UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

ROSE ELIZANGELA MARTINS PEDROSA

LOGARITMO E A RÉGUA DE CÁLCULO: UMA PROPOSTA DE ENSINO

CURITIBA

2018

ROSE ELIZANGELA MARTINS PEDROSA

LOGARITMO E A RÉGUA DE CÁLCULO: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientador: Márcio Rostirolla Adames

CURITIBA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

P372L Pedrosa, Rose Elizangela Martins
2018 Logaritmo e a régua de cálculo : uma proposta de ensino / Rose Elizangela Martins Pedrosa.-- 2018.
106 p.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2018.
Bibliografia: p. 103-106.

1. Logaritmos. 2. Régua de cálculo. 3. Livros didáticos - Estudo e ensino. 4. Matemática - Estudo e ensino. 5. Matemática - História. 6. Prática de ensino. 7. Matemática – Dissertações. I. Adames, Márcio Rostirolla, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba – UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS CURITIBA

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 45

A Dissertação de Mestrado intitulada "Logaritmo e a Régua de Cálculo: uma proposta de ensino", defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) Rose Elizangela Martins Pedrosa, no dia 06 de fevereiro de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Ensino de Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Márcio Rostirolla Adames - Presidente – UTFPR
Prof(a). Dr(a). Ronie Peterson Dario – UTFPR
Prof(a). Dr(a). Eduardo Outeiral Correa Hoefel – UFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 06 de fevereiro de 2018.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

Dedico esse trabalho a minha mãe, Conceição, companheira e grande exemplo que desde minha infância esteve ao meu lado, mostrando a importância de estudar e aprender sempre mais. Seu incentivo contínuo e esforço notável permitiu que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

A Deus que permitiu o início dessa caminhada e esteve presente ao longo do caminho agindo com misericórdia.

À minha família, em especial a minha mãe, pelas orações e apoio irrestrito.

Ao Prof. Márcio Rostirolla Adames pela generosidade e paciência durante todo período de produção desse trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro, através de bolsa de estudos, à minha pesquisa.

“Tudo tem seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu."
(Bíblia Sagrada, Eclesiastes 3, 1)

RESUMO

PEDROSA, Rose Elizangela Martins. **Logaritmo e a régua de cálculo:** uma proposta de ensino. 106 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Este trabalho apresenta um breve relato histórico sobre o surgimento dos logaritmos, destacando os nomes de Jhon Napier, que desenvolveu as primeiras ideias sobre o assunto, e Henrry Briggs, que aperfeiçoou tais ideias. O trabalho inclui um panorama das dissertações defendidas no PRFOFMAT sobre o tema, destacando alguns aspectos relevantes frequentes nesses trabalhos. Esse trabalho também traz uma análise do conteúdo de logaritmos em sete livros didáticos utilizados por alunos da Educação Básica. Por fim, o trabalho contém uma sequência didática e o relato de sua aplicação. A sequência é uma proposta de ensino que utiliza a régua de cálculo logarítmica para desenvolver o estudo de logaritmos sob a perspectiva da História da Matemática. Essa proposta tem como base o livreto intitulado "Logaritmos e a Régua de Cálculo: uma proposta de ensino".

Palavras-chave: Logaritmos. História da Matemática. Régua de cálculo. Proposta de ensino.

ABSTRACT

PEDROSA, Rose Elizangela Martins. **Logarithms and the slide rule:** a teaching proposal. 106 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

This work presents a brief historical account of the appearance of logarithms, highlighting the names of John Napier, who developed the first ideas on the subject, and Henrry Briggs, who perfected this idea. The work includes an overview of the existent dissertations in the PROFMAT about the subject, highlighting some relevant aspects frequent in these works. This work also brings an analysis of the content of logarithms in seven textbooks used by students of Basic Education. Finally, the dissertation contains a didactic sequence and the report of its implementation. The sequence is a teaching plan that uses the slide rule to develop the study of logarithms under the perspective of the History of Mathematics. This proposal is based on the booklet entitled “Logarithms and the Slide Rule: a teaching proposal”.

Keywords: Logarithm. History of Mathematics. Slide rule. Teaching proposal.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esse trabalho pretende, a partir de uma abordagem histórica e investigativa, apresentar uma proposta de ensino para o conteúdo de logaritmo.

Segundo (MENDES, 2009b), a viabilidade de uso pedagógico das informações históricas baseia-se em um ensino da matemática centrado na investigação, conduzindo professor e aluno na compreensão do movimento cognitivo estabelecido pela espécie humana no seu contexto sociocultural e histórico, na busca de respostas ligadas ao campo da matemática como uma das formas de explicar e compreender fenômenos da natureza e da cultura. Nessa perspectiva, D'Ambrósio afirma que:

> As práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições, e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer aos registros e interpretação dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. Em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade. (D'AMBRÓSIO, 1999)

O surgimento dos logaritmos teve um importante papel no processo de desenvolvimento científico no ramo da matemática e de outras ciências. No início do século XVII, campos como o da astronomia, da navegação, do comércio, da engenharia e da guerra, careciam de ferramentas matemáticas que facilitassem os cálculos, tornando-os mais rápidos e precisos. Foi nesse contexto e com essa preocupação que o escocês Jhon Napier desenvolveu suas primeiras ideias sobre o que conhecemos hoje como logaritmos. Nessa época, algumas operações como, por exemplo, multiplicação e divisão com números muito grandes, demandavam muito tempo e eram passíveis de erros. A busca de Napier era encontrar uma solução satisfatória para esse problema.

Os autores Ponte, Brocardo e Oliveira relatam que:

> Quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013)

Isso foi o que ocorreu com Napier em sua busca para encontrar uma forma de facilitar os cálculos tediosos e repetitivos que, no início do século XVII, eram feitos manualmente. Napier não somente encontrou uma maneira de facilitar os cálculos, como criou os logaritmos que auxiliou, entre outras coisas, na criação do cálculo diferencial. Usando o conceito de logaritmo desenvolvido por Napier, foram criadas tabelas logarítmicas que eram consultadas para realização de cálculos trabalhosos.

Segundo (BARONI; NOBRE, 1999), é necessário cautela para que a História da Matemática não assuma um papel meramente motivador ou visto como curiosidade. Segundo os autores é preciso uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional. Com essa preocupação, apresentamos uma proposta de ensino que utiliza a régua de cálculo logarítmica como ferramenta de aprendizagem inserida em um contexto histórico e investigativo. Essa proposta tem como base o livreto intitulado *Logaritmo e a Régua de Cálculo: uma proposta de ensino* (ADAMES M. R.; PEDROSA, 2018), anexa ao trabalho.

A dissertação traz a análise do conteúdo de logaritmos em alguns livros didáticos, afim de verificar quais abordagens e metodologias de ensino eles apresentam, uma vez que o livro didático é um dos recursos mais utilizados nas escolas, em especial nas aulas de matemática. No terceiro capítulo apresenta-se algumas produções acadêmicas, especificamente dissertações do PROFMAT, sobre o tema logaritmo, com o propósito de verificar as abordagens já tomadas e os conteúdos específicos já explorados. Neles é possível verificar que esse é um assunto que desperta interesse da comunidade acadêmica do programa, principalmente no que se refere às questões de ensino.

1 CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE LOGARITMOS

No final do século XVI e início do século XVII, as novas descobertas nos campos da astronomia, da navegação, do comércio, da engenharia e da guerra, exigiam muitos cálculos aritméticos extensos e surgiu a necessidade da simplificação deles. Segundo (EVES, 2008), o século XVII foi importante na história da matemática, pois ocorreram avanços significativos nas pesquisas no ramo da matemática, que culminaram na criação do cálculo diferencial. Durante esse período, muitos matemáticos e entusiastas da disciplina buscavam melhores ferramentas para a resolução de problemas matemáticos, entre eles John Napier (1550 - 1617), que contribui com a invenção dos logaritmos. Segundo (MAOR, 2011), poucas vezes na história da ciência uma ideia matemática abstrata teve tanta receptividade e repercussão na comunidade científica como a invenção dos logaritmos.

1.1 NAPIER E A INVENÇÃO DOS LOGARITMOS

Figura 1 – Jhon Napier (1550-1617)

Fonte – (RAGI, 2013, Acesso em: 25 set. 2017)

Jonh Napier (Figura 1) era de família rica e viveu a maior parte de sua vida no Castelo de Merchiston, na Escócia. Era filho de Sir Archibald Napier e de Janet Bothwell e aos treze anos foi mandado para a Universidade de St. Andrews, onde estudou religião. Ao retornar para sua terra natal casou-se com Elizabeth Stirling com quem teve dois filhos. Casou-se por uma segunda vez, após a morte de sua primeira esposa, com Agnes Chisholm e tiveram dez filhos. Após a morte de seu pai, em 1608, tornou-se o Barão de Merchiston, herdando grandes propriedades, que passou a administrar.

Napier interessou-se por religião, sendo defensor fervoroso do protestantismo e publicou a obra "*A Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John*" (1593), um livro que atacava duramente a Igreja Católica. Além do interesse por religião, Napier buscava melhorias para as atividades agropecuárias, experimentando vários tipos de estercos e de sais como insumos. Além disso, inventou um parafuso hidráulico para controlar o nível de água nas minas de carvão. Com essa diversidade de talentos, Napier escrevia sobre muitos assuntos, entre eles a matemática, especialmente a computação de operações aritméticas e trigonometria. Suas mais importantes contribuições na área da matemática, segundo Eves, são:

> (1) a invenção dos logaritmos; (2) um engenhoso dispositivo mnemônico, conhecido como *regra das partes circulares*, para reproduzir fórmulas usadas na resolução de triângulos esféricos; (3) pelo menos duas fórmulas trigonométricas de um grupo de 4 conhecidas como *analogias de Napier*, úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos; (4) a invenção de um instrumento conhecido como *barras de Napier*. (EVES, 2008)

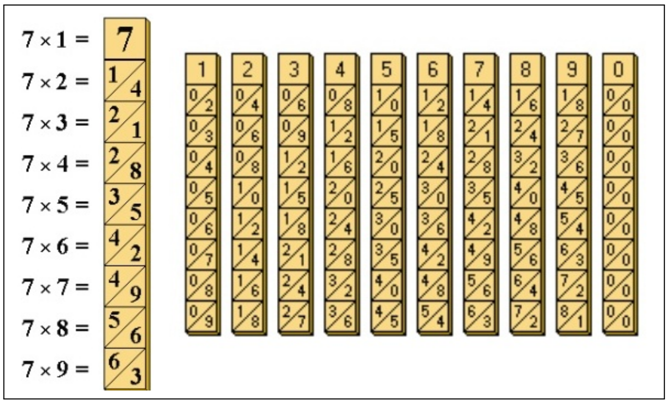
Dentre as produções e criações de Napier, que vão desde escrever livros sobre religião até desenvolvimento de modelos mecânicos, a que marcou a história foi a invenção dos logaritmos, fazendo seu nome permanecer entre aqueles que contribuíram de forma notável no campo da matemática.

1.1.1 BARRAS DE NAPIER

Segundo (MENDES, 2009a), a preocupação de Napier em simplificar cálculos grandes e difícies levou-o a descrever em sua obra *Rabdologiae*, publicada em 1617, um método para efetuar cálculos utilizando tábuas de multiplicação montadas sobre barras.

As barras consistiam em tiras de ossos, metal, madeira ou cartão e para cada um dos 10 dígitos era necessário algumas tiras. Cada barra contém a tabuada do número que fica na parte superior da barra. Na (Figura 2) observamos, em destaque, a tira do dígito 7 que exemplifica como a tira era composta.

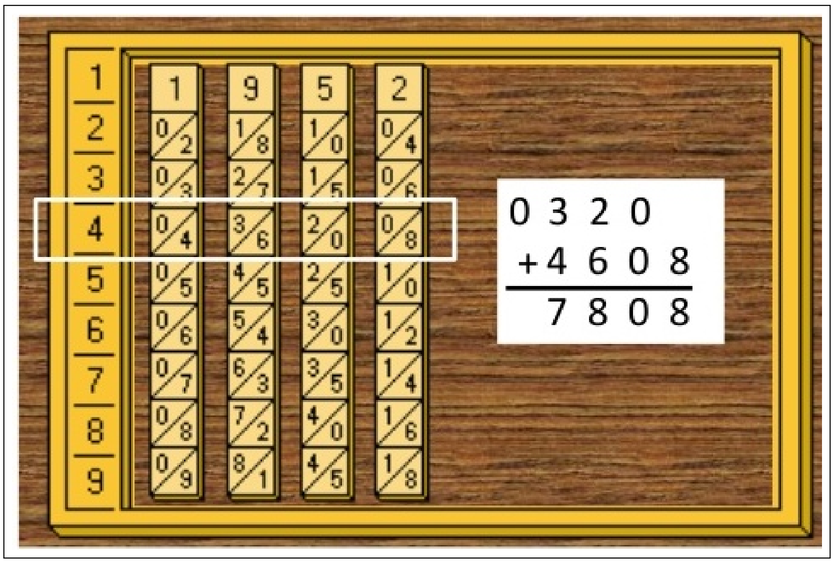
Figura 2 – Barras de Napier



(LEE, 2016, Acesso em: 25 set. 2017a)

Usando as barras de Napier, vamos calcular o produto de 1952 por 4, procedendo da seguinte forma: pegue as barras de dígitos 1, 9, 5 e 2, nessa ordem, e as coloque em um suporte que contenha uma tira vertical numerada de 1 à 9 (Figura 3). Na linha onde estiver o número que se quer multiplicar, nesse caso o número 4, estará o resultado da multiplicação. Anote os números 0, 3, 2, 0 que aparecem na parte superior da diagonal da linha escolhida, em seguida anote os números 4, 6, 0, 8, que aparecem na parte inferior da diagonal da linha escolhida, dispondo-os como na (Figura 3) e efetue a adição, encontrando o número 7808 que é o produto procurado.

Figura 3 – Multiplicação de 1952 por 4 usando as Barras de Napier



(LEE, 2016, Acesso em: 25 set. 2017b)

Quando efetuamos a adição dos números nas diagonais, somamos as unidades, dezenas, centenas, milhares, procedendo dessa forma quantas classes forem necessárias. Observe que a diagonal a ser somada tem um algarismo de cada tira, entretanto da mesma classe. No exemplo somamos 0 dezenas com 0 dezenas, 2 centenas com 6 dezenas e 3 unidades de milhar com 4 unidades de milhar. Caso o número a ser multiplicado seja maior que 9, efetuamos o precedimento acima para cada algarismo e depois somamos os valores obtidos, assim como é de costume fazer nas multiplicações usuais. Embora os valores tenham que ser somados, o processo fica mais simples do que o procedimento usual, poupando tempo. Assim efetuamos:

$$
\begin{aligned}
4 \times (1000 + 900 + 50 + 2) &= 4000 + 3600 + 200 + 8 \\
&= (4000 + 3000) + (600 + 200) + 8.
\end{aligned}
$$

1.1.2 LOGARITMOS

Segundo (BOYER; MERZBACH, 2012), Napier iniciou seu trabalho com lagaritmos aproximadamente em 1594. Nesse período muitos indivíduos se debruçavam na busca de métodos que facilitassem os cálculos matemáticos, entre eles o alemão Johannes Werner (1468-1528) que criou o método conhecido como *prostaférese*. O método consistia na utilização de quatro fórmulas trigonométricas, conhecidas como *fórmulas de Werner*, que transformam produtos em somas. No século XVII, era conhecida a fórmula trigonométrica

$$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

que Werner utilizou para simplificar cálculos usados na astronomia. Essa fórmula transforma o produto entre cossenos de dois ângulos em uma adição dos cossenos da soma e da diferença desses dois ângulos, o que é mais fácil de calcular do que um produto. Para exemplificar o uso desse método, (EVES, 2008) efetua o produto de 437,64 por 27,327 da seguinte forma: consultando uma tábua de cossenos, devemos obter os ângulos A e B, tais que

$\cos A = \frac{(0{,}43764)}{2} = 0,21882$ e $\cos B = 0,27327$.

Consultando uma tabela de cossenos,verificamos que os ângulos A e B medem:

$$A = 77,360264622931563861549956132065$$

$$B = 74,141056046347909840348487805665$$

Calculando a soma e a diferença entre os ângulos A e B, temos:

$$(A+B) = 151,50132066927947370189844393773$$

$$(A-B) = 3,2192085765836540212014683263995$$

Consultando novamente uma tabela de cossenos, obtemos os cossenos da soma e da diferença de A e B.

$$\cos(A+B) = -0,87882811095093476805946406199643$$

$$\cos(A-B) = 0,99842199375093476805946406199642$$

Calculando a soma do cosseno da soma e da diferença dos ângulos A e B, obtemos:

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 0,11959388279999999999999999999999 \approx 0,1195938828$$

Por fim, obtemos:

$$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$(0,43764) \cdot (0,27327) = 0,1195938828$$

Para obter o produto procurado basta ajustar as casas decimais. Portanto,

$$(437,64) \cdot (27,327) = 11959,38828$$

Segundo (EVES, 2008), existiam outras três fórmulas usadas por matemáticos e astrônomos no final do século XVII para transformar produtos em somas e diferenças, são elas:

$$2\,\mathrm{sen}A\cos B = \mathrm{sen}(A+B) + \mathrm{sen}(A-B),$$

$$2\cos A\,\mathrm{sen}B = \mathrm{sen}(A+B) - \mathrm{sen}(A-B),$$

$$2\,\mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}B = \cos(A-B) - \cos(A-B).$$

Napier tinha conhecimento do método da *prostaférese* e, provavelmente, foi influenciado por ele, uma vez que, inicialmente, suas tabelas de logaritmos continham os logaritmos de senos e de cossenos de ângulos, ao invés de números naturais (Figura 5). Segundo (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012), na obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* de Napier, encontramos tabelas distintas para cada ângulo, com valores dos senos e dos logaritmos para cada minuto somado àquele ângulo. Sobre isto, Boyer e Merzbach afirmam que:

> Enquanto Napier refletia sobre o assunto, o Dr. John Craig, médico de James VI da Escócia, visitou-o e falou-lhe no uso da *prostaférese* no observatório de Tycho Brahe, na Dinamarca. A informação sobre isto encorajou Napier a redobrar seus esforços e finalmente publicar, em 1614, o *Mirifici lagarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). (BOYER; MERZBACH, 2012)

Embora Napier possa ter sido influenciado pelo método da *prostaférese*, (EVES, 2008) relata que o método usado por Napier para eliminar as longas multiplicações e divisões difere do desenvolvido por Werner, pois desenvolveu o estudo de logaritmos associando termos de uma progressão geométrica,

$$b, b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n, ...,$$

a uma progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ...,$$

dessa forma, o produto de dois termos da progressão geométrica, $b^m b^n = b^{m+n}$ está associado a soma $m + n$ da progressão aritmética. Para exemplificar, considere as progressões aritmética e geométrica como na tabela 1, a seguir:

Tabela 1 – Progressão aritmética e progressão geométrica

P.A.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P.G.	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Na tabela 1 temos uma P.A. de razão 1 e uma P.G. de razão 2, onde o expoente de cada termo da P.G. escrita na forma de potência corresponde a cada elemento da PA, ordenadamente.

Tomando o produto $4 \cdot 8 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$, podemos observar que $2 + 3 = 5$, onde o termo 5 da P.A. corresponde ao termo 32 da P.G. Usando o conceito de logaritmos que temos atualmente, 2 seria a base, 32 o logaritmando e 5 o logaritmo. De acordo com (EVES, 2008) para que o método fosse eficiente, o número b, deveria ser próximo de 1 para que os termos da progressão geométrica de potências inteiras ficassem próximos uns dos outros. Para isso Napier tomou a base $(1 - 1/10^7) = 0,9999999$. Para evitar os decimais, Napier multiplicou a potência por 10^7, obtendo $N = 10^7(1 - 1/10^7)^L$, onde L é o logaritmo do número N em base $b = (1 - 1/10^7)$, assim descrito por Napier. Sobre essa definição de logaritmo, Boyer e Merzbach complementam:

> Assim, seu logaritmo de 10^7 é 0, seu logaritmo de $10^7(1 - 1/10^7) = 9999999$ é 1, e assim por diante. Dividindo seus números e logaritmos por 10^7 teríamos virtualmente um sistema de logaritmos de base $1/e$, pois $(1-1/10^7)^{10^7}$ fica próximo de $\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = 1/e$. Deve-se lembrar, no entanto, que Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da nossa (BOYER; MERZBACH, 2012).

Segundo Boyer e Merzbach, $(1 - 1/10^7)^{10^7}$ fica próximo de $\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$. Para mostrar isso usaremos a seguinte definição de e:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e calculamos

$$1 \Big/ \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \Big/ \left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

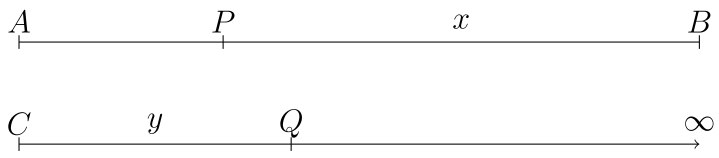
de modo que, informalmente, como 10^7 é um número muito grande, temos:

$$\frac{1}{e} \approx \left(1 \Big/ \left(1 + \frac{1}{10^7}\right)\right)^{10^7} \approx \left(1 - \frac{1}{10^7 + 1}\right)^{10^7} \approx \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}.$$

Os primeiros estudos de Napier sobre os logaritmos estavam amparados em conceitos geométricos. Segundo (MAOR, 2011), em seu livro *Mirifici logarithmourum canonis constructio*, publicado postumamente em 1619, Napier explicou sua invenção dos logaritmos em termos de um modelo geométrico-mecânico, que era uma abordagem comum para resolver problemas matemáticos naquela época. Napier considerou um segmento de reta AB e uma semirreta, paralela a AB, de origem C, como na (Figura 4).

Um ponto P começa a se mover de A em direção a B, com velocidade proporcional à distância de P a B, a cada instante. No mesmo instante em que P inicia seu movimento, um ponto Q começa a mover-se de C para a direita com velocidade constante igual a velocidade inicial de P. Conforme o tempo passa a distância PB diminui a uma taxa decrescente, enquanto

Figura 4 – Movimento de P e Q.



Fonte: Autoria própria.

a distância CQ aumenta a uma taxa uniforme. Napier definiu a distância de Q até C, como logaritmo da distância de P em relação a posição final B. Chamando $PB = x$ e $CQ = y$ temos, $y = \text{NapLog}(x)$.

Essa definição permite, com algum trabalho, mostrar que o produto de dois números (representado como a distância ao longo de AB) possa ser transformado em uma soma de dois outros números (distância em relação a C). Para exemplificar, tomemos o segmento AB de comprimento unitário. Na semi-reta de origem C marcamos segmentos de mesmo comprimento a partir da origem e nomeamos os mesmos de $0, 1, 2, 3, ...$Como Q tem velocidade constante, esses segmentos serão percorridos em intervalos de tempo iguais. Quando P inicia seu movimento a partir de A, Q está em zero, ou seja, no ponto C. Tome a velocidade de P e Q tal que quando P se encontra na metade de AB, Q se encontra em 1. Dessa forma, quando P tiver transcorrido $\frac{3}{4}$ de AB, Q se encontrará em 2 e assim por diante. Isso significa que quando a distância de P até B cai pela metade a distância de A até C aumenta em uma unidade. Sendo x a medida da distância que P ainda tem de percorrer para chegar em B e, y a distância de Q até C, temos

Tabela 2 – Movimentos de P e Q

x	1	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/64$	...
y	0	1	2	3	4	5	6	...

Esses valores de x e y formam uma tábua de logaritmos na base $1/2$, onde y é o logaritmo de x corresponde na tabela. Observe que a medida que o valor de x diminui, o valor do logaritmo (y) aumenta, o que difere dos logaritmos modernos em base 10 ou em base e, que aumentam a medida que os números crescem.

Napier tomou a distância AB como 10^7. Tomando a velocidade inicial do ponto P como 10^7, podemos descrever o movimento de P e Q da seguinte forma: $AP = AB - x = 10^7 - x$. Calculando a velocidade nos pontos P e Q, formalmente, temos:

$$
\begin{aligned}
v_P &= \frac{dx}{dt} = -x \implies dt = \frac{-dx}{x} \\
v_Q &= \frac{dy}{dt} = 10^7 \implies dt = \frac{dy}{10^7}
\end{aligned}
$$

Igualando as equações anteriores temos,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-10^7}{x}$$

e integrando obtemos

$$y = -10^7 \ln x + c$$

Como $y = 0$ quando $x = 10^7$, temos que $c = 10^7 \cdot \ln 10^7$, e portanto,

$$\begin{aligned} y &= -\,10^7 \cdot \ln x + 10^7 \cdot \ln 10^7 \\ y &= -\,10^7 \cdot (\ln x - \ln 10^7) \\ y &= -\,10^7 \ln\left(\frac{x}{10^7}\right). \end{aligned}$$

Usando o fato de que $\log_b x = -\log_{\frac{1}{b}} x$, podemos escrever a solução como $y = 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{10^7}\right)$ ou ainda $\frac{y}{10^7} = \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{10^7}\right)$.

Dessa forma, se desconsiderarmos o fator 10^7, podemos observar, que os logaritmos neperianos estão relacionados a um sistema de logaritmos na base $1/e$, enquanto que os logaritmos naturais possuem base e. Napier não usava a ideia de base, sua definição de logaritmos era voltada para a simplificação de cálculos de multiplicação e divisão muito extensos. Para tanto, ele construiu tabelas utilizando potências onde era possível perceber que a medida que o índice ou logaritmo crescia, a potência ou número decrescia, confirmando a ideia de um sistema de logaritmos na base $1/e$, que é menor que um.

Napier, desenvolveu os logaritmos idealizando a simplificação de cálculos, entretanto:

> O conceito de função logarítmica está implícito na definição de Napier em toda sua obra sobre logaritmos, mas essa relação não estava em primeiro lugar em seu espírito. Napier tinha laboriosamente construído seu sistema com um objetivo, a simplificação de computações, essencialmente de produtos e quocientes.(BOYER; MERZBACH, 2012)

Em 1614 , Napier publicou seu estudo sobre logaritmos em uma obra intitulada de *Mirifici Logarithmorum Canonid Descriptio*, ou seja, Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos. Nessa obra, Napier apresenta tabelas logarítmicas (Figura 5) construídas usando a base $(1 - 1/10^7) = 0,9999999$. De acordo com (EVES, 2008), esta obra despertou imediato de Henry Briggs (1561-1631), professor de geometria do Gresham College de Londres que foi até Napier e chegaram a conclusão de que as tábuas (Figura 5) seriam mais úteis se o logaritmo de 1 fosse 0 e se o logaritmo de 10 fosse uma potência de 10 conveniente.

Assim, os chamados logaritmos de Briggs tomaram o formato dos logaritmos conhecidos atualmente.

Figura 5 – Tabela de Logaritmos de Napier

Deg. 0 +|—

mi	Sines	Logarith	Differen.	Logarith:	Sines	
0	0	Infinite.	Infinite.	.0	1000000.0	60
1	291	8142567	8142568	.1	1000000.0	59
2	582	7449419	7449421	.2	999999.8	58
3	873	7043952	7043956	.4	999999.6	57
4	1164	6756275	6756274	.7	999999.3	56
5	1454	6533131	6533130	1.1	999998.9	55
6	1745	6350810	6350808	1.6	999998.6	54
7	2036	6196659	6196657	2.2	999998.0	53
8	2327	6063128	6063126	2.8	999997.4	52
9	2618	5945345	5945342	3.5	999996.7	51
10	2909	5839986	5839814	4.3	999995.9	50
11	3280	5744676	5744671	5.2	999995.0	49
12	3491	5657665	5657658	6.2	999994.0	48
13	3781	5577622	5577615	7.3	999992.8	47
14	4072	5503514	5503506	8.4	999991.7	46
15	4363	5434522	5434513	9.6	999990.5	45
16	4654	5369984	5369973	10.9	999989.2	44
17	4945	5309360	5309348	12.3	999987.8	43
18	5236	5252202	5252188	13.8	999986.3	42
19	5527	5198136	5198120	15.4	999984.7	41
20	5818	5146843	5146836	17.0	999983.1	40
21	6109	5098054	5098045	18.7	999981.3	39
22	6399	5051534	5051514	20.5	999979.5	38
23	6690	5007083	5007060	22.4	999977.6	37
24	6981	4964524	4964499	24.4	999975.6	36
25	7272	4923703	4923676	26.5	999973.6	35
26	7563	4884483	4884454	28.7	999971.4	34
27	7854	4846743	4846712	30.9	999969.2	33
28	8145	4810376	4810343	33.2	999966.8	32
29	8436	4775286	4775250	[illegible]	999964.4	31
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
					Min.	

Deg. 89

Deg. 0 +|—

mi	Sines	Logarith.	Differen.	Logarith.	Sines	
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
31	9017	4708596	4708555	40.7	999959.3	29
32	9308	4676848	4676805	43.4	999956.6	28
33	9599	4646077	4646031	46.1	999953.9	27
34	9890	4616225	4616176	48.9	999951.1	26
35	10181	4587239	4587187	51.8	999948.2	25
36	10472	4559069	4559014	54.8	999945.2	24
37	10763	4531671	4531613	57.9	999942.1	23
38	11054	4505004	4504943	61.1	999938.9	22
39	11344	4479030	4478965	64.4	999935.7	21
40	11635	4453713	4453645	67.7	999932.3	20
41	11926	4429022	4428950	71.1	999928.9	19
42	12217	4404925	4404850	74.6	999925.4	18
43	12508	4381396	4381318	78.2	999921.8	17
44	12799	4358408	4358326	81.9	999918.1	16
45	13090	4335936	4335850	85.7	999914.3	15
46	13380	4313958	4313868	89.6	999910.5	14
47	13671	4292453	4292360	93.5	999906.5	13
48	13962	4271401	4271304	97.5	999902.5	12
49	14253	4250783	4250682	101.6	999898.4	11
50	14544	4230583	4230477	105.8	999894.2	10
51	14835	4210781	4210671	110.1	999890.0	9
52	15126	4191364	4191250	114.5	999885.6	8
53	15416	4172317	4172198	118.9	999881.1	7
54	15707	4153627	4153504	123.4	999876.6	6
55	15998	4135279	4135151	128.0	999872.0	5
56	16289	4117263	4117130	132.7	999867.3	4
57	16580	4100664	4100527	137.5	999862.5	3
58	16871	4082175	4082032	142.4	999857.7	2
59	17162	4065082	4064935	147.3	999852.7	1
60	17452	4048276	4048124	152.3	999847.7	0
					Min.	

Deg. 89

(FRIENDLY, 2009, Acesso em: 25 set. 2017)

1.2 HENRY BRIGGS

Os logaritmos de Briggs são os logaritmos de base 10 que foram extremamente úteis para o desenvolvimento dos cálculos aritméticos, uma vez que o nosso sistema de numeração é decimal. Napier não teve tempo de explorar esse novo conceito de logaritmo, falecendo em 1617, cabendo a Briggs a tarefa de construir uma tábua de logaritmo como base nessa nova ideia.

Calculando raízes sucessivas, Briggs construiu tabelas de logaritmos (Tabela 3). Sabendo que $\sqrt{10} \approx 3,16228$ podemos concluir que logaritmo de $3,16228$ na base 10 é aproximadamente $0,5$. A tabela 3 mostra como esse processo pode ser estendido para calcular outros logaritmos decimais.

Tabela 3 – Tábua de logaritmos decimais de Briggs.

$10^{1/2}$	= 3,16228	$10^{1/256}$	= 1,00904
$10^{1/4}$	= 1,77828	$10^{1/512}$	= 1,00451
$10^{1/8}$	= 1,33352	$10^{1/1024}$	= 1,00225
$10^{1/16}$	= 1,15478	$10^{1/2048}$	= 1,00112
$10^{1/32}$	= 1,07461	$10^{1/4096}$	= 1,00056
$10^{1/64}$	= 1,03663	$10^{1/8192}$	= 1,0028
$10^{1/128}$	= 1,01815	$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Autoria própria.

Segundo (EVES, 2008), em 1624, Briggs publicou sua *Arithimetica Logarithmica* que continha uma tábua de logaritmos, com 14 casa decimais, dos números de 1 a 20.000 e de 90 000 à 100.000. Uma tabela completa contendo os logaritmos de 1 a 100.000 foi concluída por Briggs e seus colegas Vlacq e Gunter, em 1620 e foi superada apenas quando, entre 1924 e 1949, foram publicadas tábuas com 20 casas decimais.

Para exemplificar como Briggs fez para calcular os logaritmos dos números naturais, tomemos $\log 2 = x$. Dessa forma, temos que encontrar o valor de x tal que $10^x = 2$. Vamos inicialmente buscar expoentes x_1 e x_2 tais que $10^{x_1} < 2 < 10^{x_2}$. Escolhemos $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. Em seguida tomamos a média aritmética dos extremos do intervalo $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 0,5$ e calculamos

$$10^{0,5} = \sqrt{10} \approx 3,1623 \Rightarrow 0 < x = \log 2 < 0,5.$$

Procedemos com a média aritmética dos extremos do intervalo obtido: $x_4 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3) = 0,25$ e calculando

$$10^{0,25} = \sqrt{\sqrt{10}} \approx 1,7782 \Rightarrow 0,25 < x = \log 2 < 0,5.$$

Em seguida fazemos $x_5 = \frac{1}{2}(x_4 + x_3) = 0,375$ e calculamos

$$10^{0,375} = 10^{3/8} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{1000}}} \approx 2,3714 \Rightarrow 0,25 < x = \log 2 < 0,375.$$

Seguindo esse processo, no aproximamos do valor de $\log 2$. Briggs calculou os logaritmo de números inteiros com precisão até a 14ª casa decimal. Para calcular alguns logaritmos ele usou outros obtidos anteriormente. Por exemplo, sabendo que $\log 2 \approx 0,30103$, ou seja, que

$10^{0,30103} \approx 2$, podemos calcular $\log 4$, pois $4 = 2^2 \approx (10^{0,30103})^2 = 10^{0,60206}$ e, portanto $\log 4 = 0,60206$.

Sobre o logaritmos de Briggs, Boyer e Merzbach comentam:

> O trabalho com logaritmos podia, a partir daí, ser realizado exatamente como hoje, pois para as tabelas de Briggs todas as leis usuais sobre logaritmos se aplicavam. Incidentalmente, é do livro de Briggs, de 1624, que provêm nossas palavras “mantissa” e “característica”. Enquanto Briggs, estava computando suas tabelas de logaritmos comuns, um professor de matemática contemporâneo, Jhon Speidell, calculou os logaritmos naturais das funções trigonométricas, publicando-os em seu *New Logarithmes*, de 1619. Alguns logaritmos naturais já tinham, na realidade, aparecido antes, em 1616, em uma tradução para o inglês feita por Edward Wrigth (1559 - 1615) da primeira obra de Napier sobre logaritmos, voltada para o uso dos navegantes. Poucas vezes uma descoberta nova “pegou” tão depressa quanto a invenção dos logaritmos, e o resultado foi o aparecimento imediato de tabelas de logaritmos. (BOYER; MERZBACH, 2012)

1.3 JOBST BÜRGI

Embora Napier tenha sido o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmos, o suíço Jobst[1] Bürgi (1552 - 1632) desenvolveu ideias semelhantes sem ter conhecimento dos trabalhos de Napier . Entretanto, segundo (BOYER; MERZBACH, 2012), Bürgi só publicou seus resultados em 1620, doze anos depois de Napier publicar a *Descriptio*. A obra de Bürgi sobre os logaritmos foi encontrada no livro *Arithmetische und geometrische Progress - Tabulen*. As obras de Napier e Bürgi diferem, segundo (BOYER; MERZBACH, 2012), pela terminologia adotada e pelos valores numéricos que usavam, os princípios fundamentais eram os mesmos. Os autores afirmam que

> Em vez de partir de um número um pouco menor que um (como Napier, que usava $1 - 10^{-7}$), Bürgi escolheu um número um pouco maior que um , $1 + 10^{-4}$, em vez de multiplicar as potências desse número por 10^7, Bürgi multiplicava por 10^8. Havia ainda outra pequena diferença: em sua tabulação, Bürgi multiplicava todos os seus índices de potências por dez. Isto é, se $N = 10^8(1 + 10^{-4})^L$, Bürgi chamava $10L$ o número “vermelho” correspondente ao número “preto” N. Se nesse esquema dividirmos todos os números pretos por 10^8 e todos os vermelhos por 10^5, teremos virtualmente um sistema de logaritmos naturais. (BOYER; MERZBACH, 2012)

Usando a terminologia preto e vermelho utilizada por Bürgi, tomemos como exemplo o número preto 1.000.000.000 e o vermelho 230.270,022. Deslocando a vírgula, equivale a dizer

[1] Também chamado Jost.

que $\ln 10 = 2,3027002$ em base 1,0001, pois $1,0001^{23027,0022} \approx 10$. Os logaritmos de Bürgi se aproximam mais aos atuais que os de Napier, pois a medida que os números pretos de Bürgi crescem, os vermelhos também crescem. Contudo, os dois sistemas de logaritmos possuem a desvantagem de o logaritmo de um produto ou o quociente não ser a soma ou a diferença dos logaritmos. Considere os logaritmos segundo Napier, onde:

$L_1 = \mathrm{NapLog} N_1$ e $L_2 = \mathrm{NapLog} N_2$, com

$N_1 = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{L_1}$ e $N_2 = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{L_2}$

Pela propriedade do logaritmo do produto que conhecemos atualmente, deveríamos ter $\mathrm{NapLog}(N_1 \cdot N_2) = \mathrm{NapLog} N_1 + \mathrm{NapLog} N_2$. Contudo, desenvolvendo o produto de N_1 por N_2, temos:

$$\begin{aligned} N_1 \cdot N_2 =& 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{L_1} \cdot 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{L_2} \\ =& 10^7 \cdot 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{L_1 + L_2} \\ \Rightarrow \frac{N_1 \cdot N_2}{10^7} =& 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{L_1 + L_2} \\ \Rightarrow \mathrm{NapLog}\left(\frac{N_1 \cdot N_2}{10^7}\right) =& \mathrm{NapLog}[10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{L_1 + L_2}] \\ =& (L_1 + L_2) \end{aligned}$$

Dessa forma, a soma do logaritmo de N_1 e N_2 é o logaritmo de $\frac{(N_1 \cdot N_2)}{10^7}$ e não de $N_1 \cdot N_2$.

1.4 O LOGARITMO COMO FUNÇÃO

No início do século XVII, Fermat (1601-1665) e outros matemáticos, usando de procedimentos analíticos, buscavam resolver problemas de quadraturas (cálculo de áreas) de curvas cuja equação geral é $y = x^n$, sendo n um número inteiro positivo. Segundo (MAOR, 2011), Fermat fez aproximações da área sob cada curva através de uma série de retângulos cujas bases formam uma progressão geométrica decrescente, chegando a fórmula $A = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, conhecida atualmente como a integral $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. O trabalho de Fermat não se restringia a quadratura de apenas uma curva, mas a de uma família de curvas, cujas fórmulas eram oriundas da equação $y = x^n$, para valores inteiro positivos de n. Quando n é um número negativo, $n = -m$, com $m > 0$, o procedimento de Fermat também era válido, ou seja, funcionava para uma família de curvas dadas pela equação $y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$. Entretanto, havia uma pequena falha na fórmula de Fermat, ela não valia para a hipérbole $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Isso ocorre porque para $n = -1$ o denominador $n + 1$ da fórmula da área tem valor 0.

Um matemático contemporâneo a Fermat, Grégoire (ou Gregorius) de Saint-Vicente $(1584 - 1667)$, resolveu o caso para $n = -1$. Em 1647, Saint-Vincent demonstrou pelo método dos infinitésimos de Cavalieri, em sua obra *Opus Geometricum Circuli et Sectionum Coni*, que a área $A(a, b)$ compreendida entre a hipérbole $y = \frac{1}{x}$, o eixo dos x e as verticais $x = a$ e $x = b$ (a e b positivos) tem a propriedade de que $A(a, b) = A(ta, tb)$, qualquer que seja t > 0. Isso implica que a relação entre a área e a distância é logarítmica. Se denotarmos por $A(t)$ a área sob a hipérbole, a partir de um ponto de referência fixo $x > 0$, até um ponto variável $x = t$, teremos $A(t) = \log t$.

Alfonso Anton de Sarasa (1618-1667), um dos alunos de Saint-Vicent, escreveu essa relação como sendo uma função logarítmica, sendo essa uma das primeiras vezes em que se usou os logaritmos como função, pois, até então, eles eram considerados como uma ferramenta de cálculo. Ficou estabelecido, então, que a fórmula $A(t) = \log t$ fornece a área sob a hipérbole como uma função de variável t, mais ainda não era adequada para a computação numérica porque não havia uma base estabelecida.

Segundo (MAOR, 2011) na obra de Euler intitulada *Introductio in Analysin Infinitorum*, publicada em 1748 e considerada o alicerce da moderna análise matemática ele introduziu a notação de $f(x)$ para uma função. O *Introductio* destacou o papel do número e e da função e^x na análise. Até a época de Euler a função exponencial era considerada meramente o inverso da função logarítmica. Ele colocou as duas funções em uma base igual, dando definições independentes para cada uma:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\ln x = \lim_{n \to \infty} n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

Resolvendo a expressão $y = (1 + \frac{x}{n})^n$ para x, obtemos

$$x = n \left(y^{\frac{1}{n}} - 1\right),$$

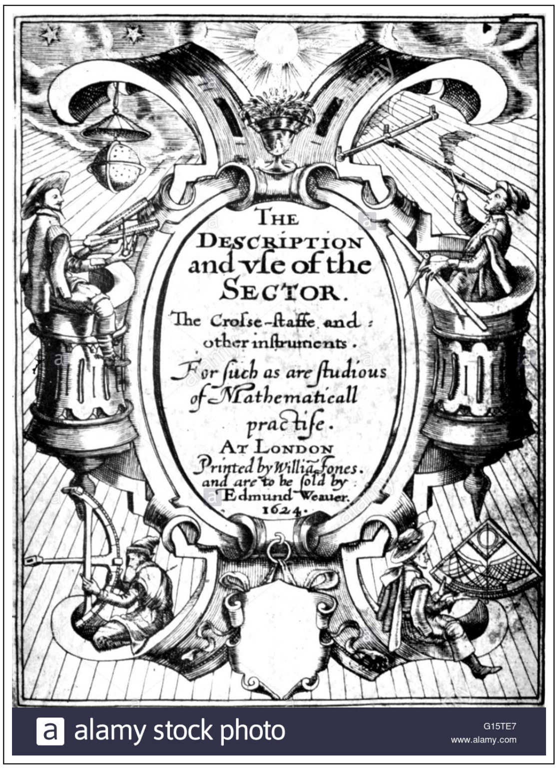
isso nos dá um indício de que as funções exponencial e logarítmica são inversas. Para mostrar esse fato, devemos mostrar que o limite das duas expressões quando x tende ao infinito definem funções inversas. Para tanto, faz-se necessário o uso de de alguns argumentos sutis relacionados com o processo de limite, contudo, na época de Euler não existia todo esse rigor nas demonstrações.

Euler também usou a letra e para a base do logaritmos natural, essa notação aparece pela primeira vez em seu trabalho *Mechanica* de 1736, no qual estabeleceu as fundações da mecânica analítica.

1.5 RÉGUA DE CÁLCULO

A invenção dos logaritmos está ligada com os esforços do século XVII para inventar instrumentos que facilitassem os cálculos. Essa descoberta possibilitou a construção das primeiras réguas de cálculo, construídas a partir de escalas logarítmicas. Segundo (BOYER; MERZBACH, 2012), foi Edmund Gunter (1581 – 1626), graduado da Christ Church, em Oxford e pastor de duas igrejas, quem inventou um instrumento de computação amplamente usado na época e precursor da régua de cálculo logarítmica. Sendo Gunter amigo de Briggs, foi nomeado professor de astronomia no Gresham Colllege, em 1620. Logo depois, publicou o *Description and use of the sector, the cross-staff and others instruments*, onde descreveu alguns instrumentos criados por ele.

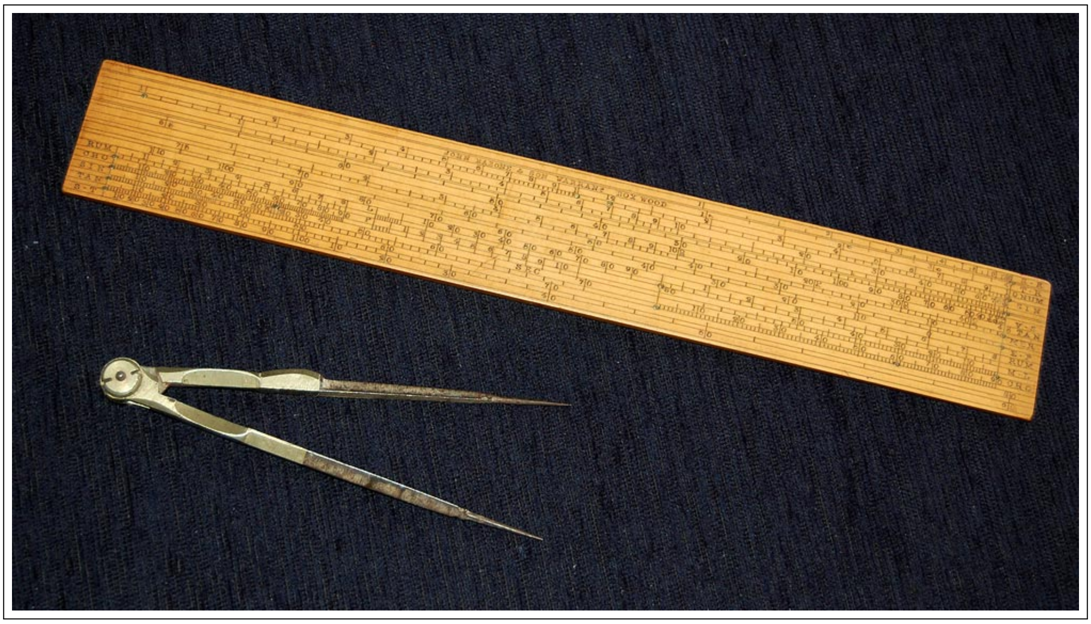
Figura 6 – Folha de rosto do "Description and use of the sector, the cross-staff and others instruments"


THE
DESCRIPTION
and vse of the
SECTOR.
The Crosse-staffe and
other instruments.
For such as are studious
of Mathematicall
practise.
AT LONDON
Printed by William Jones.
and are to be sold by
Edmund Weaver.
1624.

Fonte – (ALAMY, 2016, Acesso em: 25 set. 2017)

Um dos instrumentos inventados por Gunter ficou conhecido como Escala de Gunter (Figura 7) e consistia em uma escala logarítmica de dois pés de comprimento usada com um compasso. Contudo, esse instrumento tinha a desvantagem de ser muito grande. Edmund Wingate fez algumas adaptações nesse instrumento para diminuir o comprimento da régua, dividiu as escalas e usou ambos os lados da régua. Paralelamente, na década de 1630, foram publicadas diversas réguas de cálculo.

Figura 7 – Escala de Gunter



Fonte – (ZELDES, 2005, Acesso em: 20 dez. 2017)

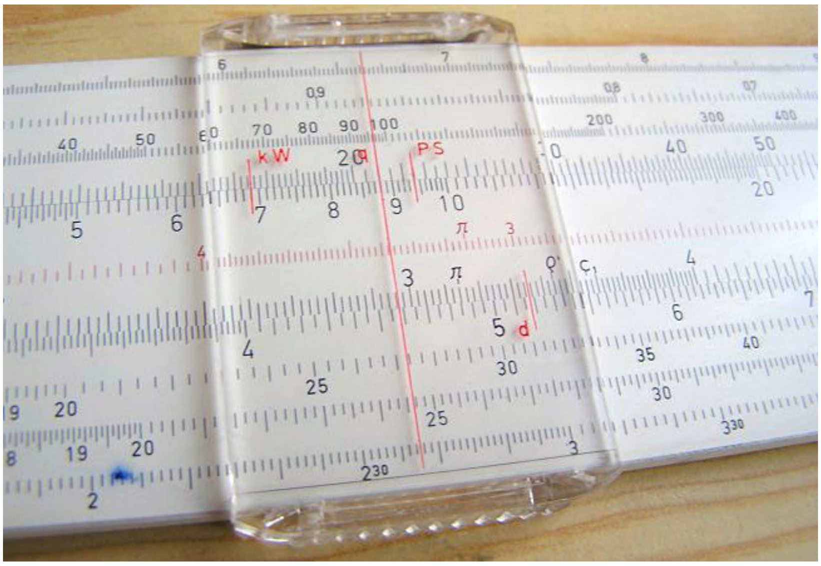
William Oughtred (1574 – 1660) inventou uma régua de cálculo linear e outra circular. A régua linear de Oughtred efetuava multiplicações e divisões com duas escalas logarítmicas, uma deslizando sobre a outra como na (Figura 8). Richard Delamain também projetou réguas de cálculo e revindicou prioridade sobre a invenção de Oughtred, alegando uma publicação anterior.

Segundo Eves,

> Em 1675 Issac Newton sugeriu um trilho para a régua de cálculo, mas essa ideia só veio a ser concretizada quase um século mais tarde. No século XVII inventaram-se vários tipos de régua de cálculo para propósitos especiais, como transações comerciais, medidas de vigas de madeira e outros. A escala $\log\log$ foi inventada em 1815 e foi só em 1850 que o oficial do exército Francês Amédée Mannheim (1831 – 1906) padronizou as modernas réguas de cálculo. (EVES, 2008)

A régua de cálculo com suas variantes foi, durante mais de 300 anos, uma ferramenta indispensável para engenheiros e cientistas, era um presente dado de pais para filhos ao final do ginásio. Durante anos ensinou-se a calcular usando logaritmos na escola de segundo grau ou nos cursos de matemática de nível superior. Porém com o surgimento das calculadoras, as réguas de cálculos tornaram-se obsoletas, tornando-se peças de museu. Contudo, a função logarítmica continua atual, pois as funções exponenciais e logarítmicas estão presentes na natureza e na análise e, portanto, os logaritmos permanecem como uma parte importante no ensino da matemática. Para utilizar adequadamente as réguas de cálculo é necessário entender as propriedades dos logaritmos, o que as torna um instrumento didático útil.

Figura 8 – Régua de cálculo moderna



Fonte – (WIKIPEDIA, 2014, Acesso em: 04 out. 2017)

1.6 DO LOGARITMO DE NAPIER AO CÁLCULO DIFERENCIAL

Desde a criação dos logaritmos de Napier até o desenvolvimento do Cálculo, atribuído a Newton e Libiniz, passou-se aproximadamente um século. As ideias de movimento e de velocidade nas criação do logaritmo de Napier e a pequena variação em relação ao número 1, na "base"de Napier, estão relacionadas com muitos desenvolvimentos na matemática da época, que contribuíram com surgimento do Cálculo Diferencial.

Nesse período áreas como a matemática, a física e a astronomia evoluíram consideravelmente e contou com a contribuição de muitos estudiosos. Para ajudar o leitor a localizar-se temporalmente, apresentamos uma breve linha do tempo destacando alguns dos nomes de matemáticos, físicos e astrônomos que realizaram trabalhos notáveis nesse período.

- (1550) John Napier, na Escócia, desenvolve o sistema de logaritmos e as tábuas de logaritmos.

- (1564-1642) Galileu Galilei, físico e matemático italiano, precursor do método científico, reconhece na matemática a linguagem imprescindível para a física.

- (1571-1630) Johannes Kepler, matemático e astrônomo alemão, descreve as Leis da Gravitação, as chamadas Leis de Kepler.

- (1595-1630) Bonaventura Cavalieri, sacerdote matemático italiano, discípulo de Galileu. Estudou astronomia, trigonometria esférica e cálculo logarítmico, foi precursor dos Cálculos Diferencial e Integral.

- (1596-1650) René Descartes, filósofo racionalista, físico e matemático francês, dá uma interpretação algébrica às construções geométricas, na geometria analítica.
- (1601-1665) Pierre de Fermat, matemático francês, continua o trabalho de Diofanto com a teoria dos números.
- (1608-1647) Evangelista Torricelli, italiano, desenvolve trabalhos em Hidráulica e determina o peso do ar.
- (1623-1662) Blaise Pascal, filósofo e matemático francês, formula as bases das leis da probabilidade moderna, hidrostática e propaga uma doutrina religiosa que ensina a experiência de Deus através da fé e não da razão.
- (1629-1695) Christian Huygens, físico e matemático holandês fez contribuições no desenvolvimento da astronomia e ondulatória.
- (1642-1727) Isaac Newton, descreve os princípios que regem a mecânica clássica e desenvolve o cálculo infinitesimal e integral.
- (1646-1716) Gottfried Wilhelm Leibniz, filósofo e matemático alemão, disputa com Isaac Newton, no século XVIII, a primazia do desenvolvimento do cálculo.
- (1707-1783) Leonhard Euler, matemático e cientista suíço. Entre suas contribuições mais conhecidas na matemática moderna estão: a introdução da função gama, a analogia entre o cálculo infinitesimal e o cálculo das diferenças finitas, quando discutiu minunciosamente todos os aspectos formais do Cálculo Diferencial e Integral, da época. Foi o primeiro matemático a trabalhar com as funções seno e cosseno. Em 1760, iniciou o estudo das linhas de curvatura e começou a desenvolver um novo ramo da matemática denominado Geometria Diferencial.

2 O CONTEÚDO DE LOGARITMOS NOS LIVROS DIDÁTICOS

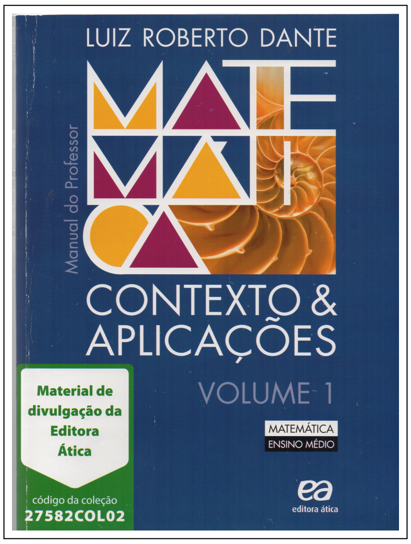
Tendo em vista o processo de criação do conceito de logaritmo e considerando a importância das fases de investigação inicial até a formalização que temos hoje é de se esperar que parte desse processo histórico da criação dos logaritmos esteja presente nas aulas de matemática. Veremos a seguir como alguns livros didáticos de matemática abordam esse conteúdo.

Foram analisados sete livros, aprovados pelo MEC e usados na Educação Básica, são eles: (1) Matemática: contexto e aplicações. Luiz Roberto Dante. Editora Àtica, 2013. (2) Matemática: novo Olhar. Joamir Souza. Editora FTD, 2013. (3) Matemática Paiva. Manoel Paiva. Editora Moderna, 2013. (4) Matemática: ensino médio. Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. Editora Saraiva, 2013. (5) Matemática: aula por aula.Claudio Xavier Silva e Benigno Barreto Filho. Editora FTD, 2005. (6) Matemática Completa. José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno. Editora FTD, 2005. (7) Matemática: ciências e aplicações. Iezzi, Dolce Degenszajn, Périgo e Almeida. Editora Saraiva, 2013.

A análise nos livros citados pretende observar como é feita a abordagem do conteúdo de logaritmos no Ensino Médio. Todos os livros analisados apresentam três volumes, uma para cada ano do Ensino Médio e ambos apresentam o conteúdo de logaritmos no primeiro volume e reservam um capítulo para o estudo de desse conteúdo.

2.1 LIVRO 1 - MATEMÁTICA: CONTEXTO E APLICAÇÕES - AUTOR: LUIZ ROBERTO DANTE

Figura 9 – Capa extraída do livro Matemática: contexto e aplicações de Luiz Roberto Dante, Editora Ática, 2013



Fonte – (DANTE,)

Abordagem inicial: Dante faz a abordagem inicial do conteúdo de logaritmos destacando a dificuldade de astrônomos e navegadores em realizar alguns cálculos matemáticos no início do século XVII. Segundo o autor, nessa época, Joost Bürgi e John Napier criaram as primeiras tábuas de logaritmos que eram usadas para facilitar a realização de cálculos de multiplicação e divisão, entretanto não exemplifica como isso ocorreu. O texto traz uma foto de Napier, de Bürgi e de uma calculadora antiga, criada por Napier.

Figura 10 – Ilustração da página 174 do livro Matemática: contexto e aplicações de Luiz Roberto Dante, Editora Ática, 2013

CAPÍTULO 6

Logaritmo e função logarítmica

Desde a Antiguidade, época do auge da civilização babilônica, os cálculos relacionados à Astronomia eram muito trabalhosos. Mais adiante, quando a navegação foi intensificada entre diversos povos, os cálculos envolvidos tornaram-se um grande problema.

Até o início do século XVII, multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes eram tarefas extremamente árduas, realizadas com base nos senos. Surgiram, então, as primeiras tábuas de logaritmos, criadas pelos matemáticos Jost Bürgi (1552-1632) e John Napier (1550-1617).

IOBST BURGIUS

Reprodução/Arquivo da editora

Jost Bürgi

Science source/Photo researchers/Latinstock

Calculadora antiga criada por John Napier, também conhecido como Neper.

Photoresearchers/Latinstock

John Napier

Apesar de o logaritmo de Napier não ser exatamente como o logaritmo moderno que estudaremos neste capítulo nem ser associado ao conceito de expoente, sua essência é a mesma, e contribuiu para facilitar os cálculos, principalmente, ao transformar as operações de multiplicação em adição e as de divisão em subtração, como veremos adiante.

Atualmente, com o uso das calculadoras eletrônicas, as operações de multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes não representam mais dificuldade. Mas nem por isso os logaritmos tornaram-se inúteis, pois a possibilidade de definir logaritmos como expoente (mérito do inglês John Wallis, em 1685) e a ideia de base para os logaritmos (apresentada pelo galês William Jones, em 1742) transformaram o logaritmo em um imprescindível instrumento de resolução de equações exponenciais.

Cálculos com logaritmos estão presentes em várias situações reais, como a medida da magnitude dos terremotos, feita por meio da **escala Richter**.

Você sabia?

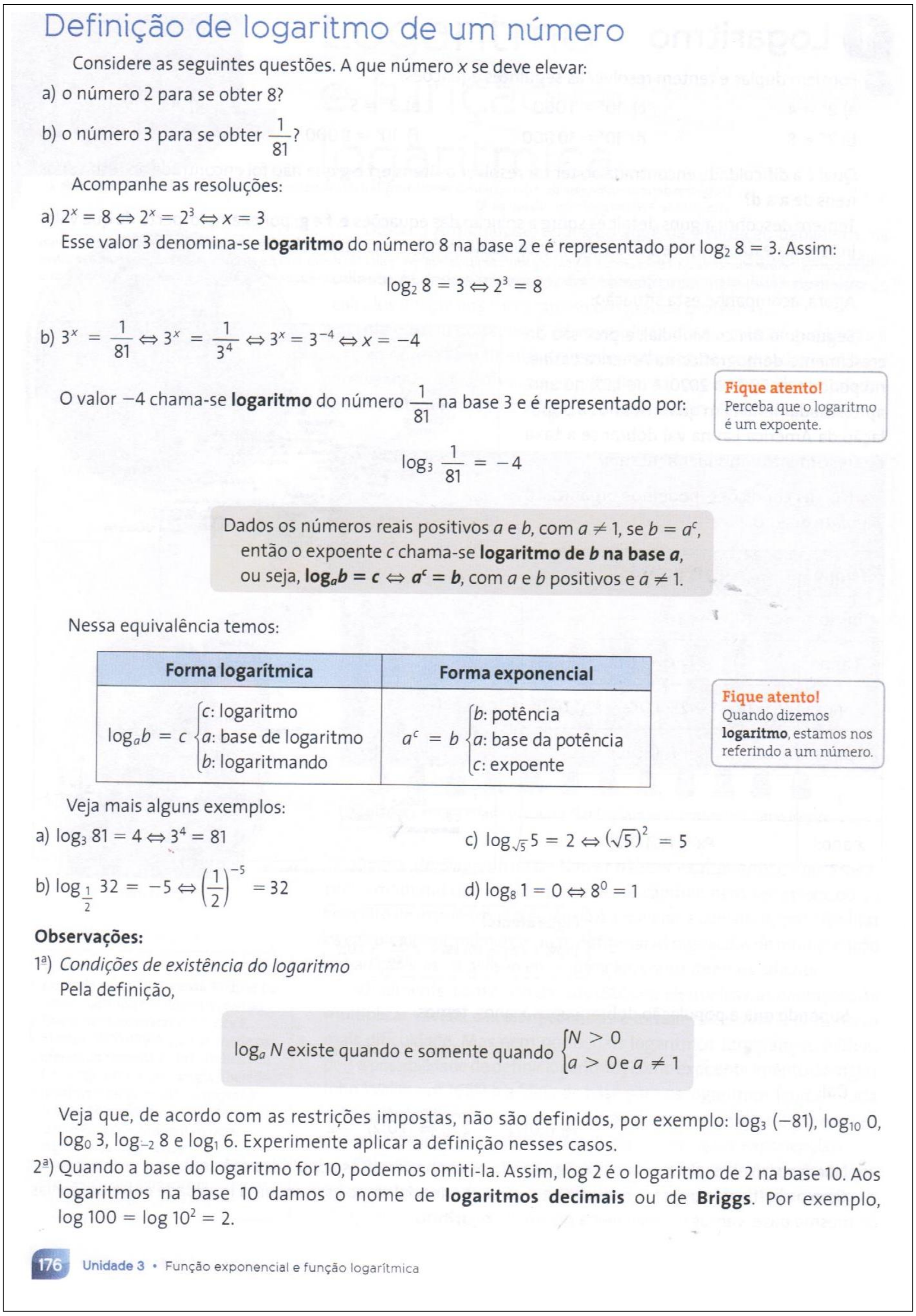
Adotada em 1935, a **escala Richter** foi assim batizada em homenagem ao físico norte-americano Charles F. Richter (1900-1985). Ela não mede os efeitos do terremoto, mas indica sua força em termos de energia liberada, conforme medida por sismógrafos. A escala começa em 1 e não tem limite superior. Como tem base logarítmica, cada aumento da magnitude em um número inteiro representa um aumento de 10 vezes na amplitude do terremoto.

174

Fonte – (DANTE,)

Definição de logaritmo: são propostas algumas equações exponenciais que não podem ser resolvidas escrevendo os dois membros da igualdade usando uma mesma base. A partir desse fato, o autor usa uma equação exponencial e define logaritmo, logo em seguida escreve a definição formal, expõe alguns exemplos e resolve alguns exercícios.

Figura 11 – Ilustração da página 176 do livro Matemática: contexto e aplicações de Luiz Roberto Dante, Editora Ática, 2013



Definição de logaritmo de um número

Considere as seguintes questões. A que número x se deve elevar:

a) o número 2 para se obter 8?

b) o número 3 para se obter $\frac{1}{81}$?

Acompanhe as resoluções:

a) $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$

Esse valor 3 denomina-se **logaritmo** do número 8 na base 2 e é representado por $\log_2 8 = 3$. Assim:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

b) $3^x = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-4} \Leftrightarrow x = -4$

O valor -4 chama-se **logaritmo** do número $\frac{1}{81}$ na base 3 e é representado por:

$$\log_3 \frac{1}{81} = -4$$

Fique atento!
Perceba que o logaritmo é um expoente.

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se **logaritmo de b na base a**, ou seja, $\boldsymbol{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b}$, com a e b positivos e $a \neq 1$.

Nessa equivalência temos:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_a b = c \begin{cases} c\text{: logaritmo} \\ a\text{: base de logaritmo} \\ b\text{: logaritmando} \end{cases}$	$a^c = b \begin{cases} b\text{: potência} \\ a\text{: base da potência} \\ c\text{: expoente} \end{cases}$

Fique atento!
Quando dizemos **logaritmo**, estamos nos referindo a um número.

Veja mais alguns exemplos:

a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

c) $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{5})^2 = 5$

d) $\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$

Observações:

1ª) *Condições de existência do logaritmo*

Pela definição,

$$\log_a N \text{ existe quando e somente quando } \begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$$

Veja que, de acordo com as restrições impostas, não são definidos, por exemplo: $\log_3(-81)$, $\log_{10} 0$, $\log_0 3$, $\log_{-2} 8$ e $\log_1 6$. Experimente aplicar a definição nesses casos.

2ª) Quando a base do logaritmo for 10, podemos omiti-la. Assim, $\log 2$ é o logaritmo de 2 na base 10. Aos logaritmos na base 10 damos o nome de **logaritmos decimais** ou de **Briggs**. Por exemplo, $\log 100 = \log 10^2 = 2$.

176 Unidade 3 • Função exponencial e função logarítmica

Fonte – (DANTE,)

Propriedades operatórias: em seguida, o livro traz as as propriedades do logaritmo de um produto, de um quociente, de uma potência e a mudança de base. São feitas demonstrações formais dessas propriedades, usando a definição de logaritmo dada pelo autor.

Exercícios: são propostos exercícios cuja resolução é feita a partir da aplicação direta da definição e das propriedades. Alguns exercícios sugeridos propõe o uso da calculadora. Há, também, exercícios que exploram diferentes contextos.

Função logarítmica: a função logarítmica é abordada usando o conceito de função inversa, ou seja através da função exponencial. Depois da definição formal e alguns exercícios é proposto o estudo do gráfico da função logarítmica.

Equações e inequações logarítmicas: o estudo de equações e inequações logarítmicas é feito através da resolução de exercícios.

Aplicação: além de alguns exercícios que exemplificam a aplicação dos logaritmos, o livro dedica duas páginas para relacionar logaritmos com terremotos e tsunamis.

Considerações: o livro contém uma variedade de exercícios que vai desde a prática mecânica para fixação da definição e propriedades até os bem elaborados, com aplicação em diferentes áreas, com uso de tecnologias como a calculadora e ambientes gráficos. Contudo a abordagem inicial, resgatando e história do surgimento dos logaritmos é desconexa e evasiva. Não fica claro, sequer, quem inventou os logaritmos e nem há menção de como isso foi feito. Da forma como foi exposto fica claro que Napier inventou uma calculadora, que não tem, necessariamente, relação com os logaritmos.

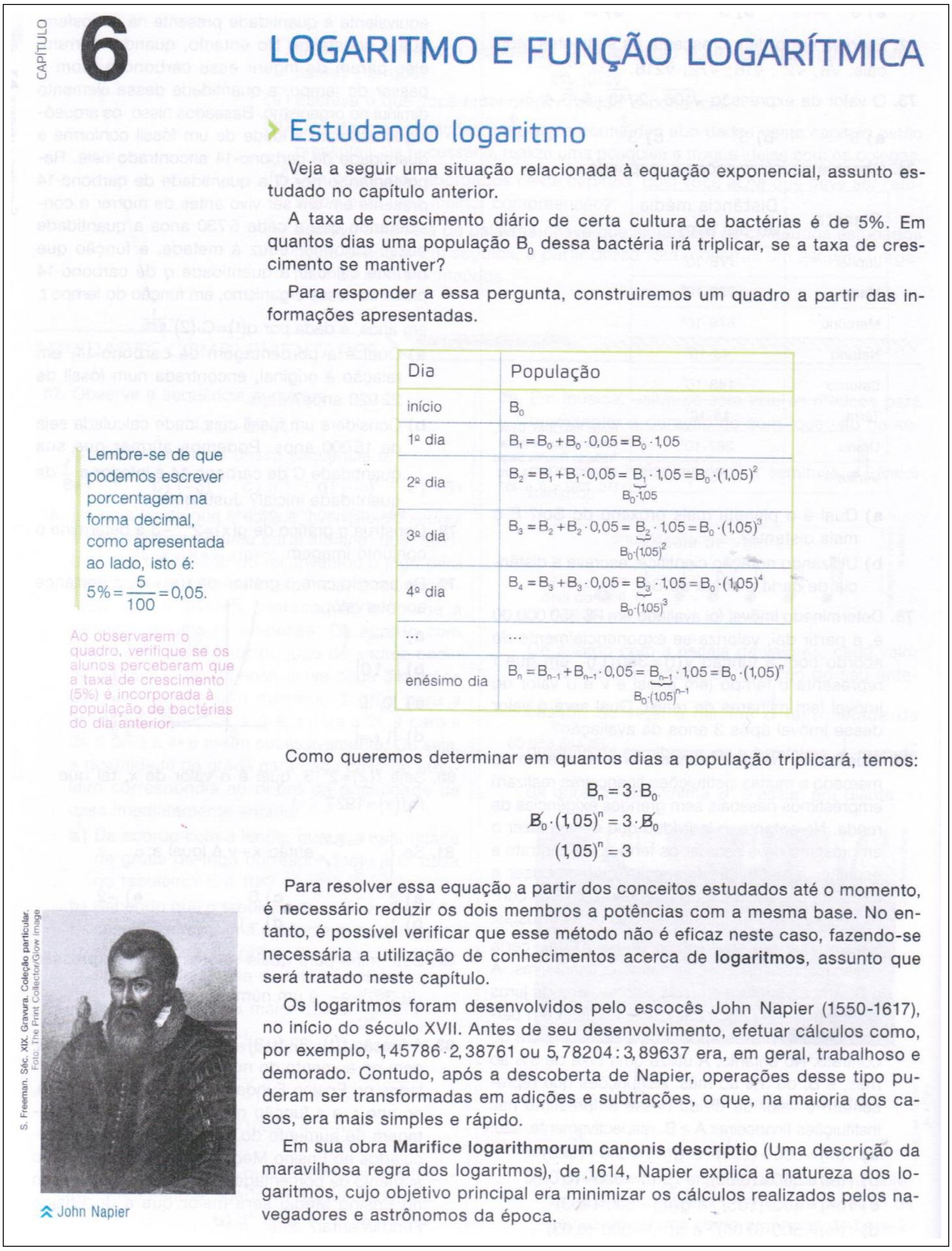
2.2 LIVRO 2 - MATEMÁTICA: NOVO OLHAR - AUTOR: JOAMIR SOUZA

Figura 12 – Capa extraída do livro Matemática: novo olhar de Joamir Souza, Editora FTD, 2013

Fonte – (SOUZA, 20013)

Abordagem inicial: o autor sugere, inicialmente, um problema sobre o crescimento de uma cultura de bactérias que é modelado através de uma função exponencial. Os dados do problema não permitem resolvê-lo com os conhecimentos de equação exponencial estudado anteriormente, fazendo necessário o estudo de logaritmos. Em seguida, em três parágrafos, o autor relata sobre a história dos logaritmos, destacando o nome de John Napier. Traz, também, uma ilustração das “Barras de Napier” (Figura 14), acompanhada de um breve comentário.

Figura 13 – Ilustração da página 172 do livro Matemática: novo olhar de Joamir Souza, Editora FTD, 2013



CAPÍTULO 6

LOGARITMO E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Estudando logaritmo

Veja a seguir uma situação relacionada à equação exponencial, assunto estudado no capítulo anterior.

A taxa de crescimento diário de certa cultura de bactérias é de 5%. Em quantos dias uma população B_0 dessa bactéria irá triplicar, se a taxa de crescimento se mantiver?

Para responder a essa pergunta, construiremos um quadro a partir das informações apresentadas.

Lembre-se de que podemos escrever porcentagem na forma decimal, como apresentada ao lado, isto é: $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$.

Ao observarem o quadro, verifique se os alunos perceberam que a taxa de crescimento (5%) é incorporada à população de bactérias do dia anterior.

Dia	População
início	B_0
1º dia	$B_1 = B_0 + B_0 \cdot 0{,}05 = B_0 \cdot 1{,}05$
2º dia	$B_2 = B_1 + B_1 \cdot 0{,}05 = \underbrace{B_1}_{B_0 \cdot 1{,}05} \cdot 1{,}05 = B_0 \cdot (1{,}05)^2$
3º dia	$B_3 = B_2 + B_2 \cdot 0{,}05 = \underbrace{B_2}_{B_0 \cdot (1{,}05)^2} \cdot 1{,}05 = B_0 \cdot (1{,}05)^3$
4º dia	$B_4 = B_3 + B_3 \cdot 0{,}05 = \underbrace{B_3}_{B_0 \cdot (1{,}05)^3} \cdot 1{,}05 = B_0 \cdot (1{,}05)^4$
...	...
enésimo dia	$B_n = B_{n-1} + B_{n-1} \cdot 0{,}05 = \underbrace{B_{n-1}}_{B_0 \cdot (1{,}05)^{n-1}} \cdot 1{,}05 = B_0 \cdot (1{,}05)^n$

Como queremos determinar em quantos dias a população triplicará, temos:

$$B_n = 3 \cdot B_0$$
$$\cancel{B_0} \cdot (1{,}05)^n = 3 \cdot \cancel{B_0}$$
$$(1{,}05)^n = 3$$

Para resolver essa equação a partir dos conceitos estudados até o momento, é necessário reduzir os dois membros a potências com a mesma base. No entanto, é possível verificar que esse método não é eficaz neste caso, fazendo-se necessária a utilização de conhecimentos acerca de **logaritmos**, assunto que será tratado neste capítulo.

Os logaritmos foram desenvolvidos pelo escocês John Napier (1550-1617), no início do século XVII. Antes de seu desenvolvimento, efetuar cálculos como, por exemplo, $1{,}45786 \cdot 2{,}38761$ ou $5{,}78204 : 3{,}89637$ era, em geral, trabalhoso e demorado. Contudo, após a descoberta de Napier, operações desse tipo puderam ser transformadas em adições e subtrações, o que, na maioria dos casos, era mais simples e rápido.

Em sua obra **Marifice logarithmorum canonis descriptio** (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos), de 1614, Napier explica a natureza dos logaritmos, cujo objetivo principal era minimizar os cálculos realizados pelos navegadores e astrônomos da época.

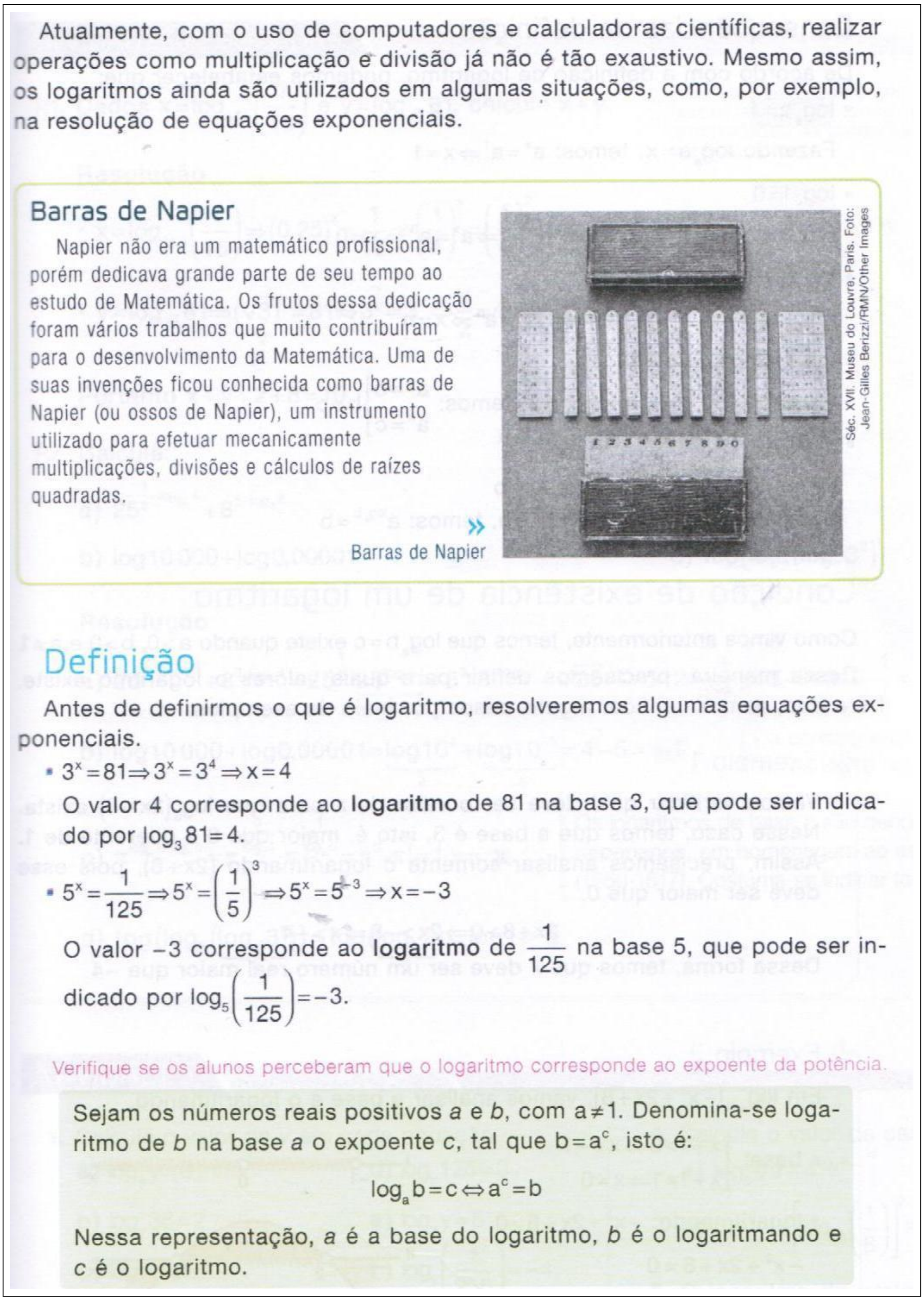
S. Freeman. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular. Foto: The Print Collector/Glow Image

John Napier

Fonte – (SOUZA, 20013)

Definição de logaritmo: na página 173 é feita a definição de logaritmos a partir de uma equação exponencial. São dados dois exemplos resolvidos de equação exponencial e nestes são destacados o logaritmo, o logaritmando e a base. Em seguida é apresentada a definição formal, destacando a condição de existência de um logaritmo. Na sequência, exemplos de aplicação da definição e exercícios.

Figura 14 – Ilustração da página 173 do livro Matemática: novo olhar de Joamir Souza, Editora FTD, 2013



Atualmente, com o uso de computadores e calculadoras científicas, realizar operações como multiplicação e divisão já não é tão exaustivo. Mesmo assim, os logaritmos ainda são utilizados em algumas situações, como, por exemplo, na resolução de equações exponenciais.

Barras de Napier

Napier não era um matemático profissional, porém dedicava grande parte de seu tempo ao estudo de Matemática. Os frutos dessa dedicação foram vários trabalhos que muito contribuíram para o desenvolvimento da Matemática. Uma de suas invenções ficou conhecida como barras de Napier (ou ossos de Napier), um instrumento utilizado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e cálculos de raízes quadradas.

Séc. XVII. Museu do Louvre, Paris. Foto: Jean-Gilles Berizzi/RMN/Other Images

» Barras de Napier

Definição

Antes de definirmos o que é logaritmo, resolveremos algumas equações exponenciais.

- $3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$

O valor 4 corresponde ao **logaritmo** de 81 na base 3, que pode ser indicado por $\log_3 81 = 4$.

- $5^x = \frac{1}{125} \Rightarrow 5^x = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow 5^x = 5^{-3} \Rightarrow x = -3$

O valor -3 corresponde ao **logaritmo** de $\frac{1}{125}$ na base 5, que pode ser indicado por $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$.

Verifique se os alunos perceberam que o logaritmo corresponde ao expoente da potência.

Sejam os números reais positivos *a* e *b*, com $a \neq 1$. Denomina-se logaritmo de *b* na base *a* o expoente *c*, tal que $b = a^c$, isto é:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Nessa representação, *a* é a base do logaritmo, *b* é o logaritmando e *c* é o logaritmo.

Fonte – (SOUZA, 20013)

Propriedades operatórias: a página 177 traz as propriedades operatórias dos logaritmos com demonstrações que tem como base a definição. Em seguida, nas páginas 178 e 179, mais exercícios, com destaque para o exercício 23 que relaciona os logaritmos com o Potencial de Hidrogênio (PH). Nas três páginas seguintes é feito o estudo da mudança de base com outras sugestões de exercícios.

Função logarítmica: a definição de função logarítmica é feita a partir da função exponencial, explorando o conceito de função inversa. Na página 184 o autor faz um esboço do gráfico da função logarítmica para base maior que um e entre zero e 1 um. Nesta mesma página, traz uma nota sobre a espiral logarítmica. Na página 185 são apresentados exemplos que ilustram as funções exponenciais e logarítmicas no plano cartesiano, assim como suas respectivas inversas. Na página 186 e 187, destaque para um exercício contextualizado sobre a aplicação de logaritmos no estudo de terremotos, especificamente sobre a Escala Richter, que é logarítmica.

Figura 15 – Ilustração da página 184 do livro Matemática: novo olhar de Joamir Souza, Editora FTD, 2013

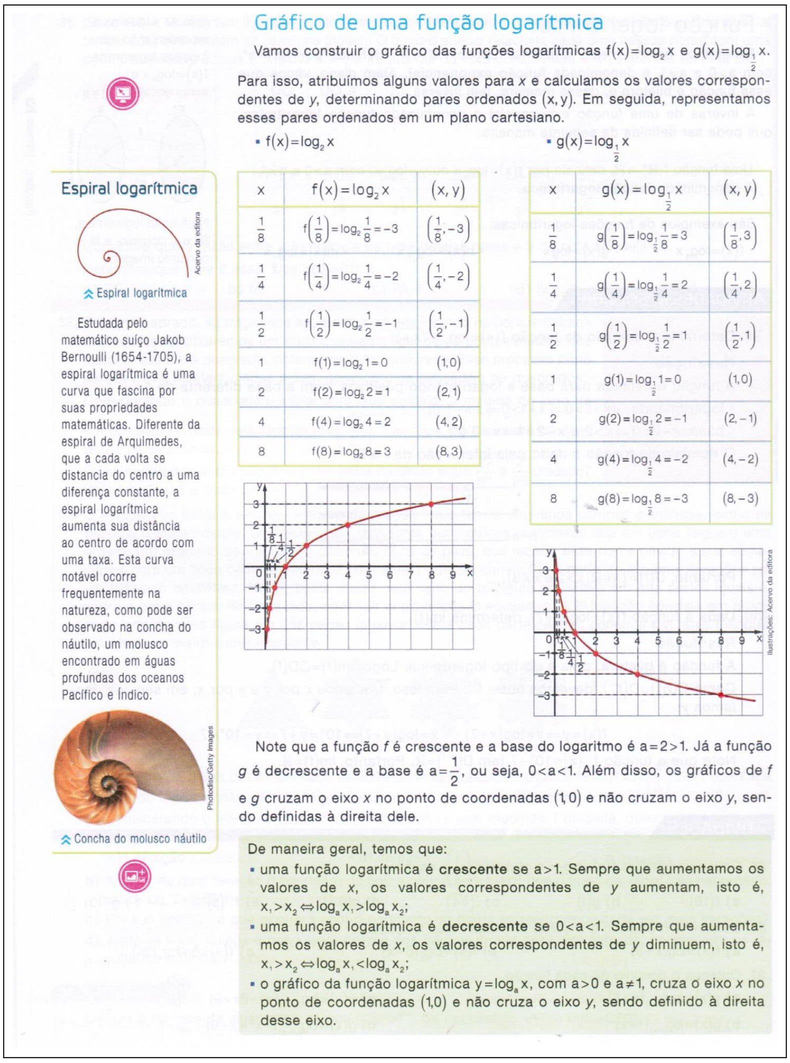


Gráfico de uma função logarítmica

Vamos construir o gráfico das funções logarítmicas $f(x)=\log_2 x$ e $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Para isso, atribuímos alguns valores para *x* e calculamos os valores correspondentes de *y*, determinando pares ordenados (x, y). Em seguida, representamos esses pares ordenados em um plano cartesiano.

- $f(x)=\log_2 x$

x	$f(x)=\log_2 x$	(x, y)
$\frac{1}{8}$	$f\left(\frac{1}{8}\right)=\log_2 \frac{1}{8}=-3$	$\left(\frac{1}{8}, -3\right)$
$\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2 \frac{1}{4}=-2$	$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2 \frac{1}{2}=-1$	$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
1	$f(1)=\log_2 1=0$	$(1, 0)$
2	$f(2)=\log_2 2=1$	$(2, 1)$
4	$f(4)=\log_2 4=2$	$(4, 2)$
8	$f(8)=\log_2 8=3$	$(8, 3)$

- $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

x	$g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$	(x, y)
$\frac{1}{8}$	$g\left(\frac{1}{8}\right)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}=3$	$\left(\frac{1}{8}, 3\right)$
$\frac{1}{4}$	$g\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}=2$	$\left(\frac{1}{4}, 2\right)$
$\frac{1}{2}$	$g\left(\frac{1}{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}=1$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
1	$g(1)=\log_{\frac{1}{2}} 1=0$	$(1, 0)$
2	$g(2)=\log_{\frac{1}{2}} 2=-1$	$(2, -1)$
4	$g(4)=\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$	$(4, -2)$
8	$g(8)=\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$	$(8, -3)$

Ilustrações: Acervo da editora

Note que a função *f* é crescente e a base do logaritmo é $a=2>1$. Já a função *g* é decrescente e a base é $a=\frac{1}{2}$, ou seja, $0<a<1$. Além disso, os gráficos de *f* e *g* cruzam o eixo *x* no ponto de coordenadas $(1, 0)$ e não cruzam o eixo *y*, sendo definidas à direita dele.

De maneira geral, temos que:

- uma função logarítmica é **crescente** se $a>1$. Sempre que aumentamos os valores de *x*, os valores correspondentes de *y* aumentam, isto é, $x_1>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1>\log_a x_2$;
- uma função logarítmica é **decrescente** se $0<a<1$. Sempre que aumentamos os valores de *x*, os valores correspondentes de *y* diminuem, isto é, $x_1>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1<\log_a x_2$;
- o gráfico da função logarítmica $y=\log_a x$, com $a>0$ e $a \neq 1$, cruza o eixo *x* no ponto de coordenadas $(1, 0)$ e não cruza o eixo *y*, sendo definido à direita desse eixo.

Espiral logarítmica

Acervo da editora

Espiral logarítmica

Estudada pelo matemático suíço Jakob Bernoulli (1654-1705), a espiral logarítmica é uma curva que fascina por suas propriedades matemáticas. Diferente da espiral de Arquimedes, que a cada volta se distancia do centro a uma diferença constante, a espiral logarítmica aumenta sua distância ao centro de acordo com uma taxa. Esta curva notável ocorre frequentemente na natureza, como pode ser observado na concha do náutilo, um molusco encontrado em águas profundas dos oceanos Pacífico e Índico.

Photodisc/Getty Images

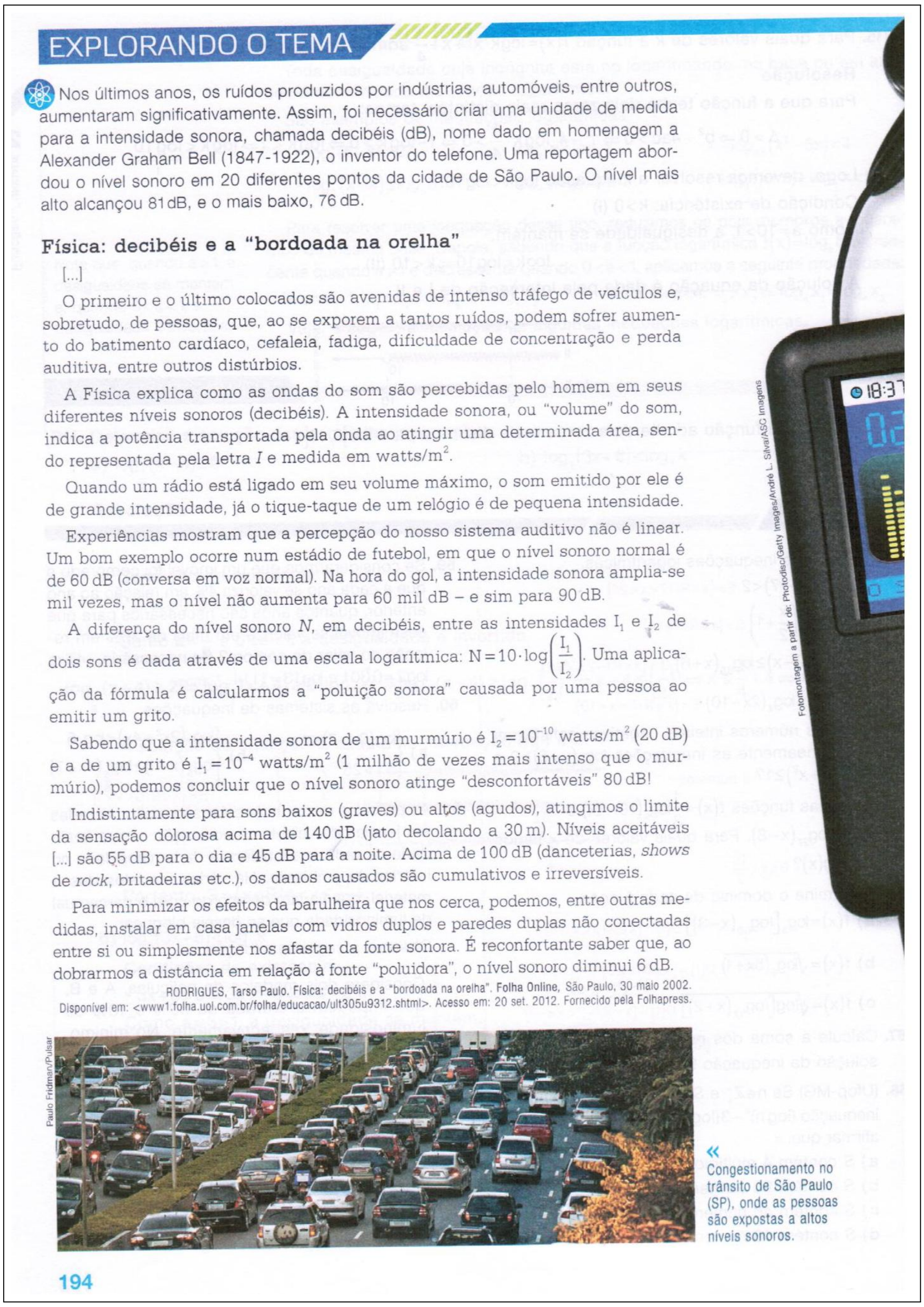
Concha do molusco náutilo

Fonte – (SOUZA, 20013)

Equações e inequações logarítmicas: o livro dedica seis página para o estudo de equações e inequações logarítmicas, com exemplos e exercícios. Sobre esse tópico é sugerido um exercício contextualizado sobre o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH).

Aplicação: além dos exercícios de aplicação sugeridos nas páginas anteriores, no final do capítulo, páginas 194 à 198 o autor traz um texto complementar sobre decibéis, destacando a utilização da escala logarítmica, além de outros exercícios de aplicação.

Figura 16 – Ilustração da página 194 do livro Matemática: novo olhar de Joamir Souza, Editora FTD, 2013



EXPLORANDO O TEMA

Nos últimos anos, os ruídos produzidos por indústrias, automóveis, entre outros, aumentaram significativamente. Assim, foi necessário criar uma unidade de medida para a intensidade sonora, chamada decibéis (dB), nome dado em homenagem a Alexander Graham Bell (1847-1922), o inventor do telefone. Uma reportagem abordou o nível sonoro em 20 diferentes pontos da cidade de São Paulo. O nível mais alto alcançou 81 dB, e o mais baixo, 76 dB.

Física: decibéis e a "bordoada na orelha"

[...]

O primeiro e o último colocados são avenidas de intenso tráfego de veículos e, sobretudo, de pessoas, que, ao se exporem a tantos ruídos, podem sofrer aumento do batimento cardíaco, cefaleia, fadiga, dificuldade de concentração e perda auditiva, entre outros distúrbios.

A Física explica como as ondas do som são percebidas pelo homem em seus diferentes níveis sonoros (decibéis). A intensidade sonora, ou "volume" do som, indica a potência transportada pela onda ao atingir uma determinada área, sendo representada pela letra I e medida em watts/m^2.

Quando um rádio está ligado em seu volume máximo, o som emitido por ele é de grande intensidade, já o tique-taque de um relógio é de pequena intensidade.

Experiências mostram que a percepção do nosso sistema auditivo não é linear. Um bom exemplo ocorre num estádio de futebol, em que o nível sonoro normal é de 60 dB (conversa em voz normal). Na hora do gol, a intensidade sonora amplia-se mil vezes, mas o nível não aumenta para 60 mil dB – e sim para 90 dB.

A diferença do nível sonoro N, em decibéis, entre as intensidades I_1 e I_2 de dois sons é dada através de uma escala logarítmica: $N = 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$. Uma aplicação da fórmula é calcularmos a "poluição sonora" causada por uma pessoa ao emitir um grito.

Sabendo que a intensidade sonora de um murmúrio é $I_2 = 10^{-10}$ watts/m^2 (20 dB) e a de um grito é $I_1 = 10^{-4}$ watts/m^2 (1 milhão de vezes mais intenso que o murmúrio), podemos concluir que o nível sonoro atinge "desconfortáveis" 80 dB!

Indistintamente para sons baixos (graves) ou altos (agudos), atingimos o limite da sensação dolorosa acima de 140 dB (jato decolando a 30 m). Níveis aceitáveis [...] são 55 dB para o dia e 45 dB para a noite. Acima de 100 dB (danceterias, *shows* de *rock*, britadeiras etc.), os danos causados são cumulativos e irreversíveis.

Para minimizar os efeitos da barulheira que nos cerca, podemos, entre outras medidas, instalar em casa janelas com vidros duplos e paredes duplas não conectadas entre si ou simplesmente nos afastar da fonte sonora. É reconfortante saber que, ao dobrarmos a distância em relação à fonte "poluidora", o nível sonoro diminui 6 dB.

RODRIGUES, Tarso Paulo. Física: decibéis e a "bordoada na orelha". **Folha Online**, São Paulo, 30 maio 2002. Disponível em: <www1.folha.uol.com.br/folha/educacao/ult305u9312.shtml>. Acesso em: 20 set. 2012. Fornecido pela Folhapress.

Fotomontagem a partir de: Photodisc/Getty Images/André L. Silva/ASG Imagens

Paulo Fridman/Pulsar

« Congestionamento no trânsito de São Paulo (SP), onde as pessoas são expostas a altos níveis sonoros.

194

Fonte – (SOUZA, 20013)

Considerações: para introduzir um novo conceito, nesse caso o logaritmo, o autor parte do conteúdo de equação exponencial, estudado anteriormente. Através de um exemplo onde as ferramentas de cálculos conhecidas até o momento não foram suficientes. Assim fez-se necessário o estudo dos logaritmos. Na sequência o autor menciona que o surgimento dos logaritmos se deu através da tentativa de facilitar cálculos de multiplicação e divisão, contudo, não explica como fazê-lo. De maneira sucinta, descreve a utilidade dos logaritmos na época de seu surgimento e nos tempos atuais. O grande diferencial desse livro é a quantidade de exercícios contextualizados, com temas atuais, que permite discussões que permeiam diferentes áreas do conhecimento.

2.3 LIVRO - MATEMÁTICA - AUTOR: MANOEL PAIVA

Figura 17 – Capa extraída do livro Matemática de Manoel Paiva, Editora Moderna, 2013

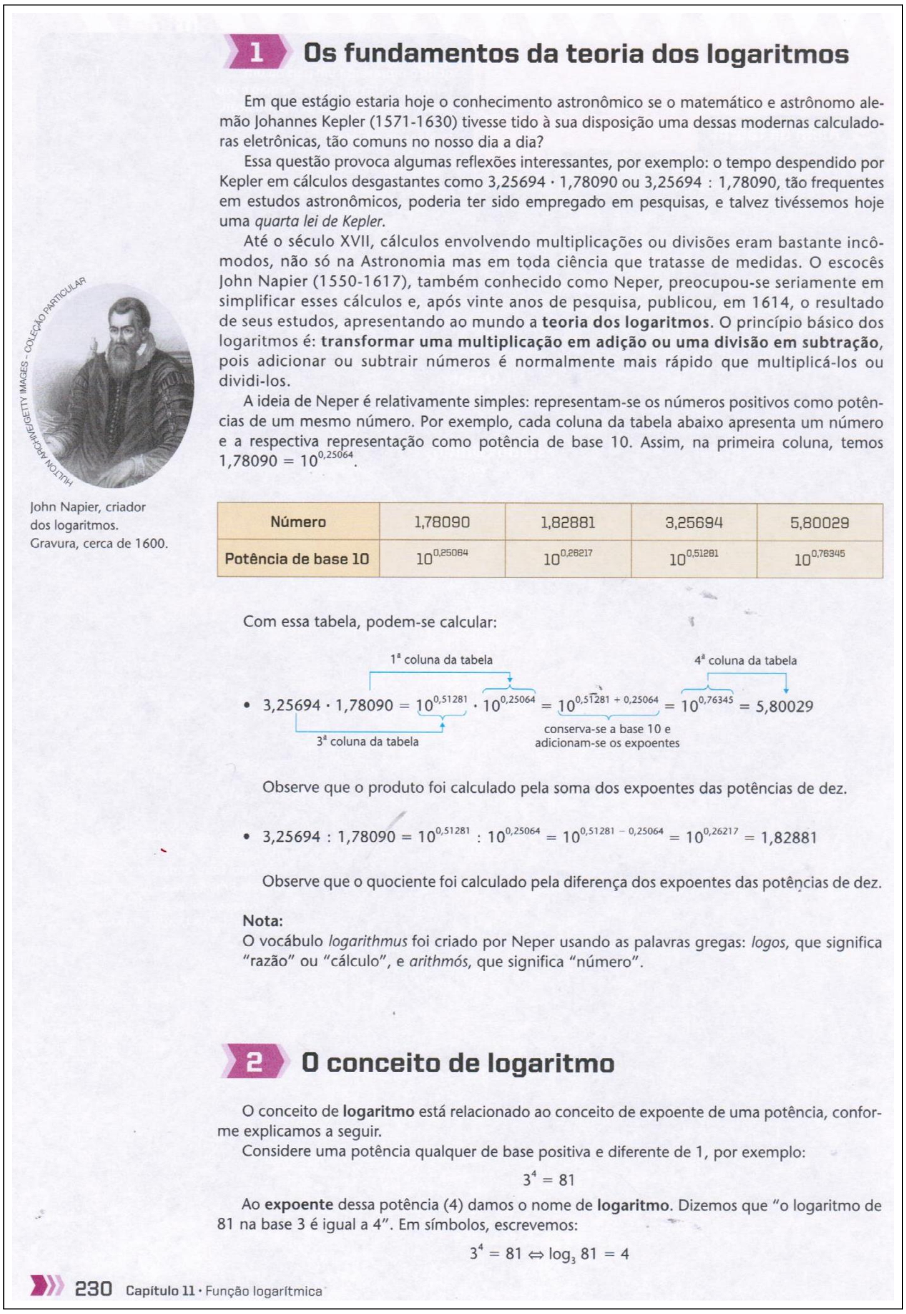
Fonte – (PAIVA, 2013)

Abordagem inicial: o texto “Os fundamentos da teoria dos logaritmos”, (Figura 18), inicia o capítulo citando o nome de John Napier como criador da teoria dos logaritmos, tendo como ideia fundamental a transformação de uma multiplicação em uma adição e de uma divisão em subtração, simplificando cálculos que, na época, eram desgastantes.

Definição de logaritmo:o autor apresenta uma pequena tabela contendo um número e sua representação em base 10, e fazendo relação entre o expoente dessa potencia e o logaritmo do número. Na sequência alguns exemplos e a definição formal. Na página 231 há uma nota explicando a unicidade e existência dos logaritmos. Na página seguinte aparece o conceito de logaritmo decimal, que é apresentado com base em um texto sobre a intensidade dos terremotos e a Escala Richter.

Propriedades operatórias: as páginas 232 à 234 contêm as propriedades dos logaritmos decorrentes da definição e suas demonstrações, na sequência, exercícios. Na página 235 estão listadas as propriedades operatórias e suas demonstrações a partir da definição. Em seguida, exercícios resolvidos e sugestão de exercícios.

Figura 18 – Ilustração da página 230 do livro Matemática de Manoel Paiva, Editora Moderna, 2013



1 Os fundamentos da teoria dos logaritmos

Em que estágio estaria hoje o conhecimento astronômico se o matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) tivesse tido à sua disposição uma dessas modernas calculadoras eletrônicas, tão comuns no nosso dia a dia?

Essa questão provoca algumas reflexões interessantes, por exemplo: o tempo despendido por Kepler em cálculos desgastantes como 3,25694 · 1,78090 ou 3,25694 : 1,78090, tão frequentes em estudos astronômicos, poderia ter sido empregado em pesquisas, e talvez tivéssemos hoje uma *quarta lei de Kepler*.

Até o século XVII, cálculos envolvendo multiplicações ou divisões eram bastante incômodos, não só na Astronomia mas em toda ciência que tratasse de medidas. O escocês John Napier (1550-1617), também conhecido como Neper, preocupou-se seriamente em simplificar esses cálculos e, após vinte anos de pesquisa, publicou, em 1614, o resultado de seus estudos, apresentando ao mundo a **teoria dos logaritmos**. O princípio básico dos logaritmos é: **transformar uma multiplicação em adição ou uma divisão em subtração**, pois adicionar ou subtrair números é normalmente mais rápido que multiplicá-los ou dividi-los.

John Napier, criador dos logaritmos. Gravura, cerca de 1600.

A ideia de Neper é relativamente simples: representam-se os números positivos como potências de um mesmo número. Por exemplo, cada coluna da tabela abaixo apresenta um número e a respectiva representação como potência de base 10. Assim, na primeira coluna, temos $1{,}78090 = 10^{0{,}25064}$.

Número	1,78090	1,82881	3,25694	5,80029
Potência de base 10	$10^{0{,}25064}$	$10^{0{,}26217}$	$10^{0{,}51281}$	$10^{0{,}76345}$

Com essa tabela, podem-se calcular:

1ª coluna da tabela   4ª coluna da tabela

- $3{,}25694 \cdot 1{,}78090 = 10^{0{,}51281} \cdot 10^{0{,}25064} = \underbrace{10^{0{,}51281 + 0{,}25064}}_{\text{conserva-se a base 10 e adicionam-se os expoentes}} = 10^{0{,}76345} = 5{,}80029$

3ª coluna da tabela

Observe que o produto foi calculado pela soma dos expoentes das potências de dez.

- $3{,}25694 : 1{,}78090 = 10^{0{,}51281} : 10^{0{,}25064} = 10^{0{,}51281 - 0{,}25064} = 10^{0{,}26217} = 1{,}82881$

Observe que o quociente foi calculado pela diferença dos expoentes das potências de dez.

Nota:
O vocábulo *logarithmus* foi criado por Neper usando as palavras gregas: *logos*, que significa "razão" ou "cálculo", e *arithmós*, que significa "número".

2 O conceito de logaritmo

O conceito de **logaritmo** está relacionado ao conceito de expoente de uma potência, conforme explicamos a seguir.

Considere uma potência qualquer de base positiva e diferente de 1, por exemplo:

$$3^4 = 81$$

Ao **expoente** dessa potência (4) damos o nome de **logaritmo**. Dizemos que "o logaritmo de 81 na base 3 é igual a 4". Em símbolos, escrevemos:

$$3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$$

230 Capítulo 11 · Função logarítmica

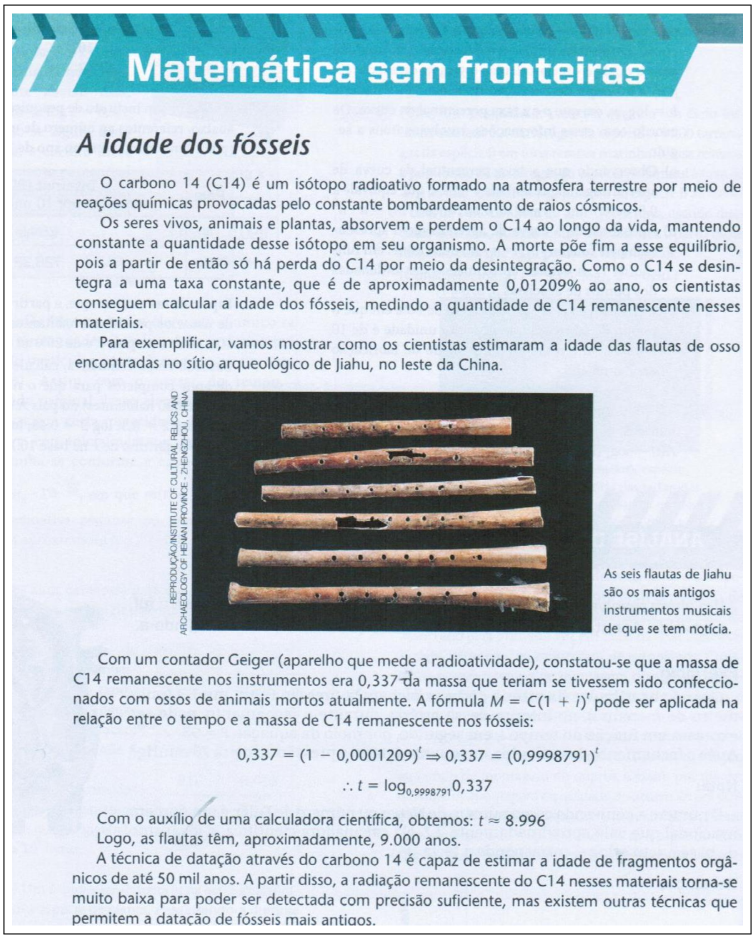
Fonte – (PAIVA, 2013)

Função logarítmica: na página 239, a motivação para o estudo de funções logarítmicas é feita destacando a utilização desse conteúdo em situações do cotidiano como juros em aplicações financeiras, crescimento populacional, decaimento radiativo, depreciação de um bem, entre outros. Depois desses exemplos, a definição é apresentada de forma direta e seguida dos gráficos nos casos da função crescente e decrescente, e é complementada com a comparação entre a função exponencial e logarítmica e outros exercícios.

Equações e inequações logarítmicas: esse conteúdo é introduzido com um texto que relaciona equações logarítmicas com a medida de nível sonoro em um show de rock. Depois de alguns exemplos e exercícios resolvidos são propostos outros para resolução. O estudo das inequações logarítmicas parte de um exemplo onde é necessário determinar a área devastada em um incêndio florestal em função do tempo. Em seguida, alguns exemplos e exercícios propostos são apresentados.

Aplicação: além dos exercícios contextualizados que aparecem nas páginas anteriores, nas páginas 249 à 251, são propostos exercícios complementares que relacionam o conteúdo de logaritmo com situações cotidianas. Destaque para o texto da página 252 que faz relação entre a idade dos fósseis e a concentração do carbono 14 e os logaritmos.

Figura 19 – Ilustração da página 252 do livro Matemática de Manoel Paiva, Editora Moderna, 2013



Matemática sem fronteiras

A idade dos fósseis

O carbono 14 (C14) é um isótopo radioativo formado na atmosfera terrestre por meio de reações químicas provocadas pelo constante bombardeamento de raios cósmicos.

Os seres vivos, animais e plantas, absorvem e perdem o C14 ao longo da vida, mantendo constante a quantidade desse isótopo em seu organismo. A morte põe fim a esse equilíbrio, pois a partir de então só há perda do C14 por meio da desintegração. Como o C14 se desintegra a uma taxa constante, que é de aproximadamente 0,01209% ao ano, os cientistas conseguem calcular a idade dos fósseis, medindo a quantidade de C14 remanescente nesses materiais.

Para exemplificar, vamos mostrar como os cientistas estimaram a idade das flautas de osso encontradas no sítio arqueológico de Jiahu, no leste da China.

REPRODUÇÃO/INSTITUTE OF CULTURAL RELICS AND ARCHAEOLOGY OF HENAN PROVINCE - ZHENGZHOU, CHINA

As seis flautas de Jiahu são os mais antigos instrumentos musicais de que se tem notícia.

Com um contador Geiger (aparelho que mede a radioatividade), constatou-se que a massa de C14 remanescente nos instrumentos era 0,337 da massa que teriam se tivessem sido confeccionados com ossos de animais mortos atualmente. A fórmula $M = C(1 + i)^t$ pode ser aplicada na relação entre o tempo e a massa de C14 remanescente nos fósseis:

$$0{,}337 = (1 - 0{,}0001209)^t \Rightarrow 0{,}337 = (0{,}9998791)^t$$

$$\therefore t = \log_{0{,}9998791} 0{,}337$$

Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos: $t \approx 8.996$

Logo, as flautas têm, aproximadamente, 9.000 anos.

A técnica de datação através do carbono 14 é capaz de estimar a idade de fragmentos orgânicos de até 50 mil anos. A partir disso, a radiação remanescente do C14 nesses materiais torna-se muito baixa para poder ser detectada com precisão suficiente, mas existem outras técnicas que permitem a datação de fósseis mais antigos.

Fonte – (PAIVA, 2013)

Considerações: o texto inicial que faz uma abordagem histórica sobre o conteúdo leva o leitor a pensar que a ideia de Napier era escrever os números positivos usando potências de base 10, quando, na verdade, essa ideia é posterior e atribuída a Briggs. Além disso, a discussão das propriedades operatórias não estabelece relação com as propriedades de potência apresentadas na abordagem histórica. O livro apresenta de modo satisfatório exercícios contextualizados, com temas atuais e pertinentes.

2.4 LIVRO 4 - MATEMÁTICA: NOVO - AUTOR: KATIA STOCCO SMOLE & MARIA IGNEZ DINIZ

Figura 20 – Capa extraída do livro Matemática: ensino Médio de Kátia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz, Editora Saraiva, 2013

Fonte – (SMOLE; DINIZ, 2013)

Abordagem inicial: nas páginas 188 e 189 (Figuras 21 e 22), as autoras (SMOLE; DINIZ, 2013) fazem uma abordagem histórica dos logaritmos, destacando as contribuições de Jhon Napier e Joost Bürgi na criação dos logaritmos. O texto apresenta uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, explicando a ideia da criação dos logaritmos e exemplificando de que forma os logaritmos facilitaram os cálculos da época. O texto também apresenta uma ilustração de um instrumento criado por Napier para fazer cálculos e uma figura de um fragmento de uma tábua de logaritmos. As autoras recomendam o vídeo "Arte e a Matemática", episódios 2, 3 5 e 8 .

Definição de logaritmo: a definição de logaritmo parte de um problema do capítulo anterior que não foi possível resolver através da equação exponencial. A partir da solução do problema e do que foi visto na abordagem histórica, foi apresentada a definição informal dos logaritmos, depois de mais alguns exemplos segue a definição formal.

Propriedades operatórias: as propriedades que seguem da definição são apresentadas na sequência e depois alguns exemplos e exercícios. Nas página 193 à 198 são apresentadas as propriedades operatórias, os logaritmos decimais e exercícios. Ao abordar a mudança de base o livro lembra que as tábuas de logaritmos e as calculadoras apresentam os logaritmos na base dez, destacando a importância dessa propriedade para obter os valores dos logaritmos em outras bases (Figura 23).

Figura 21 – Ilustração da página 188 do livro Matemática: ensino médio de Kátia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz, Editora Saraiva, 2013

UNIDADE 8

Logaritmo e função logarítmica

Optamos pela abordagem histórica dos logaritmos para assegurar aos alunos maior significado desse conceito, uma vez que para esses jovens os logaritmos estarão restritos quase exclusivamente às aulas de Matemática na escola.

Dando continuidade ao tema da unidade anterior, esta unidade tem como objetivo estudar a função logarítmica, que é definida a partir da função exponencial.

Mas, antes disso, vamos falar sobre a origem dos logaritmos, anterior às funções exponencial e logarítmica, criados para resolver problemas de cálculos que podem parecer inacreditáveis nos dias de hoje.

PARA SABER MAIS

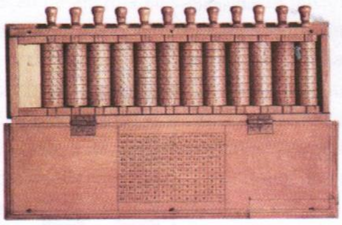
Antes de iniciar a leitura deste **Para saber mais**, informe aos alunos que vão ler sobre a história de homens e de uma cultura que enfrentavam a necessidade de cálculos sem conhecer a linguagem matemática de que dispomos hoje. Peça então que se reúnam em duplas ou grupos para realizar a leitura.

Um pouco de uma grande história

Cálculos que hoje aprendemos nos primeiros anos escolares não eram do domínio de todos até bem pouco tempo. No século XVII, na Europa, as operações de dividir e multiplicar eram ensinadas somente nas universidades e com técnicas muito diferentes daquelas que usamos atualmente.

No entanto, a expansão do comércio e a busca de novas terras e mercados deram início ao período das Grandes Navegações, que exigiu cálculos mais precisos e rápidos.

O trabalho independente de John Napier, barão escocês, teólogo e matemático, e Jobst Bürgi, matemático suíço e fabricante de instrumentos astronômicos, permitiu simplificar as longas operações de dividir e multiplicar envolvendo tanto números grandes como frações decimais muito pequenas.



Science Source/Photo Researchers/Latinstock

Instrumento para cáculo inventado no século XVII por John Napier. Os "ossos de Napier", como são conhecidos, são tabelas de multiplicação gravadas em bastões de madeira, usados para facilitar operações aritméticas.

Contudo, acredita-se que foi a publicação do livro *Arithmetica Integra*, do matemático alemão Michael Stifel, em 1544, que inspirou o trabalho de Napier e Bürgi. Em seu livro, Stifel comparou as seguintes sequências numéricas:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...

Com base nessas sequências, para calcular 16×64, bastava somar os números correspondentes a 16 e a 64 na linha de cima ($4 + 6 = 10$). O resultado da multiplicação era o número correspondente a 10 na linha debaixo, ou seja, 1024. Assim, $16 \times 64 = 1024$.

Multiplicar números da segunda linha se reduzia a somar números da primeira linha. Simples, não?

Isso valia também para a divisão. Para calcular $512 : 32$, bastava subtrair os números correspondentes a 512 e a 32 na linha de cima. Como $9 - 5 = 4$, o resultado da divisão era o número que correspondia a 4 na linha debaixo, isto é, 16. Daí, $512 : 32 = 16$.

É interessante observar que, se ampliarmos essas duas sequências, poderemos fazer cálculos de forma muito rápida envolvendo números bem grandes, usando como apoio a adição para as multiplicações e a subtração para as divisões.

Antes de continuar a leitura, observe as duas sequências e tente descobrir por que os cálculos funcionam.

PARA ASSISTIR

Assista aos episódios 2, 3, 5 e 8 da série *Arte e Matemática*, disponível em <http://www.dominiopublico.gov.br>.

188 | PARTE 1 NÚMEROS, ESTATÍSTICA E FUNÇÕES

Fonte – (SMOLE; DINIZ, 2013)

Figura 22 – Ilustração da página 189 do livro Matemática: ensino médio de Kátia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz, Editora Saraiva, 2013

Hoje, com o que conhecemos sobre potências, é fácil encontrar uma explicação para a relação entre as sequências:

$$2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10} \quad \text{e} \quad 2^9 : 2^5 = 2^{9-5} = 2^4$$

Essa linguagem, no entanto, não existia naquela época. Ela é creditada a René Descartes, francês que a desenvolveu por volta de 1637. Depois, portanto, dos trabalhos de Stifel, Napier e Bürgi, o que é mais um motivo para admirarmos as descobertas desses matemáticos.

Mas qual foi a grande ideia que Napier e Bürgi tiveram a partir das sequências de Stifel? Eles perceberam que as duas sequências facilitavam os cálculos, desde que os números que seriam multiplicados ou divididos estivessem na lista debaixo. Porém, o que fazer quando os números não estavam na lista?

Eles notaram que, se trocassem as potências de base 2 por potências de um número muito perto de 1, os valores da lista debaixo estariam bem próximos. Com isso, poderiam construir uma tabela em que a maioria dos números que interessavam aos cálculos pudesse ser encontrada.

Assim nasceram as conhecidas **tábuas de logaritmos**. Napier usou como base de suas potências $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$ e Bürgi, $1 + 10^{-4} = 1{,}0001$.

A palavra **logaritmo** foi inventada por Napier juntando as palavras *logos* e *arithmos*, que significam "números" e "razão". Já Bürgi colocou no título de seu trabalho uma referência a progressões geométricas para descrever a segunda sequência de números.

Dessa forma, para calcular o produto de dois números, bastava procurar nas tábuas seus logaritmos, somá-los e voltar a consultar a tábua para obter o resultado da multiplicação.

Mas as contribuições desses matemáticos para os cálculos da época e de hoje não foram apenas essas. Vamos iniciar o estudo do tema desta unidade para podermos conhecer melhor parte do trabalho desses brilhantes homens do passado, que permitiram o desenvolvimento tecnológico de uma importante fase da nossa história e que continuam contribuindo para o nosso futuro.

N	LOG	d	N	LOG	d	N	LOG	d
2400	38021	18	2460	39094	17	2520	40140	17
2401	38039	18	2461	39111	18	2521	40157	18
2402	38057	18	2462	39129	17	2522	40175	17
2403	38075	18	2463	39146	18	2523	40192	17
2404	38093	19	2464	39164	19	2524	40209	17
2405	38112	18	2465	39182	17	2525	40226	17
2406	38130	18	2466	39199	18	2526	40243	18
2407	38148	18	2467	39217	18	2527	40261	17
2408	38166	18	2468	39235	17	2528	[illegible]	
2409	38184	18	2479	39252	18			
2410	38202	18	2470	39270				
2411	38220	18	2471	39287				
2412	38238	18	2472	39305				
2413	38256	18	2473	39322				
2414	38274	18	2474	[illegible]				

$32^2 = 1024$

$5 \times 2 = 10$

Imagens: Zapt

Fragmento de uma tábua de logaritmo.

Fonte: Texto produzido a partir do artigo de DRUCK, Iole de Freitas. *Um pouco da história de potências, exponenciais e logaritmos*. São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística/USP, 1995. (Relatório técnico do Departamento de Matemática, 95-24.)

Proponha aos alunos as seguintes questões, que deverão ser discutidas logo após a leitura do texto sobre logaritmo:
1. O que é logaritmo de um número?
2. Crie o cálculo de um logaritmo diferente dos que aparecem no texto.
Socialize então as conclusões dos alunos e sistematize com eles o conceito de logaritmo e as condições para a sua existência.

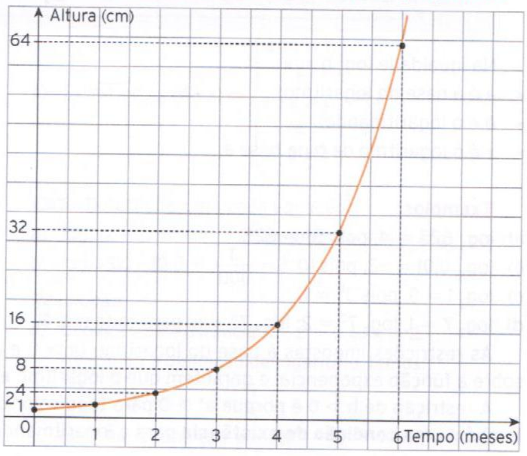
1. Logaritmo

Vamos voltar ao problema do **Para saber mais** da unidade 7 (página 175) sobre uma planta que inicialmente media 1 cm e cuja altura dobrava a cada mês.

Com o que aprendemos na última unidade, podemos saber a altura da planta em cada momento. No entanto, propomos a seguinte questão: Após quanto tempo a planta terá 9 cm de altura?

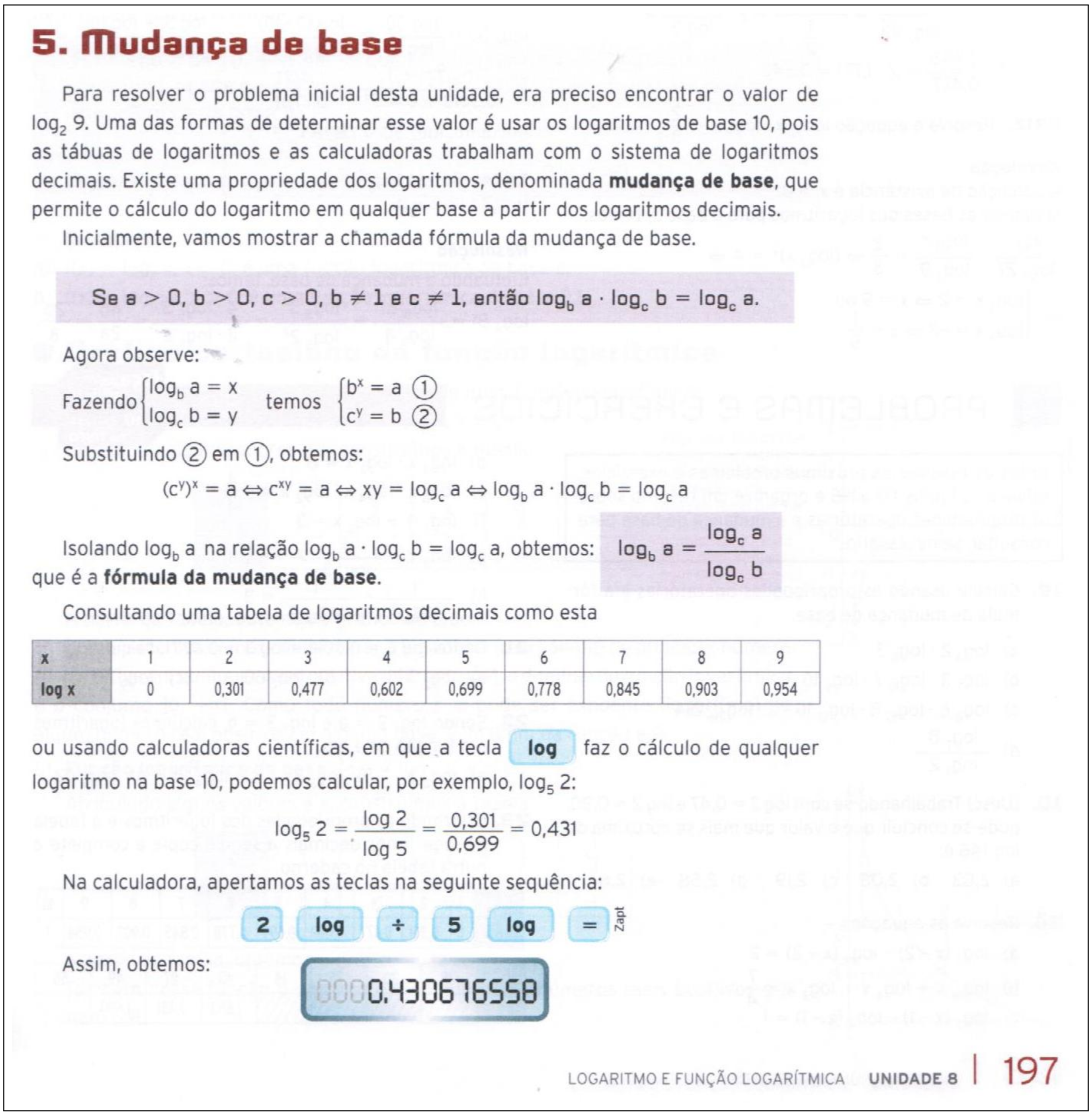
Retomemos a tabela e o gráfico da função exponencial correspondente.

Tempo (meses)	0	1	2	3	4	5	6
Altura (cm)	1	2	4	8	16	32	64



Fonte – (SMOLE; DINIZ, 2013)

Figura 23 – Ilustração da página 197 do livro Matemática: ensino médio de Kátia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz, Editora Saraiva, 2013



5. Mudança de base

Para resolver o problema inicial desta unidade, era preciso encontrar o valor de $\log_2 9$. Uma das formas de determinar esse valor é usar os logaritmos de base 10, pois as tábuas de logaritmos e as calculadoras trabalham com o sistema de logaritmos decimais. Existe uma propriedade dos logaritmos, denominada **mudança de base**, que permite o cálculo do logaritmo em qualquer base a partir dos logaritmos decimais.

Inicialmente, vamos mostrar a chamada fórmula da mudança de base.

Se $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $b \neq 1$ e $c \neq 1$, então $\log_b a \cdot \log_c b = \log_c a$.

Agora observe:

Fazendo $\begin{cases} \log_b a = x \\ \log_c b = y \end{cases}$ temos $\begin{cases} b^x = a & (1) \\ c^y = b & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$(c^y)^x = a \Leftrightarrow c^{xy} = a \Leftrightarrow xy = \log_c a \Leftrightarrow \log_b a \cdot \log_c b = \log_c a$$

Isolando $\log_b a$ na relação $\log_b a \cdot \log_c b = \log_c a$, obtemos: $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ que é a **fórmula da mudança de base**.

Consultando uma tabela de logaritmos decimais como esta

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log x	0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954

ou usando calculadoras científicas, em que a tecla **log** faz o cálculo de qualquer logaritmo na base 10, podemos calcular, por exemplo, $\log_5 2$:

$$\log_5 2 = \frac{\log 2}{\log 5} = \frac{0,301}{0,699} = 0,431$$

Na calculadora, apertamos as teclas na seguinte sequência:

2 | log | ÷ | 5 | log | =

Zapt

Assim, obtemos: 0.430676558

LOGARITMO E FUNÇÃO LOGARÍTMICA UNIDADE 8 | 197

Fonte – (SMOLE; DINIZ, 2013)

Função logarítmica: as autoras apresentam a definição, diretamente, de maneira formal. Na sequência é feito o estudo do gráfico e a comparação entre a função exponencial e logarítmica, destacando a simetria dos gráficos devido ao fato de as funções exponenciais e logarítmicas serem inversas.

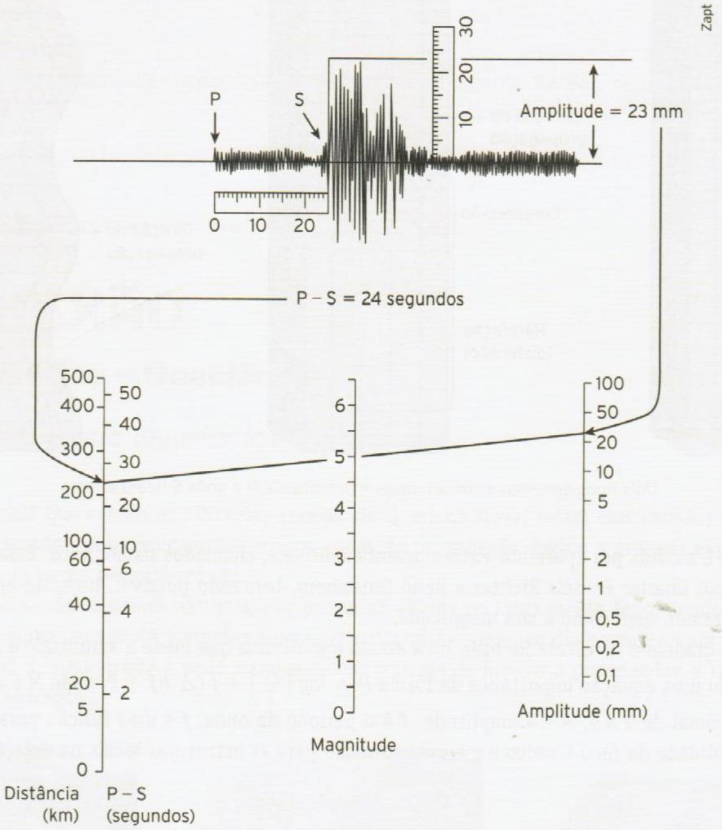
Equações e inequações logarítmicas: Não são contempladas no livro.

Aplicação: Uma das atividades propostas é a construção de gráficos de funções logarítmicas usando o software Winplot. O capítulo termina com um texto sobre ondas sísmicas e escala logarítmica, relacionando Matemática e Geociência (Figura 24 e 25).

Manual do professor: no manual do professor, página 343, as autoras sugerem que, caso haja interesse em explorar um pouco mais a parte histórica, nas páginas 358 e 359, há uma sugestão de como se usa as tábuas logarítmicas.

Figura 24 – Ilustração da página 208 do livro Matemática: ensino médio de Kátia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz, Editora Saraiva, 2013

A figura abaixo mostra as medidas realizadas em uma estação sismológica na Califórnia, para o tempo (Δt) e amplitude (A) de percurso das ondas produzidas por um terremoto, desde o epicentro. Verifica-se que a amplitude da onda é igual a 23 mm e a variação entre a chegada das ondas P e S é de 24 s. Fazendo a substituição desses valores na equação logarítmica da magnitude do terremoto obtém-se uma magnitude da ordem de 5,2 graus na escala Richter, como está registrado na escala numérica da figura.



Medidas das ondas P – S

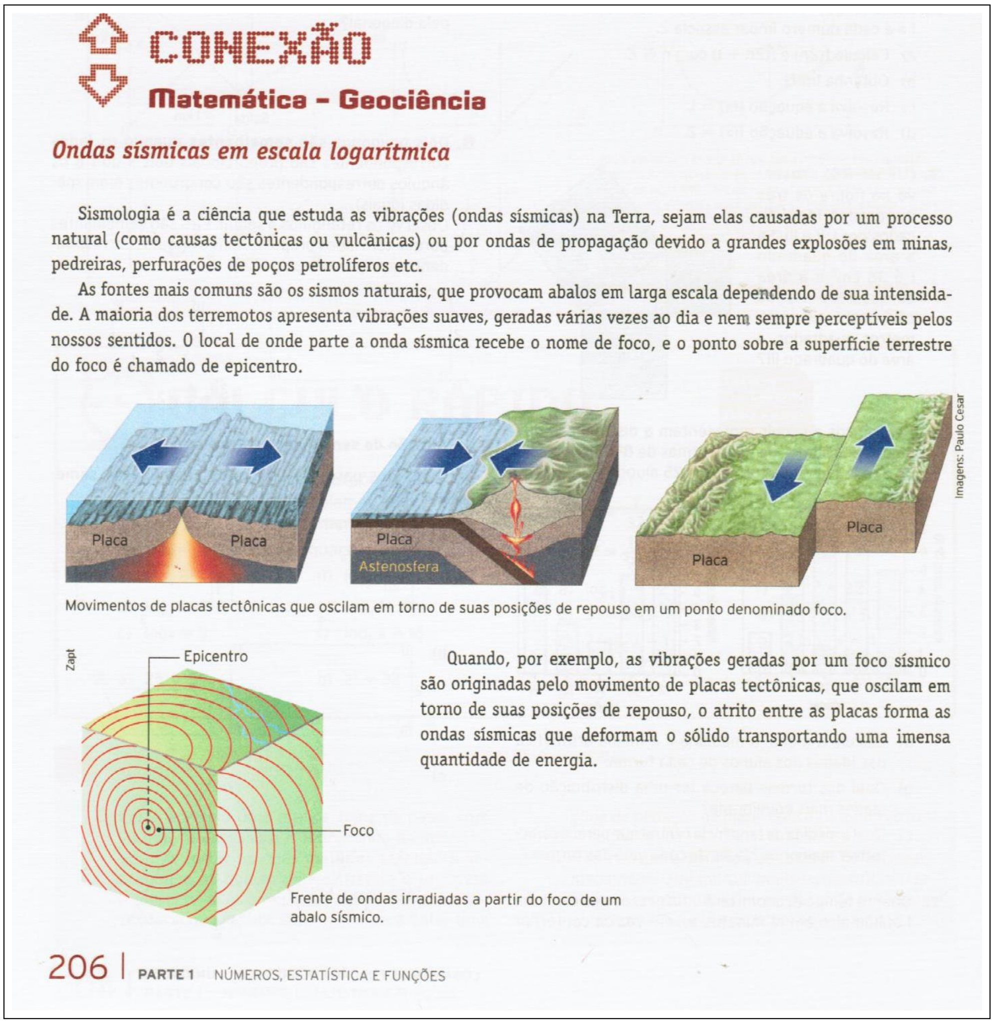
Se a magnitude de dois sismos difere de duas unidades na escala logarítmica Richter, a energia libertada pelo mais forte é 1 000 vezes superior à libertada pelo mais fraco. A tabela ilustra a relação entre valores da escala Richter e consequências.

Magnitude *M* do terremoto na escala Richter	Classificação do abalo sísmico	Consequências
Menor do que 2	Microterremotos	Não são percebidos.
Em torno de 4,5	Terremotos fracos	Percebe-se o tremor.
Em torno de 5,3	Terremotos moderados	Destruição em estruturas mais frágeis a abalos.
Acima de 6	Terremotos fortes	Grande destruição.

208 | PARTE 1 NÚMEROS, ESTATÍSTICA E FUNÇÕES

Fonte – (SMOLE; DINIZ, 2013)

Figura 25 – Ilustração da página 206 do livro Matemática: ensino médio de Kátia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz, Editora Saraiva, 2013


CONEXÃO

Matemática - Geociência

Ondas sísmicas em escala logarítmica

Sismologia é a ciência que estuda as vibrações (ondas sísmicas) na Terra, sejam elas causadas por um processo natural (como causas tectônicas ou vulcânicas) ou por ondas de propagação devido a grandes explosões em minas, pedreiras, perfurações de poços petrolíferos etc.

As fontes mais comuns são os sismos naturais, que provocam abalos em larga escala dependendo de sua intensidade. A maioria dos terremotos apresenta vibrações suaves, geradas várias vezes ao dia e nem sempre perceptíveis pelos nossos sentidos. O local de onde parte a onda sísmica recebe o nome de foco, e o ponto sobre a superfície terrestre do foco é chamado de epicentro.

Movimentos de placas tectônicas que oscilam em torno de suas posições de repouso em um ponto denominado foco.

Quando, por exemplo, as vibrações geradas por um foco sísmico são originadas pelo movimento de placas tectônicas, que oscilam em torno de suas posições de repouso, o atrito entre as placas forma as ondas sísmicas que deformam o sólido transportando uma imensa quantidade de energia.

Frente de ondas irradiadas a partir do foco de um abalo sísmico.

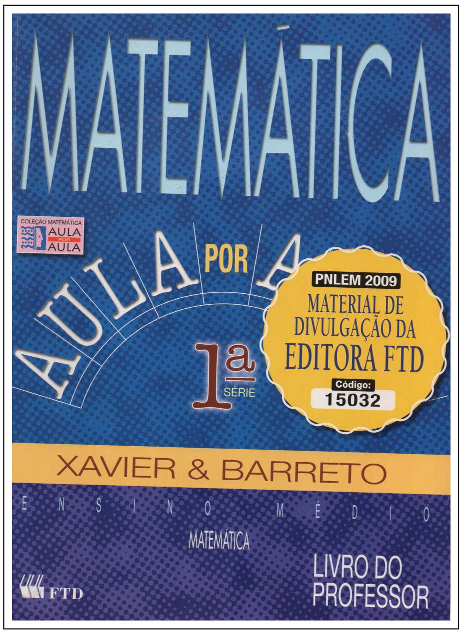
206 | PARTE 1 NÚMEROS, ESTATÍSTICA E FUNÇÕES

Fonte – (SMOLE; DINIZ, 2013)

Considerações: a abordagem histórica foi apresentada de forma clara e coerente, não muito longa, mas suficiente para entender o cenário em que os logaritmos foram criados, bem como as principais informações sobre sua criação e seus criadores. As autoras partiram da função exponencial para definir logaritmo, contudo relacionaram com as tábuas de logaritmos, valorizando o resgate histórico desse conteúdo. A abordagem histórica também é citada no estudo das propriedades operatórias, embora não sejam estruturadas a partir da ideia inicial da criação dos logaritmos. Diferentemente da maioria dos livros analisados, as autoras não definem função logarítmica como sendo a inversa da função exponencial, essa relação é feita em outro momento. A sugestão de utilização do software Winplot para esboçar gráficos de função logarítmica auxilia na compreensão da condição de existência de um logaritmo. A sugestão de explorar a utilização das tábuas logarítmicas, apresentadas no manual do professor, é válida, mas seria de maior aproveitamento para o aluno se isso fosse feito no decorrer do estudo uma vez que grande parte dos professores sequer leem o manual presente no final do livro.

2.5 LIVRO 5 - MATEMÁTICA: AULA POR AULA - AUTORES: XAVIER & BARRETO

Figura 26 – Capa extraída do livro Matemática: aula por aula de Xavier & e Barreto, Editora FTD, 2005



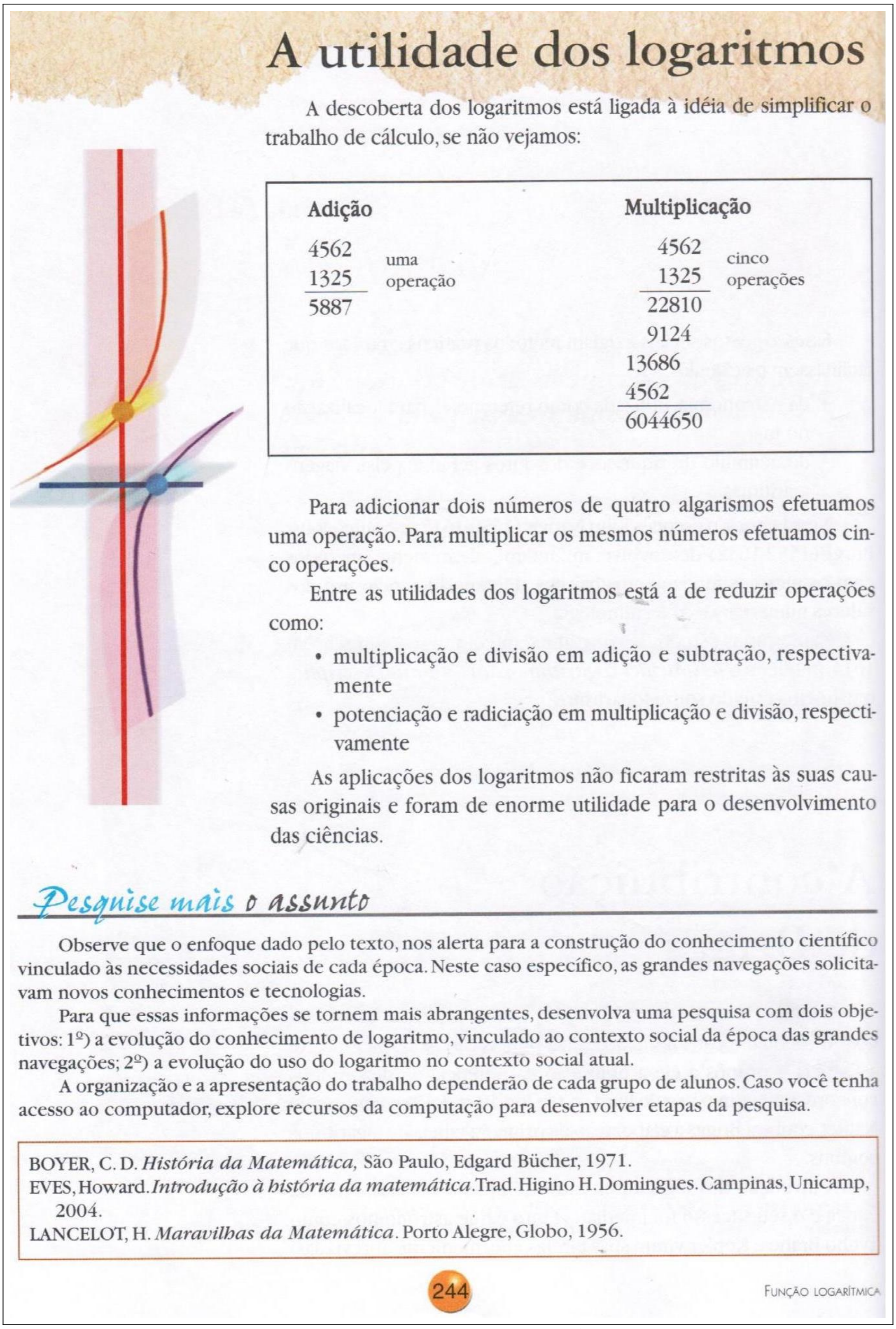
Fonte – (SILVA; FILHO, 2005)

Abordagem inicial: no início do capítulo os autores trazem um texto com o título "O logaritmo e as grandes navegações." que menciona a dificuldade dos navegadores da época, século XVI e XVII, em realizar alguns cálculos usados na navegação. O texto também faz menção a Jhon Napier e Jost Bürgi como criadores dos logaritmos. Outro nome citado é de Henry Briggs, que aperfeiçoou o estudo dos logaritmos. Depois dessa introdução histórica, na página 244 (Figura 27), o estudo dos logaritmos parte da comparação de dois cálculos, um de adição e um de multiplicação, mostrando que a adição usa uma operação, enquanto a multiplicação usa cinco operações. Essa atividade é usada para mostrar a utilidade dos logaritmos em reduzir cálculos, uma vez que o logaritmo transforma produto em adição. Em seguida o autor sugere uma atividade de pesquisa sobre a história dos logaritmos.

Definição de logaritmo: nas páginas 245 e 246, é apresentada a definição de logaritmos a partir do conceito de equação exponencial, abordado através de exemplos, seguido da definição formal. Na sequência são apresentados exemplos, exercícios resolvidos e sugestões de exercícios.

Propriedades operatórias: as páginas 248 à 257 são reservadas para as propriedades logarítmicas decorrentes da definição, para as propriedades operatórias e para a mudança de base com algumas sugestões de exercícios. Em especial, na página 256 (Figura 28), o livro traz situações-problemas envolvendo logaritmo que, segundo o autor, auxiliam na análise, argumentação e tomada de decisão diante de situações cotidianas.

Figura 27 – Ilustração da página 244 do livro Matemática: aula por aula de Xavier & e Barreto, Editora FTD, 2005



A utilidade dos logaritmos

A descoberta dos logaritmos está ligada à idéia de simplificar o trabalho de cálculo, se não vejamos:

Adição

4562
1325 uma operação
5887

Multiplicação

4562
1325 cinco operações
22810
9124
13686
4562
6044650

Para adicionar dois números de quatro algarismos efetuamos uma operação. Para multiplicar os mesmos números efetuamos cinco operações.

Entre as utilidades dos logaritmos está a de reduzir operações como:

- multiplicação e divisão em adição e subtração, respectivamente
- potenciação e radiciação em multiplicação e divisão, respectivamente

As aplicações dos logaritmos não ficaram restritas às suas causas originais e foram de enorme utilidade para o desenvolvimento das ciências.

Pesquise mais o assunto

Observe que o enfoque dado pelo texto, nos alerta para a construção do conhecimento científico vinculado às necessidades sociais de cada época. Neste caso específico, as grandes navegações solicitavam novos conhecimentos e tecnologias.

Para que essas informações se tornem mais abrangentes, desenvolva uma pesquisa com dois objetivos: 1º) a evolução do conhecimento de logaritmo, vinculado ao contexto social da época das grandes navegações; 2º) a evolução do uso do logaritmo no contexto social atual.

A organização e a apresentação do trabalho dependerão de cada grupo de alunos. Caso você tenha acesso ao computador, explore recursos da computação para desenvolver etapas da pesquisa.

BOYER, C. D. *História da Matemática,* São Paulo, Edgard Bücher, 1971.
EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Higino H. Domingues. Campinas, Unicamp, 2004.
LANCELOT, H. *Maravilhas da Matemática*. Porto Alegre, Globo, 1956.

244 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Fonte – (SILVA; FILHO, 2005)

Figura 28 – Ilustração da página 256 do livro Matemática: aula por aula de Xavier & e Barreto, Editora FTD, 2005

Saber lidar com a linguagem e os cálculos do sistema financeiro é um dos fatores que podem contribuir para agirmos como cidadãos, na busca dos nossos direitos.

Veja a seguir algumas situações do dia-a-dia que podem ser resolvidas usando os conceitos de logaritmo e matemática financeira.

O uso do logaritmo para analisar, argumentar e tomar decisões diante de situações-problema

1. Disponho de um capital de R$ 2 000,00. Para iniciar um pequeno empreendimento, necessito de um montante de R$ 5 000,00. Por esse motivo, deixarei esse capital aplicado a juros compostos à taxa de 20% ao ano. Nessas condições, qual o período de tempo necessário para que eu consiga o montante almejado para iniciar o empreendimento? 5 anos

Nota: Antes de iniciar a resolução, lembre-se de que o montante *M* pode ser determinado usando-se a expressão: $M = C \cdot (1 + i)^n$. Nessa expressão, *C* é o capital aplicado a juros compostos e a uma taxa unitária *i*, enquanto *n* é o período da aplicação.

Considere $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$.

2. Faça uma pesquisa de preços de um aparelho eletrodoméstico qualquer, em lojas especializadas. Compare preços e qualidade do produto. Para evitar as prestações e o acréscimo no preço, identifique o menor preço à vista. Confira o capital que você já possui e o montante necessário para efetuar a compra. De posse desses dados e da taxa de juros compostos, ao ano, verifique quanto tempo você precisa esperar para fazer sua compra, supondo que o aparelho não sofra alterações de preço. resposta em aberto

3. Escreva um pequeno texto emitindo a sua opinião sobre os direitos do consumidor.

Se você se interessa em saber mais sobre esses direitos, consulte a legislação que regulamenta os direitos do consumidor. resposta em aberto

Fonte – (SILVA; FILHO, 2005)

Função logarítmica: o estudo da função logarítmica é feito usando o conceito de inversa da função exponencial, seguido da construção do gráfico para a base maior que um e para o caso onde a base está entre zero e um. O livro também compara a função exponencial e logarítmica através da análise gráfica, com o gráfico de cada função em um mesmo plano cartesiano.

Equações e inequações logarítmicas: o livro apresenta na página 258 três exercícios resolvidos sobre equações logarítmicas e alguns exercícios de fixação. Na página 265 inicia-se o estudo de inequações logarítmicas a partir do gráfico de funções logarítmicas. Na sequência são apresentados três exercícios resolvidos e exercícios para praticar.

Aplicação: nas páginas 263 e 264, encontramos sete exercícios que destacam o uso de logaritmo como base para argumentação na análise e interpretação das variáveis socioeconômicas e técnico-científicas. Nas páginas 269 à 272 o autor relaciona o estudo de logaritmos com a acústica, além de sugerir outros problemas de aplicação abordando os logaritmos. O capítulo termina com um resumo do que foi visto e com atividades complementares.

Figura 29 – Ilustração da página 263 do livro Matemática: aula por aula de Xavier & e Barreto, Editora FTD, 2005

Desenvolva competências e amplie o conhecimento

O meio ambiente e o lixo que gera renda

Na cidade de Nova Iguaçu (RJ) está sendo construído o aterro sanitário Nova Gerar. Merece destaque por se tratar do primeiro projeto a ser aprovado, segundo o Mecanismo de Desenvolvimento Limpo (MDL) do Protocolo de Quioto.

Nos aterros tradicionais o gás metano, de alto teor poluente, é liberado durante a decomposição do lixo e lançado na atmosfera. No caso do Nova Gerar, o gás será usado para o funcionamento de uma usina termoelétrica. Esse processo gera energia a partir de uma fonte renovável e reduz a poluição ambiental. Além disso, o Protocolo permite que a quantidade de metano não liberada na atmosfera seja transformada em créditos que poderão ser vendidos aos países que não cumprem as cotas estabelecidas por ele.

Usando o logaritmo na análise e interpretação das variáveis socioeconômicas e técnico-científicas, como base para argumentação

Ainda sobre o tema ambiental, analise as questões propostas a seguir.

4. (Fuvest-SP) Como conseqüência da poluição industrial, verificou-se em alguns lugares um aumento de até 1 000 vezes na concentração hidrogeniônica da água da chuva. Sabendo-se que o pH normal da água da chuva é de 5,6, qual seria o valor do pH no caso da chuva ácida mencionada anteriormente?

FUNÇÃO LOGARÍTMICA 263 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Fonte – (SILVA; FILHO, 2005)

Considerações: o autor faz uma pequena abordagem histórica que, para uma melhor compreensão, necessita de muita mediação do professor, pois são poucas as informações e colocadas de maneira superficial. Na página 244, o autor apresenta a redução dos cálculos ao considerar uma adição e uma multiplicação, mas não relaciona esse fato com a definição dos logaritmos e com as propriedades operatórias. Assim, não fica claro de que modo a criação dos logaritmos facilitou os cálculos na época de seu descobrimento. A ideia de usar a função logarítmica para o estudo de inequações logarítmicas ajuda a visualizar e entender a inequação, uma vez que é possível relacionar as inequações com funções logarítmicas crescentes e decrescentes.

2.6 LIVRO 2 - MATEMÁTICA COMPLETA - AUTORES: GIOVANNI & BONJORNO

Figura 30 – Capa extraída do livro Matemática Completa de Giovanni & Bonjoro, Editora FTD, 2005

Fonte – (GIOVANNI; BONJORNO, 2005)

Abordagem inicial: os autores usaram uma tábua de logaritmos decimais para abordar o tema. Eles exploraram o fato de que todo número positivo pode ser escrito como potência de dez, apresentando alguns exemplos de um número inteiro escrito em potência de dez, destacando o logaritmo e a base.

Definição de logaritmo: depois de alguns exemplos, segue a definição formal. Em seguida comentam sobre e sistema de logaritmo em base dez e trazem um breve relato histórico sobre a criação dos logaritmos, destacando o fato de que a ideia inicial era facilitar cálculos de multiplicação e divisão. Nas páginas 245 á 247, seguem exemplos e exercícios.

Propriedades operatórias: na página 253, o livro inicia as propriedades operatórias com um breve comentário sobre a transformação de algumas operações em outra mais simples, e destacam que os logaritmos possuem essa propriedade. Na sequência, são citadas as propriedades e suas demonstrações são feitas usando a definição de logaritmo. As páginas 254 à 258 são usadas para exemplos e exercícios sobre as propriedades.

Função logarítmica: a função logarítmica é definida usando o conceito de função inversa, nesse caso, a inversa da função exponencial. São apresentados os gráficos das funções exponenciais e logarítmicas num mesmo plano cartesiano para comparação, seguem, então, exemplos e exercícios. Destaque para uma nota que relaciona o gráfico da função logarítmica com a estrutura da Torre Eiffel (Figura 32).

Figura 31 – Ilustração da página 244 do livro Matemática Completa de Giovanni & Bonjoro, Editora FTD, 2005

1 O que é logaritmo

Como vimos, todo número positivo pode ser escrito como potência de 10.

Nos séculos XVI e XVII, vários matemáticos desenvolveram estudos visando à simplificação do cálculo. Nesse sentido, construíram tabelas relacionando números naturais e os expoentes de 10 correspondentes a cada um. A esses expoentes deram o nome de logaritmos.

A palavra logaritmo vem do grego: *logos* (razão) + *arithmos* (número)

Esses logaritmos são, com exceção das potências de 10, números irracionais.

Na tabela colocamos, também, suas aproximações racionais até milésimos.

NÚMERO	LOGARITMO	APROXIMAÇÃO RACIONAL	
1	0		$1 = 10^0$
2	0,301030...	0,301	$2 = 10^{0,301}$
3	0,477121...	0,477	$3 = 10^{0,477}$
4	0,602060...	0,602	$4 = 10^{0,602}$
5	0,698970...	0,699	$5 = 10^{0,699}$
6	0,778151...	0,778	$6 = 10^{0,778}$
...	...	...	...
10	1		$10 = 10^1$
...	...	...	...
100	2		$100 = 10^2$
...	...	...	...
145	2,161368...	2,161	$145 = 10^{2,161}$

Assim, o número 0,301 é chamado logaritmo de 2 na base 10.

Indica-se: $\log_{10} 2 = 0,301$, ou seja, $2 = 10^{0,301}$.

O número 0,778 é chamado logaritmo de 6 na base 10.

Indica-se: $\log_{10} 6 = 0,778$, ou seja, $6 = 10^{0,778}$.

Essas tabelas foram chamadas de *tábuas de logaritmos decimais* porque os números são representados como potências de base 10.

Entretanto, os logaritmos podem ser escritos em qualquer base positiva diferente de 1.

Observe:

- $\log_7 2 = 0,356$, porque $2 = 7^{0,356}$
- $\log_5 125 = 3$, porque $125 = 5^3$
- $\log_8 47 = 1,852$, porque $47 = 8^{1,852}$

Dizemos que o logaritmo de um número positivo *b*, na base *a*, positiva e diferente de 1, é o expoente *x* ao qual se deve elevar *a* para se obter *b*.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x, \text{ com } b > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Se a base do logaritmo for 10, costuma-se omiti-la na sua representação.

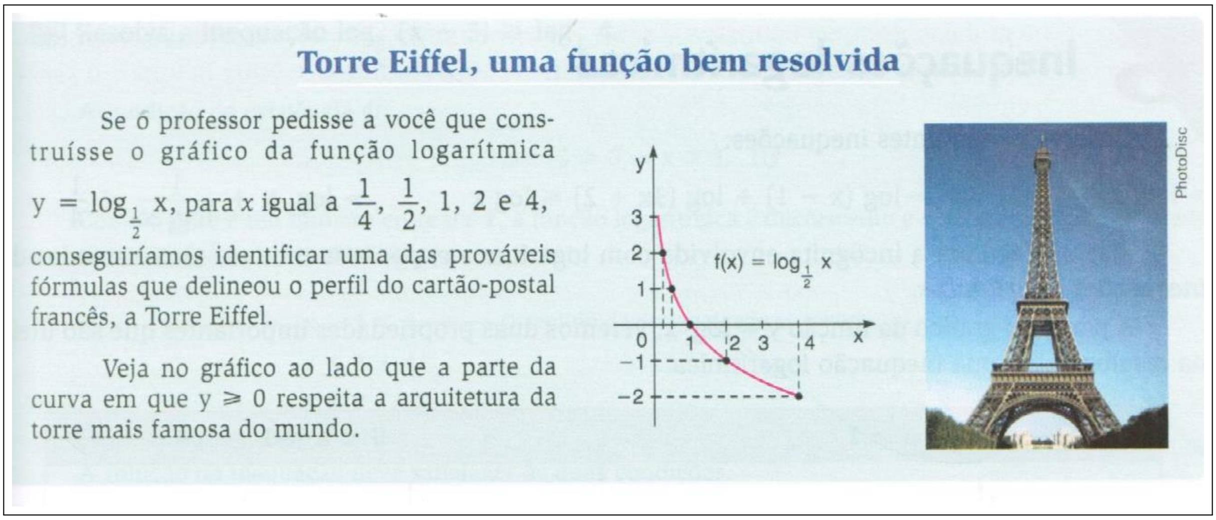
$$\log_{10} b = \log b \quad (\log \rightarrow \text{logaritmo decimal})$$

O conjunto dos logaritmos na base 10 de todos os números reais positivos é chamado de *sistema de logaritmos decimais* ou de *Briggs*.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA 244

Fonte – (GIOVANNI; BONJORNO, 2005)

Figura 32 – Ilustração da página 263 do livro Matemática Completa de Giovanni & Bonjoro, Editora FTD, 2005



Torre Eiffel, uma função bem resolvida

Se o professor pedisse a você que construísse o gráfico da função logarítmica $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, para x igual a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 e 4, conseguiríamos identificar uma das prováveis fórmulas que delineou o perfil do cartão-postal francês, a Torre Eiffel.

Veja no gráfico ao lado que a parte da curva em que $y \geq 0$ respeita a arquitetura da torre mais famosa do mundo.

Fonte – (GIOVANNI; BONJORNO, 2005)

Equações e inequações logarítmicas: os autores não colocam em sequência o estudo de equações e inequações logarítmicas. As equações aparecem na página 250, logo após a definição de logaritmo, já as inequações são apresentadas na página 264, depois do estudo de funções logarítmicas.

Logaritmos decimais: o livro dedica dez páginas para o explorar os logaritmos decimais. Inicia o conteúdo lembrando a história da criação dos logaritmos, destacando os nomes de Napier e Henry Briggs. Os autores mostram como funciona uma tábua de logaritmos (Figura 33) em base dez usando o conceito de característica e mantissa. Em seguida expõem alguns exemplos, destaque para um exemplo envolvendo as propriedades operatórias dos logaritmos e a tabela de mantissa. Na sequência, páginas 274 e 275, encontramos um texto que mostra como é construída uma tábua de logaritmo.

Aplicação: na página 276 podemos encontrar exemplos que são resolvidos com o uso da calculadora. Na página seguinte (Figura 34) há um texto contextualizando o conteúdo de logaritmo, que explica como estimar a idade pelo método do carbono radioativo. As páginas 278 à 282 trazem uma série de exercícios contextualizados.

Considerações: a abordagem inicial, usando uma tábua de logaritmo, tem caráter meramente ilustrativo, uma vez que foi usada somente para indicar qual seria o logaritmo. Apesar de mencionar a tentativa dos matemáticos de século XVI e XVII em facilitar os cálculos, o texto não esclarece como isso foi feito. O exemplo da página 272, que usa os propriedades operatórias e a tabela de logaritmos, está estritamente ligado com a ideia inicial da criação dos logaritmos e sua utilidade, ou seja, facilitar os cálculos. A exploração dos logaritmos decimais é densa para uma exploração em sala de aula, demanda muito tempo, com possibilidade de perder o foco.

Figura 33 – Ilustração da página 269 do livro Matemática Completa de Giovanni & Bonjoro, Editora FTD, 2005

Mantissa

Observe o valor dos logaritmos:

$\log 2 = 0 + 0{,}3010$

$\log 20 = \log (10 \cdot 2) = \log 10 + \log 2 = 1 + 0{,}3010$

$\log 200 = \log (100 \cdot 2) = \log 100 + \log 2 = 2 + 0{,}3010$

$\log 2\,000 = \log (1\,000 \cdot 2) = \log 1\,000 + \log 2 = 3 + 0{,}3010$

$\log 0{,}2 = \log \frac{2}{10} = -\log 10 + \log 2 = -1 + 0{,}3010$

$\log 0{,}02 = \log \frac{2}{100} = -\log 100 + \log 2 = -2 + 0{,}3010$

Em todos os casos a mantissa é a *mesma*. Portanto, multiplicando-se ou dividindo-se um número por 10 (ou potência inteira de 10) o seu logaritmo decimal *conserva* a mantissa, só alterando a característica.

Os valores aproximados das mantissas dos logaritmos decimais encontram-se em tabelas que são chamadas *tábuas de logaritmos*.

Veja a tabela que apresenta as mantissas com quatro "casas" depois da vírgula.

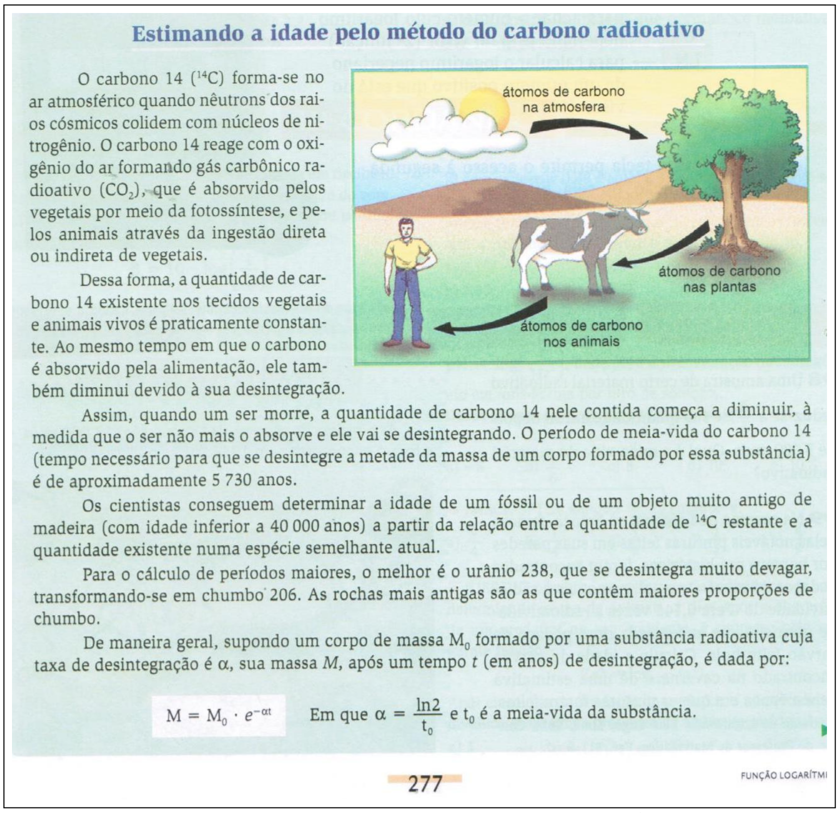
TABELA DE MANTISSAS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989

269 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Fonte – (GIOVANNI; BONJORNO, 2005)

Figura 34 – Ilustração da página 277 do livro Matemática Completa de Giovanni & Bonjoro, Editora FTD, 2005



Estimando a idade pelo método do carbono radioativo

O carbono 14 (^{14}C) forma-se no ar atmosférico quando nêutrons dos raios cósmicos colidem com núcleos de nitrogênio. O carbono 14 reage com o oxigênio do ar formando gás carbônico radioativo (CO_2), que é absorvido pelos vegetais por meio da fotossíntese, e pelos animais através da ingestão direta ou indireta de vegetais.

Dessa forma, a quantidade de carbono 14 existente nos tecidos vegetais e animais vivos é praticamente constante. Ao mesmo tempo em que o carbono é absorvido pela alimentação, ele também diminui devido à sua desintegração.

Assim, quando um ser morre, a quantidade de carbono 14 nele contida começa a diminuir, à medida que o ser não mais o absorve e ele vai se desintegrando. O período de meia-vida do carbono 14 (tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por essa substância) é de aproximadamente 5 730 anos.

Os cientistas conseguem determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo de madeira (com idade inferior a 40 000 anos) a partir da relação entre a quantidade de ^{14}C restante e a quantidade existente numa espécie semelhante atual.

Para o cálculo de períodos maiores, o melhor é o urânio 238, que se desintegra muito devagar, transformando-se em chumbo 206. As rochas mais antigas são as que contêm maiores proporções de chumbo.

De maneira geral, supondo um corpo de massa M_0 formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração é α, sua massa M, após um tempo t (em anos) de desintegração, é dada por:

$M = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$ Em que $\alpha = \dfrac{\ln 2}{t_0}$ e t_0 é a meia-vida da substância.

277 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Fonte – (GIOVANNI; BONJORNO, 2005)

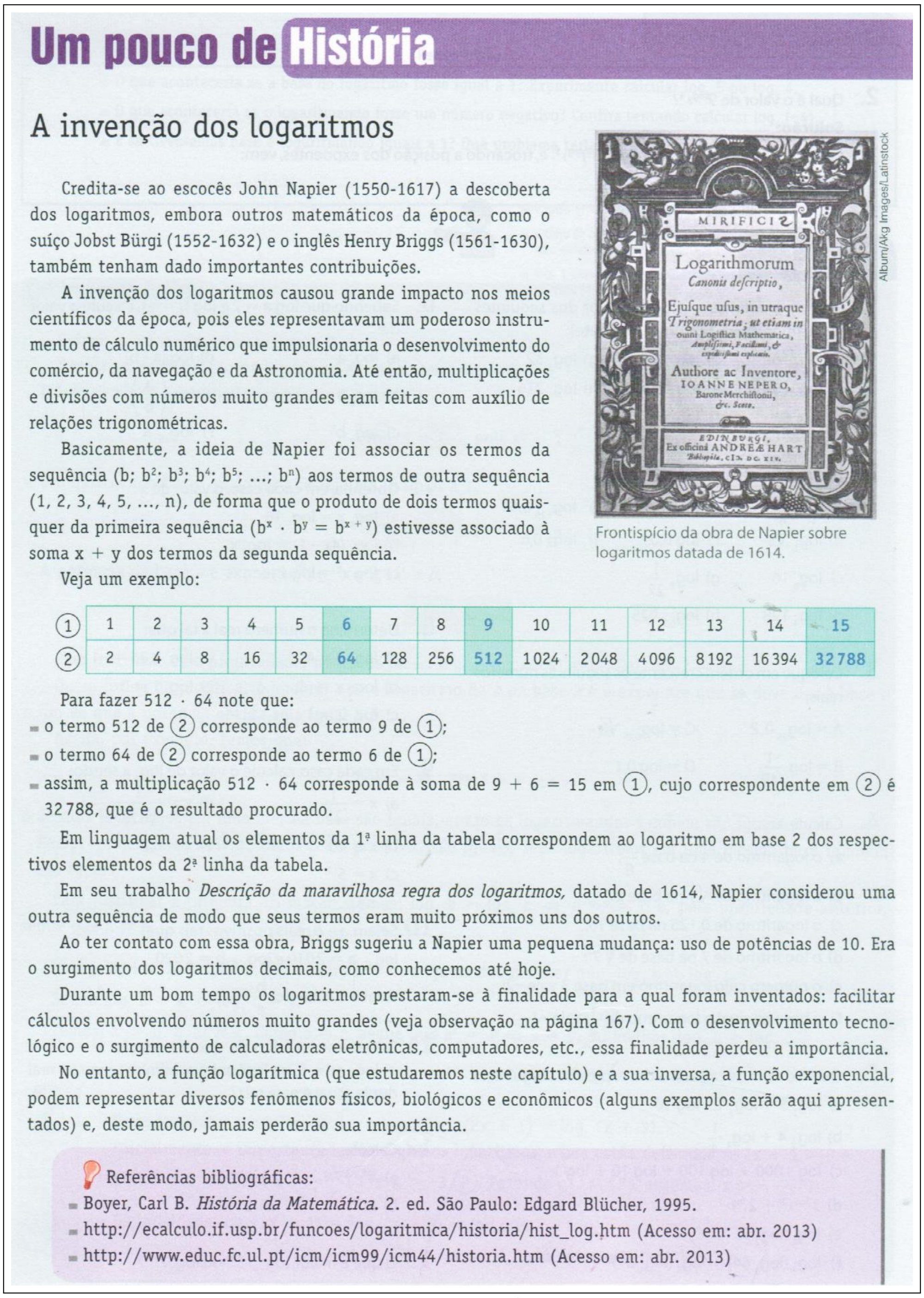
2.7 LIVRO 7 - MATEMÁTICA: CIÊNCIAS E APLICAÇÕES - AUTORES: IEZZI, DOLCE, DEGENSZJN, PÉRIGO E ALMEIDA

Figura 35 – Capa extraída do livro Matemática: ciências e aplicações de Iezzi, Dolce, Degenszjn, Périgo e Almeida. Editora Saraiva, 2013

Fonte – (IEZZI et al., 20013)

Abordagem inicial: a abordagem inicial é feita a partir de um exemplo de depreciação de um bem relacionado com a equação exponencial. Na página 164 o livro traz um pouco da história dos logaritmos, destacando o processo de criação idealizado por Jhon Napier e aperfeiçoado por Henry Briggs. O texto traz a ideia dos logaritmos através da utilização das progressões aritmética e geométricas, evidenciando a transformação de um produto em soma e de uma subtração em diferença.

Figura 36 – Ilustração da página 164 do livro Matemática: ciências e aplicações de Iezzi, Dolce, Degenszjn,Périgo e Almeida. Editora Saraiva, 2013



Um pouco de História

A invenção dos logaritmos

Credita-se ao escocês John Napier (1550-1617) a descoberta dos logaritmos, embora outros matemáticos da época, como o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) e o inglês Henry Briggs (1561-1630), também tenham dado importantes contribuições.

A invenção dos logaritmos causou grande impacto nos meios científicos da época, pois eles representavam um poderoso instrumento de cálculo numérico que impulsionaria o desenvolvimento do comércio, da navegação e da Astronomia. Até então, multiplicações e divisões com números muito grandes eram feitas com auxílio de relações trigonométricas.

Basicamente, a ideia de Napier foi associar os termos da sequência (b; b^2; b^3; b^4; b^5; ...; b^n) aos termos de outra sequência (1, 2, 3, 4, 5, ..., n), de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência ($b^x \cdot b^y = b^{x+y}$) estivesse associado à soma $x + y$ dos termos da segunda sequência.

Veja um exemplo:

Frontispício da obra de Napier sobre logaritmos datada de 1614.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394	32788

Para fazer $512 \cdot 64$ note que:

- o termo 512 de 2 corresponde ao termo 9 de 1;
- o termo 64 de 2 corresponde ao termo 6 de 1;
- assim, a multiplicação $512 \cdot 64$ corresponde à soma de $9 + 6 = 15$ em 1, cujo correspondente em 2 é 32 788, que é o resultado procurado.

Em linguagem atual os elementos da 1ª linha da tabela correspondem ao logaritmo em base 2 dos respectivos elementos da 2ª linha da tabela.

Em seu trabalho *Descrição da maravilhosa regra dos logaritmos,* datado de 1614, Napier considerou uma outra sequência de modo que seus termos eram muito próximos uns dos outros.

Ao ter contato com essa obra, Briggs sugeriu a Napier uma pequena mudança: uso de potências de 10. Era o surgimento dos logaritmos decimais, como conhecemos até hoje.

Durante um bom tempo os logaritmos prestaram-se à finalidade para a qual foram inventados: facilitar cálculos envolvendo números muito grandes (veja observação na página 167). Com o desenvolvimento tecnológico e o surgimento de calculadoras eletrônicas, computadores, etc., essa finalidade perdeu a importância.

No entanto, a função logarítmica (que estudaremos neste capítulo) e a sua inversa, a função exponencial, podem representar diversos fenômenos físicos, biológicos e econômicos (alguns exemplos serão aqui apresentados) e, deste modo, jamais perderão sua importância.

Referências bibliográficas:
- Boyer, Carl B. *História da Matemática.* 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1995.
- http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm (Acesso em: abr. 2013)
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm44/historia.htm (Acesso em: abr. 2013)

Fonte – (IEZZI et al., 20013)

Definição de logaritmo: a definição é escrita diretamente de maneira formal, seguida de exemplos, propriedades decorrentes da definição e exercícios propostos. Na página 165 os autores destacam os sistemas de logaritmos decimais e neperianos.

Propriedades operatórias: as páginas 165, 166 e 167 trazem as propriedades operatórias dos logaritmos do produto, do quociente e da potência. As demonstrações dessas propriedades são feitas a partir da definição e exploradas com alguns exemplos e exercícios propostos. Na página 167 aparece uma observação sobre a utilização das propriedades operatórias dos logaritmos e das tabelas logaritmos para resolver cálculos, que eram utilizadas quando não existiam calculadoras disponíveis como as atuais. Nas páginas 171 e 172, podemos encontrar a propriedade de mudança de base, que é explorada através de exemplos, destacando o uso da calculadora e exercícios propostos.

Figura 37 – Ilustração da página 167 do livro Matemática: ciências e aplicações de Iezzi, Dolce, Degenszjn,Périgo e Almeida. Editora Saraiva, 2013

Observação

Atualmente, dispomos de calculadora científica para calcular o valor de uma expressão que envolva várias operações (multiplicação, divisão, potenciação e radiciação), como:

$$x = \frac{(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}}{(1{,}103)^{11}}$$

Assim, em poucos segundos, descobrimos o valor de *x*. No passado, sem os recursos tecnológicos de que dispomos hoje, o cálculo dessa expressão com logaritmos era feito com auxílio das tabelas de logaritmos e das propriedades operatórias, em que as multiplicações transformam-se em adições, as divisões em subtrações, e as potenciações em multiplicações. Exemplo:

$$x = \frac{(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}}{(1{,}103)^{11}} \Rightarrow \log x = \log \frac{(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}}{(1{,}103)^{11}} =$$

$$= \log \left[(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}\right] - \log (1{,}103)^{11} =$$

$$= \log (11{,}2)^5 + \log \sqrt[7]{2{,}07} - \log (1{,}103)^{11} =$$

$$= 5 \cdot \log 11{,}2 + \frac{1}{7} \cdot \log 2{,}07 - 11 \cdot \log 1{,}103$$

As antigas tabelas de logaritmos forneciam os valores de log 11,2, log 2,07 e log 1,103; em seguida, calculava-se o valor de log x e, pela mesma tabela, chegava-se ao valor de *x*.

Como esse tipo de cálculo está ultrapassado nos dias de hoje, não apresentamos as tabelas de logaritmos nesta obra.

Fonte – (IEZZI et al., 20013)

Função logarítmica: um problema sobre aplicação na poupança, onde o valor acumulado está em função do tempo e do valor inicial aplicado, é usado para introduzir o conteúdo das funções logarítmicas. Em seguida, aparece a definição formal e o esboço do gráfico. Nas três páginas que seguem é feita a comparação entre as funções exponencial e logarítmica.

Equações e inequações logarítmicas: as páginas 184 à 187 exploram as equações e inequações logarítmicas com exemplos e exercícios

Aplicação: na página 170 (Figura 38), um texto sobre a escala de acidez e os logaritmos exemplifica uma das aplicações desse conteúdo. Nas páginas 180 à 182 os autores trazem um texto sobre os terremotos e os logaritmos, destacando a Escala Richter, que mede a intensidade dos terremotos e é uma escala logarítmica.

Figura 38 – Ilustração da página 170 do livro Matemática: ciências e aplicações de Iezzi, Dolce, Degenszjn, Périgo e Almeida. Editora Saraiva, 2013

A escala de acidez e os logaritmos

Em várias soluções aquosas (leite, sangue, detergente, vinho, etc.) verifica-se, em geral, que as concentrações de íons H^+ e OH^- são diferentes, o que permite classificar tais soluções em ácidas ou básicas (ou ainda neutras, quando tais concentrações são iguais).

Como essas concentrações são, de maneira geral, números pequenos, criou-se uma escala logarítmica para trabalhar mais facilmente com elas.

O potencial hidrogeniônico (pH) é uma escala usada em Química para indicar o grau de acidez (ou basicidade) de uma solução aquosa.

Para cálculo do pH usa-se a expressão:

$$pH = -\log [H^+]$$

sendo $[H^+]$ a concentração de íons hidrogênio em mol/ℓ. (Mol é uma unidade de medida usada para medir a quantidade de partículas – átomos, moléculas, íons, etc.)

- Quando $0 \leq pH < 7$, a solução é ácida.
- Quando $pH = 7$, a solução é neutra.
- Quando $7 < pH \leq 14$, a solução é básica.

Veja o pH de algumas soluções:

Ácidas		Neutras		Básicas	
suco de limão	2,0	água destilada		sangue	7,4
vinagre	2,8	(água pura)	7,0	bile	8,0
suco de laranja	3,5			leite de magnésia	10,5
tomate	4,0			água do mar	8,5
urina	6,0			amoníaco	11,0
leite	6,4			alvejantes	12,0


Cristina Xavier

Suco de limão: solução ácida.


Cristina Xavier

Água pura tem pH neutro.

Rita Barreto

O leite de magnésia é uma solução básica.

Vamos comparar duas soluções aquosas ácidas A e B, com pH respectivamente iguais a 2 e 3:

- Solução A $\rightarrow pH = 2 \Rightarrow -\log [H^+] = 2 \Rightarrow \log [H^+] = -2 \Rightarrow [H^+] = 10^{-2}$ mols/ℓ.
- Solução B $\rightarrow pH = 3 \Rightarrow -\log [H^+] = 3 \Rightarrow \log [H^+] = -3 \Rightarrow [H^+] = 10^{-3}$ mols/ℓ.

Calculando a razão entre a concentração de íons H^+ na solução A e na solução B obtemos:

$\frac{10^{-2}}{10^{-3}} = 10$, o que nos indica que a solução A é dez vezes "mais ácida" que a solução B.

Nessa escala logarítmica, quando o pH varia de uma unidade, a solução se torna 10 vezes mais ácida (ou 10 vezes menos ácida, dependendo do sentido em que é feita a comparação).

Assim, no exemplo dado acima, uma solução C com pH = 4 é 10 vezes "menos ácida" que a solução B e $10 \times 10 = 100$ vezes "menos ácida" que a solução A.

Referência bibliográfica:

- *Conecte Química*, vol. 2, capítulo 29. São Paulo: Editora Saraiva, 2011.

Fonte – (IEZZI et al., 20013)

Considerações: os autores fazem uma abordagem inicial do conteúdo de logaritmo com um tema atual, a depreciação de bens e do conhecimento de equação exponencial. Uma abordagem histórica aparece antes das propriedades operatórias e é feita de maneira clara e sucinta. Entretanto, ao mencionar as propriedades, não faz uma relação direta da história dos logaritmos com suas propriedades operatórias. Essa relação é mencionada apenas em uma observação, depois de citadas as propriedades. A dedução ou verificação das propriedades através do contexto histórico dos logaritmos poderia proporcionar ao leitor uma maior compreensão desse conceito.

2.8 BREVE ANÁLISE COMPARATIVA DOS LIVROS DIDÁTICOS CITADOS

Os sete livros analisados apresentam algum tipo de comentário sobre a história da criação dos logaritmos. Essa abordagem, em sua maioria, é feita a título de curiosidade, não sendo utilizada como norteadora para o estudo desse tema. Poucos tentam introduzir o contexto histórico como alternativa didática para o ensino desse conteúdo. A forma com que os autores apresentam o conteúdo é similar, difere em pequenos detalhes. Uma abordagem comum e extensa em todos os livros analisados é a presença de textos e exercícios que contextualizam o conteúdo de logaritmo, mostrando sua aplicação em diversas áreas do conhecimento e em diferentes situações cotidianas. Entre os livros didáticos aqui analisados o livro das autoras (SMOLE; DINIZ, 2013) é o que melhor se aproxima de uma abordagem que utiliza a história da criação dos logaritmos para o desenvolvimento do conteúdo. De um modo geral, os livros analisados não apresentam erros nas definições e propriedades, entretanto alguns dos livros citados trazem dados contraditórios sobre a criação dos logaritmos.

3 DISSERTAÇÕES DO PROFMAT SOBRE LOGARITMOS

O estudo e ensino dos logaritmos é um tema que aparece em alguns trabalhos dissertativos, em especial nas dissertações do PROFMAT, onde é possível encontrar dezenas de títulos sobre o assunto. Selecionamos 45 dissertações defendidas por alunos desse Programa de Mestrado para tecer uma breve análise sobre alguns aspectos que pensamos ser relevantes para o ensino dos logaritmos. Na tabela que segue, podemos observar que desde as primeiras defesas, feitas em 2013, até as mais recentes, defendidas em 2017, o tema logaritmo se faz presente.

Observamos que esse tema foi objeto de estudo em diferentes instituições e despertou o interesse de alunos em todas as regiões do Brasil. Das 45 dissertações aqui citadas, 22 foram defendidas na Região Sudeste, 9 na Região Norte, 7 na Região Nordeste, 6 na Região Sul e 1 na Região Centro-Oeste. Isso indica que professores de diferentes regiões do país, com realidades distintas, entendem a importância do tema logaritmo no currículo escolar e a necessidade de buscar alternativas de ensino que favoreçam a aprendizagem desse conteúdo.

Cabe ressaltar que há outras dissertações nesse programa de mestrado que abordam o conteúdo de logaritmos. Contudo, julgamos suficiente, para o objetivo desse trabalho, a amostra aqui apresentada. Na tabela 4 apresentamos as 45 dissertações selecionadas.

Tabela 4 – Dissertações do PROFMAT sobre logaritmos

	Data de defesa	**Aluno**	**Título da Dissertação**	**Instituição**
1	31/03/2017	LUIZ GUILHERME SILVA RIBEIRO	LOGARITMOS E EXPONENCIAIS: DA TEORIA Á PRÁTICA PEDAGÓGICA	UFSJ
2	10/03/2017	THIAGO MATTOS DE CARVALHO	PROPOSTA DE ABORDAGEM DO CONCEITO DE LOGARITMO NO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II	UFRJ
3	02/03/2017	HEBISON ALMEIDA DOS SANTOS	LOGARITMO: DA TEORIA À APLICAÇÃO	UFPA
4	30/09/2016	FABIANA VIEIRA SILVA	LOGARITMO: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA	UNICAMP
5	18/08/2016	DANIELA ROBERTA DE SOUSA OLIVEIRA JESUS	LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA	UEFS
6	29/07/2016	MICHAEL DE LIMA BALZANA DE MELO PINTO	O ESTUDO DO LOGARITMO EM UMA VISÃO INTERDISCIPLINAR	UFRJ

	Data de defesa	Aluno	Título da Dissertação	Instituição
7	27/07/2016	FABRICIO JOSE DA SILVA VIANA	LIÇÕES ELEMENTARES SOBRE LOGARITMOS	UFPA
8	27/05/2016	MARCIEL DA SILVA	LOGARITMO DE NÚMERO REAL NEGATIVO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA A SÉRIE FINAL DO ENSINO MÉDIO	UFAL
9	25/04/2016	MARIANA COSTA PEREIRA	LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR	UENF
10	27/11/2015	JULIO CÉZAR RODRIGUES DE OLIVEIRA	UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE LOGARITMOS NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	UEL
11	18/08/2015	FRANCISCA IRIS NUNES DA SILVA BEZERRA	REFLEXÕES SOBRE A PRÁTICA PEDAGÓGICA NO ENSINO DE LOGARITMO	UFAC
12	12/08/2015	JOÃO CRUZ NETO	ÁREA, LOGARITMO E EXPONENCIAL	UFAM
13	12/08/2015	SIMONE SOTOZONO ALONSO RAMOS	LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA	UFPR
14	10/04/2015	EDUARDO MIRANDA ANGELIN	LOGARITMOS: HISTÓRIA, TEORIA E APLICAÇÕES	UESC
15	27/03/2015	CHRISTIAN BUENO CRUZ	LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS	UEPG
16	20/03/2015	MARCONY MENEGUELLI ALHADAS	PROPOSTA DE ENSINO DE LOGARITMOS PARA O NÍVEL MÉDIO, USANDO UMA AGORDAGEM GEOMÉTRICA	UFJF
17	02/03/2015	CARLOS RONALDO CARDOSO DE CARVALHO	O USO DE LOGARITMOS NO CAMPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS	UFAM
18	12/01/2015	ANA LUIZA ALVES VELOSO	ESTUDO DE LOGARITMOS COM ÊNFASE À METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	UFT
19	29/08/2014	FLUVIO ALVES LEITÃO	LOGARITMOS: SUA HISTÓRIA, INTERDISCIPLINARIDADE, CONTEXTUALIZAÇÃO E SUGESTÕES DIDÁTICAS PARA O SEU ENSINO	UFRRJ

	Data de defesa	Aluno	Título da Dissertação	Instituição
20	07/08/2014	EDSON FERREIRA DA SILVA	LOGARITMOS E APLICAÇÕES	UFPA
21	16/06/2014	MARINA MARRA	LOGARITMOS: CONCEITOS, APLICAÇÕES E ABORDAGEM DO TEMA NOS VESTIBULARES DA UEPG	UEPG
22	06/06/2014	ULISSES DOS SANTOS BORGES	CURSO DE LOGARITMO PARA O ENSINO MÉDIO COM PROPOSTA DE ATIVIDADES ALTERNATIVAS	UFJF
23	05/05/2014	SAULO PORTES DOS REIS	LOGARÍTMOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO.	UNESP
24	30/04/2014	MARCIANO FOREST	ENSINO E APRENDIZAGEM DE LOGARITMOS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	UTFPR
25	17/03/2014	MARCOS BORGES DE OLIVEIRA	ABORDAGENS HISTÓRICAS SOBRE LOGARITMOS	UFMT
26	17/03/2014	VICENTE GERALDO DA ROCHA	A IMPORTÂNCIA DOS LOGARITMOS ONTEM E HOJE NO DESENVOLVIMENTO DA MATEMÁTICA E DAS CIÊNCIAS - UMA ABORDAGEM DIDÁTICA	UFV
27	17/03/2014	TANIA CRISTINA MAGGIONI PIPPA	A FUNÇÃO LOGARITMO E A RÉGUA DE CÁLCULO	USP
28	19/02/2014	MARCELO ALBUQUERQUE LEMGRUBER KROPF	APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS NA ÁREA DE SAÚDE	IMPA
29	05/12/2013	MARILIA CHAVES QUINTAS	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE LOGARITMO: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA	UNIFAP
30	13/11/2013	MARIANA PECORARI	LOGARITMOS E APLICAÇÕES	UNESP
31	09/09/2013	SIDNEY DIASCOUTO	LOGARITMOS CONCEITOS E APLICAÇÃO	UFLA
32	09/09/2013	DANIEL FRANÇA FONSECA	ASPECTOS ESTRUTURAIS E HISTÓRICOS QUE RELACIONAM A MÚSICA E A MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR PARA A APLICAÇÃO DE MÉDIAS,PROGRESSÕES E, EM ESPECIAL OS LOGARITMOS, NO ENSINO MÉDIO	UFLA

	Data de defesa	Aluno	Título da Dissertação	Instituição
33	29/08/2013	BRUNO DE SENA PINHEIRO	LOGARITMOS: UMA APRESENTAÇÃO CONTEXTUALIZADA PARA EDUCAÇÃO BÁSICA	UECE
34	21/08/2013	FERNANDO JOSÉ MARTINS DA ROCHA	LOGARITMOS E APLICAÇÕES	UENF
35	21/08/2013	ROBINSON TAVONI	OS MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL DE MALTHUS E VERHULST - UMA MOTIVAÇÃO PARA O ENSINO DE LOGARITMOS E EXPONENCIAIS	UNESP
36	12/08/2013	JONATHAN LAVOR DA COSTA	O USO DE EXPONENCIAS E LOGARITMOS NO SETOR DE FINANÇAS	UFPI
37	03/08/2013	RICARDO DE CARVALHO OLIVEIRA	OBJETOS DE APRENDIZAGEM: UMA ESTRATÉGIA PARA FACILITAR A COMPREENSÃO DE LOGARITMOS	UFC
38	06/07/2013	DIULIANO AZEREDO GOUVEA	O ENSINO DOS LOGARITMOS TENDO COMO EIXO NORTEADOR A HISTÓRIA	UFRRJ
39	15/04/2013	EMANUEL GOMES LOURENÇO	O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE AUXÍLIO NO ENSINO DE LOGARITMO	UFERSA
40	10/04/2013	JOSIEL PEREIRA DA SILVA	LOGARITMOS E APLICAÇÕES	UFCG
41	09/04/2013	CARLOS LUIZ DA SILVA BRENER	OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE LOGARITMOS E EXPONENCIAIS	IMPA
42	23/03/2013	RODRIGO AECIO FELIX	UMA FORMA DE APRESENTAÇÃO DA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO LOGARITMO NATURAL E ESTUDO DE ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES	UFSCAR
43	22/03/2013	ANDERSON FERRARI	APLICAÇÃO DO NÚMERO "E"E DO LOGARITMO NATURAL EM FENÔMENOS DA NATUREZA	UFJF
44	15/03/2013	LUCIANO XAVIER DE AZEVEDO	LOGARITMOS - CONSTRUÇÃO DA DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA COM O USO DO GEOGEBRA	UEM
45	13/03/2013	VLADIMIR THIENGO	ENSINO DE EXPONENCIAIS E LOGARITMOS NO ENSINO MÉDIO VIA APLICAÇÕES	UFF

Fonte – (PROFMAT, 2016, Acesso em: 25 set. 2017)

3.1 BREVE ANÁLISE DAS DISSERTAÇÕES DO PROFMAT SOBRE LOGARITMOS

A análise das dissertações selecionadas foi feita de acordo com os seguintes itens relacionados aos logaritmos:

A - Abordagem histórica;

B - Aplicação / Interdisciplinaridade / Contextualização / Resolução de problemas;

C - Abordagem geométrica;

D - Números negativos /Números complexos;

E - Pesquisa com professores;

F - Plano de ensino /Sequência didática;

G - Uso de softwares;

H – Análise de livros didáticos;

I - Uso de réguas cálculo.

Na tabela a seguir está registrada a frequência em que os itens A, B, C, D, E, F, G, H e I aparecem nas dissertações analisadas.

Tabela 5 – Temas abordados em dissertações do Profmat sobre logaritmos

	Aluno	**Título da Dissertação**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
1	LUIZ GUILHERME SILVA RIBEIRO	LOGARITMOS E EXPONENCIAIS: DA TEORIA Á PRÁTICA PEDAGÓGICA		X			X	X			
2	THIAGO MATTOS DE CARVALHO	PROPOSTA DE ABORDAGEM DO CONCEITO DE LOGARITMO NO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II	X			X		X		X	
3	HEBISON ALMEIDA DOS SANTOS	LOGARITMO: DA TEORIA À APLICAÇÃO	X	X							
4	FABIANA VIEIRA SILVA	LOGARITMO: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA	X		X			X	X		
5	DANIELA ROBERTA DE SOUSA OLIVEIRA JESUS	LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA	X	X	X						
6	MICHAEL DE LIMA BALZANA DE MELO PINTO	O ESTUDO DO LOGARITMO EM UMA VISÃO INTERDISCIPLINAR	X	X						X	

Tabela 6 – Temas abordados em dissertações do Profmat sobre logaritmos

	Aluno	**Título da Dissertação**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
7	FABRICIO JOSE DA SILVA VIANA	LIÇÕES ELEMENTARES SOBRE LOGARITMOS	X	X	X						
8	MARCIEL DA SILVA	LOGARITMO DE NÚMERO REAL NEGATIVO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA A SÉRIE FINAL DO ENSINO MÉDIO	X			X		X			
9	MARIANA COSTA PEREIRA	LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR	X	X				X			
10	JULIO CÉZAR RODRIGUES DE OLIVEIRA	UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE LOGARITMOS NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS		X							
11	FRANCISCA IRIS NUNES DA SILVA BEZERRA	REFLEXÕES SOBRE A PRÁTICA PEDAGÓGICA NO ENSINO DE LOGARITMO	X				X				
12	JOÃO CRUZ NETO	ÁREA LOGARITMO E EXPONENCIAL			X						
13	SIMONE SOTOZONO ALONSO RAMOS	LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA	X	X	X			X			
14	EDUARDO MIRANDA ANGELIN	LOGARITMOS: HISTÓRIA, TEORIA E APLICAÇÕES	X	X	X						
15	CHRISTIAN BUENO CRUZ	LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS	X			X					
16	MARCONY MENEGUELLI ALHADAS	PROPOSTA DE ENSINO DE LOGARITMOS PARA O NÍVEL MÉDIO, USANDO UMA AGORDAGEM GEOMÉTRICA.			X			X	X		
17	CARLOS RONALDO CARDOSO DE CARVALHO	O USO DE LOGARITMOS NO CAMPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS				X					
18	ANA LUIZA ALVES VELOSO	ESTUDO DE LOGARITMOS COM ÊNFASE À METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	X	X						X	
19	FLUVIO ALVES LEITÃO	LOGARITMOS: SUA HISTÓRIA, INTERDISCIPLINARIDADE, CONTEXTUALIZAÇÃO E SUGESTÕES DIDÁTICAS PARA O SEU ENSINO	X	X				X			

	Aluno	Título da Dissertação	A	B	C	D	E	F	G	H	I
20	EDSON FERREIRA DA SILVA	LOGARITMOS E APLICAÇÕES	X	X							
21	MARINA MARRA	LOGARITMOS: CONCEITOS, APLICAÇÕES E ABORDAGEM DO TEMA NOS VESTIBULARES DA UEPG	X	X							
22	ULISSES DOS SANTOS BORGES	CURSO DE LOGARITMO PARA O ENSINO MÉDIO COM PROPOSTA DE ATIVIDADES ALTERNATIVAS	X	X				X	X		
23	SAULO PORTES DOS REIS	LOGARÍTMOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO.	X		X			X			
24	MARCIANO FOREST	ENSINO E APRENDIZAGEM DE LOGARITMOS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS		X				X			
25	MARCOS BORGES DE OLIVEIRA	ABORDAGENS HISTÓRICAS SOBRE LOGARITMOS	X					X	X		
26	VICENTE GERALDO DA ROCHA	A IMPORTÂNCIA DOS LOGARITMOS ONTEM E HOJE NO DESENVOLVIMENTO DA MATEMÁTICA E DAS CIÊNCIAS - UMA ABORDAGEM DIDÁTICA	X	X							
27	TANIA CRISTINA MAGGIONI PIPPA	A FUNÇÃO LOGARITMO E A RÉGUA DE CÁLCULO	X	X				X			X
28	MARCELO ALBUQUERQUE LEMGRUBER KROPF	APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS NA ÁREA DE SAÚDE		X				X			
29	MARILIA CHAVES QUINTAS	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE LOGARITMO: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA		X				X			
30	MARIANA PECORARI	LOGARITMOS E APLICAÇÕES	X	X	X						
31	SIDNEY DIAS-COUTO	LOGARITMOS CONCEITOS E APLICAÇÃO	X	X				X	X		
32	DANIEL FRANÇA FONSECA	ASPECTOS ESTRUTURAIS E HISTÓRICOS QUE RELACIONAM A MÚSICA E A MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR PARA A APLICAÇÃO DE MÉDIAS, PROGRESSÕES E, EM ESPECIAL OS LOGARITMOS, NO ENSINO MÉDIO	X	X				X			

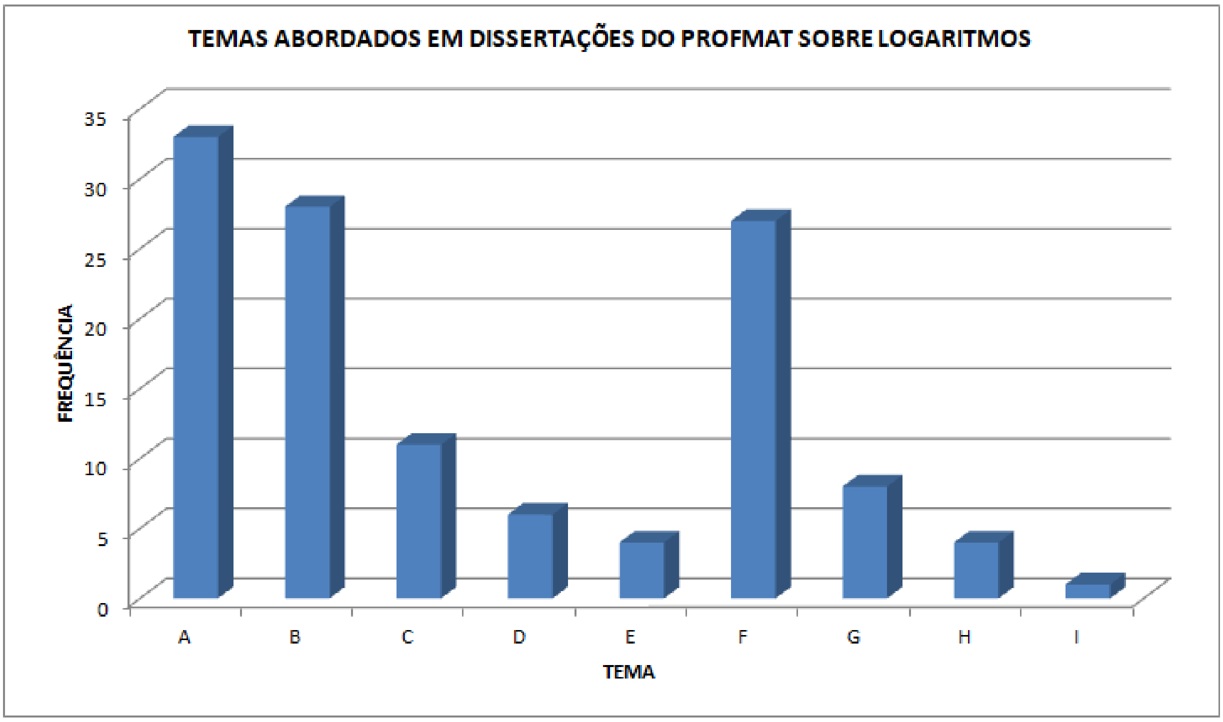
	Aluno	Título da Dissertação	A	B	C	D	E	F	G	H	I
33	BRUNO DE SENA PINHEIRO	LOGARITMOS: UMA APRESENTAÇÃO CONTEXTUALIZADA PARA EDUCAÇÃO BÁSICA	X	X							
34	FERNANDO JOSÉ MARTINS DA ROCHA	LOGARITMOS E APLICAÇÕES	X	X				X			
35	ROBINSON TAVONI	OS MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL DE MALTHUS E VERHULST - UMA MOTIVAÇÃO PARA O ENSINO DE LOGARITMOS E EXPONENCIAIS						X	X		
36	JONATHAN LAVOR DA COSTA	O USO DE EXPONENCIAS E LOGARITMOS NO SETOR DE FINANÇAS	X	X							
37	RICARDO DE CARVALHO OLIVEIRA	OBJETOS DE APRENDIZAGEM: UMA ESTRATÉGIA PARA FACILITAR A COMPREENSÃO DE LOGARITMOS	X					X			
38	DIULIANO AZEREDO GOUVEA	O ENSINO DOS LOGARITMOS TENDO COMO EIXO NORTEADOR A HISTÓRIA	X				X			X	
39	EMANUEL GOMES LOURENÇO	O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE AUXÍLIO NO ENSINO DE LOGARITMO	X					X	X		
40	JOSIEL PEREIRA DA SILVA	LOGARITMOS E APLICAÇÕES		X				X			
41	CARLOS LUIZ DA SILVA BRENER	OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE LOGARITMOS E EXPONENCIAIS						X	X	X	
42	RODRIGO AECIO FELIX	UMA FORMA DE APRESENTAÇÃO DA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO LOGARITMO NATURAL E ESTUDO DE ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES			X			X	X		
43	ANDERSON FERRARI	APLICAÇÃO DO NÚMERO “E” E DO LOGARITMO NATURAL EM FENÔMENOS DA NATUREZA	X	X			X	X			
44	LUCIANO XAVIER DE AZEVEDO	LOGARITMOS - CONSTRUÇÃO DA DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA COM O USO DO GEOGEBRA						X	X		
45	VLADIMIR THIENGO	ENSINO DE EXPONENCIAIS E LOGARITMOS NO ENSINO MÉDIO VIA APLICAÇÕES	X	X				X			

A tabela 7 e o gráfico da (Figura 39) apresentam, de forma resumida, a frequência em que os temas A, B, C, D, E, F, G, H e I aparecem nas dissertações do PROFMAT mencionadas nesse trabalho.

Tabela 7 – Temas abordados nas dissertações do PROFMAT sobre logaritmos

TEMA	FREQUÊNCIA
A - Abordagem histórica	33
B - Aplicação/interdisciplinaridade/contextualização/resolução de problemas	28
C - Abordagem geométrica	11
D - Números negativos/ números complexos	6
E - Pesquisa com professores	4
F - Plano de ensino/ sequência didática	27
G -Uso de softwares	8
H - Análise de livros didáticos	4
I - Uso da régua de cálculo	1

Figura 39 – Gráfico sobre temas abordados em dissertações do PROFMAT sobre logaritmos



Fonte – Construção da autora

3.1.1 A - ABORDAGEM HISTÓRICA

A maior parte das dissertações analisadas faz alguma referência à história dos logaritmos, alguns trabalhos fazem esse relato histórico de forma breve, outros aprofundam um pouco mais. Dentre eles, cabe destacar as seguintes dissertações: (19) “Logaritmos: sua história, interdisciplinaridade, contextualização e sugestões didáticas para o ensino” (LEITÃO,); (25)“Abordagens Históricas sobre Logaritmos” (OLIVEIRA, 2014); (27) “A função logaritmos e a Régua de Cálculo” (PIPPA, 2014); (38) “O Ensino de Logaritmos tendo como Eixo Norteador a História” (GOUVÊA, 2013). Esses trabalhos apresentam de modo satisfatório uma base histórica sobre os logaritmos, sendo que os três primeiros trazem uma sequência didática para o ensino de logaritmos norteados pela história. No quarto trabalho citado, cabe ressaltar a análise do conteúdo de logaritmos em alguns livros didáticos, buscando conexão entre o conteúdo e seu resgate histórico.

3.1.2 B - APLICAÇÃO/INTERDISCIPLINARIDADE/ CONTEXTUALIZAÇÃO/RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Entre os trabalhos analisados nessa obra, muitos autores adotaram uma abordagem do tema logaritmos sob a perspectiva da interdisciplinaridade, buscando aplicações práticas que pudessem contextualizar esse conteúdo, permitindo a resolução de problemas cotidianos. Sobre a aplicação do conteúdo de logaritmos destacamos os trabalhos: (20) “Logaritmos e Aplicações” (SILVA, 2014); (21) “Logaritmos: conceitos, aplicações e abordagem do tema nos vestibulares da UEPG”, (MARRA, 2014); (28) “Aplicações dos logaritmos na área da saúde”(KROPF, 2014); (30) “Logaritmos e Aplicações” (PERCORARI, 2013); (31) “Logaritmos, conceitos e aplicações” (COUTO, 2013);(34) “Logaritmos e aplicações” (ROCHA, 2013). Sobre o aspecto interdisciplinar, citamos as dissertações: (9) “Logaritmos: uma abordagem interdisciplinar” (PEREIRA, 2016); (19) “Logaritmos: sua história, interdisciplinaridade, contextualização e sugestões didáticas para o ensino” (LEITÃO,). Sobre o tema contextualização destacamos os seguintes trabalhos: (13) “Logaritmos: uma abordagem didática” (RAMOS, 2015); (33) “Logaritmos: uma apresentação contextualizada para Educação Básica” (PINHEIRO, 2013). Sobre a Resolução de problemas destacamos: (10) “Uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de logaritmos na perspectiva da Resolução de Problemas” (OLIVEIRA, 2015); (18) “Estudo de logaritmos com ênfase na metodologia de Resolução de Problemas” (VELOSO, 2014);(24) “Ensino e aprendizagem de logaritmos através da Resolução de Problemas” (FOREST, 2014).

3.1.3 C - ABORDAGEM GEOMÉTRICA

A abordagem geométrica é uma parte importante no estudo dos logaritmos, pois permite relacionar logaritmo com o conceito de área utilizando a base e. Alguns trabalhos que exploram essa abordagem são: (4) “Logaritmo: uma abordagem geométrica” (SILVA, 2016a); (5) “Logaritmo: uma abordagem geométrica” (JESUS, 2016); (12) “Área, logaritmo e exponencial” (NETO, 2015); (16) “Proposta de ensino de logaritmos para o nível médio, usando uma abordagem geométrica” (ALHADAS, 2015); (42) “Uma forma de apresentação da interpretação geométrica do logaritmos natural e estudo de algumas de suas propriedades” (FELIX, 2013).

3.1.4 D - NÚMEROS NEGATIVOS/ NÚMEROS COMPLEXOS

Uma abordagem pouco utilizada no ensino de logaritmos na educação básica é o cálculo de logaritmos de números negativos que se relacionam com números complexos. Citamos três dissertações do Profmat que fazem essa abordagem: (8) “Logaritmo de um número real negativo: uma proposta didática para a série final do ensino fundamental” (SILVA, 2016b); (15) “Logaritmos de números negativos” (CRUZ, 2015); (17) ‘´O uso de logaritmos no campo dos números complexos” (CARVALHO, 2015).

3.1.5 E - PESQUISA COM PROFESSORES

Alguns trabalhos optaram por conhecer o que os professores pensam e ensinam sobre logaritmos, uma vez que o professor possui papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem. Dissertações do Profmat que contemplam essas pesquisa são: (1) “Logaritmos e exponenciais: da teoria à prática pedagógica” (RIBEIRO, 2017); (11) “Reflexões sobre a prática pedagógica no ensino de logaritmos” (BEZZERA, 2015); (43) “Aplicação do número *“e”* e do logaritmo natural em fenômenos da natureza” (FERRARI, 2013).

3.1.6 F - PLANO DE ENSINO/ SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sugestão de um plano de ensino bem elaborado, com objetivos claros e didática adequada também foi preocupação dos alunos do Profmat. Citamos três dissertações que contemplaram esse item: (2) "Proposta de abordagem do conceito de logaritmo no nono ano do ensino fundamental II"(CARVALHO, 2017); (22) “Curso de logaritmo para o ensino médio com proposta de atividades alternativas” (BORGES, 2014); (23) “Logaritmos: uma proposta de ensino” (REIS, 2014); (29) “Aprendizagem significativa de logaritmo: um relato de experiência” (QUINTAS, 2013).

3.1.7 G - USO DE SOFTWARES

O uso da tecnologia no ensino e estudo de logaritmos foi um recurso citado em algumas dissertações, especialmente o uso de softwares na exploração da abordagem geométrica dos logaritmos. Citamos: (39) “O Geogebra como ferramenta de auxílio no ensino de logaritmo” (LOURENÇO, 2013); (44) “Logaritmos - Construção da definição geométrica com o uso do Geogebra” (AZEVEDO, 2013).

3.1.8 H - ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

O livro didático é uma das ferramentas de ensino que está presente nas escolas de todo país e, na maior parte delas, é usado pelos professores, como referência para suas aulas. Considerando essa influência dos livros didáticos no processo de ensino, encontramos em alguns trabalhos uma análise sobre logaritmos nos livros didáticos. Destacamos: (6) "O estudo de logaritmo em uma versão interdisciplinar" (PINTO, 2016); (38) "O ensino de logaritmos tendo como eixo norteador a história" (GOUVÊA, 2013); (41) "Objetos de aprendizagem para o ensino de logaritmos e exponenciais" (BRENER, 2013).

3.1.9 I - RÉGUA DE CÁLCULO

A régua de cálculo está diretamente relacionada ao surgimento dos logaritmos, um vez que sua construção é feita a partir de uma escala logarítmica e sua funcionalidade é validada através das propriedades dos logaritmos. Entretanto, poucas das dissertações aqui mencionadas citam a régua de cálculo. O trabalho de (PIPPA, 2014) explora esse tema mais profundamente, estabelecendo relações entre régua de cálculo e os logaritmos, além de apresentar um sequência didática que utiliza a régua de cálculo como ferramenta metodológica para o ensino de logaritmos.

4 PROPOSTA ENSINO: LOGARITMOS E A RÉGUA DE CÁLCULO

4.1 INTRODUÇÃO

Essa proposta de ensino visa abordar o conteúdo de logaritmos no Ensino Básico, tendo como eixo norteador a História da Matemática. A proposta não limita-se a reproduzir os conceitos de Napier e Briggs, mas busca mostrar os problemas que levaram à descoberta (ou invenção) dos logaritmos e reintroduz as ideias deles com uma linguagem moderna, evitando apresentar notações que já caíram em desuso. Pretende-se, a partir do resgate histórico desse conteúdo, apresentar uma alternativa de ensino de caráter investigativo que permita ao aluno uma aprendizagem significativa através da compreensão do contexto em que os logaritmos foram inventados.

Para desenvolvermos nossa proposta fazemos uso de tabelas logarítmicas e da régua de cálculo logarítmica, para entender de que forma essas ferramentas, hoje obsoletas, revolucionaram os cálculos aritméticos da época, favorecendo a evolução em diferentes campos científicos. Essa proposta segue as orientações do livreto “ Logaritmos e a Régua de Cálculo: uma proposta de ensino”. (ADAMES M. R.; PEDROSA, 2018)

De acordo com análise que fizemos nos livros didáticos e em dissertações sobre o tema, encontramos diferentes propostas de ensino para o tema logaritmo. Entretanto, nossa proposta se diferencia das demais, pois utiliza a régua de cálculo, ferramenta pouca explorada nas outras propostas. A dissertação do PROFMAT "A função logarítmica e a régua de cálculo", cuja autora é Tania Cristina Maggioni Pippa é a única que encontramos em nossa análise que explora a régua de cálculo em sua proposta didática. Nessa proposta a autora entrega uma régua de cálculo pronta para os alunos para que esses efetuem alguns cálculos. Em nossa proposta os alunos constroem uma régua de cálculo em base 2 a partir de uma tabela de logaritmos construída com eles. A régua de cálculo pronta que entregamos a eles foi construída exclusivamente para fins didáticos para que pudessem, ao utilizá-la para efetuar cálculos, entender as propriedades dos logaritmos.

4.2 RESUMO DO LIVRETO

O livreto apresenta um prefácio com citações de alguns autores, justificando essa proposta de ensino, além de comentar brevemente cada capítulo e como o conteúdo foi nele organizado. Na sequência é feito um breve comentário sobre o surgimento dos logaritmos e da régua de cálculo. Nos dois capítulos seguintes, são apresentadas 16 sugestões de atividades que exploram o conteúdo de logaritmos a partir de um contexto histórico, algumas delas usando a régua de cálculo que acompanha o material. O livreto ainda contém uma definição de logaritmo usando o conceito de velocidade, seguindo as ideias de Napier e Katz. Por fim, apresenta-se alguns exercícios de aplicação e outros de concursos e vestibulares.

4.3 DESENVOLVIMENTO DA PROPOSTA

As atividades propostas têm como base o livreto intitulado *"Logaritmos e a Régua de Cálculo: uma proposta de ensino"*. Embora elas estejam aqui apresentadas, recomenda-se que, para maior compreensão do que está sendo proposto, os interessados consultem o material na íntegra, que traz de forma detalhada todas as etapas dessa proposta didática.

4.3.1 TEMPO PREVISTO

De 8 a 10 aulas, aproximadamente.

4.3.2 OBJETIVOS

1. Entender o contexto histórico da criação dos logaritmos e sua importância para a humanidade, desde a época de sua criação até a atualidade.
2. Compreender a relação entre o conteúdo de P.A. e P.G. na criação dos logaritmos.
3. Construir e manipular a régua de cálculo.
4. Efetuar cálculos usando a régua de cálculo logarítmica.
5. Identificar e compreender as propriedades operatórias dos logaritmos a partir do uso da régua de cálculo.
6. Compreender e identificar o logaritmo enquanto função.
7. Utilizar o logaritmo para resolver problemas na matemática e nas aplicações dele em diversos contextos.

4.3.3 RECURSOS

1. Livreto.
2. Papel cartão para construção da régua de cálculo logarítmica de base 2.
3. Régua de cálculo de base 1,04713 que acompanha o livreto.
4. Malha quadriculada.

4.3.4 ATIVIDADE 1: CONTEXTO HISTÓRICO DA CRIAÇÃO DOS LOGARITMOS

Pedir para os estudantes calcularem, sem a utilização de nenhum equipamento eletrônico, 19683×2187.

Pergunte pelas respostas obtidas (eles devem obter vários resultados distintos) antes de mostrar a resposta correta: 43046721.

O objetivo dessa atividade é mostrar que tais erros são bastante comuns e representavam um problema sério quando os cálculos eram feitos a mão e não havia nenhum meio eletrônico que permitisse a verificação deles.

4.3.5 ATIVIDADE 2: UTILIZAÇÃO DE PROPRIEDADES DE POTÊNCIA (EXPOENTES NATURAIS) PARA EFETUAR PRODUTOS

Construa, com a ajuda dos estudantes, uma tabela com as potências de 2 para os expoentes de 1 a 30. Em seguida, peça aos estudantes que realizem os seguintes cálculos com o auxílio da tabela: $256 \times 2097152, 2048 \times 524288$ e 8192×65536.

Essa atividade propõe a utilização de uma tabela de potências de 2 para efetuar operações de multiplicação aplicando propriedades de potência.

4.3.6 ATIVIDADE 3: CÁLCULO DE APROXIMAÇÕES DE RADICAIS NÃO INTEIROS

Peça aos estudantes que calculem aproximações, utilizando o método da bissecção ou o método de Newton (sem o uso da calculadora), para $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt[4]{128}$ e $c = \sqrt[8]{8192}$.

O objetivo dessa atividade é relembrar uma forma de calcular aproximações de radicais que não são inteiros. Os resultados obtidos servem como base para o desenvolvimento da atividade seguinte.

4.3.7 ATIVIDADE 4: POTÊNCIAS DE 2 COM EXPOENTES RACIONAIS

Questione os estudantes sobre como podemos obter o expoente x em que devemos elevar o número 2 para obtermos o número 3. Calcular com eles esse valor de x. Em seguida separe os estudantes em grupos de 3 ou 4 e peça que eles calculem aproximações para o expoente x, em que devemos elevar o número 2, para obtermos outros números naturais de interesse (como 5, 6, 7, 8, 9, 10, ..., 32), organizando os dados em uma tabela.

Explique, para os estudantes, que eles estiveram calculando os logaritmos criados por Napier e Briggs em base dois e apresente uma definição modernizada, destacando a base o logaritmo e o logaritmando.

4.3.8 ATIVIDADE 5: UTILIZAÇÃO DE PROPRIEDADES DE POTÊNCIAS (EXPOENTES RACIONAIS) PARA EFETUAR PRODUTOS

Peça aos estudantes que utilizem a tabela da atividade anterior para calcular os produtos: $5 \times 4, 3 \times 5$ e 2×7, aplicando as propriedades de potência.

4.3.9 ATIVIDADE 6: A RÉGUA DE CÁLCULO EM BASE 2

Em duplas, os alunos construirão uma régua de cálculo com base nos valores da tabela da atividade 4, entretanto usando a escala $1 : 6$, ou seja, multiplicaremos a os valores dos logaritmos obtidos por 6. Cada aluno deve receber uma faixa de papel cartão retangular de dimensões 32 x 3,5 cm e nela devem marcar esses valores. Isso será feito medindo com a régua linear usual o tamanho do logaritmo do número e escrevendo nessa distância o próprio número. Por exemplo, como $6 \times \log_2 3 = 6 \times 1,625 = 9,75$, o valor a ser medido com a régua linear é $9,75$, entretanto deve ser escrito nessa distância o número 3.

1. Depois da régua pronta, peça aos estudantes que utilizem-na para calcular $5 \times 4, 3 \times 5$ e 2×7. (os mesmos da atividade 5), $4\times$, 2×9 e 3×7.
2. Discuta com os estudantes por que a régua funciona para as multiplicações do item anterior.
3. Mostre aos estudantes que todos os resultados das multiplicações do primeiro fator por qualquer número da metade superior da régua ficam automaticamente na posição correta. Discuta com eles o porquê disso ocorrer.
4. A régua também pode ser utilizada para calcular divisões. Mostre aos estudantes que para dividirmos 27 por 3 basta colocarmos o número 3 da metade superior sobre o número 27 da metade inferior e o resultado está na metade inferior abaixo do número 1. Peça aos estudantes para que efetuem com a régua os cálculos $24 \div 4$, $20 \div 5$ e $12 \div 6$.
5. Discuta com os estudantes por que a régua funciona para as divisões do item anterior.

4.3.10 ATIVIDADE 7: PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Nessa atividade, o professor deve ressaltar aos alunos o que ocorre quando estamos operando com a régua de cálculo, deduzindo com eles as propriedades operatórias dos logaritmos da seguinte forma:

$$5 \times 4 = 2^{2,33} \times 2^2 \approx 2^{\log_2 5} \times 2^{\log_2 4} = 2^{\log_2 5 + \log_2 4} = 2^{2,33+2} = 2^{4,33} \approx 2^{\log_2 20} = 20.$$

Das igualdades anteriores, concluir que $\log_2 5 + \log_2 4 = \log_2 5 \times 4 = \log_2 20$. Pedir para que os alunos reescreva essa operação para outros produtos e algumas divisões. Discutir com os alunos que o logaritmo de a em base x é o número em que devemos elevar x para obter a e assim,

$a \times b = x^{\log_x a} \times x^{\log_x b} = x^{\log_x a + \log_x b}$, mas que $a \times b = x^{\log_x (a+b)}$, de modo que $\log_x a + \log_x b = \log_2 (a \times b)$.

Analogamente,

$a \div b = x^{\log_x a} \div x^{\log_x b} = x^{\log_x a - \log_x b}$, mas que $a \div b = x^{\log_x (a-b)}$, de modo que $\log_x a - \log_x b = \log_2 (a \div b)$.

4.3.11 ATIVIDADE 8: RÉGUA DE CÁLCULO QUE ACOMPANHA O LIVRETO

Separe os estudantes em duplas e peça que utilizem as réguas de cálculo que acompanham o livreto para realizar alguns cálculos como: 9×7, $3,5 \times 4$, 28×25, $56 \div 7$, $7345 \div 57$, entre outros.

4.3.12 ATIVIDADE 9: MUDANÇA DE BASE

A mudança de base é uma propriedade que permite mudar a base do logaritmo para outra qualquer, respeitando as condições de existência do logaritmo. Apresente a seguinte situação aos estudantes. Suponha que x é o logaritmo de um número a em base $k > 0$, ou seja $x = \log_k a$, o que significa que se elevarmos k na x obtemos a, ou seja, $k^x = a$. Por outro lado suponha que queremos descobrir o logaritmo de a na base $c > 0$ $(c \neq k)$, ou seja, queremos descobrir em que número precisamos elevar a base c para obter a. Note que se $y = \log_c k$, ou seja $c^y = k$, temos $a = k^x = (c^y)^x = c^{xy} = c^{x \log_c k}$. Deste modo precisamos elevar c na $x \log_c k$ para obter a, ou seja, $\log_c a = x \log_c k = \log_c k \log_k a$. Frequentemente essa fórmula é escrita assim: $\log_K a = \frac{\log_c a}{\log_c k}$.

Informe aos estudantes o valor do logaritmo de 1,04713 (base da régua) em base 7, $\log_7 1,04713 \approx 0,0237$, e peça que utilizem as réguas de cálculo que acompanham o livreto para realizar cálculos como: $x = \log_7 20$ e $7^{1,5405}$. Nessa atividade os alunos utilizarão um logaritmos conhecido (no caso $\log_7 1,04713 \approx 0,0237$) para efetuar uma mudança de base e calcular o logaritmos procurado. O segundo cálculo é para verificação de que o valor encontrado está correto, ou seja, de que essa propriedade é válida.

4.3.13 ATIVIDADE 10: MUDANÇA DE BASE

Separe os estudantes em duplas e peça que utilizem as réguas de cálculo que acompanham o livreto para realizar cálculos que utilizem a propriedade da mudança de base. Os logaritmos que devem ser calculados não possuem a mesma base da régua, como esse é o recurso que deve ser utilizado, os estudantes devem fazer a mudança de base adequada (nesse caso ma base da régua) para encontrar os resultados procurados.

4.3.14 ATIVIDADE 11: O LOGARITMO VEZES UMA CONSTANTE

Nessa atividade os alunos devem usar a régua de cálculo que acompanha o livreto para calcular logaritmos de números de valores altos, que não estão na régua, mas que podem ser escritos em uma potência cujo logaritmo da base dessa potência pode ser encontrado com a régua. Por exemplo, para calcular $x = \log_{1,04713} 1024 = \log_{1,04713} 2^{10}$, fazemos $10 \times \log_{1,04713} 2 \approx 10 \times 15 = 150$.

4.3.15 ATIVIDADE 12: FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Nessa atividade, dê aos estudantes grades quadriculadas (anexa ao livreto) e explique para eles que as linhas verticais marcam, sucessivamente, as retas $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, ...; enquanto as linhas horizontais marcam, sucessivamente, as retas $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, ... Em seguida peça aos estudantes que busquem na régua de cálculo os valores na escala linear alinhados com os números naturais marcados na escala logarítmica e marquem-nos nas linhas verticais dos valores dos respectivos logaritmos. Em seguida indique que liguem os pontos formando o esboço do gráfico da função logarítmica.

4.3.16 ATIVIDADE 13: EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Sendo a função logarítmica uma função injetora, temos $\log_a x = \log_a y \iff x = y$. Indique aos estudantes que resolvam as seguintes equações logarítmicas (opcionalmente pode resolver alguns no quadro como exemplo e/ou deixar alguns dos exercícios como atividades para depois da aula).

- $\log(x^2 - 7x) - \log(3x) = 4$.
- $\log_7 5x^2 - \log_7 x = 2$.
- $\log_7 x + \log_2 5x = 3$.
- $\log_7 x - \log_3 x = 2$.
- $\log_{x+2} x^2 + 5 = 2$.
- $\log_{x-1} -3x^2 + 3x + 26 = 3$.
- $\log_{x-1} x^2 - 2x + 1 = 3$.
- $\ln x^2 - \ln x = x$.

4.3.17 ATIVIDADE 14: INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Usando o fato da função logarítmica $\log_k x$ ser crescente se $k > 1$ e decrescente se $0 < k < 1$, os estudantes devem resolver as inequações logarítmicas que seguem:

- $\log_3(x-4) > \log_3 27$.
- $\log_{0,5}(x) > \log_{0,5} 4$.
- $\log_2(x+1) > 4$.
- $\log_{1/3}(x^2-5) < \log_{1/3}(4x)$.
- $\log_2 x > \log_2 9$.

4.3.18 ATIVIDADE 15: O NÚMERO DE EULER

O propósito da atividade 15 é descobrir naturalmente o número e. Um objeto movendo-se em linha reta com a posição dada por uma exponencial tem a velocidade média entre dois instantes t e $t+h$ proporcional a posição, ou seja, $v_m = \frac{k^h-1}{h}Q(t)$. Vamos chamar a constante que aparece na velocidade média, para $h = 0,000000001$ de

$$c_k = v_m = \frac{k^{0,000000001}-1}{0,000000001}$$

e buscar o valor da constante k para a qual $c_k = 1$. Na tabela 3.1 do livreto, vemos que quanto maior o k, maior será o valor de c_k. Usando uma calculadora ou computador (ou celular), busque o valor de $c_{2,5}$ e aplique 3 iterações do método da bisseção para aproximar esse valor, encontrando o valor de c_k próximo de 1. Observamos que para c_k próximo de um, k se aproxima do valor de e.

4.3.19 ATIVIDADE 16: O NÚMERO DE EULER E LOGARITMO NATURAL

Os estudantes, em duplas, devem utilizar as réguas de cálculo que acompanham o livreto para aproximar o logaritmo natural e verificar (com o auxílio de uma calculadora) os resultados obtidos. Para isso os alunos utilizarão a propriedade de mudança de base (para base da régua).

- $x = \ln 20$.
- $x = \ln 36$.
- $x = \ln 77$.

4.3.20 AVALIAÇÃO

A avaliação das atividades aplicadas dever ocorrer de forma contínua, durante todo o processo. O professor pode utilizar os materiais produzidos pelos alunos, como a régua de cálculo em base 2, as anotações dos cálculos efetuados e os gráficos que construíram. Contudo, muito além dos registros feitos pelos estudantes, está a compreensão de cada etapa do processo que foi desenvolvido com a aplicação das atividades. Essa compreensão, ainda que não apareça nos registros, é o que deve determinar a conclusão do processo avaliativo. Desa forma, o professor deve estar atento a todo processo para que a avaliação feita por ele se aproxime, de fato, ao que o aluno assimilou.

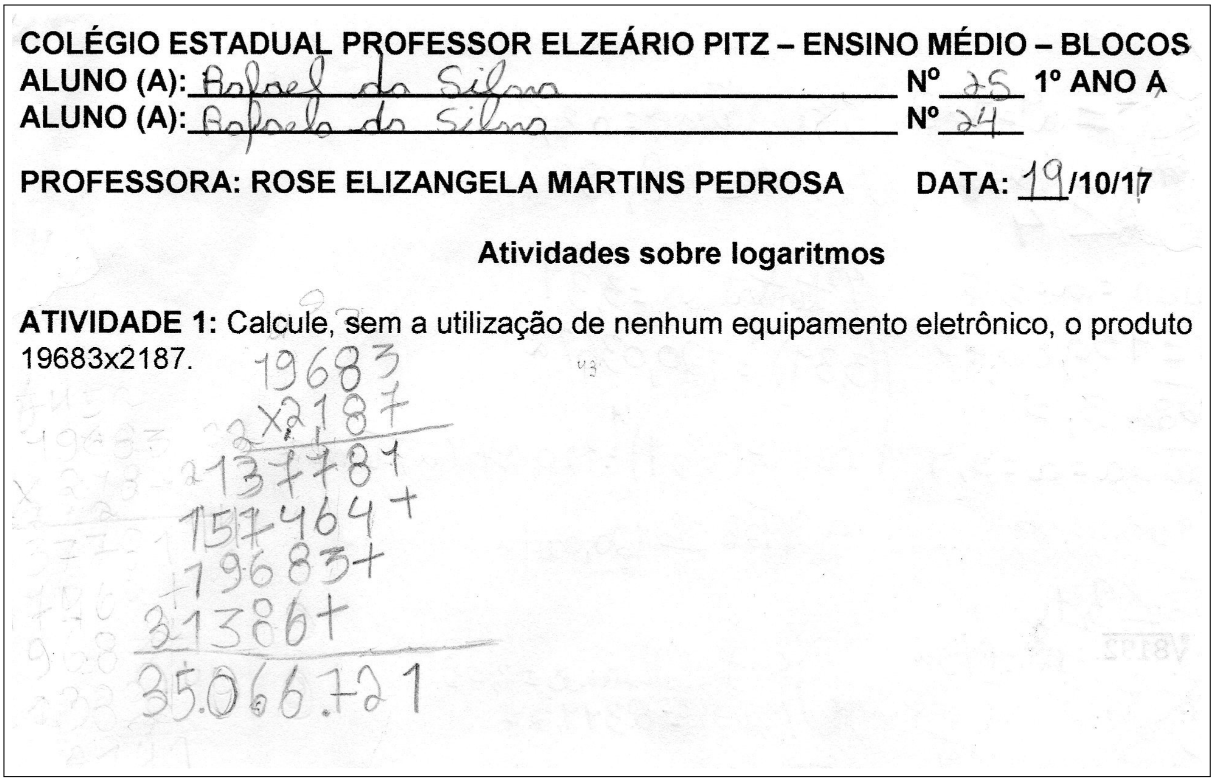
4.3.21 BIBLIOGRAFIA

Logaritmos e a Régua de Cálculo: uma proposta de ensino (ADAMES M. R.; PEDROSA, 2018).

4.4 RELATO DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES EM SALA DE AULA

1. Na atividade 1, os alunos mostraram-se surpresos com a simplicidade do que estava sendo proposto. Contudo, ao realizarem a multiplicação, perceberam que não era tão simples como imaginavam a princípio. Isso ficou evidente quando as respostas foram comparadas e nenhum dos estudantes tinha encontrado o resultado correto. Eles concluíram que se tivessem utilizado uma ferramenta para o cálculo (no caso a calculadora) teriam encontrado o resultado correto e de forma rápida.

Figura 40 – Aplicação da atividade 1



COLÉGIO ESTADUAL PROFESSOR ELZEÁRIO PITZ – ENSINO MÉDIO – BLOCOS
ALUNO (A): Rafael da Silva **Nº** 25 **1º ANO A**
ALUNO (A): Rafaela da Silva **Nº** 24

PROFESSORA: ROSE ELIZANGELA MARTINS PEDROSA **DATA:** 19**/10/17**

Atividades sobre logaritmos

ATIVIDADE 1: Calcule, sem a utilização de nenhum equipamento eletrônico, o produto 19683x2187.

19683
x2187
137781
157464+
19683+
31386+
35.066.721

Fonte – Acervo da autora

2. Na atividade 2, os alunos efetuaram o que foi pedido sem muita dificuldade e mencionaram que a ideia de usar a tabela e a propriedade de potência para efetuar os cálculos foi muito inteligente e útil. Se mostraram entusiasmados e interessados nessa atividade.

Figura 41 – Aplicação da atividade 2

ATIVIDADE 2: Complete a tabela abaixo com os valores das potencias de 2.

2^1	2	2^{11}	2048	2^{21}	2097152
2^2	4	2^{12}	4096	2^{22}	4194304
2^3	8	2^{13}	8192	2^{23}	8388608
2^4	16	2^{14}	16384	2^{24}	16777216
2^5	32	2^{15}	32768	2^{25}	33554432
2^6	64	2^{16}	65536	2^{26}	67108864
2^7	128	2^{17}	131072	2^{27}	134217728
2^8	256	2^{18}	262144	2^{28}	268435456
2^9	512	2^{19}	524288	2^{29}	1073741824
2^{10}	1024	2^{20}	104856	2^{30}	2147483648

Agora realize os seguintes cálculos com auxilio da tabela:

a) 256 x 2097152 = $2^8 \times 2^{21} = 2^{8+21} = 2^{29} = 1073741824$

b) 2048 x 524288 = $2^{11} \times 2^{19} = 2^{11+19} = 2^{30} = 2147483648$

c) 8192 x 65536 = $2^{13} \times 2^{16} = 2^{29} = 1073741824$

Fonte – Acervo da autora

3. Na atividade 3, os alunos entenderam a necessidade da realização dos cálculos, contudo tiveram dificuldade em realizá-los. Fizeram com muita mediação do professor.

Figura 42 – Aplicação da atividade 3

ATIVIDADE 3: Calculem aproximações (sem uso de calculadora) para:

a) $a = \sqrt{8} \Rightarrow a^2 = 8$

$\sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$

$2 < \sqrt{8} < 3$

1° tentativa: $a = 2,5$

$(2,5)^2 = 6,25 \Rightarrow 2,5 < a < 3$

2° tentativa: $a = 2,75$

$(2,75)^2 = 7,5625 \Rightarrow 2,75 < a < 3$

3° tentativa: $a = 2,875$

$(2,875)^2 = 8,265 \Rightarrow 2,75 < a < 2,875$

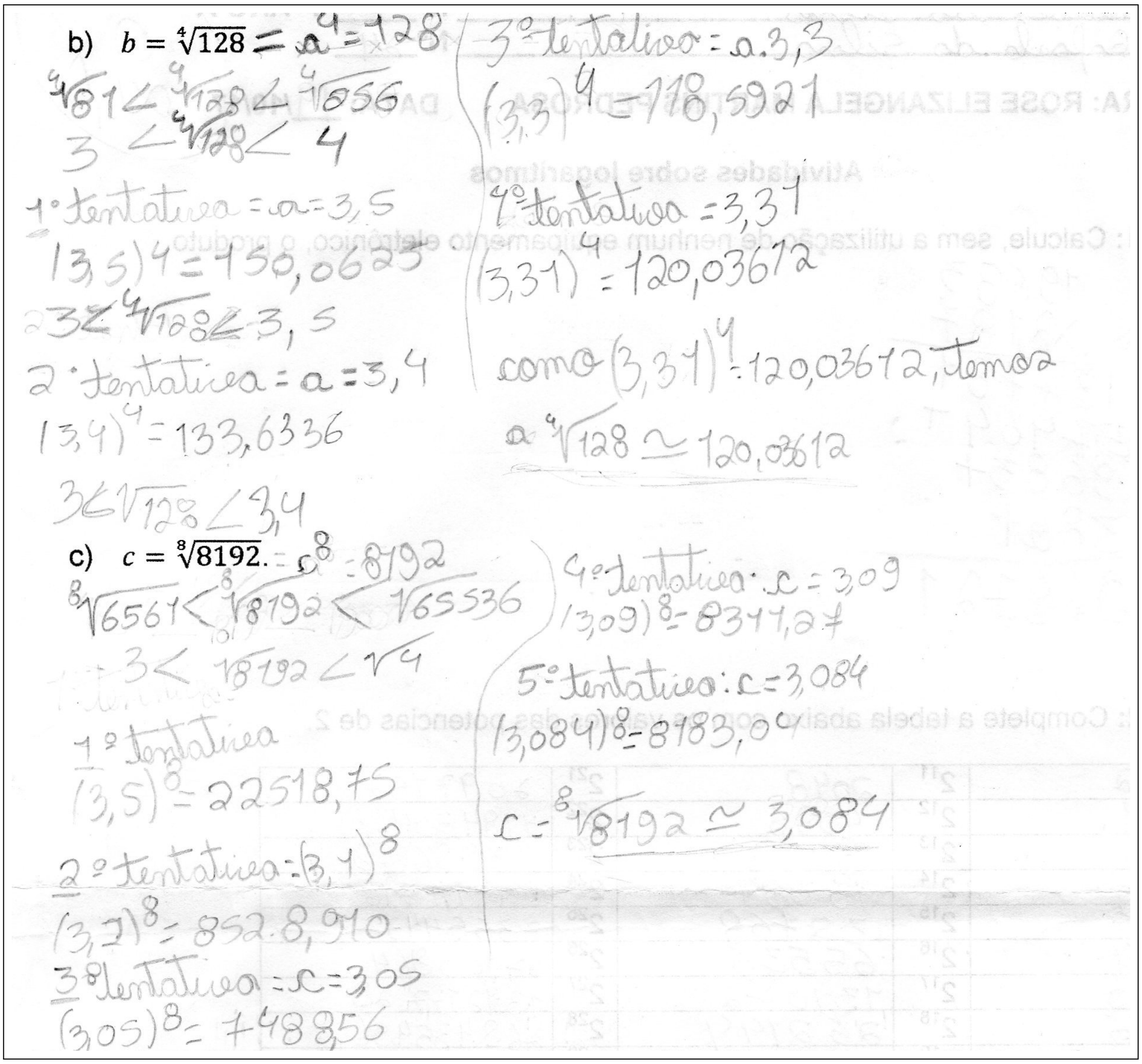
4° tentativa $\Rightarrow a = 2,828$

$(2,828)^2 \Rightarrow 7,99$

como $(2,828)^2 = 7,99$, temos que $a \sqrt{8} \simeq 2,828$

Fonte – Acervo da autora

Figura 43 – Aplicação da atividade 3



b) $b = \sqrt[4]{128} = a^4 = 128$

$\sqrt[4]{81} < \sqrt[4]{128} < \sqrt[4]{256}$

$3 < \sqrt[4]{128} < 4$

1° tentativa = a = 3,5

$(3,5)^4 = 150,0625$

$3 < \sqrt[4]{128} < 3,5$

2° tentativa = a = 3,4

$(3,4)^4 = 133,6336$

$3 < \sqrt{128} < 3,4$

3° tentativa = a.3,3

$(3,3)^4 = 118,5921$

4° tentativa = 3,31

$(3,31)^4 = 120,03612$

como $(3,31)^4 = 120,03612$, temos

a $\sqrt[4]{128} \simeq 120,03612$

c) $c = \sqrt[8]{8192}$. $c^8 = 8192$

$\sqrt[8]{6561} < \sqrt[8]{8192} < \sqrt{65536}$

$3 < \sqrt{8192} < \sqrt{4}$

1° tentativa

$(3,5)^8 = 22518,75$

2° tentativa = $(3,1)^8$

$(3,1)^8 = 852.8,910$

3° tentativa = c = 3,05

$(3,05)^8 = 7488,56$

4° tentativa: c = 3,09

$(3,09)^8 = 8311,27$

5° tentativa: c = 3,084

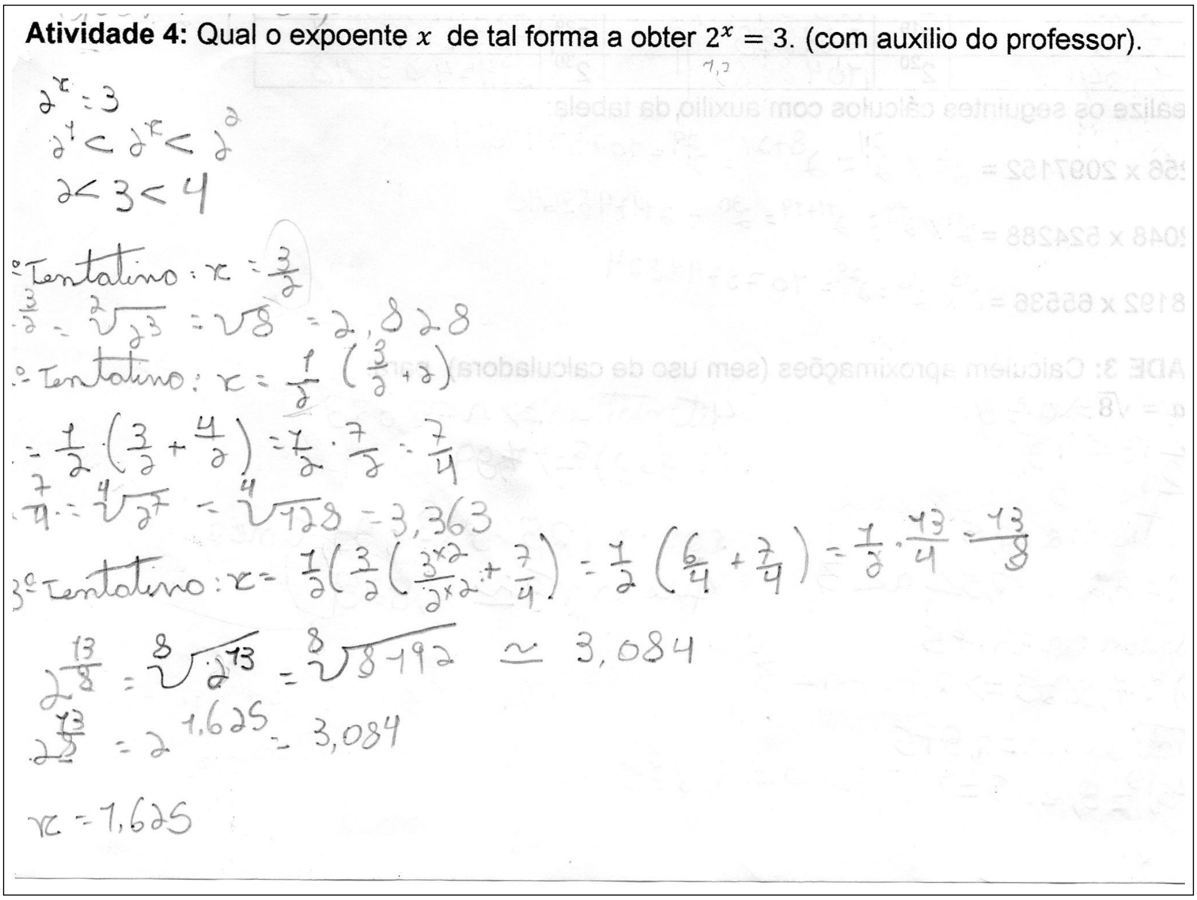
$(3,084)^8 = 8183,0$

$c = \sqrt[8]{8192} \simeq 3,084$

Fonte – Acervo da autora

4. Na atividade 4, os alunos apresentaram a mesma dificuldade da atividade anterior. Entretanto, entenderam a necessidade e os esforços que foram feitos para encontrar um método para facilitar cálculos como esses.

Figura 44 – Aplicação da atividade 4



Atividade 4: Qual o expoente x de tal forma a obter $2^x = 3$. (com auxilio do professor).

$2^x = 3$

$2^1 < 2^x < 2^2$

$2 < 3 < 4$

1º Tentativa: $x = \frac{3}{2}$

$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8} = 2,828$

2º Tentativa: $x = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{4}$

$2^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[4]{128} = 3,363$

3º Tentativa: $x = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{3 \times 2}{2 \times 2} + \frac{7}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{4} + \frac{7}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{4} = \frac{13}{8}$

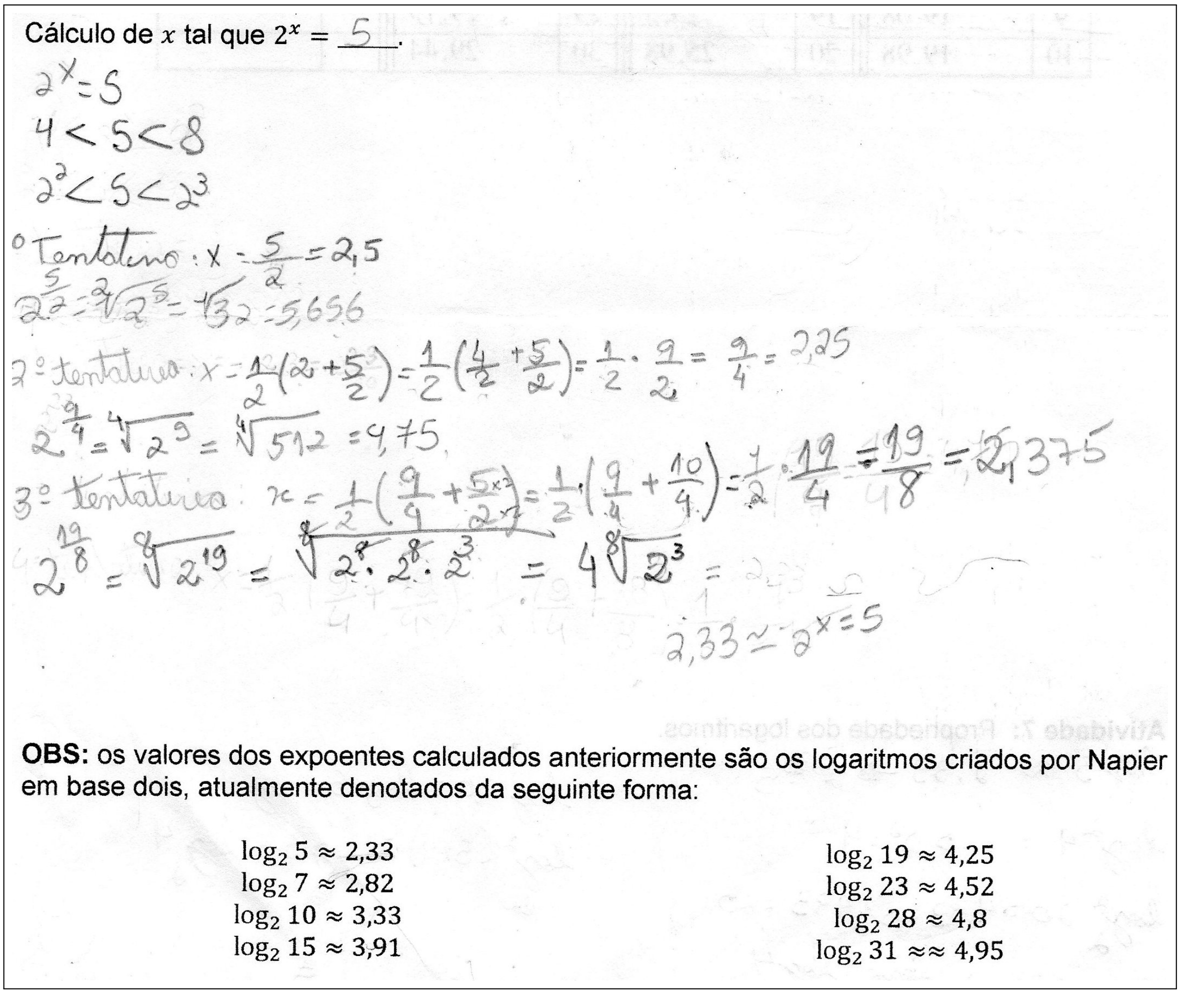
$2^{\frac{13}{8}} = \sqrt[8]{2^{13}} = \sqrt[8]{8192} \simeq 3,084$

$2^{\frac{13}{8}} = 2^{1,625} = 3,084$

$x = 1,625$

Fonte – Acervo da autora

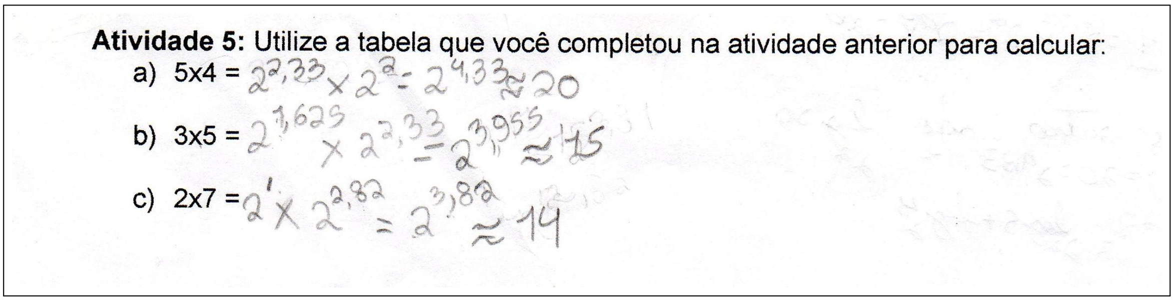
Figura 45 – Aplicação da atividade 4



Fonte – Acervo da autora

5. Na atividade 5, ao utilizarem a tabela para efetuar as multiplicações ficou claro para eles o quanto a criação dos logaritmos facilitou os cálculos da época.

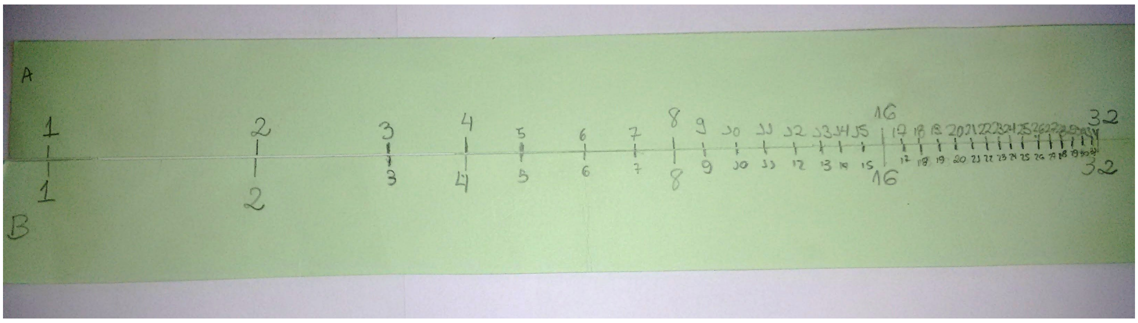
Figura 46 – Aplicação da atividade 5



Fonte – Acervo da autora

6. Na atividade 6, os alunos não apresentaram muita dificuldade em construir a régua. Podemos utilizar a palavra "encantamento" para descrever a reação deles quando utilizaram a régua para efetuar cálculos. Como não tinham habilidade para utilizar a régua, esse foi um momento em que o professor foi muito solicitado, pois todos queriam efetuar os cálculos utilizando a régua. Quando os resultados não davam certo por falha na construção da régua, os estudantes se debruçavam em arrumar as medidas erradas, pois queriam efetuar as operações.

Figura 47 – Aplicação da atividade 6

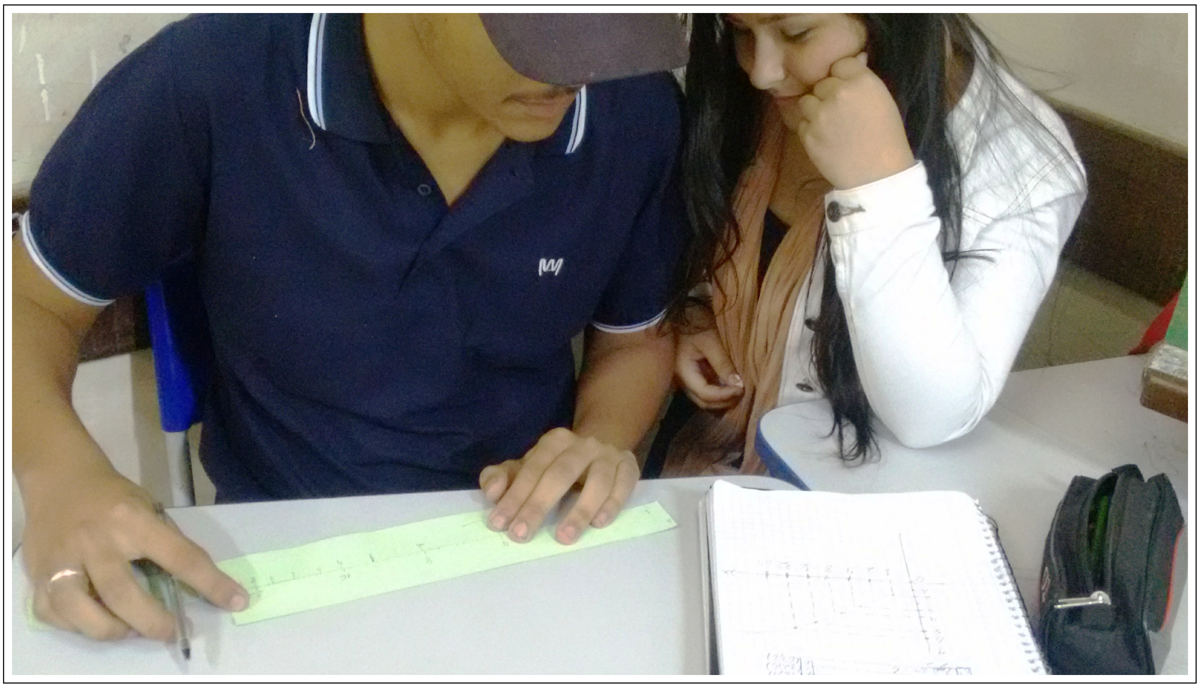


Fonte – Acervo da autora

Figura 48 – Aplicação da atividade 6

Fonte – Acervo da autora

Figura 49 – Aplicação da atividade 6



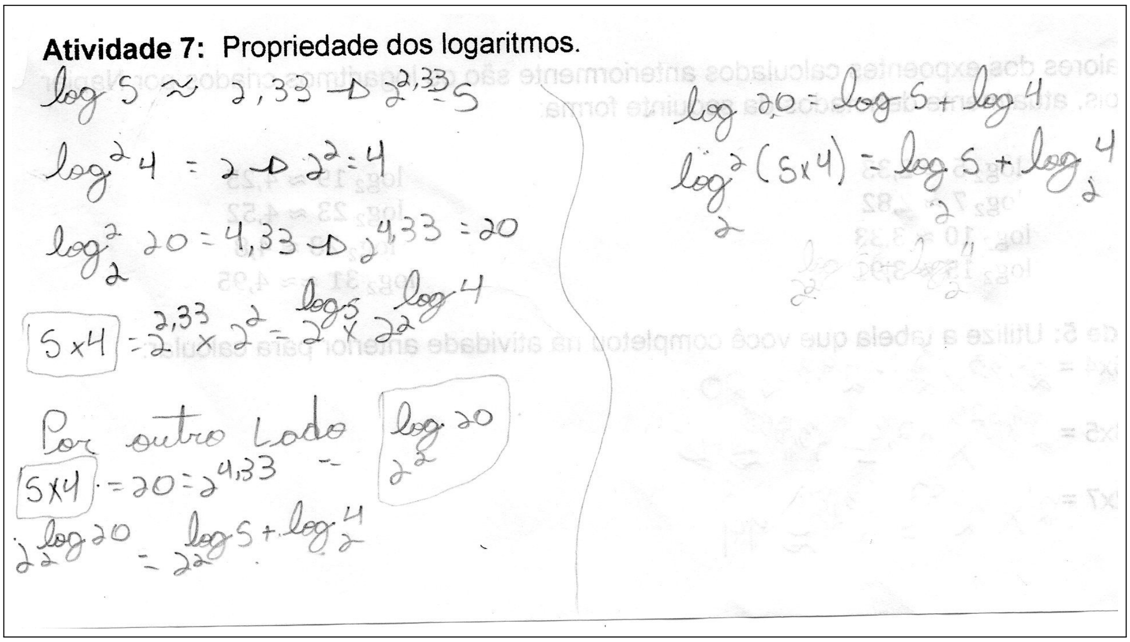
Fonte – Acervo da autora

Figura 50 – Aplicação da atividade 6

Fonte – Acervo da autora

7. Na atividade 7, que explora as propriedades logarítmicas, demonstraram maior compreensão da ideia inicial, estabelecendo relação com as tabelas construídas e usadas nas atividades anteriores.

Figura 51 – Aplicação da atividade 7


Atividade 7: Propriedade dos logaritmos.

$\log_2 5 \approx 2,33 \to 2^{2,33} = 5$

$\log_2 4 = 2 \to 2^2 = 4$

$\log_2 20 = 4,33 \to 2^{4,33} = 20$

$\boxed{5 \times 4} = 2^{2,33} \times 2^2 = 2^{\log_2 5} \times 2^{\log_2 4}$

Por outro Lado $\boxed{\log_2 20}$

$\boxed{5 \times 4} = 20 = 2^{4,33} = 2^{\log_2 20} = 2^{\log_2 5 + \log_2 4}$

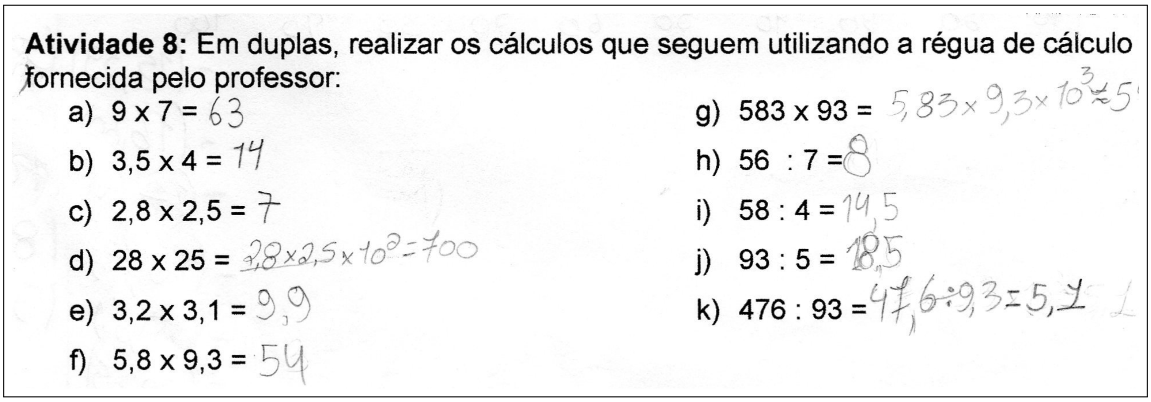
$\log_2 20 = \log_2 5 + \log_2 4$

$\log_2 (5 \times 4) = \log_2 5 + \log_2 4$

Fonte – Acervo da autora

8. Na atividade 8, o envolvimento da turma foi total. Todos os alunos realizaram as operações com a régua de cálculo logarítmica, a maioria com rapidez e apresentando resultados corretos. Os alunos comparam a diferença entre o tempo gasto par efetuar os cálculos com e sem a régua.

Figura 52 – Aplicação da atividade 8


Atividade 8: Em duplas, realizar os cálculos que seguem utilizando a régua de cálculo fornecida pelo professor:

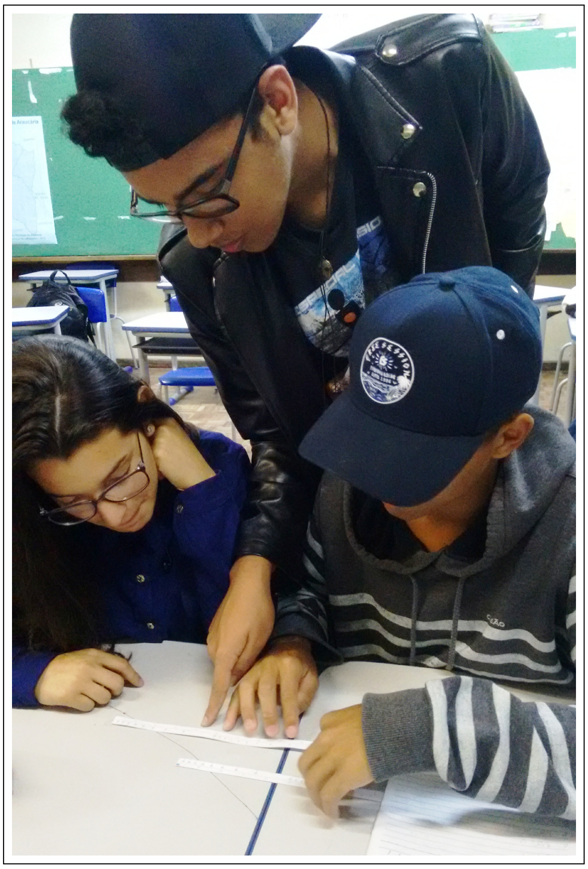
a) 9 x 7 = 63
b) 3,5 x 4 = 14
c) 2,8 x 2,5 = 7
d) 28 x 25 = 2,8 x 2,5 x 10² = 700
e) 3,2 x 3,1 = 9,9
f) 5,8 x 9,3 = 54
g) 583 x 93 = 5,83 x 9,3 x 10³ ≅ 5
h) 56 : 7 = 8
i) 58 : 4 = 14,5
j) 93 : 5 = 18,5
k) 476 : 93 = 47,6 ÷ 9,3 = 5,1

Fonte – Acervo da autora

Figura 53 – Aplicação da atividade 8

Fonte – Acervo da autora

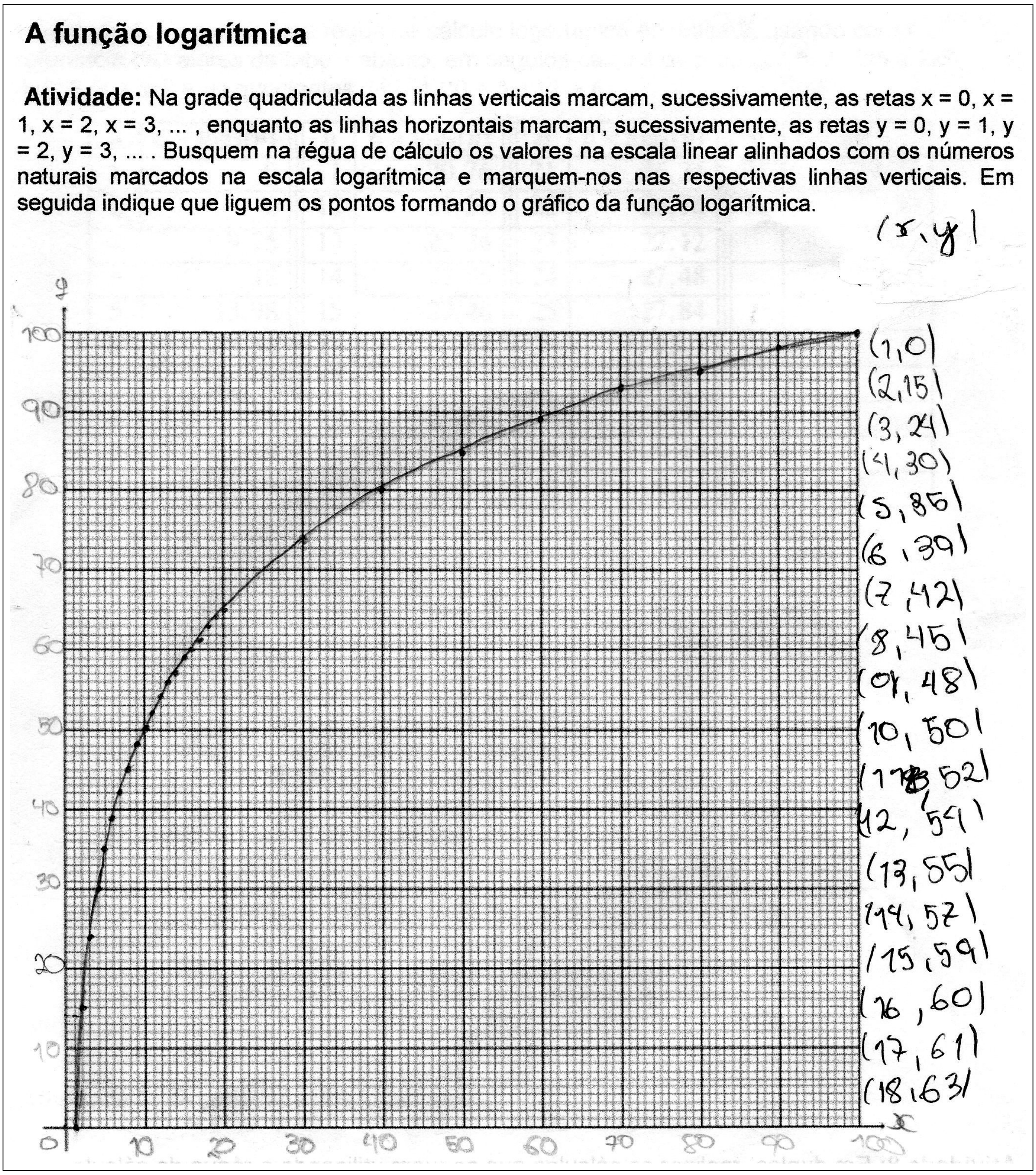
Figura 54 – Aplicação da atividade 8



Fonte – Acervo da autora

9. Na atividade 11, os alunos não tiveram dificuldade em identificar na régua os valores a serem marcados na malha. Algumas dúvidas foram causadas noa casos em que os valores alinhados nas duas partes da régua não eram ambos inteiros, o que serviu para dar uma ideia de continuidade no gráfico.

Figura 55 – Aplicação da atividade 11



A função logarítmica

Atividade: Na grade quadriculada as linhas verticais marcam, sucessivamente, as retas x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, ... , enquanto as linhas horizontais marcam, sucessivamente, as retas y = 0, y = 1, y = 2, y = 3, ... Busquem na régua de cálculo os valores na escala linear alinhados com os números naturais marcados na escala logarítmica e marquem-nos nas respectivas linhas verticais. Em seguida indique que liguem os pontos formando o gráfico da função logarítmica.

Fonte – Acervo da autora

Conclusão da aplicação do livreto

Acreditamos que aulas diferenciadas que utilizam materiais manipuláveis, especialmente na matemática, que possui uma caráter abstrato, causam entusiasmo nos alunos, além de possibilitar um aprendizado mais significativo e abrangente. O livreto possui essa característica, instigando o aluno, através de atividades investigativas, a buscar respostas e entender o conteúdo em seu contexto histórico, relacionando-o com a ciência moderna. A proposta do livreto é flexível, de tal forma que o professor que pretende usar esse material pode aplicar somente algumas atividades, de acordo com seu objetivo.

5 CONCLUSÃO

Esse trabalho apresentou uma proposta de ensino alternativa, conduzida pela investigação histórica em sala de aula, fazendo uso de materiais manipuláveis, pois, assim como Mendes, acreditamos que

> É importante, portanto, repensarmos uma forma de ensinar a Matemática concretamente, visando quebrar os esquemas tradicionais e oferecer aos estudantes informações que possam suprir suas necessidades e que estimulem a investigação. É a partir do contato com situações-problema, quer sejam materiais quer não, que os estudantes podem ampliar seu domínio cognitivo. Por isso, o professor deve propor e testar estratégias de ensino que despertem a atenção dos alunos por meio de exemplos práticos e concretos, sempre aproveitando seus conhecimentos prévios sobre sua realidade construída. (MENDES, 2009a)

Ao propor a aplicação das atividades do livreto procuramos oportunizar ao professor e ao aluno uma abordagem diferenciada do conteúdo de logaritmos que, tradicionalmente, é visto de maneira abstrata e expositiva. Para esse fim, recorremos a história, pois, de acordo com (MENDES, 2009a) o conhecimento histórico contribui para que os estudantes reflitam sobre a formalização das leis matemáticas a partir de certas propriedades e artifícios usadas hoje e que foram construídas em períodos anteriores ao que vivemos. Ao permitir que o aluno tenha acesso as informações históricas, estamos ampliando seu universo de conhecimento em relação a esse tema, conduzindo-o a um aprendizado mais significativo.

Ao analisarmos algumas produções acadêmicas e alguns livros didáticos, observamos que a maioria dos textos trazem alguma referência sobre a história dos logaritmos, evidenciando a importância dos aspectos históricos que circundam esse tema. A investigação histórica e sua influência no processo de ensino aprendizagem nortearam esse trabalho. Acreditamos que ao fazer uso da régua de cálculo (uma ferramenta histórica) e realizar as atividades do livreto o aluno consiga estabelecer relações entre o passado, o presente e o futuro. Que ele entenda seu papel enquanto sujeito que entende, transforma e conduz a sua história.

Esperamos que o material construído seja uma ferramenta útil, para professores e alunos, no ensino e aprendizagem dos logaritmos. Que esta proposta favoreça este processo. Que fique claro a importância dos logaritmos, desde seu processo de criação como ferramenta de cálculo que permitiu avanços em vários campos até as aplicações mais recentes em diversas áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ADAMES M. R.; PEDROSA, R. E. M. **Logartimo e a régua de cálculo**: uma proposta de ensino. Curitiba, 2018. Preprint.

ALAMY, S. P. **Title page of The Description and Use of the Sector by Edmund Gunter 1636**. Disponível em: http://www.alamy.com/stock-photo-title-page-of-the-description-and-use-of-the-sector-by-edmund-gunter-8384045.html, 2016, Acesso em: 25 set. 2017.

ALHADAS, M. M. **Proposta de ensino de logaritmo para o Ensino Médio, usando uma abordagem geométrica**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.

AZEVEDO, L. X. de. **Logaritmos**: construção da definição geométrica com o uso do geogebra. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual de Maringá, 2013.

BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. **Pesquisas em educação matemática**: concepções e perspectiva. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

BEZZERA, F. I. N. da S. **Reflexões sobre a prática pedagógica no ensino de logaritmo**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal do Acre, 2015.

BORGES, U. dos S. **Curso de Logaritmo para o Ensino Médio com proposta de atividades alternativas**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2014.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

BRENER, C. L. da S. **Objetos de aprendizagem para o ensino de logaritmos e exponenciais**. Dissertação (PROFMAT) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

CARVALHO, C. R. C. de. **O uso de logaritmos no campo de números complexos**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal do Amazonas, 2015.

CARVALHO, T. M. de. **proposta de abordagem do conceito de logaritmo no nono ano do ensino fundamental II .** Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2017.

COUTO, S. D. **Logaritmos, conceitos e aplicações**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal de Lavras, 2013.

CRUZ, C. B. da. **Logaritmos de números negativos**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2015.

D'AMBRÓSIO, U. **Pesquisas em educação matemática**: concepções e perspectiva. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. [S.l.: s.n.].

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Rio de Janeiro: 4 ed: Editora da Unicamp, 2008.

FELIX, R. A. **Uma Forma de apresentação da interpretação geométrica do logaritmo natural e estudo de algumas de suas propriedades.** Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal de São Carlos, 2013.

FERRARI, A. **Aplicação do Número "e"e do logaritmo natural em fenômenos da natureza**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

FOREST, M. **Ensino e aprendizagem de logaritmos através da resolução de problemas**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014.

FRIENDLY, M. **Mapas**. Disponível em:https://tecnoaprendizagem.wordpress.com/aulas/mapas/, 2009, Acesso em: 25 set. 2017.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática completa**. São Paulo: Editora FTD, 2005.

GOUVÊA, D. A. **O ensino dos logaritmos tendo como eixo norteador a história**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2013.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciências e aplicações. São Paulo: Editora Saraiva, 20013.

JESUS, D. R. de S. o. **Logaritmo**: uma abordagem geométrica. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual de Feira de Santana, 2016.

KROPF, M. A. L. **Aplicações de logaritmos na área de saúde**. Dissertação (PROFMAT) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

LEE, J. A. N. **John Napier, Laird of Merchiston**. Disponível em: http://history.computer.org/pioneers/napier.html, 2016, Acesso em: 25 set. 2017.

LEE, J. A. N. **John Napier, Laird of Merchiston**. Disponível em: http://history.computer.org/pioneers/napier.html, 2016, Acesso em: 25 set. 2017.

LEITÃO, F. A. **Logaritmos], subtitle=sua história, interdisciplinaridade, contextualização sugestões didáticas para o seu ensino, Type = PROFMAT, Year = 2014**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

LOURENÇO, E. G. **O Geogebra como ferramenta de auxílio no ensino de logaritmo**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2013.

MAOR, E. ***e***: a história de um número. São Paulo: 5 ed: Editora Record, 2011.

MARRA, M. **Logaritmos**: conceitos, aplicações e abordagem do tema nos vestibulares da uepg. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2014.

MENDES, I. A. **Investigação histórica no ensino da matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

MENDES, I. d. A. **Matemática e investigação em sala de aula**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

NETO, J. C. **Área, logaritmo e exponencial**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal do Amazonas, 2015.

OLIVEIRA, J. C. R. de. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de logaritmos na perspectiva da resolução de problemas**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual de Londrina, 2015.

OLIVEIRA, M. B. **Abordagens históricas sobre logaritmos**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal do Mato Grosso, 2014.

PAIVA, M. **Matemática**. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

PERCORARI, M. **Logaritmos e aplicações**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual Paulista, 2013.

PEREIRA, M. C. **Logaritmos**: uma abordagem interdisciplinar. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2016.

PINHEIRO, B. de s. **Logaritmos**: uma apresentação contextualizada para educação básica. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual do Ceará, 2013.

PINTO, M. de L. B. de M. **O estudo do logaritmo em uma visão interdisciplinar**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2016.

PIPPA, T. C. M. **A função logaritmo e a régua de cálculo**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade de São Paulo, 2014.

PONTE, J. P. d.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação matemática na sala de aula**. Belo Horizonte: 3 ed: Editora Autêntica, 2013.

PROFMAT. **Dissertações do Profmat**. Disponível em: http://http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/, 2016, Acesso em: 25 set. 2017.

QUINTAS, M. C. **Aprendizagem significativa de logaritmo**: um relato de experiência. Dissertação (PROFMAT) — Universidade federal do Amapá, 2013.

RAGI, R. **A evolução do pensamento mecanizado até os computadores atuais - 3**. Disponível em: https://pt.slideshare.net/cidapereira50309277/a-evoluo-do-pensamento-mecanizado-at-os-computadores-atuais-2, 2013, Acesso em: 25 set. 2017.

RAMOS, S. S. A. **Logaritmos**: uma abordagem didática. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal do Paraná, 2015.

REIS, S. P. dos. **Logartimos**: uma proposta de ensino. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual Paulista, 2014.

RIBEIRO, L. G. S. **Logaritmos e exponenciais**: da teoria á prática pedagógica. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal de São João Del Rei, 2017.

ROCHA, F. j. M. da. **Logaritmos e aplicações**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy, 2013.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012.

SILVA, C. X.; FILHO, B. B. **Matemática**: aula por aula. São Paulo: Editora FTD, 2005.

SILVA, E. F. da. **Logaritmos e aplicações**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal do Pará, 2014.

SILVA, F. V. da. **Logaritmo**: uma abordagem geométrica. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual de Campinas, 2016.

SILVA, M. da. **Logaritmo de número real negativo**: uma proposta didática para a série final do ensino médio. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal de Alagoas, 2016.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática**: ensino médio. São Paulo: Editora Saraiva, 2013.

SOUZA, J. **Matemática**: novo olhar. São Paulo: Editora FTD, 20013.

VELOSO, A. L. A. **Estudo de Logaritmos com ênfase à metodologia de resolução de problemas**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal do Tocantins, 2014.

WIKIPEDIA. **Régua de Calculo**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org.wiki/Regua-de-calculo, 2014, Acesso em: 04 out. 2017.

ZELDES, N. **History of computing**. Disponível em: http://www.nzeldes.com/HOC/Gunter.htm, 2005, Acesso em: 20 dez. 2017.