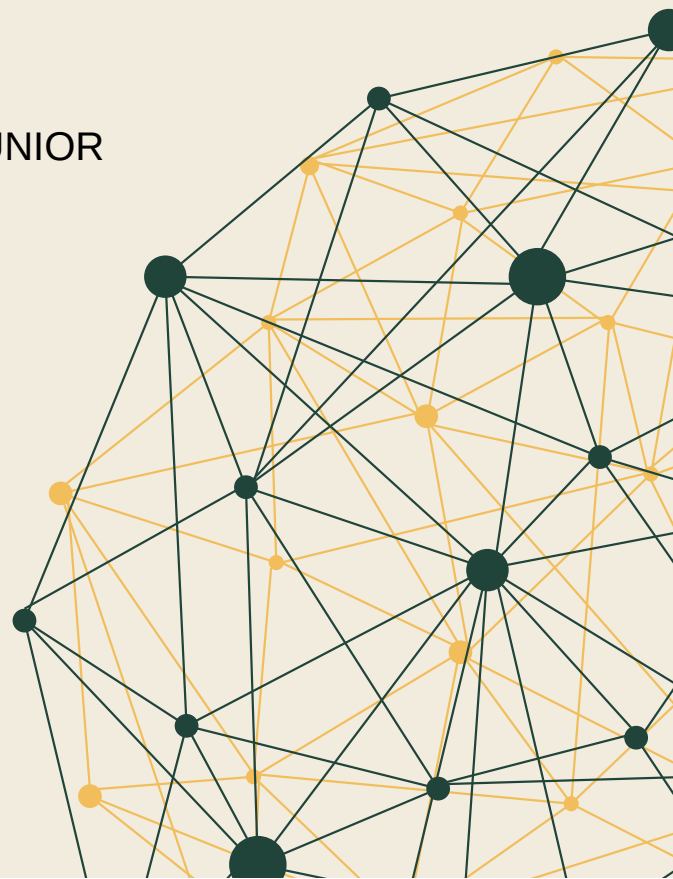
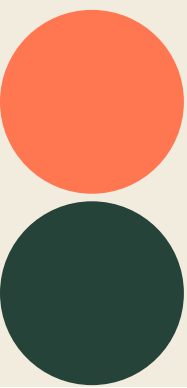


# EXPLORANDO CONCEITOS BÁSICOS DE FUNÇÃO

JOÃO PAULO CORREA DE OLIVEIRA JUNIOR  
ADRIANA HELENA BORSSOI



# ppgmat

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

JOÃO PAULO CORREA DE OLIVEIRA JUNIOR

**ESTUDO DE FUNÇÕES E O PENSAMENTO FUNCIONAL: DESENVOLVIMENTO  
E ANÁLISE DE UM PRODUTO EDUCACIONAL**

LONDRINA

2022

JOÃO PAULO CORREA DE OLIVEIRA JUNIOR

**ESTUDO DE FUNÇÕES E O PENSAMENTO FUNCIONAL: DESENVOLVIMENTO  
E ANÁLISE DE UM PRODUTO EDUCACIONAL**

**STUDY OF FUNCTIONS AND THE FUNCTIONAL THINKING: DEVELOPMENT  
AND ANALISYS OF AN EDUCATIONAL PRODUCT**

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campus* Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Adriana Helena Borssoi

LONDRINA

2022



4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



JOAO PAULO CORREA DE OLIVEIRA JUNIOR

**ESTUDO DE FUNÇÕES E O PENSAMENTO FUNCIONAL: DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DE UM PRÓDUTO EDUCACIONAL**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 10 de Junho de 2022

Dra. Adriana Helena Borssoi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

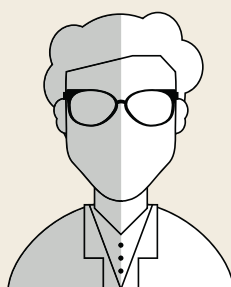
Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Debora Da Silva Soares, Doutorado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Ufrgs)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 11/06/2022.

# EXPLORANDO CONCEITOS BÁSICOS DE FUNÇÃO

Olá estudantes, professores e pesquisadores, neste documento apresentamos o resultado da construção de um Produto Educacional resultado de uma pesquisa desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.

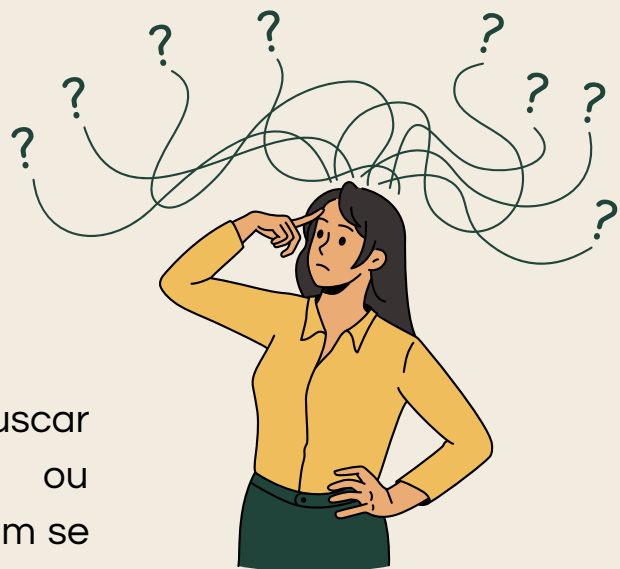


Aqui, você encontrará uma breve descrição sobre o porquê de estudar sobre funções, um pouco acerca do referencial teórico usado na pesquisa, a composição do material, dicas práticas de acesso e instruções sobre como usá-lo!

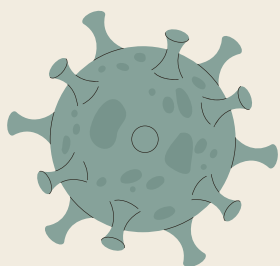
Caso você já queira acessar o material basta escanear ou clicar no QR Code ao lado.



# POR QUE ESTUDAR SOBRE AS FUNÇÕES ?

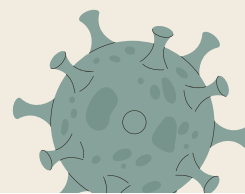
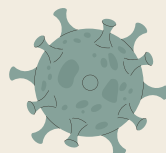


Basicamente, utilizamos as funções para buscar descrever, representar, prever ou compreender como quantidades que variam se relacionam. Acompanhe alguns exemplos, logo abaixo.



Durante a Pandemia de Covid-19 destacou-se o importante papel que os Matemáticos assumiram ao buscar desenvolver modelos que pudessem “prever” ou “predizer” como possivelmente se comportaria a:

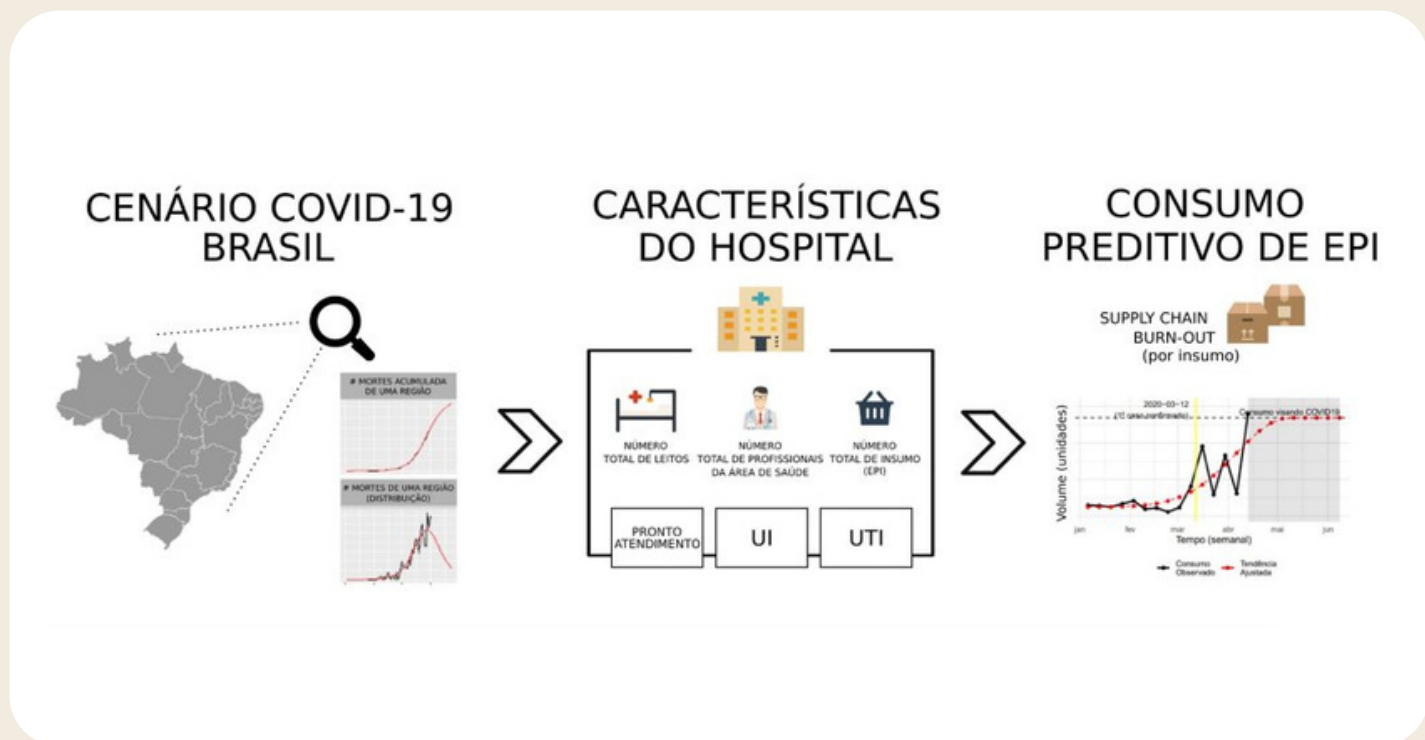
- Disseminação do vírus em relação ao tempo;
- Quantidade de leitos disponíveis de acordo com a taxa de aumento de contaminação;
- Construção de modelos para gerir a quantidade de insumos em determinados hospitais.





Veja só o modelo criado por professores do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da USP e outros cientistas que criaram o grupo de pesquisa MODCOVID 19 para combater o novo coronavírus.

Perceba que o uso de funções está associado a descrição Matemática de modelos como no gráfico apresentado no Consumo Preditivo de EPI, em que relaciona-se o tempo com o volume (em unidades).



Fonte: <http://cemeai.icmc.usp.br/covid19/estoque-seguro/>

Para conhecer um pouco mais sobre o MODCOVID 19 acesse o QR Code:



# OUTRAS ÁREAS DE CONHECIMENTO

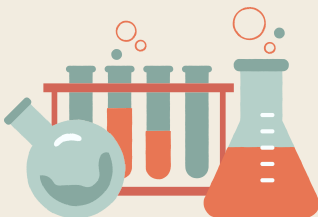
É interessante notar que o uso de funções também se dá na área da Física em que relaciona-se diferentes variáveis com o uso de expressões matemática, como nas equações de descrição de movimento



Podemos pensar, por exemplo, na relação entre a altura de um coqueiro e o tempo de queda de um coco que estava pendurado. Nos parece natural pensar que quanto maior o coqueiro maior será o tempo de queda, e assim é. O tempo de queda está relacionado com a distância que o coco está do chão, e podemos relacionar essas quantidades pela expressão:

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

Há diversas áreas de estudo que também se utilizam das funções para descrever, investigar e modelar fenômenos como:



Química



Economia



Biologia



# PENSAMENTO FUNCIONAL

Smith (2008) define o Pensamento Funcional com sendo um “pensamento representacional que foca na relação entre duas ou mais variáveis especialmente os tipos que levam de uma relação específica para generalização de casos” conforme apresenta por Stephens et al. (2012).



Podemos, por exemplo, pensar na relação entre a vazão de água de uma mangueira e a quantidade de tempo necessário para encher uma piscina. Neste caso podemos observar duas quantidades que covariam, ou seja, se aumentarmos a vazão de água diminuiremos o tempo necessário para o seu preenchimento.



Essa relação pode ser representada de diversas maneiras, sendo que podemos estabelecer uma representação Matemática que descreva esta relação de um caso mais específico para uma generalização que relacione qualquer vazão de água com o tempo necessário para o preenchimento de qualquer piscina, conhecidas suas medidas.



Blanton e Kaput (2005) apresentaram três modos de perceber padrões e relações, delineados por Smith, como uma estrutura para analisar os tipos de Pensamento Funcional. Os autores apresentam:

(1) Padronização recursiva: envolve encontrar variações dentro de uma sequência de valores.

(2) Pensamento covariacional: é baseado em analisar como duas quantidades variam simultaneamente e manter a mudança como uma parte explícita e dinâmica da descrição de uma função (por exemplo, “enquanto  $x$  aumenta por um,  $y$  aumenta por três”) (Confrey e Smith, 1991);

(3) Relação por correspondência é baseado na identificação de uma correlação entre quantidades variáveis (por exemplo, “ $y$  é 3 vezes  $x$  mais 2”)

O trabalho com estes tipos de pensamentos está estreitamente associado à utilização de múltiplas representações que são formas variadas de expressar o pensamento acerca de uma relação entre quantidades, como pode ser observado na caracterização do Pensamento Funcional por Blanton et al. (2011) que o indicam como um tipo de raciocínio que busca a “generalização de relações entre quantidades covariantes, expressando-as com palavras, símbolos, tabelas ou gráficos, raciocinando com essas várias representações para analisar o comportamento de uma função” (BLANTON et al., 2011, p. 47, tradução nossa).

Gafanhoto e Canavarro (2011) apresentam em seu artigo quatro diferentes tipos de representações relacionadas a Álgebra baseadas nas ideias de Friedland e Tabach (2001), apresentamos abaixo estas representações:

### REPRESENTAÇÃO VERBAL



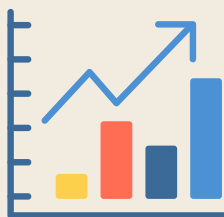
"Está normalmente associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos, dá ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano".

### REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA



"É uma representação natural para os alunos que se encontram a iniciar o estudo de álgebra e, normalmente, precede qualquer outro tipo de representação."

### REPRESENTAÇÃO GRÁFICA



"Proporciona uma imagem clara de uma função de variável real. É uma forma de representação intuitiva e apelativa para os alunos que gostam de uma análise visual"

### REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA



"Esta é concisa, geral e efectiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, por vezes é o único método de justificar ou efectuar generalizações."

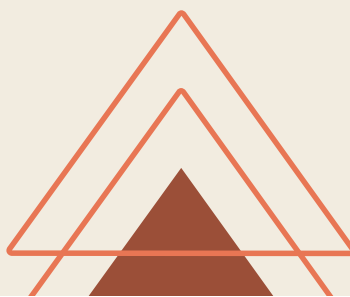
Ainda mais, Gafanhoto e Canavarro (2011) citando Brown e Mehilos (2010) indicam que os autores fazem referência a um outro tipo de representação denominando-a tabular.

### REPRESENTAÇÃO TABULAR

—	—	—
—	—	—
—	—	—
—	—	—
—	—	—
—	—	—



As autoras indicam que as tabelas propiciam aos estudantes transitarem da Aritmética, onde os números são específicos, para a Álgebra, em que as quantidades variam, experienciando variáveis como números que se alteram e observando a variação e relacionando as quantidades.

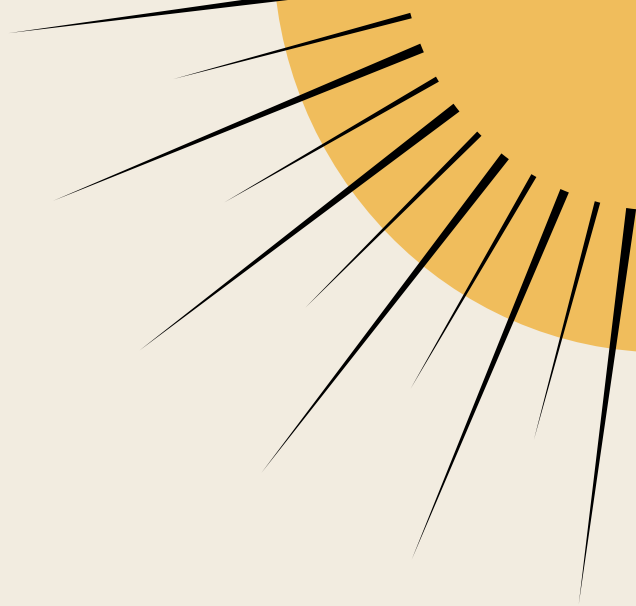




# CONCEPÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Resumidamente, na dissertação apresentamos pesquisas que indicaram fatores para o elevado índice de reprovação e evasão na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, sendo um destes fatores as lacunas advindas da formação da Matemática básica como apresentado por Reis, Resende e Zarpelon (2017).

Também indicamos mudanças internas que vêm ocorrendo na Universidade Tecnológica Federal do Paraná em busca de superar tal evasão e reprovação como a criação de uma disciplina de Pré-Cálculo. Porém, destacamos que como indicado por Andrade, Oliveira e Esquinca (2020), a partir de pesquisas como Rezende (2013) e Noguti (2014), conduzir um curso de Pré-Cálculo por uma abordagem tradicional que prioriza aspectos técnicos pode continuar levando a um movimento cíclico de retenção e evasão.



Desta forma, buscamos conduzir nosso olhar para criação de um material que levasse em conta outros aspectos relacionados a abordagem de um dos conteúdos essenciais dessa disciplina que é o tratamento do tópico de Funções.

Com a finalidade de criar condições para que os estudantes se envolvam a representar e analisar a relação entre quantidades, utilizamos os aparatos teóricos como as Múltiplas Representações e o Pensamento Funcional para vincular os diversos tipos de representações a tarefas que envolvam funções pois, como indicado na dissertação, o uso simultâneo de diferentes representações de uma função pode vir a desempenhar um papel auxiliador aos estudantes no que diz respeito à expressão dos diferentes tipos de Pensamento Funcional. procurando criar uma abordagem menos técnica.



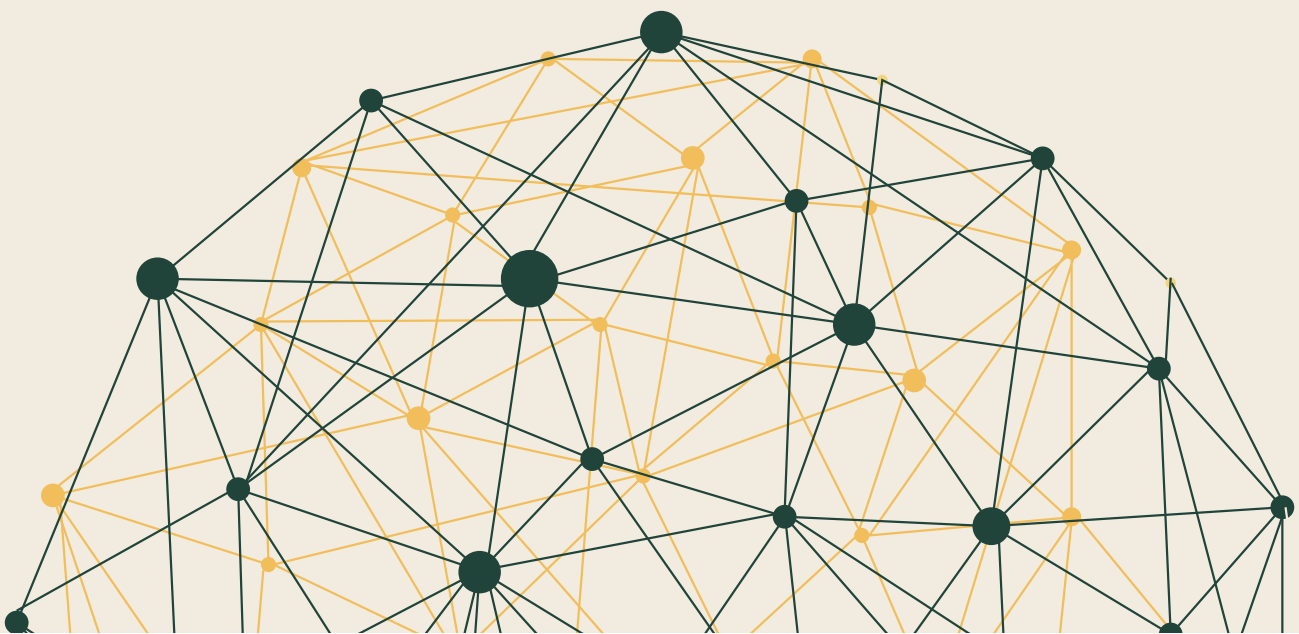
# O PRODUTO EDUCACIONAL

O Produto Educacional foi estabelecido na plataforma Google Sala de aula e é composto basicamente por videoaulas introdutórias, folhas de tarefa e videoaulas de correção.

Dividimos o material em 6 diferentes módulos, sendo que em cada um deles trabalhamos com diferentes conceitos e o uso de diferentes tipos de representações como tabelas, expressões algébricas, gráficos e também applets.

Não pretendemos aqui descrever as folhas de tarefas e os conceitos trabalhados em cada módulo, na dissertação apresentamos um relato mais detalhado.

Na próxima página, apresentamos como educadores e estudantes podem acessar o material e utilizá-lo.



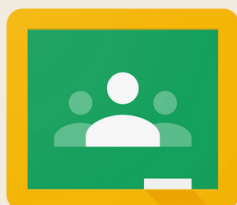


# ACESSO AO PRODUTO EDUCACIONAL



Acesso para estudantes:

Entre na plataforma Google Sala de Aula, clicando no ícone abaixo:



Em seguida, clique no botão + e adicione o seguinte código:

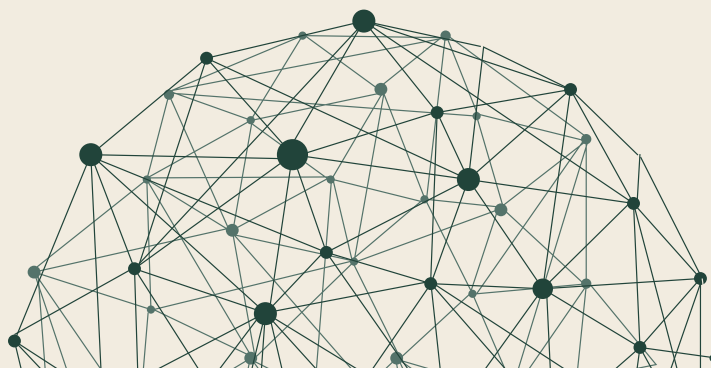
Código da turma: w7ve6ow

Acesso para educadores:

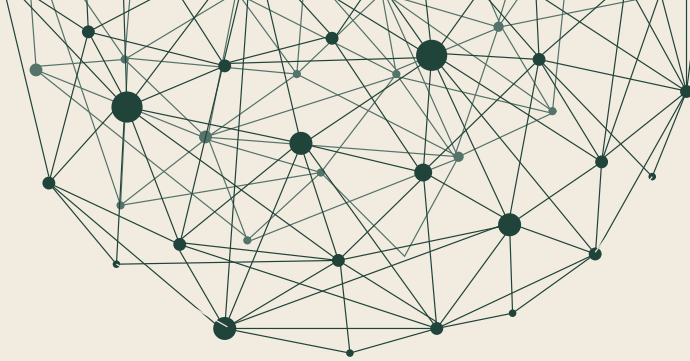
Acesse o ícone abaixo para ser direcionado a uma pasta no Google Drive.



Não se esqueça que você poderá acessar o Google Sala de Aula, apresentado ao lado, para verificar a forma como estruturamos o material.







Para aproveitar melhor seu processo de aprendizagem, realize cada coisa no seu tempo.

Execute primeiro a tarefa e só depois assista a correção.

Este é um passo importante na construção de sua intimidade com o conhecimento.

Esperamos que gostem do material!

Qualquer dúvida, basta encaminhar um e-mail para:

[joaocorreaoliveira@gmail.com](mailto:joaocorreaoliveira@gmail.com)

# REFERÊNCIAS

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Helping Elementary Teachers Build Mathematical Generality Into Curriculum And Instruction. *Zdm - International Journal On Mathematics Education*, V.37, N.1, P.34–42, 2005.

BLANTON, M.; LEVI, L.; CRITES, T.; DOUGHERTY, B. Developing Essential Understanding Of Algebraic Thinking For Teaching Mathematics In Grades 3–5. In: R. M. Zbiek (Series Ed.), *Essential Understanding Series*. Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics, 2011.

GAFANHOTO, A.; CANAVARRO, A. P. Representações Múltiplas De Funções Em Ambiente Com Geogebra: Um Estudo Sobre O Seu Uso Por Alunos De 9.º Ano. In M. H. Martinho, R. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte (Eds.), *Ensino E Aprendizagem Da Álgebra - Anais Do Eiem 2011*, P.125-148. Póvoa De Varzim: Spiem, 2011.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research On Calculus: What Do We Know And Where Do We Need To Go?. *Zdm - International Journal On Mathematics Education*, V.46, N.4, P.507–515, 2014.

SMITH, E. Representational Thinking As A Framework For Introducing Functions In The Elementary Curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carragher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra In The Early Grades*, P.133-160. New York, Ny: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

STEPHENS, A. ET AL. From Recursive Pattern To Correspondence Rule: Developing Students' Abilities To Engage In Functional Thinking. In: *Proceedings Of The 34th Annual Meeting Of The North American Chapter Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education*. Kalamazoo, Mi: Western Michigan University, 2012. Anais [...] Nov 1-4, 2012. Disponível Em:

<[https://www.researchgate.net/publication/304526974\\_from\\_recursive\\_pattern\\_to\\_correspondence\\_rule\\_developing\\_students\\_abilities\\_to\\_engage\\_in\\_functional\\_thinking](https://www.researchgate.net/publication/304526974_from_recursive_pattern_to_correspondence_rule_developing_students_abilities_to_engage_in_functional_thinking)> Acesso Em: 06 Ago. 2020.

ZARPELON, E.; RESENDE, L. M. M.; REIS, E. F. Análise Do Desempenho De Alunos Ingressantes De Engenharia Na Disciplina De Cálculo Diferencial E Integral I. *Interfaces Da Educação*, Paranaíba, V.8, N.22, P.303-335, 2017. Disponível Em: <<https://periodicosonline.uems.br/index.php/interfaces/article/view/1416/1355> >. Acesso Em: 12 De Jul., 2020