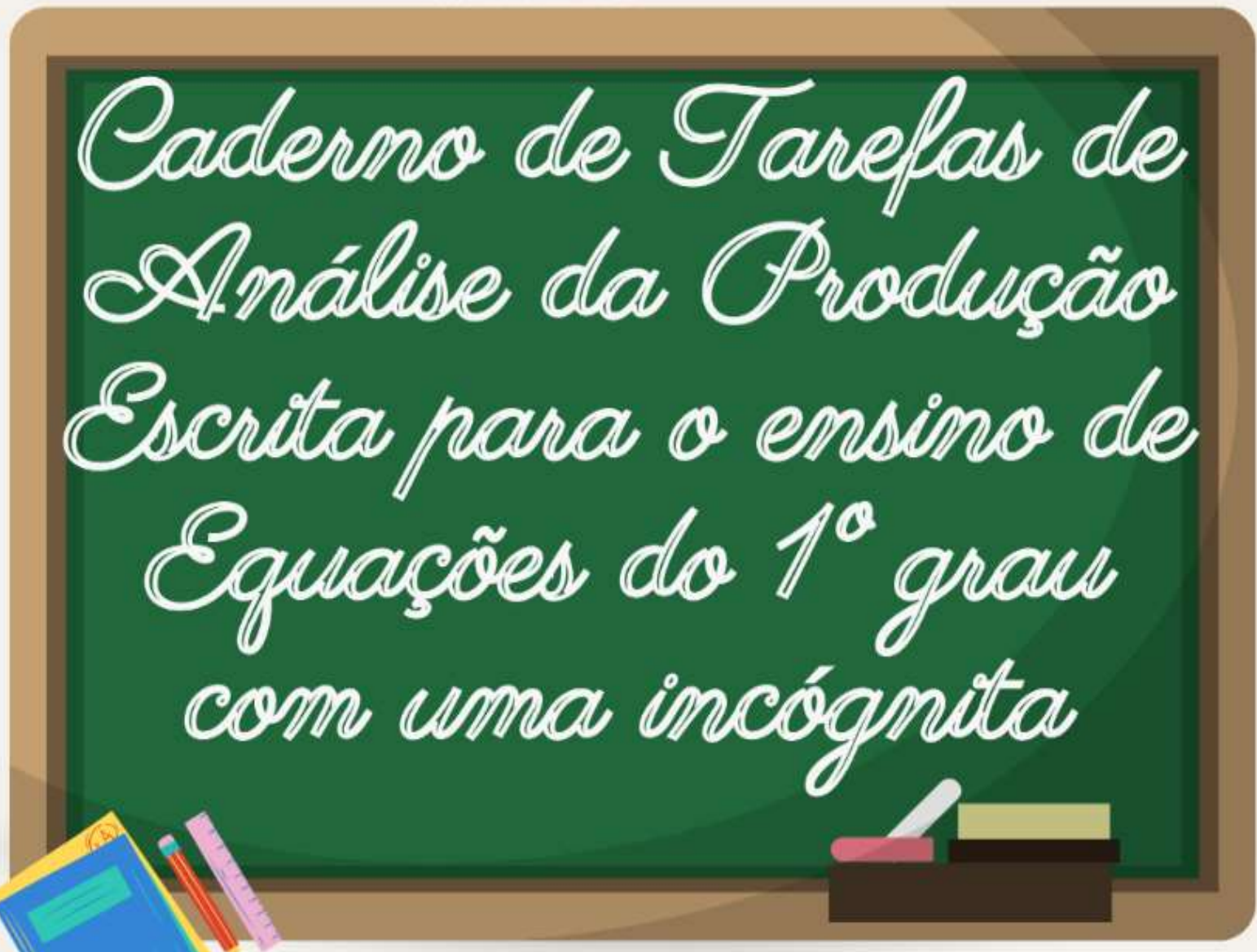




ppgmat

PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENSINO
DE MATEMÁTICA

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ



*Caderno de Tarefas de
Análise da Produção
Escrita para o ensino de
Equações do 1º grau
com uma incógnita*

Carolina Bueno Silvestre

Jader Otávio Dalto



2022

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CAROLINA BUENO SILVESTRE

JADER OTAVIO DALTO

TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE
EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

WRITTEN PRODUCTION ANALYSIS TASKS FOR TEACHING FIRST
DEGREE EQUATIONS WITH ONE UNKNOWN

LONDRINA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença. A capa foi feita pela autora a partir do site Canva. Disponível em: <<https://www.canva.com/design/DAFDbcGKUvg/PetBXPQM6abveTaMQcPKg/edit?category=ACFa6uXco>>

Os desenhos foram obtidos no site FLATICON. Disponível em: <<https://www.flaticon.com/br/>>



CAROLINA BUENO SILVESTRE

**TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DO 1º
GRAU COM UMA INCÓGNITA**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 28 de Setembro de 2022

Jader Otavio Dalto, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Joao Ricardo Viola Dos Santos, Doutorado - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (Ufms)

Apresentação

Caro professor(a) ou futuro(a) professor(a),

Este caderno contém Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE) que podem ser utilizadas no ensino de equações do 1º grau com uma incógnita. Este material é fruto da pesquisa de mestrado desenvolvida pela primeira autora, sob orientação do segundo.

Estimular os alunos para a aprendizagem em conceitos matemáticos não é uma tarefa fácil; ela requer do professor trabalho árduo, pois vários fatores influenciam na aprendizagem, entre os quais o conhecimento prévio dos alunos, que faz parte do processo de ensino e aprendizagem, podendo ser inserido como parte do planejamento de aula do professor. Assim, na rotina de sala de aula, o professor precisa ampliar seu campo de visão acerca dos fatores que influenciam a aprendizagem dos alunos, tendo que repensar e trabalhar com material diversificado, a fim de colaborar no processo de ensino dos conteúdos matemáticos.

Lins e Gimenez (1997) acrescentam que “tanto da educação algébrica quanto da aritmética, pensar visualmente, combinatorialmente e proporcionalmente são aspectos essenciais para quem queira prosseguir estudos na matemática acadêmica, e não apenas conteúdos técnicos e definições estéreis” (LINS e GIMENEZ, 1997, p.161-162).

Nessa mesma direção, Pais (2019, p. 37) considera que “o aluno deve ser estimulado a realizar um trabalho voltado para uma ‘iniciação científica’”. Aqui, encontramos a figura do professor como mediador, interlocutor e facilitador das ações a serem desenvolvidas no processo de ensino de matemática. Por isso, a intenção deste caderno é trazer uma proposta de tarefas que podem ser utilizadas pelos professores nas aulas de matemática. Nessa perspectiva, Sutherland (2009, p. 153) enfatiza que “o professor é a via de acesso ao mundo da linguagem matemática e as ferramentas matemáticas”. Em outras palavras, o professor é o agente-chave da aprendizagem matemática na sala de aula.

Com isso, “é preciso relacionar o trabalho do professor com o trabalho do matemático, não excluindo a possibilidade de conciliar essas duas atividades.” (PAIS, 2019, p. 34). Com base nessa perspectiva, procuramos desenvolver um instrumento para a sala de aula, com a finalidade de auxiliar o professor de matemática no ensino de Equações do 1º grau com uma incógnita.

Assim, este material apresenta as TAPE para o ensino de Equações do 1º grau com uma incógnita, desenvolvidas a partir de uma investigação em sala de aula com alunos do Ensino Fundamental - Anos Finais. As TAPE apresentadas nesse caderno podem proporcionar um ambiente de discussão coletiva com os alunos, de modo reflexivo e argumentativo, colaborando ativamente para sua própria aprendizagem, engajando os alunos como protagonistas no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

As tarefas apresentadas foram utilizadas pela autora deste material no ano de 2021, a partir do 2º semestre do ano letivo, em uma escola da rede municipal de Ourinhos/SP, com alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Para a autora, foi uma experiência desafiadora e positiva, pois o retorno dos alunos para as aulas presenciais, ainda ao longo da pandemia da COVID -19, trouxe outros fatores que influenciaram na rotina escolar, tais como: o uso de máscara e álcool em gel, a higienização de mesas e carteiras, o distanciamento social entre os alunos, além de aspectos como o aumento da dificuldade na aprendizagem dos alunos quanto ao conteúdo matemático, devido ao período em que as aulas foram remotas.

Consideramos que os resultados da aplicação destas tarefas no ensino de equações foram satisfatórios, pois elas promovem o desenvolvimento da autonomia dos alunos, estimulam a reflexão entre eles, promovem discussões coletivas em sala de aula e desenvolvem a diversidade do raciocínio matemático em sua resolução.

Portanto, este é um convite para conhecerem as TAPE que foram desenvolvidas como proposta para o ensino de equações do 1º grau com uma incógnita.

Abraços,
Os autores.

Lista de Figuras

<i>Figura 1- Tarefa aplicada para a coleta de produções escritas dos alunos</i>	<i>14</i>
<i>Figura 2 - TAPE 1.....</i>	<i>19</i>
<i>Figura 3 - TAPE 2.....</i>	<i>20</i>
<i>Figura 4 - TAPE 3.....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 5 - TAPE 4.....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 6 - TAPE 5-1</i>	<i>25</i>
<i>Figura 7 - TAPE 5-2</i>	<i>27</i>
<i>Figura 8 - TAPE 5-3</i>	<i>28</i>
<i>Figura 9 - TAPE 1 - versão para aluno</i>	<i>30</i>
<i>Figura 10 - TAPE 2 - versão para aluno</i>	<i>31</i>
<i>Figura 11 - TAPE 3 - versão para aluno</i>	<i>32</i>
<i>Figura 12 - TAPE 4 - versão para aluno</i>	<i>33</i>
<i>Figura 13 - TAPE 5-1 - versão para aluno.....</i>	<i>34</i>
<i>Figura 14 - TAPE 5-2 - versão para aluno.....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 15 - TAPE 5-3 - versão para aluno.....</i>	<i>36</i>

Sumário

<i>Introdução.....</i>	<i>6</i>
<i>Análise da Produção Escrita.....</i>	<i>8</i>
<i>Tarefas de Análise da Produção Escrita- TAPE.....</i>	<i>10</i>
<i>Material elaborado com as TAPE.....</i>	<i>13</i>
<i>TAPE 1.....</i>	<i>19</i>
<i>TAPE 3.....</i>	<i>21</i>
<i>TAPE 4.....</i>	<i>23</i>
<i>TAPE 5.....</i>	<i>25</i>
<i>TAPE 5-1.....</i>	<i>25</i>
<i>TAPE 5-2.....</i>	<i>27</i>
<i>TAPE 5-3.....</i>	<i>28</i>
<i>Versão das TAPE para o aluno.....</i>	<i>29</i>
<i>Considerações Finais</i>	<i>37</i>
<i>Referências Bibliográficas</i>	<i>41</i>

Introdução

Na Educação Básica, segundo a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (2019), o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos devido à sua aplicação na sociedade contemporânea e às suas potencialidades na formação de cidadãos críticos e cientes de suas responsabilidades sociais. Para o desenvolvimento desse conhecimento, é imprescindível levar em conta aspectos que estão ligados direta e indiretamente ao processo de ensino e aprendizagem, como fatores sociais, econômicos e culturais dos alunos, entre outros. Dos fatores apontados, em nossa prática docente frequentemente encontramos, na sala de aula, a aversão à temática álgebra pelos alunos durante o processo de ensino e aprendizagem. Devido à dificuldade de aprendizagem que os alunos apresentam quanto aos conceitos algébricos, parece que muitos deles acabam relacionando a álgebra a atitudes negativas, impedindo ainda mais sua aprendizagem. Com isso, encontramos vários conceitos da álgebra, porém, na sua maioria, relacionados a atitudes negativas, tais como:

A álgebra “é uma fonte de confusão e atitudes negativas consideráveis entre os alunos”. Esse comentário faz parte de um estudo, feito na Inglaterra, de recordações de adultos sobre suas experiências ao aprender matemática na escola (Universidade de Bath, 1982). (BOOTH, 1995, p.23).

Parece que, para muitos alunos, há uma ideia em torno da álgebra como “abstrata e de difícil entendimento” e, portanto, é revelada uma dificuldade maior no entendimento e construção dos conceitos algébricos em sala de aula, refletindo em baixos índices de desempenho nas avaliações externas.

Tradicionalmente, no Brasil, o ensino da álgebra tem início no sétimo ano do Ensino Fundamental - Anos Finais, quando as “letras” são apresentadas em tarefas com a função de representar valores desconhecidos que, por meio da manipulação dos operadores conforme o enunciado da tarefa, podem ser encontrados. Assim, podemos observar que o ensino da álgebra é apresentado para os alunos de forma fragmentada, por tópicos a serem cumpridos e ensinados conforme o planejamento escolar durante o ano letivo.

Recentemente, em 2019, foi implementada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), trazendo uma reformulação na estrutura do currículo e planejamento no componente da disciplina de matemática. Entre essas alterações do currículo, encontramos a álgebra como uma unidade temática que se faz presente desde o Ensino

Fundamental nos Anos Iniciais até o Ensino Médio, ou seja, a noção de conceitos algébricos é apresentada para os alunos de forma gradativa ao longo da formação:

A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos [...]. Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade (BNCC, 2019, p.270).

O ensino de álgebra parece estar associado a muitos fatores que determinam a visão do professor a esse respeito. A visão do ensino de álgebra mais comum parece ainda consistir no trabalho mecânico com expressões (monômios, polinômios, frações algébricas, expressões com radicais...) e processos de resolução de equações do 1º e 2º grau e sistemas de equações, conforme a terminologia usada em programas da década de 1990, (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

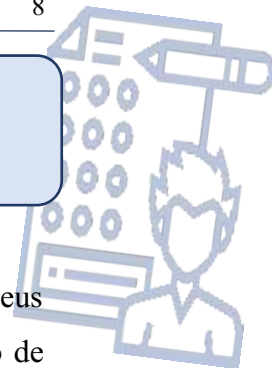
Alguns autores assumem a perspectiva de que o objeto central da álgebra são os símbolos, o que se define pelo uso da linguagem algébrica, fazendo sentido trabalhar com a manipulação dos símbolos e das expressões algébricas.

Parece que, para muitos alunos, há uma ideia em torno da álgebra como “abstrata e de difícil entendimento”, o que revela dificuldade maior no entendimento e construção dos conceitos algébricos em sala de aula, refletindo em baixos índices de desempenho nas avaliações externas.

Com isso, em busca de propor uma alternativa pedagógica para os professores poderem aplicar em sala de aula e a fim construir uma proposta de ensino diferenciada sobre o conteúdo de álgebra para os alunos do Ensino Fundamental - Anos Finais, desenvolvemos este produto educacional sobre TAPE para o ensino de equações do 1º grau com uma incógnita.

Nossa intenção é levar uma proposta de tarefas para a sala de aula, nas aulas convencionais de matemática, de modo a promover discussões coletivas entre os alunos, de forma construtiva e significativa, incentivando o diálogo entre eles, por meio de suas próprias resoluções. Por isso, este material apresenta nos capítulos a seguir uma contextualização sobre análise da produção escrita; o conceito de TAPE; o material elaborado com as TAPE; as etapas de aplicação das TAPE em sala de aula; e uma mensagem final.

Análise da Produção Escrita



A fim de que os alunos construam o conhecimento ativamente com base em seus conhecimentos prévios, encontramos na produção escrita um instrumento poderoso de reflexão sobre o pensamento e o raciocínio desenvolvido na construção do significado matemático na realização das tarefas, permitindo a eles expressarem, de forma ativa, seus próprios conhecimentos e entendimentos de conceitos.

A análise da produção escrita tem sido uma das linhas de investigação do GEPEMA (Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL-Londrina/PR), que tem desenvolvido pesquisas desde 2005 com essa temática. A partir do ano de 2006, foram defendidas pelo GEPEMA dissertações que tiveram como objeto de estudo a produção escrita de professores de matemática e de alunos de diferentes níveis de escolaridade, tanto com questões rotineiras quanto não rotineiras de matemática.

Com isso, percebemos que a análise da produção escrita permite, no processo de ensino e aprendizagem, o envolvimento efetivo tanto dos professores quanto dos alunos, de modo colaborativo, na construção da aprendizagem, permitindo a estes a reflexão acerca de sua prática de conceitos, desenvolvendo a confiança e a motivação para fazer e entender os conteúdos matemáticos. Pensando nisso, Santos (2014) ressalta que foi possível considerar a abordagem de análise da produção escrita como:

[...] uma estratégia de ensino - centrada no meio, ou seja, na produção escrita - que pode ser utilizada pelo professor para obter informações a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática de modo que elas possam subsidiar o processo de elaboração de intervenções, comentários e/ou questionamentos na produção do aluno para que ele possa ser autor do seu próprio conhecimento (SANTOS, 2014, p. 69 - 70).

Santos (2014) considera que a “estratégia de ensino diz respeito às decisões ou ações tomadas pelo professor e possui uma dimensão de planejamento e uma dimensão de execução”. Na dimensão de planejamento, a autora refere-se ao plano de “o que” e “como” deve ser feito, e, na dimensão da execução, refere-se à ação do que foi planejado. Desse modo, para que a estratégia de ensino seja realizada na prática, faz-se necessária a utilização de meios de ensino, que são recursos, de qualquer natureza, que têm a função de auxiliar o trabalho do professor (SANTOS, 2014, p.52).

A análise da produção escrita é uma ferramenta que permite ao professor diagnosticar, por meio das respostas dadas pelos alunos, vários fatores que influenciam na aprendizagem matemática, conforme os critérios de correção por ele estabelecidos.

A utilização da análise da produção escrita como estratégia de ensino promove uma dinâmica de aula de matemática um pouco diferente da tradicional, e isso requer, de todos os envolvidos no processo, mobilização, incentivo e planejamento flexível, principalmente do professor, mediador de toda a situação.

Para a construção do presente material, propusemos, na análise da produção escrita dos alunos, manter alguns critérios como base, tais como: a leitura e a retirada dos dados do enunciado pelo aluno; o raciocínio e/ou a estratégia adequada usada na resolução pelo aluno; a resolução correta do raciocínio usado na resolução; e a resposta correta da questão. Acrescentamos que há outros critérios para a análise da produção escrita, podendo o professor usá-los ou não, conforme o objetivo a ser atingido pela proposta da tarefa; no entanto, acreditamos que, para a formação de Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE), é interessante que o aluno observe uma resolução correta referente ao conteúdo apresentado, a fim de que ele não seja induzido ao entendimento incorreto da questão, sabendo que tal compreensão faz parte de uma proposta de ensino do conteúdo.

Tarefas de Análise da Produção Escrita- TAPE

As ideias e sugestões de Santos (2014) conduziram os estudos posteriores de Cardoso e Dalto (2016; 2017a; 2017b) e Cardoso, Pereira e Dalto (2017), que se propuseram a utilizar a análise da produção escrita como fio condutor das aulas de matemática. Para isso, foi proposta a Tarefa de Análise da Produção Escrita (TAPE), caracterizada como uma tarefa que surge a partir



O que é uma TAPE ?



[...] de uma produção escrita previamente analisada pelo professor, de modo que sua construção tenha sido no cerne desta produção escrita, tudo nele(a) proposto esteja envolto ao objetivo de se analisar tal produção escrita, norteando o ensino e a aprendizagem de determinado conteúdo, configurando-se como uma tarefa de questionamentos, reflexões, de comparação e discussão quanto aos diferentes pontos de vista e procedimentos que permitem solucionar as situações (PEREIRA; DONEZE; DALTO, 2018, p.240).

Com base no trabalho de Cardoso (2017), Pereira (2019) investigou quais conhecimentos são mobilizados por graduandos e professores, em um ambiente de discussão e construção de TAPE. Os dados analisados foram obtidos a partir de um curso de extensão destinado a professores e futuros professores de matemática da Educação Básica. O curso de extensão contou com três momentos:

- ✓ o primeiro momento ocorreu de forma assíncrona individual na modalidade a distância (EAD), no qual os participantes deveriam responder um formulário acerca da análise da produção escrita como uma estratégia de ensino e como estratégia de avaliação;
- ✓ o segundo momento se deu de forma síncrona, na UTFPR Campus Cornélio Procopio, e nele foram propostas a apresentação, a discussão e a reflexão sobre a temática do curso e a elaboração de TAPE;
- ✓ o terceiro momento, de forma assíncrona individual na modalidade a distância (EAD), permitiu aos participantes relatarem e analisarem suas experiências com a aplicação da TAPE.

Pereira (2019) pretendeu identificar os conhecimentos mobilizados por graduandos e professores que ensinam matemática a partir das TAPE: Conhecimento Especializado do Conteúdo, Conhecimento do Conteúdo e do Estudante e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, segundo as caracterizações de Ball, Thames e

Phelps (2008)¹. O autor pode verificar em sua pesquisa que o Conhecimento Especializado do Conteúdo foi mais mobilizado pelos participantes que já atuam em sala de aula, tanto para professores especialistas na área quanto para os professores pedagogos.

Doneze (2019) analisou o processo de construção de TAPE, desenvolvendo a pesquisa em dois momentos: no primeiro, aplicou as TAPE sobre números e álgebra com uma turma de Educação de Jovens e Adultos (EJA) do Ensino Fundamental - Anos Finais, no qual pode salientar que o contato na elaboração das TAPE e a aplicação com os alunos foram procedimentos importantes para a elaboração do curso de extensão intitulado “Tarefas de Análise da Produção Escrita como oportunidade de Ensino e aprendizagem de Matemática”; logo após, o segundo momento foi o de análise do processo de construção das TAPE, as quais foram elaboradas pelos participantes do curso de extensão organizado e aplicado por Pereira e Doneze, em 2018, na UTFPR Campus de Cornélio Procópio, com graduandos e professores da Educação Básica. Neste curso, Doneze procura investigar e caracterizar todo o processo de construção de TAPE.

Minato (2019), em sua pesquisa de Trabalho de Conclusão de Curso, elaborou uma proposta de ensino sobre o conteúdo de progressão geométrica, com base em TAPE. Para a elaboração das TAPE, as produções escritas foram obtidas por meio da aplicação de tarefas com alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR Campus Cornélio Procópio, durante o segundo semestre do ano letivo de 2018. Após a coleta de produções escritas, foi elaborada uma proposta contendo 12 (doze) TAPE para o ensino de progressões geométricas. As tarefas formam uma sequência em que os objetivos e o nível de complexidade de habilidade e/ou entendimento sobre o assunto variam de forma gradativa durante o desenvolvimento da proposta apresentada.

Pereira (2021) investigou a utilização da análise da produção escrita como estratégia de ensino para a aprendizagem do conteúdo de análise combinatória, voltada para alunos do Ensino Médio. A pesquisa de mestrado ocorreu em três momentos:

- no primeiro, foi realizada a coleta de produções escritas, durante o último trimestre do ano letivo de 2019, com quatro turmas do 2º ano do Ensino Médio;
- no segundo, foram produzidas as TAPE, no início de 2020;

¹ SCK - Specialized Content Knowledge (Conhecimento Especializado do Conteúdo); KCS - Knowledge Content and Students (Conhecimento do Conteúdo e do Estudante) e KCT - Knowledge Content and Teaching (Conhecimento do Conteúdo e do Ensino), conforme o Conhecimento Matemático para o Ensino – MKT segundo denominação de Ball, Thames e Phelps (2008).

- no terceiro e último, foi realizado o ensino de Análise Combinatória, de forma presencial e remota, com o uso das TAPE com os alunos do Ensino Médio.

A proposta de Pereira (2021) foi desenvolvida em um momento atípico de pandemia da COVID-19 e, por isso, a aplicação das tarefas elaboradas pela autora ocorreu em momentos presencial e remoto assíncrono. Para a autora, a pesquisa mostrou que a “elaboração das TAPE, a partir de produções genuínas de alunos, contribui para que o estudante que responder aos questionamentos das TAPE se identifique com tal escrita, resolução e resposta” (PEREIRA, 2021, p. 64).

As TAPE podem ser utilizadas pelo professor na avaliação, pois possibilitam a ele conhecer como seus alunos resolvem as questões propostas, de modo a descobrir dos seus alunos que tipo de conhecimento e/ou habilidade apresentam sobre o conteúdo, como interpretam o enunciado das questões, como lidam com a transposição do conteúdo matemático para a linguagem corrente, entre muitos outros aspectos.



Ressaltamos que as TAPE podem auxiliar os professores durante suas aulas, promovendo o significado do conteúdo matemático para o aluno, pois, uma vez que este se depara com a escrita de outro aluno, por linguagem simbólica ou palavras, pode identificar as semelhanças de linguagem, trazendo significado ao que ele está escrevendo enquanto realiza a análise da produção escrita de outro colega.

Material elaborado com as TAPE

Para a elaboração das Tarefas de Análise da Produção Escrita – TAPE, primeiramente coletamos produções escritas de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal, com base no conteúdo de equações do 1º grau com uma incógnita. Na Figura 1, temos a proposta da tarefa com uma lista de questões sobre o conteúdo de equações do 1º grau com uma incógnita que foi aplicado para uma turma de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental - Anos Finais de uma escola municipal, na cidade de Ourinhos, estado de São Paulo, na qual a pesquisadora é também professora efetiva de matemática da turma.



A escolha da turma do 9º ano do Ensino Fundamental para participação na pesquisa ocorreu pelo fato de a pesquisadora/professora lecionar para tal grupo, e, assim, ter contato direto com as produções escritas desses alunos, e também com a capacidade de escrita que os alunos do 9º ano poderiam desenvolver, já que eles haviam, pelo menos, ouvido falar sobre o conteúdo de equação do 1º grau com uma incógnita, pois nas turmas de 7º e 8º anos esse conteúdo é parte integrante no planejamento curricular dos professores, segundo o currículo escolar vigente. Com isso, supomos que esses alunos do 9º ano poderiam apresentar produções de escritas consistentes em termos de entendimento e compreensão do conteúdo matemático.

Assim, para a lista de tarefas matemáticas a serem aplicadas com a turma de 9º ano, elaboramos 4 (quatro) questões cujos enunciados apresentassem uma situação-problema que induzisse e/ou levasse os alunos a resolverem com uma linguagem simbólica algébrica. Tivemos o intuito de promover o desenvolvimento da manipulação de símbolos algébricos na resolução de uma equação do 1º grau com uma incógnita. Assim, procuramos enunciados com situações-problema que envolvessem os alunos por meio de linguagem simples e cotidiana; também procuramos situações-problema que se apresentam em material didático com certa frequência, como foi o caso da questão 4 (Figura 1), tendo em vista que a maioria dos livros didáticos de matemática apresentam enunciados que trazem “as idades de personagens como valores desconhecidos a serem procurados”.



Ainda, na lista de tarefas, acrescentamos, na questão 5 (Figura 1), uma questão de resolução de algoritmo de equação do 1º grau em alguns itens, tais como: apresentar

a incógnita em apenas em um dos membros da igualdade, com a intenção realizar a manipulação correta da noção de equivalência na igualdade; trazer incógnitas nos dois membros da igualdade, visando chamar a atenção para a noção de equivalência e para os princípios aditivo e multiplicativo na resolução; por fim, elencar um item que apresentasse a propriedade distributiva na resolução da equação do 1º grau com uma incógnita.

Com a tarefa já formulada, a professora/pesquisadora explicou, para a turma de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, sobre a importância do projeto de mestrado e a coleta das produções escritas. Os alunos concordaram com a proposta do projeto de mestrado e levaram para seus responsáveis toda a documentação e explicação dos procedimentos necessários para o andamento da pesquisa.

Logo após esse momento, estabeleceu-se, em acordo com os alunos, uma data para a aplicação da lista de tarefas. No momento da aplicação, a professora/pesquisadora não interferiu nas respostas dadas pelos alunos, pois todo o conteúdo proposto na tarefa já tinha sido ensinado nos anos anteriores, tal qual no retorno das aulas para o modo presencial, ocorrido em setembro (devido à pandemia do COVID-19, a professora fez uma revisão do conteúdo). Na Figura 1, temos a tarefa que foi aplicada para a coleta de produção escrita com os alunos do 9ºano do Ensino Fundamental.

Figura 1- Tarefa aplicada para a coleta de produções escritas dos alunos

	PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA	APLICAÇÃO DA TAREFA DE MATEMÁTICA ELABORADA PARA O PROJETO DE PESQUISA DE MESTRADO – 9ºANOS –	
Aluno(a): _____		Data: ___/___/___	
<p>1) Mariana tem o dobro de figurinhas de Gabriela. As duas juntas têm 75 figurinhas. Quantas figurinhas tem cada uma?</p> <p>Resposta:</p> <div style="border: 1px solid black; height: 60px; margin-top: 5px;"></div>			
<p>2) Somando o dobro de um número ao seu triplo, obtemos 125. Que número é esse?</p> <p>Resposta:</p> <div style="border: 1px solid black; height: 60px; margin-top: 5px;"></div>			
<p>3) Em uma caixa há balas e pirulitos, num total de 60 unidades. Sabendo que há 10 pirulitos a mais do</p>			

que o número de balas. Qual é a quantidade de pirulitos que tem na caixa?

Resposta:

- 4) Guilherme tem 5 anos a mais que Tiago. Somando as idades dos dois juntos dá 43anos. Quantos anos de idade tem cada um?

Resposta:

- 5) Determine a solução das equações do 1º grau com uma incógnita, sendo $U = R$.

a) $2x - 3 = 25$

Resposta:

b) $5x + 21 = 10x - 19$

Resposta:

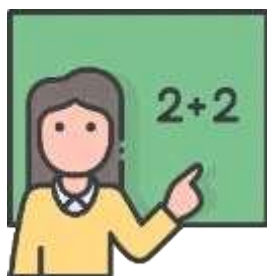
c) $6(x + 1) = 5(x - 2)$

Resposta:

Fonte: Autoria própria (2022)

Após esta primeira etapa, os autores deste produto educacional fizeram uma análise das produções escritas dos alunos, selecionando apenas as tarefas que continham questões com as resoluções corretas, de modo que estas contribuiriam com a elaboração das TAPE para o ensino do conteúdo, da forma como sugere Doneze:

Uma Tarefa de Análise da Produção Escrita deve ser elaborada centrada em produções escritas que permitam ao professor elaborar questionamentos investigativos e reflexivos para seus alunos, de modo a auxiliar na construção de seus conhecimentos, podendo a tarefa ser composta por uma única produção escrita, duas ou mais, de modo que venha contribuir, gerando possibilidades que conduzem a um ambiente reflexivo e de interação (DONEZE, 2019, p.67).



Após a realização da análise da produção escrita dos alunos com a aplicação da tarefa proposta, os autores elaboraram 5 (cinco)

TAPE para o ensino de equações do 1º grau com uma incógnita, apresentadas a seguir. Apresentamos, também, o Quadro 1, com algumas orientações metodológicas, a fim de guiar e/ou auxiliar o professor no planejamento das TAPE, descrevendo alguns itens, tais como os conteúdos abordados, o segmento de ensino a ser aplicado, as habilidades que a tarefa contempla - conforme a BNCC (2019) -, a metodologia e o material a serem utilizados, e o tempo previsto para a realização da tarefa.

Quadro 1- Orientações Metodológicas

Orientações Metodológicas	
Conteúdos abordados	Equação do 1º grau com uma incógnita
Segmento	7ºano do Ensino Fundamental - Anos Finais
Habilidades (BNCC)	<p><i>Requisitos prévios:</i></p> <p>(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.</p> <p>(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.</p> <p>(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.</p> <p>(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.</p> <p>(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.</p> <p><i>Habilidade a ser desenvolvida com a tarefa:</i></p> <p>(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.</p>
Metodologia	Trabalho individual
Recursos (materiais didáticos)	<ul style="list-style-type: none"> • Folha com a tarefa proposta impressa para os alunos; • Lousa, giz e apagador; • Lápis, caneta e borracha para os alunos;

<i>Tempo previsto</i>	aproximadamente 1 hora/aula (55 minutos) para cada TAPE
-----------------------	---

Fonte: Autoria própria (2022)

Dando sequência, o segundo momento ocorreu entre os meses de outubro e novembro de 2021, e nele, foram produzidas as TAPE que compõem o produto educacional atrelado à pesquisa, cuja aplicação é analisada neste trabalho. As produções escritas obtidas nesse momento foram analisadas, e algumas delas, selecionadas para a elaboração das TAPE. Esta seleção foi feita a partir de alguns critérios: a leitura e a retirada dos dados do enunciado pelo aluno; o raciocínio e/ou a estratégia adequada usada na resolução; a resolução correta e a apresentação de uma resposta correta para a questão.

Procuramos abarcar resoluções diversas que chegassem à resposta correta, com vistas a não induzir a raciocínio errado o aluno que estava sendo guiado para a compreensão do conteúdo pela primeira vez, a partir da resolução da TAPE. Acrescentamos aqui que há outros critérios a serem inseridos para a seleção de produções escritas, que dependem do objetivo que o professor deseja atingir. Como resultado desse momento, foram elaboradas 5 (cinco) TAPE para o ensino de equações do 1º grau com uma incógnita, destinadas a alunos do 7º ano, a partir das produções escritas dos alunos do 9º ano.

Durante a construção das TAPE, elaboramos perguntas descritivas para cada questão apresentada, com a intenção de que o aluno pudesse construir o seu raciocínio matemático seguindo a compreensão e o entendimento da resolução que se apresentava. Assim, cada TAPE continha vários itens com perguntas norteadoras que descrevessem o passo a passo de cada procedimento matemático apresentado na resolução, dando sequência à construção do raciocínio dos alunos. Como resultado desse momento, foram elaboradas sete TAPE para o ensino de equações do 1º grau com uma incógnita, destinadas a alunos do 7º ano, a partir das produções escritas dos alunos do 9º ano.

O terceiro momento, a aplicação das TAPE no ensino de equação do 1º grau com uma incógnita, ocorreu entre o final do mês de novembro e o início de dezembro de 2021. Tal etapa se deu de modo presencial, com 2 (duas) turmas de 7º ano da mesma escola municipal de Ourinhos/SP. As duas turmas de 7º ano do Ensino Fundamental foram contempladas com a aplicação das TAPE por serem turmas em que pesquisadora/professora leciona, e também pelo fato de que, no planejamento escolar, as turmas do 7º ano tinham na programação curricular para o 2º semestre o

desenvolvimento do conteúdo de equação do 1º grau com uma incógnita, o que facilitou o desenvolvimento da proposta da pesquisa de mestrado da professora/pesquisadora.

Nesse momento, usamos as TAPE para o ensino do conteúdo de equações do 1º grau com uma incógnita e, durante a aplicação, os alunos foram incentivados a escrever suas respostas nas TAPE, da maneira que pudessem expressar por palavras escritas ou por símbolos matemáticos todo o raciocínio matemático que descrevesse detalhadamente a resolução de cada questão.

As TAPE que foram elaboradas e aplicadas serão apresentadas a seguir, cada uma com o respectivo objetivo e comentários.

TAPE 1

Objetivo da TAPE 1: Fazer com que o aluno identifique a quantidade de figurinhas de Mariana e Gabriela com a representação algébrica, e que compreenda que o resultado da equação é a quantidade de figurinhas de Gabriela.

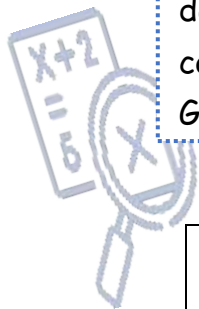


Figura 2 - TAPE 1

João tinha que resolver a seguinte questão: Mariana tem o dobro de figurinhas de Gabriela. As duas juntas têm 75 figurinhas. Quantas figurinhas tem cada uma?

Resolução correta do João

Resposta:
 $M = 2x$
 $G = x$
 $2x + x = 75$
 $3x = 75$
 $x = \frac{75}{3}$
 $x = 25$

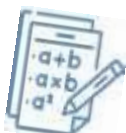
R: Mariana tem 50 figurinhas e a Gabriela tem 25.

Com base nas informações acima, responda:

- Por que João escreveu $M = 2x$ e $G = x$?
- O que parece que João quis dizer quando escreveu $2x + x = 75$?
- Que operação foi feita para que aparecesse $3x = 75$?
- Quando João escreve $x = 25$, o que ele descobriu? O que isso tem a ver com a quantidade de figurinhas de Mariana e Gabriela?

Fonte: Autoria própria (2022)

Conforme mostra a Figura 2, a intenção da TAPE 1, do item (a) dessa tarefa, é fazer com que o aluno observe a descrição dos dados do enunciado para a linguagem algébrica tais como $M = 2x$ (quer dizer que Marina tem a quantidade de 2 (duas) vezes de um valor desconhecido de figurinhas, ou tem o dobro da quantidade de figurinhas de Gabriela); e $G = x$ (quer dizer que Gabriela tem uma quantidade de valor desconhecido de figurinhas). O item (b) pretende fazer com que o aluno transcreva da linguagem escrita em palavras para a representação algébrica de uma equação polinomial do 1º grau da forma $ax + b = c$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, fazendo uso adequado das propriedades de igualdade. O item (c) requer do aluno a observação do uso da operação da adição entre os termos semelhantes de uma equação do 1º grau. Por fim, o item (d) solicita do aluno o entendimento que o termo x representa a incógnita de um valor desconhecido a ser procurado (no caso, a quantidade de figurinhas).



TAPE 2

Objetivo da TAPE 2: Fazer com que o aluno identifique o dobro e o triplo de número desconhecido como sendo os múltiplos de 2 e 3, escrevendo corretamente a representação algébrica e sabendo calcular a equação usando o princípio multiplicativo.

Figura 3 - TAPE 2

A professora de Maria propôs a seguinte questão: Somando o dobro de um número ao seu triplo, obtemos 125. Que número é esse?

Resolução correta da Maria

Resposta:

$$2x + 3x = 125$$

$$5x = 125$$

$$x = \frac{125}{5}$$

$$\boxed{x = 25}$$

R. O número é 25.

Com base nas informações acima, responda:

- Como está representado na resolução o dobro de um número?
- Como está representado na resolução o triplo de um número?
- Por que a resolução apresenta a expressão $5x$?
- Como você resolveria esta tarefa de forma diferente da que foi apresentada? Mostre sua resolução aqui abaixo.

Fonte: Autoria própria (2022)

A figura 3 mostra a TAPE 2. No item (a) dessa tarefa, a intenção é que o aluno consiga descrever o termo “dobro” como o múltiplo de 2 de um valor desconhecido, sabendo escrever essa informação em linguagem algébrica. A mesma intenção do item (a), temos no item (b), porém, com a descrição do múltiplo de 3 com o termo “triplo”. O item (c) requer que o aluno identifique o comando da operação da adição de termos semelhantes expressos na igualdade da equação do 1º grau. Por fim, o item (d) solicita que o aluno procure raciocinar sobre a resolução da questão de modo diferente da resposta apresentada, podendo se expressar com um raciocínio aritmético e/ou algébrico para chegar à resolução correta da questão; este item instiga o aluno no processo de aprendizagem do conteúdo, desafiando-o a encontrar novos raciocínios matemáticos.

TAPE 3



Objetivo da TAPE 3: Identificar e saber escrever para a linguagem algébrica as informações fornecidas pelo enunciado, sabendo resolver corretamente a equação desenvolvida, usando os princípios aditivo e multiplicativo.

Figura 4 - TAPE 3

Em uma caixa há balas e pirulitos, num total de 60 unidades. Sabendo que há 10 pirulitos a mais do que o número de balas, qual é a quantidade de pirulitos que tem na caixa?

Resolução correta do Antônio

Resposta:

Balas: $x = 25$
 Pirulitos: $x + 10 = 25 + 10 = 35$

$$x + x + 10 = 60$$

$$2x = 60 - 10$$

$$x = \frac{50}{2}$$

$$x = 25$$

Sol: $\begin{array}{r} 25 \\ +10 \\ \hline 35 \end{array}$ $\begin{array}{r} 50 \\ 2 \\ \hline 25 \end{array}$

R: A quantidade de balas são de 25 e os pirulitos são 35

Observando a resolução correta do Antônio, responda:

- O que o “ x ” na equação representa?
- Por que na resolução aparece “ $x + x + 10$ ”? Explique sua resposta.
- Como surgiu a expressão “ $2x$ ” na equação? Explique sua resposta.
- No lado esquerdo do sinal de igual, por que na segunda linha da equação ficou apenas “ $2x$ ”?
- Por que na resolução apareceu $60 - 10$?
- Como você resolveria esta tarefa de forma diferente da que foi apresentada? Mostre sua resolução aqui abaixo.

Fonte: Autoria própria (2022)

A TAPE 3, conforme apresentada na figura 4, tem por intento, no item (a), mostrar para o aluno a transcrição de linguagem escrita em palavras de um valor desconhecido para a linguagem algébrica, a qual mostra para o aluno o significado da incógnita como um valor qualquer desconhecido a ser calculado. No item (b), pretende-se que o aluno descreva uma

expressão algébrica, por meio da leitura do enunciado, em palavras, transcrevendo da linguagem escrita em palavras para a linguagem algébrica. O item (c) pretende fazer com que o aluno verifique os termos semelhantes na expressão algébrica e simplifique-a, por meio da adição de termos semelhantes entre termos algébricos. Os itens (d) e (e) requerem do aluno o entendimento dos princípios aditivo e multiplicativo na igualdade de uma equação do 1º grau com uma incógnita. O item (f) solicita que o aluno procure raciocinar sobre a resolução da questão de modo diferente da resposta apresentada, podendo se expressar com um raciocínio aritmético e/ou algébrico para chegar à resolução correta da questão; este item instiga o aluno no processo de aprendizagem do conteúdo, desafiando-o a buscar novos raciocínios matemáticos.

TAPE 4



Objetivo da TAPE 4: Identificar e saber escrever em linguagem algébrica as informações fornecidas pelo enunciado, sabendo resolver corretamente a equação desenvolvida, usando os princípios multiplicativo e aditivo.

Figura 5 - TAPE 4

Guilherme tem 5 anos a mais que Tiago. Somando as idades dos dois juntos, dá 43 anos. Quantos anos de idade tem cada um?

Resolução correta da Marcela

Resposta:

Guilherme = $x + 5 = 19 + 5 = 24$
 Tiago = $x = 19$

$$x + 5 + x = 43$$

$$2x = 43 - 5$$

$$2x = 38$$

$$x = \frac{38}{2}$$

$$x = 19$$

$38 \overline{) 2}$
 18
 18
 0

R. Guilherme tem 24 e Tiago 19

Observando a resolução correta da Marcela, responda:

- O que o “ x ” na equação representa?
- Por que na resolução aparece “ $x + 5 + x$ ”? Explique sua resposta.
- Como surgiu a expressão “ $2x$ ” na equação? Explique sua resposta.
- No lado esquerdo do sinal de igual, porque na segunda linha da equação ficou apenas “ $2x$ ”?
- Por que na resolução apareceu $43 - 5$?
- Por que apareceu na terceira linha da equação a expressão $x = \frac{38}{2}$?
- Como você resolveria esta tarefa de forma diferente da que foi apresentada? Mostre sua resolução aqui abaixo.

Fonte: Autoria própria (2022)

Na Figura 5, temos a TAPE 4, cuja intenção de cada item é semelhante às intenções descritas na TAPE 3. O que difere uma da outra é o enunciado, com uma linguagem escrita com termos mais simples e presente no dia a dia (como o cálculo de idades das pessoas); o enunciado

também pode sugerir que o aluno desenvolva o raciocínio algébrico com o desenvolvimento da escrita em termos aritméticos para resolver a questão.

Na TAPÉ 4, no item (a), a intenção é mostrar para o aluno a transcrição, de linguagem escrita em palavras para a linguagem algébrica, de um valor desconhecido, o que mostra para o aluno a incógnita como um valor qualquer desconhecido a ser calculado. Encontramos na vertente simbólica da álgebra a corrente de *visão letrista*, na expressão de Lins e Gimenez (1997), que reduz a álgebra à manipulação correta dos símbolos recorrendo a apoios intuitivos, de carácter geométrico (como figuras, objetos) ou físico (como a balança), com os quais procura dar-se significado às manipulações. O item (b) pretende que o aluno descreva uma expressão algébrica, por meio da leitura do enunciado em palavras, transcrevendo da linguagem escrita em palavras para a linguagem algébrica. O item (c) propõe que o aluno verifique os termos semelhantes na expressão algébrica e simplifique-a, por meio da adição de termos semelhantes entre termos algébricos. Os itens (d), (e) e (f) requerem do aluno o entendimento dos princípios aditivo e multiplicativo na igualdade de uma equação do 1º grau com uma incógnita. O item (g) solicita que o aluno procure raciocinar sobre a resolução da questão de modo diferente da resposta apresentada, podendo se expressar com um raciocínio aritmético e/ou algébrico, trazendo resposta na linguagem simbólica por números e/ou letras, para chegar à resolução correta da questão; este item instiga o aluno no processo de aprendizagem do conteúdo, desafiando-o a buscar raciocínios matemáticos distintos do apresentado na resolução.

TAPE 5

Objetivo da TAPE 5: Saber resolver as equações do 1º grau com uma incógnita, usando o princípio aditivo e multiplicativo para encontrar o valor da incógnita procurada.



TAPE 5-1

Figura 6 - TAPE 5-1

Determine a solução das equações do 1º grau com uma incógnita, sendo $U = \mathbb{R}$.

$$2x - 3 = 25$$

Resolução correta do Miguel

Resposta:

$$2x = 25 + 3$$

$$2x = 28$$

$$1x = 14$$

Resolução correta do Reginaldo

Resposta:

$$2x - 3 = 25$$

$$2x = 25 + 3$$

$$2x = 28$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{28}{2}$$

$$x = 14$$

Comparando as duas resoluções, responda:

- O que tem de diferente entre as resoluções do *Miguel* e do *Reginaldo*?
- Por que, na resolução do *Miguel*, apareceu a expressão “ $1x$ ”? Esta anotação tem o mesmo significado da expressão “ x ”? Explique sua resposta.
- Por que na resolução do *Reginaldo* apareceu $x = \frac{28}{2}$, e na resolução do *Miguel* não apareceu?
- Por que *Miguel* escreveu na segunda linha da equação a expressão $2x = 28$, e logo depois colocou $1x = 14$?

A Figura 6 mostra a TAPE 5-1, que foi elaborada com a intenção de o item (a) requerer do aluno o entendimento dos princípios aditivo e multiplicativo na equação do 1º grau: quando o aluno faz a comparação entre as duas respostas, ele pode verificar que ambas estão corretas, sendo que a diferença entre elas é apenas a descrição detalhada dos comandos das operações apresentadas. O item (b) faz com que o aluno explore o termo algébrico $1x$ ou x , identificando o coeficiente e a parte literal nos termos que são semelhantes. O item (c) indica o princípio multiplicativo na resolução e, fazendo a comparação entre as respostas dadas, pode-se verificar que na primeira são mostrados detalhadamente todos os passos, enquanto a segunda já demonstra direto a resolução, chegando também à resposta correta. No item (d), tenciona-se mostrar para o aluno o conceito de múltiplos dos termos, como $2x = 28$ (o dobro de um número qualquer desconhecido é igual 28), logo, por razão e proporção, $1x = 14$ (um número qualquer desconhecido é igual a 14). Assim, o aluno, nessa situação, deve perceber que seria a metade do valor anterior, ou seja, que o valor de $1x = 14$ (o valor de um número qualquer desconhecido é igual a 14).



TAPE 5-2

Figura 7 - TAPE 5-2

Determine a solução da equação do 1º grau com uma incógnita, sendo $U = \mathbb{R}$.

$$5x + 21 = 10x - 19$$

Resolução correta do Ricardo

Resposta:

$$5x - 10x = -19 - 21$$

$$5x = 40$$

$$x = \frac{40}{5}$$

$$x = 8$$

Observando a resolução correta do *Ricardo*, responda:

- Por que *Ricardo* escreveu $5x - 10x = -19 - 21$?
- Por que *Ricardo* colocou na segunda linha $5x$ sabendo que $5x - 10x = -5x$? E também, sabendo que $-19 - 21 = -40$, ele colocou igual a 40 ?
- Por que $x = \frac{40}{5}$?
- Você consegue resolver esta tarefa com uma resolução diferente da que foi apresentada? Como? Mostre sua resolução aqui abaixo.

Fonte: Autoria própria (2022)

A Figura 7 mostra a TAPE 5-2, elaborada com a intenção de que o aluno, ao resolver o item (a), perceba a propriedade da igualdade de uma Equação do 1º grau com a separação dos termos semelhantes entre os dois membros, utilizando de forma correta o princípio aditivo entre os membros da igualdade. Já o item (b) pretende mostrar a correspondência de ambos os membros com a troca de sinal dos termos, novamente deixando bem claro para o aluno a propriedade da igualdade na equação do 1º grau. O item (c) requer o entendimento do princípio multiplicativo na propriedade da igualdade de uma Equação do 1º grau. Por fim, o item (d) solicita que o aluno procure raciocinar sobre a resolução da questão de modo diferente, podendo se expressar com uma linguagem simbólica por números e/ou letras para chegar à resolução correta da questão; este item instiga o aluno no processo de aprendizagem do conteúdo, desafiando-o a buscar raciocínios matemáticos distintos do apresentado na resolução.

TAPE 5-3



Figura 8 - TAPE 5-3

Determine a solução da equação do 1º grau com uma incógnita, sendo $U = \mathbb{R}$.

$$6(x + 1) = 5(x - 2)$$

Resolução correta do Rodrigo

Resposta:

$$\begin{aligned} 6(x+1) &= 5(x-2) \\ 6x+6 &= 5x-10 \\ 6x-5x &= -10-6 \\ x &= -16 \end{aligned}$$

Observando a resolução correta do *Rodrigo*, responda:

- O que *Rodrigo* fez para que na segunda linha aparecesse $6x + 6 = 5x - 10$?
- Por que *Rodrigo* escreveu na terceira linha $6x - 5x = -10 - 6$?
- Você consegue resolver esta tarefa com uma resolução diferente da que foi apresentada? Como? Mostre sua resolução aqui abaixo.

Fonte: Autoria própria (2022)

A Figura 8 traz a TAPE 5-3, cujo item (a) requer do aluno a compreensão da propriedade distributiva da multiplicação. No item (b), o aluno tem que observar o princípio aditivo na igualdade da equação do 1º grau, com uso da separação de maneira correta dos termos semelhantes em ambos os membros da igualdade, resolvendo corretamente os operadores para chegar à resposta esperada. Por fim, o item (c) solicita que o aluno procure raciocinar sobre a resolução da questão de modo diferente da resposta apresentada, podendo se expressar com um raciocínio aritmético e/ou algébrico para chegar à resolução correta da questão; este item instiga o aluno no processo de aprendizagem do conteúdo, desafiando-o a novos raciocínios matemáticos.

Versão das TAPE para o aluno

Para a aplicação das TAPE durante as aulas de Matemática, elaboramos uma versão pronta para o professor aplicar suas aulas. Nessa versão, acrescentamos logo após cada questão um quadro com o campo indicativo de “*Resposta*”, para que o aluno visualize e compreenda que, nesse campo específico, ele deverá descrever todo seu raciocínio matemático, o levantamento de hipóteses, as operações a serem desenvolvidas e as possíveis soluções quanto à pergunta elaborada, podendo apresentar a escrita de modo livre, com palavras ou por símbolos matemáticos. Nesse campo indicativo não inserimos linhas para as respostas dos alunos, pois acreditamos que deixar o espaço livre colabora para não induzir as respostas dos alunos como sendo “curtas ou longas”, conforme a quantidade de linhas que os alunos observam.

Esta é uma versão das TAPE que foram elaboradas e aplicadas na pesquisa; cabe, contudo, a cada professor que quiser fazer o uso deste material, adaptar possíveis alterações dos enunciados ou propor outros tipos de questionamentos para seus alunos, conforme a necessidade e cada objetivo que pretende atingir com as TAPE.

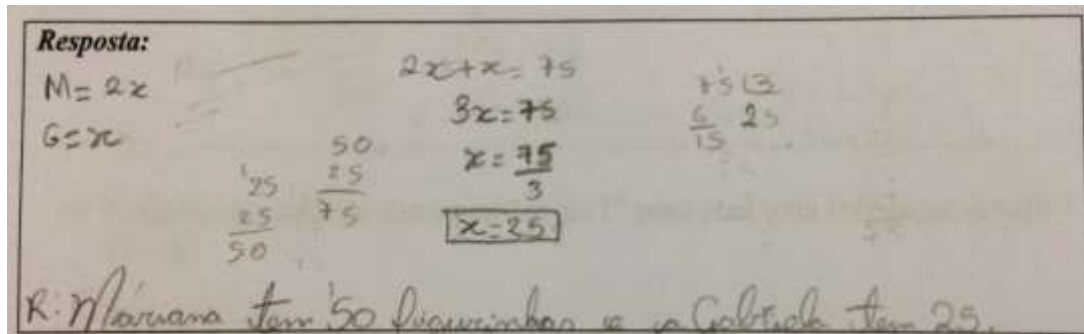
Observamos que, na aplicação das TAPE, o resultado alcançado é bem distinto em cada turma que participa, pois as TAPE trabalham no movimento do conhecimento prévio dos alunos, e esse é um processo individual e subjetivo de cada um, que proporciona ao professor uma análise descritiva da construção dos conteúdos propostos.

Figura 9 - TAPE 1 - versão para aluno

TAPE - 1

João tinha que resolver a seguinte questão: Mariana tem o dobro de figurinhas de Gabriela. As duas juntas têm 75 figurinhas. Quantas figurinhas tem cada uma?

Resolução correta do João



Com base nas informações acima, responda:

- a) Por que João escreveu $M = 2x$ e $G = x$?

Resposta:

- b) O que parece que João quis dizer quando escreveu $2x + x = 75$?

Resposta:

- c) Que operação foi feita para que aparecesse $3x = 75$?

Resposta:

- d) Quando João escreveu $x = 25$, o que ele descobriu? O que isso tem a ver com a quantidade de figurinhas de Mariana e Gabriela?

Resposta:

- Material elaborado por: Carolina Bueno Silvestre e Jader Otávio Dalto - PPGMAT – UTFPR / Londrina-PR

Figura 10 - TAPE 2 - versão para aluno

TAPE - 2

A professora de Maria propôs a seguinte questão: Somando o dobro de um número ao seu triplo, obtemos 125. Que número é esse?

Resolução correta da Maria

Resposta:

$$2x + 3x = 125$$

$$5x = 125$$

$$x = \frac{125}{5}$$

$$\boxed{x = 25}$$

R: O número é 25.

Com base nas informações acima, responda:

- a) Como está representado na resolução o dobro de um número?

Resposta:

- b) Como está representado na resolução o triplo de um número?

Resposta:

- c) Por que a resolução apresenta a expressão $5x$?

Resposta:

- d) Como você resolveria esta tarefa de forma diferente da que foi apresentada? Mostre sua resolução aqui abaixo.

Resposta:

- Material elaborado por: Carolina Bueno Silvestre e Jader Otávio Dalto - PPGMAT – UTFPR / Londrina-PR

Figura 11 - TAPE 3 - versão para aluno

TAPE - 3

Em uma caixa há balas e pirulitos, num total de 60 unidades. Sabendo que há 10 pirulitos a mais do que o número de balas, qual é a quantidade de pirulitos que tem na caixa?

Resolução correta do Antônio

Resposta:

$$x + x + 10 = 60$$

$$2x = 60 - 10$$

$$2x = 50$$

$$x = \frac{50}{2}$$

$$x = 25$$

Balas: $x = 25$
 Pirulitos: $x + 10 = 25 + 10 = 35$

$$\begin{array}{r} 25 \\ +10 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 2 \\ \hline 100 \end{array}$$

R: A quantidade de balas são de 25 e os pirulitos são 35

Observando a resolução correta do *Antônio*, responda:

- a) O que o “x” na equação representa?

Resposta:

- b) Por que na resolução aparece “ $x + x + 10$ ”? Explique sua resposta.

Resposta:

- c) Como surgiu a expressão “ $2x$ ” na equação? Explique sua resposta.

Resposta:

- d) No lado esquerdo do sinal de igual, por que na segunda linha da equação ficou apenas “ $2x$ ”?

Resposta:

- e) Por que na resolução apareceu $60 - 10$?

Resposta:

- f) Como você resolveria esta tarefa de forma diferente da que foi apresentada? Mostre sua resolução aqui abaixo.

Resposta:

- Material elaborado por: Carolina Bueno Silvestre e Jader Otávio Dalto - PPGMAT – UTFPR / Londrina-PR

Figura 12 - TAPE 4 - versão para aluno

TAPE - 4

Guilherme tem 5 anos a mais que Tiago. Somando as idades dos dois juntos, dá 43 anos. Quantos anos de idade tem cada um?

Resolução correta da Marcela

Resposta:
 $x + 5 + x = 43$
 $2x = 43 - 5$
 $2x = 38$
 $x = \frac{38}{2}$
 $x = 19$

$x + y = 43$
 $19 + y = 43$
 $y = 43 - 19$
 $y = 24$

R. Guilherme tem 24 e tiago 19

Observando a resolução correta da Marcela, responda:

a) O que o “x” na equação representa?

Resposta:

b) Por que na resolução aparece “ $x + 5 + x$ ”? Explique sua resposta.

Resposta:

c) Como surgiu a expressão “ $2x$ ” na equação? Explique sua resposta.

Resposta:

d) No lado esquerdo do sinal de igual, por que na segunda linha da equação ficou apenas “ $2x$ ”?

Resposta:

e) Por que na resolução apareceu $43 - 5$?

Resposta:

f) Por que apareceu na quarta linha da equação a expressão $x = \frac{38}{2}$?

Resposta:

g) Como você resolveria esta tarefa de forma diferente da que foi apresentada? Mostre sua resolução aqui abaixo.

Resposta:

- Material elaborado por: Carolina Bueno Silvestre e Jader Otávio Dalto - PPGMAT – UTFPR / Londrina-PR

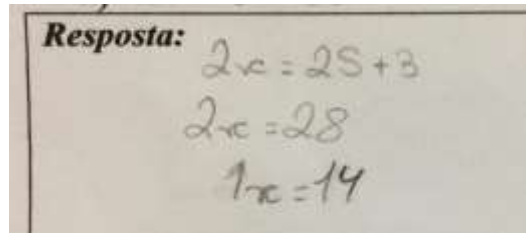
Figura 13 - TAPE 5-1 - versão para aluno

TAPE – 5-1

Determine a solução da equação do 1º grau com uma incógnita, sendo $U = \mathbb{R}$.

$$2x - 3 = 25$$

Resolução correta do Miguel



Resposta:
 $2x = 25 + 3$
 $2x = 28$
 $1x = 14$

Resolução correta do Reginaldo



Resposta: $2x - 3 = 25$
 $2x = 25 + 3$
 $2x = 28$
 $x = \frac{28}{2}$
 $x = 14$

Comparando as duas resoluções, responda:

- a) O que tem de diferente entre as resoluções do *Miguel* e do *Reginaldo*?

Resposta:

- b) Por que, na resolução do *Miguel*, apareceu a expressão “ $1x$ ”? Esta anotação tem o mesmo significado da expressão “ x ”? Explique sua resposta.

Resposta:

- c) Por que na resolução do *Reginaldo* apareceu $x = \frac{28}{2}$, e na resolução do *Miguel* não apareceu?

Resposta:

- d) Por que *Miguel* escreveu na segunda linha da equação a expressão $2x = 28$, e logo depois colocou $1x = 14$?

Resposta:

- Material elaborado por: Carolina Bueno Silvestre e Jader Otávio Dalto - PPGMAT – UTFPR / Londrina-PR

Figura 14 - TAPE 5-2 - versão para aluno

TAPE - 5-2

Determine a solução da equação do 1º grau com uma incógnita, sendo $\mathbb{U} = \mathbb{R}$.

$$5x + 21 = 10x - 19$$

Resolução correta do Ricardo

Resposta:

$$5x - 10x = -19 - 21$$

$$5x = 40$$

$$x = \frac{40}{5}$$

$x = 8$

Observando a resolução correta do *Ricardo*, responda:

- a) Por que *Ricardo* escreveu $5x - 10x = -19 - 21$?

Resposta:

- b) Por que *Ricardo* colocou na segunda linha $5x$ sabendo que $5x - 10x = -5x$? E também sabendo que $-19 - 21 = -40$, ele colocou igual a 40 ?

Resposta:

- c) Por que $x = \frac{40}{5}$?

Resposta:

- d) Você consegue resolver esta tarefa com uma resposta diferente da que foi apresentada? Como? Mostre sua resolução aqui abaixo.

Resposta:

- Material elaborado por: Carolina Bueno Silvestre e Jader Otávio Dalto - PPGMAT - UTFPR / Londrina-PR

Figura 15 - TAPE 5-3 - versão para aluno

TAPE - 5-3

Determine a solução da equação do 1º grau com uma incógnita, sendo $\mathbb{U} = \mathbb{R}$.

$$6(x + 1) = 5(x - 2)$$

Resolução correta do Rodrigo

Resposta:

$$6(x+1) = 5(x-2)$$

$$6x+6 = 5x-10$$

$$6x-5x = -10-6$$

$$x = -16$$

Observando a resolução correta do *Rodrigo*, responda:

- a) O que *Rodrigo* fez para que na segunda linha aparecesse $6x + 6 = 5x - 10$?

Resposta:

- b) Por que *Rodrigo* escreveu na terceira linha $6x - 5x = -10 - 6$?

Resposta:

- c) Você consegue resolver esta tarefa com uma resposta diferente da que foi apresentada? Como? Mostre sua resolução aqui abaixo.

Resposta:

- Material elaborado por: Carolina Bueno Silvestre e Jader Otávio Dalto - PPGMAT – UTFPR / Londrina-PR

Considerações Finais

O objetivo deste Caderno de Tarefas de Análise da Produção Escrita é apresentar, aos professores de matemática, possibilidades de tarefas que podem auxiliá-los, nas aulas de matemática, no ensino de equações do 1º grau com uma incógnita. A partir dessas TAPE apresentadas, o professor pode elaborar novas TAPE para esse ou outros conteúdos matemáticos, partindo do processo de elaboração que mencionamos aqui e que se apresenta, de modo mais detalhado, na dissertação de mestrado vinculada a este produto. Aprofundamentos e alterações nas TAPE podem ser propostos a partir de outras metodologias que contemplem essas ideias, conforme a necessidade, identificada pelo professor, de cada turma em que leciona.

Acreditamos que cada turma tem suas particularidades e dificuldades a serem superadas; contudo, para atingir o desenvolvimento desta pesquisa, observamos que os alunos alcançaram bons resultados com a aplicação das TAPE, conforme pudemos notar durante todo o processo de investigação.

Assim, ressaltamos que cabe aos profissionais da educação definir previamente quais são os objetivos a serem alcançados durante o processo de ensino com o uso das TAPE, bem como o modo de interação, desenvolvimento e participação de seus alunos, porque apenas o professor que está em sala de aula conhece as características de sua turma, podendo interferir, direcionar e orientar seus alunos do melhor modo possível. Nossa pesquisa apenas traz sugestões de tarefas, a fim de auxiliar e direcionar os profissionais da educação no processo de elaboração das TAPE em sala de aula; compreendemos, no entanto, que o processo de ensino de conteúdos envolve vários fatores internos e externos à sala de aula que influenciam na proposta de trabalho, e que apenas o professor, com sua autonomia e experiência com suas turmas, será capaz de melhor resolver a situação.

Para nossa pesquisa, sugerimos o ensino de equação do 1º grau com uma incógnita, e, na elaboração das TAPE, contamos apenas com a utilização das produções escritas dos alunos contendo a seleção de resoluções corretas, pois acreditamos que, para o uso de estratégia de ensino de um conteúdo inédito para as turmas de 7º ano, as TAPE com resoluções incorretas poderiam ocasionar ou induzir os alunos ao erro de informação.

Acreditamos que poderíamos ter encontrado outros resultados positivos caso fossem usados na análise de produções escritas as respostas incorretas, de modo que os alunos seriam instigados a verificar a origem dos erros apresentados nas respostas, e, assim, poderiam compreender os mesmos erros que cometem nas resoluções. Nesta situação, acreditamos que as discussões coletivas poderiam ser mais expressivas e com mais argumentos, pois notamos, em sala de aula, que é mais “fácil” para os alunos apontar o erro do que o acerto, sendo esse até mesmo um fator de autodefesa. Também acreditamos que poderíamos ter encontrado outros resultados positivos caso fossem usadas na análise de produções escritas as respostas parcialmente corretas, comparadas com as corretas e/ou incorretas, de modo que os alunos seriam instigados a verificar a origem dos erros, comparar suas respostas e identificar o procedimento correto ou incorreto de cada questão, sendo que o aluno teria que gerenciar toda a sequência de construção do seu raciocínio, de modo a apresentar uma resolução correta para cada questão.

Verificamos que as TAPE apresentam flexibilidade e uma grande variedade para a formulação de questões, conforme os objetivos que os professores regentes das turmas desejam atingir com o trabalho; quanto ao material usado, é também simples e acessível a qualquer professor, como a folha da TAPE impressa, ou, então, na falta desse recurso, o próprio professor poderia apresentar as TAPE no quadro de giz para os alunos, desenvolvendo esse trabalho no próprio ambiente escolar, dentro da sala de aula. Em outras palavras, são poucos recursos de material e ambiente escolar que as TAPE exigem para o seu uso na escola; o que elas mais exigem é o trabalho do professor enquanto pesquisador. Isso porque, nas TAPE, o professor terá que mudar sua postura de professor de sala de aula e assumir a postura de pesquisador, que não dá a resposta diretamente aos alunos, tenta controlar a ansiedade deles para compartilhar suas respostas de imediato, e observa as resoluções dos alunos com um olhar investigativo para a real aprendizagem do conteúdo matemático, entre outros aspectos.

A elaboração das TAPE a partir de produções escritas genuínas de alunos contribuiu para a identificação e a familiaridade com a escrita por outros alunos, pois chamou a atenção dos participantes da pesquisa o fato de que, ao longo da resolução, puderam encontrar nas questões a resposta de outro aluno, identificando-se com a escrita peculiar das informações contidas. A prática de observar, visualizar, analisar e entender o raciocínio de outro aluno trouxe o despertar da curiosidade e o interesse dos participantes em resolver as TAPE.

Em sala de aula, as TAPE trouxeram contribuições para a dinâmica da aula de matemática, envolvendo as discussões coletivas entre os alunos com a troca do diálogo e conhecimento compartilhado entre os mesmos, promovendo os alunos a protagonistas de suas próprias aprendizagens. Nesse momento, surgiram alguns desafios para a pesquisa, pois mudar a dinâmica da sala de aula deixou os alunos agitados, principalmente pelo fato de fazer análise de respostas de outros alunos ser algo novo para eles; entretanto, foi interessante observar como os alunos gostaram e se envolveram com as TAPE.

Enquanto pesquisadora/professora pude observar que, durante a pesquisa, não corrigimos as TAPE com os alunos, e isso provocou a curiosidade dos participantes, pois queriam saber se as respostas por eles apresentadas estavam corretas ou não. Mesmo tendo participado das discussões coletivas entre eles e validado suas próprias respostas, ainda assim sentiam a necessidade de o professor validar por escrito suas respostas. Por isso, o trabalho com as TAPE envolve toda uma dinâmica de aula diferente da convencional, trazendo alguns aspectos socioemocionais para o aluno, tais como ser protagonista da construção do seu próprio conhecimento matemático, trabalhar sua ansiedade em querer “fazer tudo por nota”, e construir suas conclusões e validações de raciocínios matemáticos.

Além das práticas vivenciadas em sala de aula, foi possível observar que a utilização das TAPE é uma proposta pedagógica que modifica profundamente toda a dinâmica da aula de matemática, pois provoca a curiosidade do aluno, instigando-o no desenvolvimento das hipóteses para o levantamento de possíveis respostas ali apresentadas, assim colaborando para a construção do desenvolvimento do raciocínio matemático. Além disso, alguns benefícios foram observados com a utilização das TAPE em sala de aula, tais como:

- ✓ Possibilita ao professor identificar quais as reais dificuldades dos alunos com a linguagem aritmética e/ou algébrica nas questões;
- ✓ Mobiliza a socialização dos alunos quanto às suas respostas e interpretações do raciocínio matemático desenvolvido;
- ✓ Possibilita o aluno a se identificar na escrita do que o outro aluno fez;
- ✓ Modifica a dinâmica da aula, com as discussões coletivas e a abertura de diálogo na aula de matemática;

- ✓ Conscientiza o aluno da importância da organização, da caligrafia e da forma de escrever suas respostas, sejam elas por palavras ou símbolos matemáticos, de forma coerente, para a compreensão de um outro leitor da tarefa;
- ✓ Instiga o aluno a recordar conhecimentos prévios já estudados;
- ✓ Incentiva o aluno a compreender os conteúdos matemáticos, de modo que tenha significado para sua realidade.

Assim, finalizamos este produto educacional tendo a consciência de que ainda há muitas possibilidades de se utilizar as TAPE em sala de aula, para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática para além do apresentado neste caderno de tarefas. De qualquer forma, esperamos que esse material possa colaborar com o trabalho do professor, de modo a encorajá-lo e incentivá-lo a utilizar as tarefas aqui desenvolvidas em suas aulas de matemática.

O leitor interessado em conhecer a experiência da autora deste trabalho com a elaboração e aplicação das TAPE para o ensino de equações do 1º grau com uma incógnita está convidado a ler a dissertação vinculada a esse produto educacional: “Tarefas de Análise da Produção Escrita para o ensino de Equações do 1º grau com uma incógnita”.

Referências Bibliográficas

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a base.** Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2019.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: Arthur F. Coxford; Albert P. Shulte. (Org.). **As ideias da álgebra.** traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p.23-37.

CARDOSO, M. A. **Análise Da Produção Escrita Em Matemática: Quatro Histórias Da Construção De Uma Proposta De Ensino Para A Educação De Jovens E Adulto.** 2017a. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

DONEZE, I. S. **A construção de tarefas de análise da produção escrita para o ensino e a aprendizagem de matemática.** 2019. 102 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas, SP: Papirus, 1997, 175p. (Coleção Perspectiva em Educação Matemática).

MATOS, A. ; PONTE, J. P. da. O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8ºano. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.** México, v. 11, nº 11-2, p.195-231. jul.2008.

MINATO, N. S. **Tarefas de análise da produção escrita para o ensino de progressões geométricas.** 2019. 49f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procopio, 2019.

NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. A natureza das tarefas para o desenvolvimento do pensamento algébrico na perspectiva histórico-cultural. In: Adair Mendes Nacarato; Iris Aparecida Custódio. (Orgs.). **O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica: Compartilhando Propostas de Sala de Aula com o Professor que Ensina (Ensinará) Matemática.** (Grupo Colaborativo em Matemático – GruComat) . Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Coleção SBEM;12) , 2018, p.13-24.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** 4ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019, 127p. (Coleção Tendências em Educação Matemática/ coordenação Marcelo Carvalho Borba).

PEREIRA, E. R. S. da S. **Tarefas de Análise da Produção Escrita para o Ensino de Análise Combinatória.** 2021. 84f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2021.

PEREIRA, F. F. **Conhecimentos mobilizados por graduandos e professores que ensinam Matemática em um curso de formação sobre Tarefas de Análise da Produção Escrita**. 2019. 124f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

PEREIRA, F. F.; DONEZE, I. S. DALTO, J. O. **Caracterizando Tarefas de Análise da Produção Escrita por meio do ensino de Equações**. Revista Paranaense de Educação Matemática, v.7, n.14, p.236-255, jul.- dez. 2018.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4ed. 1reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020, 160p. (Tendências em Educação Matemática, 7).

POWELL, A.; BAIRRAL, M. **A escrita e o pensamento matemático: Interações e potencialidades**. Campinas, SP: Papyrus, 2006.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em Matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. 156 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

SANTOS, E. R. dos. **Estudo da Produção Escrita de Estudantes do Ensino Médio em Questões Discursivas Não Rotineiras de Matemática**. 2008. 166f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SUTHERLAND, R. **Ensino eficaz de matemática**. Tradução Adriano Moraes Migliavaca. Porto Alegre: Artmed, 2009, 184p.