0,4$ mm)	123
Figura 90 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) de uma superfície polida com lixa 1200 (seção $y = 0,6$ mm)	123
Figura 91 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) de uma superfície polida com lixa 1200 (seção $y = 0,8$ mm)	124

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados para o caso de contato entre dois cilindros lisos (domínio unidimensional)	61
Tabela 2 – Resultado para o caso de contato entre cilindro e plano lisos (domínio unidimensional)	65
Tabela 3 – Resultados para o caso de contato com um perfil ondulado (domínio unidimensional).	70
Tabela 4 – Resultados no contato pontual liso – Caso 1 (domínio bidimensional)....	76
Tabela 5 - Valores analíticos de força, pressão e raio de contato para o contato pontual liso – Caso 1 (domínio bidimensional)	76
Tabela 6 - Resultados no contato pontual liso – Caso 2 (domínio bidimensional).....	81
Tabela 7 - Valores analíticos de força, pressão e raio de contato para o contato pontual liso – Caso 2 (domínio bidimensional)	81
Tabela 8 – Resultados para o contato em domínio bidimensional de superfície com ondulações com variação no plano.....	86
Tabela 9 – Resultado para o contato em domínio bidimensional de superfície com ondulações com variação unidimensional	91
Tabela 10 – Resultados para o caso de contato de superfície com rugosidade de cilindro de motor de combustão interna (domínio bidimensional).....	103
Tabela 11 - Resultados das seções transversais para o caso de contato com rugosidade de cilindro de motor de combustão interna	111
Tabela 12 - Resultados para o contato com superfície polida com lixa 1200 (domínio unidimensional)	117
Tabela 13 - Resultados das seções transversais para o caso de contato com superfície polida com lixa 1200.....	124

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LCP	Problema de Complementaridade Linear (sigla do inglês <i>Linear Complementarity Problem</i>)
LCPGurobi	Método de solução que utiliza o pacote Gurobi
LCPMin	Método de solução através de Mínimos Quadrados Não-Negativos
LCPQuad	Método de Solução via Programação Quadrática
LCPSolve	Método de Solução proposto por Almqvist (método de Lemke)
LCPSolve_MQC	Modificação do LCPSolve proposta por Milagros Quintana Castillo
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
min	Minimização

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Semieixo maior da elipse da área de contato pontual
A_r	Área real de contato
$A(x, y, x', y')$	Função de influência do deslocamento normal na posição (x, y) da superfície, devido a uma pressão unitária na posição (x', y')
b	Semi-largura do contato linear ou semieixo menor da elipse da área de contato pontual
$e(x, y)$	Distância normal entre as superfícies no ponto (x, y) do domínio estudado
\mathbf{e}	Vetor que representa a distância normal entre as superfícies nos pontos da malha
E_1	Módulo de elasticidade do Corpo 1
E_2	Módulo de elasticidade do Corpo 2
E'	Módulo de elasticidade efetivo
E^*	Módulo de elasticidade combinado/equivalente
F	Força normal de contato
$f(\mathbf{x})$	Função objetivo
$f(\mathbf{p})$	Função objetivo no ponto ótimo calculado (pressão)
\mathbf{g}	Vetor que representa a separação inicial na malha
G	Módulo de cisalhamento combinado/equivalente
g_0	Distância (ou separação) inicial do ponto ou superfície de referência do Corpo 1
g_{max}	Separação inicial máxima
g_{min}	Separação inicial mínima
\mathbf{gs}	Vetor da distância normal do Corpo 1 até a superfície de referência ($z = 0$) nos pontos da malha
$g(x, y)$	Distância (ou separação) ao ponto (x, y) do domínio estudado
ix	Intervalo no eixo x
iy	Intervalo no eixo y
\mathbf{K}	Matriz de influência

K_{ij}	Elemento do tensor/matriz de influência
N	Newtons
N	Número de nós da malha em uma direção do domínio
MPa	Mega Pascal
\mathbf{p}	Vetor da pressão de contato nos pontos na malha
Pa	Pascal
p_0	Pressão máxima do contato
$p(x, y)$	Pressão no ponto (x, y) do domínio estudado
\mathbf{r}	Vetor que contém o valor dos picos de rugosidade nos pontos da malha
R	Raio de curvatura reduzido
R_x	Raio de curvatura reduzido na direção do eixo x no contato pontual
R_y	Raio de curvatura reduzido na direção do eixo y no contato pontual
R_1	Raio de curvatura do Corpo 1 no contato linear
R_2	Raio de curvatura do Corpo 2 no contato linear
R_{1x}	Raio de curvatura na direção o eixo x do Corpo 1 no contato pontual
R_{1y}	Raio de curvatura na direção o eixo y do Corpo 1 no contato pontual
R_{2x}	Raio de curvatura na direção o eixo x do Corpo 2 no contato pontual
R_{2y}	Raio de curvatura na direção o eixo y do Corpo 2 no contato pontual
S	Região/Domínio estudado
s	Segundos
\mathbf{u}	Vetor que representa o deslocamento normal dos pontos na malha
$u(x, y)$	Deslocamento normal no ponto (x, y) do domínio estudado
ν	Coefficiente de Poisson combinado/equivalente
ν_1	Coefficiente de Poisson do Corpo 1
ν_2	Coefficiente de Poisson do Corpo 2
\mathbf{x}	Vetor com os pontos do domínio discretizado / Vetor das variáveis de projeto em um problema geral de otimização
(x, y)	Coordenada de um ponto no domínio bidimensional
$\ \cdot \ $	Norma euclidiana

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	20
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	20
1.2 OBJETIVOS	21
1.3 JUSTIFICATIVA E CONTRIBUIÇÃO	21
1.4 CONTEÚDO DO TRABALHO	22
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1 MECÂNICA DO CONTATO	23
2.1.1 Contato Elástico	25
2.1.2 Contato em Superfícies Rugosas	30
2.2 OTIMIZAÇÃO	34
2.3 PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE LINEAR (LCP)	36
3. METODOLOGIA	39
3.1 APLICAÇÃO DO LCP NA OTIMIZAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO	39
3.2 TRATAMENTO DA RUGOSIDADE NO LCP	47
3.3 ALGORITMOS UTILIZADOS E IMPLEMENTADOS	49
3.4 DADOS DE ENTRADA E SAÍDA DAS SIMULAÇÕES	52
3.5 MONTAGEM DA MATRIZ DE INFLUÊNCIA	55
3.5.1 Contato em Domínio Unidimensional	55
3.5.2. Contato em Domínio Bidimensional	57
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	59
4.1 CONTATO EM DOMÍNIO UNIDIMENSIONAL	59
4.1.1. Contato em Domínio Unidimensional entre Superfícies Lisas	60
4.1.1.1 Contato entre Dois Cilindros	60
4.1.1.2 Contato entre Cilindro e Plano	64
4.1.2. Contato em Domínio Unidimensional com Perfil Ondulado Virtual	68
4.2 CONTATO EM DOMÍNIO BIDIMENSIONAL	72
4.2.1. Contato em Domínio Bidimensional entre Superfícies Lisas	74
4.2.1.1 Contato Pontual - Caso 1	74
4.2.1.2 Contato Pontual - Caso 2	80
4.2.2. Contato em Domínio Bidimensional com Superfícies Onduladas Virtuais	84
4.2.2.1 Superfície com Ondulações com Variação no Plano	84

4.2.2.2 Superfície com Ondulação com Variação Unidimensional	90
4.3 CONTATO DE SUPERFÍCIES RUGOSAS REAIS	96
4.3.1 Superfície com Rugosidade de um Cilindro de Motor de Combustão Interna .	97
4.3.1.1 Simulação em Domínio Bidimensional do Contato com Superfície de Cilindro de Motor de Combustão Interna	102
4.3.1.2 Simulação em Domínio Unidimensional do Contato com Superfície de Cilindro de Motor de Combustão Interna	107
4.3.2. Simulação com Rugosidade de uma Superfície Polida com Lixa 1200	111
4.3.2.1 Simulação em Domínio Bidimensional do Contato com Superfície Polida com Lixa 1200... ..	116
4.3.2.2 Simulação em Domínio Unidimensional do Contato com Superfície Polida com Lixa 1200	121
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	125
5.1 CONCLUSÕES GERAIS	125
5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	126
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	128

1. INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Josso, Burton e Lalor (2002) afirmam que a topografia das superfícies dos materiais pode ser descrita como sendo a sobreposição de três componentes: forma, ondulação e rugosidade, de tal maneira que quase todas as superfícies de engenharia são rugosas ao nível microscópico, independentemente do seu método de produção. Como resultado, o contato real entre duas superfícies ocorre em microprotrusões de uma superfície. A compreensão da natureza das interações entre esses componentes da topografia é de grande interesse de pesquisa, pois eles exercem um papel fundamental sobre o desempenho de diferentes sistemas tribológicos (FU et al., 2020).

Problemas de contato em engenharia foram estudados e desenvolvidos por décadas, principalmente aqueles relacionados ao contato entre corpos elásticos. A análise das tensões nos materiais em contato é de significativa importância para o projeto de componentes mecânicos. O conhecimento do campo de tensões nas regiões de contato fornece uma base para a investigação de falhas relacionadas à superfície, como o surgimento de trincas, desgaste, ruptura de material e fadiga (JACKSON; GREEN, 2006, HE et al.; 2021). Quando dois corpos são pressionados um contra o outro, uma área de contato é formada na região de interação entre os corpos, portanto um dos desafios está na identificação e estimativa do valor dessa área, bem como das distribuições de pressão e de tensões na interface (ZHAO; VOLLEMBREGT; OOSTERLEE, 2014).

Já a rugosidade da superfície afeta as características de contato, como as distribuições de pressão e de tensões subsuperficiais, a área real de contato e a sua resistência. Tais fatores afetam diretamente a capacidade de carga e de aderência e, conseqüentemente, o comportamento ao desgaste e à fadiga dos tribocomponentes (BEHESHTI; KHONSARI, 2014).

A quantidade de dados e, conseqüentemente, o tamanho dos sistemas de equações relacionados ao cálculo da distribuição de pressões em superfícies rugosas reais pode ser bastante grande (da ordem de centenas de milhares de pontos), pois são provenientes de amostras de topografias medidas por perfilometria ou ótica de alta resolução. Portanto, é de fundamental importância o desenvolvimento e

aprimoramento de técnicas computacionais que possam resolver problemas de contato com muitos graus de liberdade de forma rápida e eficiente.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral da presente pesquisa é desenvolver e aplicar técnicas computacionais eficientes e rápidas para o cálculo da distribuição da pressão de contato em superfícies rugosas.

A proposta é modelar o contato sem atrito entre dois corpos elásticos como um problema de complementaridade linear (LCP), transformá-lo em um problema de otimização e solucioná-lo como tal. A introdução da rugosidade no problema é feita sobre a superfície de referência de um dos corpos, através de funções analíticas ou através de dados de medições e topografias reais, não alterando a formulação geral do LCP. Com o problema formulado e os algoritmos desenvolvidos, são realizadas simulações de estudos de casos e verificação do desempenho dos métodos.

1.3 JUSTIFICATIVA E CONTRIBUIÇÃO

Persson, Bucher e Chiaia (2002) explicam que mesmo uma superfície altamente polida apresenta rugosidade superficial com muitas escalas de comprimento diferentes, não sendo fácil aplanar igualmente as superfícies rugosas por deformação plástica das asperezas. Por esse motivo, estudar o problema de contato entre superfícies rugosas torna-se de suma importância, pois pode-se prever o comportamento tribológico de componentes de forma mais acurada e realista em comparação a análises cujas superfícies são admitidas lisas. Além disso, quanto mais ágil e acurado o método de solução para tal comportamento, mais econômicas se tornam o desenvolvimento de aplicações industriais correspondentes (isto é, viabilizam projetos de menor custo e/ou maior vida útil dos componentes mecânicos).

Para alcançar o objetivo proposto são utilizados métodos de resolução matemática já existentes, cuja contribuição foi em desenvolver ações - seja acrescentando ou modificando e aprimorando funções e códigos computacionais - de

modo que esses algoritmos consigam resolver os problemas de contato em superfícies rugosas em um domínio bidimensional de forma ágil. Destaca-se também que alguns desses métodos não foram previamente aplicados ao problema de contato rugoso em domínio bidimensional.

1.4 CONTEÚDO DO TRABALHO

O presente texto está organizado em cinco capítulos. O Capítulo 1 apresenta uma contextualização do tema bem como os objetivos e justificativas para o desenvolvimento da pesquisa.

O Capítulo 2 aborda conceitos fundamentais de mecânica necessários ao desenvolvimento da presente pesquisa, tais como: mecânica do contato entre sólidos elásticos e contato entre superfícies rugosas. Adicionalmente é apresentada uma introdução sobre as ferramentas matemáticas que são utilizadas para a solução do problema de contato: Problema de Complementaridade Linear (LCP) e Técnicas de Otimização. Também é realizada uma revisão sobre pesquisas recentes com escopo similar ao presente trabalho.

No Capítulo 3 é mostrada a metodologia utilizada no desenvolvimento da pesquisa, a formulação matemática do problema de contato como um LCP e a maneira como este pode ser visto de um aspecto de otimização quadrática.

Já no Capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos tanto para superfícies lisas quanto rugosas aplicadas a um contato onde o domínio é unidimensional e bidimensional com dados de metais escolhidos aleatoriamente para verificar a eficiência do método proposto.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

Finalmente, após o Capítulo 5, são apresentadas as referências bibliográficas.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 MECÂNICA DO CONTATO

Define-se “mecânica do contato” como o estudo das deformações em sólidos que se tocam em um ou mais pontos. Estudos mais aprofundados acerca da mecânica do contato tiveram início na década de 1880 com a publicação de Heinrich Hertz em seu artigo clássico sobre o contato entre sólidos elásticos, que resolveu o problema de contato entre dois corpos elásticos com contornos convexos. Entretanto, aplicações da teoria não apareceram na literatura até o início do século XX, sendo fomentada pela necessidade de aplicação da engenharia nas ferrovias e em redutores marítimos. Tal teoria se restringia a sólidos perfeitamente elásticos e superfícies sem atrito, além de afirmar que a tensão próxima à área de contato é maior que em outras áreas do corpo, assumindo que a área de contato é consideravelmente menor que o tamanho dos corpos envolvidos (JOHNSON, 1985).

O contato entre superfícies proporciona a transferência de esforços mecânicos entre corpos gerando tensões de contato, que são resultantes dos esforços. O conhecimento e cálculo dessas tensões tem influência na prevenção de falhas de superfícies (DUARTE, 2016). Segundo Persson (2006), o interesse no estudo do contato entre duas superfícies é baseado em sua alta relevância na transferência de calor, desgaste, atrito e adesão, que são fenômenos que ocorrem em qualquer tipo de contato tribológico. Para Popov (2010), pesquisas nesse campo são muito importantes na mecânica, visto que o contato de corpos ocorre em todas as interfaces que transmitem força, movimento ou ambos. Uma particularidade na mecânica do contato é o estudo de tensões, as quais podem agir perpendicularmente às superfícies dos corpos em contato (tensões normais) e tensões geradas pelo atrito, agindo tangencialmente às superfícies (tensões cisalhantes).

Classicamente, os problemas de contato são modelados por meio de uma condição de não penetração entre um corpo elástico e um obstáculo ou base rígida. Quando ocorre esse fenômeno, o problema recebe o nome de Problema de Contato de Signorini (GIUSTI; SOKOLOWSKI; STEBEL, 2014). Soluções analíticas desse problema têm sido muito estudadas pelos matemáticos nos últimos anos e, com o surgimento do computador e o desenvolvimento de métodos numéricos para a

simulação de uma ampla gama de problemas de engenharia, originou-se o campo da mecânica de contato computacional (ARAGÓN; MOLINARI, 2014).

Neto, Pimenta e Wriggers (2018) utilizaram o método dos elementos finitos (MEF) e estabeleceram um método matemático para interações entre esferas e corpos rígidos ou flexíveis baseado nos graus de liberdade de rotação e translação usados para mapear o movimento das superfícies de contato. Também Neto, Oliveira e Menezes (2017) simularam, via MEF, um problema de contato com atrito e com grandes deformações, introduzindo as leis de interface para os componentes de tensão normal e tangencial na área de contato.

Os problemas de contato ocorrem ainda em mancais de rolamento. As cargas suportadas produzem altas tensões de contato nas pistas de rolamento, as quais são difíceis de prever e validar experimentalmente, e podem causar defeitos como corrosão e desgaste por fadiga de contato. Em resposta, modelos teóricos e numéricos têm sido propostos e utilizados por muitos pesquisadores para calcular a distribuição aproximada das tensões de contato nas pistas de rolamento (SHAH; PATEL; TRVEDI, 2016, LI, 2018, TJARE et al., 2020, entre muitos outros).

De acordo com Rademacher e Rosin (2018), os problemas de contato satisfazem as leis da elasticidade dos materiais, restritas pelas condições de contato superficial. Se o problema de contato for do tipo Signorini, ao descrevê-lo matematicamente, nas suas condições de fronteira ocorrem desigualdades devido à não penetração do obstáculo rígido.

O método dos elementos finitos também auxilia na resolução de problemas de contato com atrito, já que são problemas difíceis de simular com métodos numéricos, pois são sempre não lineares (ZHONG; YAN; LV, 2018).

Yashar, Castelleto e Tchelepi (2021) realizaram um estudo sobre a mecânica de contato com fricção de corpos linearmente elásticos em pequenas deformações e citam aplicações para o problema de contato em meios geológicos porosos, incluindo a preservação da integridade das rochas de cobertura no armazenamento de dióxido de carbono, a extração de energia geotérmica e o fraturamento hidráulico de reservatório de hidrocarbonetos. Na escala de micrometros, os contatos coincidem com rachaduras ou defeitos na estrutura cristalina de uma rocha. Na escala de campo, os contatos correspondem a falhas ou fraturas que atuam como conduítes primários para o fluxo de fluido. Em ambos os casos, a presença de contatos influencia significativamente a deformação mecânica do meio poroso.

Por outro lado, Sofonea, Xiao e Couderc (2019) afirmam que a teoria matemática da mecânica de contato fornece subsídios para a análise de tais modelos, incluindo resultados de existência, singularidade e dependência contínua das soluções em relação aos dados e parâmetros. A teoria é apresentada como problemas de valor de contorno fortemente não lineares e geralmente não possuem soluções clássicas. Os modelos matemáticos de contato levam a uma grande variedade de formulações fracas, expressas em termos de desigualdades variacionais ou hemivariacionais.

2.1.1 Contato Elástico

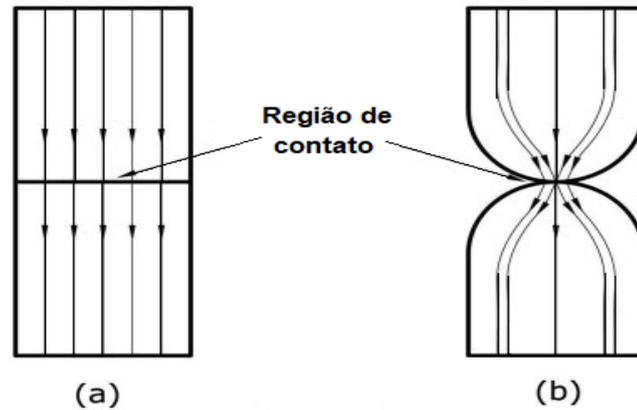
O comportamento elástico de um material é caracterizado pela ausência de deformações permanentes após o material ser submetido a carregamentos e descarregamentos. Isso significa que em qualquer ciclo de carga desse tipo, as curvas de tensão *versus* deformação são coincidentes. Uma vez cessado o carregamento, as tensões e deformações retornam ao patamar inicial, ou seja, o contato elástico é um contato mecânico entre dois corpos e, após cessar as tensões que os fazem entrar em contato, esses voltam ao estado original.

Segundo Sampaio (2009), pode-se classificar o contato entre dois sólidos em:

- **contato sem atrito:** os sólidos deslizam ou rolam uns sobre os outros sem que haja resistência na direção tangencial à superfície de contato (força tangencial nula). Dessa forma o carregamento externo na interface é somente de compressão normal;
- **contato com atrito:** uma força de atrito é desenvolvida na interface, sendo esta a componente de resistência tangencial nos pontos de contato das superfícies;
- **contato conforme:** ocorre quando a superfície potencial de contato entre dois sólidos está ajustada num estado sem carregamento. Uma das principais características é que ao final do carregamento, a superfície de contato é aproximadamente a mesma daquela na configuração inicial, conforme mostrado na Figura 1(a);
- **contato não-conforme:** ocorre em torno de um ponto, como o contato entre duas esferas; ou em torno de uma linha, por exemplo um cilindro

e uma superfície plana. Assim, a área de contato se altera com a aplicação do carregamento, como mostrado na Figura 1(b).

Figura 1 - Tipos de contato: (a) conforme e (b) não-conforme



Fonte: Kumar e Tariq (2019)

O modelo de contato elástico proposto por Hertz - em que há dois corpos convexos não conformes e a região de contato é muito menor que o raio de curvatura dos corpos - ainda hoje é considerado como uma solução prática para problemas de contato sem rugosidade e sem atrito sob a ação de uma solicitação externa e permite determinar os deslocamentos e tensões correspondentes (BARBOSA; GHABOUSSI, 1990; SHATERZADEH-YAZDI, 2015).

Uma característica importante do contato de Hertz é que a deformação do contato é altamente localizada e o tamanho da região de contato é muito menor que as dimensões dos corpos envolvidos. Portanto, o corpo de contato pode ser considerado matematicamente um semiespaço elástico, em comparação com a área de interação.

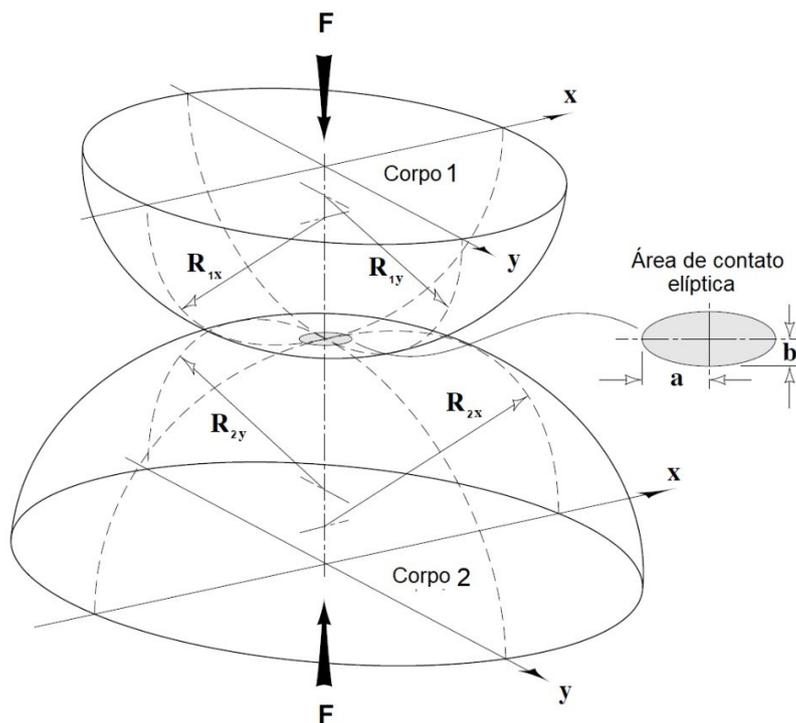
As hipóteses de Hertz são também utilizadas em modelos para simulações computacionais da distribuição da pressão de contato. Porém, isso depende do alcance da aplicação e de suas fórmulas de contato, pois podem ou não ser válidas, dependendo das propriedades do material e da geometria do contato. As propriedades elásticas do material devem ser semelhantes e regidas pela Lei de Hooke. As fórmulas de contato de Hertz são para corpos com superfícies lisas e podem ser usadas para estimar a região de contato e tensões causadas pela carga total sobre a superfície. Já análises de contato próximo à superfície e de suas tensões, bem como estudos

relacionados à tribologia, exigem soluções numéricas que tratam a superfície rugosa como parte do modelo de contato.

A presente pesquisa foi desenvolvida considerando o contato conforme entre planos e não conforme, dividindo-o em contato pontual e contato linear.

O contato é denominado pontual pois inicialmente os corpos se tocam em apenas um ponto. À medida que o carregamento é aplicado, surge uma área de contato em forma de elipse com semieixos “a” e “b”, conforme mostrado na Figura 2. Esse foi o contato originalmente considerado por Hertz em 1881: dois corpos elásticos, 1 e 2, de superfície convexa, sendo o Corpo 1 com raios de curvaturas em x e y (respectivamente R_{1x} e R_{1y}) e um Corpo 2 com raios de curvaturas em x e y (respectivamente R_{2x} e R_{2y}). Quando o Corpo 2 é um plano, seus raios de curvaturas R_{2x} e R_{2y} são considerados infinitos.

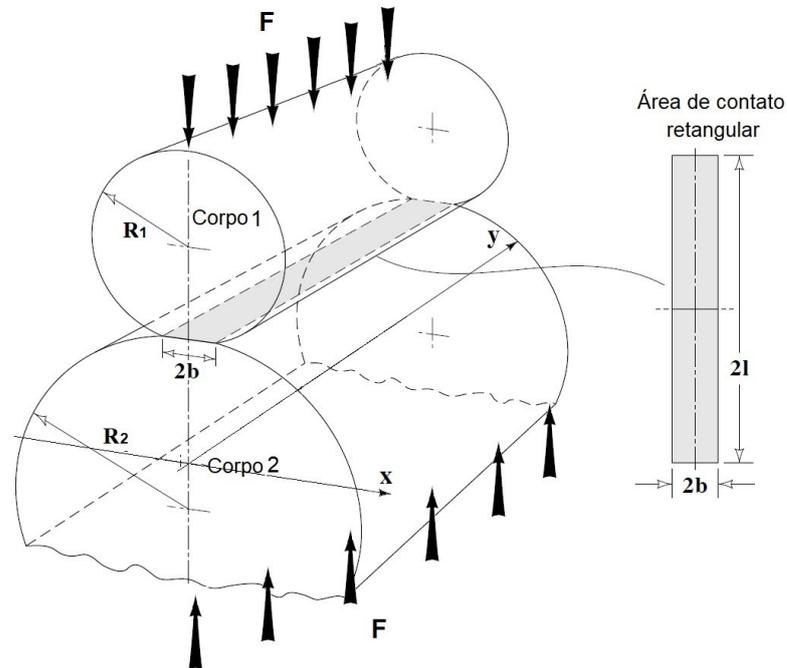
Figura 2 - Contato pontual



Fonte: adaptado de Stachowiak e Batchelor (1993)

O outro tipo de contato não-conforme a ser estudado é o contato linear, representado na Figura 3. Note que os raios de curvaturas dos corpos 1 e 2 ao longo da direção y são considerados infinitos, dessa forma a região de contato inicialmente é uma linha (antes das forças serem aplicadas) e, em seguida, forma um retângulo.

Figura 3 - Contato linear



Fonte: adaptado de Stachowiak e Batchelor (1993)

Johnson (1985) explica que quando dois corpos elásticos com superfícies de raios de curvaturas positivos estão em contato, e se seus deslocamentos são suficientemente pequenos de modo que a teoria da elasticidade linear seja aplicável, origina-se uma área de contato cujas dimensões são muito pequenas se comparadas com os raios de curvaturas das superfícies não deformadas. As pressões de contato e as correspondentes tensões geradas estão altamente concentradas na vizinhança da zona de contato, diminuindo rapidamente de intensidade com a distância em relação ao ponto inicial onde ocorre o contato. Logo, a zona de interesse situa-se junto à área de contato. Assim, desde que as dimensões dos corpos sejam grandes em comparação com as dimensões da área de contato, as tensões nesta região não dependem da geometria dos sólidos em zonas afastadas do contato nem do modo como estão ligados ao exterior. As tensões podem ser calculadas com uma boa aproximação considerando cada corpo como um sólido elástico semi-infinito, limitado por uma superfície plana e submetido a uma solitação concentrada, isto é, um semiespaço elástico.

Johnson (1985) apresenta algumas fórmulas de tensão de contato elástico de Hertz. Considerando os sólidos como apresentados nas Figuras 2 e 3, sendo:

Corpo 1: módulo de elasticidade E_1 , coeficiente de Poisson ν_1 , raio de curvatura R_1 ;
 Corpo 2: módulo de elasticidade E_2 , coeficiente de Poisson ν_2 , raio de curvatura R_2 .

Então o módulo de elasticidade equivalente é dado por:

$$E^* = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (1)$$

e o raio equivalente dado por:

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (2)$$

Dessa forma, aplicando um carregamento F , onde F representa uma força por unidade de comprimento no contato linear e uma força concentrada no contato pontual, os valores de semi-largura ou raio de contato e de pressão máxima são calculados como descrito abaixo.

- Semi-largura de contato para o caso de contato linear:

$$b = \left(\frac{4FR}{\pi E^*} \right)^{1/2} \quad (3)$$

- Pressão máxima no contato linear:

$$p_0 = \frac{2F}{\pi b} = \left(\frac{FE^*}{\pi R} \right)^{1/2} \quad (4)$$

- Raio de contato para o caso de contato pontual circular¹:

¹ O contato pontual circular (ou apenas *contato circular*) é um caso especial do contato pontual quando as geometrias dos dois corpos são esféricas, isto é, cada corpo possui o mesmo raio de curvatura em relação a ambos os eixos. A solução do contato circular é aqui apresentada pois é utilizada para comparação com os resultados das simulações numéricas, conforme apresentado na Seção 4.2.

$$a = \left(\frac{3FR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (5)$$

- Pressão máxima no contato pontual circular:

$$p_0 = \frac{3F}{2\pi a^2} = \left(\frac{6FE^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (6)$$

2.1.2 Contato em Superfícies Rugosas

Segundo Rey e Bleyer (2018), tanto as superfícies na natureza quanto as fabricadas, mesmo que pareçam lisas de um ponto de vista macroscópico, na verdade apresentam asperezas em várias escalas de comprimento e características variadas. Na prática, todas as superfícies são rugosas até certo ponto, e é muito importante entender a natureza dessas rugosidades e seu efeito sobre os problemas de contato para poder analisar as situações mais próximas da realidade (WEBER; SUHINA; JUNGE, 2018).

O tamanho dessas asperezas depende do material e de como a superfície foi criada ou fabricada. Mesmo as superfícies mais lisas têm imperfeições microscópicas em seu acabamento, que podem ser detectadas usando um instrumento suficientemente preciso. A área real de contato e a separação entre superfícies rugosas são parâmetros significativos em vedação e lubrificação. No entanto, é um desafio observar experimentalmente os comportamentos de contato entre superfícies rugosas, pois as regiões em contato geralmente não são acessíveis para observação visual direta. De fato, superfícies rugosas são frequentemente modeladas como superfícies com um rico espectro de comprimentos de onda. A mecânica do contato entre superfícies rugosas visa explicar as complexas interações entre essas asperezas. Compreender como é o domínio de contato e as variáveis de contato - como carga, área real de contato, rigidez de contato e muitos outros aspectos que dependem das propriedades morfológicas da rugosidade - é considerado um desafio ainda nos dias atuais (ZHANG et al., 2019; HILLS; NOWELL; SACKFIELD, 1993; PAGGI, 2015)

O conhecimento e o estudo do contato em superfícies rugosas historicamente estão relacionados com a Lei de Atrito de Coulomb e suas tentativas de explicação. Entre essas, a teoria de atrito de Bowden e Tabor (1950) afirma que a área real de contato representa uma pequena fração do contato nominal, ou seja, o contato é microscópico e, por consequência, a pressão nesses pontos é elevada. Tal redução da área de contato tem impacto sobre os fenômenos tribológicos e sobre a condutividade elétrica na interface. Segundo tal teoria, a área de contato real A_r pode ser dada aproximadamente por:

$$A_r = \frac{P}{H} \quad (7)$$

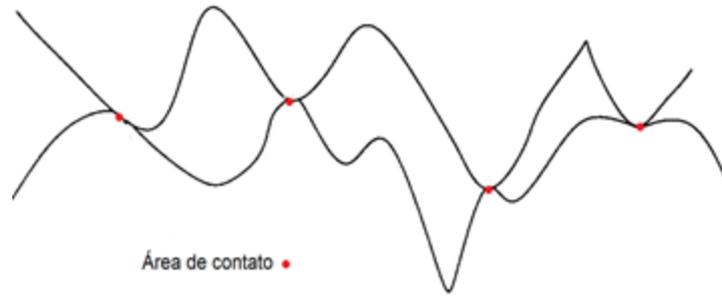
sendo P a força normal aplicada e H a dureza do material menos duro (ZHANG, 2007; BARBER, 2018).

O modelo mais simples de uma superfície rugosa é uma superfície ondulada regular que possui um perfil sinusoidal, com amplitude pequena em comparação com o comprimento de onda. É possível visualizar as regiões de contato como pequenas áreas em que as asperezas de um sólido são comprimidas com as do outro sólido. Dependendo das condições, essas asperezas podem se deformar elasticamente ou plasticamente (JOHNSON, 1985; PERSSON; BUCHER; CHIAIA, 2002).

Seabra e Berthe (1987) afirmam que a influência da rugosidade da superfície é qualitativamente idêntica à influência de sua ondulação. Os parâmetros mais importantes no caso de ondulações na superfície são: comprimento de onda, amplitude e carga. Já a concentração de pressão e a área real de contato podem ser previstos como função desses parâmetros.

Para analisar o contato dos corpos com rugosidades, é essencial conhecer a natureza de suas superfícies. Em particular, é necessário saber mais sobre suas asperezas em forma de “picos”. Quando dois corpos rugosos são colocados em contato sob uma carga leve, ocorrerá primeiro o contato em um pequeno número de pontos correspondendo às asperezas mais elevadas, deixando lacunas entre os corpos como mostrado na Figura 4 (HILLS; NOWELL; SACKFIELD, 1993).

Figura 4 - Contato entre duas superfícies rugosas



Fonte: adaptado de Hills et al. (1993)

Investigações experimentais são difíceis de realizar, sendo muito frequente que os parâmetros de contato somente possam ser estimados por medições indiretas de resistências térmicas ou elétricas, ou seja, limitadas a medições da área de contato real sob condições especiais. Além disso, a natureza estocástica do contato rugoso torna difícil estimar a ruptura das asperezas. Portanto, métodos numéricos são essenciais para adquirir o máximo possível de informações sobre o problema de contato em questão e inferir conclusões gerais (PAGGI, 2015).

Sendo assim, o método dos elementos finitos pode ser utilizado para modelar problemas de contato com superfícies rugosas. Lu e Liu (2014) elaboraram um modelo, empregando o MEF, de previsão de asperezas tridimensionais para superfícies rugosas utilizando fractais no processo de contato de deslizamento. Os resultados forneceram informações sobre os efeitos da velocidade de deslizamento, propriedades térmicas do material, carga normal e rugosidade da superfície na elevação da temperatura devido ao contato deslizante. O modelo foi desenvolvido e descrito usando os recursos de contato entre uma superfície plana e uma superfície rugosa com topografias variadas, sendo facilmente aplicado para resolver problemas de contato deslizante com diferentes condições de trabalho.

Amor, Belghith e Mezlini (2016) realizaram análises via MEF do contato elástico e elastoplástico entre uma superfície plana rígida e uma superfície rugosa real levando em consideração a interação das asperezas. Nos resultados eles observaram a importância de considerar a modelagem do contato rugoso, especialmente para superfícies com maiores rugosidades.

Outros pesquisadores que utilizaram o MEF em problemas de contato rugosos foram Lee et al. (2016) para uma solução de condução de calor através do contato e assim obter uma expressão para o calor transferido entre os corpos em

função das suas asperezas. Foram desenvolvidas aproximações algébricas simples para a troca de calor entre duas superfícies rugosas durante o contato deslizante.

Younlong et al. (2018) estudaram os efeitos da rugosidade da superfície de pista de rolamento em mancal de esferas. Eles desenvolveram um modelo dinâmico para rolamentos de esferas com o intuito de investigar o efeito da rugosidade da superfície da pista no campo das tensões, no qual o coeficiente de atrito entre a esfera e a pista é avaliado considerando-se a rugosidade da superfície e o aumento da temperatura devido ao deslizamento. Seus resultados mostraram que a rugosidade da superfície das pistas pode causar grandes efeitos no movimento das esferas e no desempenho da lubrificação em um rolamento de esferas de contato angular. Além disso, juntamente com o efeito da rugosidade da superfície nas tensões no substrato, um valor ideal das rugosidades das esferas e das pistas pode ser determinado.

Segundo Spinu e Cerlinca (2017), os gradientes elevados de tensão que surgem em contatos mecânicos irregulares ocorrem devido à interação no nível das asperezas e são responsáveis pelos mecanismos de danos como fadiga por contato de rolamento, desgaste ou propagação de trincas. A abordagem determinística desse processo requer soluções numéricas computacionalmente eficazes, capazes de lidar com malhas muito finas que capturam as características particulares da superfície de contato investigada. Marmo et al. (2018) apresentam um procedimento geral para a solução numérica do cálculo das tensões normais e tangenciais para problemas de contato tridimensionais entre corpos não-conformes e corpos rugosos de forma arbitrária. O procedimento proposto é baseado na interpolação de soluções analíticas conhecidas, relacionando os deslocamentos da superfície de um semiespaço elástico sujeito a distribuições piramidais de trações superficiais normais e tangenciais. Por sua vez, Xu e Jackson (2019) afirmam que, aplicando o método dos elementos de contorno (MEC) no contato superficial rugoso, onde o domínio é considerado um semiespaço elástico, para a condição de deformação plana, as equações integrais de fronteira que surgem do MEC resultam na conhecida solução de Flamant. Para o problema de elasticidade tridimensional, se a tensão normal for aplicada apenas na fronteira, o MEC, de forma geral, oferece uma maneira alternativa de simular esses cenários de contato com uma maior acurácia quando o domínio não é um semiespaço elástico.

Paggi, Bemporad e Reinoso (2020) descrevem que métodos baseados na discretização explícita da rugosidade introduzem esquemas especiais para modelar

uma topologia aproximada da interface. Um método simples foi proposto por Hyun et al., (2004) e por Pei et al. (2005), que investigaram o problema de contato normal sem atrito entre uma superfície rugosa e um semiplano elástico ou elastoplástico, respectivamente. Em suas abordagens, uma malha tridimensional para uma superfície rugosa foi construída em duas etapas. Primeiro, foi considerada uma superfície plana com nós em cada ponto da malha quadrada. Foi utilizada uma técnica de refinamento local para obter uma forte gradação de malha com elementos pequenos somente próximos à superfície, de forma a reduzir o número de elementos finitos e, portanto, indiretamente o custo computacional da solução das equações algébricas associadas ao método. Na segunda etapa, todos os nós pertencentes à superfície foram deslocados para criar a rugosidade desejada. Dependendo do sinal da função de separação dos nós que experimentam uma penetração são retidos no chamado conjunto ativo.

Métodos de discretização mais sofisticados disponíveis na literatura exploram a suavidade das funções de interpolação baseadas em *splines* com alturas escolhidas aleatoriamente para gerar asperezas da superfície, como feito em Wriggers e Reinelt (2009). A introdução de esquemas de interpolação por funções suaves pode ser benéfica para modelar superfícies onduladas, como feito por Wang et al. (2019), que descrevem as asperezas utilizando o método de interpolação de Hermite para garantir a continuidade e a suavidade da função que a determina.

2.2 OTIMIZAÇÃO

A engenharia consiste em várias atividades bem estabelecidas, incluindo: análise, projeto, fabricação, vendas, pesquisa e desenvolvimento de sistemas, entre outras. O processo de projetar e desenvolver sistemas foi se ampliando e aprimorando ao longo de séculos. No entanto, projetar e analisar todas as possibilidades pode ser demorado e dispendioso. Dessa forma, muitos processos podem se beneficiar de uma alocação otimizada de recursos. Esses recursos podem incluir capital, equipamentos e tarefas, e devem ser alocados na quantidade, no tempo e na sequência correta para que seja obtido o melhor resultado possível (ARORA, 2004).

A busca de uma solução mais adequada dentre diversas soluções alternativas traz consigo os elementos de um problema de otimização: um critério de avaliação

das soluções alternativas, o qual nos permite dizer que uma solução é “melhor” do que a outra. Este critério de avaliação é chamado de “função objetivo”, na qual busca-se otimizar, ou seja, maximizar ou minimizar. Por outro lado, as soluções alternativas devem ser passíveis de execução, indicando a presença de restrições que precisam ser respeitadas.

Atualmente, por meio de programas computacionais, é possível executar cálculos complexos e processar grandes quantidades de dados rapidamente. Os processos de projetos de engenharia e otimização se beneficiam enormemente dessa revolução tecnológica pois eles exigem um grande número de cálculos. Sistemas melhores podem ser projetados analisando e otimizando várias opções em pouco tempo. Muitos métodos numéricos de otimização foram desenvolvidos e usados para desenvolver sistemas mais eficientes.

Segundo Arora (2004), para formular um problema de otimização é necessário seguir as seguintes etapas:

- Formulação do problema;
- Descrição dos objetivos e requisitos do projeto;
- Coleta dos dados;
- Identificação e definição das variáveis de projeto;
- Identificação e equacionamento do critério a ser otimizado (esse critério é chamado de função objetivo);
- Identificação das restrições.

Matematicamente um problema de otimização pode ser escrito como:

$$\min_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) \quad (8)$$

tal que:

$$h_j(\mathbf{x}) = 0; \quad j = 1, \dots, p \quad (9)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0; \quad i = 1, \dots, m, \quad (10)$$

onde $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo e S é o conjunto factível, ou seja, a região onde os projetos (pontos) satisfazem as restrições. As funções $h_j(\mathbf{x}) = 0; j = 1, \dots, p$ são as

restrições de igualdade e as funções $g_i(\mathbf{x}) \leq 0; i = 1, \dots, m$ são as restrições de desigualdade.

A otimização é uma ferramenta importante na solução de problemas de contato. Spicka, Hyncik e Hajman (2014) tratam do contato aplicado a sistemas modelados por multicorpos. O exemplo estudado é a modelagem do impacto entre um corpo e uma estrutura. O artigo apresenta um algoritmo para calcular a distância mínima entre um corpo e um plano usando uma abordagem analítica. E a otimização numérica é aplicada a um caso simples: uma bola quicando para avaliar os parâmetros de contato de acordo com um sistema real otimizado.

Outra aplicação da otimização em problemas de contato é apresentada por Sofonea, Xiao e Courdec (2019a). Em seu artigo são fornecidos alguns resultados no estudo de um problema de otimização, começando com um modelo simples que descreve o problema de contato estático com materiais elásticos, descrevendo o equilíbrio de um corpo elástico em contato unilateral. Em seguida introduz o problema de otimização para fornecer os resultados de existência, unicidade e convergência das soluções. Ainda Sofonea, Xiao e Courdec (2019b) estudam alguns problemas de otimização relacionados a um modelo de contato o que descreve uma fundação rígido-deformável e leva em consideração seus efeitos de memória do material.

Paggi, Bemporad e Reinoso (2020) também resolvem o problema de contato definindo-o em termos de igualdades e desigualdades, decorrentes das restrições de contato unilateral e, dessa forma, o resolvem por algoritmos de otimização como Polonsky e Keer (1999). Estes apresentaram um método de solução numérica rápida para problemas de contato aproximado, combinando a técnica de multi-somatório e multi-soma com um esquema de iteração baseado no método do gradiente conjugado.

2.3 PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE LINEAR (LCP)

O Problema de Complementaridade Linear (LCP, do termo em inglês *Linear Complementarity Problem*), refere-se a um sistema de inequações com uma rica teoria matemática e uma variedade de algoritmos, o que o torna importante na programação matemática. Recentemente, o LCP tem sido estudado não só devido às suas grandes aplicações nas áreas da economia, ciência e engenharia, mas também como meio de resolução de problemas de otimização. Nos últimos 20 anos, problemas

elastoplásticos foram convertidos em LCP para encontrar sua solução e também surgiu como uma solução unificada para problemas de programação quadrática e programação linear. O LCP contém duas características básicas que são centrais para o estudo de problemas de programação matemática e de equilíbrio. A primeira é o conceito de complementaridade: essa característica é equivalente às condições essenciais de equilíbrio em problemas que o necessitam. A outra característica é a linearidade, sendo este um alicerce para o tratamento de problemas não-lineares. Ambas as características, complementaridade e linearidade, fornecem os elementos necessários e fundamentais para a análise e compreensão da natureza complexa dos problemas de programação matemática e de equilíbrio (COTTLE; PANG; STONE, 1992; SUSHUN, 1995).

Pissarra (1997) apresenta a formulação de um LCP: dada uma matriz $\mathbf{M} \in M_{n \times n}(R)$, espaço das matrizes quadradas de elementos reais de ordem n um vetor $\mathbf{q} \in R^n$, deseja-se encontrar vetores $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in R^n$, tais que:

$$\mathbf{w} = \mathbf{M} \mathbf{z} + \mathbf{q} \quad (11)$$

$$\mathbf{z}^T \mathbf{w} = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{z}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (13)$$

ou mostrar que tais vetores não existem.

O vetor \mathbf{z} que satisfaz as condições das Equações (11) e (12) é dito ser um vetor factível. Diz-se que o $LCP(\mathbf{M}, \mathbf{q})_n$ é factível se existir tal vetor \mathbf{z} . O conjunto de vetores factíveis do $LCP(\mathbf{M}, \mathbf{q})_n$ é chamado de região factível. Observando a Equação (11), nota-se que um vetor \mathbf{z} que satisfaz a condição (13) é factível do $LCP(\mathbf{M}, \mathbf{q})_n$ se, e somente se, satisfaz a condição da Equação (12), isto é:

$$z_i w_i = 0, \forall i = 1, \dots, n \quad (14)$$

As variáveis z_i e w_i são as componentes dos vetores \mathbf{z} e \mathbf{w} , respectivamente, formam o chamado par de complementaridade e são ditas serem complementares uma à outra.

O LCP é equivalente à minimização global restrita de uma função não convexa. Isso é inerentemente difícil porque o problema pode ter muitos mínimos locais. No entanto, como as restrições definem um conjunto poliédrico S , sabe-se que se o problema tiver uma solução, ele deverá ocorrer no vértice do conjunto S (PEDARLOS; ROSEN; 1988).

De acordo com Baruffaldi (2010), as condições expressas nas Equações (11), (12) e (13) não são suficientes para garantir a existência ou a unicidade de uma solução para o $LCP(\mathbf{M}, \mathbf{q})_n$, porém Sushun (1994) conclui que para um LCP, se a matriz \mathbf{M} da Equação (11) do problema for positiva semi-definida, então sua solução existe e se \mathbf{M} é positiva definida, então a solução é única.

Um exemplo da aplicação da formulação do problema de contato via LCP é dado por Bemporad e Paggi (2015). Nessa pesquisa foram revisadas as equações fundamentais para a solução do problema de contato normal unilateral sem atrito entre uma superfície rígida rugosa e um semi-plano elástico linear usando o método dos elementos de contorno. Em seguida, reformulou-se o problema de LCP com restrições não-negativas e comparou-se diferentes algoritmos de otimização com a sua solução.

3. METODOLOGIA

O estudo em tela decorre da necessidade de calcular as pressões de corpos elásticos em contato, levando em consideração suas asperezas. A metodologia para o desenvolvimento desta pesquisa consistiu inicialmente em estudar e realizar uma revisão bibliográfica sobre problemas de contato elástico, contato em superfícies rugosas, método LCP e otimização.

Em seguida, com o problema formulado, foram realizadas implementações computacionais na plataforma Matlab do método LCP em conjunto com técnicas de otimização aplicadas ao contato linear em domínio unidimensional entre superfícies lisas, e comparado com resultados disponíveis na literatura. Após a aplicação ao contato de domínio unidimensional² liso, a pesquisa foi estendida para o caso de domínio unidimensional rugoso. Finalmente, as implementações e estudos foram estendidas para problemas de contato cujo domínio é bidimensional, aplicando diferentes métodos para os casos de contato liso e de contato rugoso.

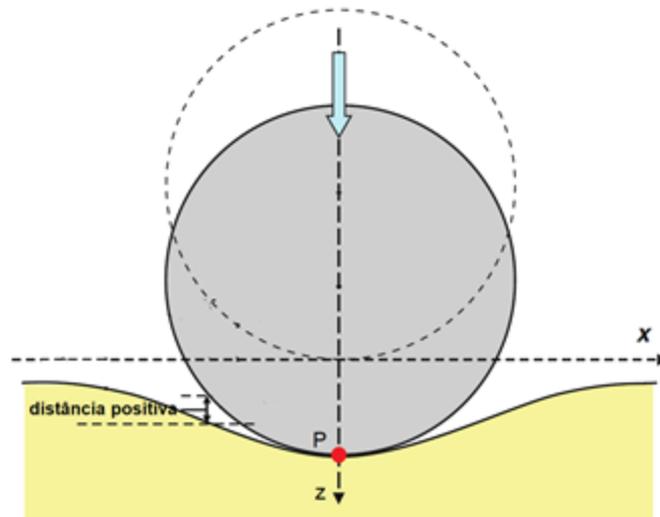
3.1 APLICAÇÃO DO LCP AO PROBLEMA DE CONTATO

A abordagem aqui descrita baseia-se na formulação matemática do Problema de Complementaridade Linear (LCP) decorrente do problema de contato normal elástico, descrito em Zhao et al. (2014), o qual é baseado em três premissas simplificadoras. A primeira hipótese considera que a área de contato é muito pequena em comparação às dimensões dos dois corpos que entram em contato. Na segunda hipótese, os materiais dos corpos em contato são admitidos homogêneos, isotrópicos e com comportamento elástico-linear. E a última premissa é que os efeitos inerciais no movimento devem ser ignorados. Todas essas hipóteses descrevem um modelo simplificado onde pode ser aplicada a abordagem do semiespaço elástico. Além disso, mais duas condições são necessárias: (i) não há penetração entre os dois corpos e assim a distância entre as duas superfícies é nula na área em contato, e positiva fora dela; (ii) a pressão é compressiva na área de contato e nula fora dela.

² Neste texto e também por vezes na literatura, o contato unidimensional refere-se ao *contato linear*, conforme apresentado na Seção 2.1.

Considere dois corpos lisos elásticos, isotrópicos, não-conformes com curvaturas não-convexas em contato. Assumindo que o plano xy seja tangente às superfícies de ambos os corpos no ponto de inicial contato P (antes da aplicação de carga), enquanto o eixo z é ortogonal a esse plano. Após a aplicação de um carregamento externo normal ao plano tangente de contato (direção do eixo z), ambos os corpos se deformam na vizinhança de P onde as pressões de contato são transmitidas entre corpos, como representado na Figura 5. No problema de contato normal, as tensões nos corpos na interface de contato são perpendiculares à área de contato. Essas tensões nas superfícies são geralmente denominadas pressões de contato. Note que a distância entre as superfícies é positiva fora da área de contato, onde as pressões de contato são nulas.

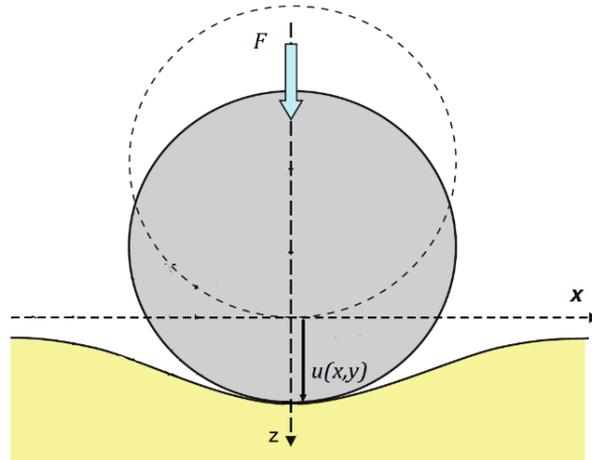
Figura 5 - Contato não-conforme entre dois corpos elásticos



Fonte: adaptado de Wang e Chung (2013)

Para desenvolver o problema da atual pesquisa, considere que $p(x, y)$ representa a pressão na superfície na posição (x, y) da região S estudada, $g(x, y)$ a distância normal entre os pontos das superfícies antes de deformadas, $u(x, y)$ o deslocamento elástico normal no ponto (x, y) e definindo $e(x, y) = u(x, y) + g(x, y)$ a distância normal entre os pontos das superfícies após a deformação.

Figura 6 – Indicação do deslocamento $u(x,y)$ em um ponto



Fonte: adaptado de Wang e Chung (2013)

Então, as condições para o problema de contato normal são:

$$e(x, y) = 0, \quad p(x, y) \geq 0 \quad (15)$$

para todos os pontos em contato, e:

$$e(x, y) > 0, \quad p(x, y) = 0 \quad (16)$$

para todos os pontos fora do contato.

Baseados nas soluções clássicas de Boussinesq e Cerruti, apresentadas por Johnson (1985), e considerando o problema de contato normal tridimensional, Zhao et al. (2014) afirmam que o deslocamento normal, na direção de z , de um ponto na posição (x, y) da superfície S , é dado por:

$$u(x, y) = \iint_S A(x, y, x', y') p(x', y') dx' dy' \quad (17)$$

onde $A(x, y, x', y')$ representa a função de influência do deslocamento normal na posição (x, y) de S , devido à contribuição de uma pressão unitária na posição (x', y') da superfície. Para corpos homogêneos, isotrópicos e elástico-lineares, a função de influência é dada por:

$$A(x, y, x', y') = \frac{2}{\pi E'} \frac{1}{\|(x, y) - (x', y')\|}, \quad (18)$$

sendo E' o módulo de elasticidade efetivo dos dois corpos, definido na Equação (50), e $\| \cdot \|$ denota a norma euclidiana.

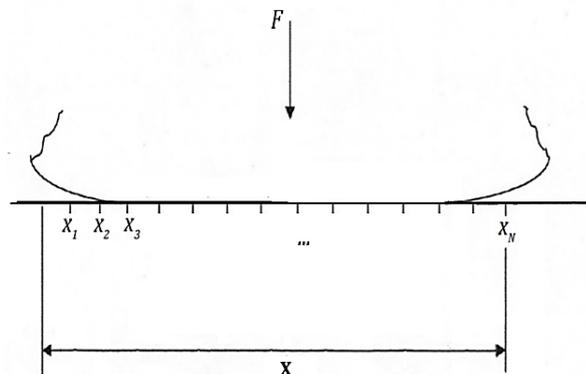
A força de contato total F (força normal) é calculada como:

$$F = \iint_S p(x, y) dx dy \quad (19)$$

Para realizar as simulações numéricas, é feita a discretização do domínio da região de contato. A partir dessa discretização do domínio obtém-se a matriz de influência \mathbf{K} , proveniente da função de influência e da integração representada na Equação (17). Detalhes sobre a obtenção de \mathbf{K} para os casos de contato linear (em domínio unidimensional) e contato pontual (em domínio bidimensional) estão apresentados nas Subseções 3.5.1 e 3.5.2 respectivamente.

No caso do contato linear, o domínio é considerado unidimensional, assim o número de nós é definido por N . Dessa discretização, esquematizada na Figura 7, surge o vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, de dimensão N , que representa as coordenadas dos pontos do domínio.

Figura 7- Domínio unidimensional discretizado



Fonte: adaptado de Duarte (2016)

Dessa forma, os valores de pressão, distância entre as superfícies, deslocamento e a distância após o contato deformado em cada ponto são representados respectivamente pelos vetores:

$$\mathbf{p} = (p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_N)) \text{ ou } \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$$

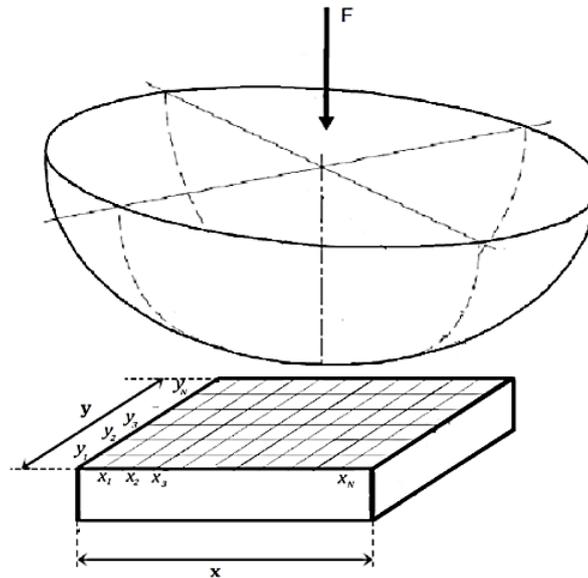
$$\mathbf{g} = (g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_N)) \text{ ou } \mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_N)$$

$$\mathbf{u} = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N)) \text{ ou } \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$$

$$\mathbf{e} = (e(x_1), e(x_2), \dots, e(x_N)) \text{ ou } \mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_N)$$

Já para o caso do contato pontual, o domínio é bidimensional e o número de nós da discretização é definido por $N \times M$, conforme mostra a Figura 8.

Figura 8 - Domínio bidimensional discretizado



Fonte: adaptado de Stachowiak e Batchelor (1993)

Na presente pesquisa utilizou-se $N = M$, portanto, nas simulações numéricas aqui apresentadas é considerado o vetor $\mathbf{x} = ((x_1, y_1), \dots, (x_N, y_1), \dots, (x_1, y_N), \dots, (x_N, y_N))$ de dimensão N^2 , representando as coordenadas dos pontos do domínio. Assim, os valores de pressão, distância entre as superfícies, deslocamento e a distância após o contato deformado em cada ponto são representados, respectivamente, pelos vetores:

$$\mathbf{p} = (p(x_1, y_1), \dots, p(x_N, y_1), \dots, p(x_1, y_N), \dots, p(x_N, y_N)) \quad \text{ou}$$

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N, \dots, p_{N^2})$$

$$\mathbf{g} = (g(x_1, y_1), \dots, g(x_N, y_1), \dots, g(x_1, y_N), \dots, g(x_N, y_N)) \quad \text{ou}$$

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_N, \dots, g_{N^2})$$

$$\mathbf{u} = (u(x_1, y_1), \dots, u(x_N, y_1), \dots, u(x_1, y_N), \dots, u(x_N, y_N)) \quad \text{ou}$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N, \dots, u_{N^2})$$

$$\mathbf{e} = (e(x_1, y_1), \dots, e(x_N, y_1), \dots, e(x_1, y_N), \dots, e(x_N, y_N)) \quad \text{ou}$$

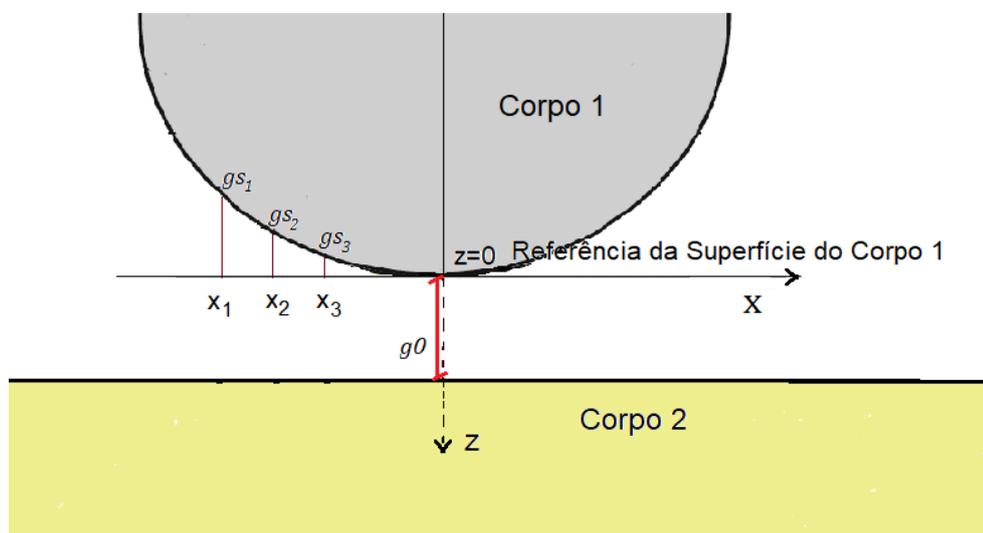
$$\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_N, \dots, e_{N^2})$$

A distância ou separação inicial (*gap*, em inglês) entre os pontos das superfícies dos corpos em contato (antes da aplicação do carregamento) é definida por:

$$\mathbf{g} = g_0 \mathbf{1} + \mathbf{g}_s \quad (20)$$

onde $\mathbf{1}$ é o vetor unitário e g_0 é a distância do ponto de referência onde $z = 0$ do Corpo 1, ponto mínimo de sua superfície até o Corpo 2. Para o caso do domínio unidimensional discretizado, $\mathbf{g}_s = (g_{s_1}, g_{s_2}, g_{s_3}, \dots, g_{s_N})$ é o vetor que representa a distância dos pontos do Corpo 1 até $z=0$, descrevendo a sua geometria assim $\mathbf{g} = (g_0 + g_{s_1}, g_0 + g_{s_2}, g_0 + g_{s_3}, \dots, g_0 + g_{s_N})$ como exemplificado na Figura 9.

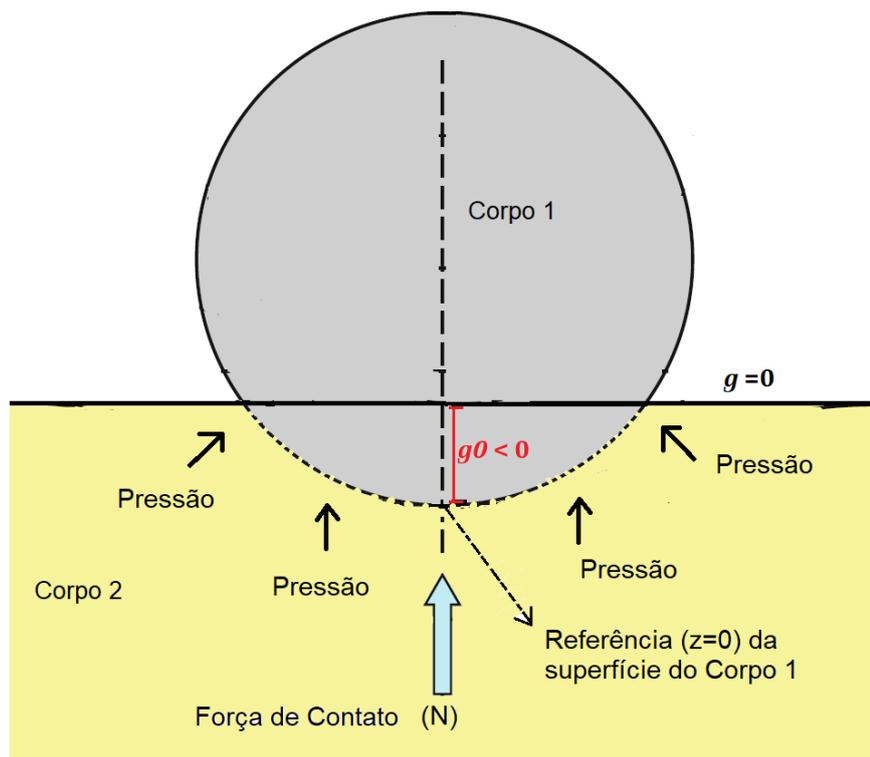
Figura 9 – Distância inicial entre o Corpo 1 e o Corpo 2, domínio unidimensional



Fonte: autoria própria

No problema em questão para o contato entre corpos lisos, o Corpo 1 está inicialmente “inserido” no Corpo 2, e é necessária uma força de contato, resultante das pressões atuantes, para colocar o sistema em equilíbrio. Para fazer essa representação deve-se considerar inicialmente $g_0 < 0$, como ilustrado na Figura 10.

Figura 10 – Problema de contato liso, domínio unidimensional (condição inicial)



Fonte: adaptado de Wang e Chung (2013)

De forma análoga ocorre no domínio bidimensional, onde o vetor que descreve a distância inicial entre os pontos das superfícies dos corpos em contato é de dimensão $N \times N$, tornando-se assim $\mathbf{g} = (g_0 + g_{s_1}, g_0 + g_{s_2}, g_0 + g_{s_3}, \dots, g_0 + g_{s_N}, \dots, g_0 + g_{s_{N^2}})$.

Assim, sendo $\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{p}$, para encontrar as pressões nos pontos da área de contato calcula-se uma solução para o LCP das equações (11), (12) e (13), no que resulta:

$$\mathbf{e} = \mathbf{K} \mathbf{p} + \mathbf{g} \quad (21)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{e} = 0 \quad (22)$$

$$\mathbf{p}, \mathbf{e} \geq \mathbf{0} \quad (23)$$

Segundo Zhao et al. (2014) devido às propriedades da elasticidade linear dos corpos a matriz \mathbf{K} é simétrica e positiva definida, portanto, de acordo com Shushun (1994), o LCP das Equações (21), (22) e (23) possui uma única solução \mathbf{p} .

Nota-se que o exigido na Equação (22) tem origem nas condições das Equações (15) e (16) do problema de contato, e definindo a função $f(\mathbf{p})$ como:

$$f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{e} \quad (24)$$

segue-se que encontrar uma solução para o LCP representado nas Equações (21), (22) e (23) está associado à minimização da função quadrática $f(\mathbf{p})$, isto é:

$$\min_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}) \Rightarrow \min_{\mathbf{p}} (\mathbf{p}^T \mathbf{e}) \quad (25)$$

tal que:

$$\mathbf{e} \geq \mathbf{0} \quad (26)$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0} \quad (27)$$

como $\mathbf{e} = \mathbf{Kp} + \mathbf{g}$, equivale a resolver:

$$\min_{\mathbf{p}} (\mathbf{p}^T (\mathbf{Kp} + \mathbf{g})) \quad (28)$$

tal que:

$$\mathbf{Kp} + \mathbf{g} \geq \mathbf{0} \quad (29)$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0} \quad (30)$$

Reescrevendo:

$$\min_{\mathbf{p}} (\mathbf{p}^T (\mathbf{K}\mathbf{p} + \mathbf{g})) \quad (31)$$

tal que: $-\mathbf{K}\mathbf{p} \leq \mathbf{g} \quad (32)$

$$\mathbf{p} \geq 0 \quad (33)$$

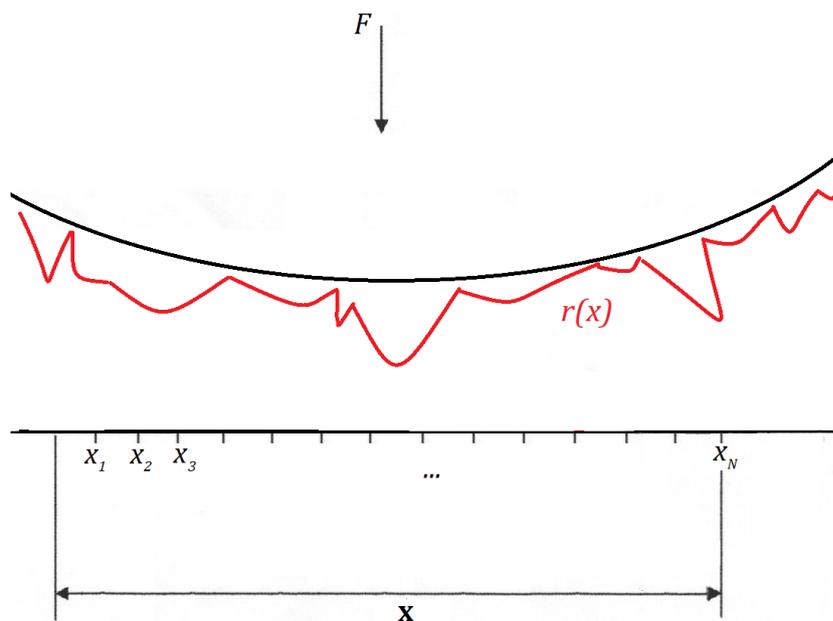
Então, o LCP apresentado nas Equações (31), (32) e (33) consiste em otimizar a função quadrática:

$$f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T (\mathbf{K}\mathbf{p}) + \mathbf{p}^T \mathbf{g} \quad (34)$$

3.2 TRATAMENTO DA RUGOSIDADE NO LCP

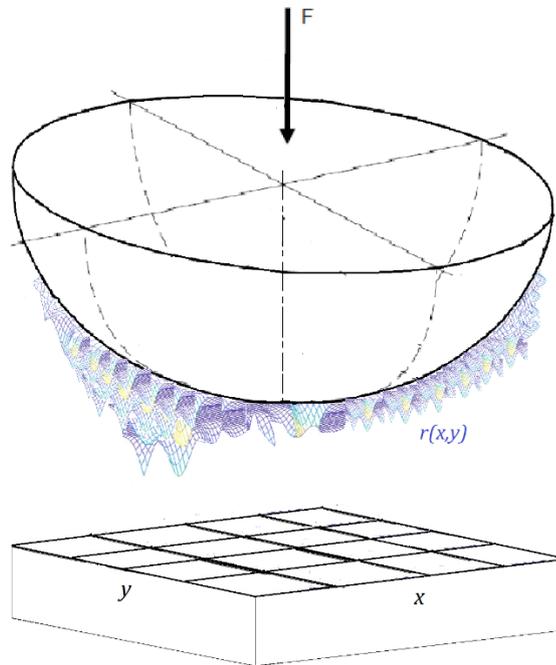
O interesse da presente pesquisa é analisar o problema de contato para superfície com rugosidade, como exemplificado nas Figuras 11 e 12:

Figura 11 - Domínio unidimensional rugoso



Fonte: adaptado de Duarte (2016)

Figura 12 - Domínio bidimensional rugoso



Fonte: adaptado de Stachowiak e Batchelor (1993)

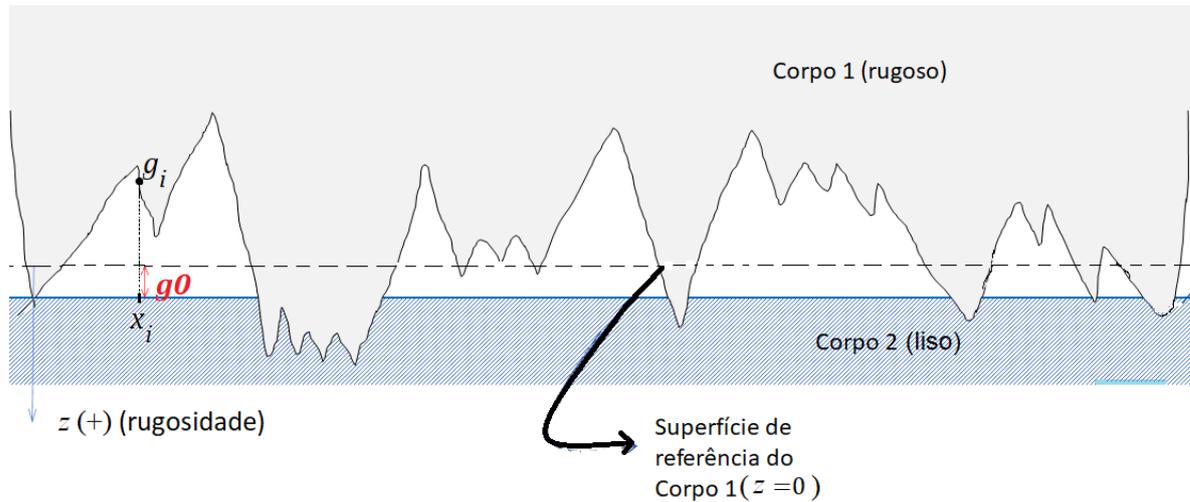
Para modelar a rugosidade da superfície, é considerada uma função r que depende dos pontos do domínio e descreve a altura das rugosidades.

Conforme visto anteriormente, a distância inicial entre os corpos é definida pela variável g e, portanto, para o caso em que a rugosidade está presente, esta é descrita como:

$$\mathbf{g} = g_0 \mathbf{1} + \mathbf{g}_s + \mathbf{r} \quad (35)$$

Neste caso g_0 é tomado do plano de referência da Corpo 1 ($z = 0$). Analogamente como no problema de contato liso, a força atuante não é fornecida, esta é calculada, então a condição inicial para o problema de contato rugoso é ilustrada na Figura 13.

Figura 13 - Problema de contato rugoso (condição inicial)



Fonte: autoria própria

Acrescentando a função que descreve a rugosidade, o LCP pode ser escrito como:

$$\min_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}) \Rightarrow \min_{\mathbf{p}} [\mathbf{p}^T (\mathbf{K}\mathbf{p} + (g_0 \mathbf{1} + \mathbf{g}\mathbf{s} - \mathbf{r}))] \quad (36)$$

tal que: $-\mathbf{K}\mathbf{p} \leq (g_0 \mathbf{1} + \mathbf{g}\mathbf{s} - \mathbf{r}) \quad (37)$

$$\mathbf{p} \geq 0 \quad (38)$$

Observe que a formulação do LCP fica inalterada pois as modificações ocorrem somente na função \mathbf{g} .

3.3 ALGORITMOS UTILIZADOS E IMPLEMENTADOS

No presente trabalho, para a solução do LCP, que também foi escrito em forma de problema de minimização, foram utilizados o método de Lemke, o pacote Gurobi Optimizer, programação quadrática e a sua transformação e resolução por meio de um método de mínimos quadrados não-negativos. O código do método de Lemke

escrito por Almqvist (2022) é denominado LCPsolve, o que utiliza o pacote Gurobi é chamado aqui de LCPGurobi, o método que aplica a programação quadrática chama-se LCPQuad, e LCPMin aquele que utiliza solução via mínimos quadrados não-negativos. Já que os testes de contato bidimensionais demandam muito tempo, como uma tentativa de agilizar a solução foi realizada uma modificação no código LCPsolve: foram feitas simulações variando a magnitude da variável auxiliar para início do pivotamento do método de Lemke, até obter alguma melhoria. Este código modificado é denominado LCPsolve_MQC.

Segundo Ferreira (2016), originalmente criado para resolver problemas de complementaridade linear, o método de Lemke guarda muita semelhança com o método de programação linear Simplex, principalmente no uso de pivotamentos e teste da razão para determinar variáveis que saem da base. O método de pivotamento foi um dos primeiros algoritmos desenvolvidos para este tipo de problema, originalmente introduzido por Lemke (1965). Esse método seleciona variáveis por meio de uma regra de complementaridade e pode ser visto como um precursor dessa classe de algoritmos. Esses algoritmos geralmente apresentam excelente desempenho quando a matriz de influência é simétrica positiva definida.

Quanto ao pacote Gurobi Optimizer, Takigawa, Mantelli e Muraro (2014) afirmam que é uma ferramenta computacional consolidada pela indústria devido ao seu desempenho em programação linear, quadrática e mista. De acordo com GUROBI (2022), resolve os principais tipos de problemas de otimização: programação linear, programação linear inteira mista, programação quadrática (convexa e não convexa), programação quadrática inteira e mista (convexa e não convexa), programação com restrição quadrática inteira e mista (convexa e não convexa), de uma maneira eficiente. Além da velocidade, o pacote Gurobi traz consigo a facilidade de comunicação com plataformas de desenvolvimento de *softwares* e linguagens, dentre elas o Matlab, que é a linguagem utilizada nesta pesquisa. Não há o conhecimento do Gurobi Optimizer ter sido utilizado para a solução do problema de contato mecânico, estudado na presente tese.

Powell (1985) explica que o problema de programação quadrática consiste em encontrar o mínimo de uma função quadrática com restrições lineares, que matematicamente pode ser expresso por:

$$\min_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{f}^T \mathbf{x} \right) \quad (39)$$

tal que

$$\mathbf{D} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (40)$$

$$\mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{\text{eq}} \quad (41)$$

$$\mathbf{l}_b \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}_b, \quad (42)$$

onde \mathbf{x} é o vetor das variáveis a serem determinadas (variáveis de projeto), que no problema em questão é o vetor de pressões \mathbf{p} ; \mathbf{H} , \mathbf{D} e \mathbf{A}_{eq} são matrizes associadas ao problema de otimização, sendo que para o contato normal elástico a Equação (41) não é utilizada pois não há restrições de igualdade, e as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{D} equivalem a $\mathbf{H} = 2\mathbf{K}$ e $\mathbf{D} = -\mathbf{K}$; \mathbf{f} e \mathbf{b} são vetores tais que $\mathbf{f} = \mathbf{b} = \mathbf{g}$; \mathbf{l}_b e \mathbf{u}_b são vetores com as restrições do tipo “caixa”, ou seja, representam os limites inferior e superior das variáveis de projeto, sendo que no presente caso é utilizada apenas a restrição inferior $\mathbf{l}_b = \mathbf{0}$, pois a variável de interesse (pressão) é sempre não-negativa. A solução retorna um vetor \mathbf{x} que minimiza a Equação (39), e o valor da função minimizada em \mathbf{x} é o ótimo sujeito a restrições de igualdade e de desigualdade descritas pelas Equações (40), (41) e (42). O algoritmo do ponto interior é utilizado aqui para solucionar o problema via programação quadrática. Detalhes sobre esse algoritmo podem ser encontrados em Byrd, Hribar e Nocedal (1999) e Nocedal e Wright (2006).

Conforme descrito a seguir e similar ao apresentado por Bemporad e Paggi (2015), o problema de programação quadrática, sob as condições de contato elástico, equivale a um problema de mínimos quadrados não-negativos. Eles afirmam que se a matriz \mathbf{H} da Equação (39) admite uma fatoração de Cholesky $\mathbf{H} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$, então resolvê-la equivale a encontrar a solução do problema de mínimos quadrados não-negativos dado por:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{C} \mathbf{x} - \mathbf{C}^{-T} \mathbf{g}\|_2^2 \quad (43)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (44)$$

Sendo assim, como deseja-se minimizar a função $f(\mathbf{p})$ dada pela Equação (34), tem-se:

$$\min_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}) \Rightarrow \min_{\mathbf{p}} ((\mathbf{p}^T \mathbf{K} \mathbf{p}) + \mathbf{p}^T \mathbf{g}) \quad (45)$$

Como a matriz de influência \mathbf{K} é simétrica e positiva definida, logo admite uma fatoração de Cholesky dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (46)$$

Desse modo, minimizar $f(\mathbf{p}) \geq 0$ implica encontrar \mathbf{p} que minimiza a distância entre os vetores $\mathbf{C}\mathbf{p}$ e $\mathbf{C}^{-T}\mathbf{g}$, o que pode ser representado pelo seguinte problema de mínimos quadrados não-negativos:

$$\min_{\mathbf{p}} \frac{1}{2} \|\mathbf{C}\mathbf{p} - \mathbf{C}^{-T}\mathbf{g}\|_2^2 \quad (47)$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0} \quad (48)$$

onde $\|\cdot\|_2$ representa a norma euclidiana de um vetor.

Lawson e Hanson (1977), no capítulo 23, descrevem o algoritmo aqui empregado para resolver o problema de mínimos quadrados não-negativos.

3.4 DADOS DE ENTRADA E SAÍDA DAS SIMULAÇÕES

Para a execução das simulações e obtenção dos resultados do LCP para o problema de contato, são necessárias algumas características dos corpos, informadas a seguir:

- Raio de curvatura do corpo superior (R_1), se o problema for bidimensional são necessários os raios de curvaturas nas direções x (R_{1x}) e y (R_{1y});

- Raio de curvatura do corpo inferior (R_2), se o problema for bidimensional são necessários os raios de curvaturas nas direções x (R_{2x}) e y (R_{2y});
- Módulo de elasticidade (E_1) e coeficiente de Poisson (ν_1) do corpo superior;
- Módulo de elasticidade (E_2) e coeficiente de Poisson (ν_2) do corpo inferior;
- Intervalo no eixo x (ix) (para os casos uni e bidimensional);
- Intervalo no eixo y (iy) (para o caso bidimensional);
- Número de partições do intervalo nas direções de x e y, ou seja, a malha ficará com $N \times N$ nós no total, para o caso bidimensional, e terá N nós para o caso unidimensional;
- Rugosidade da superfície do Corpo 1 (corpo superior);
- Separação inicial a partir de $z = 0$ do Corpo 1 (g_0).

Com os dados iniciais é realizado o pré-processamento onde são calculados:

- O raio de curvatura reduzido (R), o qual depende de R_1 e R_2 :

$$R = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1}\right) + \left(\frac{1}{R_2}\right)}, \quad (49)$$

no caso bidimensional são calculados os raios de curvaturas reduzidos nas direções x e y denotando-os por R_x e R_y , respectivamente.

- O módulo de elasticidade efetivo (E'), o qual é uma combinação dos módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson dos dois corpos, que pode ser também escrito em função do módulo de elasticidade combinado E^* definido na Equação (1):

$$E' = \frac{2}{\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}\right) + \left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)} = 2E^* \quad (50)$$

- A discretização do(s) intervalo(s).
- Construção da matriz, ou tensor no caso bidimensional, de influência \mathbf{K} , o qual varia de acordo com as características dos materiais pois utiliza o módulo de elasticidade efetivo para sua construção, e depende do domínio da região de contato. Lembrando que os materiais são considerados linearmente elásticos, então \mathbf{K} é simétrica.
- É calculada a separação inicial total (\mathbf{g}) em cada ponto da malha a partir da distância inicial para $z = 0$ dado (g_0) e do formato ($\mathbf{g_s}$) do Corpo 1. Para o caso onde o contato é rugoso, são consideradas as alturas dos picos de rugosidade (\mathbf{r}), isto é $\mathbf{g} = g_0 \mathbf{1} + \mathbf{g_s} + \mathbf{r}$.

Foram realizados testes com rugosidades virtuais, geradas por funções analíticas, e com rugosidades medidas experimentalmente. Detalhes sobre as rugosidades utilizadas nos testes são apresentados juntamente com os respectivos resultados, no Capítulo 4.

No problema de contato bidimensional o tensor de influência \mathbf{K} é de dimensão $N \times N \times N \times N$, e \mathbf{g} é uma matriz $N \times N$. Então, para aplicar os métodos de resolução do LCP conforme formulações apresentadas na Seção 3.3, é necessário realizar um redimensionamento de modo que \mathbf{K} seja uma matriz de dimensão $N^2 \times N^2$, e \mathbf{g} se torne um vetor de dimensão $N^2 \times 1$. Após a resolução do LCP, já com o vetor pressão (\mathbf{p}) calculado, é realizado o pós-processamento onde são apresentados:

- A pressão máxima ocorrida no contato;
- A força normal total do contato;
- A posição final em cada ponto da malha;
- Gráfico da posição final do Corpo 1 em relação ao Corpo 2 após o contato;
- Gráfico da distribuição das pressões de contato.

3.5 MONTAGEM DA MATRIZ DE INFLUÊNCIA

3.5.1 Contato em Domínio Unidimensional

No contato linear apresentado por Wang e Zhu (2020), considerando semiespaços elásticos, o deslocamento normal em um ponto x , induzido pela pressão distribuída $p(x)$ na superfície dos corpos, é dado por:

$$u(x) = \frac{-4}{\pi E'} \int_{x_a}^{x_b} \ln|x-x'| p(x') dx' \quad (51)$$

sendo E' o módulo de elasticidade efetivo, dado pela Equação (50), e $[x_a, x_b]$ o intervalo estudado, no qual atua a pressão.

Considerando uma malha de tamanho uniforme h , com $(n-1)$ divisões e, portanto, n pontos, e aproximando o perfil de pressão por uma função constante por partes com valor:

$p_j = p(x_j)$ em $x' \in \left[x_j - \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2} \right]$, o deslocamento normal no ponto

$x_i = x_a + (i-1)h$, sendo $x_1 = x_a$ e $x_n = x_a + (n-1)h = x_b$, pode ser escrito como:

$$u(x_i) = \frac{-4}{\pi E'} \sum_{j=1}^{j=n} D_{ij} p_j \quad (52)$$

sendo os coeficientes D_{ij} dados por:

$$D_{ij} = \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \ln|x_i - x'| dx' , \quad (53)$$

os quais geram uma matriz \mathbf{D} e podem ser calculados analiticamente, sendo dependentes do valor de $|x_i - x'|$ na integral, ou seja, dependem das distâncias entre os nós do domínio.

Sabendo que $\int \ln(x)dx = x(\ln x - 1)$, o resultado da Equação (53) fica:

$$D_{ij} = \left(|x_i - x'| \left[\ln |x_i - x'| - 1 \right] \right) \Big|_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} =$$

$$= \left| x_i - \left(x_j + \frac{h}{2} \right) \right| \left[\ln \left| x_i - \left(x_j + \frac{h}{2} \right) \right| - 1 \right] - \left| x_i - \left(x_j - \frac{h}{2} \right) \right| \left[\ln \left| x_i - \left(x_j - \frac{h}{2} \right) \right| - 1 \right]. \quad (54)$$

Assim, a matriz de influência \mathbf{K} , apresentada na formulação do LCP de contato (Seção 3.1), pode ser escrita como:

$$\mathbf{K} = \frac{-4}{\pi E'} \mathbf{D}, \quad (55)$$

sendo cada elemento da matriz dado por:

$$K_{ij} = \frac{-4}{\pi E'} D_{ij}. \quad (56)$$

Como as pressões nos pontos x_i do intervalo discretizado são representadas pelo vetor:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, \dots, \dots), \quad (57)$$

os deslocamentos normais $u(x_i)$ no contato linear são dados por:

$$\begin{cases} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_n) \end{cases} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots \\ K_{21} & K_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots \end{bmatrix} \begin{cases} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{cases} \quad (58)$$

3.5.2 Contato em Domínio Bidimensional

Segundo Wang e Zhu (2020), no contato elástico pontual, considerando semiespaços elásticos, o deslocamento é dado por:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi E'} \iint_S \frac{p(x', y')}{\|(x, y) - (x', y')\|} dx' dy' \quad (59)$$

onde S é a região de contato estudada e $\|(x, y) - (x', y')\| = \sqrt{(x-x')^2 - (y-y')^2}$, representa a distância euclidiana do ponto (x, y) até o ponto (x', y') .

A integral dupla da Equação (59) é discretizada de forma similar à integral do deslocamento do contato linear, e a pressão nos pontos de seu domínio é aproximada por uma função constante por partes:

$$p_{k,l} = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid x_k - \frac{h}{2} \leq x \leq x_k + \frac{h}{2} \wedge y_l - \frac{h}{2} \leq y \leq y_l + \frac{h}{2} \right\} \quad (60)$$

Considerando um domínio limitado pelos intervalos $[x_1; x_m]$ no eixo das abscissas e $[y_1; y_n]$ no eixo das ordenadas, a forma discretizada da Equação (59) pode ser expressa por:

$$u(x_k, y_l) = \frac{2}{\pi E'} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n D_{ij}^{kl} p_{ij} \quad (61)$$

onde:

$$\begin{aligned}
D_{ij}^{kl} = & \left(x_k - x_i + \frac{h}{2}\right) \ln \left[\frac{\left(y_l - y_j + \frac{h}{2}\right) + \sqrt{\left(y_l - y_j + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(x_k - x_i + \frac{h}{2}\right)^2}}{\left(y_l - y_j - \frac{h}{2}\right) + \sqrt{\left(y_l - y_j - \frac{h}{2}\right)^2 + \left(x_k - x_i + \frac{h}{2}\right)^2}} \right] + \\
& + \left(x_k - x_i - \frac{h}{2}\right) \ln \left[\frac{\left(y_l - y_j - \frac{h}{2}\right) + \sqrt{\left(y_l - y_j - \frac{h}{2}\right)^2 + \left(x_k - x_i - \frac{h}{2}\right)^2}}{\left(y_l - y_j + \frac{h}{2}\right) + \sqrt{\left(y_l - y_j + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(x_k - x_i - \frac{h}{2}\right)^2}} \right] + \\
& + \left(y_l - y_j + \frac{h}{2}\right) \ln \left[\frac{\left(x_k - x_i + \frac{h}{2}\right) + \sqrt{\left(y_l - y_j + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(x_k - x_i + \frac{h}{2}\right)^2}}{\left(x_k - x_i - \frac{h}{2}\right) + \sqrt{\left(y_l - y_j + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(x_k - x_i - \frac{h}{2}\right)^2}} \right] + \\
& + \left(y_l - y_j - \frac{h}{2}\right) \ln \left[\frac{\left(x_k - x_i - \frac{h}{2}\right) + \sqrt{\left(y_l - y_j - \frac{h}{2}\right)^2 + \left(x_k - x_i - \frac{h}{2}\right)^2}}{\left(x_k - x_i + \frac{h}{2}\right) + \sqrt{\left(y_l - y_j - \frac{h}{2}\right)^2 + \left(x_k - x_i + \frac{h}{2}\right)^2}} \right] \quad (62)
\end{aligned}$$

Dessa forma, o deslocamento no ponto (x_k, y_l) é dado por:

$$u(x_k, y_l) = \frac{2}{\pi E'} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n D_{ij}^{kl} p_{ij} \quad (63)$$

Tomando $K_{ij}^{kl} = \frac{2}{\pi E'} D_{ij}^{kl}$ então, o deslocamento no ponto (x_k, y_l) da malha também pode ser expresso por:

$$u(x_k, y_l) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n K_{ij}^{kl} p_{ij}. \quad (64)$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados das simulações numéricas, aplicando-se os diferentes métodos de resolução do LCP, a saber: método de Lemke (LCPSolve e LCPSolve_MQC), programação quadrática (LCPQuad), mínimos quadrados não-negativos (LCPMin) e pacote Gurobi (LCPGurobi). Inicia-se com problemas onde a região de contato é representada por um domínio unidimensional, primeiramente liso e depois rugoso, sendo a rugosidade representada por uma função matemática analítica. Em seguida, expande-se para o contato em domínio bidimensional liso e depois rugoso. Após essas análises com as superfícies virtuais³, são realizadas avaliações de contato em superfícies com rugosidades reais, estudando tanto o contato unidimensional quanto o contato bidimensional.

Para comparar o desempenho dos métodos em termos de velocidade computacional para encontrar a solução, foi utilizado um computador com um processador AMD Ryzen 5 2600X e memória RAM de 64 GB.

4.1 CONTATO EM DOMÍNIO UNIDIMENSIONAL

Nesta seção são apresentados os resultados de testes numéricos considerando domínio unidimensional. Inicialmente são analisados dois problemas de contato entre corpos lisos, em seguida é analisado um problema de contato com superfície rugosa virtual.

Os problemas desta seção foram resolvidos com cinco discretizações diferentes: 64, 128, 256, 512 e 1024 pontos. Na exposição dos resultados dos diversos testes, o tempo computacional dispendido não é apresentado pois a solução com a maior discretização é encontrada em menos de 7 s. Além disso, devido aos tempos serem baixos, não foram observadas grandes variações ao se empregar os diferentes métodos de solução do LCP quando utilizadas malhas de mesmo tamanho. O

³ O termo “virtual” aqui empregado é utilizado no sentido de que as superfícies correspondentes não são obtidas de dados experimentais, englobando então aquelas sem rugosidade (lisas) e aquelas com rugosidade (ondulação) gerada através de equação matemática.

desempenho dos algoritmos em relação ao tempo computacional é analisado nos problemas em domínio bidimensional (Seção 4.2).

Também, visando concisão, não são apresentados os resultados dos métodos LCPMin e LCPSolve_MQC. Esses métodos são derivados dos métodos LCPQuad e LCPSolve, respectivamente, e, nos testes desta seção, os resultados obtidos foram equivalentes aos seus métodos base.

4.1.1 Contato em Domínio Unidimensional entre Superfícies Lisas

O problema de contato em domínio unidimensional, também denominado de contato linear (conforme visto na Seção 2.1), pode ocorrer de duas formas: entre dois cilindros ou entre plano e cilindro. Na sequência, como etapa de validação dos códigos, é solucionado um problema de cada um desses casos.

4.1.1.1 Contato entre Dois Cilindros

Dados de entrada:

- Raios de curvaturas: $R_1 = 20$ mm; $R_2 = 20$ mm;
- Módulos de elasticidade: $E_1 = E_2 = 210 \times 10^3$ MPa;
- Coeficientes de Poisson: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$;
- Domínio: $x = [-1 ; 1]$ mm;
- Separação inicial da superfície de referência: $g_0 = -0,01$ mm

A Tabela 1 sumariza os resultados encontrados com os diferentes métodos de solução do LCP e diferentes discretizações, e apresenta também, para efeitos de comparação, os resultados obtidos via solução analítica, disponível em Johnson (1985). Pode-se observar que, para uma mesma discretização, os três métodos obtêm praticamente os mesmos valores de força, pressão máxima e região de contato. É também notório que, à medida que o número de nós aumenta, os valores numéricos da semi-largura de contato e da pressão máxima convergem para os respectivos valores analíticos, apesar de ocorrerem leves variações ao refinar a malha nos três métodos.

Tabela 1 - Resultados para o caso de contato entre dois cilindros lisos (domínio unidimensional)

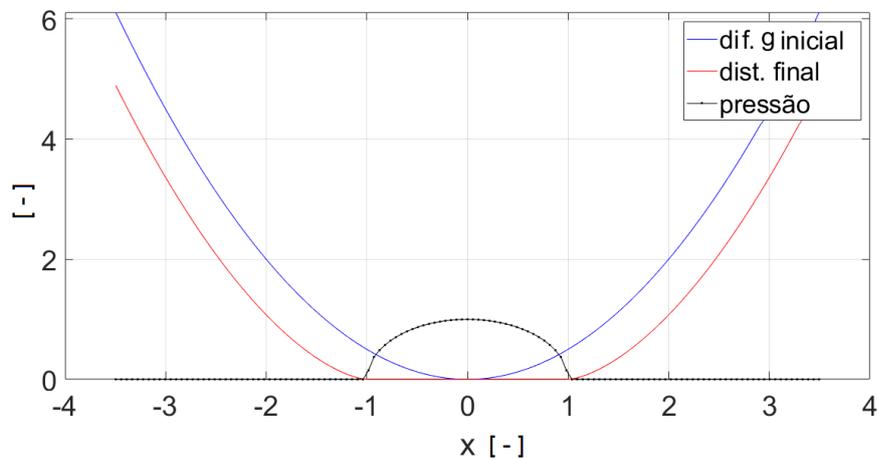
Método	N	Força de contato (N/mm)	Pressão máxima (MPa)	Semi-largura de contato (mm) (numérico)	Semi-largura de contato (mm) (analítico)	Pressão máxima (MPa) (analítico)
LCPSolve	64	741,7	1648,0	0,3015	0,2860	1650,1
	128	741,3	1649,7	0,2913		
	256	741,3	1650,0	0,2940		
	512	741,3	1650,1	0,2876		
	1024	741,3	1650,1	0,2864		
LCPQuad	64	741,7	1648,0	0,3015		
	128	741,3	1649,7	0,2913		
	256	741,3	1650,0	0,2940		
	512	741,3	1650,1	0,2876		
	1024	741,3	1650,1	0,2864		
LCPGurobi	64	741,7	1648,0	0,3015		
	128	741,3	1649,7	0,2914		
	256	741,3	1650,0	0,2941		
	512	741,3	1650,1	0,2876		
	1024	741,3	1650,1	0,2860		

Fonte: autoria própria

As Figuras 14, 15 e 16 apresentam, para cada um dos métodos (LCPSolve, LCPQuad e LCPGurobi) e para a discretização com 128 nós, curvas de distribuição de pressão e de distâncias entre as superfícies dos corpos antes e após o contato entre eles. Nos gráficos dessas figuras, o eixo horizontal representa o domínio x normalizado pela metade do comprimento do contato Hertiziano (b). A pressão (p_i) é normalizada pelo seu valor máximo e está representada pela linha preta. A linha vermelha representa a distância normal entre as superfícies após a deformação (distância final e_i), normalizada por b^2/R , onde R é o raio de curvatura reduzido, definido na Equação (49). Também é apresentada, para melhor entendimento do problema, a diferença entre a separação inicial e a separação inicial no ponto de referência do Corpo 1 (isto é, $g_i - g_0$), também normalizada por b^2/R .

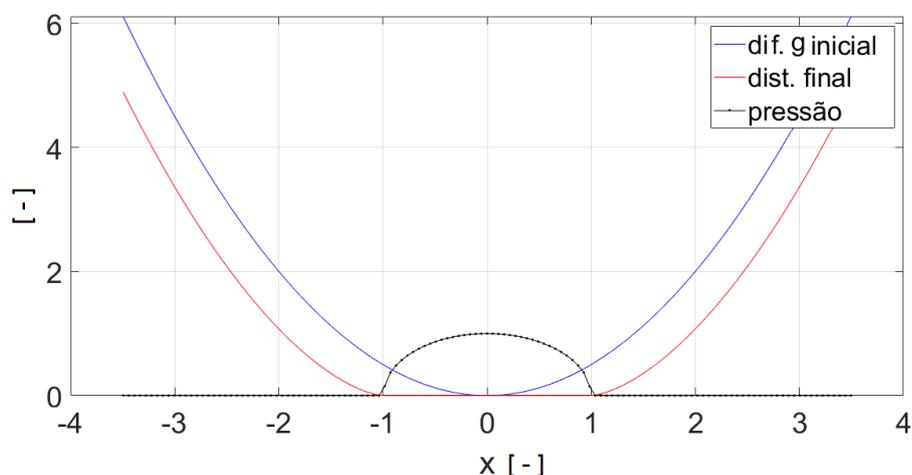
É possível observar que os gráficos de pressão calculada pelos três métodos são muito semelhantes: função contínua crescente a partir de $x = -1$, atinge o ponto de pressão máxima em $x = 0$ e decresce em $x = 1$. Entre -1 e 1 a curva apresenta comportamento suave, como era o esperado. A Tabela 1 permite confirmar a semelhança entre os resultados pelos três métodos com diferentes discretizações do domínio.

Figura 14 – Diferença do g inicial, distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão para contato entre dois cilindros (valores normalizados). Solução com LCPSolve (N = 128)



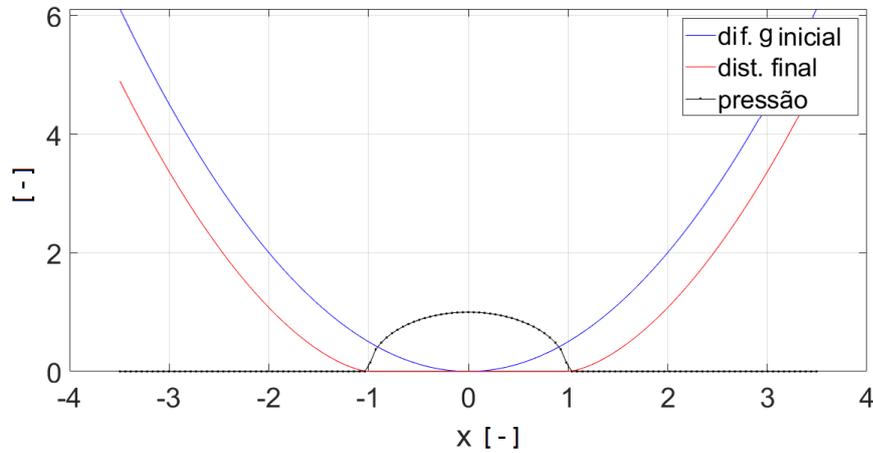
Fonte: autoria própria

Figura 15 – Diferença do g inicial, distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão para contato entre dois cilindros (valores normalizados). Solução com LCPQuad (N = 128)



Fonte: autoria própria

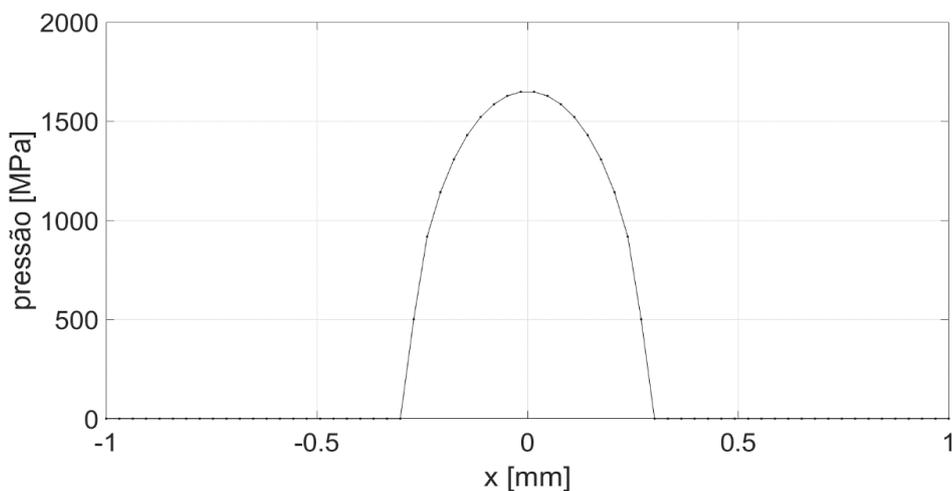
Figura 16 – Diferença do g inicial, distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão para contato entre dois cilindros (valores normalizados). Solução com LCPGurobi (N = 128)



Fonte: autoria própria

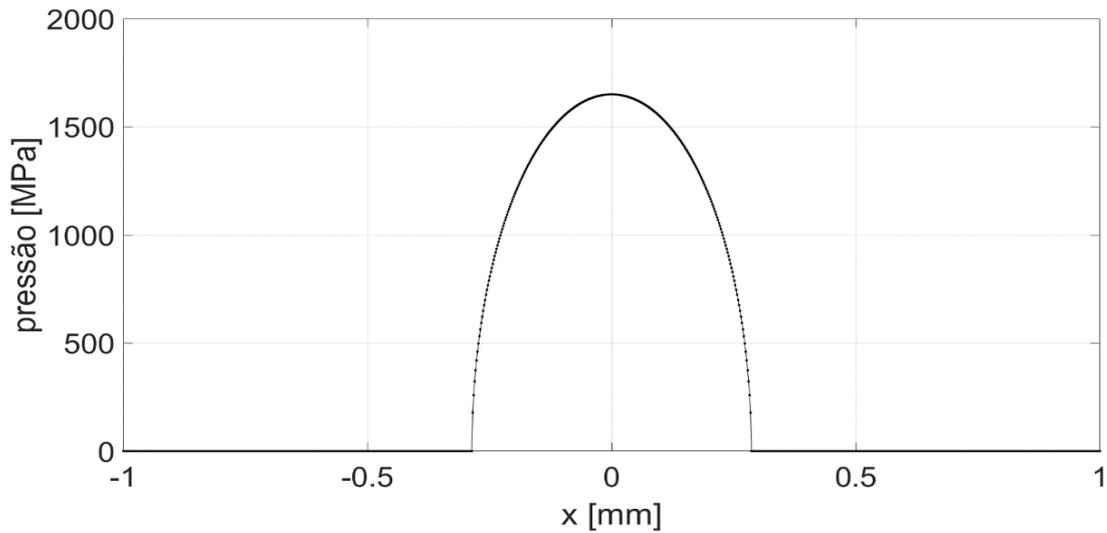
Nas Figuras 17 e 18 são mostradas as distribuições de pressão (sem normalização) obtidas com discretizações de 64 e 1024 nós, respectivamente. Pode-se verificar que, para este caso, os valores de pressão e da região de contato são bem representados com uma discretização não muito refinada. Apenas se observa que com um número maior de pontos a curva de pressão é mais suave. Os gráficos dessas figuras foram gerados a partir dos resultados obtidos com o método LCPSolve, os quais são praticamente idênticos aos obtidos pelos outros métodos aqui estudados.

Figura 17 - Distribuição de pressão com $N = 64$



Fonte: autoria própria

Figura 18 - Distribuição de pressão com $N = 1024$



Fonte: autoria própria

4.1.1.2 Contato entre Cilindro e Plano

Este teste foi realizado para verificar se o comportamento observado no caso anterior ocorre também no contato unidimensional entre cilindro e plano. Para tanto, o raio de curvatura do Corpo 2 foi considerado 50 vezes superior ao raio do Corpo 1.

Os seguintes dados de entrada foram utilizados:

- Raios de curvaturas: $R_1 = 20$ mm ; $R_2 = 1000$ mm ;
- Módulos de elasticidade: $E_1 = E_2 = 210 \times 10^3$ MPa;
- Coeficientes de Poisson: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$;
- Domínio: $x = [-1 ; 1]$ mm ;
- Separação inicial da superfície de referência: $g_0 = -0,01$ mm

Assim como no teste anterior, os três métodos obtêm praticamente os mesmos valores de força, pressão máxima e região de contato utilizando o mesmo número de nós, conforme pode ser observado na Tabela 2. Comparando os valores de pressão máxima numéricos e analítico, a diferença máxima foi menor que 0,5%, independente da discretização. Já o raio da região de contato apresenta uma diferença de

aproximadamente 4% para a discretização com 64 nós, e diminui para menos de 0,3% para 1024 nós.

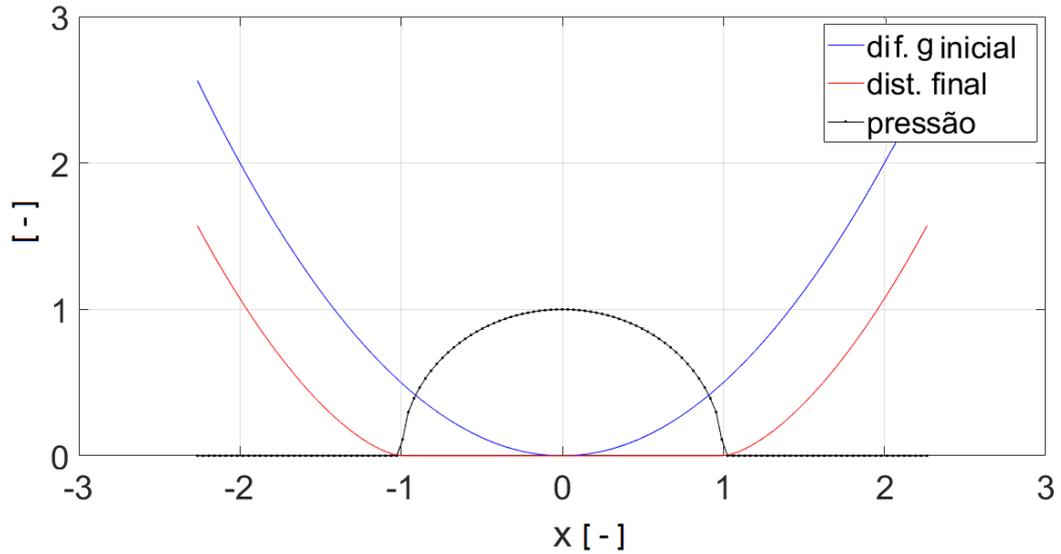
Tabela 2- Resultados para o caso de contato entre cilindro e plano lisos (domínio unidimensional)

Método	N	Força de contato (N/mm)	Pressão máxima (MPa)	Semi-largura de contato (mm) (numérico)	Semi-largura de contato (mm) (analítico)	Pressão Máxima (MPa) (analítico)
LCPsolve	64	901,9	1298,8	0,4603	0,4417	1295,5
	128	901,6	1299,4	0,4488		
	256	901,5	1299,5	0,4431		
	512	901,5	1299,5	0,4442		
	1024	901,5	1299,5	0,4428		
LCPQuad	64	901,9	1298,8	0,4603		
	128	901,6	1299,4	0,4488		
	256	901,5	1299,5	0,4431		
	512	901,5	1299,5	0,4444		
	1024	901,5	1299,5	0,4428		
LCPGurobi	64	901,9	1298,8	0,4603		
	128	901,6	1299,4	0,4488		
	256	901,5	1299,5	0,4431		
	512	901,5	1299,5	0,4442		
	1024	901,5	1299,5	0,4428		

Fonte: autoria própria

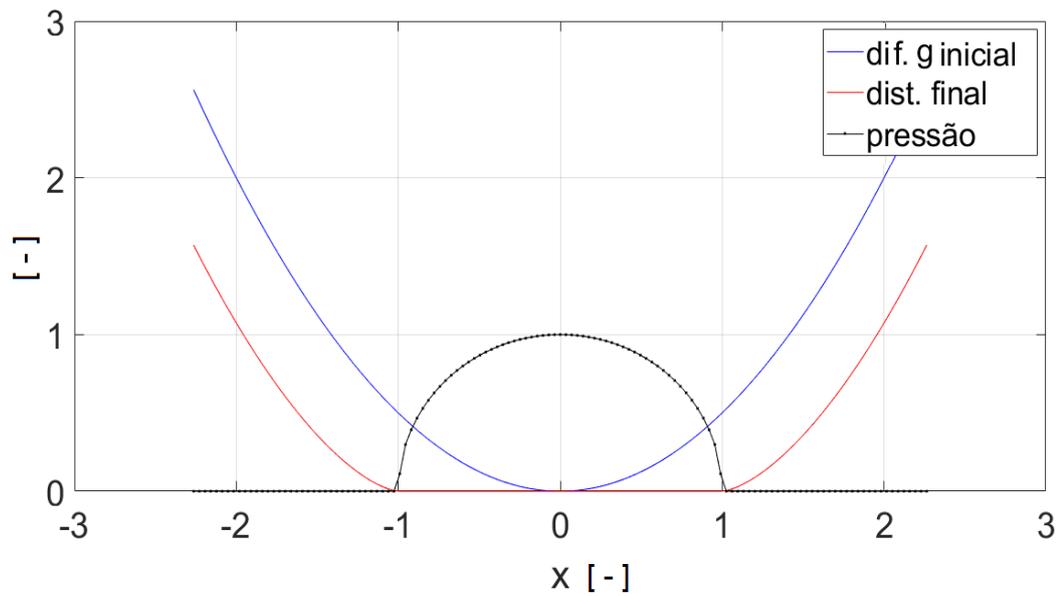
Analogamente ao caso anterior, as Figuras 19, 20 e 21 apresentam, para cada um dos métodos e para a discretização com 128 nós, curvas normalizadas de distribuição de pressão e de distância antes e após o contato entre corpos. É possível observar que os gráficos das distribuições de pressões obtidas pelos três métodos são muito semelhantes também: função contínua crescente a partir de $x = -1$, atinge o ponto de pressão máxima em $x = 0$ e decresce em $x = 1$. Entre -1 e 1 a curva apresenta comportamento suave.

Figura 19 - Diferença do g inicial, distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão para contato entre cilindro e plano (valores normalizados). Solução com LCPSolve (N = 128)



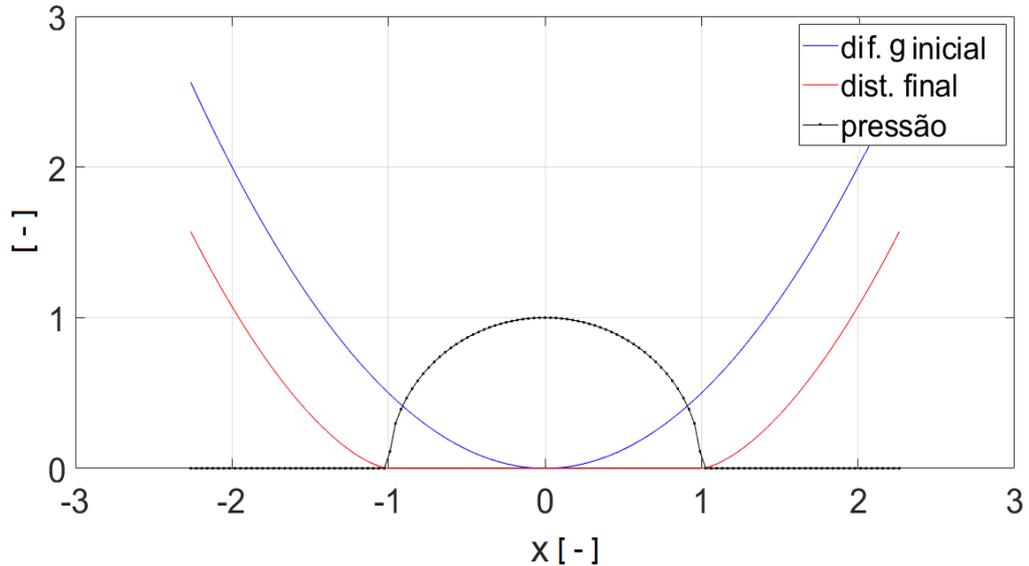
Fonte: autoria própria

Figura 20 – Diferença do g inicial, distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão para contato entre cilindro e plano (valores normalizados). Solução com LCPQuad (N = 128)



Fonte: autoria própria

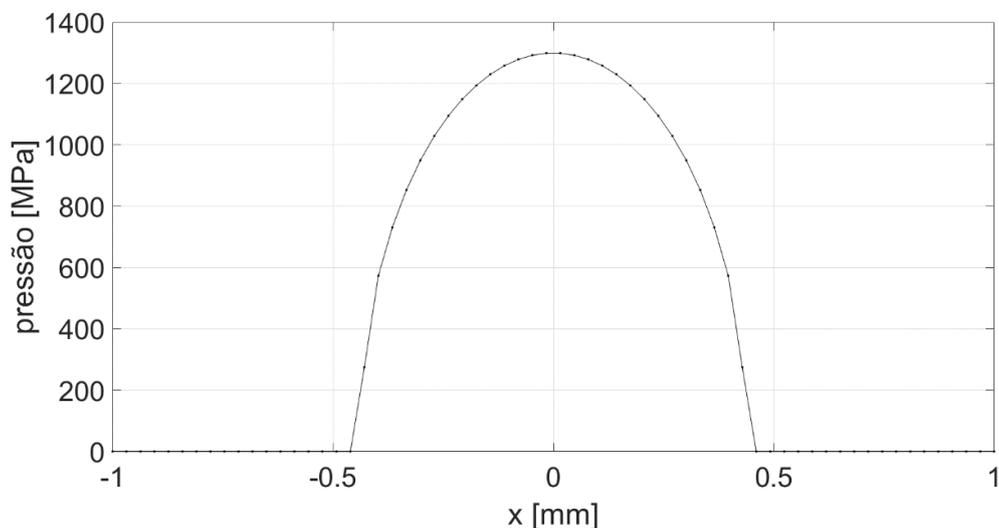
Figura 21 – Diferença do g inicial, distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão para contato entre cilindro e plano (valores normalizados). Solução com LCPGurobi (N = 128)



Fonte: autoria própria

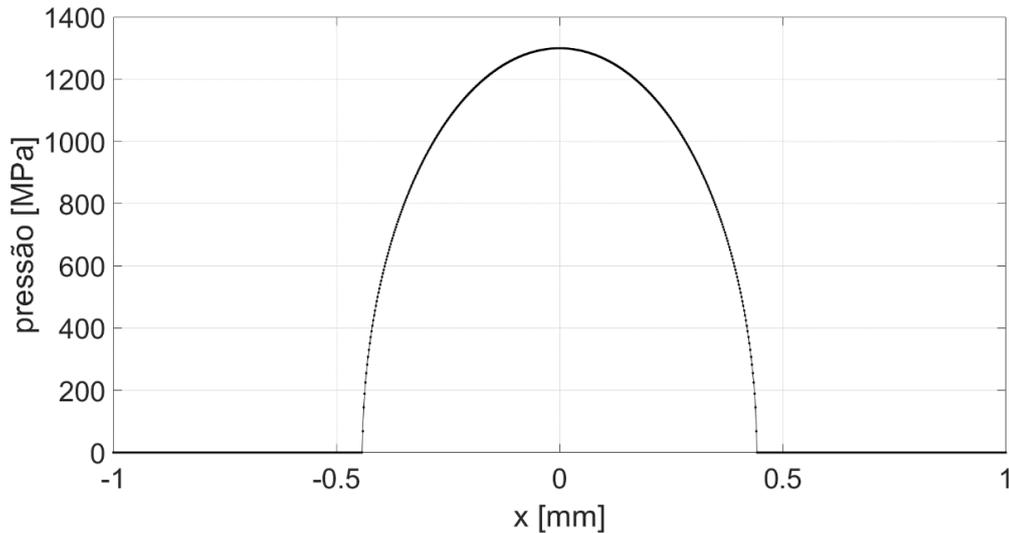
Nas Figuras 22 e 23 são mostradas as distribuições de pressão (sem normalização) com discretizações de 64 e 1024 nós, respectivamente. Analisando os dois gráficos, percebe-se, como esperado, que com uma discretização de 1024 nós (Figura 23), a curva é mais suave, principalmente nas regiões de crescimento e decréscimo.

Figura 22 - Distribuição de pressão com $N = 64$



Fonte: autoria própria

Figura 23 - Distribuição de pressão com $N = 1024$



Fonte: autoria própria

4.1.2 Contato em Domínio Unidimensional com Perfil Ondulado Virtual

Após os resultados entre os três métodos de resolver o LCP terem se mostrado semelhantes para o caso liso em domínio unidimensional, os métodos foram testados em situações de contato com perfil ondulado virtual. Os dados iniciais utilizados foram de duas peças de mesmo material e raios de curvaturas mais próximos do que ocorre em casos reais de engenharia, sendo descritos abaixo:

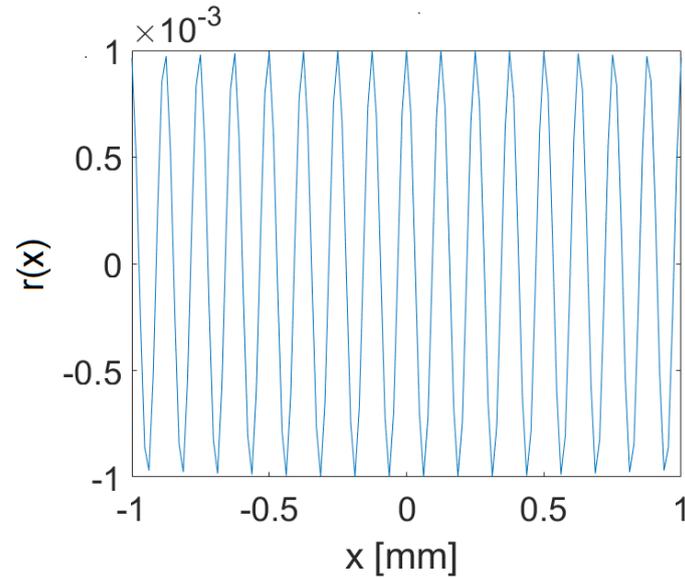
- Raios de curvaturas: $R_1 = 20$ mm; $R_2 = 50$ mm;
- Módulos de elasticidade: $E_1 = E_2 = 210 \times 10^3$ MPa;
- Coeficientes de Poisson: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$;
- Domínio: $x = [-1 ; 1]$ mm;
- Separação inicial da superfície de referência: $g_0 = -0,01$ mm

A função utilizada para modelar a ondulação possui formato sinusoidal, sendo dada por:

$$r(x) = (0,001)\cos(50x), \quad [\text{mm}] \quad (65)$$

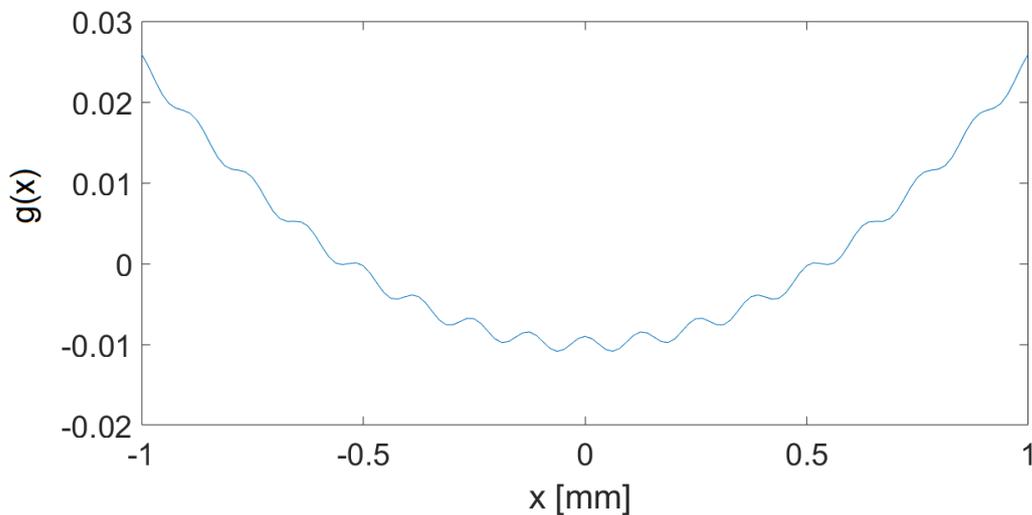
cuja representação gráfica está ilustrada na Figura 24. Já a Figura 25 apresenta a separação inicial do Corpo 1, com as ondulações.

Figura 24 - Perfil da função que representa a ondulação para problema de contato em domínio unidimensional



Fonte: autoria própria

Figura 25 - Geometria do Corpo 1 para o caso de contato com ondulação unidimensional



Fonte: autoria própria

Após acrescentar a função da ondulação exposta na Equação (65) foi feita a resolução do LCP aplicando o método de Lemke (LCPSolve), o código Gurobi (LCPGurobi) e o método de resolução via programação quadrática (LCPQuad). Os resultados obtidos estão sumarizados na Tabela 3. Este problema não possui solução

analítica e, dessa forma, não há uma solução de referência para comparação dos resultados como feito nos casos de contato liso.

Para melhor verificar o efeito da discretização do domínio, análises gráficas dos resultados com duas discretizações distintas (64 e 1024 nós) foram realizadas. As Figuras 26, 27 e 28 apresentam, para cada um dos métodos (LCPSolve, LCPQuad e LCPGurobi, respectivamente) e para a discretização com 64 nós, curvas normalizadas de distribuição de pressão e de distância antes e após o contato entre corpos. A pressão foi normalizada em relação ao valor da máxima da pressão Hertziana (isto é, valor correspondente ao caso liso) e as distâncias são normalizadas pela metade do comprimento do contato Hertziano. Já as Figuras 29, 30 e 31 apresentam essas curvas para discretização com 1024 nós.

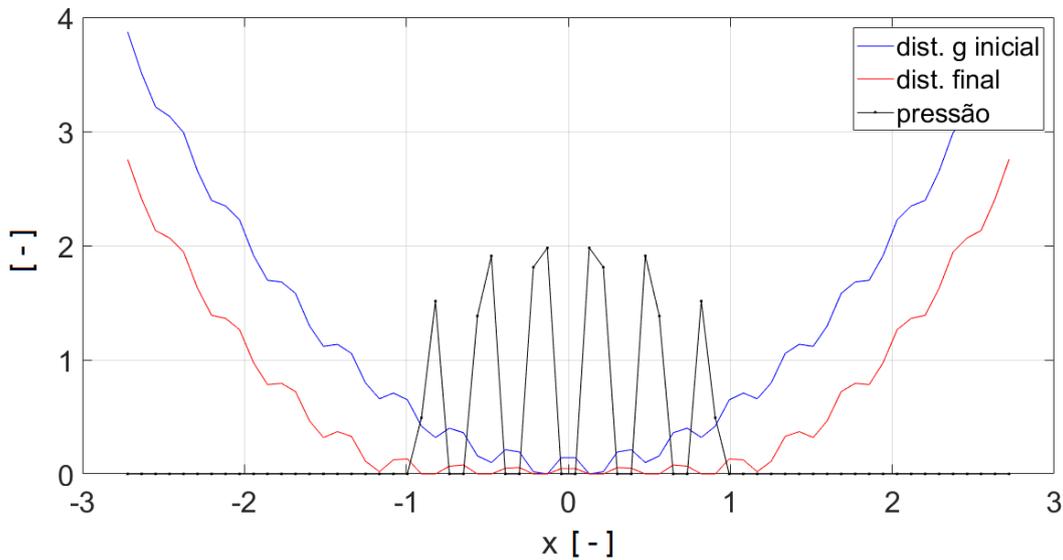
Tabela 3 - Resultados para o caso de contato com um perfil ondulado (domínio unidimensional)

Método	<i>N</i>	Força de contato (N/mm)	Pressão máxima (MPa)	Semi-largura de contato (mm) (numérico)
LCPsolve	64	856,7	2939	0,3650
	128	852,6	3854	0,3385
	256	851,2	3991	0,3411
	512	851,2	4027	0,3346
	1024	851,1	4036	0,3333
LCPQuad	64	856,7	2939	0,3650
	128	852,6	3854	0,3385
	256	851,2	3991	0,3411
	512	851,2	4027	0,3346
	1024	851,1	4036	0,3333
LCPGurobi	64	856,7	2939	0,3650
	128	850,6	3854	0,3385
	256	851,2	3991	0,3411
	512	851,2	4027	0,3346
	1024	851,1	4036	0,3333

Fonte: autoria própria

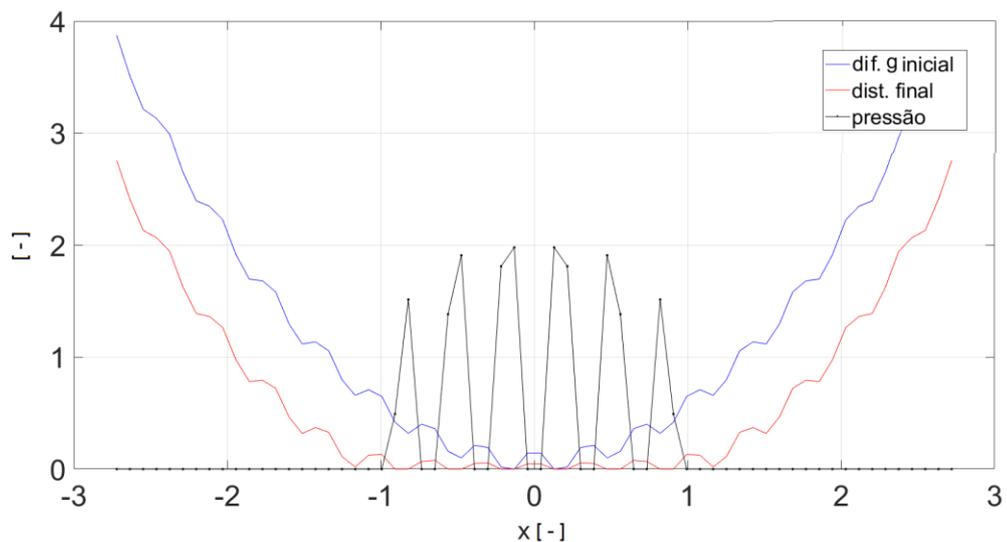
Os resultados das três aplicações se mostraram semelhantes e, portanto, satisfatórias. Em seguida foram feitas as análises gráficas dos três métodos variando o número de nós, sendo o primeiro grupo de gráficos com $N = 64$ e o segundo grupo $N = 1024$, como mostrado a seguir. A pressão foi normalizada em relação à máxima pressão Hertziana (isto é, valor da máxima pressão correspondente ao caso liso).

Figura 26 – Diferença do g inicial, distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão normalizados com $N = 64$ utilizando o LCPSolve



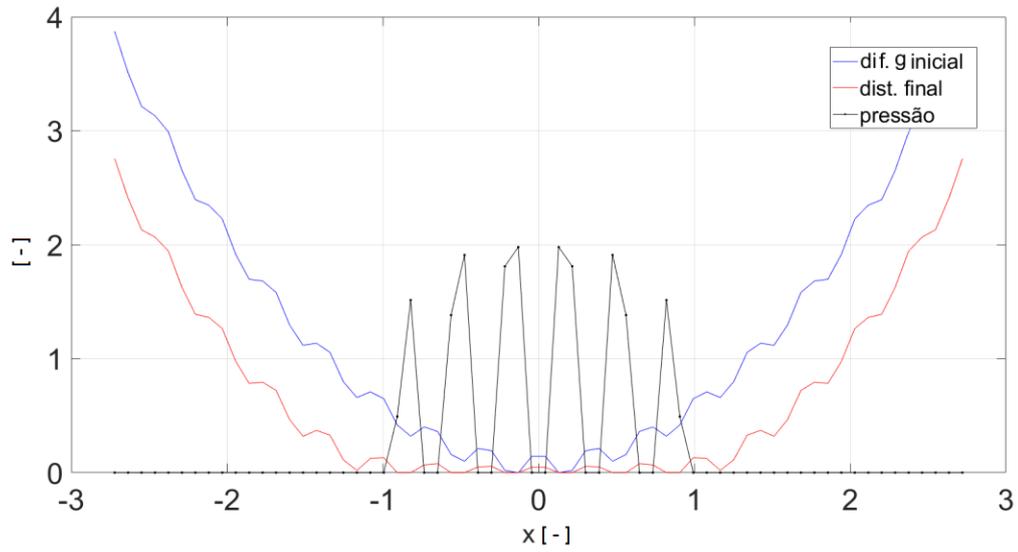
Fonte: autoria própria

Figura 27 – Diferença do g inicial, distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão normalizados com $N = 64$ utilizando o LCPQuad



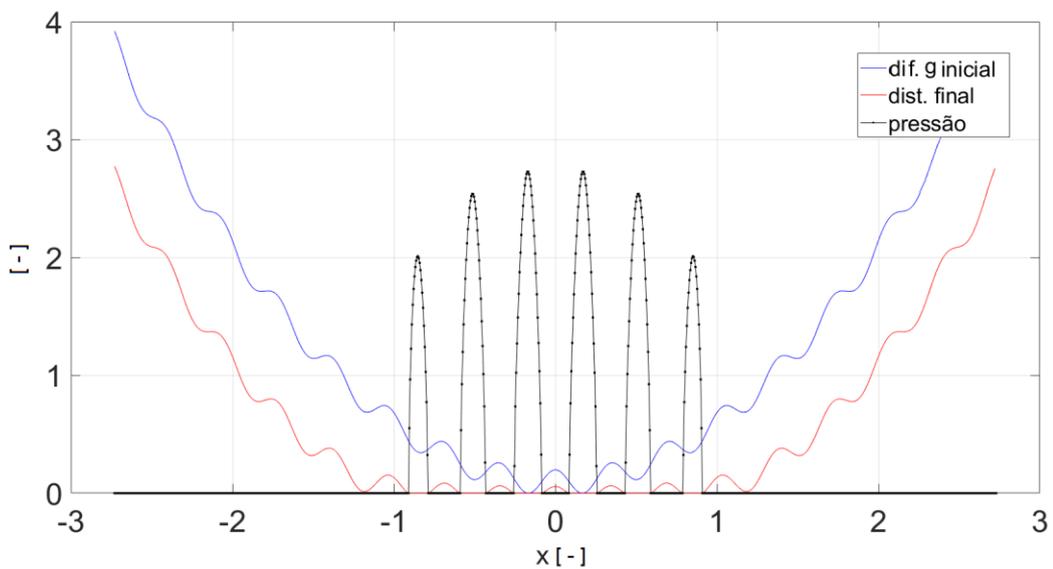
Fonte: autoria própria

Figura 28 - Diferença do g inicial, distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão normalizados com $N = 64$ utilizando o LCPGurobi



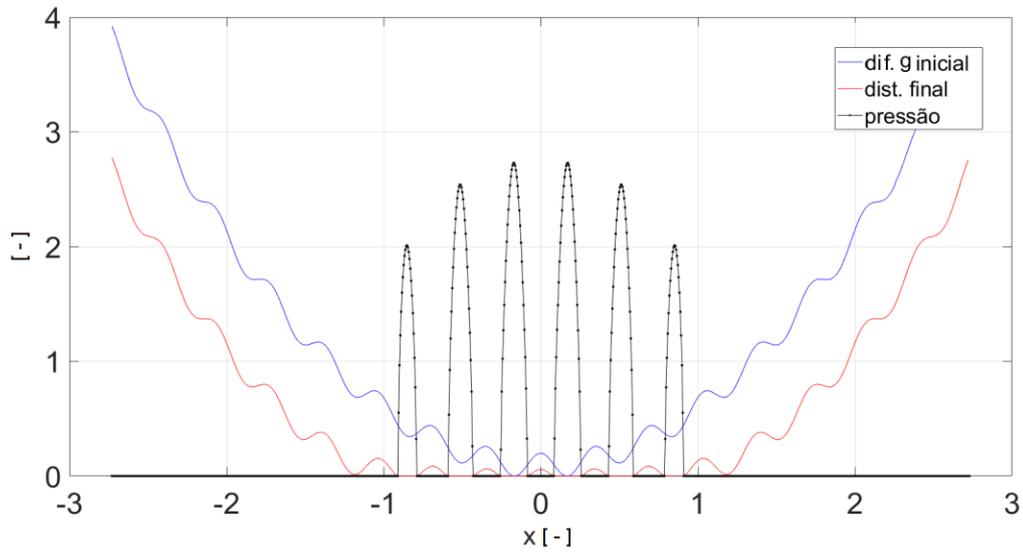
Fonte: autoria própria

Figura 29 - Diferença do g inicial, distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão normalizados com $N = 1024$ utilizando o LCPSolve



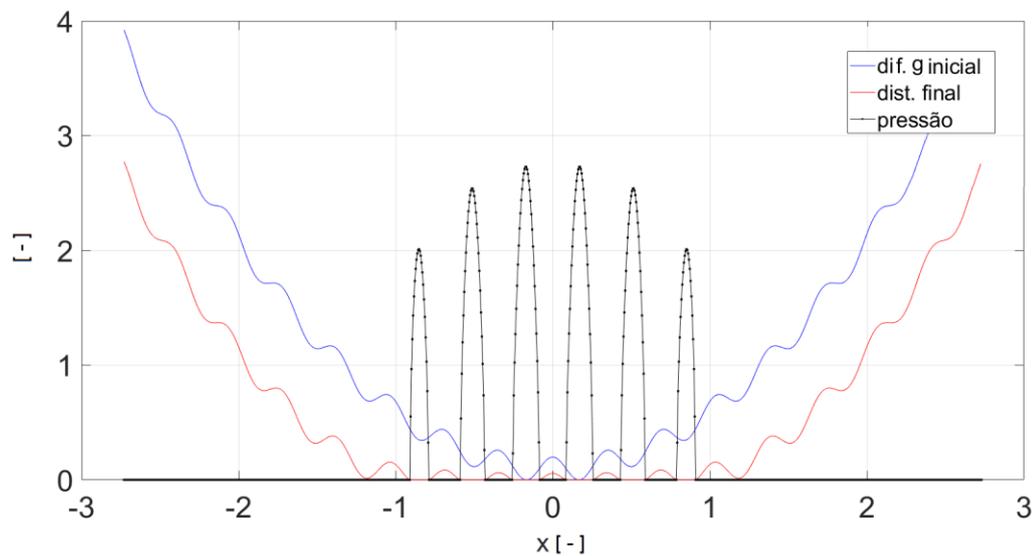
Fonte: autoria própria

Figura 30 - Diferença do g inicial, distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão normalizados com $N = 1024$ utilizando o LCPQuad



Fonte: autoria própria

Figura 31 - Diferença do g inicial, distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, e pressão normalizados com $N = 1024$ utilizando o LCPGurobi



Fonte: autoria própria

Pela análise da Tabela 3, observa-se que os resultados obtidos com os diferentes métodos, para uma mesma discretização, se mostraram semelhantes: para a menor discretização (64 nós) a força total foi de aproximadamente 857 N/mm e a pressão máxima de 2,9 GPa; e para a maior discretização (1024 nós) a força foi de

aproximadamente 851,1 N/mm e a pressão máxima de 4 GPa. Observa-se, portanto, que o valor estimado da pressão máxima aumenta com o número de nós, justificado pela maior acurácia na representação da ondulação à medida que se melhora a discretização, o que provoca uma diminuição da área real de contato da aspereza e, conseqüentemente, um aumento da pressão local.

Analisando as Figuras 26 a 31, para todos os métodos as curvas de pressão normalizada iniciam o crescimento em $x = -1$, tendem ao valor máximo próximo de $x = 0$, e descrevem até $x = -1$. Nos gráficos das Figuras 26, 27 e 28, obtidos com discretização com 64 nós, as curvas não são suaves, e o valor da pressão máxima, como já observado anteriormente, é menor do que aquele obtido com malha mais refinadas. Como esperado, as curvas de pressão tornam-se mais suaves com o maior refinamento da malha, como observado nos resultados com discretização com 1024 nós (Figuras 29, 30 e 31). Também é possível observar que nas regiões onde a pressão não é nula, isto é $p_i > 0$, a distância final é nula, ou seja $e_i = 0$, e onde a distância final é positiva, a pressão é nula, satisfazendo as condições do contato normal.

4.2 CONTATO EM DOMÍNIO BIDIMENSIONAL

Nesta seção são apresentados os resultados de problemas considerando domínio bidimensional. Inicialmente são analisados dois problemas com corpos lisos, em seguida dois problemas com superfícies com ondulações por função matemática. Os problemas foram resolvidos para três discretizações do domínio: 32 x 32, 64 x 64 e 128 x 128 pontos. Os tempos computacionais para cada método de solução do LCP são apresentados de forma a verificar o desempenho dos métodos.

4.2.1 Contato em Domínio Bidimensional entre Superfícies Lisas

4.2.1.1 Contato Pontual - Caso1

Dados de entrada:

- Raios de curvaturas do Corpo 1: $R_{1x} = R_{1y} = 0,1$ mm
- Raios de curvaturas do Corpo 2: $R_{2x} = R_{2y} = 0,05$ mm

- Módulos de elasticidade: $E_1 = 180 \times 10^3$ MPa ; $E_2 = 210 \times 10^3$ MPa
- Coeficientes de Poisson: $\nu_1 = 0,25$; $\nu_2 = 0,3$;
- Domínio em x e y: $[-3 ; 3] \times 10^{-3}$ mm
- Separação inicial da superfície: $g_0 = -4 \times 10^{-5}$ mm

A Tabela 4 sumariza os resultados deste caso, obtidos com os diferentes métodos de solução e diferentes discretizações. Já a Tabela 5 apresenta, para efeitos de comparação, a pressão máxima e o raio de contato em função da força total, obtidos via solução analítica disponível em Johnson (1985).

Observa-se na Tabela 4 que, com exceção da solução via LCPQuad, os resultados de força de contato, pressão máxima e raio de contato obtidos com os vários métodos são similares (ou até coincidentes) entre si. Além disso, considerando todas as discretizações, a diferença para a solução analítica é menor que 1% para a pressão máxima e de 6,25% para o raio de contato.

O comportamento da solução via LCPQuad foi analisado para este caso, e verificou-se que o valor da função objetivo ($f(\mathbf{p})$) no ponto encontrado como ótimo, para a malha 64×64 , apresentou valor igual a 0,142, ao passo que para os outros métodos o valor foi inferior a $1,0 \times 10^{-11}$ (o valor do mínimo exato é $f(\mathbf{p}) = 0$). Já para malha 128×128 , a solução via LCPQuad apresentou $f(\mathbf{p}) = 1303$ no ponto considerado como ótimo, o que difere bastante do valor exato, e mostra que a solução vai se afastando ainda mais da solução correta à medida que o domínio é refinado. Mesmo supondo que 0,0897 N seja o resultado da força total (valor final encontrado pelo LCPQuad), os valores de pressão máxima e do raio de contato obtidos numericamente não condizem com os valores encontrados via solução analítica (ver Tabela 5). Ressalta-se aqui que no presente caso foram utilizados valores reduzidos de raios de curvaturas, o que pode ter ocasionado um mal condicionamento da matriz de influência. Portanto, isso dá indícios de que a solução via programação quadrática pode ser sensível ao condicionamento da matriz de influência.

Com relação ao tempo computacional, excluindo-se o método LCPQuad devido à sua solução ter divergido, e analisando a maior discretização (128×128), os melhores desempenhos foram do LCPSolve e do LCPSolve_MQC, com uma leve vantagem para este último. Esses métodos foram, para este caso, mais de 3,5 vezes mais rápidos que o LCPGurobi. Para uma melhor visualização e comparação, a Figura

32 ilustra, em um gráfico de barras, para a malha 128 x 128, o tempo para os diferentes métodos.

Tabela 4 – Resultados no contato pontual liso - Caso 1 (domínio bidimensional)

Método	N	Força de contato (N)	Pressão Máxima (MPa)	Raio de contato (mm) (numérico)	Tempo computacional (s)
LCPMin	32	0,0065	2299	$1,125 \times 10^{-3}$	< 1
	64	0,0065	2308	$1,125 \times 10^{-3}$	39
	128	0,0065	2311	$1,125 \times 10^{-3}$	8470
LCPSolve	32	0,0065	2299	$1,125 \times 10^{-3}$	< 1
	64	0,0065	2308	$1,125 \times 10^{-3}$	47
	128	0,0065	2311	$1,125 \times 10^{-3}$	2893
LCPSolve_MQC	32	0,0065	2299	$1,125 \times 10^{-3}$	1
	64	0,0065	2308	$1,125 \times 10^{-3}$	47
	128	0,0065	2311	$1,157 \times 10^{-3}$	2846
LCPQuad	32	0,0066	2304	$1,125 \times 10^{-3}$	2
	64	0,0068	2319	$1,125 \times 10^{-3}$	33
	128	0,0897	3479	$> 3,0 \times 10^{-3}$	758
LCPGurobi	32	0,0065	2299	$1,125 \times 10^{-3}$	2
	64	0,0065	2308	$1,125 \times 10^{-3}$	146
	128	0,0065	2311	$1,125 \times 10^{-3}$	10392

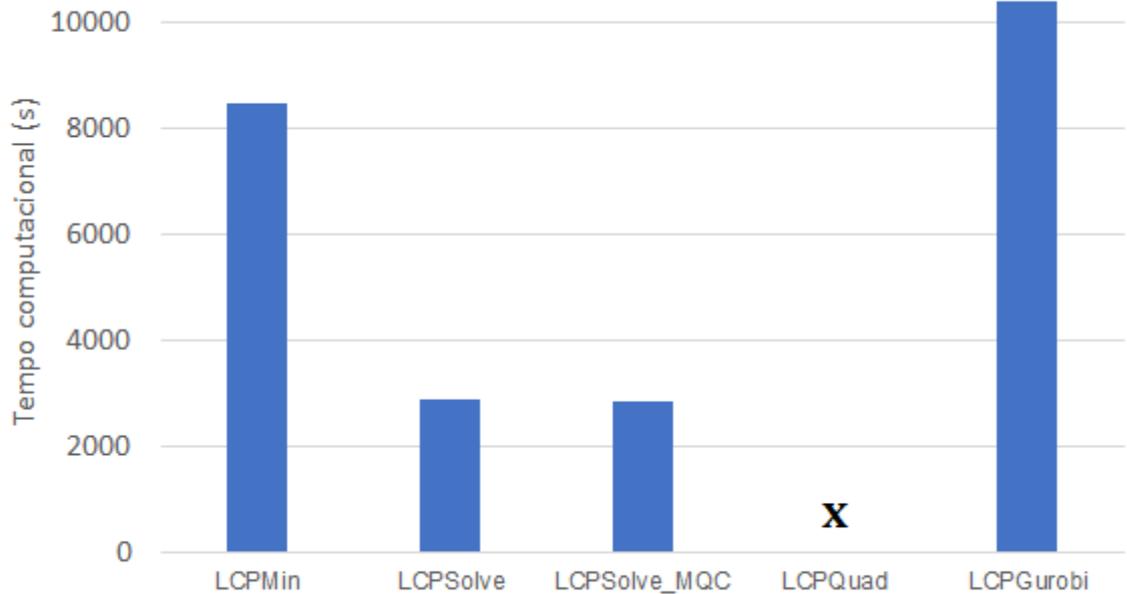
Fonte: autoria própria

Tabela 5 - Valores analíticos de força, pressão e raio de contato para o contato pontual liso - Caso 1 (domínio bidimensional)

Força de contato (N)	Pressão máxima analítica (MPa)	Raio de contato analítico (mm)
0,0065	2316	$1,2 \times 10^{-3}$
0,0066	2328	$1,2 \times 10^{-3}$
0,0068	2352	$1,2 \times 10^{-3}$
0,0897	5565	$2,8 \times 10^{-3}$

Fonte: autoria própria

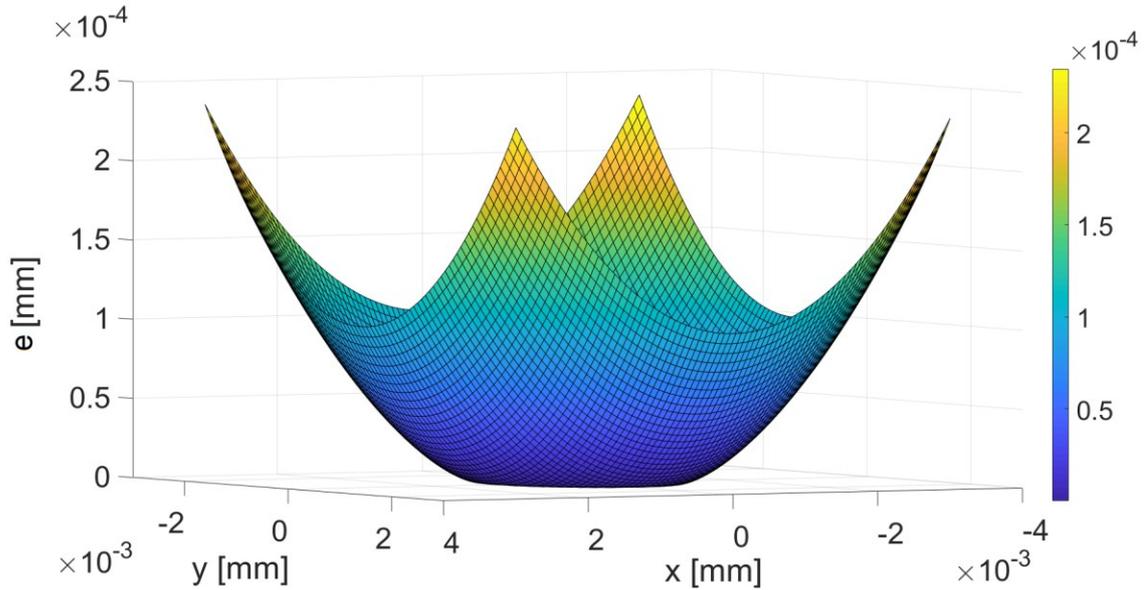
Figura 32 – Tempo de simulação para o contato pontual liso - Caso 1, malha 128 x 128



Fonte: autoria própria

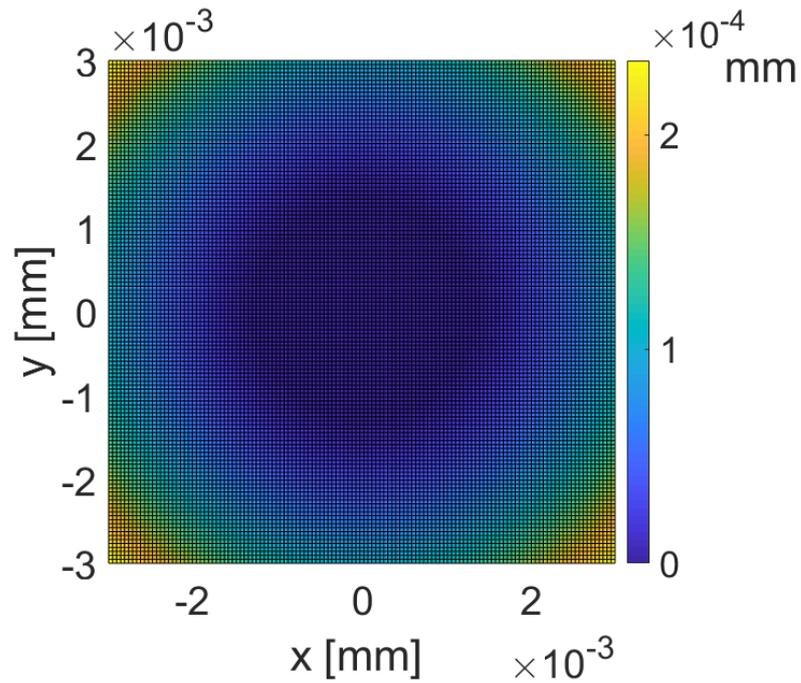
A distância do Corpo 1 (superior) em relação ao Corpo 2, após o contato, para a malha 128 x 128, está representada nas Figuras 33 e 34 (vistas tridimensional e no plano xy, respectivamente). A distribuição da pressão de contato está ilustrada nas Figuras 35 e 36. Lembrando que nos gráficos de distância final, $e(x,y) = 0$ representa a superfície do Corpo 2. Os gráficos dessas figuras foram gerados a partir dos resultados obtidos com o método LCPSolve, os quais são praticamente idênticos aos obtidos pelos outros métodos. Da análise dessas figuras nota-se, como esperado, que onde a distância final é nula a pressão é diferente de zero, e onde a distância é diferente de zero (positiva) a pressão é nula, sendo que a pressão máxima ocorre no centro da região ($x = y = 0$).

Figura 33 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2 após o contato, vista tridimensional (contato pontual liso – Caso 1, malha 128 x 128)



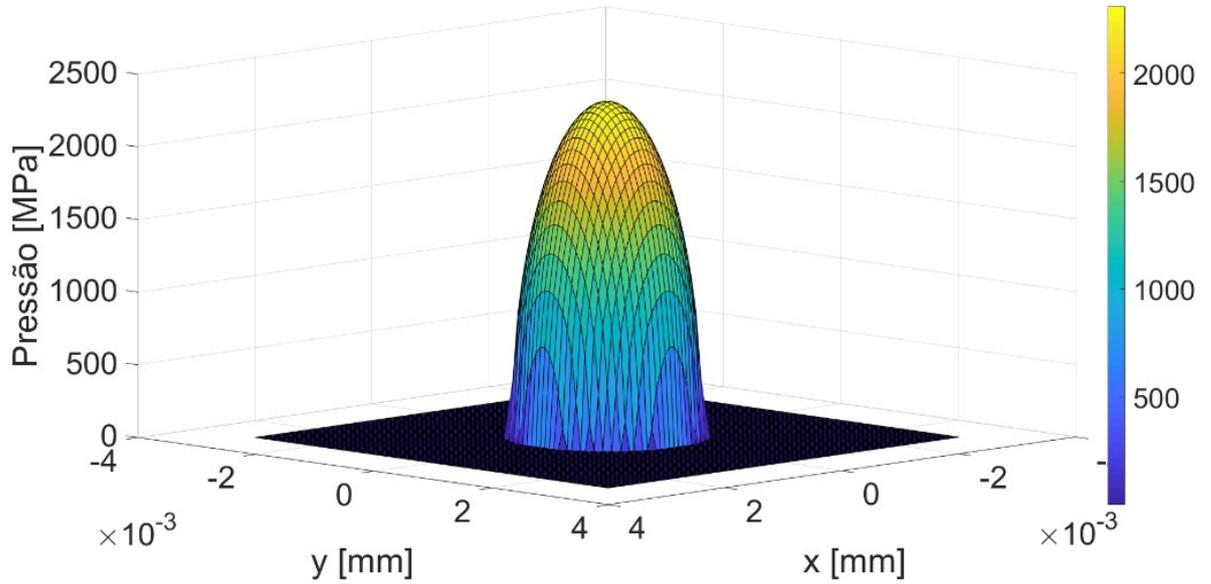
Fonte: autoria própria

Figura 34- Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista bidimensional no plano xy (contato pontual liso – Caso 1, malha 128 x 128)



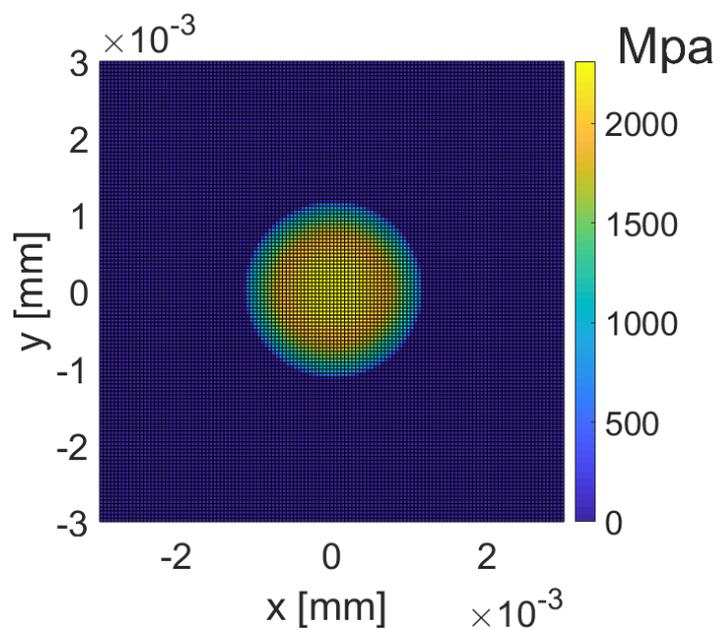
Fonte: autoria própria

Figura 35 - Pressão de contato, vista tridimensional (contato pontual liso – Caso 1, malha 128 x 128)



Fonte: autoria própria

Figura 36 - Pressão de contato, vista bidimensional no plano xy (contato pontual liso – Caso 1, malha 128 x 128)



Fonte: autoria própria

4.2.1.2 Contato Pontual - Caso 2

Após o teste do caso pontual com raios de curvaturas reduzidos, buscou-se utilizar raios mais próximos de aplicações de engenharia para verificar o comportamento da solução e dos métodos.

Os dados de entrada utilizados foram:

- Raios de curvaturas do Corpo 1: $R_{1x} = R_{1y} = 20$ mm
- Raios de curvaturas do Corpo 2: $R_{2x} = R_{2y} = 50$ mm
- Módulos de elasticidade: $E_1 = E_2 = 205 \times 10^3$ MPa
- Coeficientes de Poisson: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$;
- Domínio em x e y: $[-2,5 ; 2,5]$ mm;
- Separação inicial da superfície de referência: $g_0 = -0,05$ mm

A Tabela 6 resume os principais resultados obtidos para este caso, e a Tabela 7 apresenta, para efeitos de comparação, a pressão máxima e o raio de contato em função da força total, obtidos via solução analítica disponível em Johnson (1985).

Observa-se na Tabela 6 que, com exceção do raio de contato obtido via LCPQuad com malha 128×128 , os valores de força de contato, pressão máxima e raio de contato obtidos com os vários métodos, para uma mesma discretização, são iguais. Considerando todas as discretizações e métodos, a diferença do valor da pressão máxima em relação à solução analítica é menor que 1%. Já o raio de contato, sem levar em conta a solução com malha 128×128 via LCPQuad, apresenta diferença em relação à solução analítica de aproximadamente 8% para a malha 32×32 , e de aproximadamente 2% para as discretizações maiores (64×64 e 128×128). A diferença do raio de contato obtido via LCPQuad com malha 128×128 em relação àquele obtido via solução analítica é de aproximadamente 11%, mostrando uma pequena divergência em relação aos resultados obtidos pelos outros métodos. Para este caso, o valor final da função objetivo ($f(\mathbf{p})$) foi sempre inferior à $1,0 \times 10^{-3}$ para todos os métodos e discretizações.

Com relação ao tempo computacional, e analisando a maior discretização (128×128), os melhores desempenhos foram, novamente como no Caso 1, dos métodos LCPSolve e LCPSolve_MQC, com uma leve vantagem para este último (tempo em torno de 1,3% menor). A Figura 32 ilustra, para a malha 128×128 , o tempo

computacional para os diferentes métodos, onde pode-se observar claramente o melhor desempenho dos métodos citados e o pior desempenho do LCPGurobi.

Tabela 6 – Resultados no contato pontual liso – Caso 2 (domínio bidimensional)

Método	<i>N</i>	Força de contato (N)	Pressão máxima (MPa)	Raio de contato (mm) (numérico)	Tempo computacional (s)
LCPMin	32	6362	4214	0,7814	< 1
	64	6349	4236	0,8594	21
	128	6347	4240	0,8594	4199
LCPSolve	32	6362	4214	0,7814	< 1
	64	6349	4236	0,8594	38
	128	6347	4240	0,8594	2204
LCPSolve_MQC	32	6362	4214	0,7814	< 1
	64	6349	4236	0,8594	38
	128	6347	4240	0,8594	2175
LCPQuad	32	6362	4214	0,7814	3
	64	6349	4236	0,8594	115
	128	6347	4240	0,9375	2922
LCPGurobi	32	6362	4214	0,7814	< 2
	64	6349	4236	0,8594	122
	128	6347	4240	0,8594	7681

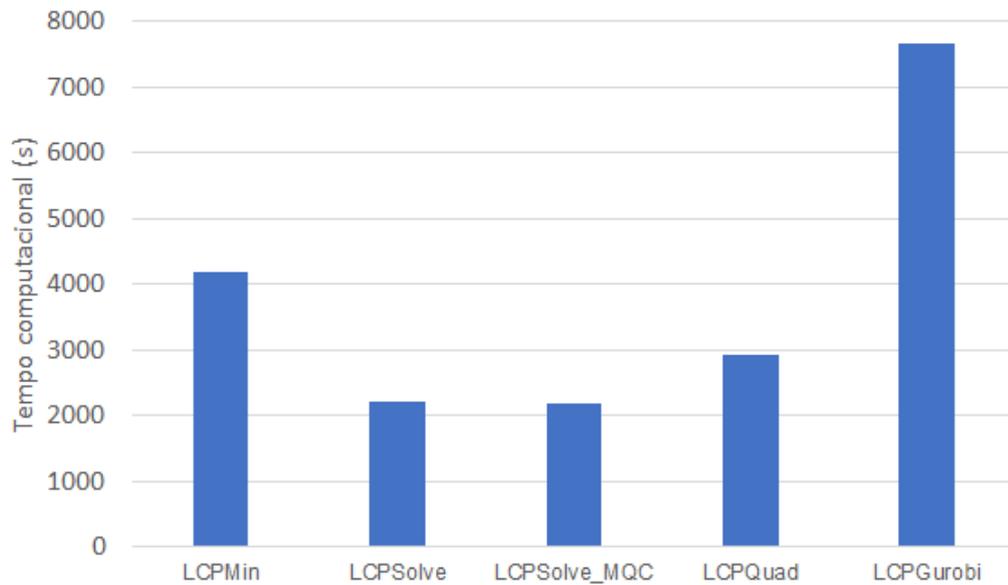
Fonte: autoria própria

Tabela 7- Valores analíticos de força, pressão e raio de contato para o contato pontual liso – Caso 2 (domínio bidimensional)

Força de contato (N)	Pressão máxima analítica (MPa)	Raio de contato analítico (mm)
6362	4246	0,8458
6349	4243	0,8453
6347	4242	0,8452

Fonte: autoria própria

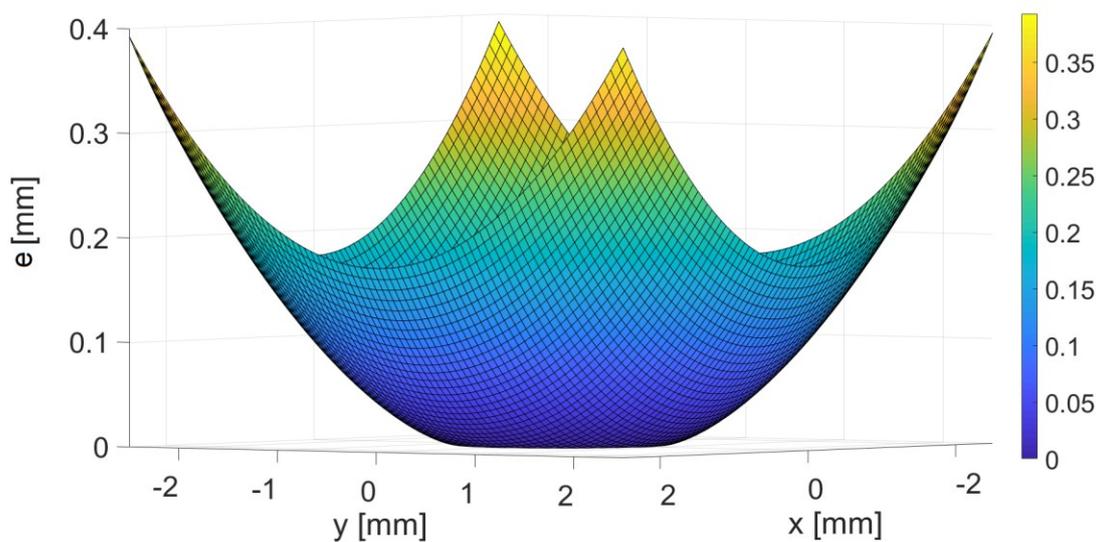
Figura 37 – Tempo de simulação para o contato pontual liso, Caso 2, malha 128 x 128



Fonte: autoria própria

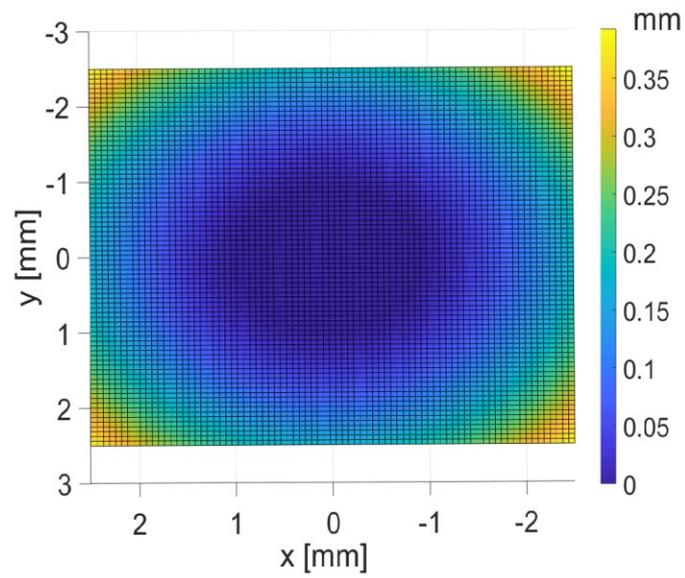
Os gráficos que representam as distâncias normais entre os pontos das superfícies após a deformação do Corpo 1 (acima) em relação ao Corpo 2 (abaixo), para a malha 128 x 128, estão apresentados nas Figuras 38 e 39, e os que expressam a distribuição de pressão estão nas Figuras 40 e 41, respectivamente.

Figura 38 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista tridimensional (contato pontual liso – Caso 2, malha 128 x 128)



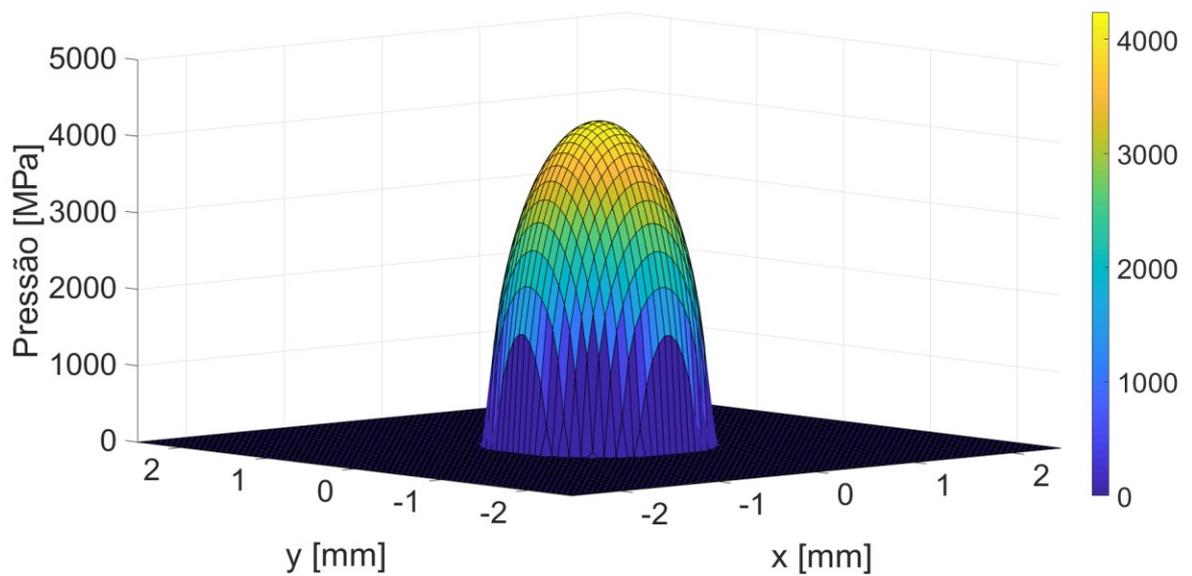
Fonte: autoria própria

Figura 39 - -Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista bidimensional no plano xy (contato pontual liso – Caso 2, malha 128 x 128)



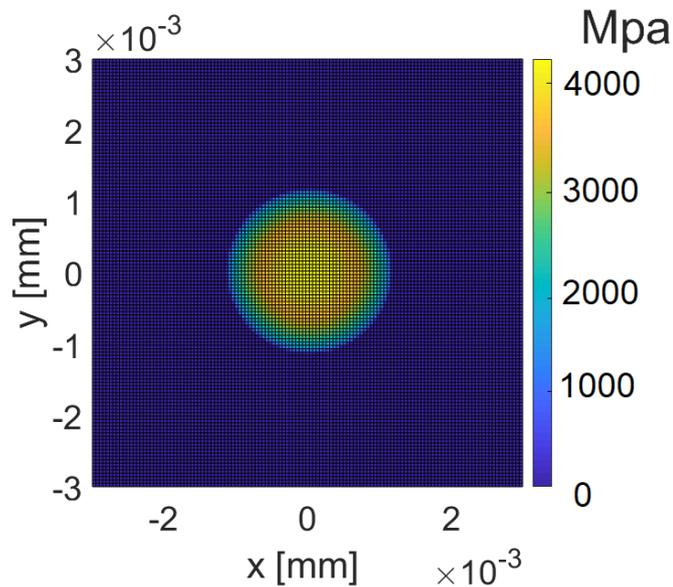
Fonte: autoria própria

Figura 40 - Pressão de contato, vista tridimensional (contato pontual liso – Caso 2, malha 128 x 128)



Fonte: autoria própria

Figura 41- Pressão de contato, vista bidimensional no plano xy (contato pontual liso – Caso 2, malha 128 x 128)



Fonte: autoria própria

4.2.2. Contato em Domínio Bidimensional com Superfícies Onduladas Virtuais

Nesta subseção são apresentados os resultados de testes em domínios bidimensionais com dois tipos de ondulações das superfícies: uma com um perfil de ondulações que varia nos dois eixos do domínio (variação no plano) e outra com variação somente em um dos eixos (variação unidimensional). Os dados de entrada base (raios de curvaturas e propriedades materiais) foram aqueles utilizados nos testes dos casos de superfícies lisas.

4.2.2.1 Superfície com Ondulações com Variação no Plano

Neste teste, os seguintes dados iniciais foram utilizados:

- Raios de curvaturas do Corpo 1: $R_{1x} = R_{1y} = 0,1 \text{ mm}$
- Raios de curvaturas do Corpo 2: $R_{2x} = R_{2y} = 0,05 \text{ mm}$
- Módulos de elasticidade: $E_1 = 180 \times 10^3 \text{ MPa}$; $E_2 = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$
- Coeficientes de Poisson: $\nu_1 = 0,25$; $\nu_2 = 0,3$;
- Domínio em x e y: $[-3 ; 3] \times 10^{-3} \text{ mm}$;

- Separação inicial da superfície de referência: $g_0 = -4 \times 10^{-5}$ mm

O perfil das ondulações, o qual é acrescido à superfície de referência do Corpo 1, é dado por:

$$r(x, y) = (0,00001) \cos(2,0 \cdot 10^3 x) \operatorname{sen}(2,0 \cdot 10^3 y) \quad [\text{mm}] \quad (66)$$

A Tabela 8 sumariza os resultados deste teste. Pode-se notar, primeiramente, que o método LCPMin, já na menor discretização (32 x 32), foi bem mais demorado que outros métodos (entre aproximadamente 2 a 5 vezes), chegando a demandar mais de 4 horas (16069 s) para obter a solução com a malha 64 x 64. Para a malha 128 x 128, o tempo ultrapassou 12 horas e a execução foi encerrada sem que uma solução fosse encontrada. Quanto aos resultados de força e pressão máxima, observa-se que os testes com a malha 32 x 32 resultaram em valores de força total semelhante em todos os métodos. Já quando a malha foi aumentada para 64 x 64, LCPMin, LCPSolve, LCPSolve_MQC e LCPGurobi apresentaram o mesmo valor de força total e leve aumento de pressão máxima. Para a solução obtida com o LCPQuad nesta malha, o resultado de força é levemente superior e a pressão máxima difere daquelas obtidas pelos demais métodos. Essa divergência pode ser explicada pelo valor da função objetivo no seu ponto ótimo calculado: $f(\mathbf{p}) = 103$ para a malha 64 x 64. Aumentando para 128 x 128, aplicando LCPQuad, os resultados encontrados divergiram mais ainda da solução, neste caso o valor de sua função objetivo chega a ser de $f(\mathbf{p}) = 5876$. Verificando o valor da função objetivo obtido com os outros métodos, esses apresentam $f(\mathbf{p}) < 1,0 \times 10^{-9}$ com todas as malhas e com isso é possível estimar que, para este problema, os resultados acabem divergindo aplicando o método de resolução por programação quadrática, LCPQuad, à medida que a malha é refinada.

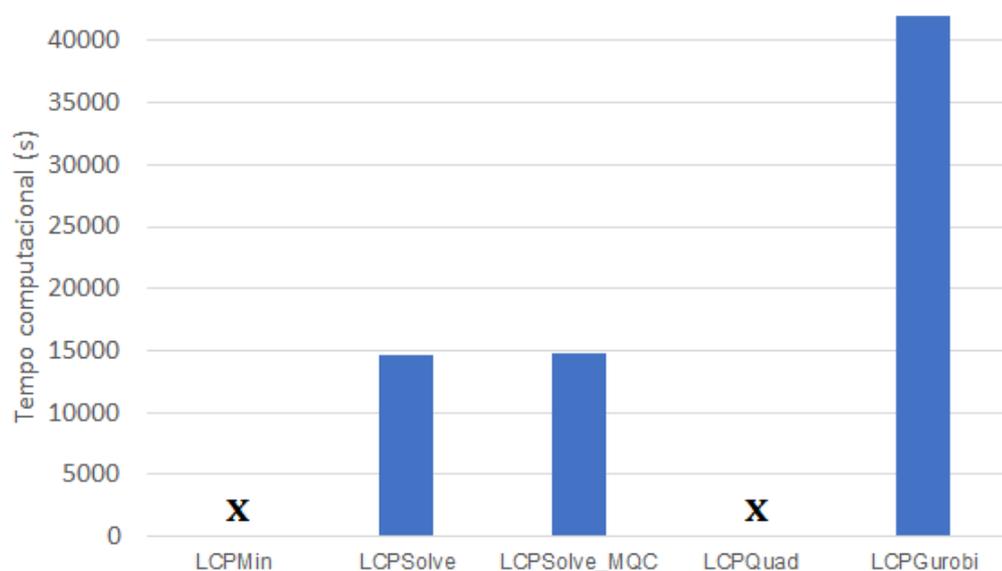
Com relação à rapidez dos três métodos que convergiram para o resultado, o LCPSolve foi o mais vantajoso, sendo de menor custo computacional, seguido pelo LCPSolve_MQC, com aproximadamente 60 s (menos de 1%) a mais para a simulação da malha 128 x 128, conforme apresentado na Figura 42.

Tabela 8 -Resultados para o contato em domínio bidimensional de superfície com ondulações com variação no plano

Método	N	Força de contato (N)	Pressão máxima (MPa)	Tempo computacional (s)
LCPMin	32	0,03	4588	21
	64	0,03	7246	16069
	128	-	-	Mais de 12 h
LCPSolve	32	0,03	4588	4
	64	0,03	7246	280
	128	0,03	10338	14708
LCPSolve_MQC	32	0,03	4588	4
	64	0,03	7246	278
	128	0,03	10338	14767
LCPQuad	32	0,03	4801	5
	64	0,04	2117	85
	128	0,11	4598	2592
LCPGurobi	32	0,03	4588	9
	64	0,03	7246	628
	128	0,03	10338	41971

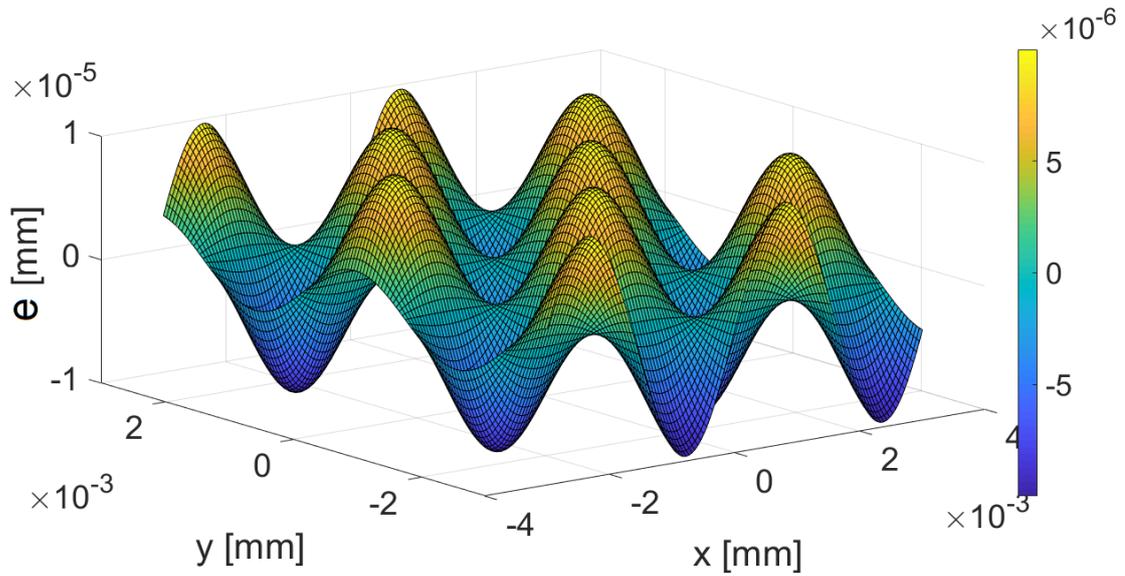
Fonte: autoria própria

Figura 42 – Tempo de simulação para o contato de superfície com ondulações com variação no plano, malha 128 x 128



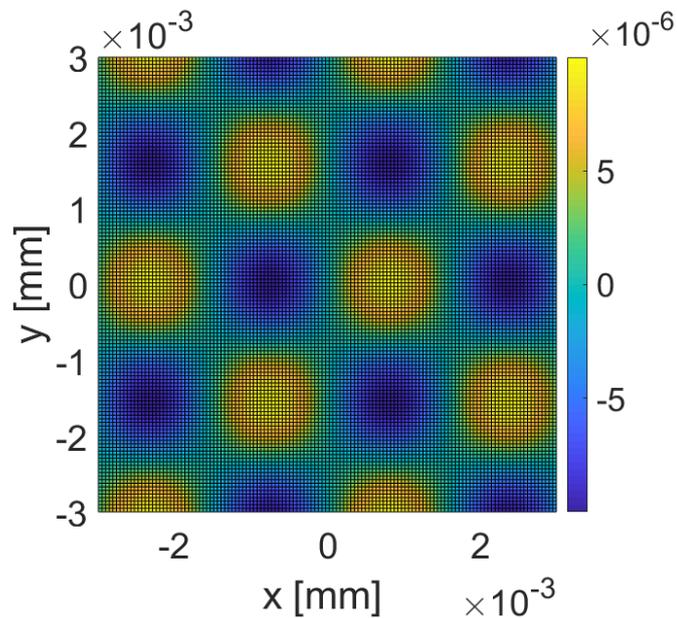
Fonte: autoria própria

Figura 43 – Função da ondulação com variação bidimensional, vista tridimensional



Fonte: autoria própria

Figura 44 – Função da ondulação com variação bidimensional, vista bidimensional no plano xy

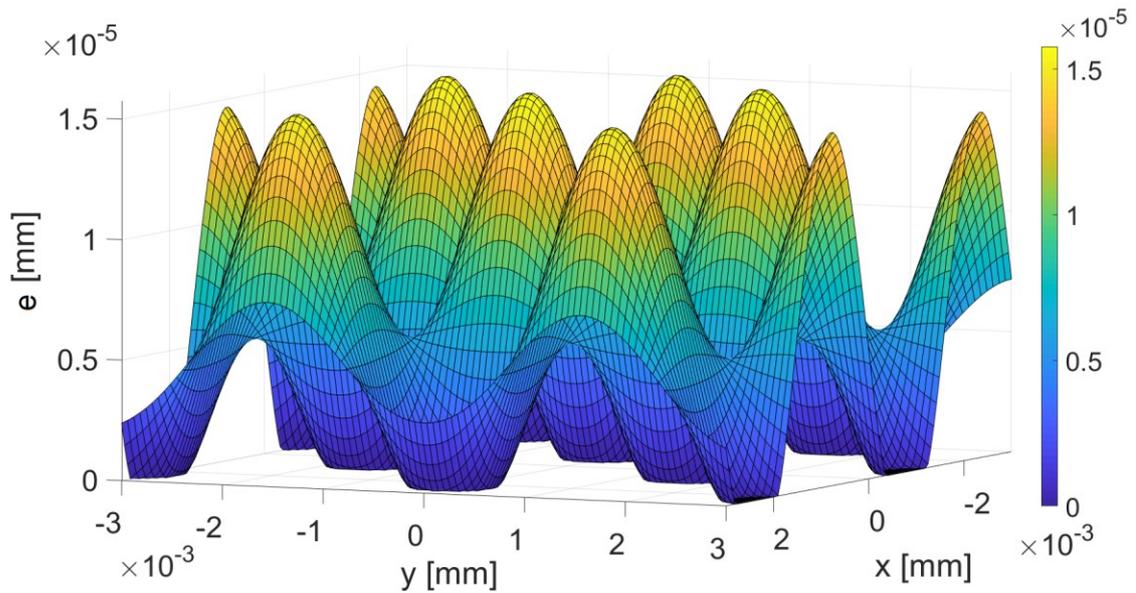


Fonte: autoria própria

Tendo conhecimento de como são as ondulações do Corpo 1, são mostradas as distâncias normais entre os pontos das superfícies após a deformação do contato entre os corpos, em uma vista tridimensional (Figura 45), além da vista de topo representada pelo plano xy (Figura 46). A distribuição de pressão de contato é

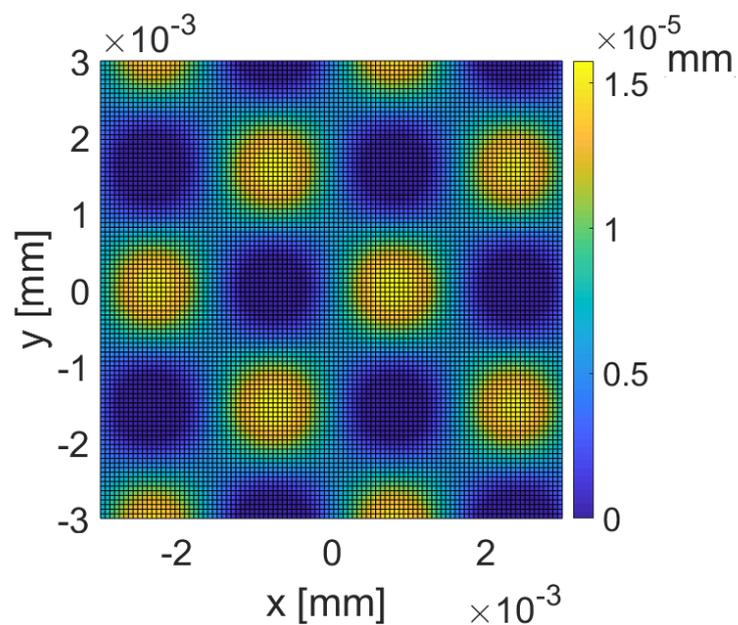
apresenta em uma vista tridimensional (Figura 47) e no plano xy em uma vista de topo (Figura 48).

Figura 45- Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista tridimensional, malha 128 x 128



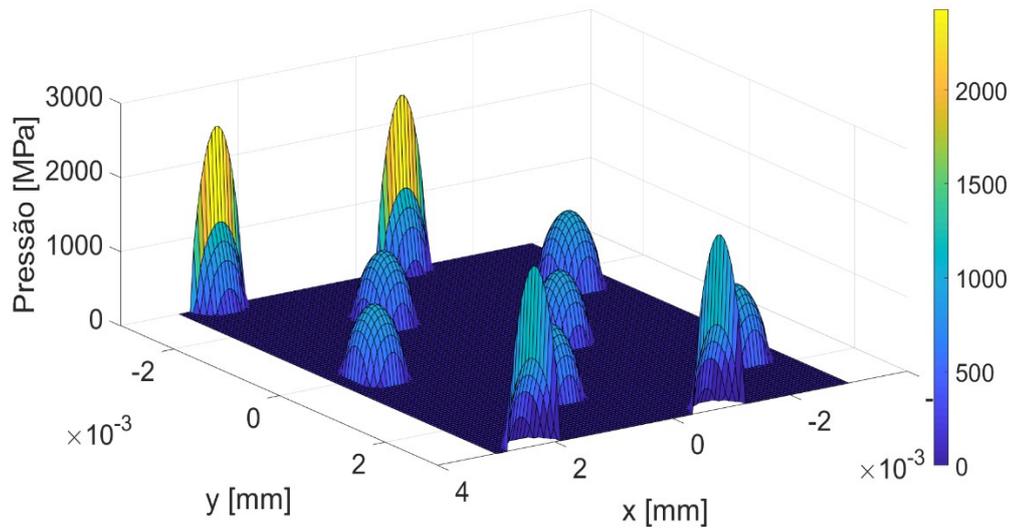
Fonte: autoria própria

Figura 46 – Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista bidimensional no plano xy, malha 128 x 128



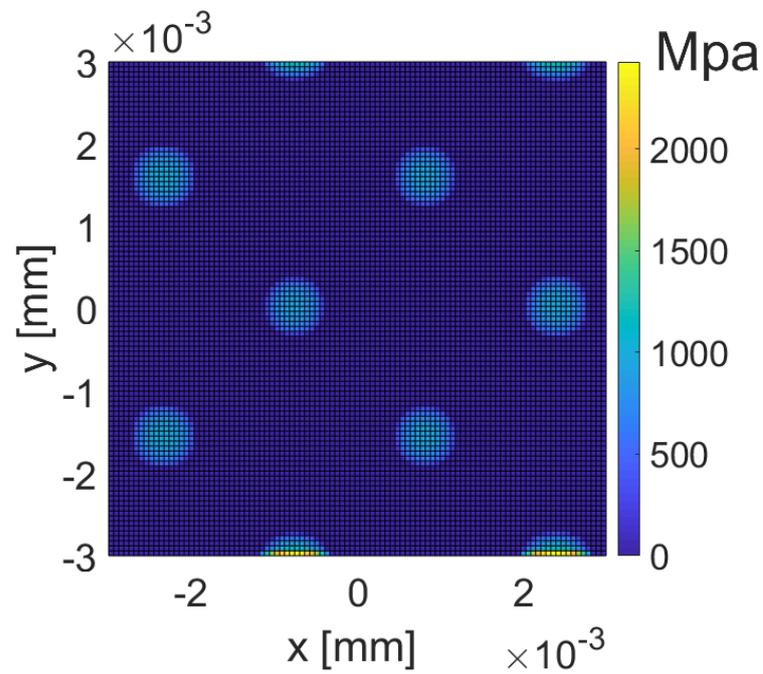
Fonte: autoria própria

Figura 47 - Pressão de contato, vista tridimensional, malha 128 x 128



Fonte: autoria própria

Figura 48 - Pressão de contato, vista bidimensional no plano xy, malha 128 x 128



Fonte: autoria própria

Comparando os gráficos de distâncias finais (Figura 45) com o de pressão (Figura 47), é possível notar que nos pontos onde as distâncias finais são superiores

a zero a pressão é nula, e onde a distância é nula a pressão é diferente de zero. Além disso, os pontos de maior pressão são aqueles que possuem os picos de ondulação mais adentro do Corpo 2 (Figura 44).

Novamente neste teste, como já ocorrido no primeiro teste em domínio bidimensional com os corpos lisos (Contato Pontual - Caso1), onde os raios de curvaturas dos corpos eram reduzidos (0,1 e 0,05 mm), houve problemas de convergência com o método LCPQuad, além da não convergência com o método LCPMin.

4.2.2.2 Superfície com Ondulações com Variação Unidimensional

Analogamente como realizado no segundo caso bidimensional liso (Contato Pontual - Caso 2), os dados utilizados neste teste são de raios de curvatura mais próximo de casos reais de engenharia. Os seguintes dados iniciais foram utilizados:

- Raios de curvaturas do Corpo 1: $R_{1x} = R_{1y} = 20$ mm
- Raios de curvaturas do Corpo 2: $R_{2x} = R_{2y} = 50$ mm
- Módulos de elasticidade: $E_1 = E_2 = 205 \times 10^3$ MPa
- Coeficientes de Poisson: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$;
- Domínio em x e y: $[-1 ; 1] \times 10^{-3}$ mm;
- Separação inicial da superfície de referência: $g_0 = -0,01$ mm

A ondulação a ser considerada para fins de teste foi periódica, com picos de mesmo tamanho e mesma amplitude de onda, foi descrita pela equação, função somente da coordenada x:

$$r(x, y) = 0,001 \cos(5000x) \quad [\text{mm}] \quad (67)$$

Os resultados das simulações com os métodos estudados estão mostrados na Tabela 9. Utilizando dados de curvaturas mais coerentes com as peças em aplicações de engenharia, os cinco métodos apresentaram valores semelhantes, tanto quanto à força total quanto à pressão máxima, para uma mesma discretização.

Nas aplicações com os métodos LCPMin, LCPSolve, LCPSolve_MQC e LCPGurobi, considerando todas as malhas, obteve-se, ao final das

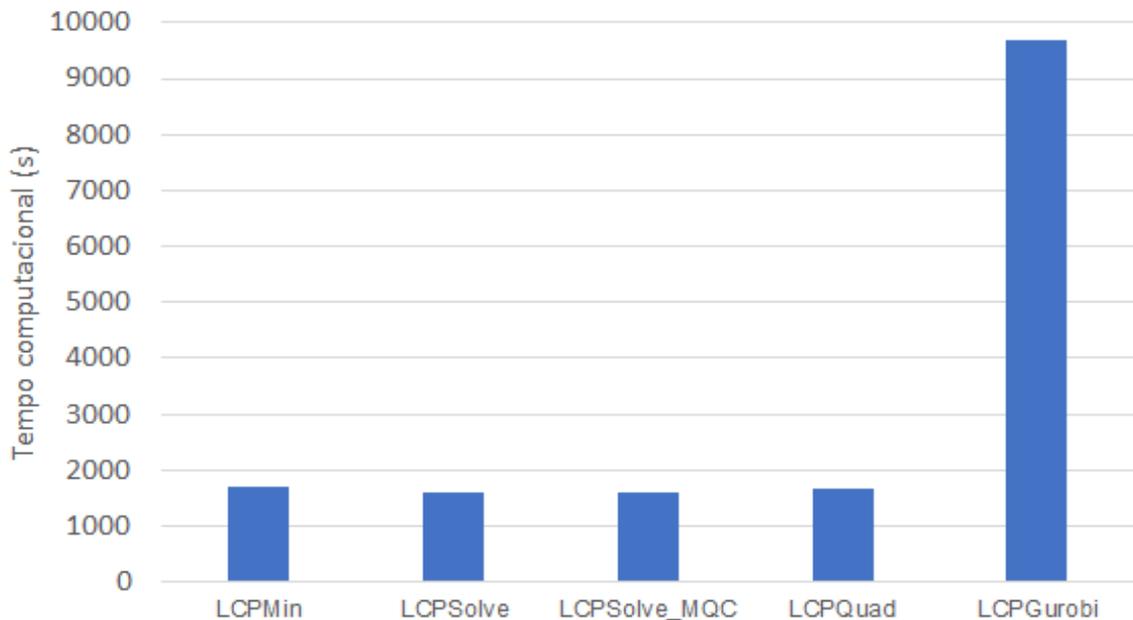
execuções, $f(\mathbf{p}) < 1,0 \times 10^{-3}$. Já o maior valor da função objetivo aplicando LCPQuad foi de $f(\mathbf{p}) = 0,063$ na malha 128×128 , o que indica que, apesar do valor dessa grandeza ser bem superior àquela dos outros métodos, o resultado convergiu para a solução. Então, a verificação do método mais adequado no presente caso pode ser feita com relação à rapidez na resolução da maior malha (128×128), sendo essa comparação ilustrada na Figura 49. Analisando a figura e os dados da Tabela 9, observa-se que o melhor desempenho foi do método LCPSolve_MQC, com tempo total de aproximadamente 2% menor que o LCPSolve. Já o pior desempenho foi do LCPGurobi, cujo tempo para resolução é bem superior ao tempo de todos os outros métodos (aproximadamente entre 5,7 a 6 vezes maior).

Tabela 9 – Resultados para o contato em domínio bidimensional de superfície com ondulações com variação unidimensional

Método	N	Força de contato (N)	Pressão máxima (MPa)	Tempo computacional (s)
LCPMin	32	593	2730	< 1
	64	602	4283	10
	128	618	4439	1700
LCPSolve	32	593	2730	< 1
	64	602	4283	27
	128	618	4439	1616
LCPSolve_MQC	32	593	2730	< 1
	64	602	4283	27
	128	618	4439	1584
LCPQuad	32	593	2730	< 3
	64	602	4283	101
	128	618	4439	1686
LCPGurobi	32	596	2730	< 3
	64	602	4283	160
	128	618	4439	9699

Fonte: autoria própria

Figura 49- Tempo de simulação para o contato de superfície com ondulações com variação unidimensional, malha 128 x 128

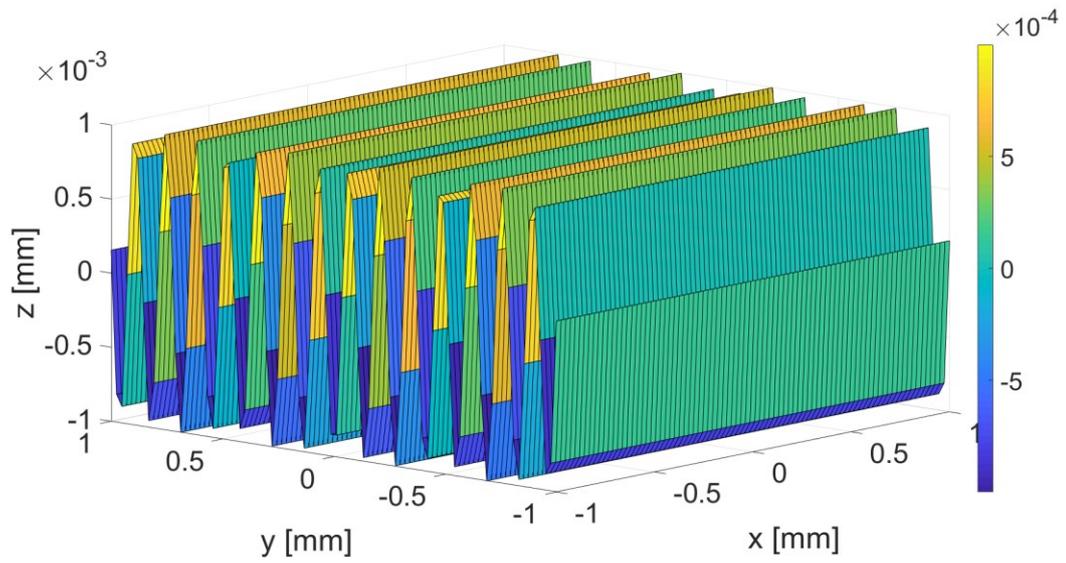


Fonte: autoria própria

As Figuras 50 e 51 apresentam os gráficos da função de ondulação numa vista tridimensional e numa vista de topo (plano xy), respectivamente. Já nas Figuras 52 e 53 são mostrados os valores das distâncias finais de cada ponto do Corpo 1 (ondulado) após o contato, em uma vista tridimensional e em uma vista de topo (plano xy), respectivamente. Finalmente, na Figura 54 é mostrado o gráfico de pressões após o contato em uma vista tridimensional, e na Figura 55 o valor das pressões em uma vista de topo (plano xy).

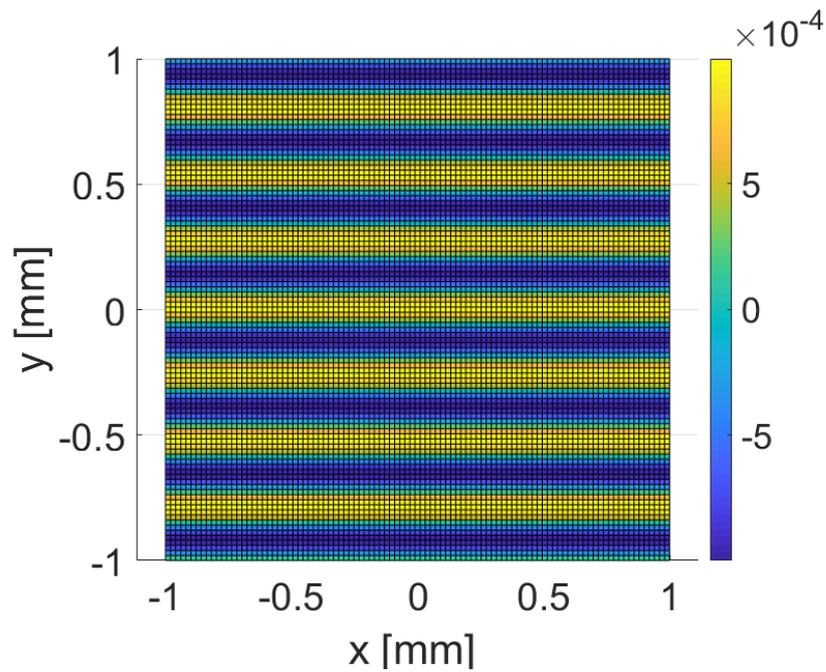
É perceptível que o gráfico de distâncias (Figura 52) também mostra a geometria do Corpo 1 (acima) após o contato. E analisando a distribuição de pressão (Figuras 54 e 55), em combinação com a Figura 52, nota-se, como esperado, que a pressão é não nula onde a distância final até o Corpo 2 é nula, sendo que os maiores valores ocorrem nas maiores saliências do Corpo 1.

Figura 50 - Função da ondulação com variação unidimensional, vista tridimensional



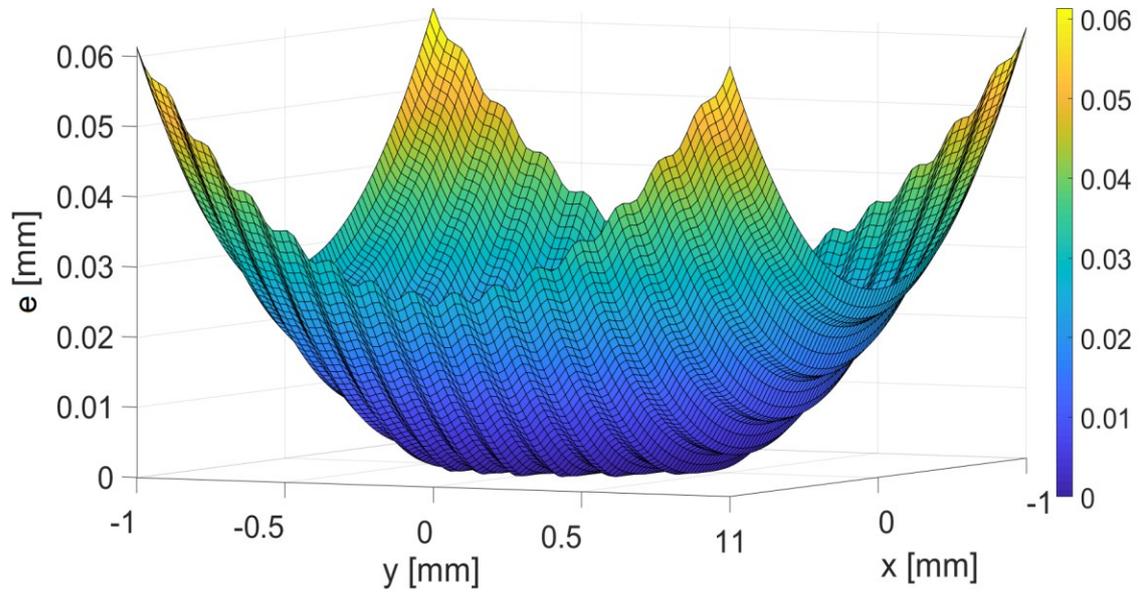
Fonte: autoria própria

Figura 51- Função da ondulação com variação unidimensional, vista bidimensional no plano xy



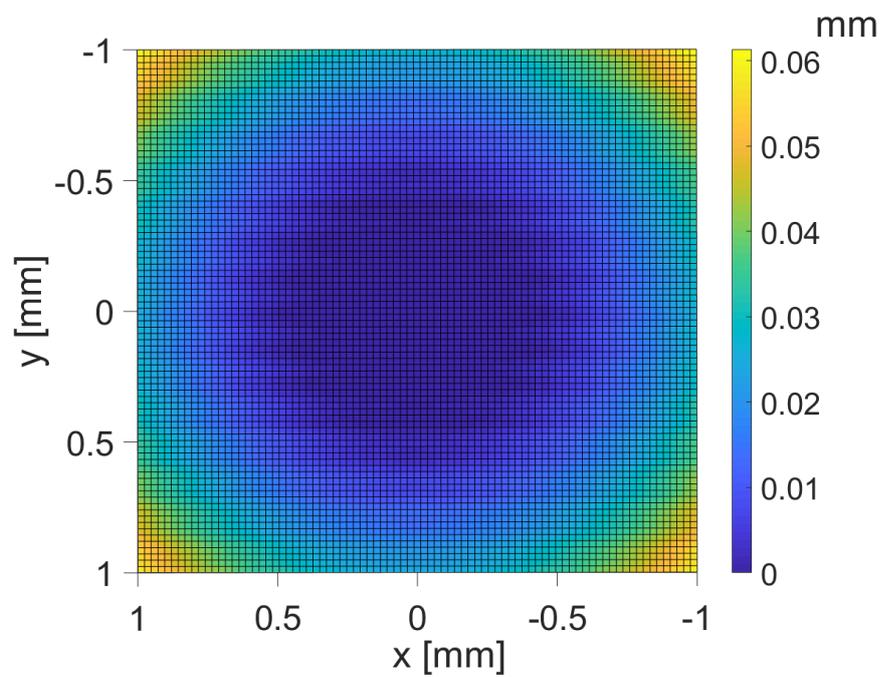
Fonte: autoria própria

Figura 52 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista tridimensional, malha 128 x 128

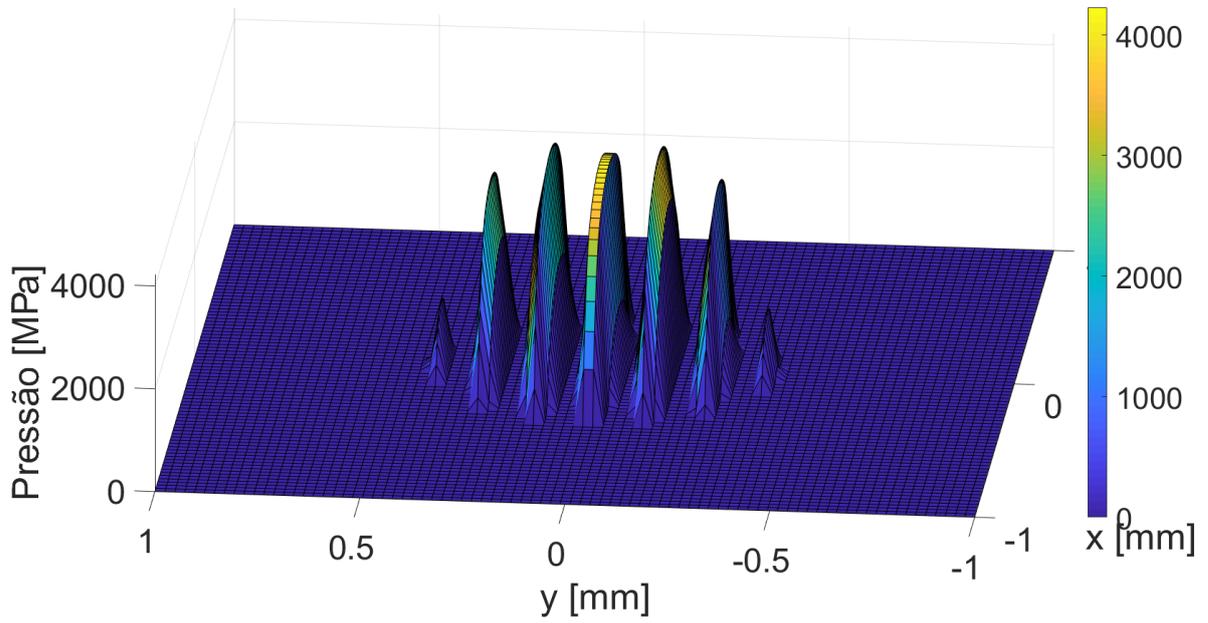


Fonte: autoria própria

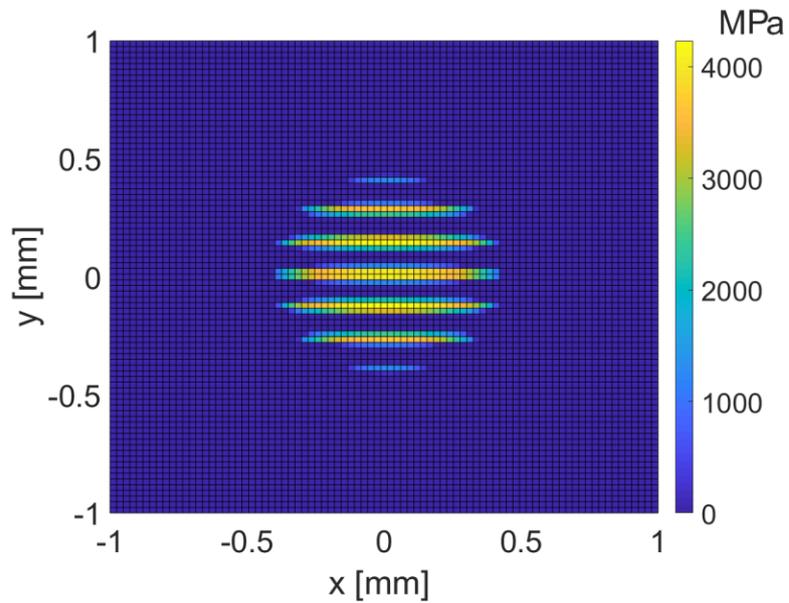
Figura 53 - Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista bidimensional no plano xy, malha 128 x 128



Fonte: autoria própria

Figura 54 – Pressão de contato, vista tridimensional, malha 128 x 128

Fonte: autoria própria

Figura 55- Pressão de contato, vista bidimensional no plano xy, malha 128 x 128

Fonte: autoria própria

Logo, como os resultados de testes para os casos bidimensionais com valores de curvaturas reais foram satisfatórios e coerentes, é possível continuar a investigação aplicando os métodos em superfícies reais medidas com perfilometria ótica.

4.3 CONTATO COM SUPERFÍCIES RUGOSAS REAIS

Após os resultados com testes em situações hipotéticas, apresentados nas seções anteriores, tanto para casos com superfícies lisas quanto para casos com superfícies onduladas, estes serviram de motivação para aplicar os códigos para superfícies rugosas reais. Assim, nesta seção são apresentados resultados de simulações realizadas com superfícies reais, cujas rugosidades foram obtidas através de medições de uma superfície de cilindro de motor de combustão interna (Subseção 4.3.1) e de uma superfície polida com lixa 1200 (Subseção 4.3.2). O domínio das superfícies das rugosidades (tamanho da amostra) é de 0 a 0,8 mm nas duas direções, para ambas as superfícies.

Além das simulações em domínio bidimensional, também foram realizadas simulações em domínio unidimensional, utilizando-se seções das superfícies em determinadas posições (“planos de cortes”) para se obter o perfil de rugosidades unidimensionais.

A separação inicial g_0 (distância inicial entre a superfície de referência $z = 0$ do Corpo 1 em relação à superfície do Corpo 2, conforme ilustrado na Figura 13) foi considerada de aproximadamente 0,2 vezes o desvio padrão das rugosidades. Esse valor foi definido através de simulações preliminares de forma que a área real de contato ficasse na faixa de 4 a 10% da área aparente. A área real foi estimada a partir da identificação e contabilização das regiões do domínio onde a pressão não é nula.

Como no presente trabalho o contato é considerado elástico, isto é, sem plastificação dos materiais, e em situações reais usualmente ocorre deformação plástica dos picos que entram em contato (YASTREBOV, 2019), o que provoca achatamento desses picos, aplicou-se um filtro de suavização nas rugosidades experimentais para representar uma situação mais próxima da real. O filtro aplicado foi do tipo média móvel, com cinco pontos para cálculo do valor suavizado. De acordo com Smith (2013), o filtro de média móvel é utilizado com o objetivo de eliminar ou

diminuir algum ruído indesejável em um sinal. Neste caso é obtido calculando-se a média de um conjunto de cinco valores que representam as alturas das rugosidades e na próxima iteração é adicionando um novo valor ao conjunto, descartando o mais velho. Desse modo é gerada uma sequência com os valores suavizados das rugosidades.

4.3.1 Superfície com Rugosidade de um Cilindro de Motor de Combustão Interna

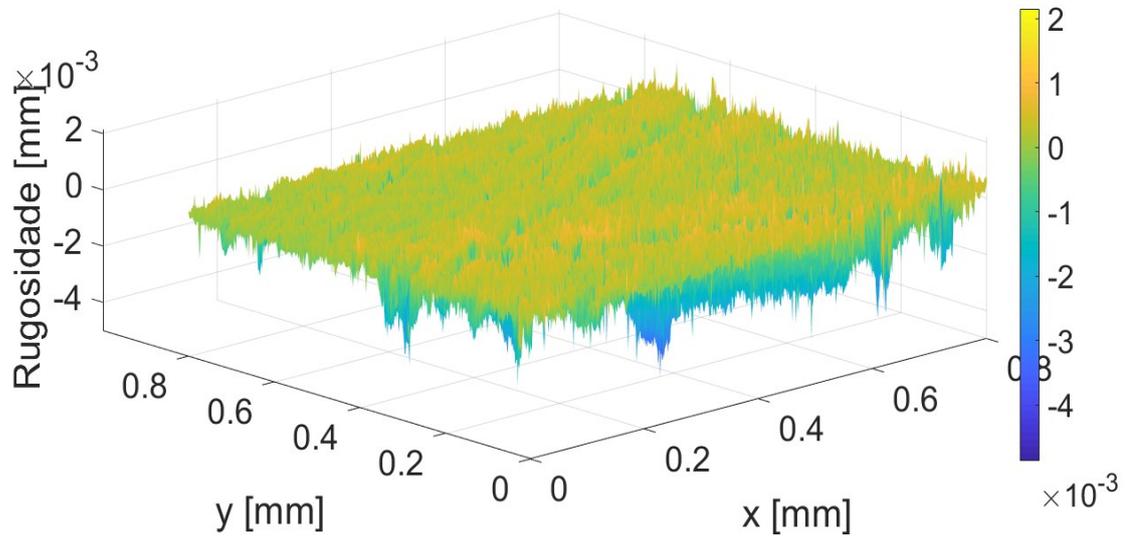
Os dados base utilizados são de dois corpos de aço, com as seguintes características:

- Raios de curvaturas do Corpo 1: $R_{1x} = R_{1y} = 1000$ mm
- Raios de curvaturas do Corpo 2: $R_{2x} = R_{2y} = 1000$ mm
- Módulos de elasticidade: $E_1 = E_2 = 210 \times 10^3$ MPa
- Coeficientes de Poisson: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$;
- Domínio em x e y: $[0 ; 0,8]$ mm;
- Separação inicial da superfície de referência: $g_0 = 9 \times 10^{-5}$ mm

As Figuras 56 e 57 apresentam, em vistas tridimensional e de topo, respectivamente, as rugosidades obtidas das medições em uma malha de 702 x 702 pontos no domínio.

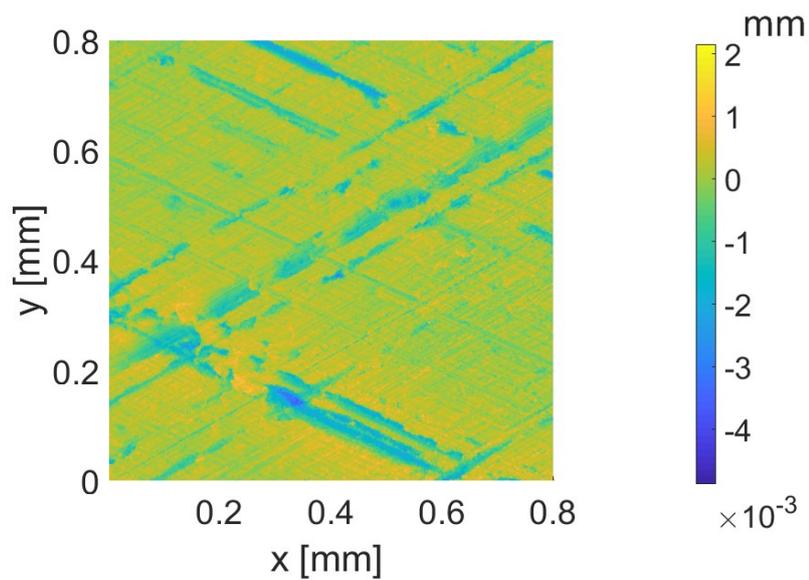
Para fins de simulação, de forma a testar as resoluções dos métodos com diferentes tamanhos de malha, foram realizadas aproximações nos dados obtidos da medição para se adaptar às malhas 32 x 32, 64 x 64 e 128 x 128. As Figuras 58 e 59 apresentam as vistas tridimensional e de topo, respectivamente, para a malha 32 x 32 e, de forma similar, as Figuras 60 e 61 para a malha 64 x 64 e as Figuras 62 e 63 para a malha 128 x 128.

**Figura 56 – Rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna, vista tridimensional
(malha 702 x 702)**



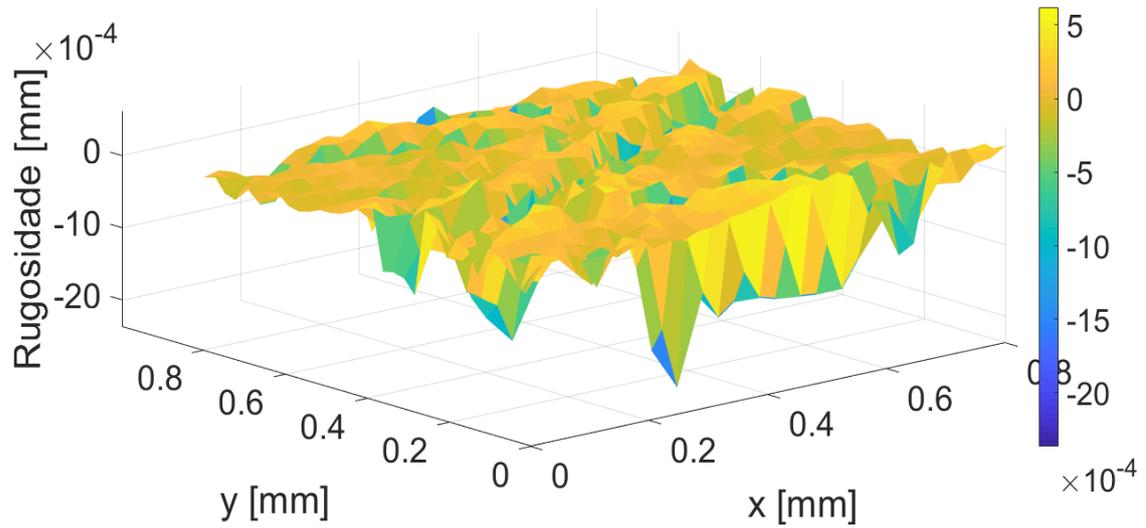
Fonte: autoria própria

**Figura 57 – Rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna, vista de topo – plano
xy (malha 702 x 702)**



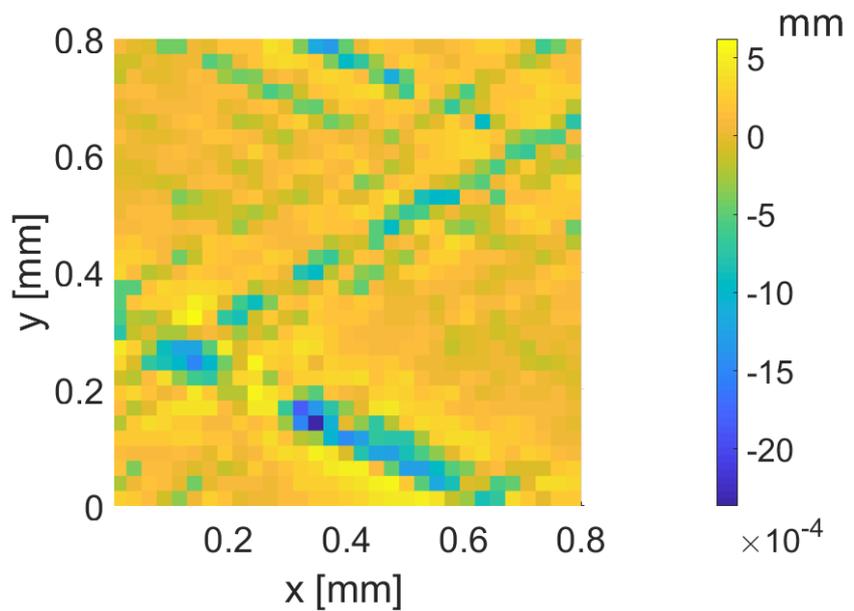
Fonte: autoria própria

Figura 58 – Aproximação da rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna por malha 32 x 32 (vista tridimensional)



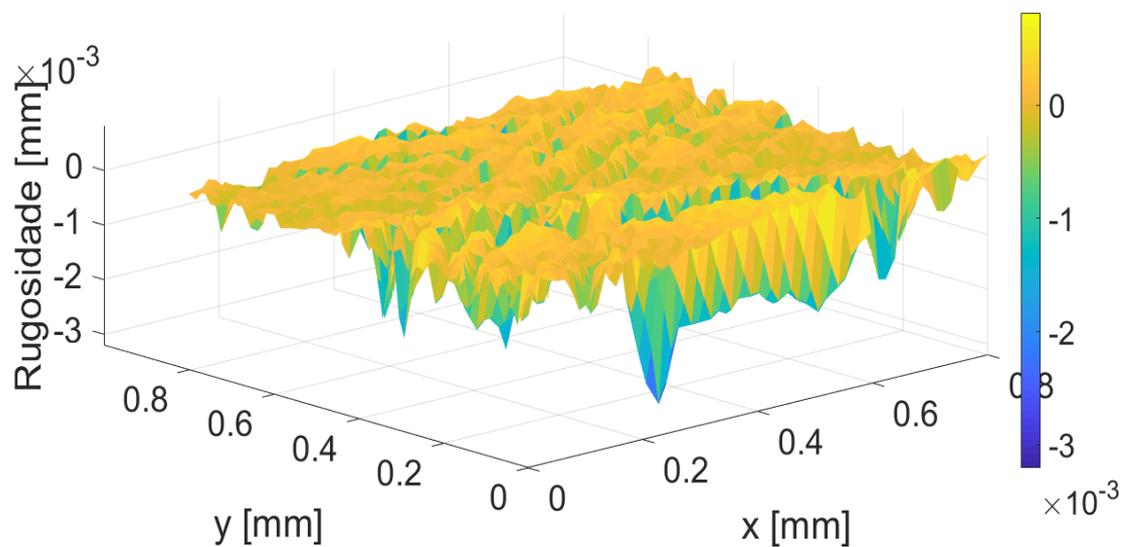
Fonte: autoria própria

Figura 59 – Aproximação da rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna por malha 32 x 32 (vista de topo – plano xy)



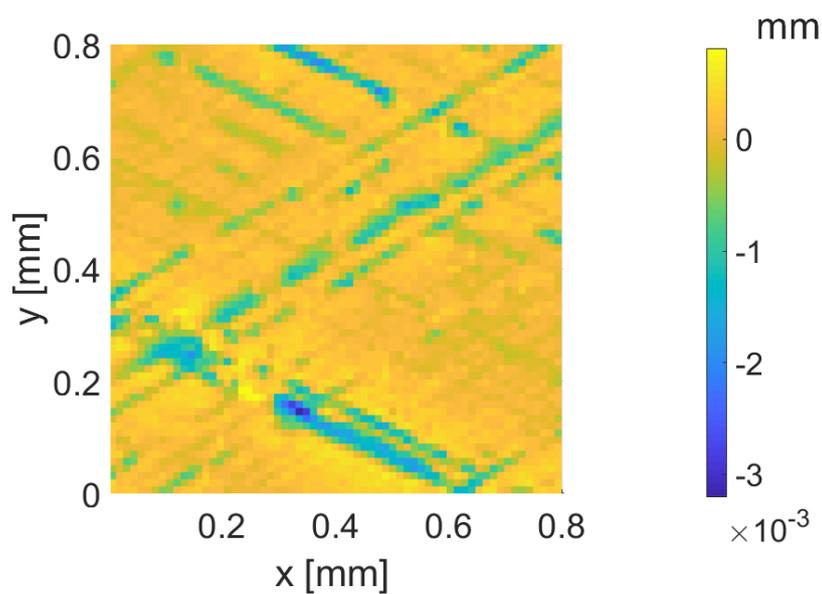
Fonte: autoria própria

Figura 60- Aproximação da rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna por malha 64 x 64 (vista tridimensional)



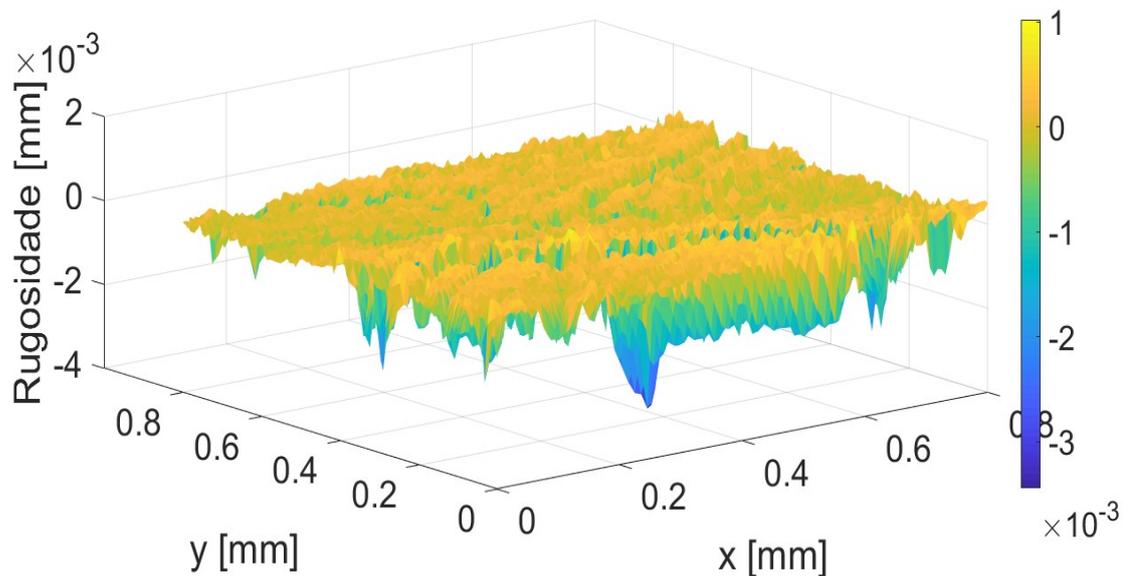
Fonte: autoria própria

Figura 61 – Aproximação da rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna por malha 64 x 64 (vista de topo – plano xy)



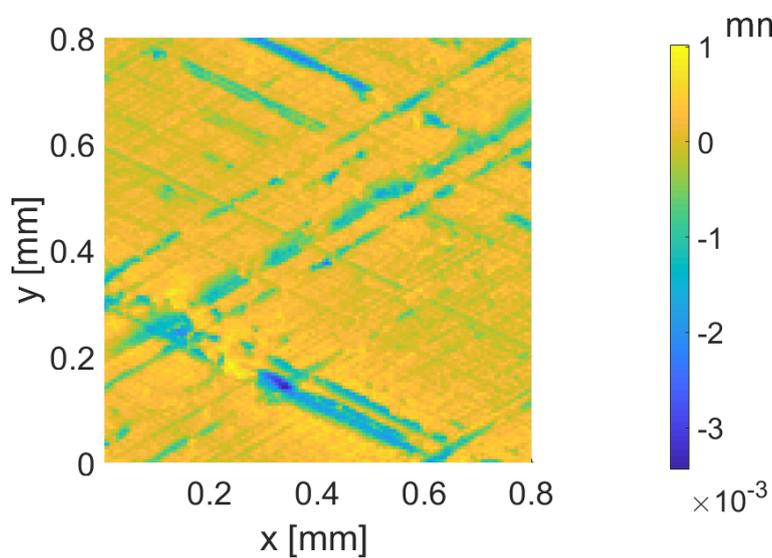
Fonte: autoria própria

Figura 62 – Aproximação da rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna por malha 128 x 128 (vista tridimensional)



Fonte: autoria própria

Figura 63 – Aproximação da rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna por malha 128 x 128 (vista de topo – plano xy)



Fonte: autoria própria

4.3.1.1 Simulação em Domínio Bidimensional do Contato com Superfície de Cilindro de Motor de Combustão Interna

Ressalta-se aqui que, devido às aproximações das rugosidades, o intervalo da separação inicial ao longo do Corpo 1 varia em função da malha. Para o caso da superfície de cilindro de motor tem-se $g_{min} = -0,0003$ mm e $g_{max} = 0,0009$ mm para a malha 32 x 32; $g_{min} = -0,0005$ mm e $g_{max} = 0,0018$ mm para a malha 64 x 64; e $g_{min} = -0,0006$ mm e $g_{max} = 0,0026$ mm para a malha 128 x 128.

Na Tabela 10 estão apresentados, para as diferentes malhas e métodos, os valores de força, pressão máxima e tempo computacional obtidos da resolução do problema de contato em domínio bidimensional com a rugosidade de uma superfície de cilindro de motor de combustão interna.

Para uma mesma discretização, observa-se que os valores de força de contato e pressão máxima são coincidentes, independentemente do método de solução. Nos dois casos onde há divergência nesses valores, essa é da ordem de 1%. Nota-se também que, à medida que a malha é refinada, tanto o valor de força como o valor da pressão máxima aumentam. Esse comportamento é atribuído principalmente à melhor representação da superfície com uma malha mais refinada, a qual consegue captar melhor os picos de rugosidades. O refino da malha também influencia o cálculo da área real de contato. No presente caso observou-se que a razão entre a área real e a área aparente é de aproximadamente 7% para a malha 32 x 32, e diminui para 5,6% para a malha 128 x 128.

Com relação ao valor final da função objetivo, com exceção da solução via LCPQuad, a qual apresentou maior valor $f(\mathbf{p}) = 1,5$, para todas as outras discretizações e métodos verificou-se que $f(\mathbf{p}) < 1,0 \times 10^{-8}$, podendo-se considerar que as soluções convergiram.

Com relação ao tempo computacional, o melhor desempenho foi do método LCPMin para todas as discretizações. Para uma melhor visualização e comparação, a Figura 64 ilustra, para a malha 128 x 128, o tempo computacional para os diferentes métodos. Da análise desta figura e da Tabela 10, considerando a maior discretização (malha 128 x 128), nota-se que os métodos LCPSolve e LCPSolve_MQC demandaram em torno de 10% mais tempo que o LCPMin. Já os métodos LCPQuad e LCPGurobi tiveram os piores desempenhos, sendo que o primeiro demandou em

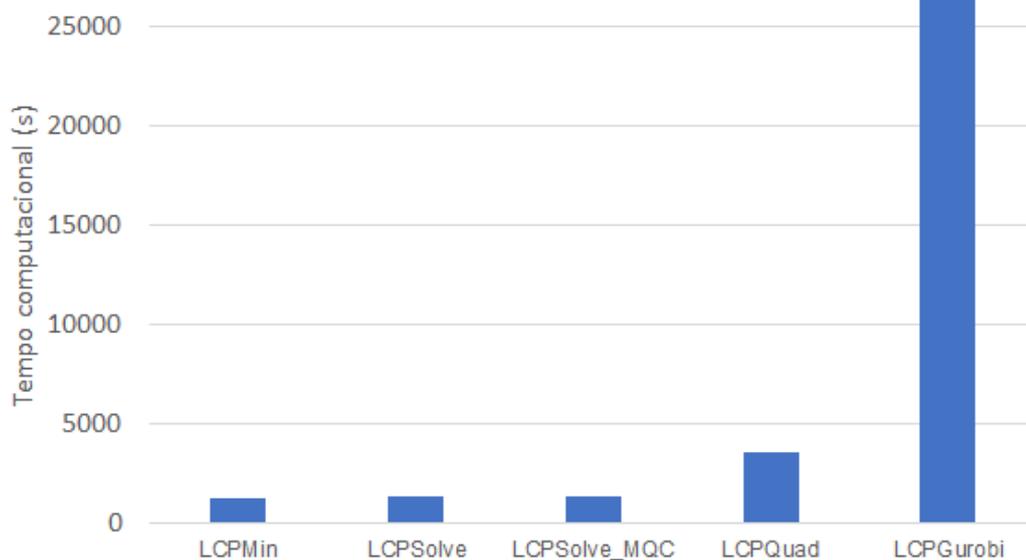
torno de 2,4 vezes mais tempo que o LCPMin, e o segundo em torno de 21 vezes mais.

Tabela 10 – Resultados para o caso de contato de superfície com rugosidade de cilindro de motor de combustão interna (domínio bidimensional)

Método	<i>N</i>	Força de contato (N)	Pressão máxima (MPa)	Tempo computacional (s)
LCPMin	32	7,6	723	< 1
	64	14	1478	13
	128	20	2985	1250
LCPSolve	32	7,6	723	< 1
	64	14	1478	29
	128	20	2985	1383
LCPSolve_MQC	32	7,6	723	< 1
	64	14	1478	29
	128	20	2985	1376
LCPQuad	32	7,7	721	3
	64	14	1478	96
	128	20	2973	3627
LCPGurobi	32	7,6	723	4
	64	14	1478	319
	128	20	2985	26455

Fonte: autoria própria

Figura 64 - Tempo de simulação para superfície com rugosidade de um cilindro de motor de combustão interna, malha 128 x 128 (domínio bidimensional)

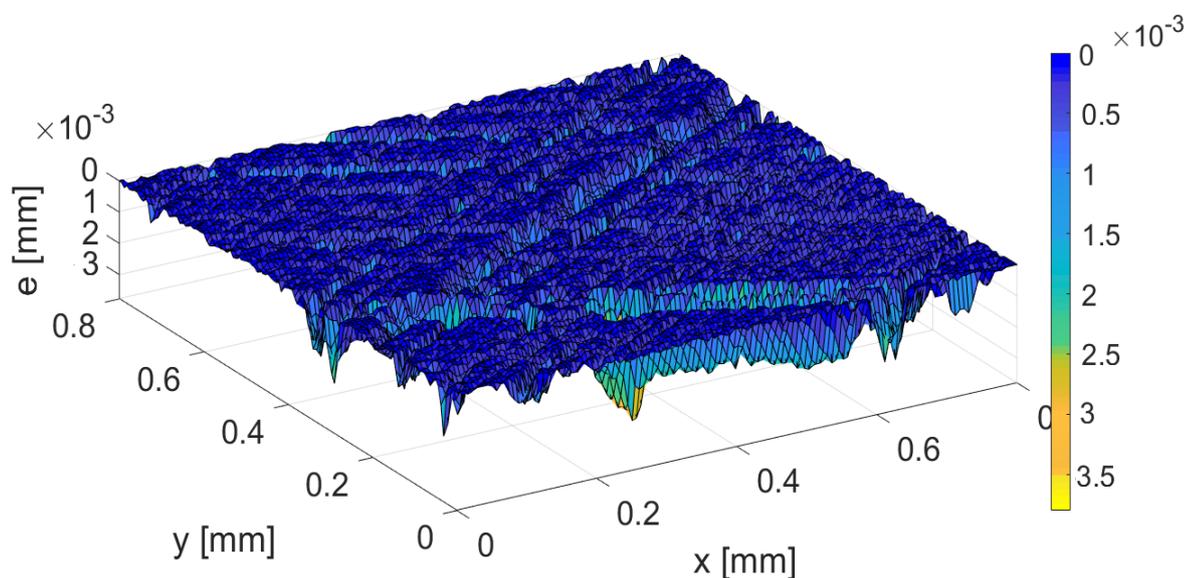


Fonte: autoria própria

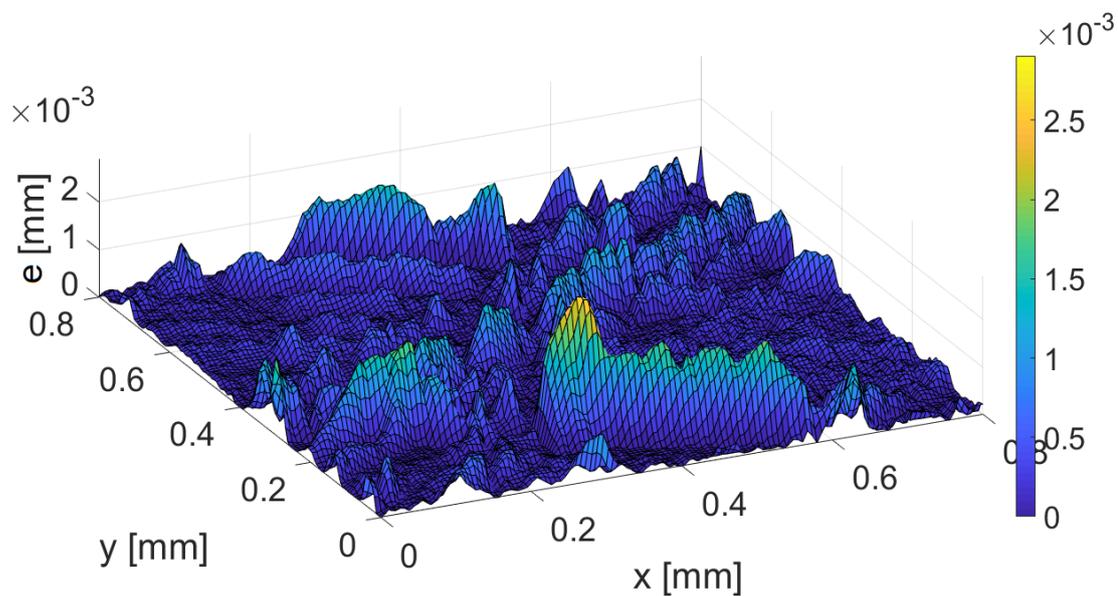
Gráficos representativos da distância entre as superfícies do Corpo 1 e do Corpo 2 após o contato são apresentados nas Figuras 65 e 66. A Figura 65(a) mostra as distâncias vistas de um ângulo superior, enquanto que a Figura 65(b) mostra as distâncias vistas de um ângulo inferior (notar que nas regiões de contato a distância é nula).

Figura 65 – Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vistas tridimensionais

(a) Vista das distâncias em ângulo superior

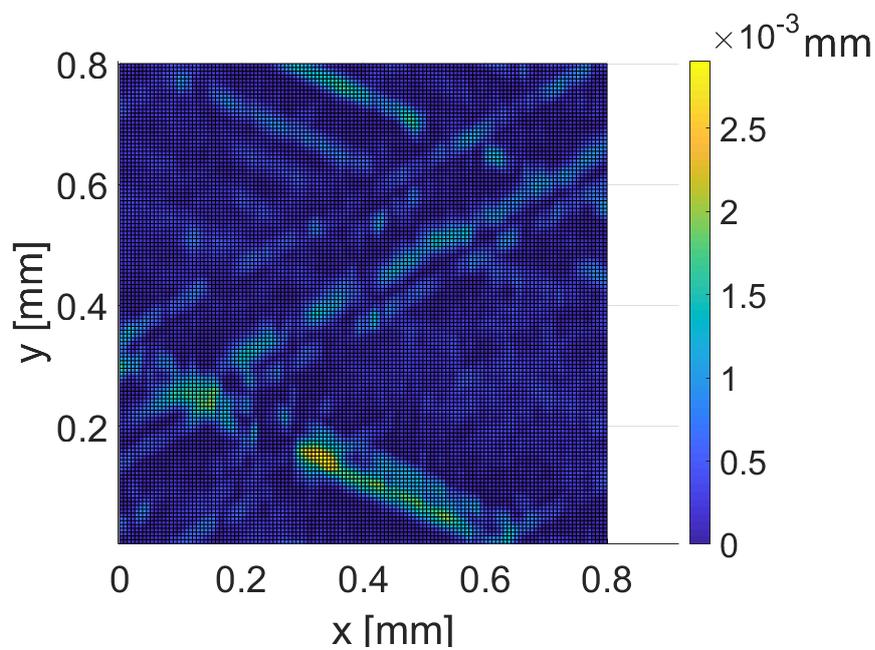


(b) Vista das distâncias em ângulo inferior



Fonte: autoria própria

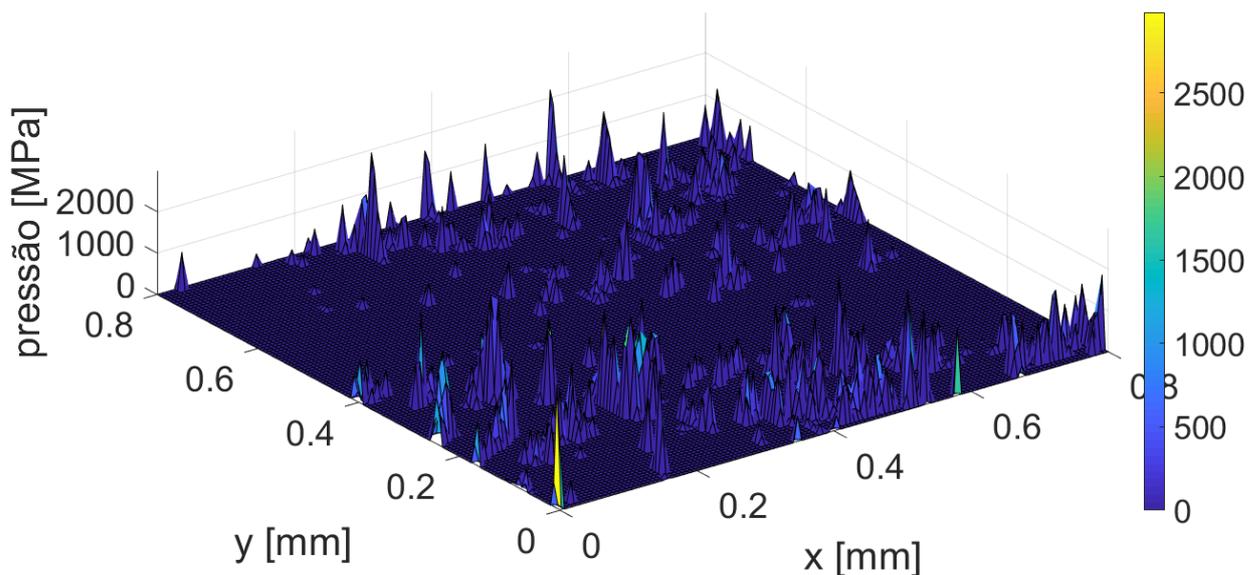
Figura 66 – Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vista bidimensional do plano xy



Fonte: autoria própria

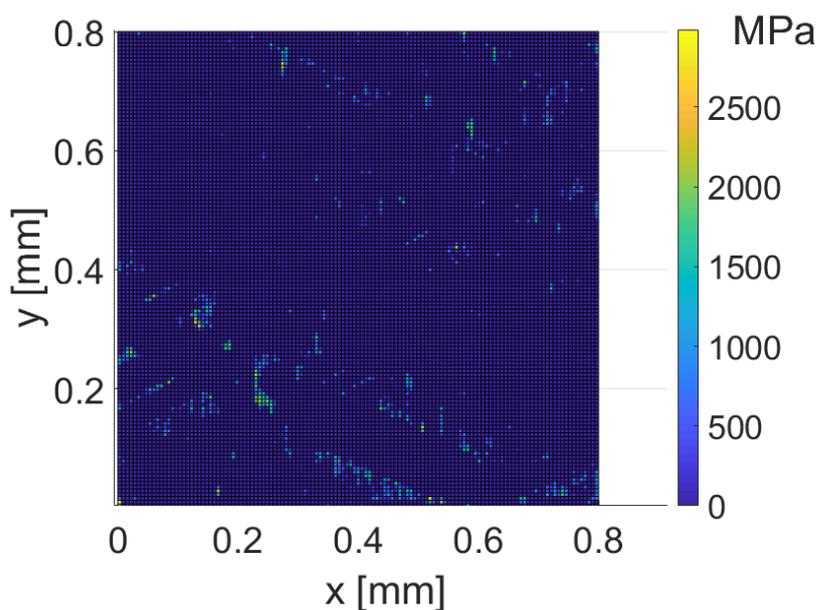
Nos gráficos das Figuras 67 e 68, observa-se claramente que o valor das pressões é nulo nas regiões mais distantes entre os corpos, ou seja, nas regiões em amarelo apresentadas nos gráficos 66 e 67 e nas outras regiões seu valor varia de acordo com o valor dos picos das rugosidades.

Figura 67 – Pressão de contato, vista tridimensional, malha 128 x 128



Fonte: autoria própria

Figura 68 – Pressão de contato, vista bidimensional do plano xy, malha 128 x 128



Fonte: autoria própria

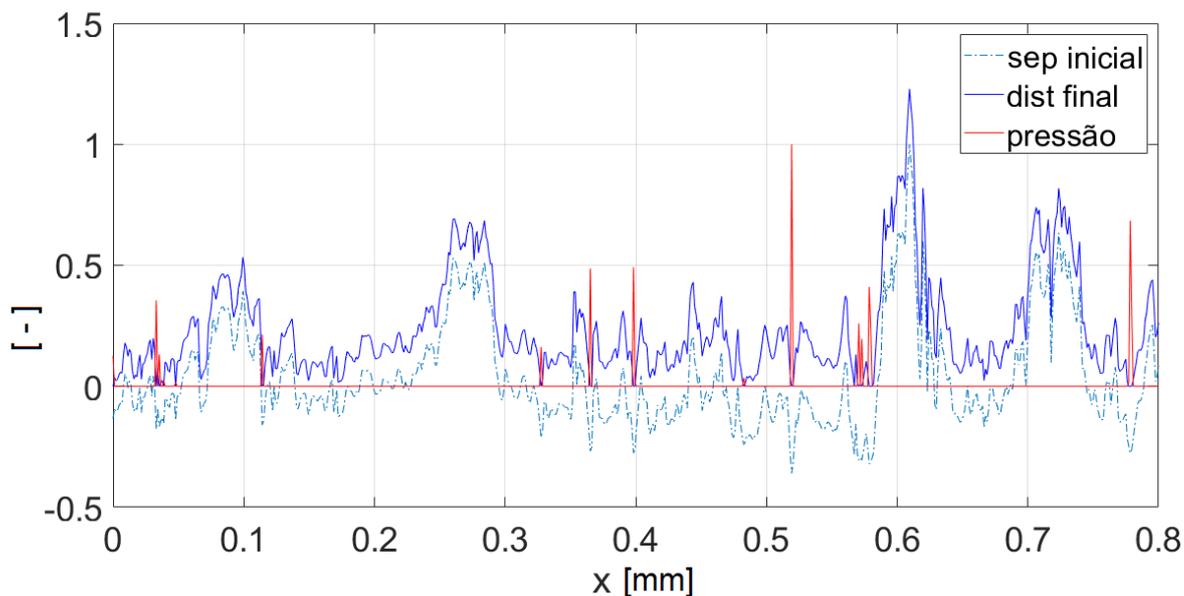
4.3.1.2 Simulação em Domínio Unidimensional do Contato com Superfície de Cilindro de Motor de Combustão Interna

A fim de tentar detalhar o comportamento da superfície rugosa, realizaram-se análises considerando o contato como sendo linear (domínio unidimensional) em diferentes seções transversais, com discretização correspondente àquela obtida dos dados medidos (702 pontos). As seções foram feitas paralelas ao eixo x, nas posições $y = 0$; $y = 0,2$; $y = 0,4$; $y = 0,6$ e $y = 0,8$ mm. Os tempos computacionais não foram analisados pois, conforme já comentado anteriormente, a solução para casos unidimensionais é bastante rápida (menos de 7 s), e não foram observadas grandes diferenças de desempenho entre os métodos.

As Figuras 69 a 73 apresentam, para as diferentes seções, a separação inicial (linha pontilhada) e a posição final do Corpo 1, que também é a distância normal de cada ponto da superfície após a deformação (linha azul contínua), normalizadas pelo valor da separação inicial máxima. Também é apresentada, nos mesmos gráficos, a pressão de contato (linha vermelha contínua) normalizada pelo seu valor máximo.

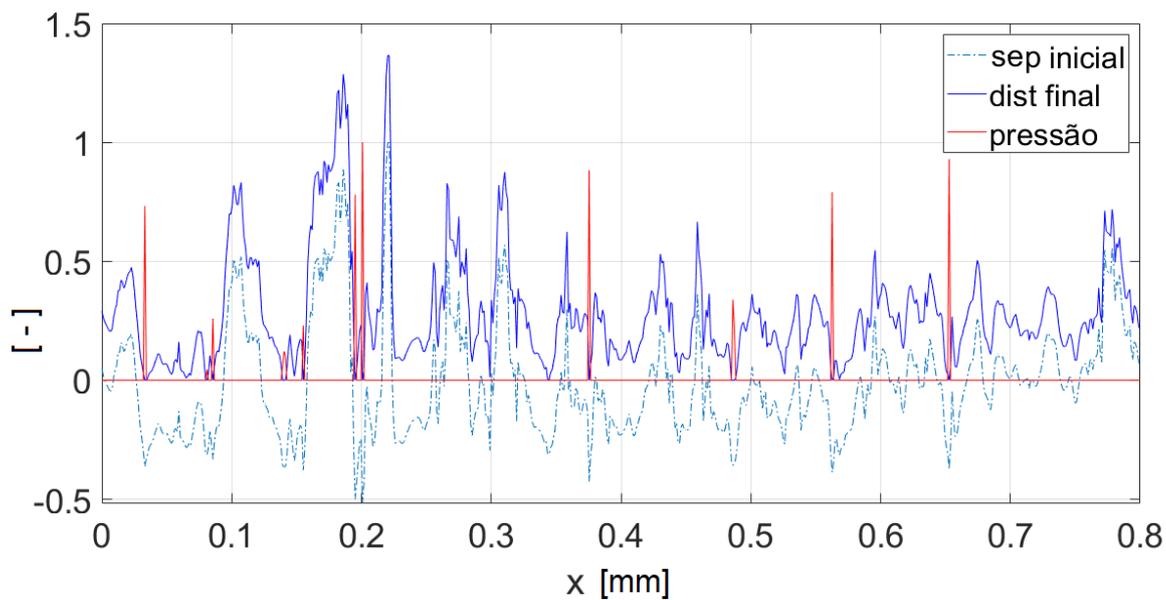
Observando os gráficos de todas as seções, nota-se que a pressão ocorre onde a distância final entre os corpos (linha azul contínua) é nula, ou seja, onde há contato. E, como esperado, o formato final da peça sofre alterações. Além disso, para uma mesma seção, o ponto onde ocorre a maior pressão é a região dos maiores picos de rugosidade, o que corresponde à maior “penetração” inicial (isto é, maior separação inicial negativa), como pode ser observado ao se comparar as curvas de separação inicial (linha pontilhada) e de pressão (linha vermelha contínua).

Figura 69 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) normalizadas para a superfície de cilindro de motor de combustão interna (seção $y = 0$ mm)



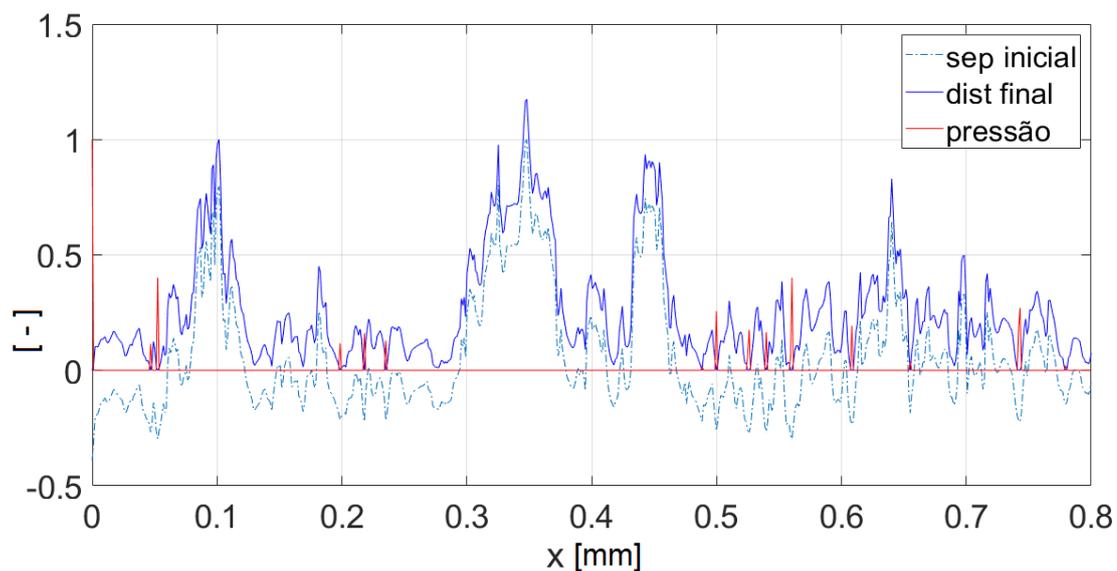
Fonte: autoria própria

Figura 70 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) normalizadas para a superfície de cilindro de motor de combustão interna (seção $y = 0,2$ mm)



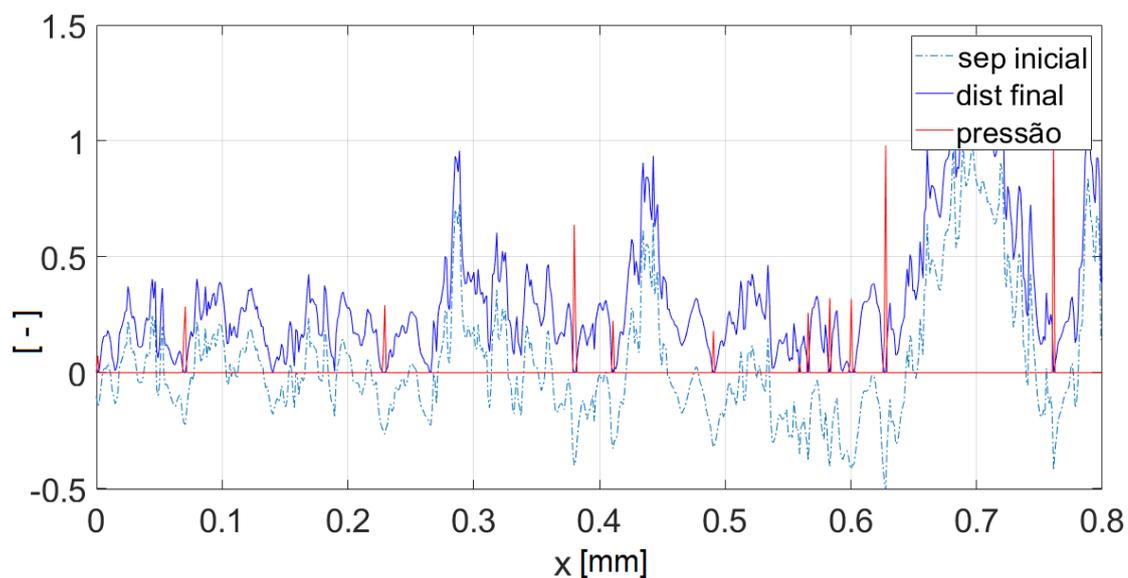
Fonte: autoria própria

Figura 71 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) normalizadas para a superfície de cilindro de motor de combustão interna (seção $y = 0,4$ mm)



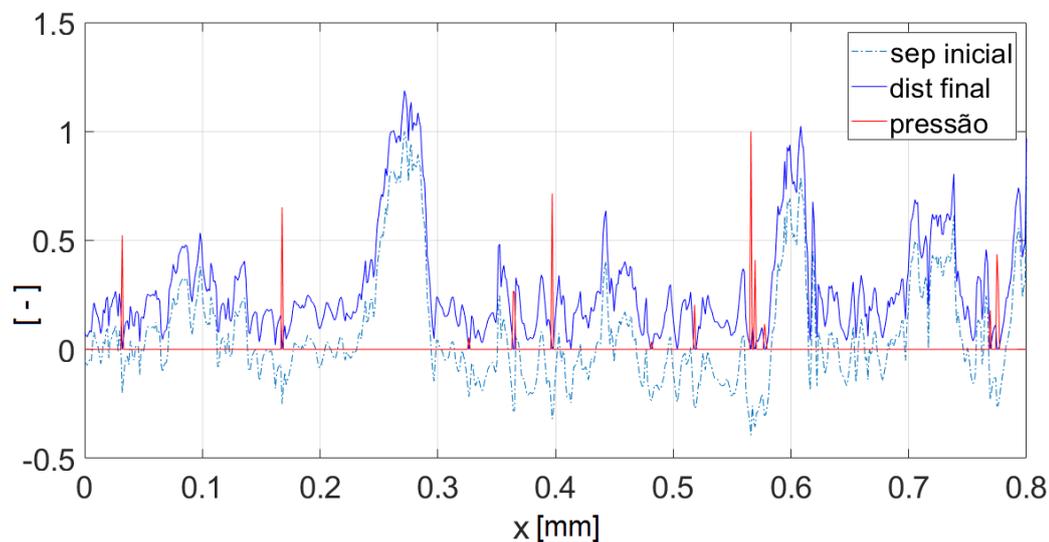
Fonte: autoria própria

Figura 72 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) normalizadas para a superfície de cilindro de motor de combustão interna (seção $y = 0,6$ mm)



Fonte: autoria própria

Figura 73 – Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) normalizadas para a superfície de cilindro de motor de combustão interna (seção y=0,8 mm)



Fonte: autoria própria

A Tabela 11 apresenta os valores de força de contato e pressão máxima obtidos para as diferentes seções, bem como o maior pico de rugosidade naquela seção. A seção onde ocorre a maior força de contato, 48 N/mm, é a seção que possui o pico mais alto de rugosidade, $y = 0,2$ mm, e as seções que possuem o menor valor de força são também as seções onde os picos mais altos de rugosidade são menores em relação as outras seções: $y = 0,6$ e $y = 0,8$ mm. O mesmo comportamento não ocorre em se tratando da pressão máxima, isto é, não há relação direta do valor desta com o maior pico de rugosidade, a qual ocorre em $y = 0,4$ mm no ponto $x = 0$.

De modo geral, a pressão máxima no caso unidimensional chega a ser entre duas a três vezes maior do que o valor da pressão máxima no caso bidimensional, e o valor de força normal total⁴ cerca de duas vezes maior. As justificativas para essas diferenças são: i) a aproximação do caso unidimensional, que considera um perfil de rugosidades constante ao longo da direção transversal (direção y no presente caso), e ii) a malha mais refinada nos testes unidimensionais, o que provoca uma diminuição da área real de contato e, conseqüentemente, um aumento nos valores de pressão.

⁴ Como a força de contato obtida no caso unidimensional representa uma força distribuída ao longo do comprimento transversal, para esta análise comparativa entre forças dos casos uni e bidimensionais, ela foi multiplicada pela dimensão da amostra ao longo do eixo y (0,8 mm).

Tabela 11 - Resultados das seções transversais para o caso de contato com rugosidade de cilindro de motor de combustão interna

Valor de y (mm)	Força de contato (N/mm)	Pressão máxima (MPa)	Pico de rugosidade (mm)
0,0	35	6035	$7,0 \times 10^{-4}$
0,2	48	6480	$9,0 \times 10^{-4}$
0,4	32	8689	$7,2 \times 10^{-4}$
0,6	31	5181	$6,4 \times 10^{-4}$
0,8	31	5189	$6,4 \times 10^{-4}$

Fonte: autoria própria

4.3.2 Simulações com Rugosidade de uma Superfície Polida com Lixa 1200

Para analisar a sensibilidade das resoluções do LCP de contato com relação aos picos de rugosidade, foram realizados ainda testes com uma superfície de uma peça polida com lixa 1200, em que as alturas dos picos estão na ordem de nanômetros.

Os dados base utilizados são de dois corpos de aço, com as seguintes características:

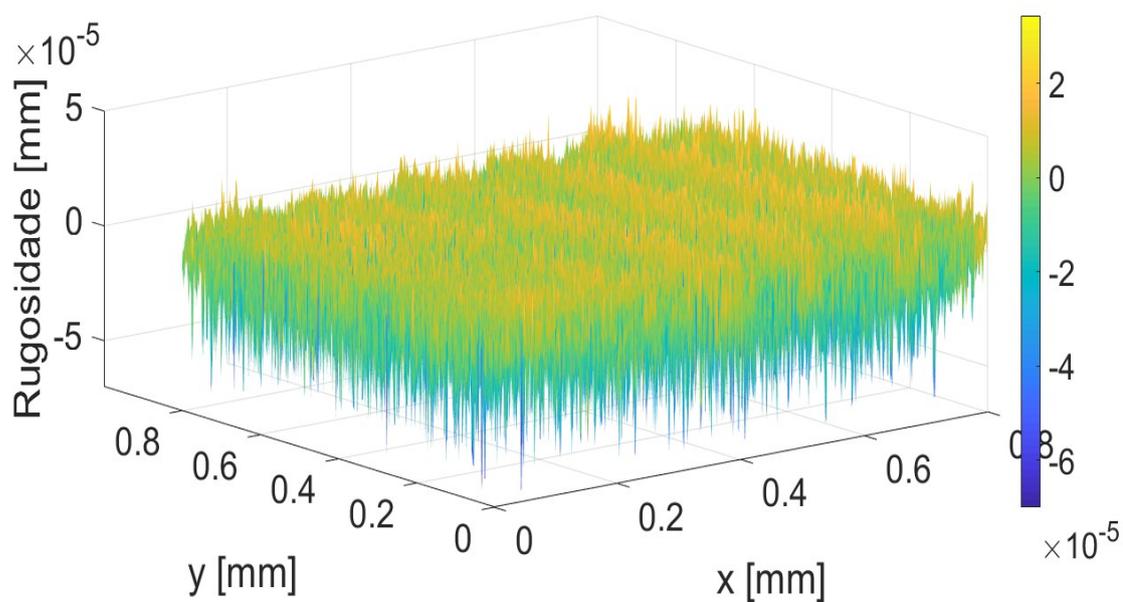
- Raios de curvaturas do Corpo 1: $R_{1x} = R_{1y} = 1000$ mm
- Raios de curvaturas do Corpo 2: $R_{2x} = R_{2y} = 1000$ mm
- Módulos de elasticidade: $E_1 = E_2 = 210 \times 10^3$ MPa
- Coeficientes de Poisson: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$;
- Domínio em x e y: $[0 ; 0,8]$ mm
- Separação inicial da superfície de referência: $g_0 = 1,4 \times 10^{-6}$ mm

As Figuras 74 e 75 apresentam, em vistas tridimensional e de topo, respectivamente, as rugosidades obtidas das medições em uma malha de 702 x 702 pontos.

Analogamente ao realizado para os testes com a superfície de cilindro de motor, aproximações foram feitas nos dados obtidos das medições para se adaptarem às malhas dos testes. Assim, as Figuras 76 e 77 apresentam as vistas tridimensional e

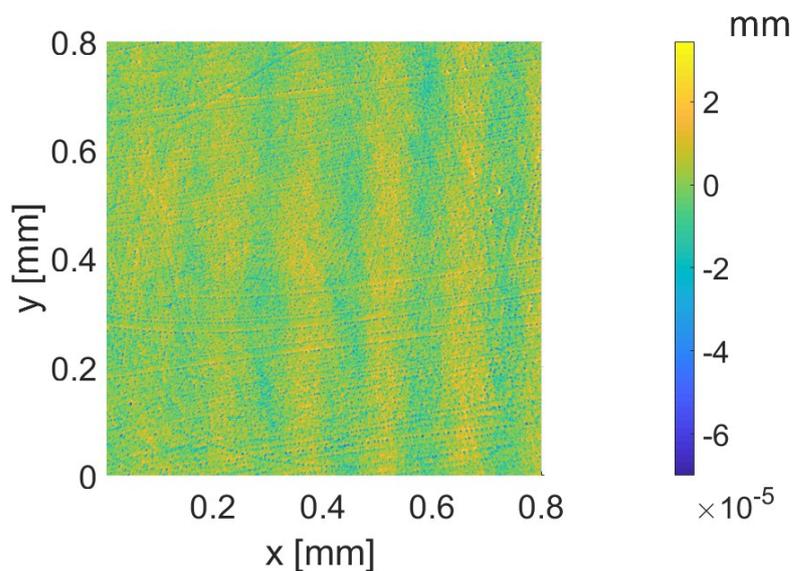
de topo, respectivamente, para a malha 32 x 32 e, de forma similar, as Figuras 60 e 61 para a malha 64 x 64 e as Figuras 62 e 63 para a malha 128 x 128.

Figura 74 - Rugosidade de superfície polida com lixa 1200, vista tridimensional (malha 702 x 702)



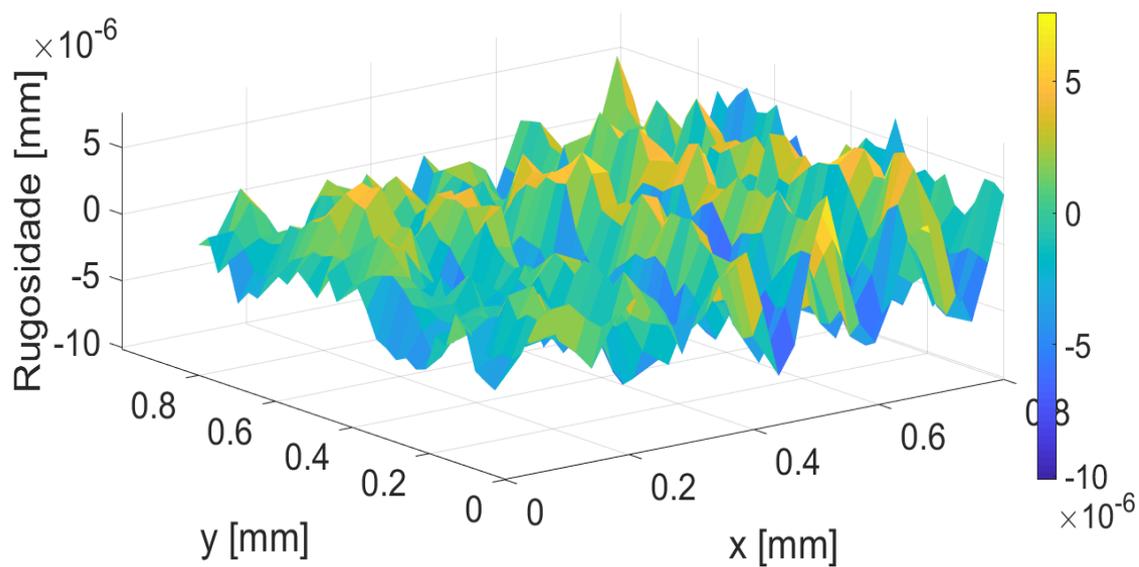
Fonte: autoria própria

Figura 75 – Rugosidade de superfície polida com lixa 1200, vista do plano xy (malha 702 x 702)



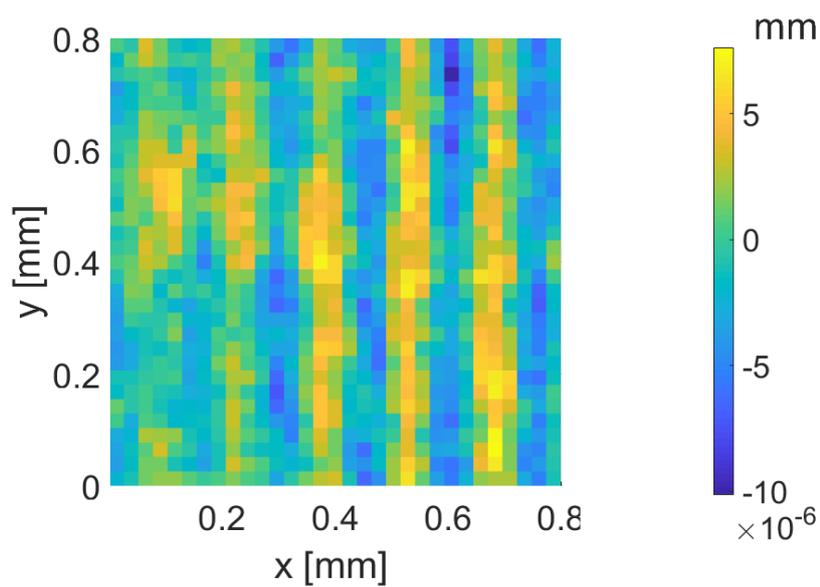
Fonte: autoria própria

Figura 76 – Aproximação da rugosidade de superfície polida com lixa 1200 por malha 32 x 32, vista tridimensional



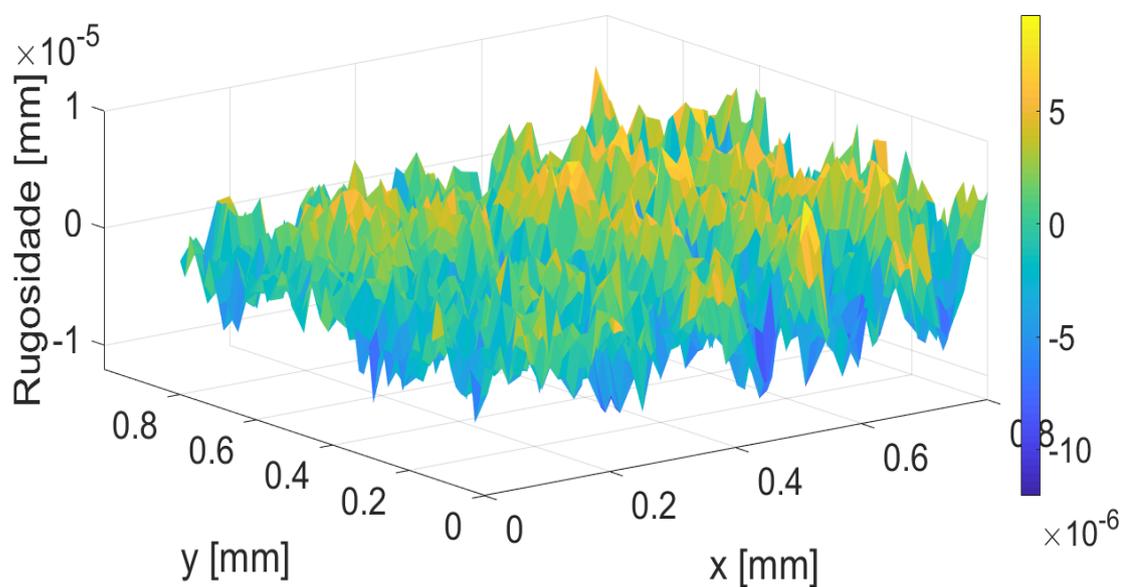
Fonte: autoria própria

Figura 77 – Aproximação da rugosidade de superfície polida com lixa 1200 por malha 32 x 32 (plano xy)



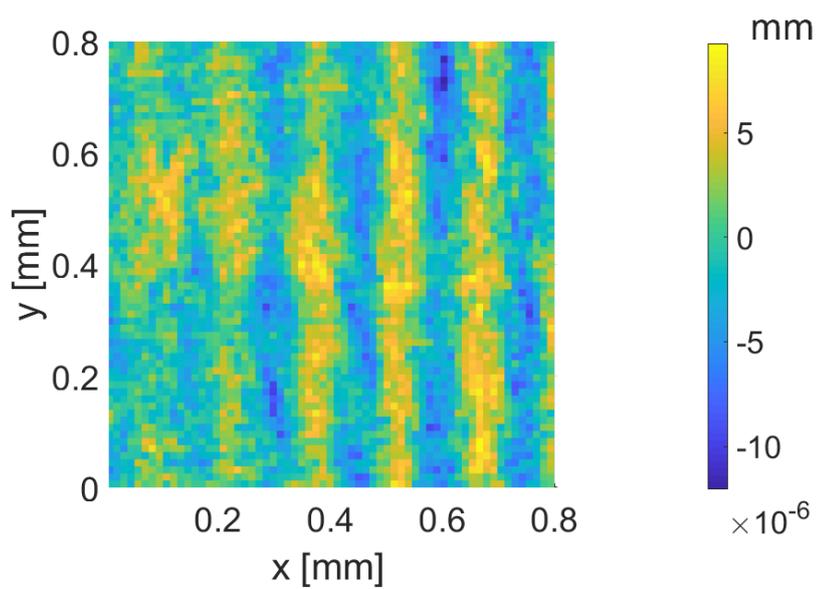
Fonte: autoria própria

Figura 78- Aproximação da rugosidade de superfície polida com lixa 1200 por malha 64 x 64, vista tridimensional



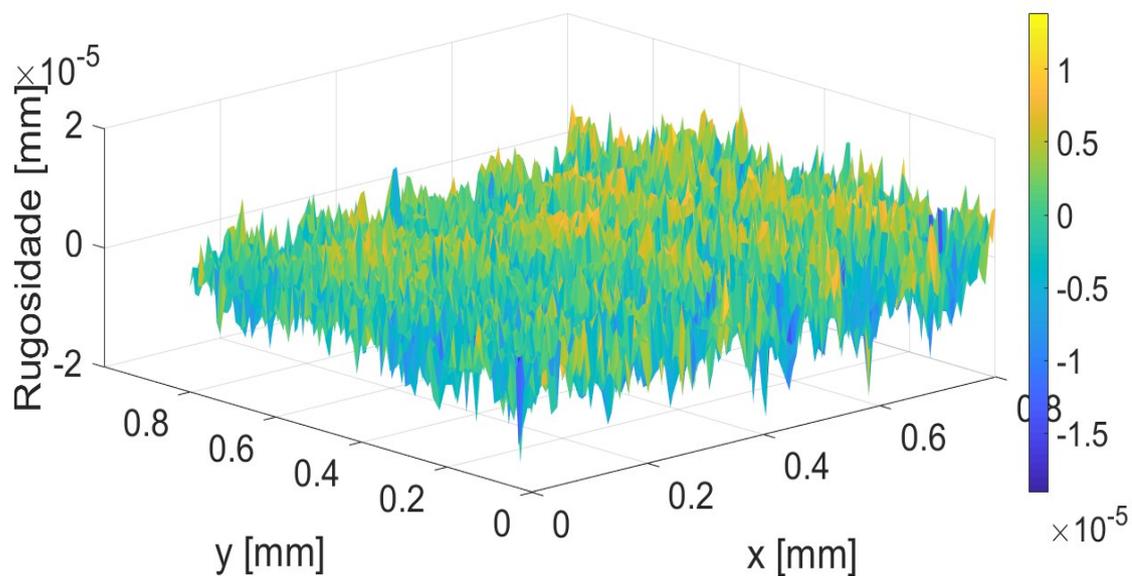
Fonte: autoria própria

Figura 79 – Aproximação da rugosidade de superfície polida com lixa 1200 por malha 64 x 64 (plano xy)



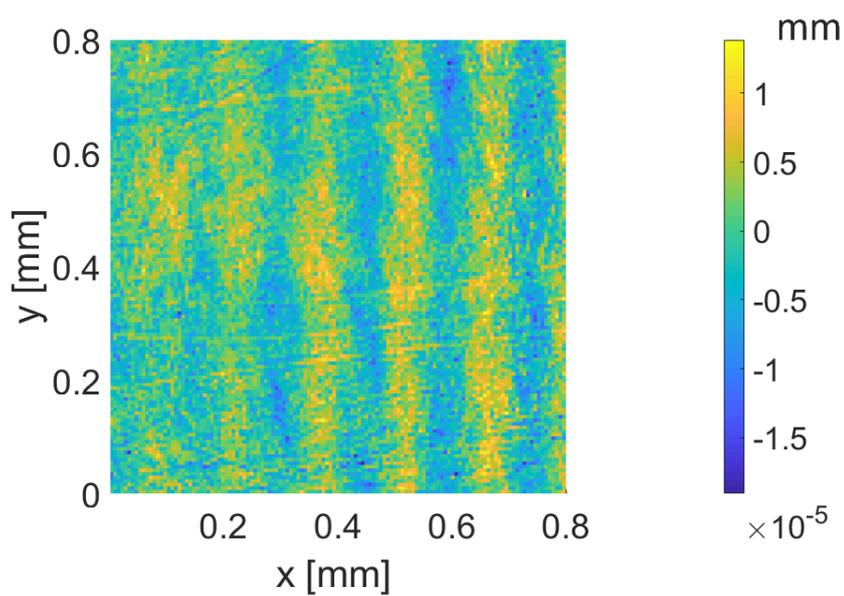
Fonte: autoria própria

Figura 80 – Aproximação da rugosidade de superfície polida com lixa 1200 por malha 128 x 128, vista tridimensional



Fonte: autoria própria

Figura 81 – Aproximação da rugosidade de superfície polida com lixa 1200 por malha 128 x 128 (plano xy)



Fonte: autoria própria

4.3.2.1 Simulação em Domínio Bidimensional do Contato com Superfície Polida com Lixa 1200

Conforme já ressaltado para o caso da superfície de cilindro de motor, o intervalo da separação inicial ao longo do Corpo 1 varia em função da malha. Para o caso da superfície polida tem-se: $g_{min} = -5 \times 10^{-6}$ mm e $g_{max} = 9,3 \times 10^{-6}$ mm para a malha 32×32 ; $g_{min} = -6,7 \times 10^{-6}$ mm e $g_{max} = 1,2 \times 10^{-5}$ mm para a malha 64×64 ; e $g_{min} = -8,8 \times 10^{-6}$ mm e $g_{max} = 1,3 \times 10^{-5}$ mm para a malha 128×128 .

A Tabela 12 apresenta os resultados de força, pressão máxima e tempo computacional, para os diferentes métodos e discretizações, obtidos da resolução do problema de contato em domínio bidimensional com a rugosidade de uma superfície polida com lixa 1200. Nota-se que os valores de força de contato e pressão máxima são menores, se comparados com os respectivos valores obtidos para a superfície do cilindro de motor de combustão interna (Tabela 10). Isso já era esperado, pois as amplitudes das rugosidades da superfície polida são em torno de duas ordens de grandeza inferiores àquelas da superfície do cilindro de motor.

Observa-se também que, para as malhas 64×64 e 128×128 , o método LCPQuad apresentou resultados discrepantes em relação aos outros métodos. Ao analisar o valor final da função objetivo, verificou-se que, para a malha 64×64 , a solução via LCPQuad apresentou $f(\mathbf{p}) = 1,0$ e, para a malha 128×128 , $f(\mathbf{p}) = 14,4$. Já para os outros métodos, considerando todas as malhas, o valor final da função objetivo foi sempre inferior a $1,0 \times 10^{-8}$ ($f(\mathbf{p}) < 1,0 \times 10^{-8}$).

Quanto à razão entre a área real e a área aparente, esta foi de aproximadamente 12% para a malha 32×32 , 7,6% para a malha 64×64 , e 4,4% para a malha 128×128 , diminuindo com o refino da malha, como também observado no caso da superfície de cilindro de motor.

Com relação ao tempo computacional, excluindo-se a solução obtida via LCPQuad devido à sua não convergência para este caso, pode-se observar que o melhor desempenho foi do método LCPMin. De forma a melhor comparar o desempenho dos métodos, a Figura 82 apresenta, para a maior discretização (128×128), o tempo computacional para os diferentes métodos. Da análise desta figura e da Tabela 12, nota-se que os métodos LCPSolve e LCPSolve_MQC demandaram em

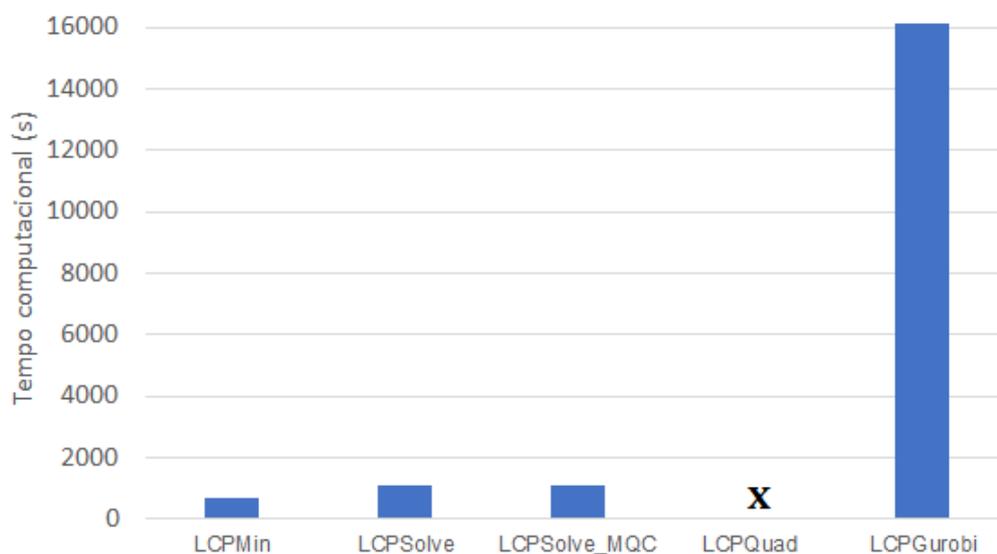
torno de 60% mais tempo que o LCPMin. Já o LCPGurobi apresentou o pior desempenho, sendo aproximadamente 24 vezes mais demorado que o LCPMin e 15 vezes mais que os métodos LCPSolve e LCPSolve_MQC.

Tabela 12 – Resultados para o contato com superfície polida com lixa 1200 (domínio bidimensional)

Método	N	Força de contato (N)	Pressão máxima (MPa)	Tempo computacional (s)
LCPMin	32	0,20	7,5	< 1
	64	0,26	21	15
	128	0,36	55	679
LCPSolve	32	0,20	7,5	< 1
	64	0,26	21	32
	128	0,36	55	1084
LCPSolve_MQC	32	0,20	7,5	< 1
	64	0,26	21	31
	128	0,36	55	1077
LCPQuad	32	0,20	7,5	<3
	64	4	9	45
	128	7,4	15	1552
LCPGurobi	32	0,20	7,5	3
	64	0,26	21	234
	128	0,36	55	16127

Fonte: autoria própria

Figura 82- Tempo de simulação para superfície polida com lixa 1200, malha 128 x 128 (domínio bidimensional)

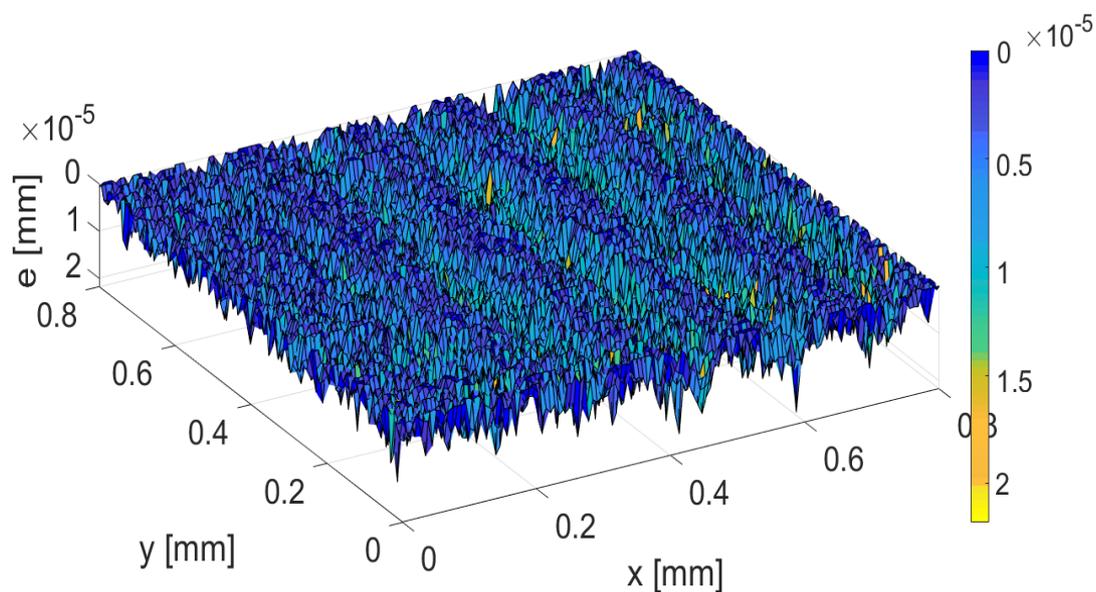


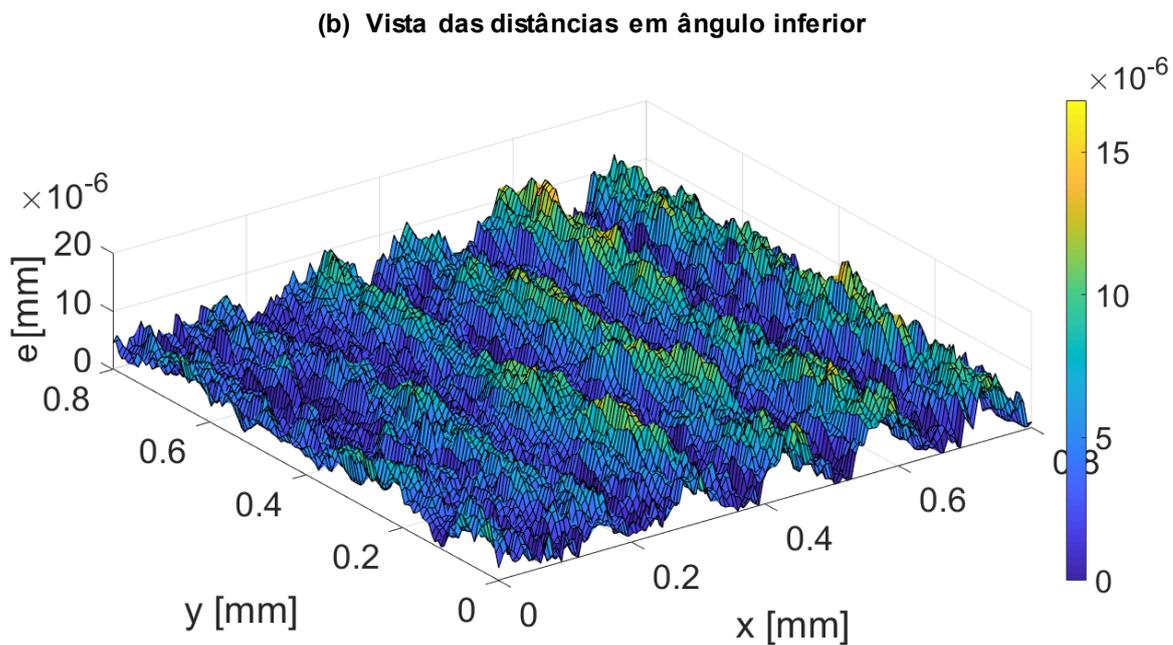
Fonte: autoria própria

Nas Figuras 83 e 84 estão representadas as distâncias entre os corpos após o contato, e nas Figuras 85 e 86 as pressões. Analogamente como apresentado nas figuras do teste de cilindro de motor de combustão interna, a Figura 83(a) apresenta as distâncias vistas de um ângulo superior, enquanto que a 83 (b) mostra as distâncias vistas de um ângulo inferior.

Figura 83 – Distância final após a deformação entre os Corpos 1 e 2, vistas tridimensionais

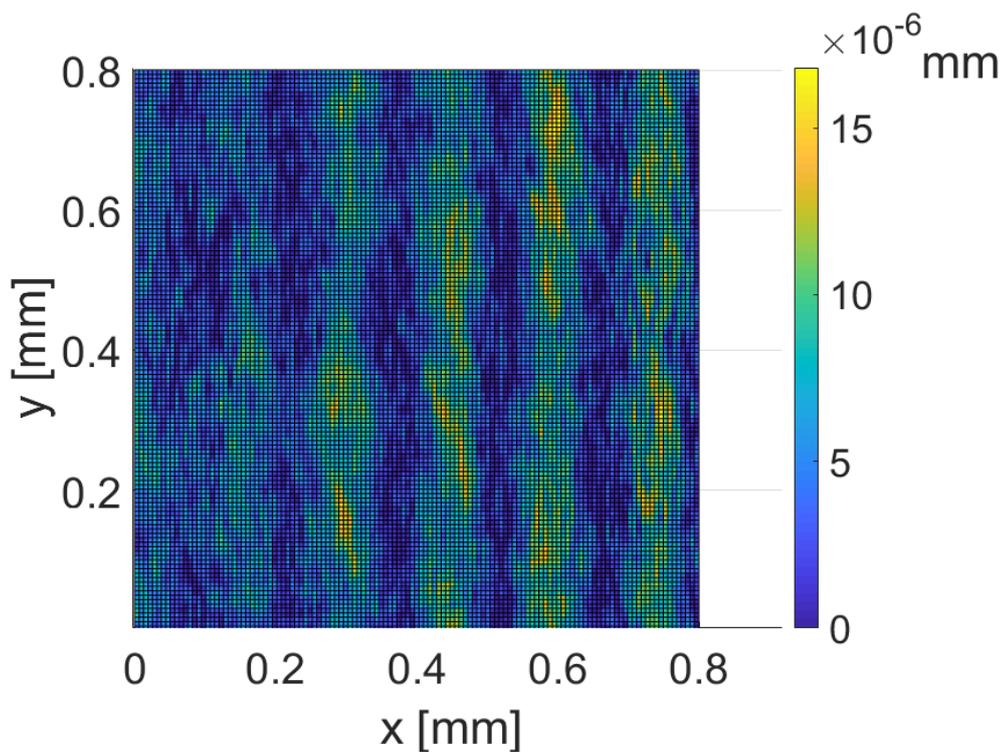
(a) Vista das distâncias em ângulo superior





Fonte: autoria própria

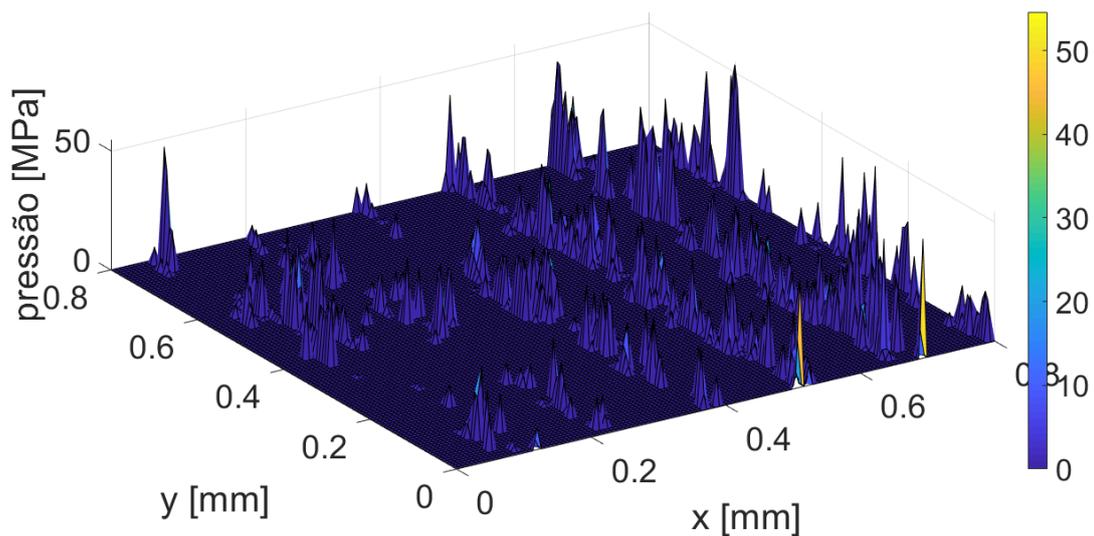
Figura 84 - Distância final entre os Corpos 1 e 2, vista bidimensional no plano xy



Fonte: autoria própria

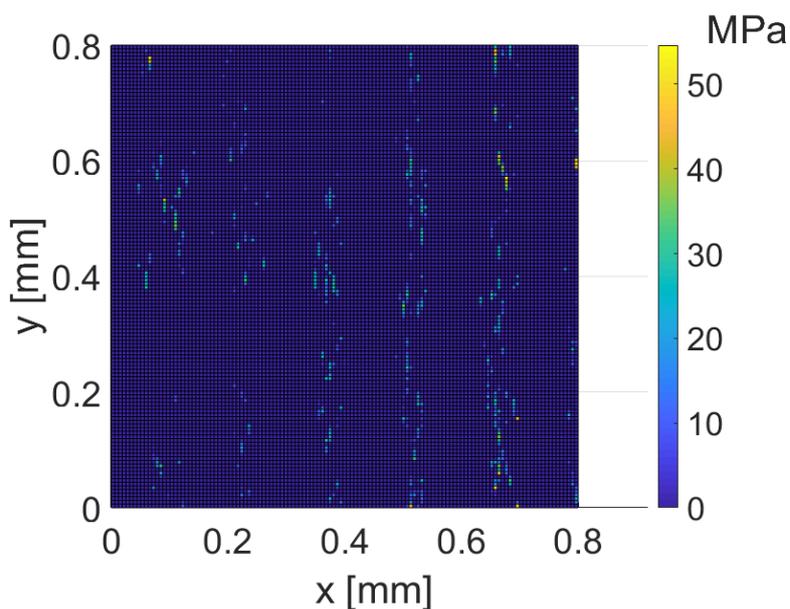
Assim como nos testes anteriores, as regiões mais distantes entre os corpos após o contato (Figura 84) são as regiões de menor pressão, ou nulas. Para análise desse último parâmetro são apresentados os gráficos das Figuras 85 e 86.

Figura 85 – Pressão de contato, vista tridimensional, malha 128 x 128



Fonte: autoria própria

Figura 86 – Pressão de contato, vista bidimensional no plano xy



Fonte: autoria própria

4.3.2.2 Simulação em Domínio Unidimensional do Contato com Superfície Polida com Lixa 1200

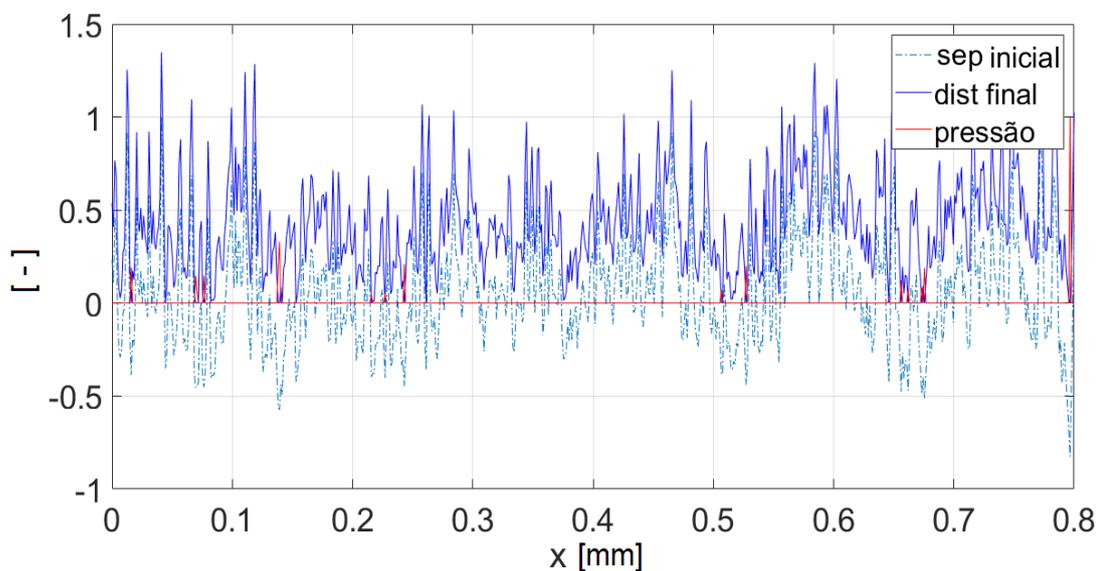
Como realizado para a superfície de cilindro de motor, a análise do contato unidimensional da peça considerando cinco cortes transversais também foi realizada para a superfície polida com lixa 1200.

As Figuras 87 a 91 apresentam, para as diferentes seções, a separação inicial (linha pontilhada) e a distância final (linha azul contínua) do Corpo 1, normalizadas pelo valor da separação inicial máxima. Também é apresentada, nos mesmos gráficos, a pressão de contato (linha vermelha contínua) normalizada pelo seu valor máximo. A Tabela 13 apresenta os valores de força de contato e pressão máxima obtidos para as diferentes seções, bem como o maior pico de rugosidade naquela seção.

Devido à peça ser polida, como pode ser observado nos gráficos, as alturas dos picos de rugosidade em todas as seções são semelhantes, não ocorrendo muitos picos isolados. Isso também é possível observar na Tabela 13, onde há três seções, $y = 0$ mm, $y = 0,4$ mm e $y = 0,6$ mm, com o pico mais alto medindo $2,0 \times 10^{-5}$ mm e outras duas seções com valores inferiores, mas ainda próximos ($1,3 \times 10^{-5}$ e $2,0 \times 10^{-5}$ mm). Dessa forma, não há grande variação da força de contato entre as seções, sendo o maior valor em $y = 0,4$ mm. O maior valor da pressão máxima ocorreu em uma seção de maior pico de rugosidade ($y = 0,6$ mm). Como a altura dos picos é mais homogênea, não é tão nítida a relação da pressão máxima com o maior pico de rugosidade.

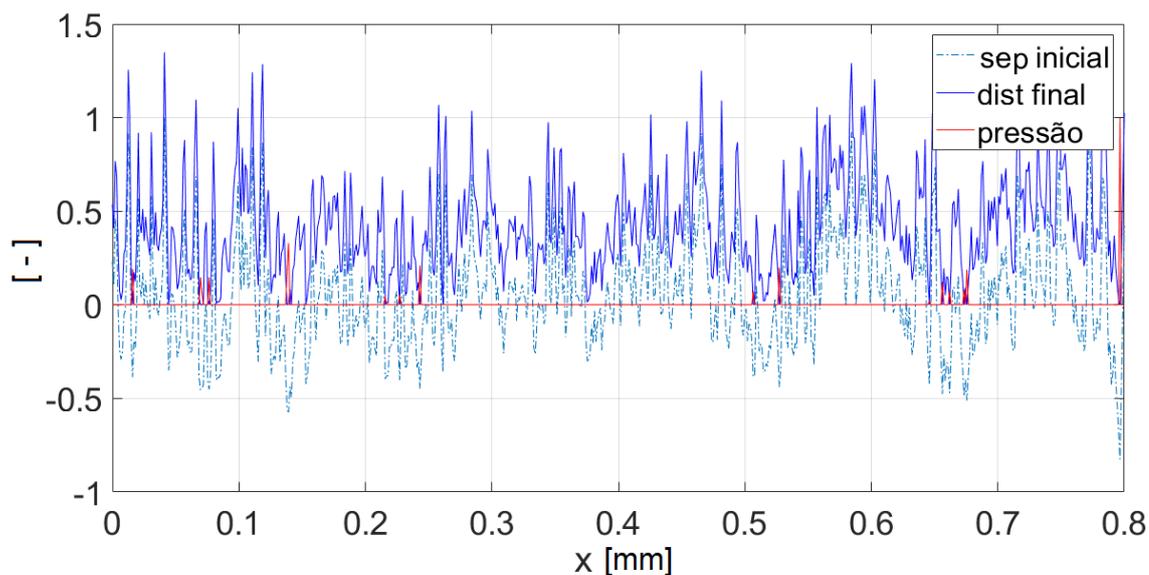
Assim como ocorreu com os testes com a superfície de cilindro de motor, também nos casos unidimensionais com a superfície polida os resultados de pressão e força são maiores que àqueles dos testes bidimensionais. O valor da força chega a ser três vezes maior, e o de pressão máxima cerca de até cinco vezes maiores que aqueles obtidos nos testes bidimensionais. Analogamente, justificado pela aproximação unidimensional do problema e maior acurácia à medida que a malha é mais refinada, provocando uma diminuição da área real de contato da aspereza e, conseqüentemente, um aumento da pressão local.

Figura 87- Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) normalizadas para a superfície polida com lixa 1200 (seção $y = 0$ mm)



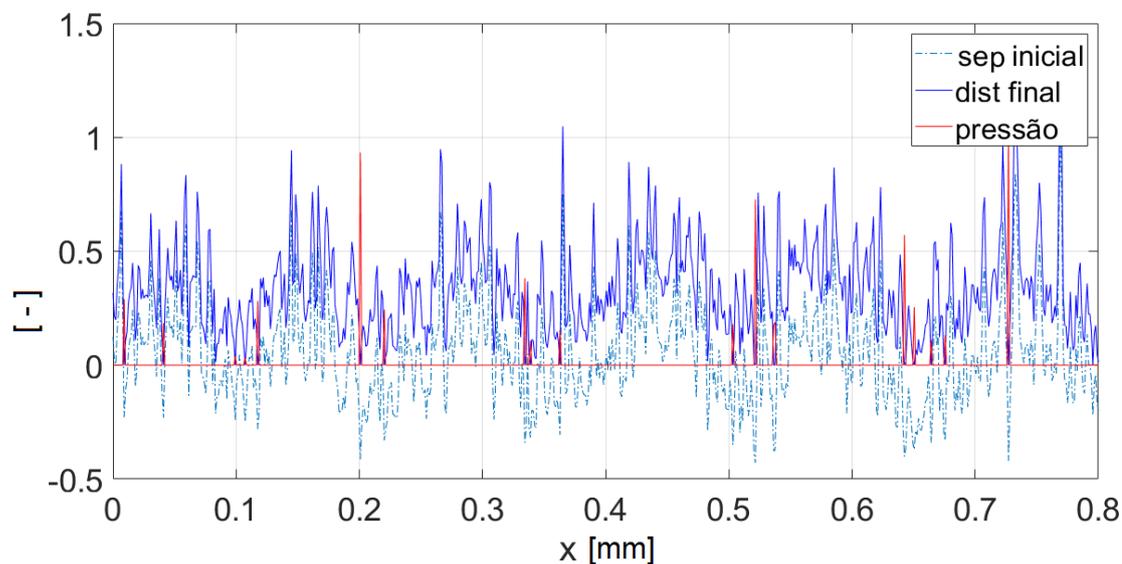
Fonte: autoria própria

Figura 88 - Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) normalizadas para a superfície polida com lixa 1200 (seção $y = 0,2$ mm)



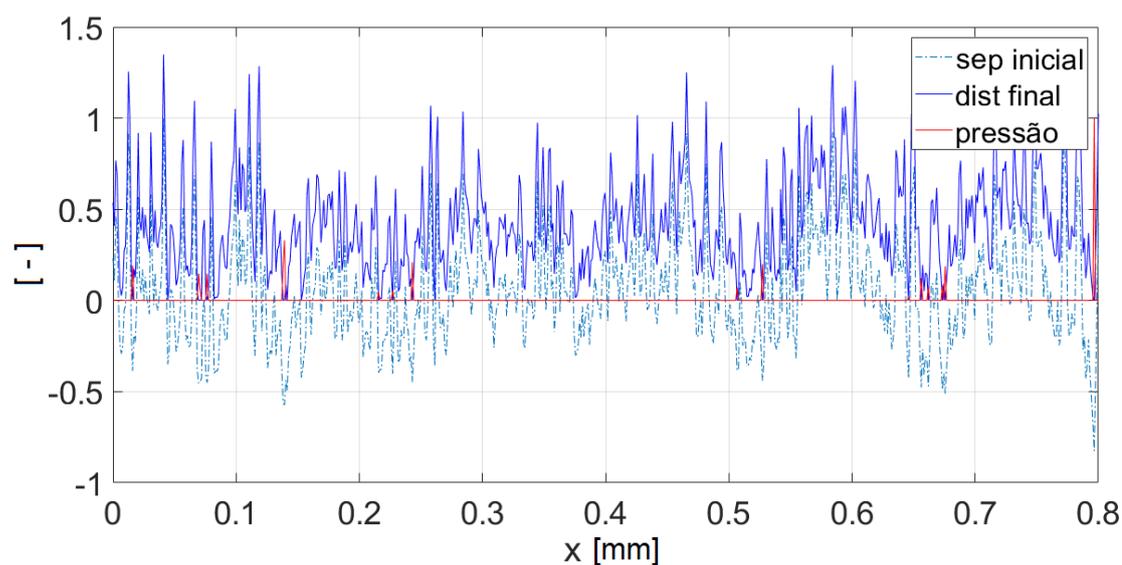
Fonte: autoria própria

Figura 89 - Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) normalizadas para a superfície polida com lixa 1200 (seção y = 0,4 mm)



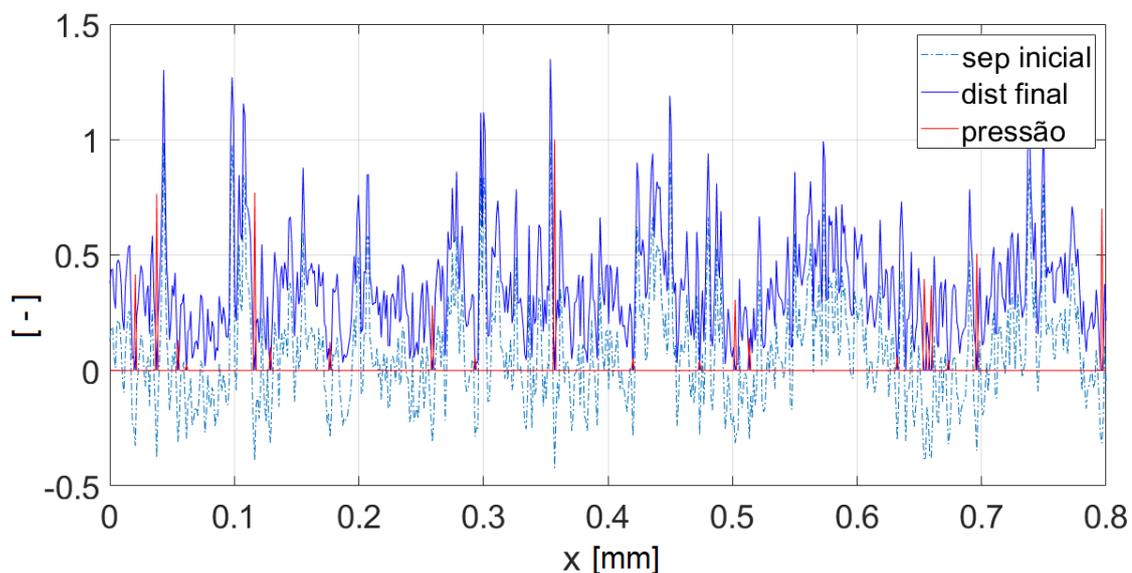
Fonte: autoria própria

Figura 90- Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) normalizadas para a superfície polida com lixa 1200 (seção y = 0,6 mm)



Fonte: autoria própria

Figura 91- Separação inicial (g), distância final após a deformação (e) e pressão de contato (p) normalizadas para a superfície polida com lixa 1200 (seção y = 0,8 mm)



Fonte: autoria própria

Tabela 13 - Resultados das seções transversais para o caso de contato com superfície polida com lixa 1200

Valor de y (mm)	Força de contato (N/mm)	Pressão máxima (MPa)	Pico da rugosidade (mm)
0,0	1,11	309	$2,0 \times 10^{-5}$
0,2	1,04	153	$1,6 \times 10^{-5}$
0,4	1,20	203	$2,0 \times 10^{-5}$
0,6	1,11	310	$2,0 \times 10^{-5}$
0,8	0,86	114	$1,3 \times 10^{-5}$

Fonte: autoria própria

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 CONCLUSÕES GERAIS

Este trabalho teve como objetivo desenvolver e aplicar técnicas eficientes para a obtenção da distribuição da pressão de contato entre corpos elásticos com superfícies rugosas. O problema para a obtenção da distribuição da pressão de contato foi formulado como um problema de complementaridade linear (LCP), que pode ser associado a um problema de otimização. Para a obtenção da solução, foram aplicadas as seguintes estratégias numéricas: método de Lemke, pacote Gurobi, programação quadrática e a resolução da programação quadrática por mínimos quadrados não-negativos. Como forma de validação, foram solucionados problemas com superfícies lisas, em domínios uni e bidimensionais. Problemas com superfícies com ondulações, em domínios uni e bidimensionais, foram analisados inicialmente considerando superfícies virtuais, isto é, superfícies com ondulações geradas por funções analíticas. Em seguida, foram consideradas superfícies reais, isto é, obtidas a partir de dados de medições de rugosidades.

Com relação aos métodos utilizados para a solução do LCP, observou-se que o método de Lemke (tanto aquele implementado por Almqvist (2022) como o modificado) e o pacote Gurobi sempre encontraram solução factível para a minimização da função objetivo, sendo, portanto, bastante robustos. Já a resolução por mínimos quadrados convergiu em todos os casos, com exceção da análise da superfície com ondulação com variação no plano com malha 128 x 128, cuja execução foi interrompida devido ao alto tempo decorrido. Por outro lado, os resultados obtidos através de programação quadrática por vezes não representavam uma solução adequada do problema físico (isto é, o valor encontrado da função objetivo, que deveria ser nulo, não era próximo de zero).

Sobre o desempenho em termos de velocidade computacional dos métodos utilizados para a solução do LCP, o pacote Gurobi apresentou os maiores tempos, em todos os testes realizados. Observou-se também que o método de Lemke modificado aqui foi ligeiramente mais ágil nas análises com superfícies virtuais, em todos os casos, se comparado ao método de Lemke implementado por Almqvist (2022). Porém, nos testes com superfícies reais, o método de resolução por mínimos quadrados não-negativos demonstrou o melhor desempenho, sendo cerca de 20% mais rápido que o

método de Lemke. De forma geral, e para os casos que encontrava solução factível, o método de programação quadrática teve desempenho inferior ao método de Lemke e ao método de resolução através de mínimos quadrados e superior ao Gurobi.

Verificou-se que nos testes unidimensionais, tanto para o caso liso quanto para o caso rugoso, todos os métodos convergem para a solução de forma rápida (menos de 7 s). Assim, pode-se concluir que, para essas aplicações, os métodos são equivalentes em robustez e desempenho.

Para caso em domínio bidimensional, dois métodos se destacaram: o método de Lemke (LCPSolve e LCPSolve_MQC), e o método de resolução através de mínimos quadrados não-negativos (LCPMin). Para os testes com superfícies virtuais, tanto para o contato liso quanto o rugoso, onde a separação inicial de referência (g_0) é negativa, e assim as componentes do vetor de separação inicial (\mathbf{g}) são, em sua maioria, termos negativos, o método de Lemke aqui modificado (LCPSolve_MQC), mostrou ser o mais adequado a ser utilizado.

Já para os testes com superfícies reais de engenharia, em condições de contato de modo que a relação entre a área real e a área aparente esteja entre 4% e 20%, o que gera um vetor de separação inicial (\mathbf{g}) na sua maioria com termos positivos, o método LCPMin foi o mais rápido. Isso pode ser explicado, no equacionamento via mínimos quadrados não-negativos, o objetivo é encontrar uma solução \mathbf{p} , com termos não-negativos de modo que a distância entre \mathbf{Cp} e $\mathbf{C}^{-T}\mathbf{g}$ seja a menor possível. Isto significa que, quanto mais \mathbf{g} possuir termos positivos, menor é a distância entre \mathbf{Cp} e $\mathbf{C}^{-T}\mathbf{g}$, e assim a convergência à solução é mais rápida. O oposto ocorre à medida que \mathbf{g} possui termos negativos. Portanto, como o interesse desta pesquisa é a análise do estudo das pressões em superfícies rugosas reais, o método de solução por mínimos quadrados não-negativos, aplicado aqui através do código denominado LCPMin é o mais indicado por ser o mais rápido dentre os métodos avaliados, e converge para a solução com uma função objetivo muito próxima de zero, o que representa uma solução adequada do problema.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como continuidade da presente pesquisa, sugerem-se os seguintes tópicos:

- Realizar estudos detalhados do cálculo da área real de contato, em particular investigações da influência da discretização;
- Adaptar o problema de contato elástico para contato elasto-plástico, de forma a se aproximar a condições reais de aplicação, onde pode ocorrer plastificação dos picos de rugosidades;
- Acoplar as estratégias de solução para o contato rugoso com problemas de lubrificação mista;
- Realizar o cálculo das tensões subsuperficiais dos corpos em contato e verificar a influência da rugosidade na distribuição das tensões.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMQVIST, A. **An LCP solution to the problem of linear elastic contact mechanics** (<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216-an-lcp-solution-of-the-linear-elastic-contact-mechanics-problem>). Acessado em 3 de maio de 2022.
- AMOR, M. B; BELGHITH, S; MEZLINI, S. Finite Element Modeling of RMS Roughness Effect on the Contact Stiffness of Rough Surfaces. **Tribology in Industry**, v. 38, n.3, p. 392-401, 2016.
- ARAGÓN, A. M.; MOLINARI, J. F. A hierarchical detection framework for computational contact mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics Engineering**, v. 574, p. 574-588, 2014.
- ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. California: Elsevier Academic Press, 2 ed., 2004.
- BARBER, J R. **Contact Mechanics: Solid Mechanics and Its Applications**. Springer International Publishing, 1a. ed, 2018.
- BARBOSA, R. E.; GHABOUSSI, J. Discrete finite element methods for multiple deformable bodies. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 2, p. 145-158, 1990.
- BARUFFALDI, L. B. **Aplicação do método da complementaridade linear para a modelagem de cunhas de atrito de vagões ferroviários**. 2010. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, 2010.
- BEHESTHI, A.; KHONSARI, M. M. On the Contact of Curved Rough Surfaces: Contact Behavior and Predictive Formulas. **Journal of Applied Mechanics**, v. 81, p. 111004-1 - 111004-15, 2014.
- BEMPORAD, A.; PAGGI, M. Optimization algorithms for the solution of the frictionless normal contact between rough surfaces. **International Journal of Solids and Structures**, v. 69-70, p. 94-105, 2015.
- BOWDEN, F. B.; TABOR, D. **The Friction and Lubrication of Solids**, New York: Oxford, first published 1950, 2001.
- BYRD, R. H.; HRIBAR, M. E.; NOCEDAL, J. An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. **SIAM Journal on Optimization**, v. 9, p. 877-900, 1999.
- COTTLE, R.; PANG, J.; STONE, R. E. **The Linear Complementarity Problem**, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- DUARTE, E. N. **Mecânica do contato entre corpos revestidos**, São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 5 ed., 2016.

FERREIRA, S. P. **Um Algoritmo de Filtro Globalmente Convergente sem Derivadas da Função Objetivo para Otimização Restrita e algoritmo de Pivotamento em Blocos Principais para Problemas de Complementaridade Linear.** 2016. Tese (Doutorado). Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, 2016.

FU, S.; KOR, W.S.; CHENG, F.; SEAH, L.K. In-situ measurement of surface roughness using chromatic confocal sensor. **Procedia CIRP**, v. 94, p. 780-784, 2020.

GIUSTI, S. M.; SOKOLOWSKI, J.; STEBEL, J. On Topological Derivatives for Contact Problems in Elasticity. **Journal of Optimization Theory and Application**, v. 165, 279-294, 2014.

GUROBI. Gurobi Optimization: Product Brochure. Disponível em: <https://cdn.gurobi.com/wp-content/uploads/2021/02/Gurobi-Optimization_Product-Brochure-2021.pdf>. Acesso em: 03 de maio de 2022.

HE, X.; LIU, Z.; RIPLEY, L.B.; SWENSEN, V.L.; GRIFFIN-WIESNER, I.J.; GULNER, B.R.; MCANDREWS, G.R.; WIESER, R.J.; BOROVSKY, B.P.; WANG, Q.J.; KIM, S.H. Empirical relationship between interfacial shear stress and contact pressure in micro- and macro-scale friction. **Tribology International**, v. 155, p. 106780, 2021.

HERTZBERG, J. L.; HERTZBERG, R. W.; VINCI, R. P. Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials, **USA: John Wiley & Sons**, 2013.

HILLS, D. A.; NOWELL, D., SACKFIELD, A. **Mechanics of Elastic Contacts.** Butterworth-Heinemann, 1993.

HYUN, S.; PEI, L.; MOLINARI, J.F.; ROBBINS, M. O. Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces. **Physical Review**, v. 70, 026117, 2004.

JACKSON, R. L.; GREEN, I. A statistical model of elasto-plastic asperity contact between rough surfaces. **Tribology International**, v. 39, p. 906-914, 2006.

JOHNSON, K. L. **Contact mechanics**, Cambridge: Cambridge University Press, 1 ed., 1985.

JOSSO, B.; BURTON, D. R.; LALOR, M. J. Frequency normalised wavelet transform for surface roughness analysis and characterization. **Wear**, v. 252, p. 491-500, 2002

KUMAR, S.; TARIQ, A. Effects of contact-nature on transient thermal contact conductance. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 137, p. 299-312, 2019.

LAWSON, C. L.; HANSON, R. J. **Solving Least-Squares Problems.** Prentice Hall: New York, 1974

LEE, Y.; LIU, Y.; BARBER, J. R.; JANG, Y. H. Thermal boundary conditions in sliding contact problem. **Tribology International**. v. 103, p. 69-72, 2016.

LEMKE, R. M. Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming. **Nature**, v. 11, p. 681-689, 1965.

LI, S. A mathematical model and numeric method for contact analysis of rolling bearings, **Mechanism and Machine Theory**, v. 119, p. 61-73, 2018.

LIMA, F. E.; CORRÊA, M. Correlação entre os parâmetros de rugosidade: uma abordagem matemática. **Revista Tecnologia**, Fortaleza-CE, v. 29, n.1, p. 110-116, 2008.

LOSTADO, R.; MARTINEZ, R. F.; MAC DONALD, B. J. Determination of the contact stresses in double-row tapered roller bearing using the finite element method experimental analysis and analytical models. **Journal of Mechanical and Technology**, v. 29, p. 4645-4656, 2015.

LU, Y.; LIU, Z. A three-dimensional fusion prediction model for fractal rough surfaces in the sliding contact process. **Industrial Lubrication and Tribology**. v. 66, p. 459-467, 2014.

MARMO, F.; TORALDO, F.; ROSATI, A.; ROSATI, L. Numerical solution of smooth and rough contact problems. **Meccanica**. v. 53, p.1415-1440, 2018.

NETO, A. G.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. Contact between spheres and general surfaces. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 328, p. 686-716, 2018.

NETO, D. M.; OLIVEIRA, M. C.; MENEZES, L. F. Surface Smoothing Procedures in Computational Contact Mechanics. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 24, p. 37-87, 2017.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization**, New York: Springer, 2a. ed., 2006.

PAGGI, M; BEMPORAD, A. Optimization Algorithms for the Solution of the Frictionless Normal Contact Between Rough Surfaces. **International Journal of Solid and Structures**, v.70, p. 94-105, 2015.

PAGGI, M.; BEMPORAD, A.; REINOSO, J. **Computational Methods for Contact Problems with Roughness** In: HILLS, D. Modeling and Simulation of Tribological Problems in Technology, Springer Science Business Media, Switzerland, 2020.

PEDARLOS, P. M.; ROSEN, J. B. Global Optimization Approach to the Linear Complementarity Problem, **Computer Science Department University of Minnesota Minneapolis**, v. 9, p. 341-353, 1988.

PEI, L.; HYUN, S.; MOLINARI, J. F.; ROBBINS, M. O. Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 53, p. 2385–2409, 2005.

PERSSON, B. N. J. Contact mechanics for randomly rough surfaces. **Surface Science Reports**, v. 61, p. 201-227, 2006.

PERSSON, B. N. J.; BUCHER, F.; CHAIA, B. Elastic contact between randomly rough surfaces: Comparison of theory with numerical results. **Physical Review B**, v. 65, n.18, p. 1841061-1841067, 2002.

PISSARRA, C. M. A. **Problemas de Complementaridade Linear: Aspectos Teóricos, Computacionais e Aplicações**. 1997. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, 1997.

POLONSKY, I. A.; KEER, L. M. A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques. **Wear**, v. 231, p.206-219, 1999.

POPOV, V. L. **Contact Mechanics and Friction**, Berlin: Springer, 2010.

RADEMACHER, A.; ROSIN, K. Adaptive optimal control of Signorini's problem. **Computational Optimization and Applications**, v. 70, p. 531-569, 2018.

POWELL, M. J. D.; On The Quadratic Programming Algorithm of Goldfarb and Idnani. **Mathematical Programming Study**, v. 85, p. 46-61, 1985.

REY, V.; BLEYER, J. Stability analysis of rough surfaces in adhesive normal contact. **Computational Mechanics**, v. 62, p. 1155-1167, 2018.

SAMPAIO, M. A. B. **Mecânica do Contato com Método dos Elementos de Contorno para Modelagem de Máquinas Tuneladoras**. 2009. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.

SEABRA, J.; BERTHE, D. **Influence of Surface Waviness and Roughness on the Normal Pressure Distribution in the Hertzian Contact**. Journal of Tribology. v. 109, p. 462-469, 1987.

SHAH, D. B., PATEL, K. M., TRIVEDI, R. D. Analyzing Hertzian contact stress developed in a double row spherical roller bearing and its effect on fatigue life. **Industrial Lubrication and Tribology**, v. 68, p. 361-368, 2016.

SHATERZADEH-YAZDI, M. H. **Análise de contato entre dois corpos elásticos usando o Método dos Elementos de Contorno**. 2015. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, 2015.

SMITH, S. **Digital signal processing: a practical guide for engineers and scientists**. Elsevier, 2013

SOFONEA, M.; XIAO, Y.; COUDERC, M. Optimization problems for elastic contact models with unilateral constraints. **Zeitschrift für angewandte Mathematik and Physik**, v. 70, art.1, 2019a.

SOFONEA, M.; XIAO, Y.; COUDERC, M. Optimization problems for a viscoelastic frictional contact problem with unilateral constraints. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, v. 50, p 86-103, 2019b.

SPICKA, J.; HYNČIK, L.; HAJMAN, M. Double pendulum contact problem. **Applied and Computational Mechanics**, v. 8, p.115-128, 2014.

SPINU, S.; CERLINCA, D. Modelling of Rough Contact between Linear Viscoelastic Materials. **Modelling and Simulation in Engineering**, v. 2017, article ID 2521903, 2017.

STACHOWIAK, G. W.; BATCHELOR, A. W. **Engineering Tribology**, Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V., 1993.

SUSHUN, K. The Existence of the Solution for Linear Complementarity Problem. **Applied Mathematics and Mechanics**, v. 16, n.7, 1995.

TAKIGAWA, F. Y. K.; MANTELLI, F. M.; MURARO, T. C. Uma Ferramenta Computacional para Comercialização de Energia do Agente Autoprodutor. **SEPEI**, 2014.

TIJARE, V., NAGARAJ, S., SASTRY, J., MULINTI, M. Load capacity estimation of elliptical contact rolling bearings, **Materials Today: Proceedings**, v. 24, p. 1686-1695, 2020.

XIA, W.; VERA, J. C.; ZULUAGA, L. F. Globally Solving Nonconvex Quadratic Programs via Linear Integer Programming Techniques. **INFORMS Journal on Computing**, v. 32, p. 40-56, 2020.

XU, Y.; JACKSON, R. L. Boundary element method (BEM) applied to the rough surface contact vs. BEM in computational mechanics. **Friction**, v. 7, p. 359-371, 2019.

XUAN Z.; PAPADOPOULOS, P.; LI, J.; ZHANG, L. **An entropy-based evaluation of contact forces in continuum mechanics of elastic structures**. Finite Elements in Analysis and Design, v. 114, p. 78-84, 2016.

WANG, D.; ZHANG, Z.; JIN, F.; FAN, X. Normal Contact Model for Elastic and Plastic Mechanics of Rough Surfaces. **Acta Mechanica Solida Sinica**, v. 32, p. 148-159, 2019.

WANG, J.; ZHU, D. **Interfacial Mechanics: theories and methods for contact and lubrication**, New York: CRC Press, 1 ed., 2020.

WANG, Q. J. W.; CHUNG, Y. W. **Encyclopedia of Tribology**, New York: Springer Science Business Media New York, 2013.

WEBER, B., SUHINA, T., JUNGE, T., PASTEWKA, L., BROUWER, A. M., BONN, D. Molecular probes reveal deviations from Amontons' law in multi-asperity frictional contacts. **Nature Communications**, v. 9, p. 888, 2018.

WRIGGERS, P.; REINELT, J. Multi-scale approach for frictional contact of elastomers on rough rigid surfaces. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, p.1996-2008, 2009.

YASHAR, M.; CASTELLETTO, N.; TCHELEPI, H. A. Nonlinear convergence in contact mechanics: Immersed boundary finite volume. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 383, p.113929, 2021.

YASTREBOV, V. A. The elastic contact of rough spheres investigated using a deterministic multi-asperity model. **Journal of Multiscale Modelling**, v. 10, p.1841002, 2019.

YOUNGLONG, W.; WENZHONG, W.; SHENGGUANG, Z.; ZIQIANG, Z. Effects of raceway surface roughness in an angular contact ball bearing. **Mechanism and Machine Theory**, v. 121, p. 198-212, 2018.

ZHANG, Y. **The effect of surface roughness parameters on contact and wettability of solid surfaces**. 2007. Tese (Doutorado), Iowa State University, 2007.

ZHANG, F.; LIU, J.; DING, X.; WANG, R. Experimental and finite element analyses of contact behaviors between non-transparent rough surfaces. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 126, p. 87-100, 2019.

ZHAO, J.; VOLLEMBREGT, E. A. H, OOSTERLEE, C. W. A Full Multigrid Method for Linear Complementarity Problems arising from Elastic Normal Contact Problems. **Mathematical Modelling and Analysis**, v. 19, p. 216-240, 2014.

ZHONG, B.; YAN, F.; LV, J. Continuous-discontinuous hybrid boundary node method for frictional contact problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 87, p. 19-26, 2018.