UNIVERSIDADE TECNÓLOGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARIANA VASCONCELOS NEGRINI

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EM TAREFAS EXPLORATÓRIAS

LONDRINA
2022

MARIANA VASCONCELOS NEGRINI

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EM TAREFAS EXPLORATÓRIAS

MATHEMATICAL REASONING PROCESSES MOBILIZED BY STUDENTS OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS IN EXPLORATORY TASKS.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

Coorientadora: Prof.ª Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman

LONDRINA

2022

FOLHA DE APROVAÇÃO

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

MARIANA VASCONCELOS NEGRINI

PROCESSOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EM TAREFAS EXPLORATÓRIAS.

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 28 de Junho de 2022

Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Henrique Rizek Elias, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Joana Da Fonte Dias Gomes Da Mata Pereira, Doutorado - Universidade de Lisboa

Dra. Marcia Aguiar, Doutorado - Universidade Federal do Abc

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 28/06/2022.

Dedicatória Com gratidão, dedico este trabalho a **Deus**, por não me deixar desistir. Devo a Ele tudo o que sou, e a minha mãe e minha avó.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro a Deus por, em sua infinita bondade, ter sempre me abençoado.

Sou grata ao meu orientador, professor André, a quem tenho muita admiração. Agradeço os votos de confiança, os ensinamentos e por estar sempre disposto ao que precisei, depois de conhecê-lo e de me apresentar aos estudos da Educação Matemática, pude entender outra concepção de ser professor. Deixo registrada minha admiração e inspiração.

À minha coorientadora, professora Eliane, agradeço a paciência e sabedoria, por ter me aceitado e confiado em meu potencial para desenvolver este trabalho, minha admiração e gratidão.

Sou grata à minha família por sempre me apoiaram em minha profissão e meus estudos, em especial minha mãe e minha avó, a quem Deus me agraciou com a dádiva de viver em suas companhias, meu pai que tanto acredita em mim, meus tios, primos e ao Rafael, que com toda sua paciência me motiva e incentiva.

Agradeço a todos os estudantes que participaram neste estudo, pela disponibilidade, colaboração e interesse com que participaram do estudo.

Agradeço também aos membros da banca, professor Henrique Rizek Elias e professora Joana da Fonte Dias Gomes da Mata-Pereira, pela disposição em avaliarem este trabalho. Agradeço antecipadamente as sugestões de ambos, que tenho certeza de que serão importantíssimas para esta pesquisa.

Por fim, agradeço aos meus amigos e aos docentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT, pelos momentos de discussões e trocas de experiências nos grupos de estudos.

Construir o equilíbrio entre intenções e condições é prioritário, sempre lembrando que o equilíbrio precisa ser em movimento (como na bicicleta), sem se conformar com o sedutor e falso equilíbrio que se imagina atingir na imobilidade.

(CORTELA, Mario Sergio, 2016, p. 74)

NEGRINI, Mariana Vasconcelos. **Processos do raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral em tarefas exploratórias.** 2022. 65. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

RESUMO

Essa dissertação analisa processos de raciocínio mobilizados por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) em discussões a partir de uma tarefa de natureza exploratória. A pesquisa é qualitativa, de cunho interpretativo, e dados recolhidos para análise são compostos por (i) protocolos contendo registros escritos das discussões e (ii) áudios das discussões nos pequenos grupos realizados em uma turma regular do curso de Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Londrina, no ano de 2019. Foram analisadas as discussões de quatro grupos, compostos por 3 estudantes em cada grupo. Os resultados obtidos evidenciaram, ao longo dos trechos de discussão dos grupos, um movimento cíclico, com avanços e recuos, de raciocinar sobre relações matemáticas e desenvolver afirmações. Os estudantes levantam conjecturas e, ao conjecturar, foram identificados três percursos distintos, que são: (i) abandonar conjecturas definitivamente ou provisoriamente; (ii) refutar tais conjecturas com justificativas, ou sem justificativas; ou ainda (ii) aceitar as conjecturas buscando reconhecer e explicar a validade (ou não) dessas afirmações justificando. Em alguns momentos, esse movimento culminou com o estender, para situações mais gerais, as regularidades observadas em casos particulares (generalizar). Com isso parte deste trabalho será sintetizada em um produto educacional.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo Diferencial e Integral; Raciocínio Matemático; Processos de Raciocínio Matemático; Tarefas Exploratórias.

NEGRINI, Mariana Vasconcelos**. Mathematical reasoning processes mobilized by students of differential and integral calculus in exploratory tasks**. 2022. 65. Dissertation (Master's in Mathematics Teaching) – Federal Technological University of Paraná, Londrina, 2021.

ABSTRACT

This dissertation analyzes reasoning processes mobilized by Differential and Integral Calculus (DIC) students in discussions from a task of an exploratory nature. The research is qualitative, of interpretative nature, and data collected for analysis are composed of (i) protocols containing written records of the discussions and (ii) audios of the discussions in small groups held in a regular class of the Engineering course of the Federal Technological University of Paraná (UTFPR), Londrina campus, in the year 2019. The discussions of four groups, consisting of 3 students in each group, were analyzed. The results obtained showed, throughout the discussion, excerpts from the groups, a cyclical movement with back and forth, to reason about mathematical relationships and develop statements. Students raise conjectures and, when conjecturing, three distinct pathways were identified, which are: (i) abandon conjecture definitively or provisionally; (ii) refute such conjectures with empirical justifications or logical reasoning, or without justifications; or (iii) accept the conjectures by trying to recognize and explain the validity (or not) of these statements by justifying them with particular cases or pattern recognition. At times, this movement culminated in extending, to more general situations, the regularities observed in particular cases (generalize).

Keywords: Teaching Differential and Integral Calculus; Mathematical Reasoning; Mathematical Reasoning Processes; Exploratory Tasks.

LISTA DE FIGURAS

Sumário

INTRODUÇÃO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é uma parte integrante e essencial do núcleo básico de cursos de Ciências Exatas no Brasil, em especial das Engenharias, e deve contribuir para a desenvolvimento de processos de raciocínio necessário à formulação e solução de problemas de diversas áreas, à análise e compreensão de fenômenos e sua validação por experimentação e à comunicação eficaz, oral, escrita e gráfica (BRASIL, 2018).

Caracterizada pelos altos índices de reprovação, o baixo rendimento acadêmico e as dificuldades enfrentadas pelos alunos que ingressam no Ensino Superior são objetos de investigação por professores e pesquisadores há algumas décadas. Entretanto, o que prevalece ainda na prática de grande parte dos professores é uma metodologia de ensino que prioriza aulas expositivas e centradas no professor, com conceitos apresentados como "prontos e acabados", sem a preocupação em torná-los significativos, priorizando, após a aula, que os estudantes resolvam uma série de exercícios, que, em geral, não exigem criatividade ou protagonismo (LITHNER, 2008; CABRAL, 2015).

Pesquisas desenvolvidas nesse campo apontam que abordagens de ensino promissoras, no âmbito da Matemática, são aquelas em que os estudantes são inseridos em ambientes de ensino e aprendizagem que promova o trabalho de forma colaborativa (GRANBERG; OLSSON, 2015; CARLSEN, 2018), envolvendo-se em discussões matemáticas (RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2018), resolvendo tarefas de natureza exploratória (PONTE, 2005, 2014), compartilhando verbalmente e ajustando seus pensamentos e ideias por meio da argumentação (LITHNER, 2000), contribuindo, assim, para o desenvolvimento de seu raciocínio (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020).

São recentes os trabalhos de autores brasileiros que abordam a questão do raciocínio matemático e seus processos, em geral restritos a publicações do grupo de pesquisa que o orientador e a coorientadora deste trabalho integram. Os trabalhos de Araman e Serrazina (2020) e Carneiro, Araman e Serrazina (2020), por exemplo, analisam processos de raciocínio matemático evidenciados por alunos ao resolverem tarefas exploratórias. O primeiro, com dados de uma escola pública da periferia de Lisboa, evidenciou indícios de raciocínio matemático de alunos do 3º ano, sustentado pelos processos de formular conjecturas, generalizar, validar e justificar. De modo similar, o segundo trabalho, realizado no contexto de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola brasileira, apontou que os alunos, ao resolverem uma tarefa de geometria plana, mobilizaram alguns processos de raciocínio, principalmente a formulação de conjecturas, a validação e a justificativa.

No contexto do CDI, Trevisan et al. (2019), por exemplo, destacaram o potencial do trabalho com tarefas exploratórias no desenvolvimento de competências e habilidades de raciocínio, requeridos à formação do futuro engenheiro, no contexto das Novas Diretrizes Curriculares para esse curso (BRASIL, 2018).

Já Trevisan e Araman (2021) notaram que o trabalho com tarefas de natureza exploratória, em turmas de CDI, na UTFPR, possibilitou a construção, pelos estudantes, de conjecturas apoiadas em conhecimentos matemáticos que já possuíam, na percepção de relações presentes na tarefa ou, ainda, no senso comum. Os autores discutiram também a busca de motivos para validação ou refutação dessas conjecturas, momento no qual os estudantes resgataram conhecimentos que já possuíam, ou construíram novos conhecimentos matemáticos, com a elaboração de novas conjecturas ou aprimoramento de uma já elaborada, novas investigações e tentativas de justificar.

De acordo com as propostas do documento “Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de graduação em Engenharia” (BRASIL, 2018), publicadas na Resolução n°2 de 26 de abril de 2019 pela Câmara de Educação Superior (CES) do Conselho Nacional de Educação (CNE), os saberes dos egressos devem ser:

> [...] empregados para projetar soluções, para tomar decisões e para desenvolver processos de melhoria contínua, as competências serão desenvolvidas em graus de profundidade e complexidade crescentes ao longo do percurso formativo, de modo que os estudantes não apenas acumulem conhecimentos, mas busquem, integrem, criem e produzam a partir de sua evolução no curso (BRASIL, 2018, p.26).

Com isso, ambientes de ensino e aprendizagem, pautados em episódios de resolução de tarefas de natureza exploratória e trabalho colaborativo entre os estudantes (COUTO; FONSECA; TREVISAN, 2017; TREVISAN; MENDES, 2018), procuram alinhar-se a essas Diretrizes, e têm sido implementadas e investigadas na UTFPR – campus Londrina há alguns anos.

Couto, Fonseca e Trevisan (2017) e Trevisan e Mendes (2018) propõem, no âmbito do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), a constituição de ambientes de ensino e de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas, com as características supracitadas e considerando as condições reais de ensino de cursos de Engenharia na instituição de Ensino Superior. Algumas investigações já realizadas exploraram aspectos do desenvolvimento do raciocínio matemático nesse contexto durante as discussões matemáticas ocorridas no trabalho com tarefas matemáticas envolvendo representações gráficas (GONÇALVES *et al*. 2020; TREVISAN; ARAMAN, 2021a, b). Para um melhor entendimento dessa questão, aprofundamos estudos relativos aos processos de raciocínio dos estudantes (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; JEANNOTTE; KIERAN, 2017), em especial conjecturar, generalizar e justificar.

Assim, o objetivo deste estudo *é compreender processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de CDI em discussões a partir de uma tarefa de natureza exploratória*. Para a coleta e análise de dados, considerou-se um curso superior de Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, na disciplina de CDI 1, sob responsabilidade do orientador deste trabalho, no 1º semestre de 2019, e uma tarefa que envolve a concentração de uma mistura de água e sal variando com o tempo.

Para alcançar o objetivo anunciado, o capítulo seguinte apresenta a caracterização do raciocínio matemático do ponto de vista epistemológico considerando as representações usadas e os processos de significação envolvidos, centrando a atenção na elaboração de conjecturas, na generalização e na justificação como principais características do seu aspecto processual. Também são trazidas considerações sobre o Ensino de CDI.

A seguir, são apresentados os procedimentos metodológicos: o contexto do estudo, os participantes da pesquisa, método de pesquisa e recolha e organização dos dados.

O capítulo seguinte expõe e discute os dados referentes à resolução de uma tarefa por quatro grupos de estudantes que cursam CDI, com base no quadro teórico proposto. Finalizada, são tecidas considerações finais do trabalho como um todo, evidenciando três percursos distintos observados nas discussões dos estudantes.

1 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Do ponto de vista teórico, há diferentes perspectivas do que se entende por raciocínio matemático, tendo em vista a importância desse tema no âmbito da pesquisa em Educação Matemática. Este capítulo consiste na apresentação da problemática raciocinar matematicamente e dos processos de raciocínio matemático.

1.1 RACIOCINAR MATEMATICAMENTE

Mata Pereira e Ponte (2018) esclarecem que, para que promova o raciocínio matemático dos estudantes é necessário compreender o real significado de raciocinar matematicamente e quais os processos de raciocínio são mobilizados pelos estudantes. Com isso, esse tema é pesquisado por diversos pesquisadores como (JEANNOTTE; KIERAN, 2017; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012; MATA-PEREIRA; PONTE, 2018; MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018; PONTE; MATAPEREIRA; HENRIQUES, 2012; STYLIANIDES, 2009; TREVISAN; ARAMAN, 2021). E a definição de raciocínio matemático está pautada por alguns desses autores, que apresentam múltiplas visões sobre o termo.

Apesar de Mata-Pereira e Ponte (2018) definirem raciocínio matemático como o processo que utiliza informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões, o raciocínio, para Morais, Serrazina e Ponte (2018), não possui uma definição única e precisa. Nessa direção, definem o raciocínio matemático como um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições fundamentadas nas proposições conhecidas ou assumidas como verdadeiras.

Para Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), desenvolver o raciocínio dos estudantes é um dos principais objetivos do ensino da Matemática. Para os autores, a compreensão dos conceitos matemáticos não se baseia apenas em conhecer definições ou conceitos matemáticos, mas também em como essas definições ou conceitos se relacionam e podem ser empregados na resolução de problemas. Ao encontro disso, Morais, Serrazina e Ponte (2018) afirmam o quanto é importante o envolvimento dos alunos em tarefas que favoreçam o raciocínio matemático desde os primeiros anos de escolaridade.

Lannin, Ellis e Elliot (2011) esclarecem que o raciocínio matemático consiste em um procedimento conjunto de conjeturar, generalizar, investigar o porquê, argumentar e refutar. Stylianides (2009), por sua vez, defende que o raciocínio matemático é um processo de inferência que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões.

No entendimento de Jeannotte e Kieran (2017), o raciocínio matemático é um processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos. As autoras analisam o raciocínio tanto em termos do seu aspecto estrutural quanto de seus processos.

1.2 PROCESSOS DE RACIOCÍNIO

Os processos de raciocínio para Jeannotte e Kieran (2017) são constatados sob perspectivas diferentes; a primeira envolve o aspecto estrutural que compreende os diferentes tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo e abdutivo. Outra perspectiva é o aspecto processual, de natureza dinâmica e temporal, que contém vários tipos de processos, as autoras ressaltam que os aspectos estruturais e os aspectos de processos são duas maneiras diferentes de olhar para dado discurso.

Focaremos neste trabalho em processos associados ao raciocínio matemático que, para Jeannotte e Kieran (2017), envolvem três ações principais: (i) buscar por semelhanças ou diferenças, o que inclui generalização, conjectura, identificação de padrões, comparação e classificação; (ii) validação, ou seja, processos de justificação e prova; (iii) exemplificação, que apoia as duas ações anteriores.

Conjecturar, generalizar e justificar destacam-se como processos essenciais do raciocínio matemático segundo Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), por isso são detalhados a seguir.

1.2.1 Conjecturar

Conjecturar, para Jeannote e Kieran (2017, p. 10), é um processo que "infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico de provável". Além disso, as autoras apontam ser um processo cíclico de: (i) enunciar uma conjectura; (ii) verificar se ela cobre todos os casos e exemplos; (iii) tentar refutar; (iv) encontrar um motivo que faça com que a conjectura seja verdadeira, ou tentar modificá-la.

Ao encontro disso, Morais, Serrazina e Ponte (2018) destacam que o processo de conjecturar apoia-se em produzir declarações, denominadas conjecturas, que demandam outras explorações para determinar se são verdadeiras. Ao conjecturar, o estudante não necessariamente se limita a uma linguagem verbal. Brocardo e Oliveira (2019), relatam que existe também uma linguagem não verbal que pelo decorrer das ideias podem ser representadas, se apoiando em ações, gestos e na observação dos dados. Lannin, Ellis e Elliot (2011) afirmam que, nesse quesito, as conjecturas podem também surgir a partir da análise de exemplos específicos ou então de inferências a partir de uma situação específica.

Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) relatam que por vezes a conjectura não é apresentada de forma explicita pelo estudante. Restringe-se ao pensamento do estudante, podendo ser verbalizada de forma parcial. Os autores evidenciam também a importância de registros escritos, no intuito de compreender como os estudantes registram suas ideias (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2019).

Assim, as conjecturas começam por surgir e se caracterizar de maneiras diferentes aos estudantes. Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) ressaltam que o início de uma tarefa é determinante, pois os estudantes estão se habituando com a situação e com os dados. Eventualmente, os estudantes geram mais dados para organizar os pensamentos, formular questões e desenvolver a tarefa, enquanto em outras situações os estudantes podem formular conjecturas por analogia com outras. Para Mata-Pereira (2012), conjecturas também podem não ser sempre corretas e, mesmo não sendo desejáveis, surgem durante as aulas podendo ser pontos iniciais na direção de elaborar um conhecimento mais profundo de ideias matemáticas (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

No âmbito das tarefas, Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) relatam que os estudantes requerem um prazo para se habituarem com o trabalho de uma tarefa e organizarem os dados, sendo essa fase efetiva na formulação de conjecturas, de forma que a conjectura pode, algumas vezes, surgir posteriormente ao manuseio dos dados. Em outras vezes, ela pode surgir por "observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas. Esse trabalho indutivo tende, por vezes, a ficar confinado ao pensamento do aluno, não existindo uma formulação explícita da conjectura" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2019, p. 32).

Sob um outro olhar, Jeannote e Kieran (2017) destacam que o processo de conjecturar envolve a procura por semelhanças e diferenças, concluindo uma narrativa sobre alguma continuidade com um valor epistêmico de provável e que é hábil para argumentação matemática. Assim, a conjectura, estando ela correta ou não, demanda de outros processos de raciocínio. A formulação de conjecturas de natureza mais geral, por sua vez, está interligada com o processo de generalizar (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020), discutido a seguir.

1.2.2 Generalizar

Para Cañadas *et al.* (2007), generalizar uma conjectura compreende uma mudança do valor epistêmico, de uma conjectura possível para uma regra geral aceita. Esta é uma mudança no que se acredita sobre a afirmação. Se alguém acredita que a conjectura é verdadeira para um caso geral, então a generalização ocorreu. Caso contrário, continua sendo apenas uma conjectura.

Dessa forma, a generalização também pode estender conjecturas a termos mais gerais. Mata-Pereira e Ponte (2017) entendem que generalizar envolve reconhecer que uma propriedade válida para certo conjunto de objetos continua sendo válida para uma variedade mais ampla de objetos. Para os autores, as generalizações são conjecturas com características próprias.

Carraher, Martinez e Schliemann (2008) entendem "o importante papel das conjecturas na generalização matemática" (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008, p. 4). Generalizações podem ou não surgir de conjecturas, e isso acontece quando conjecturas são estendidas para um campo mais amplo. Além disso, as generalizações podem ser classificadas como empíricas ou teóricas (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMAN, 2008).

As generalizações empíricas vêm da exploração de dados para encontrar tendências e estrutura implícita, enquanto as generalizações teóricas vêm da atribuição de modelos aos dados observados (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). Por exemplo, os estudantes, ao observarem uma sequência de dados numéricos de uma tarefa, identificarem o próximo termo ou um padrão de regularidade desses termos, pode ocorrer uma generalização empírica; se o estudante consegue, com a observação dos dados encontrados, elaborar um modelo, ocorre uma generalização teórica.

Para Stylianides (2008) um dos principais desafios da Educação Matemática é desenvolver a capacidade dos alunos de generalizar com base na estrutura, ao invés de gerar generalizações empíricas. Mata-Pereira (2018) aponta que as generalizações teóricas revelam habilidades de raciocínio mais fortes nos alunos do que as generalizações empíricas porque fazem conexões mais complexas.

Segundo Mata-Pereira (2012) *apoud* Galbraith (1995), a generalização, enquanto conjectura com características particulares, tem um papel essencial na compreensão da Matemática, pois esse processo de raciocínio é uma das bases da construção da Matemática enquanto ciência. Formular uma generalização matemática envolve uma afirmação sobre uma propriedade, conceito ou procedimento que se pretende ser válido para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas. No contexto matemático, uma generalização, muitas vezes denominada de teorema, é considerada válida apenas se demonstrável. Entretanto, de acordo com a autora, a validade de uma generalização deve ser considerada de acordo com as capacidades, o conhecimento e as competências dos estudantes (MATA-PEREIRA 2012).

Além disso, Mata-Pereira (2012) baseada em Radford (2003), aponta três tipos de generalização: a generalização simbólica, a generalização factual e a generalização contextual.

> A generalização factual surge quando a observação empírica ou casos particulares são diretamente aplicados a novos casos particulares, sem alteração do conjunto de objetos matemáticos que está a ser utilizado. A generalização contextual, ainda que seja igualmente baseada em observação empírica ou casos particulares, pressupõe um alargamento a um novo conjunto de objetos matemáticos. A generalização simbólica é aquela que envolve na sua formulação a compreensão e utilização da linguagem algébrica (MATA-PEREIRA, 2012, p.13).

Ainda se tratando de caracterização, Lannin, Ellis e Elliot (2011) descrevem que a "generalização envolve identificar semelhanças entre casos ou estender o raciocínio para além do domínio no qual se originou" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 12). Esses autores esclarecem que identificar envolve notar o que é igual entre diferentes problemas, representações, contextos e situações, enquanto entender um raciocínio se refere a pensar sobre uma relação, representação, regra, padrão ou outra propriedade matemática e enxergá-la num domínio mais amplo (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

Nesse sentido Jeannotte e Kieran (2017), a generalização é definida como o processo de inferir afirmações sobre relações entre um conjunto de objetos matemáticos, ou um subconjunto do conjunto de objetos. Por outro lado, a generalização só é validada se acompanhada por uma prova válida, sobrepondo a validade da generalização, não como a compreensão do estudante (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008).

Galbraith (1995 *apoud* Mata Pereira, 2012) esclarece que os estudantes que seguem abordagens dedutivas envolvem-se em três etapas distintas: "(i) reconhecer a relevância de conceitos ou ideias matemáticas centrais na situação, (ii) identificar de que modo esses conceitos ou ideias são úteis para a situação e (iii) aplicar tais conceitos ou ideias apropriadamente à situação em questão". Para desenvolver a capacidade de formular generalizações, tanto em abordagens empíricas como dedutivas, os alunos devem agir em três níveis: (i) formular generalizações sobre problemas em que podem identificar regularidades e encontrar relações e estruturas; (ii) formular as mesmas generalizações, mas com o uso da linguagem algébrica; (iii) formular generalizações pela reflexão sobre expressões algébricas que eles próprios produziram ou que foram produzidas por outros (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008).

Torna-se, então, essencial no ensino de CDI propor tarefas que possibilitem aos estudantes elaborar generalizações em diferentes níveis, discutindo-as com o professor e com os colegas, com o objetivo de os alunos desenvolveram seu raciocínio matemático.

1.2.3 Justificar

A justificação é vista por Stylianides (2008) como um processo que está ligado a um grau de certeza ou convicção associado a uma composição de uma narrativa por meio da busca de dados. Jeannotte e Kieran (2017) afirmam que a justificação está ancorada na passagem do provável para o verdadeiro, para o falso ou, até mesmo, para o mais provável.

Além disso, as autoras assumem que o processo de justificar está associado a dois tipos de passagem epistêmica, isto é, "justificar é um processo social e pode assumir dois formatos: (i) justificar a conjectura que surgiu no processo e (ii) relatar a validade que altera o valor epistêmico" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 12). O primeiro formato está relacionado à justificativa de uma conjectura que permite mudar o valor epistêmico de provável para mais provável. O segundo tipo de passagem epistêmica está relacionado a uma validação que muda o valor epistêmico de provável para verdadeiro ou falso.

Assim, o processo de justificar solicita que o aluno não apenas mostre que uma afirmação é verdadeira ou falsa, mas que forneça razões pelas quais ela é verdadeira ou válida em todos os casos possíveis. No processo de justificar, os alunos "não apenas desenvolvem suas habilidades de raciocínio, mas também seu entendimento conceitual" (MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018, p. 556). Nesse sentido, Mata-Pereira (2018) afirma que nem todas as justificações apresentadas em sala de aula têm natureza puramente matemática. Mesmo que se pretenda que os estudantes assumam pressupostos matemáticos, a justificação, por ser um conceito abrangente, engloba classificações de diferentes tipos e de diferentes naturezas.

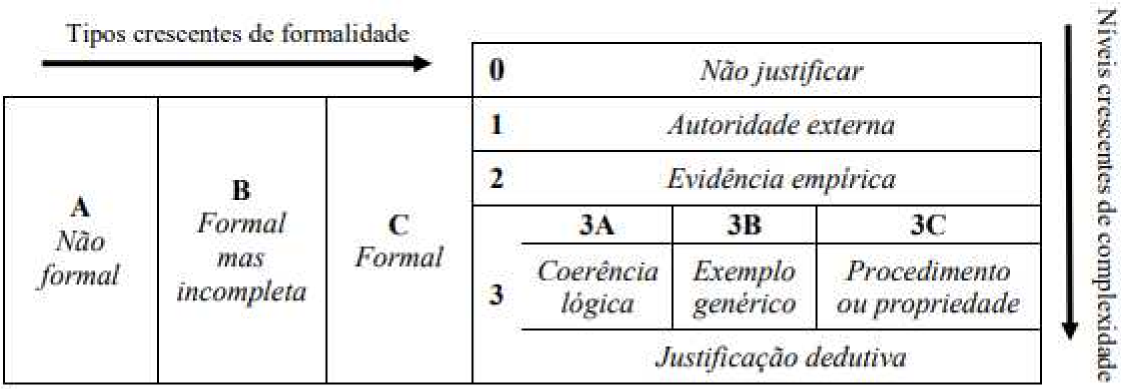
Há casos, por exemplo, em que os alunos apresentam justificativas com contraexemplos que refutam a afirmação original, o que também compõe o raciocínio matemático (MATA-PREREIRA, 2012, 2018). Os estudantes podem, porém, julgar um contraexemplo insuficiente para negar uma afirmação, declarando que esta é verdadeira apesar daquele (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). Para Galbraith (1995), muitos alunos têm dificuldade em entender o que é um contraexemplo.

Algumas pesquisas indicam que a justificação também é pouco empregada nas salas de aula ou é empregada de maneira pouco produtiva, e os alunos sequer sentem necessidade de justificar suas conjecturas (PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES 2012). Ela tende a ser negligenciada, ainda que a tarefa vise a investigação matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2019). Brodie (2010) complementa que os alunos normalmente aceitam a autoridade do professor ou dos livros didáticos em vez das justificações matemáticas. Lannin (2005) define justificação com apelo à autoridade externa, como o emprego de declarações de materiais de referência ou de outros indivíduos. Mata-Pereira (2018) argumenta que os alunos recorrem a muitas ferramentas para justificar, como conhecimentos anteriores ou com base na autoridade.

Morais, Serrazina e Ponte (2018) pontuam que uma justificação não apenas deve mostrar o motivo de uma afirmação ser verdadeira, mas também o porquê. Ainda segundo esses mesmos autores, os alunos, ao justificarem, recordam ideias matemáticas, solidificando seu entendimento e estimulando o desenvolvimento de novas.

Para compreender as justificações dos estudantes, Mata-Pereira afirma que, em sala de aula, é considerável os níveis de formalidade e de complexidade, exemplificados na Figura 1.

Figura 1 – Tipos de formalidade e níveis de complexidade da justificação.



Fonte: Mata- Pereira (2018, p. 13).

Brousseau e Gibel (2005 *apud* MATA-PEREIRA, 2018) apontam três tipos do raciocínio que se identificam no processo de justificação:

O tipo A – justificação não formal – não é apresentado rigorosamente pelo estudante, mas pode ser atribuído às suas ações;

O tipo B – justificação formal incompleta – apresenta pressupostos com base apenas em componentes da situação;

O tipo C – justificação formal completa – está apoiado em uma sequência de encadeamentos interligados, com referência esclarecedora e que evidencie elementos da situação.

Nesse sentido, Brousseau e Gibel (2005 *apoud* Mata-Pereira (2018) acrescenta que, embora se baseie amplamente na situação, a justificação de tipo C acontece especialmente em situações de validação, enquanto a justificação de tipo B ocorre em momentos de formulação e a de tipo A é decorrente de circunstâncias em que o estudante não utiliza, de maneira consciente ou explícita, um processo de justificação.

Tratando-se dos tipos de justificação, Mata-Pereira (2018), respaldada nos trabalhos de Balacheff (1988), Sowder e Harel (1998), Lannin (2005) e Carraher, Martinez e Schliemann (2008), classifica a justificação por níveis de complexidade:

Nível 0 – Não justificar, se as justificações dos alunos não incluem uma justificação;

Nível 1 – Autoridade externa, ocorre quando as justificações dos estudantes se apoiam em outra pessoa, por vezes no professor ou em materiais de referência;

Nível 2 – Evidência empírica, ocorre quando a justificação é baseada em casos particulares;

Nível 3 – Justificação dedutiva, que considera três distinções, que são:

Nível 3A – Coerência lógica, ocorre quando a justificação se baseia em princípios lógicos;

Nível 3B – Exemplo genérico, acontece quando a justificação é dedutiva, mas formulada considerando um exemplo ou caso particular;

Nível 3C – Procedimento ou propriedade, dá-se quando uma justificação se baseia em argumentos dedutivos independentes de casos particulares ou exemplos.

Ao pertencer ao nível de justificação dedutiva, os três níveis têm igual nível de complexidade.

2 ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O CDI constitui uma importante ferramenta capaz de desenvolver critérios essenciais para a interpretação e resolução de problemas do cotidiano profissional (GUIMARÃES, 2019). Entretanto, além da defasagem no conhecimento matemático prévio dos estudantes (GHEDAMSI; LECORRE, 2021), a estrutura didático-pedagógica dos cursos de Engenharia, na qual prevalece ainda uma metodologia de ensino tradicional que prioriza aulas expositivas e centradas no professor (CABRAL, 2015), contribuem para a reprovação na disciplina de CDI e a evasão no curso (THOMPSON; HAREL, 2021; ZARPELON; RESENDE; REIS, 2017).

De modo geral, estudantes que iniciam o ensino superior no Brasil apresentam, de início, uma dinâmica de estudos que prioriza a memorização e o processo mecanizados de resolverem tarefas baseadas em exemplos anteriores. Especificamente no ensino de CDI, os livros didáticos em sua grande maioria apresentam uma abordagem demasiadamente rigorosa dos conceitos do CDI, que é criticada por Reis (2001). Segundo o autor, o intuito a se atingir é de que "uma validação lógico-formal, isto é, rigorosa, jamais poderia prescindir da fase intuitiva e criativa das idéias matemáticas" (REIS, 2001, p. 74).

Com isso, há tempos são observadas dificuldades por parte dos estudantes para aprender CDI e estudos vêm se mostrando promissores ao buscar compreender e propor alternativas nesse contexto. Entretanto, como apontam Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014), pouco disso efetivamente tem chegado às salas de aula. Ao ingressar em diferentes cursos superiores, por vezes, estudantes se deparam com uma realidade muito parecida com a da Educação Básica e com a qual já estão "habituados", com aulas que priorizam procedimentos, ligados à memorização e à repetição de exemplos, nas quais o professor é o foco do ensino.

Zarpelon, Resende e Reis (2017) relatam que, na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), local onde se desenvolveu a pesquisa, os maiores índices de reprovação de alunos que ingressam em cursos de Engenharia estão centrados nas disciplinas da área de exatas – como Cálculo, Física, Geometria Analítica e Álgebra Linear. Essas disciplinas tratam de conteúdos gerais que sustentarão aprendizagens posteriores, em disciplinas específicas. Para Garzella (2013), o insucesso dos acadêmicos é consequência da forma rígida e inflexível em que a disciplina de CDI está organizada, bem como das práticas pedagógicas utilizada pelos professores.

Diante das propostas do documento "Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de graduação em Engenharia" (BRASIL, 2018), publicadas na Resolução n°2 de 26 de abril de

2019 pela Câmara de Educação Superior (CES) do Conselho Nacional de Educação (CNE), os saberes dos egressos já citados na introdução do texto estão pautados no desenvolvimento de competências com grau de complexidade e profundidade crescente ao longo da graduação, de maneira que integrem, criem e produzam. Além disso as Diretrizes citam:

> [...] que os estudantes não apenas acumulem conhecimentos, mas busquem, integrem, criem e produzam a partir de sua evolução no curso. Assim, a formação do perfil do egresso deve ser planejada e vista como um processo que exige o acompanhamento e a avaliação contínua, por meio de metodologias de avaliação que auxiliem na identificação de obstáculos e estratégias para superá-los (BRASIL, 2018, p.26).

De encontro, propostas com ambientes de ensino e aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas de natureza exploratória e trabalho colaborativo entre os estudantes (COUTO; FONSECA; TREVISAN, 2017; TREVISAN; MENDES, 2018) procuram se alinhar a essas Diretrizes, e têm sido implementadas e investigadas na UTFPR – campus Londrina há alguns anos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 CONTEXTO DO ESTUDO E OS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Este trabalho se insere no âmbito de um projeto mais amplo, sob coordenação do orientador desta pesquisa, intitulado “Conceitos mobilizados por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral no trabalho em episódios de resolução de tarefas de aprendizagem”, com fomento da Fundação Araucária, na modalidade de Bolsa de Produtividade em Pesquisa e Desenvolvimento Tecnológico. Tal projeto é respaldado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UTFPR, por meio de uma proposta que agrega diversos docentes e pesquisadores do PPGMAT que atuam em disciplinas matemáticas no campus Londrina da UTFPR (número CAAE 08957619.3.0000.5547). A coleta de dados ocorreu ao longo do 1º e 2º semestres de 2019, em turmas de CDI 1 e CDI 2 sob responsabilidade do pesquisador, porém para a construção desse trabalho foi realizado a análise dos dados de uma turma de CDI 1 do 1º semestre de 2019.

Os participantes do estudo, nesta dissertação, foram estudantes de um curso superior de Engenharia de uma Universidade Federal do estado do Paraná, Brasil, que cursaram a disciplina de CDI 1 (sob responsabilidade do orientador da pesquisa) no 1º semestre de 2019. Essa disciplina, com uma carga de 90 horas-aula, contempla o estudo de funções, limites, derivadas e integrais de funções reais, de uma variável real, e foi organizada em uma estrutura curricular “não usual” (TREVISAN; MENDES, 2017) cujo conteúdo foi apresentado ao longo do semestre letivo em formato de espiral. Em geral, 25 horas do curso (cerca de 10 encontros de 3 horas-aula de 50 minutos) são dedicadas ao trabalho com episódios de resolução de tarefas que antecederam o estudo “formal” dos conceitos de limites, derivadas e integrais de funções reais de uma variável real.

Ramos, Fonseca e Trevisan (2016) e Trevisan e Mendes (2018) descrevem um perfil típico dos estudantes que ingressam nos cursos de Engenharia da UTFPR, que inclui

> [...] falta de experiências anteriores com tarefas de carácter investigativo; expectativa de aula expositivas, sucedidas pela resolução de tarefas similares aos exemplos apresentados pelo professor; concepções equivocadas acerca de alguns conceitos matemáticos (muitas vezes decorridas do foco na mecanização de processos, em vez de compreensão e atribuição de significado); hábito de trabalhar, na maioria das vezes, de forma individual, tendo dificuldades em expor e discutir suas ideias em grupo ou para toda a sala (TREVISAN; MENDES, 2018, p. 213).

Quanto aos aspectos pedagógicos e procedimentais, para Trevisan e Mendes (2018), um ambiente de ensino e de aprendizagem pautado em episódios de resolução de tarefas satisfaz as seguintes características: estudante tem uma sequência de tarefas sem exemplos anteriores que são adaptadas para serem problemas; o professor estimula os estudantes a discutirem suas ideias ao invés de sempre fornecer explicações; os alunos trabalham sempre que possível em grupos e de forma colaborativa, participam de discussões matemáticas, mostrando, explicando, justificando suas ideias (PALHA *et al*., 2013).

Um dos elementos centrais dos aspectos pedagógicos e procedimentais para a constituição do ambiente proposto são as tarefas. O termo *tarefa* é visto de diferentes perspectivas por diversos autores.

Para Ponte *et al.* (2015), o conceito de tarefa é essencial, já que as tarefas são reconhecidas como elementos organizadores da atividade dos alunos. Com essa concepção, é notório que há diferenças entre tarefa e atividade. A atividade, evidenciada por Ponte (2014), pode ser física ou mental, refere-se basicamente ao aluno e àquilo que ele faz num dado contexto. O autor ainda caracteriza tarefa como aquela que representa

> [...] apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele). Na verdade, as tarefas são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade) (PONTE, 2014, p. 15).

Buscando caracterizar a prática docente que escolhe o uso de tarefas, Ponte (2005) descreve que, ao desenvolver a planificação da unidade didática, o professor utiliza uma estratégia de ensino que pode ser (i) direta, privilegiando a aula expositiva e a resolução de exercícios, na qual o professor assume o papel daquele que fornece informação de modo possivelmente claro, sistematizado e atrativo, apresenta exemplos e comenta situações; o aluno aprende ouvindo o que lhe é dito e fazendo exercícios, adotando técnicas anteriormente explicadas e exemplificadas pelo professor ou (ii) ensino-aprendizagem exploratório, que tem como principal característica o fato de o professor não ser o foco da aula, o que explica tudo, mas sim deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os estudantes realizarem, isto é, fundamentada na ênfase em tarefas de exploração e investigação.

Para Ponte (2009), o grau de desafio matemático dessas tarefas relaciona-se de forma estreita com a percepção da dificuldade de uma questão e constitui uma dimensão desde muito tempo usada para graduar as questões que se propõem aos alunos, tanto na sala de aula como em momentos especiais de avaliação, como testes e exames. Varia, naturalmente, entre os polos de desafio "reduzido" e "elevado". O grau de estrutura é uma dimensão que só recentemente começou a merecer atenção. Varia entre os polos "aberto" e "fechado". Uma tarefa fechada é aquela em que é claramente dito o que é dado e o que é pedido, e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas. Com essas duas dimensões, obtêm-se quatro quadrantes (Figura 3).

Ponte (2005) classifica um *exercício* como uma tarefa fechada e de desafio reduzido (2º quadrante); já um *problema* é uma tarefa também fechada, mas com elevado desafio (3º quadrante). Uma *investigação* tem um grau de desafio elevado, de estruturara aberta (4º quadrante). O 1º quadrante, o das tarefas relativamente abertas e fáceis, designado tarefas de *exploração*, é o que será adotado neste trabalho.

Vale ressaltar que a aprendizagem resulta não apenas das tarefas, mas de todo o conjunto em que ela se dá, sendo os fatores mais determinantes as atitudes e concepções dos atores envolvidos. De acordo com tal abordagem, as tarefas propostas visam fornecer um processo consistente de aprendizagem, que facilite a construção de conceitos e a compreensão de procedimentos e que amplie o conhecimento de representações relevantes e de conexões entre a Matemática e outras áreas (PONTE *et al.,* 2015).

Possibilidades de utilização das tarefas de exploração nas aulas de CDI são discutidas em diferentes trabalhos desenvolvidos no âmbito do grupo de pesquisa como, por exemplo, em Couto, Fonseca e Trevisan (2017), Mendes, Trevisan e Elias (2018), Trevisan, Borssoi e Elias (2015), Trevisan e Goes (2016, 2017) e Trevisan, Fonseca e Palha (2018). Nesses estudos, são apresentadas tarefas que possibilitam aos alunos explorar intuitivamente e organizar matematicamente situações que conduzam à elaboração de definições. Apesar dos resultados promissores do trabalho com episódios de resolução de tarefas em salas de aulas regulares de CDI, pouco ainda se sabia a respeito do desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes, os conceitos mobilizados e o papel das intervenções do professor durante esses episódios. Este trabalho pretende, assim, avançar nessa direção.

Para o desenvolvimento da tarefa aqui analisada, adaptada de Santos e Bianchini (2002) e apresentada na Figura 2, que ocorreu em um desses episódios – 3 horas-aula de 50 minutos – ao final da primeira metade do curso, os 30 estudantes presentes naquele dia estavam organizados em grupos de três estudantes. Considerando os conteúdos propostos no planejamento semestral do professor da disciplina, neste momento, os estudantes conheciam o conceito de limites de sequências numéricas, e o desenvolvimento da tarefa antecedeu intencionalmente a extensão desse conceito para o caso de funções de domínio real, no caso estudo de limites no infinito.

Em um primeiro momento, nosso foco de investigação nesta dissertação, os grupos trabalharam de forma autônoma e colaborativa, com algumas intervenções pontuais do professor à medida que acompanhava o trabalho dos grupos. Na continuidade, houve uma discussão coletiva, mediada pelo professor a partir das resoluções dos estudantes (TREVISAN *et al.*, 2021, no prelo).

Figura 2 – Tarefa proposta.

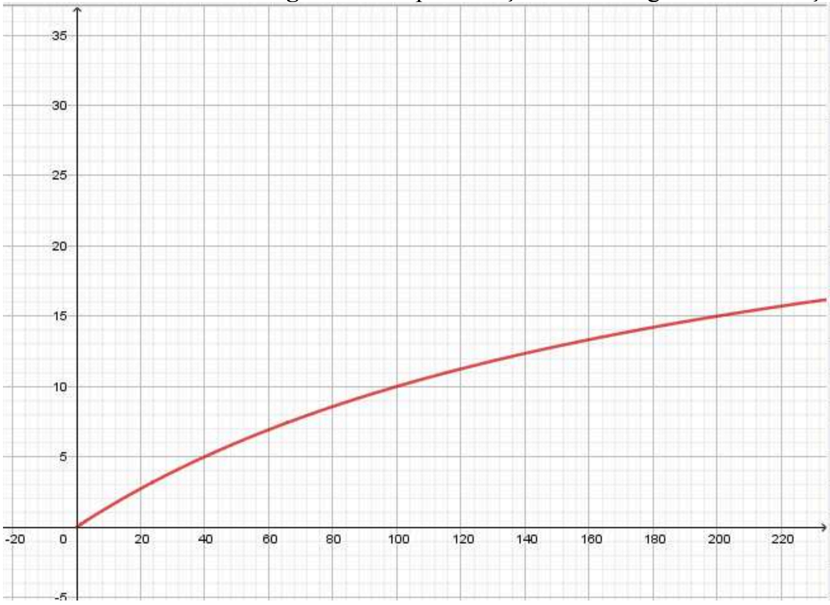
Tarefa. *Um tanque contém 5000 litros de água pura. Uma mistura contendo 750g de sal diluídos em 25 litros de água é bombeada para o tanque a cada minuto. Investigue como se comporta a concentração da água no tanque para valores de tempo "muito grandes".*

Fonte: grupo de pesquisa.

Nessa tarefa, é possível analisar: (i) a quantidade de sal (em gramas) como função do tempo (em minutos), no caso $Q_1(t) = 750t$; (ii) a quantidade de água (em litros), também como função do tempo (em minutos), no caso $Q_2(t) = 5000 + 25t$; e (iii) a concentração da mistura (em gramas por litros), em função do tempo (em minutos), no caso $C(t) = \frac{750t}{5000+25t} = \frac{30t}{200+t}$ $(t \geq 0)$. Na tarefa, como entregue aos alunos, havia um erro de digitação que só foi percebido no momento da discussão coletiva. O correto seria dizer a concentração da "mistura" no tanque (água+sal) (ou solução), e não da "água". A concentração de soluções químicas refere-se à quantidade de soluto (no caso, sal) que existe em uma quantidade padrão de solução (sal+água) ou em uma quantidade padrão de solvente (água).

Para valores "muito grandes" de tempo (desconsiderando o volume do tanque que contém a mistura), a concentração tende a se tornar "cada vez mais próxima de 30". Matematicamente, esse comportamento refere-se ao cálculo de $\lim_{t \to \infty} \frac{30t}{200+t}$.

Figura 3 – Representação tabular e gráfica da situação da tarefa.



	A	B	C
1	t (min)	C(g/l)	Var C(g/l)
2	1	0.1493	0.1478
3	2	0.297	0.1463
4	3	0.4433	0.1449
5	4	0.5882	0.1435
6	5	0.7317	0.1421
7	6	0.8738	0.1407
8	7	1.0145	0.1394
9	8	1.1538	0.138
10	9	1.2919	0.1367
11	10	1.4286	0.1354
12	11	1.564	0.1341
13	12	1.6981	0.1329
14	13	1.831	0.1316
15	14	1.9626	0.1304
16	15	2.093	0.1292
17	16	2.2222	0.128
18	17	2.3502	0.1268
19	18	2.4771	

Fonte: Autora.

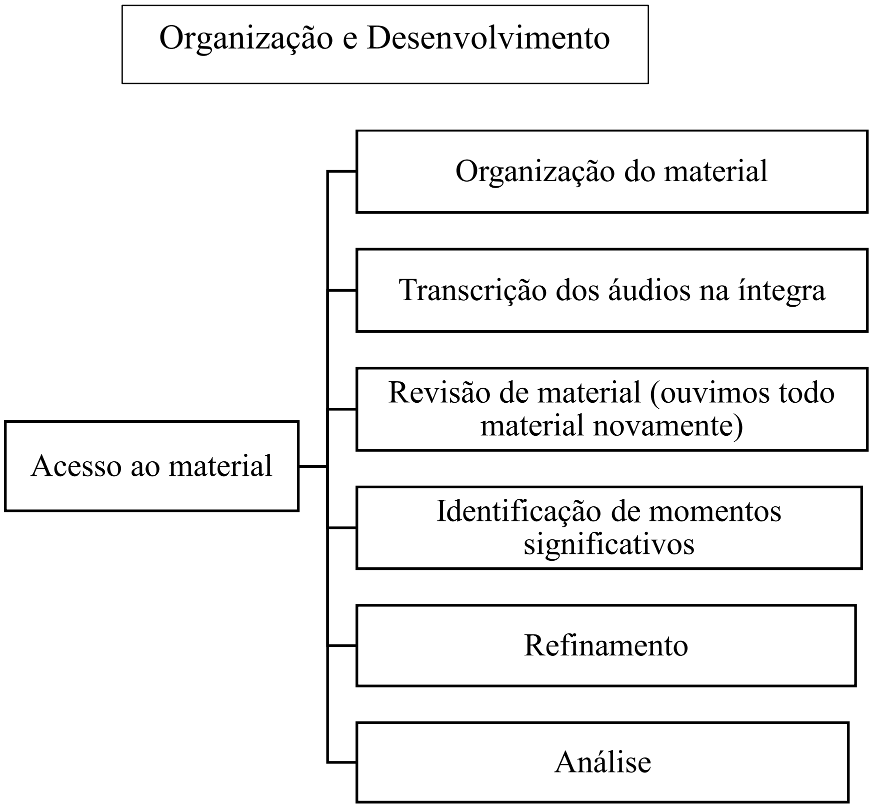
Também é possível analisar a situação numérica (por exemplo, considerando valores inteiros e positivos de tempo) e graficamente, como representado na Figura 3. Na tabela apresentada nesta figura, foi incluída uma coluna para a variação da concentração, entre dois instantes de tempo sucessivos (positivos e inteiros), com quatro casas decimais. Quando truncados, esses valores podem sugerir (incorretamente), que essa variação é constante.

Pelas suas características, a tarefa foi caracterizada como uma tarefa de natureza exploratória dados os quesitos que ela apresenta, sendo uma tarefa aberta e de desafio reduzido, além disso, vale ressaltar que a aprendizagem resulta não apenas das tarefas, mas de todo o conjunto em que ela se dá e o mais determinante são sempre as atitudes e concepções dos atores envolvidos.

3.2 MÉTODO DE PESQUISA, RECOLHA E ORGANIZAÇÃO DE DADOS

O estudo que deu origem a este artigo foi desenhado como uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Como o estudo desse trabalho buscou identificar e analisar processos do raciocínio matemático em estudantes de CDI e dado o contexto em que se deu esse estudo, notou-se que a pesquisa qualitativa melhor se enquadrava para que fosse possível realizar o objetivo deste trabalho. Com isso, organizamos um esquema descrevendo os passos do desenvolvimento da pesquisa (Figura 4).

Figura 4 – Organização e desenvolvimento da pesquisa.



Fonte: Autora.

A pesquisadora, autora desta dissertação, não participou da aplicação das tarefas e nem da coleta de dados, tendo acesso ao material quando do seu ingresso no mestrado, no ano de 2020. Esse material continha fotos dos registros escritos e áudios de discussões em pequenos grupos que, no momento de aplicação das tarefas, eram enviados pelos próprios alunos diretamente para o Whatsapp do professor da disciplina, e orientador da pesquisa. Além disso, havia vídeos das discussões coletivas ocorridas com toda turma após a etapa do trabalho em pequenos grupos, o que possibilitou à pesquisadora “conhecer” a turma e a dinâmica de trabalho.

Uma primeira etapa do trabalho consistiu em organizar todo esse material, organizado em Google Drive, e selecionar quais desses materiais efetivamente poderiam ser analisados, descartando o material de grupos na qual os arquivos estavam corrompidos, ou o áudio não estava audível. De todo material coletado ao longo do 1º e 2º semestres de 2019, optou-se por realizar a análise da tarefa da Figura 2, considerando ser mais promissora para identificar processos de raciocínio matemático. Referente a essa tarefa, foi considerado o material de 4 grupos, pois estes apresentavam uma melhor qualidade nos áudios, sendo possíveis a transcrição.

As informações recolhidas para análise foram então compostas por (i) protocolos contendo registros escritos das discussões dos pequenos grupos de estudantes e (ii) áudios das discussões nos pequenos grupos. As gravações em áudio foram transcritas na íntegra, em articulação com os protocolos produzidos. Essa etapa do trabalho contou com a parceria da autora desta dissertação e de uma estudante de Licenciatura em Matemática em seu trabalho de iniciação científica.

De posse da transcrição das discussões ocorridas nos grupos, com base nas etapas presentes no modelo de Powell, Francisco e Maher (2004), inicialmente o material foi ouvido e transcrito integralmente; em seguida, os momentos significativos foram identificados e selecionados para posterior análise.

Iniciou-se a análise dos dados, categorizando em conjecturar, generalizar e justificar. Ainda no processo de justificar categorizamos utilizando os níveis de justificativa que são: justificativa com autoridade externa, justificativa com evidência empírica, justificação dedutiva, que consideramos as duas distinções: coerência lógica e exemplo genérico.

A categorização ocorreu nos trechos de fala do áudio transcrito, no intuito de identificar processos de raciocínio mobilizados. Em um segundo momento, mestranda, orientadores e a estudante de iniciação científica reuniram-se para chegar a um consenso sobre essa identificação.

Com isso, o presente estudo traz a análise do trabalho de quatro grupos, em cada grupo contendo três estudantes. Para cada um deles, discutimos os processos de raciocínio mobilizados pelos estudantes.

3.3 PRODUTO EDUCACIONAL

Seguindo o Comunicado nº 001/20124, da Capes, a produção acadêmica dos mestrados profissionais na área de ensino pressupões a elaboração de um Produto Educacional, tal documento prevê que, um Produto Educacional poderá ser utilizado por professores e outros profissionais envolvidos com o ensino em espaços formais e não formais.

Diante desse comunicado e com a Resolução PPGMAT/UTFPR nº 15, estabelece que o produto Educacional deve ter sido aplicado ou ser aplicável em situações reais, delimitamos as primeiras ideias de realizar um produto educacional.

Reconhecendo as dificuldades do desenvolvimento do raciocínio matemático, e a pouca familiaridade desse tema no ensino superior, o produto educacional desenvolvido tem como publico alvo professores e simpatizantes com o tema que atuam em disciplinas de cálculo do ensino superior. Dessa forma, esses profissionais poderiam tomar conhecimento sobre o tema e com isso, proporcionar reflexões que o professor poderá implementar em suas aulas de CDI.

Diante disso, optamos por elaborar um livreto com recortes da dissertação de maneira menos densa, foram abordados alguns aspectos teóricos sobre o raciocínio matemático enfatizando nos processos de raciocínio que são: conjecturar, generalizar e justificar, em seguida trouxemos o contexto da tarefa exploratória investigativa, também o contexto em que a tarefa foi aplicada, é apresentado a tarefa utilizada para a compreensão do raciocínio dos estudantes as possíveis resolução que se espera dos estudantes e então apresentamos os trechos com os processos de raciocínio desenvolvidos pelos estudantes a partir do esquema no qual traremos neste texto, por fim apresentamos uma conclusão, enfatizando os processos de raciocínio dos estudantes.

4 ANÁLISE DOS DADOS

4.1 GRUPO 1

Para análise da discussão ocorrida neste grupo, foram transcritas as falas separadas em quatro trechos trazendo a descrições acerca do que ocorreu no desenvolvimento da tarefa realizada por um grupo formado por três alunos aqui denominados B, F e E. Entre chaves, está o número do trecho e o número de cada fala como, por exemplo, [1,3] que é [trecho 1, fala número 3].

4.1.1 Trecho 1

[1,1] **F**: Nosso Grupo é formado pelo B, por mim F e pelo E.
[1,2] **B**: Isso daqui é por minuto? Vai 750 gramas por minuto?... É isso?
[1,3] **E**: É, cada minuto ele vai ter essa quantidade de 25 litros e 750 gramas bombeado.
[1,4] **F**: Mas não tem vazão? Pelo jeito não né, é só...
[1,5] **B**: É ele vai bombear 25 litros mais 750 gramas...
[1,6] **F**: Só vai somando, não vai ter saída.
[1,7] **E**: Não.
[1,8] **B**: E aí vocês querem fazer um gráfico? Querem fazer como?
[1,9] **E**: Acho que tem que transformar ali... Litros pra gramas...
[1,10] **F**: 1 litro é 1000 gramas.
[1,11] **E**: Quanto que dá a soma dos dois? Total de litros?
[1,12] **F**: Olha dá 30 gramas por litro, desses 25 né? 30 gramas de sal diluídos em 25. Tem 30 gramas por litro. 1000 gramas é um litro.
[1,13] **B**: Você falou que dava quanto? 750 gramas? 750 ml?
[1,14] **E**: Olha em 10 minutos, vai bombear 250 litros...e os 250 litros mais 5000....
[1,15] **B**: Vai dar 25,75 litros por minuto... se for pensar no gráfico, ele vai começar no 5000 que já tem no tanque... Faz aí o gráfico.
[1,16] **E**: Aí cada hora vai...
[1,17] **B**: Vai se manter constante né?
[1,18] **E**: É... agora tem que pensar ela em longo prazo, olha eu coloquei 10 minutos aqui... dividido por 5250.
[1,19] **B**: Aumentando mais 25, independente do tempo não vai mudar, vai ser sempre esse, porque é constante o bombeamento da água, tipo, ele não fala que tem uma alteração. Então só vai subir mesmo.
[1,20] **E**: Acho que é pra anotar aqui, ele (professor) pediu né? Porque eu fiz uma simulação aqui, mas é bem simples assim, seria 10 minutos e o total de litros que seria jogado no tanque né, que daria um total de 5250, e esse 10 minuto seria a quantidade de total em gramas de sal que seria o total do tanque... dividido por esse aqui... o resultado seria esse aqui, que seria 1,42 gramas por litro... já não seria os 30 gramas.
[1,21] **F**: É, porque esse daqui seria a concentração por litro né? 1,42 de sal?
[1,22] **E**: É, de sal por litro... aqui é 30 gramas né, mas aqui seria com 10 minutos...1,42.
[1,23] **F**: Eu acho que a questão do sal não ia importar muito... mas pergunta "como se comporta a concentração de água no tanque?"
[1,24] **B**: A gente tá fazendo o gráfico de água por tempo.... o que entra por tempo... mas se fizer um gráfico de sal pra ver.
[1,25] **E**: é a concentração de sal lá por litro dá uma diferença.

Os estudantes iniciam por ler e entender o enunciado da tarefa, e em seguida já começam por conjecturar em [1,5]. Um dos estudantes [1,8] questiona se querem fazer um gráfico que represente essa relação. Em seguida, em [1,9], os estudantes discutem sobre transformar em gramas por litro. Em [1,15] voltam a conjecturar dizendo que a concentração será 25,75 litros por minuto. Também levam em conta que já existe 5000 litros no tanque.

Começam os cálculos determinando que, no tempo 10 minutos, haverá uma divisão por 5250 [1,18]. A partir disso, B em [1,9] levanta uma conjectura, de que sempre está aumentando 25 gramas de sal, e que por esse motivo o bombeamento de água no tanque vai ser constante. Nesse momento, o estudante não leva em conta os 5000 litros de água já existentes no tanque.

Continuam pelos cálculos e o estudante E, em [1,20], voltar a expressar o que tinha proposto na conjectura de [1,8], que era calcular no tempo 10 minutos e relata que o resultado seria 1,42 gramas por litro, mas ainda não seriam os 30 gramas por litro. A partir deste dado, o estudante F questiona em [1,21] se seria 1,42 gramas de sal por litro, e logo em seguida em [1,23] o estudante invalida esses dados apontados. Propõem que pensem em como seria a concentração de água no tanque. Em [1,22] o estudante E levanta uma conjectura de que seria 30 gramas de sal por litro, mas que com 10 minutos seria de 1,42, porém essa conjectura foi abandonada pelo grupo.

Esse primeiro trecho finaliza com B, em [1,24], sugerindo que ao invés de fazerem um gráfico de água por tempo, deveriam olhar como o sal se comporta nessa situação.

4.1.2 Trecho 2

[2,1] **B**: E se fizer um gráfico só de sal?

[2,2] **E**: Na verdade acho que dá pra fazer os dois, porque se você for analisar a questão que tá falando de água no tanque vai ser uma... infinita, tipo, vai só aumentar... agora a concentração ela vai mais devagar... vamos ver em 20 min... 5500 litros ...

[2,3] **F**: Porque é a concentração de água que quer saber, então tem que analisar o sal que entra, quando que vai dar ao longo prazo, tipo o sal vai tá muito acima... vai ter algum momento, tipo lá no infinito que esse 5000 vai ser descartado.

[2,4] **E**: Olha à 20 minutos praticamente dobra, o que a gente calculou ali em cima, a concentração de sal por litro.

[2,5] **B**: Mas por que que dobra se ele é constante?

[2,6] **E**: Então o que acontece é o seguinte, tem 5000 litros no tanque, aí fala que a cada minuto entra 25 litros que é jogado ele tem 750 gramas de sal. Aí o que eu fiz, eu peguei e multipliquei essa concentração de sal, por exemplo, aqui fala que por minuto será diluído 25 litros e 750 gramas de sal. Aí por exemplo, em 20 minutos será despejado na caixa 5000 litros né? Aí soma mais o que já tinha que é 5000 aí vai ser 5500, aí a concentração de sal seria 20 vezes 750 que dá 15 kg, aí você divide 15000 pelo total de litro que é 5500, aí só vai aumentar a porcentagem de sal por litro... quanto mais tempo jorrar a água dentro do tanque vai aumentar a concentração de sal, porque a água que tá entrando, tá entrando com

750 gramas de sal. Só se ele falar que a partir de 1 hora vai entrar só água, aí vai começa a descer, mas como sempre entra sal então vai aumentar cada vez mais. Infinitamente
[2,7] **B**: Se fosse no gráfico começaria não do zero né? Começaria do 20...
[2,8] **E**: Não é que aqui, por exemplo eu fiz com 10 minutos deu isso aqui a concentração 1,42, ai a concentração com 20 minutos já dobrou praticamente, foi para 2,72.
[2,9] **B**: Mas se a gente faz do 1...?
[2,10] **E**: Não, olha deixa eu...se a gente faz do 0, por exemplo ... ficaria[...] vamos ver como ficaria no minuto 1.... Ficaria 25 gramas só? [...] Olha no minuto 1 essa aqui que seria a concentração de sal.
[2,11] **F**: Mas você tá fazendo de sal e de água, se fosse só sal?...
[2,12] **B**: Então por isso que eu to estranhando...
[2,13] **B**: Coloca assim, olha... você faz o cálculo colocando no minuto tempo 20, aí coloca vezes as 750 gramas e também vezes 25 litros e aí você acrescenta mais 5000.
[2,14] **E**: Isso...
[2,15] **F**: Faz aí então pra ver quanto dá.
[2,16] **E**: Mas é isso mesmo que eu to fazendo, que vai dar os 550 que eu tô te falando. Por exemplo, 20 vezes 750 vai dar 15000 gramas, que seria 15kg né? E 20 vezes 25 da 500.

Nesse momento inicial da discussão, em [2,2] os estudantes discutem que a concentração de água e a concentração de sal são coisas distintas. O estudante E elabora uma conjectura de como a água vai se comportar relatando que "vai ser uma... infinita, tipo, vai só aumentar".

No trecho [2,3], o estudante F aponta que a água e sal não devem ser analisados separadamente, e que se deve "analisar o sal que entra, quando que vai dar ao longo prazo". Além disso, passa por conjecturar que "vai ter algum momento, tipo lá no infinito que esse 5000 vai ser descartado". Discutindo sobre os dados encontrados, o estudante questiona o porquê em um determinado tempo dobra o valor da concentração se é uma constante. O estudante E [2,6] então elabora uma justificativa de Coerência lógica, quando esclarece para seu colega como se comporta a concentração e como teria feito os seus cálculos.

Para compreender melhor a justificativa apontada anteriormente, o estudante B volta seu olhar para o gráfico e questiona se começaria do 0 ou do 20, e prossegue realizando cálculos para valores de tempos diferentes. Em [2,11], o estudante F tenta invalidar a conjectura proposta na fala [2,6], indagando que o seu colega estava calculando a concentração de água e sal, e retoma a conjectura de que seria somente a "concentração de sal".

Em [2,13], o estudante B parece reconhecer que o cálculo da concentração envolve a realização de uma multiplicação de 750 pelo tempo, e outra de 25 pelo tempo mais 5000. Nos próximos trechos, os estudantes estão realizando cálculos de conversão, até que o professor passa pelo grupo e indaga os alunos sobre o que tinham realizado até o momento.

4.1.3 Trecho 3

[3,1] **Professor**: O que vocês têm aí?
[3,2] **E**: Professor, a gente estava pensando o seguinte: se é certo a gente trabalhar com isso em grama ou tem que ser em quilo?
[3,3] **Professor**: Tanto faz, mas pode ser em grama pra ficar mais fácil.
[3,4] **E**: Porque a gente observou que a cada 10 minutos a quantidade de sal por litro aumenta, mas não é um aumento assim...
[3,5] **Professor**: Mas aumenta o sal e aumenta a água
[3,6] **E**: Isso... exatamente
[3,7] **Professor**: E como essa relação vai se comportando? Quando eu combino os dois?
[3,8] **E**: A gente calculou a concentração de sal por litro.
[3,9] **F**: Porque a água ela vai aumentar linear.
[3,10] **B**: Isso ele é constante, porém a quantidade de sal que vai caindo ela sempre vai deixando a água do tanque mais salgada. Embora seja pequena essa diferença a longo prazo vai ter um momento que a água vai ficar bem salgada, com bastante quantidade de sal.
[3,11] **Professor**: E o que vocês acham que vai acontecer com a concentração a longo prazo? Ela vai continuar aumentando, vai começar a baixar, ela vai o que?
[3,12] **B**: Eu só não sei se vai ter um limite, limite que água vai absorver sal, não sei se existe esse limite, porque se existe o limite [...]
[3,13] **Professor**: E qual seria o valor disso? Por exemplo, vai se estabilizar em tanto.
[3,14] **F**: Só se a gente pesquisar essa informação.
[3,15] **Professor**: Não, não, tenta pensar pelo próprio contexto, com as informações que vocês têm.

Nesse trecho, o professor questiona o que os estudantes concluíram da questão, e então, em [3,2], o estudante E questiona se a concentração teria que ser em gramas ou quilogramas. Após o professor responder que poderia ser em gramas, o estudante em [3,4] expõe a conjectura de que a cada 10 minutos a quantidade de sal vai aumentar. E o professor então destaca que vai aumentar o sal e a água. O estudante concorda com afirmação do professor que, em [3,7], volta a questionar como a concentração se comporta, agora esperando uma justificativa que relacione a água e o sal.

Nesse momento, os estudantes apresentam 3 justificativas de autoridade externa: em [3,8], o estudante afirma que calcularam a concentração usando a quantidade de sal por litro de água; em seguida, em [3,9], o estudante F justifica que a água vai aumentar linearmente; na fala [3,10], o estudante B destaca que é constante a entrada de água e justifica que a quantidade de sal que vai caindo no tanque torna a água cada vez mais salgada.

Com isso, o professor [3,11] pergunta se a longo prazo essa quantidade de sal vai aumentar ou diminuir a concentração, e o estudante levanta uma nova conjectura em [3,12], de que se existe um limite no qual a água irá absorver o sal.

Em um novo questionamento [3,13] sobre qual seria o valor que a concentração se estabiliza, o estudante propõe pesquisarem essa informação, e o professor sugere pensarem no contexto e usarem as informações que já tinham. Após essa fala, o professor deixa o grupo e os alunos continuam por pensar na situação.

4.1.4 Trecho 4

> [4,1] **B**: Pelo o que eu estou entendendo ele vai começar assim né, bem lentamente e vai subindo, mas acho que ele não chega estabilizar de falar assim: "olha agora é só sal". Porque eu não sei assim, por exemplo, a água a cada 1 litro ela é capaz de absorver, por exemplo, 100 gramas de sal. Não sei se existe essa informação... Mas a gente pode fazer um cálculo assim, de 10 em 10 talvez até 1 hora, pra mostrar como vai ser o aumento de água e o aumento da concentração de sal.
> [4,2] **B**: Faz um com médio, com baixo e à longo prazo.
> [4,3] **F**: Como a gente vai fazer para ver a concentração de sal?
> [4,4] **B**: Então, pelo que ele passou aqui, tipo a gente faz igual ele fez a primeira 20 minutos vezes 750 gramas e 20 minutos vezes 25 litros, aí acrescenta os 25000 e divide o sal que vai ser 750 vezes 20 né, que vai ser 15000 gramas, que divide com 5000.
> [4,5] **F**: Aí divide 15000 por 5500.
> [4,6] **E**: Aí isso vai ser concentração por litro que você acha, entendeu?
> [4,7] **B**: Aí o que a gente não sabe é se vai chegar um momento se a quantidade de sal vai ser tão alta que a água não vai ser capaz de absorver, entendeu?
> [4,8] **E**: Põe um número absurdo ai, sei lá tipo 1 ano.
> [4,9] **F**: Faz por exemplo, por tempo e concentração de sal, vai ser mais ou menos assim....
> [4,10] **B**: Um dia tem 1040 minutos, vezes 365 da 525600 minutos, vezes 750, 394.200.000, no caso seria 394,2kg né? Dividido por 13.045.000.
> [4,11] **F**: Acho que eu sei, porque na fórmula tem que esse sobre 5000 né? Chega uma hora que vai estabilizar...
> [4,12] **E**: Acho que a gente tinha que fazer até 1 hora.
> [4,13] **Professor**: Galera vamos explorar um pouco da situação aqui, pausem o áudio.

Na fala [4,1], o aluno começa por conjecturar com base na demonstração gráfica, afirmando que o crescimento da concentração vai crescer lentamente, porém afirma que não sabe se uma hora vai se estabilizar, e questiona se água vai neutralizar o sal e sugere fazerem cálculos de 10 em 10 minutos, até uma hora para ver como se comporta a concentração.

Com isso, o estudante sugere fazer com pequeno, médio e longo prazo os cálculos. Após essa fala, começam por fazer os cálculos, e na fala [4,6], o estudante conjectura que o valor encontrado foi o da concentração de sal por litro de água.

Após essa fala, tentam entender se em um determinado momento a quantidade será alta e capaz de absorver toda água e continuam por realizar cálculos para valores de tempo muito grande numa tentativa de encontrar uma generalização através desses cálculos e sua representação gráfica.

Dando continuidade aos cálculos, o estudante levanta uma conjectura de que em um determinado momento, os 5000 litros iniciais iriam se estabilizar, porém essa conjectura não é validada e nem justificada por nenhum dos estudantes, e seguem por tentar resolver para outros valores de tempo, até que são interrompidos pelo professor que encerra a discussão dos grupos e começam por uma plenária.

4.1.5 Processos de Raciocínio do Grupo 1.

A princípio, nota-se que no primeiro trecho os estudantes elaboram algumas conjecturas acerca da concentração da mistura de água e sal, essas conjecturas são caracterizadas por vezes na elaboração de cálculos para diferentes valores de tempo, mas principalmente sobre compreender o enunciado da tarefa, de modo que nesse primeiro momento não há justificativas.

No segundo trecho, os estudantes continuam elaborando conjecturas e a principal destacada é que a longo prazo o valor dos 5000 litros iniciais serão descartados. Os estudantes focam em discutir como calcular a concentração. Destaca-se aqui um trecho na qual identificamos uma conjectura com coerência lógica no trecho 2.

No terceiro trecho, é marcado pelas intervenções do professor e, a partir de questionamentos do tipo “O que vocês encontraram?” e “E como essa relação [água e sal] vai se comportando?”, os estudantes apresentam justificativas de que se baseiam em uma autoridade externa.

Já no último trecho, há novas conjecturas agora atreladas a representações gráficas, e o grupo apresenta dificuldades em elaborar uma generalização por uma não compreensão do gráfico encontrado e dos valores de concentração obtidos. Finalizam elaborando e aceitando uma conjectura de que os 5000 litros, a longo prazo, iriam “se estabilizar”, que não é validada ou justificada.

4.2 GRUPO 2

Para análise da discussão ocorrida neste grupo, foram transcritas as falas separadas em quatro trechos, trazendo as descrições acerca do que ocorreu no desenvolvimento da tarefa realizada por um grupo formado por três alunos aqui denominados V, L e P.

4.2.1 Trecho 1

> [1,1] **V**: A gente tá fazendo o exercício da concentração de água.
> [1,2] **V**: Vamos nas ideias iniciais que a gente teve? A primeira delas é de que você vai adicionar segundo o exercício, 25 litros de água que é bombeado para o tanque a cada minuto. Então, de 1 em 1 minuto, você vai ter a entrada de 750 gramas de sal, diluídos em 25 litros de água que são bombeados para dentro do tanque que já tem 5000 litros de agua. A ideia inicial é de que a concentração ela começa pequena depois ela tende a um determinado valor.
> [1,3] **P**: Seria 30 né?

[1,4] **V**: Seria sem fazer um estudo inicial de 30, é porque 30 gramas por litro seria a concentração que você teria, que é de 750 gramas para cada litro dentro dos 25 que é adicionado.
[1,5] **P**: Eu acho cara que dá para fazer uma fórmula aqui. Você vai ter que fazer $f(x) = 5000 + \ldots$
[1,6] **L**: A ideia seria de quanto fosse diluído aqui conforme passaria o tempo. Em intervalos de tempo muito grandes, essas 750 gramas de sal diluídos na água por litro daria um teor fraco.
[1,7] **V**: É para cada minuto seria, como a inversa dá um intervalo de tempo grande, ela faz a curva para cima né? Não necessariamente ela se estabiliza num determinado valor, ela não deve tender a um valor.
[1,8] **P**: Mas ela tende a um limite né?
[1,9] **V**: Hum... Acho que não.
[1,10] **P**: Porque vai sempre tá entrando 30 gramas né, concentração de 30, entendeu?
[1,11] **V**: Não, tá entrando 750 gramas.
[1,12] **P**: Sim, mas diluídas em 25 litros, então a concentração vai ser de 30 gramas por litro.
[1,13] **V**: Praticamente a mesma conta. Se você fizer 500 mais 750, dividido por 25, porque você vai começar com um valor baixo. Depois de um minuto você vai ter a entrada de 1,5 kg. A concentração vai aumentar, então a ideia é que seja uma curva crescente.
[1,14] **P**: Sim, mas a concentração nunca vai aumentar mais que 30, entendeu?
[1,15] **V**: Ai é que tá. Tem que pensar em longo prazo.
[1,16] **P**: O que eu to pensando aqui no gráfico seria assim ó, por exemplo assim [faz um esboço no papel].
[1,17] **V**: Não, ele é lento ele vai fazer assim [faz outro esboço no papel].
[1,18] **P**: Mas ele estabiliza.

Os estudantes começam pela leitura da tarefa neste primeiro trecho e ao longo do diálogo apresentam dois encaminhamentos distintos, que envolvem diferentes conjecturas. Na fala [1,2], o estudante inicia por conjecturar acerca da concentração da mistura de água e sal como função do tempo, relatando que "a concentração ela começa pequena depois ela tende a um determinado valor". É complementada em [1,4], indicando que a concentração "seria sem fazer um estudo inicial de 30". O estudante mobiliza um processo de justificar com Coerência lógica, para explicitar que "30 gramas por litro seria a concentração que você teria, que é de 750 gramas para cada litro dentro dos 25 que é adicionado".

Na fala seguinte [1,5], outro estudante sugere um processo de generalização, explicitando que daria para fazer uma fórmula e até inicia o processo, porém não conclui. Em [1,6], o estudante L propõe uma nova conjectura na mesma linha de raciocínio de seus colegas, indicando que "conforme passaria o tempo, em intervalo de tempo muito grande, essas 750 gramas de sal diluída na água por litro daria um teor fraco."

Em [1,7], o estudante V inicia outra conjectura agora apontando perspectivas de como seria o gráfico do comportamento da concentração. Porém, ele invalida todas as outras conjecturas afirmando que a concentração "não necessariamente ela estabiliza num determinado valor, ela não deve tender a um valor", contradizendo conjecturas que a concentração estabilizaria em 30 gramas por litro.

Ao final deste trecho, os estudantes P e V continuam por construir conjecturas sobre representações gráficas. Por exemplo, o estudante P afirma [1,10] que a concentração nunca vai passar de 30, complementando [1,13] que "a concentração vai aumentar então a ideia é que seja uma curva crescente". P [1,16; 1,18] e V [1,17] parecem trazer conjecturas que se contrapõem acerca do gráfico que relaciona a concentração com o tempo.

4.2.2 Trecho 2

> [2,1] **P**: Dá para fazer uma tabela.
> [2,2] **V**: Eu acho que não chegaria a estabilizar, porque ele não fala que tem um limite no tanque, se ele tivesse um limite no tanque uma determinada porção de água vazaria.
> [2,3] **L**: Mas o que eu pensei que esses 5000 litros... vai chegar a um tempo tão longo que ele vai se tornar obsoleto, entendeu?
> [2,4] **V**: Eu entendi o que você quer dizer. Tem um ponto aqui, que eu esqueci o nome agora, que é o máximo possível que tem de concentração na água, é isso que você tá querendo dizer?
> [2,5] **L**: Não, não, a concentração da água vai estar tão próxima de 30 que vai tender a 30, mas sempre vai ter aqueles 5000 litros de água que nunca vai deixar chegar a 30, entendeu?
> [2,6] **V**: A entendi, acho que a gente pode pensar numa fórmula e a gente consegue usar o Geogebra para definir isso. Eu penso que as variáveis você pode utilizar na concentração.
> [2,7] **L**: A concentração por tempo?
> [2,8] **V**: Vamos deixar... a concentração e o tempo serão variáveis, porque daí você pode fazer um gráfico assim ó, aqui tempo decorrido e aqui concentração, certo?
> [2,9] **L**: Sim.
> [2,10] **V**: Tá, então você não teria o terceiro eixo, seria só com essas duas que você está trabalhando, então você sabe que t=1 a concentração vai ser baixíssima, 0,000 e alguma coisa...
> [2,11] **L**: Na formula $5000 + \cdots$, na concentração sempre dá 30 né?
> [2,12] **V**: Não, ela está dando 30 por litro.
> [2,13] **L**: A cada minuto né?
> [2,14] **V**: Eu acho que dá para fazer diferente, você vai ter x minutos vezes 750, isso aqui..., por que 750 tem a cada 25 litros por minuto, seria assim?
> [2,15] **L**: É então seria $\frac{x}{25}$ né?
> [2,16] **V**: Seria assim?
> [2,17] **L**: Sim.

Nesse segundo trecho, estão presentes várias conjecturas. Iniciando pelo estudante P sugerindo a construção de uma tabela. O estudante V, em [2,2], invalida uma conjectura ainda construída no trecho anterior, alegando que não teria um limite de volume no tanque. Porém o estudante V insiste na conjectura de que depois de algum tempo os 5000 litros iniciais se tornariam insignificantes.

Na intenção de compreender e justificar essa conjectura do estudante V, o estudante L, baseado em uma das representações gráficas feitas anteriormente, questiona se seria em um ponto de máximo que esses 5000 litros se tornariam desprezíveis. E então, em [2,5], V utiliza uma justificativa com coerência lógica, alegando que a concentração vai tender a 30, pois com os 5000 litros de água já existentes no tanque, não seria possível a concentração ser 30 litros de água por grama de sal.

Em [2,6], o estudante V propõe uma generalização ao sugerir "pensar em uma fórmula" que expresse a concentração da mistura no tanque, no intuito de justificar e validar com argumentos matemáticos a conjectura anterior proposta pelo estudante L. O estudante V [2,8] destaca que as variáveis podem ser a concentração e o tempo. As falas finais desse trecho focam em elaborar uma expressão algébrica, estendendo-se ao trecho 3.

4.2.3 Trecho 3

> [3,1] **V**: Vamos usar o Geogebra aqui para ver se deu certo que a gente pensou...Vamos colocar aqui como entrada em função de x.
> [3,2] **P**: Dai x seria a concentração por tempo né
> [3,3] **V**: $\frac{0{,}750x}{5000+25x}$, olha como é pequena a variação de tempo dele, nossa... vai ficar muito perto de 0, não vai ter um momento que ele vai chegar perto daquele valor que a gente quer.
> [3,4] **P**: Só isso ai? De 0?
> [3,5] **V**: Não, ele não tá em 0 aqui. Tá em um valor muito perto. Tá vendo que aqui ele já tá longe do eixo?
> [3,6] **P**: Mas será que isso aqui está certo?
> [3,7] **L**: Eu acredito que sim, porque a concentração vai ser minúscula. Vai ser sempre minúscula, você vai dividir em kg por 5000 litros.
> [3,8] **P**: Mas pensa depois de muito, muito tempo.
> [3,9] **V**: Vai continuar sendo pequena, você está aumentando tanto a quantidade de soluto quanto a quantidade de água. Se tivesse colocando só o sal por exemplo, beleza... curva para cima e rápida de certa maneira, que vai chegar num ponto que vai ter aquele ponto que não cabe mais. Mas como você está colocando ele diluído já em água, dificilmente você vai conseguir ver isso aqui salgado. Entendeu? É eu acho que é isso. Dá até para encerrar o áudio depois dessa. A gente basicamente encontrou a fórmula e a ideia do gráfico que vai ser muito próximo de 0, de acordo com o menor valor ele vai continuar. A mudança dele entre um ponto e outro é praticamente imperceptível.

O estudante no trecho [3,1] sugere utilizar o Geogebra para tentar validar a expressão encontrada. Em [3,3], o estudante V apresenta a expressão encontrada, porém inválida, alegando que encontrou um valor próximo de zero e que acredita que, com essa expressão, não seria possível encontrar o valor 30 da concentração. Possivelmente, o grupo interpretou incorretamente a representação no Geogebra, levando a conclusão de que a longo prazo a concentração tende a zero.

Em [3,9], essa conjectura é invalidada utilizando Justificativa com Coerência Lógica para esclarecer que não está entrando só sal no tanque, também está entrando água. Concluem a discussão com uma interpretação errada do gráfico, levando-os a validar que a concentração se aproxima de zero.

Antes que concluíssem, o professor passa pelo grupo questionando o que eles tinham pensado até o momento.

4.2.4 Trecho 4

> [4,1] **Professor**: O que vocês pensaram aqui?
> [4,2] **V**: Aqui professor a gente pensou no seguinte: antes a gente tinha pensado que quanto mais aumentasse a quantidade de água com o sal junto a concentração aumentaria cada vez mais rápido. Mas você tá aumentando também a quantidade de água, tanto quanto você tá aumentando a quantidade de sal que está sendo adicionada. Então a ideia é que dificilmente você vai ter uma variação muito grande, vai ter um longo espaço de tempo e a variação dela vai ser quase imperceptível.
> [4,3] **Professor**: E ai o que a gente pode tentar concluir disso? O que eu posso falar dessa concentração a longo prazo? Ela vai diminuindo ou ela vai começar a aumentar, ela vai estabilizar?
> [4,4] **V**: Ela aumenta de uma maneira bem estável não sei se é correto dizer dessa maneira, mas praticamente imperceptível, com o intervalo de tempo a gente fez pelo Geogebra para ver como ficaria.
> [4,5] **Professor**: Vocês chegaram/fizeram uma fórmula?
> [4,6] **V**: Sim a gente fez uma fórmula. A gente fez 0,750, que é a grama dele, já que a gente tá trabalhando numa escala por litro, vezes a quantidade de tempo que seria x, então a cada 2 minutos 1,5kg, aqui é mesma coisa para 25 porque você está aumentando tanto quanto a quantidade de agua.
> [4,7] **Professor**: Entendi, e quando vocês jogaram no Qeogebra vocês concluíram alguma coisa?
> [4,8] **V**: Pelo Geogebra que a gente conseguiu concluir isso. Por exemplo aqui a gente chegou em 11224 e ele está praticamente uma reta, porque é pouquíssima variação de um tempo para outro.
> [4,9] **Professor**: Uma reta de qual valor?
> [4,10] **V**: Positivo
> [4,11] **Professor**: Que quantidade especificamente?
> [4,12] **V**: Você diz o ponto que ela cruza o y? Deixa eu confirmar aqui. A partir do momento que ela assume um valor positivo porque essa função ela daria uma ... esqueci o nome dois encontros esqueci o nome, ela cruza exatamente o 0.
> [4,13] **Professor**: É no tempo 0 a concentração é 0 né, só que o nosso problema tá considerando a partir de 0. E a longo prazo, o que ocorre? Pensem a respeito.

Neste trecho, com a presença do professor, há vários questionamentos que contribuem para elaboração de justificativas do que já teriam concluído até aquele momento. É então que começam por explicitar justificativas de com Autoridade externa, por exemplo de que ao longo do tempo a variação da concentração entre valores sucessivos de tempo vai ter um valor muito baixo, “então a ideia é que dificilmente você vai ter uma variação muito grande, vai ter um longo espaço de tempo e a variação dela vai ser quase imperceptível”.

Então, o professor volta a questioná-los, buscando uma explicação mais clara sobre a concentração a longo prazo. Com isso, em [4,4], os estudantes apresentam uma justificativa de evidência empírica, na qual o estudante relata que a concentração vai aumentar de maneira estável com base no gráfico que ele realizou no Geogebra.

Então, o professor questiona se eles conseguiram encontrar alguma expressão que representasse a concentração, levando, em [4,6], a complementar a justificativa anterior, e que na expressão encontrada é utilizada a unidade de medida quilograma. Então, o professor questiona o que concluíram com essa expressão e a representação no Geogebra. Porém, parecem ter interpretado incorretamente o que visualizaram no Geogebra, relatando que "a gente chegou em 11224 e ele está praticamente uma reta, porque é pouquíssima variação de um tempo para outro".

O professor continua questionando e, em [4,13], valida a conjectura que no tempo 0 a concentração é zero. Faz novos questionamentos com intuito de que os estudantes reconsiderassem as respostas, porém eles acataram que a resolução estaria correta e não desenvolveram mais nenhuma conjectura ou justificativa.

4.2.5 Processos de Raciocínio do Grupo 2

No primeiro trecho dos áudios analisados desse grupo, destaca-se o movimento de conjecturar, falas como "a concentração ela começa pequena depois ela tende a um determinado valor" e "seria sem fazer um estudo inicial de 30" são importantes, levando à elaboração de justificativas.

Como muitas dessas justificativas não são aceitas pelo grupo, o trecho dois é caracterizado por novas conjecturas e suas invalidações. Os estudantes têm dificuldades de chegar a um consenso sobre suas conjecturas. Além disso, nesse trecho há indícios de uma tentativa de generalização, com a procura de expressão que represente a concentração como função do tempo. Para Mata-Pereira (2012), o processo de generalizar tem um papel essencial na Matemática e consiste em elaborar afirmações válidas para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas.

No terceiro trecho, para validar a expressão encontrada pelo grupo, o estudante sugere utilizarem a ferramenta *Geogebra*. Nesse momento, os estudantes parecem ter elaborado corretamente uma generalização para a concentração como função do tempo, porém apresentam algumas dificuldades em compreender a representação gráfica. Pelo fato do gráfico parecer uma "reta" com valores de tempo relativamente pequenos, os alunos parecem invalidar a conjectura de que a concentração se estabiliza a longo prazo.

No quarto trecho, há a presença do professor trazendo alguns questionamentos ao grupo e, como consequência, a elaboração de justificativas. Há indícios de que o grupo encontrou a expressão que represente a concentração de gramas de sal por litro de água, mas apontam dificuldades acerca da compreensão gráfica encontrada com o *Geogebra*, levando-os a concluir de forma equivocada a tarefa.

4.3 GRUPO 3

Para análise da discussão ocorrida, foram separados três trechos que trazem as transcrições e descrições acerca do que ocorreu no desenvolvimento da tarefa realizada por um grupo formado por três alunos aqui denominados M, C e J.

4.3.1 Trecho 1

[1,1] **M**: M, 20 de maio, J, C. [apresentação dos nomes]
[1,2] **C:** (Leitura da tarefa) Um tanque contém 5000 litros de água pura. Uma mistura contendo 750g de sal diluídos em 25 litros de água é bombeada para o tanque a cada minuto. Investigue como se comporta a concentração da água no tanque para valores de tempo "muito grandes".
[1,3] **M:** Vocês não sabem Química? Acho que tem que saber Química.
[silêncio]
[1,4] **C:** Primeira coisa que dá para afirmar é que, quanto maior o tempo, maior vai ser a concentração, ou não.
[1,5] **M:** Não é. Tipo, o que tá adicionando é 25 litros, e 750 gramas de sal. Dá 30 gramas por litro, tipo tende a ser isso a longo prazo, mas nunca vai chegar.
[1,6] **J:** Isso sempre vai ser constante, só que a diferença vai ser o que vai adicionar, no caso.
[1,7] **C:** Essas 30 gramas por litro sempre vai ser constante?
[1,8] **J:** É, o que vai alterar é a concentração dos 5 mil litros. Porque vai aumentando, vai ser 5025 litros e assim por diante a cada minuto.
[1,9] **M:** Sim. Tipo fazendo o primeiro minuto.
[1,10] **C:** Ah. O tanque já tem o 5mil litros, ele não está vazio.
[silêncio]
[1,11] **M:** Com um minuto dá 0,14 gramas por litro, daí vai aumentando né.
[1,12] **C:** Na concentração de 5025 litros?
[1,13] **M:** Isso, daí vai aumentando né.
[1,14] **C:** E em 5050, o que acontece?
[1,15] **M:** Dai vai ter 1500 né?
[1,16] **J:** 1500 o quê?
[1,17] **M:** de sal.
[1,18] **J:** 1500 gramas para 5050 litros.
[1,19] **M:** É, dobrou praticamente [o grupo registra, em uma tabela, o valor 0,29].
[1,20] **J:** Só que, no caso, ele quer para quantidades muito grandes.
[1,21] **M:** Sim, dá para gente fazer.
[1,22] **C:** Coloca aí para 30 minutos.
[1,23] **M:** 30 minutos? Tá.
[1,24] **C:** Dá para fazer 30 vezes 25, mais os 750.
[1,25] **M:** Tá. Fazer 30 vezes 25, mais 750.
[1,26] **C:** 39?
[1,27] **M:** Não. É 3,9.
[1,28] **C:** Ele vai aumentando né, até o infinito.
[1,29] **J:** Não.
[1,30] **M:** Até o trinta né?
[1,31] **J:** Na verdade ele nunca vai chegar ao trinta.

[1,32] **C:** Trinta é o limite, né?
[1,33] **M:** Sim. Vocês querem fazer com valor maior, tipo 100?

Neste primeiro trecho, observamos que os estudantes elaboram algumas conjecturas acerca do comportamento da concentração da mistura de água e sal, como uma função do tempo. Inicialmente, em [1,4], o estudante C tem dúvidas se essa concentração aumenta ou não com o tempo. O estudante M, então sugere que a ela será 30 g/L a longo prazo, mas esse valor nunca vai ser alcançado [1,5]. Reconhecemos a partir dessa fala, a formulação de conjectura plausível (cujo valor foi obtido, possivelmente, da divisão de 750 por 25). Entretanto, o grupo não avança nessa direção, pois parece considerar a água pura, e a mistura de água e sal como "coisas diferentes" [1,8].

A partir disso, o grupo passa então a investigar efetivamente o que ocorre com a concentração à medida que a mistura de água e sal é bombeada para o tanque, que já continha água pura. Na sequência da discussão [1,11 a 1,18], os estudantes calculam os valores de concentração para valores de tempo correspondentes a 1 e 2 minutos (uso de exemplos particulares). Por meio desse raciocínio, o grupo poderia obter uma generalização para o cálculo da concentração como função do tempo; porém, essa ideia não foi explicitada ou justificada nessa etapa da discussão. Os valores obtidos da divisão da quantidade de sal (750 vezes o tempo), pela quantidade de água (25 vezes o tempo, mais 5000) foram simplesmente "aceitos" como corretos pelo grupo, sem passar por algum processo de validação.

Dos valores obtidos, tem-se a formulação de duas novas conjecturas: (i) o valor da concentração está aumentando [1,11 e 1,13], e (ii) o valor da concentração praticamente dobrou [1,19]. Essa segunda conjectura, em princípio, parece ser abandonada; já a primeira procura ser validada na continuidade da discussão [1,22 a 1,27], por meio do cálculo do valor da concentração no tempo 30 minutos (outro exemplo).

Em [1,28], o estudante C reforça a conjectura (i), alegando que a concentração "vai aumentando né, até o infinito". Mas, logo a seguir [1,29], o estudante J invalida essa conjectura, formulando uma nova [1,31]: a concentração nunca vai chegar ao 30. No intuito de validá-la, M propõe realizar o cálculo da concentração no instante $t = 100$, cálculo esse que não chega a ser realizado.

4.3.2 Trecho 2

[2,1] **C:** Vocês conseguem montar uma função com essas informações?
[2,2] **J:** Eu acho que dá para montar sim.
[2,3] **C:** $5000 + 25x$.
[2,4] **J:** No caso, eu acho mais fácil montar com o 0,3.
[2,5] **C:** 0,3... $0{,}3x$ ... Tipo, o x vai ser a cada 50.

[2,6] **J:** Não... O 50 entre parênteses [o grupo está tentando registrar uma fórmula]
[2,7] **C:** Porque é limite de x tendendo a 30 gramas por litro, mas se a gente montar uma função já dá mais certo.
[silêncio]
[2,8] **C:** As variáveis serão os minutos.
[2,9] **J:** Pode ser 25 vezes 750... Não! E $\frac{25}{750x + 5000}$?
[2,10] **C:** Não.
[2,11] **J:** Mas, e se colocar 0,3?
[2,12] **M:** É que o x tem que ser minuto né.
[2,13] **J:** é eu acho que vai ser $(25 \cdot 750)x + 5000$.
[silêncio]
[2,14] **J:** Ah não! Não tem na a ver. Deve ser alguma coisa parecida com isso, mas não sei o que está errado.
[2,15] **M**: O que você falou [dirigindo-se ao estudante C].
[2,16] **C:** Vai dar um valor muito grande, eu acho.
[2,17] **J:** Não, não tem nada a ver o que eu disse.
[2,18] **M:** E se fizer $\frac{25x}{750x}$?
[2,19] **J:** Não, acho que $\frac{25x}{750 + 5000}$, porque 750 é constante.
[2,20] **M:** Mas tipo, se eu for jogar 100 minutos, vai ser 750 vezes 100 também.
[2,21] **J:** Você não pode colocar o x aqui, acho que assim mais 5000 [apontando para a fórmula].
[2,22] **M**: Mas, no minuto 2 não tinha 750. Tinha 1500, né.
[2,23] **J:** Deu o mesmo resultado que o meu. E se multiplicar o x por 25 dividido por 750?

Nesse segundo trecho, o foco da discussão do grupo é obter uma representação algébrica para a concentração da mistura como uma função do tempo. Embora, já no trecho anterior, o grupo tenha iniciado a observação de valores particulares da concentração, calculados para instantes de tempo iguais a 1, 2 e 30 minutos, novas conjeturas passam a ser elaboradas e testadas. Inicialmente, o estudante C tinha sugerido [2,3] a expressão $5000 + 25x$ (e que representa uma generalização para quantidade de água no tanque como função do tempo), mas ela foi desconsiderada na continuidade da discussão.

Entre [2,4] e [2,7], os estudantes J e C elaboram uma nova conjectura, a de que a concentração aumenta cerca de 0,30 g/L a cada 50 litros de água bombeados para o tanque. Possivelmente, esse valor é oriundo de um cálculo realizado anteriormente (trecho [1,19]), mas essa conjectura é abandonada pela dificuldade em expressá-la algebricamente, considerando a variável como o tempo medido em minutos [2,8].

Por sua vez, o estudante J explicita novas conjecturas, em [2.9] e [2,13], nas quais procura relacionar, aparentemente de forma arbitrária, os valores presentes no enunciado da tarefa (25, 750 e 5000). Tais hipóteses são refutadas pelo próprio estudante J [2,14], sem alguma justificativa mais elaborada, mas também por C, em [2,16], pelo fato de as fórmulas sugeridas levarem a valores de concentração “muito grandes” (ou seja, cuja ordem de grandeza não condiz com valores obtidos anteriormente).

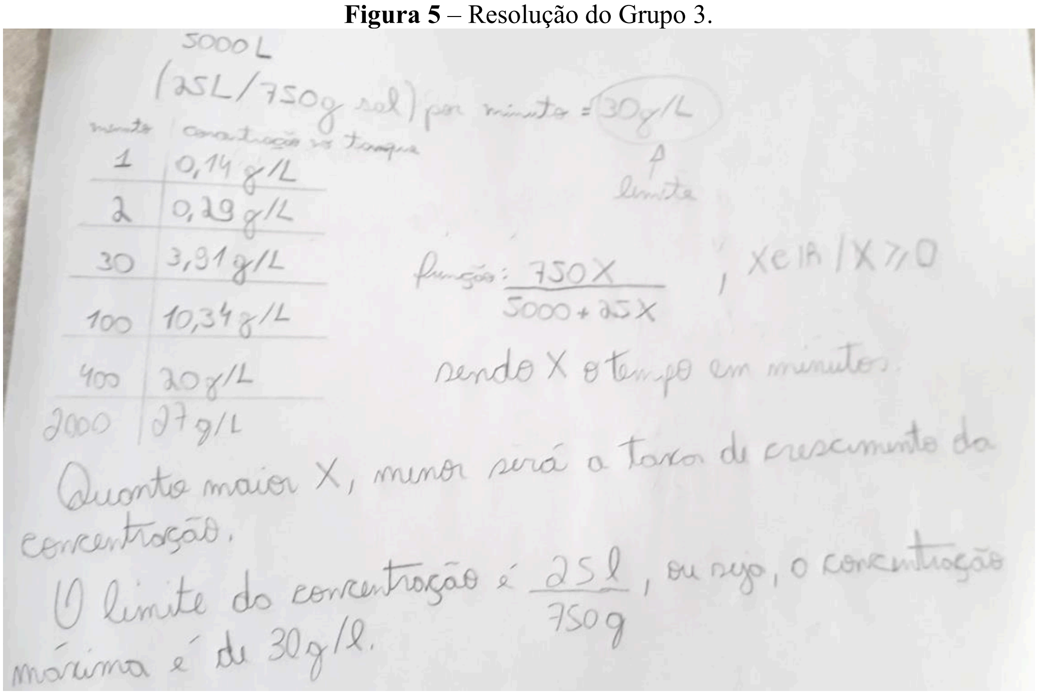
Uma nova tentativa de obter a representação algébrica parte então da fala de M, em [2,18]. A conjectura inicial de que "E se fizer $25x$ dividido por $750x$" é reformulada por J, em 2,19], mas a hipótese de que "750 é constante" é refutada por M em [2,20], sob o argumento de que esse valor precisa ser multiplicado pelo tempo. O estudante J parece não reconhecer a possibilidade de que a variável x seja utilizada tanto no numerador quanto no denominador da expressão procurada [2,21], e torna novamente a sugerir "multiplicar o x por 25 dividido por 750", conjectura essa que já havia sido formulada anteriormente [2.9], e ele mesmo havia refutado. A partir desse momento, o professor chega ao grupo, como mostrado no último trecho a seguir.

4.3.3 Trecho 3

[3,1] **Professor:** O que vocês pensaram aqui?
[3,2] **C:** A gente tá chegando na conclusão que sempre vai aumentar e os 5000 vai ficando, e a gente tá tentando buscar uma função, porque a gente acha que o limite de x é 30.
[3,3] **Professor:** E de onde vocês tiraram esse 30?
[3,4] **M:** Porque é a concentração.
[3,5] **J:** A concentração máxima de sal por litro, no minuto.
[3,6] **Professor:** E o que vocês estão tentando achar nesse momento?
[3,7] **C:** A gente está tentando achar uma função.
[3,8] **Professor:** Vocês já acharam, só não reconheceram no papel de vocês.
[3,9] **C:** Tá, vamos fazer esse processo aqui de novo... 5000 litros.
[3,10] **M:** Tá, aqui é minuto 0 né?
[3,11] **J:** Será que vai usar 30 gramas por litro de concentração?
[3,12] **C:** Esse valor aqui ele vai variar, o 5000 é constante.
[3,13] **M:** É, o 5000 tem que ter na função.
[3,14] **J:** E se fosse o $\frac{25}{750}. 0,3x$?
[3,15] **C:** Pensa bem, sempre tá aumentando 25 de um para outro.
[3,16] **J:** Certo.
[3,17] **C:** Então vai ser $5000 + 25$, esse 25 tenho quase certeza que ele existe, vezes o tempo. Não! Calma.
[3,18] **J:** Acho que vai ser assim,$\left(5000 + \frac{25}{750}\right). 0,3$, por que é concentração?
[3,19] **M:** Não! A concentração não vai mudar.
[3,20] **C:** 25 vezes o tempo. Então, $t = 1$, temos 5025. Beleza. Isso a gente achou, agora a gente tem que achar uma fórmula para aplicar na concentração. Será que eu divido alguma coisa?
[3,21] **J:** Mais $750t$?
[3,22] **C:** Agora como que a gente achou essa concentração. Essa concentração de 30gramas por litro?
[3,23] **J:** E se colocar mais $750t$? Não dá certo?
[3,24] **C:** Não, vai ficar um número muito grande daí.
[3,25] **J:** Ou dividir tudo por $750t$?
[3,26] **C:** Também não.
[3,27] **J:** Não dá também.
[3,28] **C:** Quer ver $\frac{5000+25}{750}$, não! Não é. Pensa 30 gramas por litro, isso aqui é a quantidade de água... será que é tudo isso?
[3,29] **J:** Acho que alguma hora a gente vai ter que dividir na função. Agora pelo o quê?

[3,30] **M:** Porque, aqui a gente tá dividindo, né? Então eu acho que na função vai ter que dividir.
[3,31] **J:** Como que chegou no limite?
[3,32] **C:** A gente pegou 5025, e o que a gente fez? No minuto 1 a gente tem 5025 litros.
[3,33] **M:** A gente tá dividindo gramas por litro, então a gente tem que trocar aqui [apontando para fórmula]. O $750x$ pra cá, é só trocar aqui, olha. Eu acho que só inverter já vai dar.
[silêncio]
[3,34] **C:** É exatamente isso cara.
[3,35] **M:** Só que eu não sei se está certo expressar assim.
[3,36] **C:** Ta certinho, $\frac{750x}{25x+5000}$ (Figura 5). Vai fazendo a prova real aí, conforme for fazendo a prova real você vai encontrando os valores.
[3,37] **J:** É porque depois que você divide aqui, você comprova que a concentração é 0,3, então você acha o limite.
[3,38] **M:** É, deu certo a prova real.

Figura 5 – Resolução do Grupo 3.

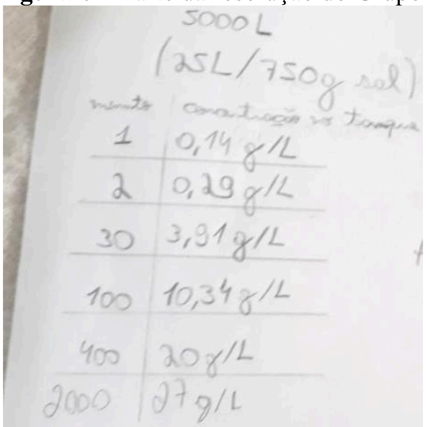


Fonte: Material da pesquisa.

Em parte desse trecho, houve intervenção do professor que, inicialmente, pediu que os integrantes do grupo explicassem como pensaram [3,1]. O estudante C então apresenta como conjectura que "[a concentração] sempre vai aumentar e os 5000 vai ficando", porém não a justificativa, e informa que o grupo está "tentando buscar uma função" (na verdade, expressá-la algebricamente).

A seguir, o professor pediu que justificassem como obtiveram o valor 30 [3,3], porém o grupo não foi capaz justificar. Por fim, o professor informa que eles já haviam encontrado uma "função", porém não a estava reconhecendo em suas anotações [3,8], referindo-se ao fato de que o grupo tinha sido capaz de calcular valores particulares da concentração – exemplos (como mostrado na tabela da Figura 6), mas não sabia expressar essa generalização de forma algébrica.

Figura 6 – Parte da resolução do Grupo 3.



Fonte: Material da pesquisa.

Após a saída do professor, o grupo volta por buscar uma expressão algébrica para função. Se, por um lado, o estudante J apresenta algumas conjecturas aparentemente aleatórias, tentando encontrar uma fórmula "que dê certo", o estudante C sugere refazer os cálculos, para valores particulares de tempo, buscando reconhecer algum tipo de padrão [3,9].

Ao longo de parte da discussão, o grupo assume como válida a conjectura de que a concentração, a longo prazo, aproxima-se do valor 30 g/L [3,11; 3,22], e tenta incorporar esse valor em sua expressão algébrica. São capazes de representar, de forma independente, como funções do tempo, tanto a quantidade de sal (750 vezes o tempo [3,21]) quanto a quantidade de água (25 vezes o tempo, mais 5000 [3,17]).

Em [3,29], explicitam a conjectura de que, para expressar algebricamente a generalização encontrada a partir de valores numéricos, será necessário realizar uma divisão. Novos ajustes são realizados na fórmula até que, nas falas [3,36] a [3,38], os estudantes terminam por justificá-la, lançando mão de um procedimento que denominam "prova real" (no caso, confrontando valores de concentração, calculados pela fórmula, com aqueles que registrados na tabela).

Na figura 5 e figura 6, é abordado parte da resolução dos estudantes do Grupo 3, no qual traz as resoluções que ocorre através das conjecturas ao longo dos trechos, como por exemplo a tabela construída por eles com diferentes valores de tempo e a "função" encontrada por eles que representa a resolução algébrica da tarefa.

4.3.4 Processos de Raciocínio do Grupo 3

No primeiro trecho, observa-se que um dos estudantes começa por apresentar uma conjectura e o grupo tenta argumentar calculando a concentração para valores particulares de tempo. Finalizando esse trecho 1, o estudante C conjectura, a partir da observação desses valores, que a concentração vai aumentando "até o infinito", mas o estudante J invalida essa conjectura, formulando uma nova: a concentração nunca vai chegar ao 30.

Já no segundo trecho, vemos um movimento de formulação e reformulação de conjecturas que se intensifica na tentativa de expressar algebricamente a concentração como função do tempo. Entretanto, não há uma preocupação do grupo, nesse trecho da discussão, em justificar suas conjecturas. Para Lannin, Ellis e Elliott (2011), os estudantes podem criar conjecturas válidas ou inválidas, apoiadas em raciocínios válidos ou inválidos. Embora não sejam interessantes, os raciocínios inválidos podem servir de ponto de partida para o entendimento de ideias matemáticas. Em alguns momentos, evidencia-se, em especial nas falas do estudante J, uma tentativa em elaborar uma fórmula "que dê certo", mas que desconsidera resultados obtidos.

No último trecho, o professor participa dos diálogos incentivando os estudantes a sintetizar e justificar as conjecturas elaboradas até aquele momento. Espera-se que, no Ensino Superior, a capacidade de justificar esteja mais amadurecida e que a justificação de conclusões permita ao aluno esclarecer seu raciocínio. Entretanto, isso ainda não estava explícito no momento de intervenção do professor.

A partir da fala de que "vocês já acharam [uma função], só não reconheceram no papel de vocês", os estudantes passam a retomar e, em alguns casos, reformular conjecturas anteriores buscando uma expressão algébrica que generalize o que haviam percebido. O processo de generalização tem como finalidade chegar a conclusões válidas estabelecendo uma relação, aplicando em diferentes objetos matemáticos e transferindo essa relação para um conjunto maior (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). No caso, ao final da discussão, o grupo obtém, com sucesso, e é capaz de validar uma expressão algébrica para a função que relaciona a concentração e o tempo.

Percebe-se, ao longo dos três trechos de discussão, um movimento cíclico, com avanços e recuos, de raciocinar sobre relações matemáticas e desenvolver afirmações (conjecturar), buscando reconhecer e explicar a validade (ou não) dessas afirmações (justificar). Em alguns momentos, culminou com estender, para situações mais gerais, de regularidades observadas em casos particulares (generalizar) – como, por exemplo, a variação da quantidade de água e da quantidade de sal, como funções do tempo e, de forma mais geral, a concentração.

4.4 GRUPO 4

Para análise da discussão ocorrida no grupo 4, foram separados quatro trechos que trazem as transcrições e descrições acerca do que ocorreu no desenvolvimento da tarefa citada anteriormente, realizada pelo grupo formado por três alunos aqui denominados R, G e M.

4.4.1 Trecho 1

[1,1] **R:** Disciplina de Cálculo, nossos nomes são R, G e M.
[1,2] (Leitura da tarefa) **G:** Um tanque de cinco mil litros de água pura e uma mistura de 750 gramas de sal diluídos em 25 litros de água que é bombeado para o tanque a cada um minuto.
[1,3] **G**: Então quer dizer que a cada cinco mil ele recebe mais 25 litros de água misturada com 750 gramas de sal.
[1,4] **M:** Sei lá, para mim 750 gramas de sal não fazem diferença nenhuma. Tipo no fim, porque é muito pouco comparado...
[1,5] **G:** Sim, por isso tem que pensar em um tempo muito grande. Porque a única coisa que tem aqui de concentração da água é o 750 gramas de sal.
[1,6] **M:** Sim.
[1,7] **R:** Se passa um minuto aumenta 25 litros de água e 750 gramas de sal.
[1,8] **M:** Diluídos nesses 25 ou...?
[1,9] **G:** Junto com esses 25.
[1,10] **M:** Ah tá.
[1,11] **G:** Então, por exemplo. Não adianta pegar a cada minuto 750 gramas em cinco mil, porque eu tenho os 25 a mais que vai de água.
[1,12] **R:** Então olha, vamos pôr no minuto... no tempo 1... 1 minuto.
[1,13] **G:** Então eu vou ter 5 025 litros, aí a concentração....
[1,14] **R:** Acho melhor a gente fazer uma tabela primeiro, para gente ter uma noção primeiro [...] coloca assim: tempo 1...
[1,15] **G:** Tá. $t = 0$... 5 mil...
[1,16] **R:** Isso. Tempo 1... 5025.
[1,17] **M:** É.
[1,18] **G:** 5025 e 750 gramas ... Tempo 2 vai para 5050 e 1500... aqui agora dá para gente pegar quanto está dando a porcentagem da concentração... entendeu? Porque daí a gente começa a pegar a diferença...
[1,19] **M:** Ah entendi, porque seria só uma crescente infinita...
[1,20] **G:** É, porque se não aqui olha... tá 100%... a gente tem 5025 e 750 gramas de ... água.
[1,21] **R:** Faz aí 750 dividido por 5025. É 0,14, a concentração no tempo 1 é 0,14.
[1,22] **M:** Mas esse valor é por cento, ou...?
[1,23] **G:** Não, é a concentração da água.
[1,24] **R:** É porque concentração é quantidade de matéria dividido pelo volume total. Então depois de um minuto vai ter, 750 com 5025.
[1,25] **G:** Assim, mas não começa do 5, começa do 0. É isso?
[1,26] **M:** Sim. Começa do 0.
[1,27] [inaudível]
[1,28] **G:** 0,14, praticamente 0,15 né? 0,149.
[1,29] **M:** Mas eu acho que não é por cento, é?
[1,30] **R:** Não, não é porcentagem.
[1,31] **G:** Concentração, então vai ser gramas por litro.
[1,32] **R:** Ah... Eu vou fazer aqui, porque a gente vai seguir um padrão... agora 1500 divido por 5050. Dobrou. 0,30.
[1,33] **G:** Mas eu acho que não vai manter.

[1,34] **M:** Acho que não vai manter mesmo não.

Os estudantes iniciam a leitura da tarefa neste primeiro trecho, e em seguida já começam por conjecturar em [1,4] em relação à concentração da mistura de água e sal, como uma função do tempo. Inicialmente, o estudante enuncia uma conjectura quando fala: “Para mim 750 gramas de sal não fazem diferença nenhuma. Tipo no fim”. Após, o estudante G, em [1,5], valida a conjectura e encontra um motivo que faça com que a conjectura seja verdadeira: “Sim, por isso tem que pensar em um tempo muito grande. Porque a única coisa que tem aqui de concentração da água é o 750 gramas de sal.”

Em [1,7], o estudante R inicia outra conjectura ao tentar entender como a concentração se comporta, explicitando que “se passa um minuto aumenta 25 litros de água e 750 gramas de sal”. A seguir, G complementa essa conjectura [1,11], alertando que a quantidade de água está aumentando. Assim, não basta “pegar a cada minuto 750 gramas em cinco mil, porque eu tenho os 25 a mais que vai de água”. Com o objetivo de validar (ou não) essa conjectura, R sugere construir uma tabela [1,14], e propõe calcular a concentração no tempo 1. O aluno G, por sua vez, destaca que, no tempo zero, a quantidade de água é 5 mil [1,15]. O aluno R valida essa afirmação (“Isso”), e completa que, no tempo 1, a quantidade de água é 5025 litros [1,16].

Prosseguem os cálculos determinando que, no tempo 2 minutos, haverá 5050 litros de água e 1500 gramas de sal [1,18]. A partir disso, G elabora uma conjectura, de que é possível expressar a concentração da mistura em porcentagem e analisar a diferença entre valores sucessivos de tempo. M complementa essa conjectura [1,19], destacando que será obtida uma sequência infinita crescente.

Outra conjectura que surge na discussão [1,21], é a de que a concentração da mistura é calculada pela razão entre a quantidade de sal e a quantidade de água (“Faz aí 750 dividido por 5025”). O grupo então procura interpretar o que significa o valor encontrado. Em [1,18], G sugeriu expressar a concentração em forma de porcentagem, conjectura que é invalidada por ele mesmo em [1,23], utilizando uma justificativa não formal e com evidência empírica, complementada por R em [1,24], destacando que “concentração é quantidade de matéria dividido pelo volume total”. O estudante M não está convencido disso, e em [1,29] questiona novamente o que representa o valor obtido pela razão da quantidade de sal pela quantidade de água: “Mas eu acho que não é por cento, é?”. O estudante R insiste que a concentração é em gramas por litro.

Por fim, uma conjectura elaborada por G, ao comparar a concentração nos tempos 1 minuto e 2 minutos, é a de que ela dobra [1,31]. Trata-se de uma primeira conjectura com características particulares (uma generalização), envolvendo uma afirmação sobre uma propriedade que possa ser válida para a sequência valores de concentração calculados para valores de tempo inteiros e positivos. Em outras palavras, que a concentração dobra entre esses dois valores. Os estudantes R e M refutam tal conjectura [1,32 e 1,33], porém sem justificativas. A conjectura é abandonada e discussão prossegue.

4.4.2 Trecho 2

> [2,1] **M:** É, a gente tem que achar a função pra poder jogar um número bem lá na frente.
> [2,2] **R:** 5075.
> [2,3] **G:** Faz aí mais uns três tempos...
> [2,4] **R:** Mais uns três?
> [2,5] **G:** Isso, tá bom, vê quanto dá esses dois.
> [Realizando cálculos no caderno].
> [2,6] **R:** Eu acho que vi um padrãozinho, mas vamos esperar. Que aqui ó...
> [2,7] **M:** De lá para cá dá 15 de novo. Daqui para cá e daqui para lá dá 15. Eu adoro quando dá certo.
> [2,8] **R:** Vai fazer mais?
> [2,9] **G:** É, só manter constante.
> [2,10] [Inaudível]
> [2,11] **M:** Deu 14.
> [2,12] **R:** Vamos fazer mais!
> [2,13] **G:** Mais?
> [2,14] **R:** Um leve padrão.
> [2,15] [Inaudível]
> [2,16] **R:** Acho que agora a gente tem que bolar uma função....
> [2,17] **M:** É.
> [2,18] **R:** Porque daí a gente faz o limite... quando o t tende....
> [2,19] **M:** É seria uma boa ideia.
> [2,20] **R:** Ao infinito.
> [2,21] **G:** Vai chegar uma hora que essa concentração vai manter né?
> [2,22] **R:** Vai o quê?
> [2,23] **G:** Vai chegar uma hora que... porque sempre vai tá acrescentando mais água então a concentração nunca vai ser....
> [2,24] **M:** É porque se tivesse acrescentando só sal uma hora ia saturar, mas está adicionando diluído em água então por mais que ela aumente, não vai crescer pra sempre, ela vai ficar tipo meio que...
> [2,25] **G:** É ela não vai cair...
> [2,26] **M:** Não ela cai, daqui aqui ela tá 14....
> [2,27] **R:** Não a sequência de diferenças....
> [2,28] **M:** É, ela não cai.... ela vai subir... aí sei lá como ela vai... tem que tentar fazer o...
> [2,29] **R:** Formulinha.

No início deste trecho, notamos que o estudante M sugere que o grupo deve realizar algum tipo de generalização [2,1] expressa por uma "fórmula". Para tal, prosseguem realizando cálculos da concentração para outros valores de tempo. Em [2,6], R diz ter reconhecido algum padrão a partir dos valores calculados ("Eu acho que vi um padrãozinho"), mas parece ainda não ter muita certeza de sua validade ("mas vamos esperar").

Continuando, M observa [2,7] então que, novamente, a variação da concentração entre dois instantes de tempo inteiros é de 0,15 (em sua fala, ela considera apenas a parte decimal), e conjectura que possa haver um padrão nessa variação. Embora não seja matematicamente válida, essa conjectura parece ter sido validada pelo grupo a partir do cálculo de valores particulares de concentração e variação de concentração, ao truncar os valores com apenas duas casas decimais [2,8 a 2,14]. Como representado na Figura 4, a variação na concentração entre dois instantes de tempo sucessivos (positivos e inteiros) de fato é constante e igual a 0,14, até o tempo 8 minutos.

Em [2,16], o estudante R retoma a sugestão de expressão uma generalização, encontrando uma função ("bolar uma função") que expresse a concentração da mistura no tanque, possivelmente para validar, com argumentos matemáticos, a conjectura anterior. Assim, em [2,18], R propõe que se calcule o limite tendendo ao infinito, utilizando um procedimento matemática para se justificar.

Em [2,21], o estudante G levanta a conjectura de que uma hora a concentração "vai se manter" e, para esclarecer melhor para seus colegas, em [2,23], o estudante complementa a conjectura de que sempre está acrescentando água, e, em [2,25], a estudante M utiliza uma justificativa não formal e com evidencia empírica para validar a conjectura, esclarecendo que a cada minuto está adicionando água e sal, desta forma a quantidade de sal não ia aumentar infinitamente. A discussão prossegue com a intenção de expressar, algebricamente, a concentração como função do tempo.

4.4.3 Trecho 3

[3,1] **M:** É... $5000 + t.25$, porque quando o t é zero fica 5000, t1 é 1 vezes 25, t2...
[3,2] **R:** Calma, calma, calma.... isso daqui é o quê? A concentração?
[3,3] **M:** Não, é o tempo.
[3,4] **G:** Concentração em função do tempo
[3,5] **M:** Mais 750 vezes o t também.
[3,6] **G:** Ficaria 5000 mais a constante.
[3,7] **M:** Não, 5000 é a constante.
[3,8] **R:** Tá bom, vai ficar então $5000 + 25t + 750t$.
[3,9] **M:** Deu certo.
[3,10] **G:** Então a gente tem que fazer... vamos supor, coloca t valendo 3... porque se a gente colocar, por exemplo o t valendo 4 a gente tem que encontrar 0,58, se encontrar tá valendo entendeu?... ai você vai tirar a prova. A gente vai tirar prova da fórmula. A gente vai jogar t igual a 4 e se encontrar 0,58 a formula bate, se não, tem alguma coisa errada. Entendeu?
[3,11] **R:** Vamos trocar t aqui por 4 e tem que encontrar quanto?
[3,12] **G:** Tem que encontrar 0,58.
[3,13] **R:** Como você vai encontrar 0,58 somando $5000 + 25.4 + 750$ vezes?
[3,14] **M:** Não, 0,58 não, por que isso é da concentração... A gente tem que fazer uma fórmula...
[3,15] **G:** Da concentração.
[3,16] **M:** É

[3,17] **R:** A concentração vai ser a massa dividida pelo volume. A massa vai ser $750.t$ e o volume vai ser $5000 + 25.t$. Então fica $\frac{750.t}{5000+25.t}$
[3,18] **M:** É eu acho que é isso.
[3,19] **G:** Agora sim, a gente pode aplicar e ver se vai dar.
[3,20] **M:** Deixa eu fazer uma aqui...
[3,21] **R:** Faz com 4...

Inicia-se neste trecho o processo de generalização, no qual os estudantes realizam tentativas de encontrar uma relação algébrica para a concentração. Inicialmente, M apresenta uma conjectura para a expressão da quantidade de água como função do tempo [3,1] e a valida escolhendo alguns valores particulares de tempo. Esclarece para R que sua fórmula não é para concentração (ele fala "é o tempo", mas na verdade refere-se à quantidade de água com a função do tempo).

M, então [3,4], sugere que, para encontrar a concentração, deve-se adicionar $750t$ àquela expressão ("mais 750 vezes o t"), chegando à expressão $5000 + 25t + 750t$. Para M, a expressão está correta ("Deu certo") [3,9]. Já G sugere a escolha de valores particulares de tempo para justificar a fórmula [3,10 a 3,16]. Em [3,13], R parece não estar convencido de que se deva realizar uma soma. Em [3,17], encontram a generalização que buscavam, justificando que a concentração vai ser a massa dividida pelo volume. Em [3,18], ampliam o processo de justificativa não formal e com exemplo genérico para a generalização encontrada, no qual eles testam para tempo igual a 4, na intenção de validá-la. Em seguida, veremos que o professor passa pelo grupo na intenção de indagá-los sobre o modo como estavam pensando.

4.4.4 Trecho 4

[4,1] **Professor:** o que vocês pensaram aqui?
[4,2] **G:** Como estava variando ao decorrer do tempo a quantidade de sal, a gente tentou fazer uma fórmula... aí ficou essa fórmula (apontando para $\frac{750.t}{5000+25.t}$).
[4,3] **Professor:** Certo, certo...
[4,4] **G:** Agora a gente vai ver quando ele tender ao infinito...
[4,5] **Professor:** Qual a hipótese de vocês do que acham que vai acontecer?
[4,6] **G:** É o que a gente vai ver...
[4,7] **Professor:** Mas não tem nenhuma ideia assim, tipo "eu acho que vai acontecer..."
[4,8] **G:** Então, por exemplo, como você sempre tá adicionando 25 litros de água ela não chega a saturar, mas em longo prazo...a concentração de sal vai se aproximando....
[4,9] **Professor:** De quanto?
[4,10] **G:** Então, vamos ver ...
[4,11] **M:** Deu certo.
[4,12] **R:** Agora vamos tentar fazer o limite. Eu não lembro mais a regrinhas certo, vocês lembram?
[4,13] **G:** Eu acho que quando tende ao infinito multiplicado por um número muito grande... tende a zero. Também não lembro como colocava.
[4,14] **R:** Porque olha, o que vai acontecer este número aqui ele vai ficar muito grande, e essa parte aqui também vai ficar muito grande.
[4,15] **G:** E sempre maior... eu acho que ele vai tender a...
[4,16] [Inaudível]

[4,17] **R:** Olha quando for 1 milhão deu 29,99
[4,18] **M:** Então sempre vai aumentar
[4,19] **R:** É, mas até qual número? Porque tipo, não passou de 30, mas até qual número que chega?
[4,20] **R:** Deixa eu ver 10 elevado a 50 quanto dá... O máximo que vai chegar é 30, porque com 10 elevado a 50 deu 30. E 10 elevado a 9 deu 29,9
[4,21] **M:** É, mas por quê?
[4,22] **R:** Essa é a questão...
[4,23] **M:** Aí a gente espera o professor responder pra gente...
[4,24] **R:** A gente já viu o número que vai chegar, agora...
[4,25] **G:** Realmente o limite da 30, mas agora bodega do trem não quer deixar eu fazer.
[4,26] **R:** É o limite é 30, agora por quê?
[4,27] **R:** Eu sei o porquê, porque 750 dividido por 25 é 30. Quando esse t for muito grande. Esse 5000 vai se tornar desprezível, então vai ficar o que? Praticamente 750 dividido por 25 então nunca vai passar de 30 mesmo.
[4,28] **Todos:** Palmas.

No início desse trecho da discussão, quando se dá a presença do professor, identificamos algumas justificativas de autoridade externa, que ocorrem quando tem uma autoridade externa. O professor começa por indagá-los sobre o que tinham feito e encontrado, e o estudante responde em [4,2] que houve uma tentativa de generalização, mostrando a fórmula encontrada. A fala do professor [4,3] "Certo, certo" é assumida pelo grupo como uma validação da fórmula que haviam obtido. Em [4,4], G aponta que vão observar o que ocorre para tempo muito grande. Logo em seguida, [4,5], o professor questiona se os estudantes teriam alguma conjectura de como se comporta a concentração para valores maiores, e G [4,8] conjectura que a mistura não vai saturar, mas que, a longo prazo, parece se estabilizar.

Na fala de G, a conjectura de que a solução não vai saturar parece referir-se ao fato de que sua concentração (em g/L) está aumentando, pois está sendo acrescentada água. Vale destacar que uma solução é dita saturada quando há quantidades iguais de partículas ou solutos e solvente. O termo "solução saturada" é utilizado em Química para definir uma solução na qual não pode ser dissolvido mais solvente, ou seja, o soluto adicional não se dissolve numa solução saturada, e para isso é necessário o cálculo do cálculo do produto de solubilidade (Kps). Trata-se de uma análise para além do foi pedido na tarefa.

Como R diz não se recordar de "regras" (técnicas) para o cálculo de limites [4,12], em [4,14], R parece elaborar conjecturas sobre o comportamento do numerador e do denominador da expressão (as quantidades de sal e de água, em separado) ("este número aqui ele vai ficar muito grande, e essa parte aqui também vai ficar muito grande"). Em [4,15], G parece concordar, e conjectura que a concentração parece tender a algum valor ("eu acho que ele vai tender a..."). No intuito de justificar suas conjecturas, testam o valor da concentração para valores de tempo como 1 milhão e percebem que o resultado vai se aproximando de 30 [4,20]. Em [4,21], M questiona os seus colegas de grupo o motivo pela qual o a concentração vai se aproximando de 30.

Finalizando a discussão, em [4,27], o estudante R utiliza uma justificativa de evidência empírica, no qual de forma empírica ele valida a conjectura de que o limite da função, quando o tempo tende a infinito, é 30. Ele argumenta que os 5000 litros iniciais para um tempo muito grande vão se tornar desprezíveis na fórmula da concentração fazendo com que ela não passe de 30 gramas de sal por litro. Seus colegas aceitam sua justificava e consideram a tarefa como resolvida, encerrando a discussão com comemorações e palmas.

4.4.5 Processos de Raciocínio do Grupo 4.

Inicialmente, observa-se que o primeiro trecho é marcado pelos estudantes elaborando algumas conjecturas em relação à concentração da mistura de água e sal, mas na maioria das vezes essas conjecturas não trazem justificativas e, quando apresentam, nesse primeiro momento são justificativas não formais e/ou com evidências empíricas.

Já no segundo trecho, vemos um movimento de conjecturar se intensificando, e começa a se destacar um processo de generalizar. Para Lannin, Ellis e Elliot (2011), os estudantes generalizam quando se concentram em um aspecto particular de um problema e pensam nele de uma forma abrangente. Ao longo do trecho, frases como “Estou vendo um padrãozinho” ou “vamos encontrar uma função” nos dão indícios do início de um processo de generalização, mas neste trecho ainda estão elaborando conjecturas e testando a concentração para valores de tempo diferentes.

Inicia-se no próximo trecho um processo de generalização, no qual os estudantes realizam tentativas de encontrar uma relação algébrica para a concentração. Inicialmente, o estudante elabora uma conjectura e tenta validá-la para alguns valores de tempo. Após algumas tentativas, o grupo encontra a generalização que buscava, justificando que a concentração vai ser a massa dividida pelo volume e utilizam justificativas com exemplo genérico e, para validá-las, as testam para quantidades de tempo.

No quarto trecho, o professor se faz presente desafiando os estudantes a sintetizar e, principalmente, justificar as conjecturas e a generalização elaborada até aquele momento. Então, temos uma justificativa de autoridade externa, que nesse caso é o professor, e os estudantes buscam justificativas plausíveis para a generalização encontrada. Mata-Pereira

(2012) esclarece que é necessário que os alunos sejam incentivados a apresentar justificações, ainda que sem o rigor associado a demonstração matemática formal.

No que diz respeito a justificação de autoridade externa, a autora esclarece que cabe ao professor criar situações em que a justificação tenha grande importância no processo, porém, é necessário que os alunos compreendam os tipos de justificações que são válidas matematicamente. Com isso, nota-se que o professor ao longo do último trecho desenvolve um papel importante para o raciocínio dos estudantes, fazendo com que eles percebam o significado da generalização encontrada.

Desta forma, durante os quatros trechos de discussão, neste grupo (diferente do anterior), nota-se uma intenção maior de justificar suas conjecturas e generalizações e até mesmo um interesse por parte dos estudantes de validá-las. Em sua grande maioria, as justificativas não acompanhavam um teor matematicamente rigoroso, mas, em todas, é possível afirmar que os estudantes desenvolveram satisfatoriamente o raciocínio quando as justificativas eram levantadas, fazendo com que o grupo obtivesse sucesso ao realizar a tarefa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, são tecidas considerações finais do trabalho como um todo, evidenciando três percursos distintos observados nas discussões dos estudantes. Recordamos que o objetivo deste estudo foi analisar processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de CDI em discussões a partir de uma tarefa de natureza exploratória.

Para o desenvolvimento do trabalho, foi necessário um estudo aprofundado sobre os processos de raciocínio matemático, tema esse que é recém estudado no Brasil. A publicação da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) traz "luz" ao tema no contexto da Educação Básica ao destacar que os alunos devem ser capazes de "investigar e estabelecer conjecturas [...], identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração [...] na validação das referidas conjecturas" (BRASIL, 2018, p. 540). No contexto das Engenharias, com as "Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de graduação em Engenharia" (BRASIL, 2018), destacam-se competências que os estudantes devem constituir durante a graduação: elas "serão desenvolvidas em graus de profundidade e complexidade crescentes ao longo do percurso formativo, de modo que os estudantes não apenas acumulem conhecimentos, mas busquem, integrem, criem e produzam a partir de sua evolução no curso" (BRASIL, 2018, p.26).

Ao encontro dessas diretrizes, promoveu-se no contexto da disciplina de CDI um ambiente de ensino e aprendizagem (TREVISAN; MENDES, 2018) em que foram propostas tarefas exploratórias (PONTE, 2005, 2014) convidativas ao trabalho colaborativo (GRANBERG; OLSSON, 2015; CARLSEN, 2018), que proporcionou aos estudantes a interação entre eles e com o professor, a fim de argumentar as suas ideias e desenvolver seu raciocínio matemático (JEANNOTTE; KIERAN, 2017; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; MATA-PEREIRA; PONTE, 2018; PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020; TREVISAN; ARAMAN, 2021).

Em especial, analisamos uma dessas tarefas que, embora não tenha sido elaborada com a intenção explícita de mobilizar processos de raciocínio matemático (JEANNOTTE; KIERAN, 2017), mostrou-se com potencial para isso, o que se confirma a partir da análise dos áudios e recortes de resolução da tarefa coletados antes mesmo da realização desta pesquisa de mestrado.

Em relação a tarefa proposta para os estudantes, ela apresenta características de tarefa de natureza exploratória, que são tarefas abertas e de níveis de desafios reduzidos (PONTE, 2005). Destaca-se a possibilidade de utilização que, em sua resolução, de diferentes registros (verbal, gráfica, tabular e algébrica), ampliou a exploração de representações relevantes ao conceito de funções racionais e o estabelecimento de conexões entre a Matemática e outras áreas (no caso, um contexto da semirrealidade da Engenharia) (PONTE, 2014).

As possibilidades de utilização das tarefas desse tipo em aulas de CDI levam os alunos a explorar intuitivamente e organizar matematicamente situações que conduzem à elaboração de conjecturas e generalizações, bem como a busca por justificativas. Dentre os processos de raciocínio, destacamos na análise dos áudios três deles, que são: *Conjecturar, Generalizar e Justificar*. Apontamos a seguir, uma breve consideração de cada um deles a partir da síntese da discussão realizada no Capítulo 2.

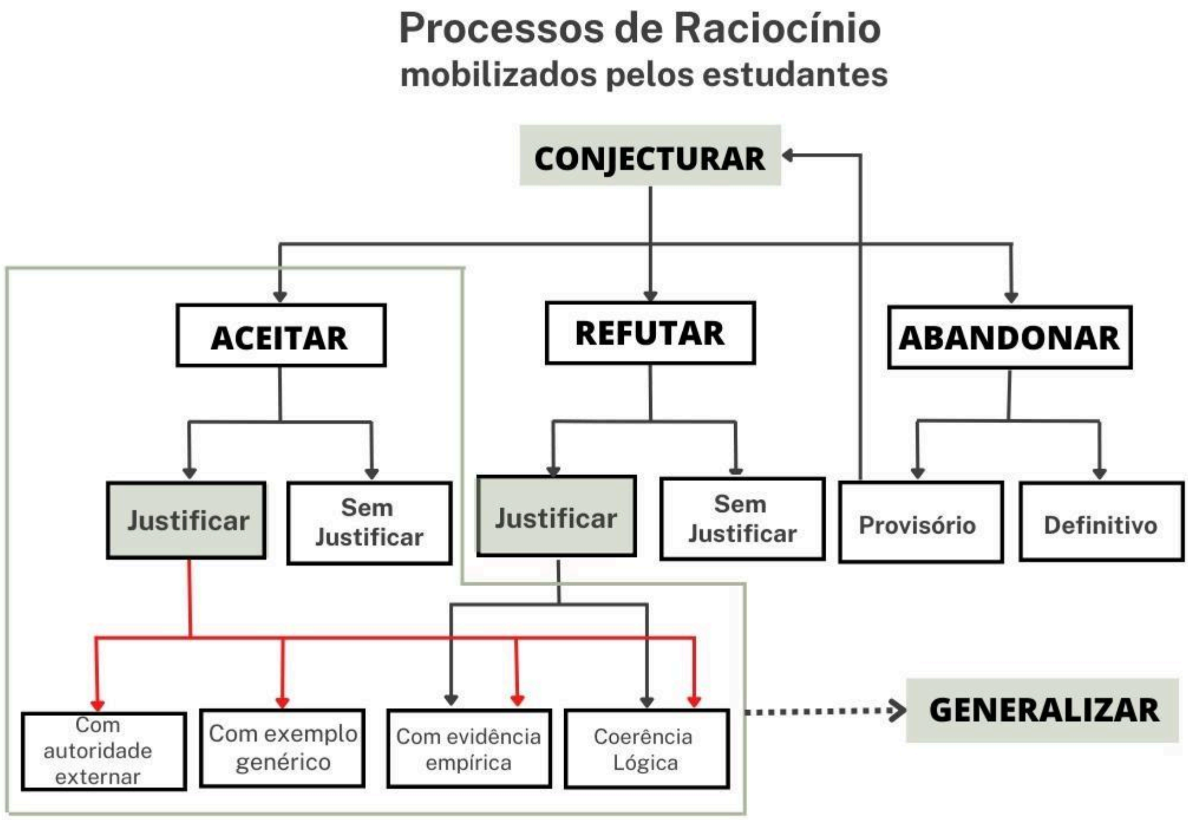
Lannin, Ellis e Elliot (2011) apontam que uma conjectura deve ser desenvolvida em forma de uma declaração para que possa ser melhor examinada. Para Mata-Pereira (2012), os estudantes desenvolvem conjecturas sobre conceitos e habilidades de forma falada ou não. Nesse sentido, as conjecturas demandam exploração e evidências para apoiá-las, assim, as conjecturas servem de fase inicial para o raciocínio matemático (MATA-PEREIRA, 2012).

O processo de generalizar está por vezes interligado ao processo de conjecturar. Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) afirmam que se parte de uma conclusão ou uma conjectura específica para formular uma conjectura de âmbito mais geral. De acordo com Mata-Pereira e Ponte (2017), uma generalização implica reconhecer que uma propriedade que se sabe válida para determinado conjunto de objetos se sustenta para um conjunto mais amplo de objetos.

O processo de justificar se encaixa na validação de uma conjectura ou generalização. Mata-Pereira e Ponte (2018) ressaltam que a justificação é uma etapa importante para que seja possível validar matematicamente tais afirmações. Para os autores, o processo de justificar um resultado “envolve apresentar razões para convencer a si mesmo e a outros” (p. 3).

Com base nessa teoria estudada, e na análise dos processos de raciocínio matemático mobilizados pelos estudantes durante a resolução da tarefa proposta, montamos um esquema com os principais percursos identificados envolvendo tais processos.

Figura 7: Processos de raciocínio matemático mobilizados pelos estudantes.



Fonte: Autora.

Durante a análise dos áudios e do material coletado, notamos o movimento muito presente de conjecturar em todos os trechos analisados. Quando um ou mais estudantes elaboram uma conjectura, foram identificados três percursos distintos, que são: (i) abandonar conjecturas definitivamente ou provisoriamente; (ii) refutar tais conjecturas com justificativas, ou ainda sem justificativas; (iii) aceitar as conjecturas buscando reconhecer e explicar a validade (ou não) dessas afirmações justificando segundo a categorização proposta na figura 1 . Em alguns momentos, esse movimento culminou com o estender, para situações mais gerais, as regularidades observadas em casos particulares (generalizar). Utilizaremos trechos da análise já realizada para exemplificar cada um deles. Essa síntese foi utilizada para constituir um Produto Educacional, resultado da pesquisa.

Um dos percursos é abandonar uma conjectura, podendo ocorrer duas situações: provisória ou definitivamente. Uma conjectura é abandonada definitivamente quando os estudantes descartam a possibilidade de seguir adiante com ela, como ocorre em vários momentos ao longo das discussões.

Como, por exemplo, no Grupo 1, Trecho 1, quando os estudantes ainda estão por compreender a tarefa e calculam a concentração para valores de tempos diferentes. Um estudante levanta a conjectura de que ela seria 30 gramas de sal por litro, mas calcula que com 10 minutos seria 1,42 gramas de sal por litro. Como esses dados são um pouco discrepantes, os estudantes abandonam essa conjectura definitivamente. Outro exemplo é no Grupo 4, Trecho 1, quando o estudante declara que os 750 gramas de sal não fariam nenhuma diferença. Essa conjectura chega até a ser validada por um colega, mas logo após é abandonada definitivamente, quando os estudantes entendem que a cada minuto entra água e sal no tanque.

Outra situação ocorre quando a conjectura é retomada como em um processo cíclico, movimento esse que ocorreu no Grupo 3, Trecho 1, em que o estudante levanta a conjectura de que a concentração a longo prazo se aproximaria de 30 gramas de sal por litro de água. Porém, a conjectura é abandonada provisoriamente até o trecho 3 quando os estudantes a retomam. Do mesmo modo, no Grupo 2, Trecho 1, o estudante elabora a conjectura de que a concentração seria de 30 gramas por litro; mesmo ele justificando essa conjectura, ela foi abandonada pelo grupo e, no decorrer da discussão, ela foi retomada pelos estudantes, como aponta o Trecho 2, com o mesmo estudante justificando a conjectura, que volta a fazer parte da discussão.

Logo após conjecturar, por vezes os estudantes refutam a conjectura, podendo ou não a justificar, como ocorre com o Grupo 2, no Trecho 1, na fala que o estudante relata que a concentração nunca vai aumentar mais que 30, porém essa conjectura, de início, é refutada sem justificativa. Outro exemplo com uma conjectura refutada é no Grupo 1, Trecho 2, quando o estudante aponta que deveriam analisar separadamente o crescimento de sal e o crescimento de água. Ao propor construírem um gráfico do crescimento de sal, a conjectura foi refutada com uma justificativa utilizando coerência lógica, relatando que a tarefa está sugerindo o cálculo da concentração de água no tanque e teriam que analisar o sal que entra com a água.

Pode ocorrer ainda de se refutar uma conjectura utilizando uma justificativa com evidência empírica, como no Grupo 4, Trecho 1, que estão por interpretar o significado de valores encontrados em seus cálculos e um estudante conjectura que aquele valor seria em porcentagem, conjectura essa que foi refutada utilizando justificativa com evidência empírica de que concentração é quantidade de matéria dividido pelo volume total.

Como terceiro percurso, os estudantes podem aceitar uma conjectura sem justificativa ou com justificativa. Nesses dois casos, pode-se levar a uma generalização.

No Grupo 3, Trecho 3, vemos um exemplo que, no decorrer da discussão, o grupo assume como válida a conjectura de que a concentração, a longo prazo, aproxima-se do valor 30 gramas por litro e elabora uma justificativa por exemplos genéricos fazendo uso de casos particulares, utilizando de diferentes valores de tempo e chegando a uma generalização. No Grupo 4, Trecho 4, os estudantes conjecturam que a concentração nunca passará de 30 gramas por litro. O grupo valida esse valor com o cálculo do limite da expressão algébrica encontrada, que é validada por todo grupo com a justificativa com coerência lógica a partir do reconhecimento de um padrão, argumentando que os 5000 litros iniciais para valores de tempo muito grandes vão se tornar desprezíveis na fórmula da concentração, fazendo com que a mesma não passe de 30 gramas de sal por litro. Reconhecemos aqui que o grupo faz uma generalização. E, por fim, outro percurso dos estudantes é aceitar a conjectura sem justificativa, como no Grupo 1, Trecho 4, em que o estudante elabora uma conjectura sobre o crescimento da concentração com base na representação gráfica feita por ele, conjectura essa que é aceita pelo grupo sem justificativas.

Durante a análise, destacamos que alguns grupos utilizaram espontaneamente o software Geogebra, o que possibilitou uma visualização gráfica do comportamento da concentração. Isso ocorreu por serem familiarizado com o software em seu ambiente de ensino e aprendizagem da disciplina de CDI. Porém, houve um caso (Grupo 2) em que o software levou a elaboração de conjecturas incorretas.

Vale destacar que, dado o contexto da pandemia Covid-19 no país no momento da realização deste trabalho, não foi possível para autora acompanhar presencialmente as aulas de CDI. Assim, pela opção em analisar dados já coletados, o trabalho apresentou algumas limitações. Não foi possível “vivenciar” o contexto, e o papel da autora limitou-se a compreender o raciocínio dos estudantes por meio de recortes de áudios e vídeos. Frente a isso, mesmo com o estudo teórico dos processos de raciocínio, o percurso de etapa de análise de dados implicou em diferentes interpretações sobre os processos mobilizados pelos estudantes, sendo alterados em diversos momentos a partir das interações com os orientadores da pesquisa e do grupo de pesquisa.

Ainda assim, os resultados encontrados contribuem na direção de reconhecer o desenvolvimento do raciocínio matemático no decorrer do trabalho com a tarefa. Reconhecemos que esse tipo de trabalho se alinha às recomendações presentes nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o curso de graduação em Engenharia (BRASIL, 2019) na medida em que possibilitam o desenvolvimento de habilidades necessárias à implantação de soluções de Engenharia e propiciam uma comunicação eficaz em suas modalidades oral, escrita e gráfica.

REFERÊNCIAS

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º Ano de escolaridade. **RPEM**, v. 9, n. 18, p. 118-136, 2020.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In PIMM, D. (Eds.) **Mathematics, teacher and children**. London: Hodder & Stoughton, 1988, p. 216-235.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Resolução nº 2, de 24 de abril de 2019. **Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia**, Brasília, Brasil. Edição 89. Seção 1, p. 43, 2019.

BRODIE, K. **Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms.** Boston, MA: Springer, 2010.

CABRAL, T. C. B. Metodologias Alternativas e suas Vicissitudes: ensino de matemática para engenharias. **Perspectivas da Educação Matemática**,v. 8, p. 208-245, 2015.

CARNEIRO, L. F. G.; ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. Processos do Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes de 6º Ano do Ensino Fundamental ao Resolverem uma Tarefa de Geometria. **JIEEM**, v. 13, n. 1, p. 35-45, 2020.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM**, v. 40, n. 1, p. 3-22, 2008.

CARLSEN, Upper secondary students' mathematical reasoning on a sinusoidal function. **Educational Studies in Mathematics**, v. 99, p. 277–291, 2018.

COUTO, A. F.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, v. 4, p. 50-61, 2017.

ELLIS, A., ÖZGÜR, Z., REITEN, L. Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, v. 30, n. 2, p. 1-26, jun. 2018.

GALBRAITH, P. Mathematics as reasoning. **The Mathematics Teacher**, v. 88, n. 5, p. 412-417, 1995.

GARZELLA, F. A. C. **A disciplina de cálculo I: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas. 2013.

GHEDAMSI, I.; LECORRE, T. Transition from high school to university calculus: a study of connection. **ZDM–Mathematics Education**, v. 53, n. 3, p. 563-575, 2021.

GONÇALVES, W. J.; TREVISAN, A. L.; SILVA, D. D. L.; RIBEIRO, A. J. Raciocínio covariacional em cálculo: desenvolvimento a partir de tarefas. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 28, p. e020026, 2020.

GRANBERG, C. OLSSON, J. ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 37, p. 48-62, 2015.

GUIMARÃES, G. Novas tendências de aprendizagem em engenharia: O aluno como protagonista na produção do conteúdo curricular na disciplina de cálculo diferencial e integral. **Revista De Ensino De Engenharia**, v. 38, n. 1, 2019.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, p. 1-16, 2017.

LANNIN, J. K.; ELLIS, A. B.; ELLIOTT, R. **Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston: NCTM, 2011.

LANNIN, J. K. Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 7, n. 3, p. 231-258, 2005.

LITHNER, J. Mathematical reasoning on task solving. **Educational Studies in Mathematics**, v. 41, p. 165-190, 2000.

LITHNER. J. A research framework for creative and imitative reasoning. **Educational Studies in Mathematics,** v.67, n.3, p. 255–276, 2008.

MATA-PEREIRA, J. **As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa. Lisboa, 2018.

MATA-PEREIRA, J. **O raciocínio matemático em alunos do 9º ano no estudo dos números reais e inequações**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa. Lisboa, 2012.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification**. Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 2, p. 169-186, 2017.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, v. 32, n. 62, p. 781-801, 2018.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Enhancing students' generalizations: a case of abductive reasoning. CERME 11. **Proceedings…**11th Congress of European Research in Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands, 2019.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 4, p. 552-570, 2018.

PALHA, S. A. G; DEKKER, R: GRAVEMEIJER, K.; VAN HOUT-WOLTERS, B. Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. **The Journal of Mathematical Behavior**. Springer, v. 32, p. 141 – 159, 2013.

PÓLYA, G. **Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics (**Vol. I). New Jersey: Princeton University Press,1954.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula: Nova Edição**. Autêntica Editora, 2019.

PONTE, J. P. **Gestão curricular em Matemática**. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, v. 22, n. 1, p. 55-81, 2013.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática**, v. 156, p. 7-11, 2020.

PONTE, J. P. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática**. Em: J. P. Ponte, (Org.). Práticas profissionais dos professores de matemática (pp. 13-27). Lisboa. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C.A. **Uma abordagem à Análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de Idéias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes.** In: Bolema nº21, Ano 17, p. 81-140, UNESP, Rio Claro. 2004.

RAMOS, N. S. **Sequências numéricas como desencadeadoras do conceito de convergência**: episódio de resolução de tarefas. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina- PR., 2017.

RAMOS, N. S.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Ambiente de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautado em episódios de resolução de tarefas. In: V Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 2016, Ponta Grossa. **Anais...** SINECT, 5. Ponta Grossa: Editora da UTFPR, 2016, v. 1, p. 1-11.

RASMUSSEN, C; MARRONGELE, K; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM**, v. 46, p. 507-515, 2014.

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, v. 32, n. 61, p. 398-418, 2018.

SOWDER, L.; HAREL, G. Types of students' justifications. **The Mathematics Teacher**, v. 91, n. 8, p. 670-675, 1998.

STYLIANIDES, G. J. Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 11, n. 4, p. 258-288, 2009.

TORRES, P. L.; ALCANTARA, P.; IRALA, E. A. F. Grupos de consenso: uma proposta de aprendizagem colaborativa para o processo de ensino-aprendizagem. **Revista diálogo educacional**, v. 4, n. 13, p. 129-145, 2004.

TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O. Processos de Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes de Cálculo em Tarefas Envolvendo Representações Gráficas. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, v. 35, p. 158-178, 2021.

TREVISAN, A. L.; BORSSOI, A. H.; ELIAS, H. R. Delineamento de uma Sequência de Tarefas para um Ambiente Educacional de Cálculo. **VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Pirinópolis/GO, p. 1-12, 2015.

TREVISAN, A. L.; FONSECA, M. O. S.; PALHA, S. A. G. Proposição de tarefas com TDIC em aulas de Cálculo. **Revista Diálogo Educacional**, v. 18, p. 713-738, 2018.
TREVISAN, A. L.; GOES, H. H. D. O método da exaustão e o cálculo de áreas: proposta de uma tarefa com auxílio do Geogebra. **Educação Matemática em Revista**, v. 52, p. 79-85, 2016.

TREVISAN, A. L.; GOES, H. H. D. Sugestão para sua aula: Integral definida na geometria: tarefas para o cálculo de volumes. **Boletim Gepem**, v. 71, p. 136-140, 2017.

TREVISAN; A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia**, v. 11, n. 1, p. 209-227, 2018.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. **Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo Integral**. Educação Matemática Pesquisa, v. 19, n. 3, p. 353-373, 2017.

ZAPERLON, E.; RESENDE, L.; REIS, E. Análise do desempenho de alunos ingressantes de Engenharia na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. **Interfaces da Educação**. v. 8. n. 22, p. 303-335, 2017.

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral em tarefas exploratórias
Título do Produto/Processo Educacional	Será que é possível desenvolver o raciocínio matemático em CDI? Reconhecendo processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de CDI em uma tarefa exploratória
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Mariana Vasconcelos Negrini
	Orientador: André Luis Trevisan
	Coorientadora: Eliane Maria de Oliveira Araman
Data da Defesa	28.06.2022

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); *L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática* (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (x) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *Apenas um item pode ser marcado. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	(x) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.	( ) Local ( ) Regional ( ) Nacional (x) Internacional Justificativa (*obrigatória*): O produto tem potencial para utilização em contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, ofertada em âmbito internacional e, apesar de escrito em língua portuguesa, pode ser utilizado em países de língua oficial portuguesa.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *Apenas um item pode ser marcado.	(x) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). ( ) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada	( ) Econômica;

*Apenas um item pode ser marcado.	( ) Saúde; (x) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; ( ) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.	(x) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (x) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. ( ) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. ( ) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (x) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
André Luis Trevisan	UTFPR
Joana Da Fonte Dias Gomes Da Mata Pereira	Universidade de Lisboa
Marcia Aguiar	UFABC
Henrique Rizek Elias	UTFPR