

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

RAQUEL FÁTIMA DE OLIVEIRA

A HISTÓRIA DA INVESTIGAÇÃO DOS BURACOS NEGROS

PATO BRANCO

2022

RAQUEL FÁTIMA DE OLIVEIRA

A HISTÓRIA DA INVESTIGAÇÃO DOS BURACOS NEGROS

THE HISTORY OF BLACK HOLES INVESTIGATION

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador(a): Professor Mestre Vanderlei Martins.

PATO BRANCO

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

RAQUEL FÁTIMA DE OLIVEIRA

A HISTÓRIA DA INVESTIGAÇÃO DOS BURACOS NEGROS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 14 de junho de 2022.

Vanderlei Martins (Presidente)
Mestre
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Gilberto Souto
Mestre
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Moisés Aparecido do Nascimento
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

PATO BRANCO

2022

Dedico este trabalho à minha família, em especial aos meus pais Iraide e Geraldo e ao meu namorado Carlos, pelo apoio e auxílio para sua conclusão.

AGRADECIMENTOS

Na trajetória da conclusão deste trabalho, houve tantos momentos complicados e que fizeram-me cogitar a desistir, porém, graças as pessoas que me acompanharam neste percurso, aqui estou eu concluindo mais uma etapa da minha vida.

Agradeço primeiramente aos meus pais e meu namorado, estes que sempre me apoiaram e incentivaram, principalmente nos momentos mais difíceis, auxiliando a vencer este desafio.

Agradeço a Deus pela iluminação e sabedoria em meus estudos, apresentando uma nova visão sobre a vida.

Agradeço também ao meu orientador, o professor mestre Vanderlei Martins, este que sempre esteve me auxiliando com sua sabedoria e apoio. Além disso, o estendo aos professores e a Secretaria do Curso, pela cooperação e auxílio.

Graças a todos e minha força de vontade, concluo em festa mais uma etapa da minha vida.

RESUMO

Dentre as descobertas realizadas na busca do conhecimento através de séculos de estudos, temos um objeto pertencente ao Universo responsável por contradizer muitos desses conhecimentos obtidos. A suposição da existência dos buracos negros advém da teoria da relatividade publicada por Albert Einstein em 1915. Esta teoria consegue descrever o Universo de um modo geral como um tecido quadridimensional chamado espaço-tempo, este que é formado por três dimensões espaciais, largura, altura e profundidade, em conjunto com o tempo. Segundo Einstein (1916) a matéria curva o espaço-tempo, modificando sua trajetória e a de objetos que passam próximo a corpos massivos. Resumidamente, Einstein (1916) conseguiu descrever o comportamento dos planetas, estrelas e inclusive, sua teoria ainda permitia a existência dos buracos negros (ALMEIDA, 2021). Desta forma, usamos como objetivo identificar e explorar alguns dos conhecimentos matemáticos que comumente permeiam os estudos sobre buracos negros na teoria da relatividade geral, para assim responder o questionamento proposto para este estudo, sendo “Como a matemática contribui na comprovação da existência dos buracos negros?”. O presente estudo com caráter exploratório-investigativo preza em sua essência o estágio de desenvolvimento teórico histórico sobre o tema, em foco nas equações matemáticas, e uma possível abordagem a partir da compreensão e resposta sobre a ideia introdutória da composição estrutural dos buracos negros, partindo das formulações teóricas a esse respeito, isso baseado na teoria de Einstein (relatividade geral). A partir das análises realizadas, procuramos melhorar a compreensão sobre o tema abordado, propondo assim, popularizar o assunto e possivelmente despertar o interesse em mais pessoas para contribuir neste estudo significativo, melhorando a compreensão sobre os buracos negros no Universo. O método da pesquisa será exploratório, com objetivo de proporcionar maior familiaridade com as equações matemáticas e a parte introdutória da teoria relacionada ao tema de estudo, visando a compreensão através de pesquisas bibliográficas em artigos científicos e livros sobre o assunto. Por fim, é possível concluir o quão significativo a matemática é para com os estudos teóricos e suposições, a qual, neste caso, demonstrou a existência de um objeto antes mesmo deste ser comprovado visualmente em 2019.

Palavras-chave: Buraco negro; Teoria da Relatividade; Matemática.

ABSTRACT

Among the discoveries made in the search for knowledge through centuries of studies, we have an object belonging to the Universe responsible for contradicting much of this knowledge obtained. The assumption of the existence of black holes comes from the theory of relativity published by Albert Einstein in 1915. This theory manages to describe the Universe in a general way as a four-dimensional fabric called space-time, which is formed by three spatial dimensions, width, height and depth, together with time. According to Einstein (1916), matter curves space-time, modifying its trajectory and that of objects that pass close to massive bodies. Briefly, Einstein (1916) managed to describe the behavior of planets, stars and even his theory still allowed the existence of black holes (ALMEIDA, 2021). In this way, we aim to identify and explore some of the mathematical knowledge that commonly permeates studies on black holes in the theory of general relativity, in order to answer the question proposed for this study, being "How mathematics contributes to proving the existence of black holes"?". The present study with an exploratory-investigative character values in its essence the stage of historical theoretical development on the subject, focusing on the mathematical equations, and a possible approach from the understanding and response to the introductory idea of the structural composition of black holes, starting from of theoretical formulations in this regard, based on Einstein's theory (general relativity). From the analyzes carried out, we seek to improve the understanding of the topic addressed, thus proposing to popularize the subject and possibly arouse the interest of more people to contribute to this significant study, improving the understanding of black holes in the Universe. The research method will be exploratory, with the objective of providing greater familiarity with the mathematical equations and the introductory part of the theory related to the subject of study, aiming at understanding through bibliographic research in scientific articles and books on the subject. Finally, it is possible to conclude how significant mathematics is to theoretical studies and assumptions, which, in this case, demonstrated the existence of an object even before it was visually proven in 2019.

Keywords: Black Hole; Theory of Relativity; Math.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Dois sistemas de coordenadas em movimento relativo uniforme ao longo do eixo x	30
Figura 2: Equações 15.3.	31
Figura 3: Equação 16.2.	32
Figura 4: Efeito da gravidade na distorção do espaço-tempo feito pelo Sol.	41
Figura 5: Sistemas de curvas arbitrárias.	48

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	13
CAPÍTULO 1 - PERCURSO METODOLÓGICO	16
1.1 Questão investigativa.....	16
1.2 Objetivo	16
1.2.1 Objetivo Geral	16
1.2.2 Objetivos Específicos	17
1.3 Justificativa	17
1.4 A natureza investigativa do trabalho	18
CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
2.1 Nascimento dos Buracos Negros – Teoria da Relatividade Geral.....	19
2.2 Primeiras evidências teóricas.....	20
2.3 Primeiras evidências observacionais	21
2.4 Buracos Negros – Aceitação.....	23
2.5 Buracos Negros – Século XX a XXI	25
2.6 Buracos Negros no Universo	26
CAPÍTULO 3 – TEORIA DA RELATIVIDADE	27
3.1 Teoria da Relatividade.....	27
CAPÍTULO 4 – CONCLUSÃO	67
REFERÊNCIAS	69

INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é identificar e explorar alguns dos conhecimentos matemáticos que comumente permeiam os estudos sobre buracos negros na teoria da relatividade geral.

Nesse sentido, esse trabalho pode ser interpretado como associado à matemática aplicada, já que estamos nos propondo a explorar a teoria da relatividade restrita e geral, usando como ferramenta os conhecimentos matemáticos avançados de Cálculo e Geometria.

Esse objetivo associa-se, por exemplo, a evolução das tecnologias, que juntamente com o avanço da Física e da Matemática, forneceram aos humanos uma visão cada vez mais clara referente ao Universo. As leis que o caracterizam são um grande exemplo deste avanço, chamadas de “leis da natureza”, são responsáveis por melhorar a compreensão do Universo.

Dentre as descobertas realizadas na busca do conhecimento através de séculos de estudos, temos um objeto pertencente ao Universo responsável por contradizer muitos desses conhecimentos obtidos. A suposição da existência dos buracos negros advém da teoria da relatividade publicada por Albert Einstein em 1915. Esta teoria consegue descrever o Universo de um modo geral como um tecido quadrimensional chamado espaço-tempo, este que é formado por três dimensões espaciais, largura, altura e profundidade, em conjunto com o tempo. Segundo Einstein a matéria curva o espaço-tempo, modificando sua trajetória e a de objetos que passam próximo a corpos massivos. Resumidamente, Einstein conseguiu descrever o comportamento dos planetas, estrelas e inclusive, sua teoria ainda permitia a existência dos buracos negros (ALMEIDA, 2021).

O estudo dos buracos negros é decorrente a mais de 100 anos de pesquisas e é marcado por várias controvérsias e avanços impressionantes, porém uma das justificativas das discordâncias sobre sua existência é decorrente ao fato de Albert Einstein, este responsável por conseguir prever sua existência sem intenção, descartar esta possibilidade, afirmando que tais objetos não seriam possíveis dentro das leis da natureza que conhecemos. Apesar da posição de Einstein retardar em parte o desenvolvimento desta ideia na comunidade científica, a comprovação de sua existência no ano de 2019 é a prova que o assunto não foi esquecido (ALMEIDA, 2021).

Embora, esta contradição tenha sido feita logo ao início desses estudos, muitos estudiosos não acreditaram e procuraram provar sua presença no Universo. Assim, surge a solução Schwarzschild obtida no ano de 1916 por Karl Schwarzschild, mostrando que em certos pontos a teoria da Relatividade não é válida (chamado de singularidade), ou seja, é possível a existência de objetos no espaço-tempo que não respeitam as leis da natureza, provando de certo

modo, a existência de buracos negros a partir da teoria de Einstein. Outra teoria marcante nestes estudos, foi a teoria da singularidade e seus teoremas elaborada por Roger Penrose e Stephen Hawking em 1970, responsável por descrever singularidades. Fazendo Penrose conquistar assim, o reconhecimento em 2020 do comitê do Prêmio Nobel de Física (ALMEIDA, 2021).

Podemos definir um buraco negro conforme disposto no site oficial da NASA, como um “objeto astronômico com uma atração gravitacional tão forte que nada, nem mesmo a luz, pode escapar dele. A “superfície” de um buraco negro, chamada de horizonte de eventos, define o limite onde a velocidade necessária para escapar excede a velocidade da luz, que é o limite de velocidade do cosmos. A matéria e a radiação entram, mas não conseguem sair.”. Logo, muitos cientistas acreditam que entender este objeto é necessário para podermos entender o Universo e sua criação, afinal, dentro do que conhecemos até o momento, este pode ser o “fim de tudo” ou seu “início” (GARNER, 2020).

Até o momento conhecemos dois tipos de buracos negros, os de massa estelar e os supermassivos. Os buracos negros de massa estelar são constituídos de três a dezenas de vezes a massa do Sol e estão espalhados pelo Universo, inclusive na nossa galáxia (a Via-Láctea). São formados como resultado do esgotamento de combustível nuclear de uma estrela com mais de 20 massas solares, o que a faz entrar em colapso e ruindo sobre seu próprio peso. Esse colapso desencadeia uma explosão supernova responsável por explodir as camadas externas da estrela. O núcleo triturado resultante desta explosão contém mais que três vezes a massa do Sol, a pressão enorme da gravidade faz com que esta estrela se transforme em um buraco negro. Já os buracos negros supermassivos, são os maiores que dispomos de conhecimento, compostos por 100.000 bilhões de massas solares, a princípio, pertencem ao centro da maioria das grandes galáxias, isso também incluindo a que vivemos, sendo sua origem ainda mal compreendida. (GARNER, 2020).

Com fins de estudar este objeto enigmático do Universo, o presente trabalho de conclusão de curso terá como enfoque o estudo da teoria da relatividade geral de Albert Einstein, procurando compreender as equações matemáticas envolvidas. A proposta é ampliar os estudos considerados no curso de Licenciatura em Matemática, em específico a importância da matemática em vários campos das ciências, dentre estas a Astronomia. Dessa forma, esse estudo dispõe como motivação uma ampliação dos conhecimentos que dispomos em outras áreas de estudo presentes na sociedade, isso para demonstrar a importância da matemática detrás de conhecimentos e aquisições decorrentes dos buracos negros, assim, mostrando que a comunidade matemática é essencial em pesquisas deste estilo, mesmo que seu foco não seja referente a mesma em específico.

A Matemática tem se construído ao longo da história como um dos principais itens para compreensão do mundo, assim, estaremos analisando a descoberta dos buracos negros, que se compôs com o auxílio da matemática.

Este trabalho será apresentado em 4 capítulos. O primeiro capítulo será referente ao percurso metodológico, constituindo-se pela questão investigativa que norteou este trabalho, os objetivos e a justificativa para a sua realização e por fim, sua natureza investigativa. No segundo capítulo referente a fundamentação teórica, apresentamos um conceito teórico sobre os buracos negros e a teoria da relatividade a ser explorada, assim, em específico, o capítulo é apresentado na sequência do “nascimento dos buracos negros – teoria da relatividade geral”, as “primeiras evidências teóricas”, “primeiras evidências observacionais”, “buracos negros-aceitação”, “existem buracos negros?” e “buracos negros no Universo”. No terceiro capítulo denotado como relatividade, apresentamos uma conceituação sobre a Relatividade Restrita e uma introdução a Relatividade Geral. E por fim, no último capítulo temos a conclusão deste estudo.

CAPÍTULO 1 - PERCURSO METODOLÓGICO

Nesse capítulo se apresenta a questão investigativa que norteou este trabalho, os objetivos, a justificativa para a sua realização e pôr fim a natureza investigativa do trabalho.

1.1 Questão investigativa

A comprovação da existência dos buracos negros em 2019 a partir da imagem obtida pelo projeto Event Horizon Telescope (EHT), provocou na comunidade científica vários questionamentos e problemas a serem analisados, em especial as equações que determinavam seu comportamento e estrutura. A imagem do buraco negro gerou conseqüentemente mais dúvidas e esperanças para compreender melhor este objeto e o Universo. É significativo ressaltar, que a imagem mostra o que chamados de “horizonte de eventos”, ou seja, o clarão exibido é a linha tênue destes seres, que é responsável por aprisionar qualquer tipo de matéria não havendo escape, sendo seu destino final a singularidade (o centro). A imagem foi retirada do buraco negro mais supermassivo conhecido presente no centro da galáxia M87 “engolindo” uma estrela, tendo a luz refletida relacionada ao horizonte de eventos. O centro da M87 fica a 55 milhões de anos-luz da Terra e tem uma massa de 6,5 bilhões de vezes a massa do Sol (o buraco negro supermassivo presente no centro desta galáxia) (GARNER, 2020).

Desconstruir a ideia de que “as leis da natureza não são capazes de criá-los” disposta por Albert Einstein, gerou um novo desafio aos pesquisadores da área. Afinal, o que ocorre dentro de um buraco negro? Seria a singularidade? Qual seu objetivo no Universo? São objetos que criam matéria nova ou acabam com sua essência? Seu objetivo no centro das galáxias é determinante para sua criação e preservação? Deixa de existir ou transforma? Entre outras. São estas questões que moveram a pesquisa com base no tema.

Uma das teorias mais popularizadas e determinantes para a presença destes objetos com olhar matemático e físico é a teoria da relatividade geral de Albert Einstein. Partindo disto, o presente estudo procura entender como as visões matemáticas exploradas na teoria da relatividade geral, concluíram uma possível existência destes objetos enigmáticos chamados buracos negros.

Por fim, neste trabalho se estará respondendo ao questionamento “Como a matemática contribui na comprovação da existência dos buracos negros?”.

1.2 Objetivo

1.2.1 Objetivo Geral

Identificar alguns dos conceitos matemáticos que comumente permeiam os estudos sobre buracos negros na teoria da relatividade geral.

1.2.2 Objetivos Específicos

Apresentar uma noção da teoria da relatividade geral, visando sua relação com os buracos negros.

1.3 Justificativa

Historicamente as equações de Einstein geraram muito conflito pelo fato de serem extremamente difíceis de manipulá-las. Em 1916 com a solução de Karl Schwarzschild se avançou fisicamente na melhor compreensão de como um objeto compacto esféricamente simétrico se comporta, descobrindo assim a formação estrutural do que chamamos de buracos negros. A solução de Schwarzschild conseguiu prever que os buracos negros detinham em sua estrutura uma singularidade presente no centro, onde literalmente o espaço-tempo termina, juntamente ao que chamamos de horizonte de eventos (ALMEIDA, 2021).

Contudo, mesmo que sua teoria cogitasse a existência de buracos negros, como demonstrado pela solução de Schwarzschild, Albert Einstein a negou acreditando que aceitar a existência de buracos negros seria aceitar que no seu interior haveria uma singularidade na qual todas as leis da natureza que conhecíamos deixariam de ter validade, o que impediu por um tempo o avanço destes estudos pela comunidade científica (ALMEIDA, 2021).

Em 10 de abril de 2019 a comunidade científica marca uma nova conquista nestes estudos, com a comprovação da existência de buracos negros através de uma foto pelo projeto Event Horizon Telescope (EHT), o que gerou novas esperanças para procurar responder os questionamentos ainda sem solução sobre estes objetos misteriosos.

Em síntese da base histórica relatada, embora breve, já se totaliza cerca de 100 anos de estudos científicos sobre o assunto. Observa-se que tais avanços científicos referentes a este tema de estudo ainda estão no início de uma grande trajetória, pois, ao confirmar a existência dos buracos negros, nos fornece uma melhor compreensão sobre o que realmente ocorre no Universo (ALMEIDA, 2021).

O presente estudo com caráter exploratório-investigativo preza em sua essência o estágio de desenvolvimento teórico histórico sobre o tema.

Em síntese dos questionamentos citados, o presente estudo procura melhorar a compreensão sobre o tema abordado, propondo popularizar o assunto e possivelmente despertando o interesse em mais pessoas para contribuir no estudo significativo para a

compreensão dos buracos negros no Universo. Assim, em consequência, demonstrando a importância da Matemática para o desenvolvimento desses estudos.

1.4 A natureza investigativa do trabalho

O presente estudo é de caráter qualitativo, tendo como princípio conhecer e explorar a teoria da relatividade utilizada para mostrar a existência de buracos negros. O método da pesquisa será exploratório, com objetivo de proporcionar maior familiaridade com as equações matemáticas e a parte introdutória da teoria relacionada ao tema de estudo, visando a compreensão através de pesquisas bibliográficas em artigos científicos e livros sobre o assunto.

CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo se apresenta a fundamentação teórica sobre o tema, a qual é dividida nos tópicos denotados como “Nascimento dos Buracos Negros – Teoria da Relatividade Geral”, “Primeiras evidências teóricas”, “Primeiras evidências observacionais”, “Buracos Negros – Aceitação”, “Buracos Negros – Século XX a XXI” e “Buracos Negros no Universo”.

2.1 Nascimento dos Buracos Negros – Teoria da Relatividade Geral

O nascimento do estudo de buracos negros decorre do século XVIII, marcado por várias evoluções no campo da ciência, ainda que de forma lenta. O primeiro relato referente ao tema foi disposto pelo filósofo John Michell no final do século XVIII, sugerindo o termo “estrelas negras” (ALMEIDA, 2021).

Sabendo que a luz tem uma velocidade finita c , ele calculou, usando a mecânica newtoniana, qual seria a massa limite que uma estrela deveria ter para que a velocidade de escape dela, ou seja, a velocidade necessária para fugir de seu campo gravitacional, fosse maior do que c . Numa estrela com massa maior do que este limite, a luz ficaria aprisionada em sua atmosfera, justificando o seu nome. (ALMEIDA, 2021, p. 93).

No ano de 1905 foi publicada pelo físico Albert Einstein, a chamada Teoria da Relatividade Restrita, esta que através de adaptações das equações de Newton, conseguiu demonstrar que o espaço e o tempo dependem do observador. Após 10 anos, publicou sua segunda teoria, a Teoria da Relatividade Geral, sendo uma adaptação da Teoria da Relatividade Restrita para o fato dos observadores (corpos) estarem em movimento. Surpreendentemente, anos depois desta publicação, tanto para Einstein quanto para a comunidade científica, a Teoria da Relatividade Geral conseguiria ser usada na ideia da possível existência de buracos negros no Universo (ALMEIDA, 2021).

A ideia da Teoria da Relatividade Geral consiste em relacionar referenciais acelerados no espaço-tempo, ajudando a compreender de uma melhor forma o comportamento da gravidade, afinal, a força da gravidade também funciona como um referencial acelerado (ALMEIDA, 2021).

Com efeito desta teoria, se consegue obter uma teoria da gravitação, que de forma resumida, explica como a gravidade pode afetar ondas, e conseqüentemente afetando também a luz (ALMEIDA, 2021).

Em relação a Teoria da Relatividade Geral, o físico alemão Karl Schwarzschild cita que:

A solução de Schwarzschild, como ficou conhecida, descreve o campo gravitacional de uma partícula pontual massiva (sem carga e sem rotação) e apresenta em sua formulação duas singularidades: uma na origem do sistema de coordenadas, onde a massa se concentraria, e uma radial, o raio de Schwarzschild, que na época acreditava-se delimitar uma região para qual a solução não mais seria válida. [...] Como foi inicialmente idealizada, a solução de Schwarzschild está escrita nas coordenadas de um observador distante. Alguém afastado da origem que observa uma partícula em trajetória radial em direção ao centro percebe que esta demoraria um tempo infinito para atingir o raio de Schwarzschild, nunca cruzando-o (ALMEIDA, 2021, p. 2).

Após muitos físicos estudarem a solução de Schwarzschild, e o raio de Schwarzschild, sobre o que ocorreria caso o raio fosse menor do que o proposto pelas equações? A resposta obtida relata que resultaria em uma densidade superior, maior do que a observada até aquele momento, ou seja, seria possível a existência de objetos mais densos que as conhecidas estrelas anãs brancas, consideradas os objetos mais massivos do espaço neste período histórico (ALMEIDA, 2021).

Em contraposição com as ideias que surgiram nesta época, os conhecimentos existentes não permitiam um grande avanço destes estudos, principalmente na compreensão de objetos mais densos (ALMEIDA, 2021).

2.2 Primeiras evidências teóricas

Em 1930 surgiram os estudos relacionados a estrelas colapsadas, o que seriam as primeiras previsões de como ocorre o surgimento de buracos negros, mesmo que na época não houvesse este intuito. Afinal, nesse momento histórico, os estudiosos estavam tentando compreender como seria o surgimento e a existência de estrelas mais densas que as anãs brancas (ALMEIDA, 2021).

De modo geral, a teoria de estrelas colapsadas previa que após a morte de uma estrela superdensa, a mesma colapsaria sob seu próprio peso, contraindo-se além do Raio de Schwarzschild (ALMEIDA, 2021).

Em contrapartida, apesar da teoria ter boas argumentações e ser aceita por alguns físicos, grande parte da comunidade científica não acreditava que seria plausível sua existência.

Em 1926 Arthur S. Eddington, um importante astrofísico da época, argumentou sobre suas visões relacionadas à Teoria da Relatividade Geral e sobre estrelas colapsadas:

É bem interessante observar o que a teoria da gravitação de Einstein diz sobre esse ponto. De acordo com ela, uma estrela de 250 milhões de quilômetros de raio não poderia ter uma densidade como a do Sol. Primeiro porque a força gravitacional seria tão grande que a luz seria incapaz de escapar dela, os raios cair

iam de volta assim como uma pedra cai na Terra, a massa produziria tanta curvatura que o espaço-tempo se fecharia ao redor da estrela, nos deixando do lado de fora (isto é, em lugar nenhum) [...] ao considerar um mundo cuja existência se dá à parte de medições e do que fazemos com elas, eu estava ultrapassando os limites do que chamamos de realidade física. Eu não vou desviar da visão de que uma ideia que pela sua própria natureza não pode ser medida não tem o direito a uma existência física [...] (ALMEIDA, 2021, p. 96).

De certa forma, Eddington acreditava que estrelas supermassivas colapsariam sob seu próprio peso, a menos que houvesse algo na natureza que previna este acontecimento, e para ele, isso não seria plausível (não aconteceria). A pesquisa publicada por Hartland Snyder em 1934, acreditando que “estrelas supermassivas, com massas superiores as das estrelas de nêutrons, se contrairiam indefinidamente e em tempo finito até um ponto, prevendo a existência de objetos completamente colapsados pela gravidade.” (ALMEIDA, 2021, p.96). Sendo um passo para provar que a existência destes fenômenos era real.

O físico Albert Einstein se posicionou contra estrelas colapsadas, pois segundo ele “o colapso gravitacional – e, portanto, o aparecimento de singularidades na solução de Schwarzschild – era impossível.” (ALMEIDA, 2021, p. 97).

2.3 Primeiras evidências observacionais

Ainda no século XX surge e se populariza a mecânica quântica (MQ), responsável por descrever o mundo das partículas subatômicas. Um dos seus efeitos foi descredibilizar a Teoria da Relatividade Geral, isto principalmente pela questão de o campo de visão ser mais “fácil” de se observar e desenvolver ideias, em oposição as equações complicadas dispostas por Einstein em sua teoria. Da mecânica quântica obteve-se como contribuição aos estudos das estrelas colapsadas que “sem evidências observacionais e argumentando que as forças nucleares contrabalanceariam a força gravitacional, concluiu-se que as estrelas permaneceriam em equilíbrio hidrodinâmico, nunca colapsando.” (ALMEIDA, 2021, p. 96).

Todavia, entre os anos de 1939 e 1945 com o acontecimento da Segunda Guerra Mundial, houve um cessamento das pesquisas na física, em particular na astrofísica, astronomia, cosmologia e gravitação, ficando com foco no que era de interesse naquele momento, ou seja, a física nuclear para elaboração de bombas atômicas principalmente.

Somente após o fim da guerra, com as contribuições militares americanas em pesquisas físicas como do mecanismo de fusão nuclear, o qual possibilitou a compreensão do interior das estrelas, em particular, os processos de fusão e elementos que fariam parte da sua composição.

Assim, 1950 torna-se o auge da Teoria da Relatividade Geral, afinal, os governos investiram dinheiro na formação dos pesquisadores, para que conseqüentemente suas pesquisas evoluíssem, criando uma comunidade científica mais bem preparada para poder explorar e compreender o Universo. Outro estudo que também voltou a ter relevância, foi a de objetos gravitacionalmente colapsados, surgindo assim questionamentos referentes a se realmente era plausível a possibilidade de tais fenômenos no Universo, e como funcionariam os mecanismos físicos ainda desconhecidos no interior destas estrelas, o que contrabalanceariam as forças gravitacionais destas (ALMEIDA, 2021).

Em 1958, através do físico David Finkelstein se obteve a compreensão correta do Raio de Schwarzschild, segundo seu trabalho:

[...]a interpretação correta da esfera de raio $r = r_s$ como uma espécie de membrana unidirecional que só permitirá o cruzamento de trajetórias físicas, incluindo as da luz, de fora para dentro. Quer dizer, a esfera de raio r_s funciona como uma espécie de fronteira entre duas regiões, sendo a região externa completamente desconectada do interior, sem qualquer possibilidade de comunicação de dentro para fora. Nascia assim o conceito de “horizonte de eventos”, que de fato é o que distingue e define um buraco negro. (SAA, 2016, p. e4201-10).

Através deste trabalho, os pesquisadores conseguiram observar o Raio de Schwarzschild de outra forma, fazendo com que o estudo de estrelas colapsadas tivesse mérito e fosse plausível (SAA, 2016).

Em 1968 a descoberta pelos estudiosos Antony Hewish e Jocelyn Bell, de um objeto superdenso chamado de pulsar, ao qual segundo os pesquisadores:

[...] se percebeu que eram estrelas de nêutrons girando em torno de seu eixo muitas vezes por segundo... e estavam associadas a restos de supernovas – confirmando as duas previsões de Zwicky. Estrelas de nêutrons são muito mais densas do que anãs brancas; sua densidade média é de 10 trilhões de vezes a densidade da água. Uma estrela de nêutrons tem um raio típico de 10 km e uma massa equivalente à do Sol. Portanto uma estrela de nêutrons tem um raio apenas 3 vezes maior do que seria o seu raio de Schwarzschild. (STEINER, 2019, p. 6).

Outra descoberta decorrente destes estudos foi em 1960, realizada pelos estudiosos Alan Sandage e Thomas Mathews, que ao analisar a contrapartida óptica de rádio-fontes, perceberam que estes objetos tinham aparência estelar ou quase-estelar. Os quasares (como são chamados), tem sua fonte quase-estelar composta por rádio, ocasionando a imissão de ondas de

rádio em geral, sendo próximas a de outras estrelas, mas com uma densidade muito maior (STEINER, 2019).

Com a descoberta destes objetos superdensos, a ideia de estrelas colapsadas tornou-se um estudo essencial, afinal, conseguiram provar a existência de objetos que desafiavam a física que se conhecia neste momento (STEINER, 2019).

2.4 Buracos Negros – Aceitação

Com efeito da aceitação de objetos no Universo mais densos que as estrelas anãs brancas, sendo possivelmente a sua formação provida através do colapso gravitacional desta estrela, novos questionamentos surgiram entre os estudiosos, dentre estes, quais são objetos colapsados?

Em 1963 a partir da Solução de Kerr elaborada pelo matemático Roy Kerr, apresentou-se uma conjectura para os objetos quando colapsados, estes sendo descritos com uma composição de massa, carga e momento angular. Essa conjectura foi batizada por John Wheeler como Teorema No-hair, afinal, segundo Wheeler “um buraco negro não tem cabelo, ou seja, não possui outras características que os distinguem” (ALMEIDA, 2021, p. 99).

Outras pesquisas apareceram nesta época desvendando questões como o colapso gravitacional, porém, em casos no qual ocorria o desvio de simetria esférica, o que partindo desta ideia, haveria a provável ocorrência de uma singularidade após esse colapso. Ambas as pesquisas são estudos publicados pelo físico-matemático Roger Penrose juntamente com o físico Stephen Hawking, através da Teoria da Singularidade, no ano de 1970 (ALMEIDA, 2021).

O termo buraco negro, foi uma criação do físico John Wheeler em 1967, sendo seu objetivo caracterizar objetos completamente gravitacionalmente colapsados. Disto, temos que um buraco negro é uma composição do horizonte de eventos responsável por não permitir nenhum objeto (nem mesmo a luz) escapar, em conjunto com o centro escuro, a singularidade (ALMEIDA, 2021).

Uma das descobertas providas por Roger Penrose em 1969, revolucionaria a física moderna que conhecemos. Sua suposição desenvolve-se que a partir de:

[...] um mecanismo de extração de energia de um buraco negro em rotação que ficou conhecido como o Processo de Penrose e que foi um passo necessário para a formulação da termodinâmica dos buracos negros na década seguinte. (ALMEIDA, 2021, P. 99).

O processo elaborado por Penrose designava que:

[...] na aceleração de uma partícula em fuga da vizinhança de um buraco negro devido a rotação deste, retardando-o no processo. Em outras palavras, tal partícula “rouba” energia rotacional do buraco negro de Kerr para fugir para o infinito. (ALMEIDA, 2021, p. 100).

Em virtude dos questionamentos resultantes desta ideia, vários físicos e estudiosos tentaram entender como seria o comportamento de uma partícula ao adentrar em um buraco negro. Disso, surge a famosa teoria da radiação de Hawking elaborada pelo físico Stephen Hawking, sendo está uma evidência que faltava na teoria da termodinâmica dos buracos negros (ALMEIDA, 2021).

A radiação de Hawking, foi elaborada a partir de uma crítica feita pelo próprio Hawking ao pesquisador Bekenstein, que sugeriu:

[...] que buracos negros seriam entidades com propriedades termodinâmicas, com uma entropia bem definida proporcional a essa massa irreduzível, ou seja, se buracos negros tivessem realmente uma entropia bem definida, como afirmava Bekenstein, eles deveriam ter também uma temperatura bem definida, o que significa que eles deveriam irradiar. (ALMEIDA, 2021, p. 100).

Através dos cálculos tentando se posicionar contra a ideia de Bekenstein, Stephen Hawking além de provar a veracidade da teoria de Bekenstein, criou a radiação de Hawking.

A radiação de Hawking acontece por causa da flutuação quântica do vácuo próximo ao horizonte de eventos do buraco negro. Hawking calculou o número de partículas que eram criadas e emitidas para o infinito nessa região e percebeu que era maior do que o número de partículas absorvidas pelo buraco negro. Esse descompasso é chamado de radiação de Hawking e ela determina a temperatura do buraco negro, a mesma esperada para um corpo negro. (ALMEIDA, 2021, p. 101).

O físico Stephen Hawking ainda acreditava por meio da sua teoria, na evaporação de buracos negros, ou seja, a partir de um certo período de tempo indeterminado, mas provavelmente grande, os buracos negros acabariam evaporando. Evidências deste fenômeno são descritas por Penrose em sua teoria Conformal Cyclic Cosmology (cosmologia cíclica). A teoria basicamente consiste que o Universo interage com ciclos infinitos, sendo que cada ciclo tem um novo Big Bang, ou melhor, a cada interação o Universo termina e começa de novo com

um novo Big Bang. A evidência que Penrose usou foi o próprio mapa da CMB (traduzido do inglês significa Radiação Cósmica de Fundo), demonstrando que no mapa de radiação cósmica de fundo, seria possível identificar anomalias com formato de círculos concêntricos, e essas anomalias seriam responsáveis por provar a existência de um Universo anterior. As anomalias recebem o nome de ponto Hawking, isso em homenagem ao físico Stephen Hawking por causa da teoria da radiação Hawking. Logo, essas anomalias seriam na verdade a evaporação de buracos negros supermassivos de uma era anterior (de um ciclo anterior), deixando marcas impressas no nosso Universo atual, demonstrando que estamos em um ciclo, portanto, comprovando a ciclicidade do Universo (ALMEIDA, 2021).

Apesar desta última citação não ser o enfoque deste trabalho, observe que estudar buracos negros se torna a cada avanço em suas pesquisas, mais intrigante e essencial, afinal, podem até mesmo ser a evidência da origem do Universo (ALMEIDA, 2021).

2.5 Buracos Negros – Século XX a XXI

O período do final do século XX até o início do século XXI, é composto por vários avanços nas ciências e tecnologias, dentre estes podemos citar usando a ideia de buracos negros a detecção das ondas gravitacionais e, a imagem de um buraco negro (ALMEIDA, 2021).

Em dezembro de 2015 provou-se a existência de ondas gravitacionais, ideia proposta por Albert Einstein em sua teoria da Relatividade Geral em 1915. Apesar de captada em 2015 pela equipe Ligo nos Estados Unidos e Virgo na Itália através de ondas gravitacionais, a colisão ocorreu a mais de 7 bilhões de anos entre um buraco negro com 66 massas solares e outro de 85 massas solares, que ao se fundirem formaram um novo objeto cósmico não registrado até o momento, o que seria possivelmente um buraco negro intermediário, com densidade de aproximadamente 142 massas solares. Essa visualização pode ser realizada por se tratarem de buracos negros, objetos superdensos que resultam em uma distorção no espaço-tempo. Deste modo, até a colisão de ambos, pode-se observar nitidamente as ondas gravitacionais que surgiam devido a aproximação destes objetos superdensos, afinal, a gravidade presente neles seria tão absurda, ao ponto de movimentar uma grande parte do tecido que caracteriza o espaço, sendo possível captar as ondas gravitacionais por meio das tecnologias minuciosas dispostas pelos cientistas. Para compreender melhor este fato, a teoria de Einstein prevê que os objetos detêm uma certa gravidade no espaço e tempo (tipo um peso), sendo responsável por afetar a gravidade de outros objetos perto ou distantes deste. Como por exemplo o Sol, que através da sua gravidade afeta a órbita dos planetas, fazendo com que girem em torno dele. Nesta mesma

perspectiva, temos a lua que gira em torno da Terra, pois, como todos os objetos tem uma certa gravidade, os planetas também a têm (ALMEIDA, 2021).

2.6 Buracos Negros no Universo

Na composição das estrelas, há dois tipos de forças que atuam em conjunto para seu equilíbrio. Denotamos estas forças como, a força gravítica (aponta as forças para o centro da estrela) e a de pressão (exercida através da energia liberada pelas reações nucleares que ocorrem no interior da estrela, esta força é disposta do centro para fora). Porém, chega um certo momento em que se cessam as reações nucleares, fazendo com que a estrela comece a colapsar, sendo seu destino final uma consequência resultante da quantidade de massa presente em sua composição (FILHO e SARAIVA, s.d).

Estrelas com massas superiores a 8 massas solares, ao colapsarem reagem explodindo através de uma supernova. O interessante é que um dos questionamentos relacionados aos buracos negros resulta se são sementes do espaço ou cemitérios. Incrivelmente a explosão da supernova, em particular as nuvens de gás decorrentes deste processo, são responsáveis pelo nascimento de novas estrelas (FILHO e SARAIVA, s.d).

Em síntese da explosão da supernova, podemos dispor de duas situações com base no núcleo da estrela, ou seja, se o núcleo da estrela colapsa completamente pode dar origem a uma estrela de nêutrons, mas, caso a massa seja ainda suficiente, o colapso continua, e cria-se um buraco negro (GARNER, 2020).

Existem dois tipos de buracos negros conhecidos no Universo. Os estelares compostos entre 5 e 30 massas solares, espalhados por todo o espaço, incluindo a nossa galáxia (a Via-Láctea), dos quais se supõem que haja cerca de 10 milhões no total, mas, conhecemos apenas 25 destes objetos. E os supermassivos, dos quais existem evidências observacionais que apontam para a sua presença no centro das galáxias, sendo sua massa correspondente ou superior a 1 milhão de massas solares (GARNER, 2020).

Havendo ainda a especulação de um possível terceiro tipo, os de massa intermediária. Todavia, tem poucos candidatos a representá-los. Eles (os de massa intermediária) possivelmente seriam presentes no centro de enxames fechados ou de galáxias, porém, não se tem comprovado seu surgimento. Uma possível ideia deste surgimento seria a partir de buracos negros estelares (GARNER, 2020).

CAPÍTULO 3 – TEORIA DA RELATIVIDADE

Neste capítulo será apresentada a Teoria da Relatividade elaborada pelo físico Albert Einstein. Será desenvolvido em uma única seção os dois tópicos principais sobre o assunto, sendo a Teoria da Relatividade Restrita (como conceituação) e a Teoria da Relatividade Geral (de forma introdutória).

3.1 Teoria da Relatividade

Este tópico aborda a Teoria da Relatividade intuitivamente, prezando os conceitos matemáticos presentes. Começaremos conceituando a Teoria da Relatividade Restrita usando o livro “Lições de Física: The Feynman Lectures on Physics” (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008) e o artigo “Análise da história da Teoria da Relatividade Restrita em livros didáticos do terceiro ano do ensino médio indicados no PNLEM 2015/2017” (SILVA; ERROBIDART; ALVEZ; QUEIRÓS, 2019). Na sequência introduziremos o assunto Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, com base no livro “Relativity: The Special and General Theory” (EINSTEIN, 1916), tendo como propósito, uma melhor compreensão a este tópico, o relacionando com estudos matemáticos utilizados em sua conceituação.

Acreditava-se que das equações geradas pelas Leis de Newton enunciadas por Newton, se poderia descrever corretamente a natureza. Newton foi o responsável por introduzir pela primeira vez a ideia da Relatividade através de um corolário das Leis de Newton, onde “Os movimentos de corpos em um dado espaço são os mesmos entre si, caso esse espaço esteja em repouso ou se movendo uniformemente em linha reta” (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008, p.169). Ou seja, por exemplo:

[...] se uma nave espacial está se movendo com uma velocidade uniforme, todas as experiências realizadas e todos os fenômenos nessa nave vão parecer os mesmos como se a nave não estivesse se movendo, desde que, é claro, ninguém olhe para fora. (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008, p.169).

Sendo uma ideia simples para o princípio da relatividade, restando a nós o questionamento que se a afirmação é realmente verdadeira perante todos os experimentos realizados dentro de um sistema em movimento, então as leis físicas realmente aparecerão em análogo a um sistema parado? Em síntese deste questionamento, surge a necessidade de pesquisas em relação a sua aplicação, tendo por objetivo a confirmação do significado sobre relatividade através de experiências. Assim, em 1905, após 200 anos de aceitação da afirmação inicial sobre estas equações de Newton em relação ao movimento, Albert Einstein as contesta

usando a sua Teoria da Relatividade (no sentido restrito), descobrindo um erro nessas leis e também apresentando como o corrigir. Em suma, pela segunda lei de Newton (referente ao princípio fundamental da dinâmica, afirma que ao estabelecer uma aceleração adquirida a um corpo é diretamente proporcional a resultante das forças que agem sobre este corpo (DIAS, 2019)) temos (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008):

$$F = \frac{d(mv)}{dt}, \quad (1)$$

sendo m correspondente a massa do corpo, e segundo a lei, esta seria uma constante, $d(mv)$ a variação da quantidade de movimento, e dt o intervalo de tempo. Todavia, pela correção de Einstein, isso não seria verdade, pois, a massa de um corpo aumenta com a velocidade, logo, a fórmula modificou-se tendo m o valor (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008),

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2)$$

Desta forma o que chamamos de “massa de repouso” denotado por m_0 , representa a massa de um corpo que não está se movendo, já c é a velocidade da luz que está em cerca de $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ou $10,8 \times 10^8 \text{ km/h}$, e v seria a velocidade dos corpos envolvidos. Por fim, teríamos como a representação da modificação de Einstein perante as leis de Newton, levando em consideração a equação (1) e (2) (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008):

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

E partindo disso:

Sob essa modificação, se ação e reação continuarem iguais (o que podem não ser no detalhe, mas são a longo prazo), existirá conservação do momento da mesma forma que antes, mas a quantidade que está sendo conservada não é o antigo mv com sua massa constante, mas sim a quantidade mostrada em (3) que possui a massa modificada. Quando esta mudança é feita na fórmula do momento, a conservação do momento ainda funciona. (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008, p. 177).

Observe que se na modificação feita por Einstein, a ação e reação continuarem iguais, implica que existe conservação do momento da mesma forma que antes, porém, a quantidade que está sendo conservada não é o antigo mv , este com a massa constante, mas a quantidade transformada (a qual se pode identificar na fórmula (3)), que possui a massa modificada. Observe que a mudança é feita na fórmula (3) do momento, e a conservação do momento ainda funciona (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008). Porém, na mecânica newtoniana temos que o mv é proporcional à velocidade e, conforme a fórmula dada acima para p , para uma faixa

considerável de velocidades, pequenas se comparadas a c (velocidade da luz), ou seja, seria quase igual na mecânica relativística (equação 3), pois a expressão da raiz quadrada difere apenas ligeiramente de 1. Mas quando v (velocidade dos corpos envolvidos) é quase igual a c (velocidade da luz), a expressão da raiz quadrada $\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$ se aproxima de zero e o momento (mv), portanto, tende ao infinito. Ainda sobre a mecânica newtoniana, temos que o corpo vai adquirindo velocidade conforme a movimentação está ocorrendo e isso até a ultrapassar a velocidade da luz, porém, isto não é possível na mecânica relativística (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008). Em suma, na relatividade:

[...] o corpo vai ganhando não velocidade, mas momento, que pode aumentar continuamente, porque a massa está aumentando. Após algum tempo, praticamente não existe aceleração no sentido de uma mudança na velocidade, mas o momento continua aumentando. (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS. 2008, p.177).

Desta forma, em sua fórmula tentou expressar o aumento da massa a partir do caso em que a velocidade é baixa, podendo ser encontrada expandindo o:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

em uma série de potências usando o teorema binomial (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008).

Em síntese, Einstein sugeriu que a massa de um corpo pode ser expressa mais simplesmente do que pela fórmula:

$$m \cong m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2}\right),$$

se dissermos que a massa é igual a energia total dividida por c^2 (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008).

Isto é, na Teoria da Relatividade Restrita apenas se modificam as Leis de Newton introduzindo um fator de correção de massa (equação 2). Assim, a principal diferença entre a relatividade de Einstein e a de Newton gira em torno das leis de transformação que conectam as coordenadas e os tempos entre os sistemas em movimento relativo são diferentes (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008).

De fato, a veracidade da fórmula foi amplamente confirmada pela observação de muitos tipos de partículas, movendo-se com velocidades variando num limite de velocidades muito próximas a da luz. Entretanto, devido ao efeito ser normalmente tão pequeno, é impressionante que tenha sido descoberto através de métodos teóricos antes de ser descoberto experimentalmente. Empiricamente, a uma velocidade sufi

cientemente alta, o efeito é muito grande, mas ele não foi descoberto dessa maneira. Portanto, é interessante ver como uma lei que envolveu uma modificação tão delicada (na época quando foi inicialmente descoberta) veio à luz por uma combinação de experimentos e argumentos físicos. Contribuições para a descoberta foram feitas por muitas de pessoas, mas o resultado final dos trabalhos foi a descoberta de Einstein (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008, p.169).

O princípio da relatividade consequentemente ter sido usado por muito tempo nos estudos da mecânica, se estendendo aos fenômenos da eletricidade, do magnetismo e da luz, realizados por variados pesquisadores. Os resultados obtidos pelas pesquisas culminaram nas equações de Maxwell para o campo eletromagnético, responsável por descrever tais fenômenos em um só sistema unificado, todavia, as equações obtidas não correspondiam as expectativas propostas pelo princípio da relatividade (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008). Ou seja, conforme as equações abaixo (denotaremos como equação 15.2 conforme o livro “Lições de Física” (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008, p.170)):

$$x' = x - ut,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = t.$$

Com fins de entender as equações acima, segundo Feynman (2008) tal situação seria representada por:

Figura 1: Dois sistemas de coordenadas em movimento relativo uniforme ao longo do eixo x

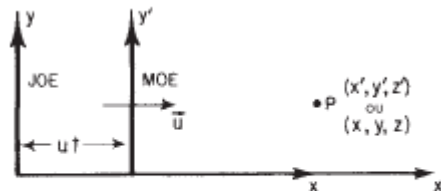


Figura 15-1 Dois sistemas de coordenadas em movimento relativo uniforme ao longo do eixo x.

Fonte: Print Screen do livro “Lições de Física” (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS. 2008, p.170).

Para interpretar os dois sistemas acima:

Suponhamos que Moe esteja se movendo na direção x com uma velocidade uniforme u e ele mede a posição de certo ponto, mostrado na Figura 15-1 (Figura 1). Ele chama a “distância x ” do ponto, em seu sistema de coordenadas, como x' . Joe está em repouso e mede a posição do mesmo ponto, chamando a coordenada x desse ponto em seu sistema como x . A relação das coordenadas nos dois sistemas está clara no diagrama. Depois de um tempo t , a origem de Moe se moveu para uma distância ut (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS. 2008, p.170).

Apesar do autor Feynman (2008) usar como variável u para definir a velocidade, se opta o uso da variável v neste trabalho para tal representação (velocidade uniforme). Assim,

[...] se transformarmos as equações de Maxwell, pela substituição das Equações 15.2 (figura 1), *sua forma não permanece a mesma*; portanto, em uma nave espacial em movimento, os fenômenos elétricos e ópticos deveriam ser diferentes daqueles em uma nave parada. Então, seria possível usar esses fenômenos ópticos para determinar a velocidade da nave; em particular, seria possível calcular a velocidade absoluta da nave por meio de medidas ópticas ou elétricas adequadas. Uma das consequências das equações de Maxwell é que, se ocorre uma perturbação no campo, de modo que seja gerada luz, essas ondas eletromagnéticas movem-se em todas as direções igualmente e à mesma velocidade c , ou 3×10^8 m/s. Outra consequência das equações é que, se a fonte da perturbação está se movendo, a luz emitida percorre o espaço à mesma velocidade c . Isso é análogo ao caso do som, a velocidade das ondas sonoras sendo iguais independente do movimento da fonte. (FEYNMAN, 2008, p.170).

Com o fracasso das equações físicas, os pesquisadores inicialmente julgaram que tais problemas estavam relacionados as equações de Maxwell para a eletrodinâmica, então optaram por alterar está (equações de Maxwell) de modo que, com a transformação de Galileu, o princípio da relatividade fosse satisfeito. Consequentemente, com essa transformação realizada, surgem novos termos inseridos nas equações, onde os resultados levaram a previsões de novos fenômenos elétricos que não existiam de qualquer forma, o que fez as equações de Maxwell uma opção a ser abandonada. Com essa derrota e o tempo, constaram que as equações de Maxwell estavam corretas para a eletrodinâmica, os guiando para outra parte das pesquisas a fim de encontrar o real problema (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008).

Além disso, neste mesmo período histórico, o físico H.A. Lorentz se envolve nas pesquisas relacionadas a mecânica relativista, o qual, utilizando as equações de Maxwell, e fazendo as seguintes substituições:

Figura 2: Equações 15.3.

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},\end{aligned}\tag{15.3}$$

Fonte: Print Screen do livro “Lições de Física” (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS. 2008, p.171).

Obteve o que ficou conhecido como transformação de Lorentz e demonstrou que o problema não estava nas equações de Maxwell, pois sua resolução implicou na permanência da sua mesma forma. Em síntese das equações acima (Figura 2), estas correspondem relativamente ao simples caso do movimento relativo dos dois observadores que se dá ao longo de seus eixos x comuns. Isso é possível para outras direções de movimentos, mas a transformação de Lorentz mais geral é bem complicada para usar, isso devido a todas as quatro quantidades misturadas.

Todavia, o autor Feynman aconselha a usar a forma acima por ser mais simples, uma vez que a mesma contém todos os aspectos essenciais da relatividade (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008). Feynman ainda discute que as possíveis consequências desta transformação:

Primeiro, é interessante solucionar essas equações no sentido inverso. Ou seja, aqui está um conjunto de equações lineares, quatro equações com quatro incógnitas, e elas podem ser resolvidas no sentido inverso, para x, y, z, t , em termos de x', y', z', t' . O resultado é muito interessante porque nos informa como um sistema de coordenadas “em repouso” parecer do ponto de vista de um que está “se movendo”. Claro que, como os movimentos são relativos e de velocidade uniforme, o homem que está se “movendo” pode dizer, caso queira, que é realmente o outro sujeito que está se movendo e que ele próprio está em repouso. E, como ele está se movendo na direção oposta, deveria obter a mesma transformação, mas com o sinal de velocidade oposto. Isto é precisamente o que achamos por manipulação, de modo que é coerente. Se a coisa não resultasse assim, teríamos um bom motivo para nos preocuparmos! (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS. 2008, p.184).

Logo, as equações desta situação serão:

Figura 3: Equação 16.2.

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{16.2}$$

Fonte: Print Screen do livro “Lições de Física” (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS. 2008, p.184).

Com isso, Einstein decidiu seguir uma sugestão originalmente realizada por Poincaré, e “propôs que todas as leis físicas deveriam ser de tal forma que elas permanecessem inalteradas sob uma transformação de Lorentz.” (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008, p.171). Ou seja:

Em outras palavras, não deveríamos mudar as leis da eletrodinâmica, mas as leis da mecânica. Como modificar as leis de Newton de modo que elas permaneçam inalteradas sob a transformação de Lorentz? Se este objetivo for fixado, temos então que reescrever as equações de Newton de certa forma que as condições que impusemos sejam satisfeitas. Como resultado disto, o único requisito é que a massa m nas equações de Newton seja substituída pela forma mostrada na equação (2) (neste trabalho). Quando essa mudança é feita, as leis de Newton e as leis da eletrodinâmica se harmonizam. (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS. 2008, p.171).

Para descobrir isto, não basta estudar as leis da mecânica, mas, como Einstein fez, devemos também analisar nossas ideias de espaço e tempo a fim de entender essa transformação. Para isso, um aspecto significativo para todos os historiadores e estudiosos sobre a Teoria da Relatividade Restrita é o entendimento do “éter”, e em consequência se tornou um

objeto pesquisado por muitos cientistas, principalmente até o século XIX (SILVA; ERROBIDART; ALVEZ; QUEIRÓS, 2019).

A ideia do éter surge com a teoria de Descartes, que “retira da luz qualquer propriedade material, mas exige a existência de um meio para se propagar” [13, p. 52]. Para que a luz pudesse se propagar, o éter deveria ser extremamente rígido, mas fluido o suficiente para que os sólidos pudessem se mover (SILVA; ERROBIDART; ALVEZ; QUEIRÓS, 2019, p.3).

Já do ponto de vista matemático:

[...] o éter seria um referencial inercial absoluto do eletromagnetismo, uma vez que, possibilitaria que a luz se propagasse podendo observar o seu caráter oscilatório, negando o princípio da relatividade aplicado as leis do eletromagnetismo. (SILVA; ERROBIDART; ALVEZ; QUEIRÓS, 2019, p.3).

Nesta mesma época, os estudos estavam com enfoque na determinação da velocidade absoluta da Terra através do “éter” hipotético que se suponha permear todo o espaço. Buscando responder e compreender o comportamento do “éter” hipotético, em conjunto com uma possível resolução as equações formuladas por Maxwell e outros pesquisadores, se apresentam após 18 anos de pesquisas os estudiosos Michelson e Morley em 1887, que através de um experimento usando um aparelho chamado interferômetro, devido a base dos estudos que detinha em ótica, em especial ao método de Foucault, conseguiram demonstrar os resultados negativos realizados pelas equações de Einstein (SILVA; ERROBIDART; ALVEZ; QUEIRÓS, 2019). Sugeriu que ocorre uma contração nos corpos materiais quando estes se movem, e esta situação resulta na redução na direção do movimento, acrescentando o comprimento sendo L quando o corpo está em repouso, porém, quando se movem à velocidade v paralela ao seu comprimento, o novo comprimento obtido será chamado de $L_{||}$, e é dado por (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008):

$$L_{||} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4)$$

Henri Poincaré,

[...] enfatizou que era preciso desenvolver teorias exatas do eletromagnetismo para encontrar a resposta que faltava e que a hipótese de contração dos corpos proposta por Lorentz era uma explicação insatisfatória que buscava apenas justificar o resultado inesperado do experimento de Michelson e Morley. Nesse estudo sobre o movimento dos corpos materiais e os efeitos físicos, intitulado como lei da relatividade, pontuou que era preciso desenvolver uma teoria que explicasse todos os fenômenos de uma só vez ao invés de ficar criando uma explicação diferente para cada (SILVA; ERROBIDART; ALVEZ; QUEIRÓS, 2019, p.3).

Inclusive,

[...] como Poincaré observou, que uma total conspiração é por si própria uma lei da natureza! Poincaré então propôs que existe uma tal lei da natureza, que não é possível descobrir o movimento no éter por meio de nenhum experimento; ou seja, não existe

forma alguma para determinar uma velocidade absoluta. (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS. 2008, p.173).

Portanto, a ideia de contração somente fica em harmonia com os fatos em outros experimentos, contanto que os tempos sejam modificados, isso conforme a forma expressa na quarta equação do conjunto de equações (15.3) (Figura 2). Logo, isto modifica de acordo com o tempo, o qual é diferente, a exemplo de um experimento calculado por um homem em uma nave espacial no espaço (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008).

Em outras palavras, quando o observador externo vê o homem na nave espacial acender um charuto, todas as ações parecem ser mais lentas que o normal, enquanto para o homem na nave tudo se move no ritmo normal. Portanto, não apenas os comprimentos devem se reduzir, mas também os instrumentos de medida do tempo (“relógios”) devem aparentemente diminuir o ritmo. Ou seja, quando o relógio na nave espacial registra que 1 segundo se passou, visto pelo homem na nave, para o homem lá fora mostra $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ segundos. (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS. 2008, p.174).

Constamos na experiência realizada por Michelson-Morley, que o tempo é relativo, onde no caso analisado por eles (Michelson-Morley) leva mais tempo para ir de uma extremidade a outra no relógio em movimento. Porém, segundo os historiados, Einstein não exerceu em seus manuscritos uma influência ponderável sobre esta experiência (SILVA; ERROBIDART; ALVEZ; QUEIRÓS, 2019).

Com fins de entender melhor a ideia do tempo ser relativo, Feynman apresenta o seguinte exemplo:

[...] suponhamos que tivéssemos dois outros relógios feitos exatamente iguais, com rodas e engrenagens, ou talvez baseados na desintegração radioativa, ou outra coisa qualquer. Então ajustamos esses relógios de modo que ambos funcionem em perfeito sincronismo com nossos primeiros relógios. Quando a luz vai e volta nos primeiros relógios e anuncia sua chegada com um clique, os modelos novos também completam alguma espécie de ciclo, que anunciam simultaneamente por algum flash duplamente coincidente, ou um tique, ou outro sinal. Um desses relógios é levado na nave espacial, junto com o primeiro tipo. Talvez esse relógio não funcione mais lentamente, mas continue marcando o mesmo tempo de seu correspondente parado, sendo assim, discordando do outro relógio em movimento. Oh, não, se isto acontecesse, o homem na nave poderia usar essa discrepância entre seus dois relógios para determinar a velocidade de sua nave, o que supomos ser impossível. Não precisamos saber nada sobre o mecanismo do relógio novo que possa causar o efeito – simplesmente sabemos que, qualquer que seja o motivo, ele parecerá funcionar devagar, exatamente como o primeiro. Agora se todos os relógios em movimento funcionam mais lentamente, se todas as formas de medir o tempo não fornecem nada diferente que um ritmo mais lento, teremos apenas que dizer, em certo sentido, que o próprio tempo parece dilatado na nave espacial. Todos os fenômenos na nave – a pulsação do homem, seus processos de pensamento, o tempo que ele leva para acender um charuto, quanto ele leva para crescer e envelhecer – enfim, todas estas coisas devem ser mais lentas na mesma proporção, porque ele não consegue dizer e está se movendo. Os biólogos e médicos às vezes dizem que não é totalmente certo que o tempo que um câncer levará para se desenvolver será mais longo em uma nave espacial, mas do ponto de vista de um físico moderno, isto é quase certo; senão seria possível usar a taxa de desenvolvimento do

câncer para calcular a velocidade da nave! (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS. 2008, p.174).

“Lembramos que um dos enigmas originais é que a luz se desloca a 300.000 km/s em todos os sistemas, mesmo quando estão em movimento relativo” (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS. 2008, p.184). E para isso, surge a Teoria da Relatividade Restrita, está que apresenta a compreensão da propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo, onde Einstein conseguiu revolucionar a física ao modificar as concepções sobre o tempo e o espaço, preservando na equação a velocidade absoluta da luz (SILVA; ERROBIDART; ALVEZ; QUEIRÓS, 2019).

Portanto,

No ano de 1905, mesmo ano em que Einstein publicou o seu trabalho sobre relatividade, Poincaré publicou dois trabalhos muito significativos para a teoria. No primeiro trabalho, corrigiu alguns problemas evidenciados na proposição de Lorentz, demonstrando que era necessário levar em consideração que todos os fenômenos eletromagnéticos deveriam ser idênticos em quaisquer referenciais. No outro, demonstrou que o tempo deveria ser manipulado como uma quarta dimensão e discutiu as consequências do princípio da relatividade no estudo da gravitação. Pode-se dizer que faltou pouco para Poincaré e Lorentz descreverem o princípio da relatividade especial. [...] os resultados do artigo de 1905 obtidos por Einstein já haviam sido alcançados antes por Lorentz e Poincaré. No entanto, havia um importante diferença; enquanto os antecessores de Einstein aceitavam a existência do éter, ele negou essa hipótese” (SILVA; ERROBIDART; ALVEZ; QUEIRÓS, 2019, p.4).

Einstein não incluiu a existência do éter em sua teoria, pois como o mesmo não havia sido provado a partir de algum experimento, então seria porque o mesmo não existe, concluindo que:

[...] as tentativas sem sucesso de verificar que a Terra se move em relação ao “meio luminoso” [éter] levaram à conjectura de que, não apenas na mecânica, mas também na eletrodinâmica, não há propriedades observáveis associadas à ideia de repouso absoluto, mas as mesmas leis eletrodinâmicas e ópticas se aplicam a todos os sistemas de coordenadas nos quais são válidas as equações da mecânica [...] Elevaremos essa conjectura (cujo conteúdo será daqui por diante chamado de “princípio da relatividade”) à posição de um postulado (SILVA; ERROBIDART; ALVEZ; QUEIRÓS, 2019, p.4).

Pautando sua teoria em dois problemas, “o comportamento da luz e a falta de simetria observada em alguns fenômenos eletromagnéticos” (SILVA; ERROBIDART; ALVEZ; QUEIRÓS, 2019, p.4).

Após 10 anos, Einstein publicou sua segunda teoria, a Teoria da Relatividade Geral, sendo uma adaptação da Teoria da Relatividade Restrita para o fato dos observadores (corpos) estarem em movimento (ALMEIDA, 2021). Segundo Einstein, o princípio da Relatividade Geral transmite que cada movimento deve ser considerado apenas como um movimento relativo (ou seja, indica que o movimento é sempre medido em relação a algo, que pode ser o referencial ou o observador, onde um mesmo corpo pode ter seu movimento descrito por vários

observadores diferentes, ou seja, relativo à vários referenciais distintos. Portanto, seu objetivo neste novo princípio seria afirmar que ao formularmos leis gerais da natureza a partir das experiências realizadas com relação a um corpo de referência (qualquer) em movimento, teremos de obter o mesmo resultado em ambos os casos (EINSTEIN, 1916). Ou seja, ao se “tratar simplesmente de detectar ou de descrever o movimento envolvido, é um princípio irrelevante a que corpo de referência quando nos referimos a um movimento”¹ (EINSTEIN, 1916, p.54). Usando os corpos de referência dados pelo autor, sendo um aterra e um trem, tal que um observador está no trem e outro no aterra, seu intuito é que ao escolhermos apenas o trem ou o aterra como nosso corpo de referência seria poder descrever tais relações resultantes para qualquer evento, sabendo que naturalmente podemos formular as leis gerais da natureza que são obtidas pelo uso e análise de cada corpo separadamente como referência, em leis gerais da natureza (a exemplo, por meio das leis da mecânica ou a lei da propagação de luz no vácuo) com a mesma forma em ambos os casos, ou seja, para a descrição física dos processos naturais, nenhum dos corpos de referência K , K_1 (o qual podemos tomar K como o trem e o K_1 o aterra, por exemplo) é único em comparação com o outro² (EINSTEIN, 1916).

Por isso, como ainda não temos uma noção aplicável sobre alguma forma de equivalência tendo todos os corpos de referência (ao qual denotaremos como) K em conexão com a formulação a partir das leis naturais, Einstein nos inspira a partirmos da suposição que existe um corpo de referência K , cuja condição de movimento tem relação com a lei de Galileu (também chamada de lei da queda dos corpos, sendo sua aplicação somente efetiva no vácuo, afinal, a densidade dos corpos é diferente no ar, no qual, todos os corpos ao caírem desfrutarão de uma aceleração constante em uma altura igual, sendo consequência do efeito da aceleração gravitacional), e está se aplica a ele (o corpo de referência K). Logo, seria tangível que as leis da natureza em relação a K deveriam ser tão simples quanto possível, porém, como estamos retratando de todos os corpos de referência (os denotaremos como o livro sendo) K_1 , a referência a este sentido será dada pelo local em que todos os corpos de referência K_1 , estão em estado de movimento retilíneo e não rotativo em relação a K , ou melhor, deverão ser exatamente equivalentes a K , isso em relação a formulação de leis naturais. Contudo, até então

¹ [...] simply a question of detecting or of describing the motion involved, it is in principle immaterial to what reference-body we refer the motion (EINSTEIN, 1916, p.54).

² For the physical description of natural processes, neither of the reference-bodies K , K_1 is unique (lit. “specially marked out”) as compared with the other. Unlike the first, this latter statement need not of necessity hold a priori; it is not contained in the conceptions of “motion” and “reference-body” and derivable from them; only experience can decide as to its correctness or incorrectness. (EINSTEIN, 1916, p.71).

tínhamos que no princípio da relatividade restrita, está situação somente se validava para corpos de referência que possuíssem esse tipo de movimento (em estado de movimento retilíneo e não rotativo em relação a K), mas não para outros tipos de movimento. Desta forma, com o surgimento da ideia do princípio da relatividade geral, temos pelo autor (Einstein) “que todos os corpos de referência K, K₁, etc., são equivalentes para a descrição dos fenômenos naturais (formulação das leis gerais da natureza), quaisquer que sejam seus estados de movimento”³ (EINSTEIN, 1916, p. 55-56).

Em suma, analisando o comportamento mecânico a um trem em movimento não uniforme, usando a razão lógica, parece ser impossível que as mesmas leis mecânicas que estão asseguradas a um trem estando em repouso ou em movimento uniforme⁴. Para exemplificar esta ideia, suponha que exista um observador sentado em um banco dentro do trem em movimento contínuo uniforme, no qual, é quase imperceptível este movimento ocorrendo, consequência da primeira lei de Newton, em específico o princípio da Inércia (onde o corpo tende a manter seu estado de movimento se não houve nenhuma força resultante que atua nele), havendo uma relutância ao observador de interpretar os fatos do caso, somente o percebendo na visão obtida pela janela, sendo a ambientação dentro do trem comparável ao trem em repouso. Já para o movimento não uniforme, o comparamos a situação onde o trem está em movimento, mas repentinamente sofre uma brusca interrupção feita pelos freios, implicando ao observador que ainda está em movimento contínuo, experimentar um “puxão” para a frente correspondentemente poderoso, o que resulta a um movimento retardado que se manifesta no comportamento mecânico de corpos em relação à pessoa no vagão ferroviário. Em todo caso, é claro que a lei galileana não se aplica com relação ao trem em movimento não uniforme. Por isso, nos sentimos compelidos na presente conjuntura a conceder uma espécie de realidade física absoluta ao movimento não uniforme, em oposição ao princípio geral da relatividade⁵.

³ "All bodies of reference K, K₁, etc., are equivalent for the description of natural phenomena (formulation of the general laws of nature), whatever may be their state of motion" (EINSTEIN, 1916, p. 55-56)

⁴ The mechanical behavior is different from that of the case previously considered, and for this reason it would appear to be impossible that the same mechanical laws hold relatively to the non-uniformly moving carriage, as hold with reference to the carriage when at rest or in uniform motion. At all events it is clear that the Galileian law does not hold with respect to the non-uniformly moving carriage. Because of this, we feel compelled at the presente juncture to grant a kind of absolute physical reality to non-uniform motion, in opposition to the general principle of relativity. But in what follows we shall soon see that this conclusion cannot be maintained. (EINSTEIN, 1916, p.56).

⁵ Since the introduction of the special principle of relativity has been justified, every intellect which strives after generalisation must feel the temptation to venture the step towards the general principle of relativity. But a simple and apparently quite reliable consideration seems to suggest that, for the present at any rate, there is little hope of success in such an attempt. Let us imagine ourselves transferred to our old friend the railway carriage, which is travelling at a uniform rate. As long as it is moving uniformly, the occupant of the carriage is not sensible of its motion, and it is for this reason that he can unreluctantly interpret the facts of the case as indicating that the carriage is at rest, but the embankment in motion. Moreover, according to the

Mas no que se segue veremos em breve que esta conclusão não pode ser mantida (EINSTEIN, 1916).

Na sequência, segundo o autor (Einstein, 1916), para conceituar tal noção precisa-se compreender primeiramente a noção do que seria um campo gravitacional. Observe que no ensino básico esta situação (sobre campo gravitacional) é ensinado, por exemplo, a partir da ação que ocorre a partir do campo gravitacional atuando na Terra, na situação de uma pedra em movimento de queda. Desta ideia, a intensidade da ação sobre um corpo diminui à medida que este corpo se afasta da Terra, sendo consequência da lei da gravidade. Isto significa que a lei que governa as propriedades do campo gravitacional no espaço, deve ser perfeitamente definida, a fim de representar corretamente a diminuição da força gravitacional em comparação com a ação e a distância das estruturas operantes. Para conceituar esta ideia, suponha um corpo (por exemplo, a Terra), que produz diretamente um campo em sua vizinhança imediata (no caso da Terra, um campo magnético), correspondente a uma intensidade e direção do campo em pontos mais distantes do corpo (ou seja, em relação aos planetas que fazem parte do Sistema Solar, bem como o Universo geral é afetado), no qual são então determinadas pela lei que governa as propriedades no espaço dos próprios campos gravitacionais⁶ (EINSTEIN, 1916).

Em contraste, a propriedade notável de fundamental importância, conhecida para compreensão do campo gravitacional, chamada lei de movimento de Newton, sendo sua fórmula correspondente:

$$(\text{Força}) = (\text{massa inercial}) \times (\text{aceleração}), (5)$$

em que a “massa inercial” corresponde a uma constante característica do corpo acelerado. Disto, caso a gravitação seja causada pela aceleração, então a fórmula (5) se modifica para:

$$(\text{Força}) = (\text{massa gravitacional}) \times (\text{intensidade do campo gravitacional}), (6)$$

special principle of relativity, this interpretation is quite justified also from a physical point of view. If the motion of the carriage is now changed into a non-uniform motion, as for instance by a powerful application of the brakes, then the occupant of the carriage experiences a correspondingly powerful jerk forward. The retarded motion is manifested in the mechanical behaviour of bodies relative to the person in the railway carriage. The mechanical behaviour is different from that of the case previously considered, and for this reason it would appear to be impossible that the same mechanical laws hold relatively to the non-uniformly moving carriage, as hold with reference to the carriage when at rest or in uniform motion. At all events it is clear that the Galileian law does not hold with respect to the non-uniformly moving carriage. Because of this, we feel compelled at the present juncture to grant a kind of absolute physical reality to non-uniform motion, in opposition to the general principle of relativity. But in what follows we shall soon see that this conclusion cannot be maintained.

⁶ The law governing the properties of the gravitational field in space must be a perfectly definite one, in order correctly to represent the diminution of gravitational action with the distance from operative bodies. It is something like this: The body (e.g. the earth) produces a field in its immediate neighborhood directly; the intensity and direction of the field at points farther removed from the body are thence determined by the law which governs the properties in space of the gravitational fields themselves. (EINSTEIN, 1916, p.75).

em que a "massa gravitacional" é a constante característica do corpo. Todavia, por consequência da implicação de ambas as fórmulas (5) e (6):

$$(\text{aceleração}) = \frac{(\text{massa gravitacional})}{(\text{massa inercial})} \times (\text{intensidade do campo gravitacional}).$$

A lei de Newton é responsável por retratar corpos que estão se movendo sob uma única influência de campo gravitacional, assim recebendo uma aceleração que é independente do material e do estado físico do corpo, a exemplo “[...] um pedaço de chumbo e um pedaço de madeira caem exatamente da mesma maneira em um campo gravitacional (no vácuo), quando partem do repouso ou com a mesma velocidade inicial”⁷ (EINSTEIN, 1916). Com esta concepção, temos que a aceleração deve ser independente da natureza e a condição do corpo sempre será a mesma para um dado campo gravitacional, isto posto, a razão entre a massa gravitacional e a massa inercial deve ser a mesma para todos os corpos. Se agora, como abordado até o momento, a aceleração deve ser independente da natureza e a condição do corpo é sempre a mesma para um dado campo gravitacional, então a razão entre a massa gravitacional e a massa inercial deve ser a mesma para todos os corpos. Em síntese disso, a massa gravitacional e a massa inercial deve ser a mesma para todos os corpos (afirmação definida pela lei da massa gravitacional de um corpo ser igual à sua lei inercial)⁸ (EINSTEIN, 1916). Porém, uma interpretação eficiente só pode ser realizada ao reconhecermos o fato que “a mesma qualidade de um corpo se manifesta de acordo com as circunstâncias como a “inércia” ou como “peso”⁹ (EINSTEIN, 1916, p.58-59). Portanto, com a igualdade da massa inercial e a massa gravitacional, podemos formular um argumento mais estruturado para o postulado geral da relatividade.

Por Einstein, “[...] o princípio geral da relatividade nos coloca em uma posição para derivar propriedades do campo gravitacional de uma maneira puramente teórica”¹⁰ (EINSTEIN, 1916, p. 87), produzindo resultados importantes sobre as leis da gravitação, onde, [...] conhecer o espaço-tempo ("curso") para qualquer que seja o processo natural, isso a respeito da maneira como ocorre no domínio galileu em relação a um corpo de referência galileu K,

⁷ “[...] a piece of lead and a piece of wood fall in exactly the same manner in a gravitational field (in vacuo), when they start off from rest or with the same initial velocity.” (EINSTEIN, 1916, p.58).

⁸ If now, as we find from experience, the acceleration is to be independent of the nature and the condition of the body and always the same for a given gravitational field, then the ratio of the gravitational to the inertial mass must likewise be the same for all bodies. By a suitable choice of units, we can thus make this ratio equal to unity. We then have the following law: The *gravitational* mass of a body is equal to its *inertial* law. (EINSTEIN, 1916, p.58).

⁹ The same quality of a body manifests itself according to circumstances as "inertia" or as "weight" (lit. "heaviness") (EINSTEIN, 1916, p.58-59).

¹⁰ “[...] the general theory * of relativity puts us in a position to derive properties of the gravitational field in a purely theoretical manner” (EINSTEIN, 1916, p. 87).

utilizando operações puramente teóricas (isto é, simplesmente por cálculo) podemos então descobrir como esse processo natural conhecido aparece, visto o corpo de referência K_1 que está acelerado em relação a K ¹¹ (EINSTEIN, 1916). Mas, como já existe um campo gravitacional em relação a esse corpo de referência K_1 , por consequência que o campo gravitacional influencia o processo a ser estudado, afinal, por exemplo, um corpo que está em um estado de movimento retilíneo uniforme (movimento que ocorre com a velocidade estando constante em uma trajetória reta) com respeito a K (de acordo com a lei de Galilei) está executando uma ação acelerada e em movimento curvilíneo geral (ou seja, o movimento ocorre com uma velocidade constante em trajetória de curva) em relação ao corpo de referência acelerado K_1 . Além disso, a aceleração ou curvatura correspondem à influência sobre o corpo em movimento no campo gravitacional predominante em relação a K . Por outro lado, sabemos então que um campo gravitacional influencia o movimento dos corpos dessa maneira¹² (EINSTEIN, 1916). Nos restando o questionamento do por que tal situação acarreta em um movimento curvilíneo geral? Com intuito de responder, observe que quando realizamos uma consideração análoga, mas dessa vez em relação a um raio de luz ao corpo de referência galileu K , tal raio de luz é transmitido de forma retilínea e a velocidade c . Pode-se mostrar facilmente que o caminho do mesmo raio de luz não é mais uma linha reta quando o consideramos com referência ao corpo de referência K_1 . Concluindo assim que, em geral, os raios de luz são propagados em movimento curvilíneo em campos gravitacionais¹³ (EINSTEIN, 1916). Segundo Einstein, em dois aspectos este resultado é de grande importância. Um deles seria ao compararmos tal situação com a realidade, isso através da representação que podemos observar por meio de um eclipse, em que a curvatura dos raios de luz detalhada na Teoria Geral da Relatividade é extremamente pequena em comparação aos campos gravitacionais na prática, pois sua magnitude estimada para com os raios de luz que passam o Sol são resultantes a

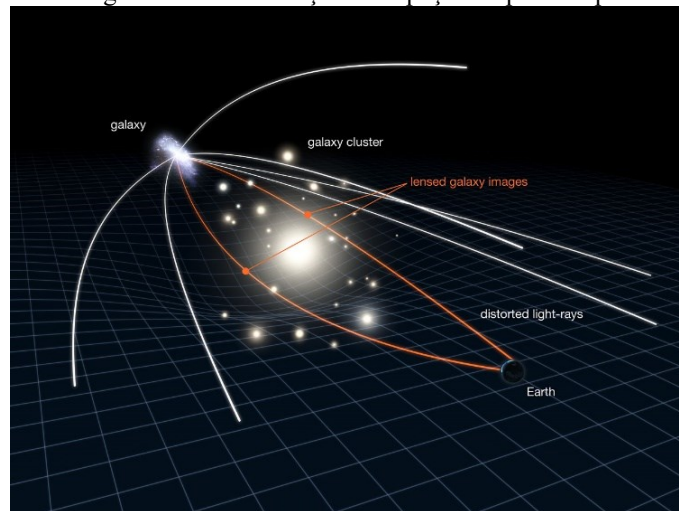
¹¹ [...] that we know the space-time " course " for any natural process whatsoever, as regards the manner in which it takes place in the Galileian domain relative to a Galileian body of reference K . By means of purely theoretical operations (i.e. simply by calculation) we are then able to find how this known natural process appears, as seen from a reference-body K_1 which is accelerated relatively to K . (EINSTEIN, 1916, p.65).

¹² For example, we learn that a body which is in a state of uniform rectilinear motion with respect to K (in accordance with the law of Galilei) is executing an accelerated and in general curvilinear motion with respect to the accelerated reference-body K_1 (chest). This acceleration or curvature corresponds to the influence on the moving body of the gravitational field prevailing relatively to K . It is known that a gravitational field influences the movement of bodies in this way, so that our consideration supplies us with nothing essentially new (EINSTEIN, 1916, p. 65).

¹³ With respect to the Galileian reference-body K , such a ray of light is transmitted rectilinearly with the velocity c . It can easily be shown that the path of the same ray of light is no longer a straight line when we consider it with reference to the accelerated chest (reference-body K_1). From this we conclude, that, in general, rays of light are propagated curvilinearly in gravitational fields. In two respects this result is of great importance. (EINSTEIN, 1916, p. 65).

incidência de 1,7 segundos de arco. Para melhor compreensão imagine que visto da Terra, certas estrelas fixas parecem estar na vizinhança do Sol e, portanto, somos capazes de observá-las durante um eclipse total do Sol. Nesses momentos, essas estrelas devem parecer deslocados para fora, como se o Sol espelhasse ao seu redor as estrelas contidas através dele por uma quantidade de 1,7 segundos de arco, em comparação com sua posição aparente no céu, enquanto o Sol está situado em outra parte do céu¹⁴ (EINSTEIN, 1916). Podemos compreender melhor esta situação conforme a imagem abaixo:

Figura 4: Efeito da gravidade na distorção do espaço-tempo feito pelo Sol.



Fonte: SOCIENTIFICA, 2020.

A Figura 4 ilustra o que é usado a muito tempo pela NASA, chamado de SGL (lente gravitacional solar), está que permite a capacidade de observar extraordinárias imagens diretas, de alta resolução e espectroscopia de exoplanetas semelhantes à Terra bem como também outras estrelas, isso graças a Teoria da Relatividade Geral, responsável por dispor a compreensão da curvatura do espaço-tempo com apoio da gravidade. Ainda sobre a imagem acima, temos que astrônomos usam essa técnica através do nosso Sol, este que possui uma massa gravitacional enorme, sendo capaz de distorcer significativamente o espaço-tempo, auxiliando a obter novas imagens e a observar o Universo presente naquele espaço de tempo (TOTH e TURYSHEV, 2021).

¹⁴ As seen from the earth, certain fixed stars appear to be in the neighborhood of the sun, and are thus capable of observation during a total eclipse of the sun. At such times, these stars ought to appear to be displaced outwards from the sun by an amount indicated above, as compared with their apparent position in the sky when the sun is situated at another part of the heavens. The examination of the correctness or otherwise of this deduction is a problem of the greatest importance, the early solution of which is to be expected of astronomers. (EINSTEIN, 1916, p. 66).

Segundo Toth e Turyshev, ao contrário de uma lente fina óptica bem construída, a SGL não focaliza a luz de uma fonte pontual distante para um ponto. Raios de luz com parâmetros de impacto maiores, atingem o “eixo óptico” (a linha imaginária que liga a fonte pontual distante ao centro do Sol) a distâncias cada vez maiores. Assim, em vez de um ponto focal, o SGL forma uma meia-linha focal. A luz de uma fonte pontual apareceria, para um observador na meia linha focal e olhando de volta para o Sol, como um círculo de luz ao redor do Sol: o anel de Einstein. Quanto mais distante o observador estiver do Sol, maior será o anel de Einstein em relação ao Sol. Se o observador se afastar da linha focal, o anel de Einstein de uma fonte pontual se dividiria rapidamente em dois arcos. Mas situando-se mais longe da linha focal, os dois arcos colapsam em dois pontos de luz. Muito mais longe (a distâncias comparáveis ao raio solar), os dois pontos se tornariam assimétricos em aparência, um eventualmente desaparecendo atrás do Sol, enquanto o outro transitava para a imagem sem lente da fonte distante¹⁵ (TOTH e TURYSHEV, 2021).

Portanto, de acordo com a Teoria Geral da Relatividade, um raio de luz experimentará uma curvatura de seu caminho ao passar por um campo gravitacional, sendo esta curvatura semelhante à experimentada pela trajetória de um corpo que é projetada através de um campo gravitacional. Como resultado dessa teoria, devemos esperar que um raio de luz que passa perto de um corpo celeste seria desviado para o último. Para um raio de luz que passa pelo Sol a uma distância de Δ raios solares a partir do seu centro, o ângulo de deflexão (a) deve ser (EINSTEIN, 1916):

$$a = \frac{1.7 \text{ segundos de são}}{\Delta}.$$

Segundo a Teoria da Relatividade Geral, metade dessa deflexão é produzida pelo campo de atração newtoniano do Sol, e a outra metade pela modificação geométrica ("curvatura") do espaço causada pelo Sol. Este resultado admite um teste experimental por meio do registro fotográfico de estrelas durante um eclipse total do Sol. A única razão pela qual devemos esperar por um eclipse total é porque em todas as outras vezes a atmosfera é tão

¹⁵ However, unlike a well-constructed optical thin lens, the SGL does not focus light from a distant point source to a point. Rays of light with larger impact parameters, b , reach the “optical axis” (the imaginary line connecting the distant point source with the center of the Sun) at greater and greater distances. Thus, instead of a focal point the SGL forms a focal half-line. Light from a point source would appear, to an observer on the focal half-line and looking back at the Sun, as a 3 circle of light around the Sun: the Einstein-ring. The farther the observer is located from the Sun, the larger the Einstein-ring appears relative to the Sun [3, 11]. If the observer moves away from the focal line, the Einstein-ring from a point source would rapidly break into two arcs; further away from the focal line, the two arcs each collapse into two spots of light. Much further away (at distances comparable to the solar radius) the two spots would become asymmetric in appearance, one eventually vanishing behind the Sun, while the other transitioning into the unlensed image of the distant source (TOTH e TURYSHEV, 2021, p. 2-3).

fortemente iluminada pela luz do Sol que as estrelas situadas perto do disco solar ficam “invisíveis”. Na prática, a questão é testada da seguinte maneira, primeiramente se fotografa as estrelas na vizinhança do Sol durante um eclipse solar. Já a segunda fotografia das mesmas estrelas é tirada quando o Sol está situado em outra posição no céu, ou seja, alguns meses mais cedo ou mais tarde (da situação inicial, o eclipse). Em comparação com a fotografia padrão, as posições das estrelas na fotografia do eclipse devem aparecer deslocadas radialmente para fora (longe do centro do Sol) por uma quantidade correspondente ao ângulo α ¹⁶ (EINSTEIN, 1916).

Como resultando da Teoria da Relatividade Geral, a lei da constância da velocidade da luz no vácuo, responsável por constituir um dos dois pressupostos fundamentais da Teoria da Relatividade (no sentido restrito), não se pode reivindicar qualquer validade ilimitada, ou seja, a curvatura definida pelos raios de luz pode somente ocorrer quando a velocidade de propagação da luz varia com a posição. Concluimos então que a Teoria da Relatividade Restrita não pode postular em um domínio ilimitado para validação, isto pois seus resultados são somente plausíveis quando desconsiderarmos as influências dos campos gravitacionais sobre os fenômenos, a exemplo, da própria luz (EINSTEIN, 1916).

Um dos problemas mais interessantes, cuja solução é a Teoria da Relatividade Geral, está relacionado com a investigação das leis satisfeitas pelo próprio campo gravitacional. Pensando nisso, para esclarecer tal ideia, podemos imaginar domínios nos quais os campos gravitacionais estão ausentes, o que de acordo com a teoria, a lei geral do campo gravitacional deve ser satisfeita para todos os campos gravitacionais que possam ser produzidos, assim, detemos que a lei geral da gravitação é derivável dos mesmos campos gravitacionais, só que de um tipo especial. Com isto, para uma melhor compreensão, é necessário entender as ideias do continuum espaço-tempo (EINSTEIN, 1916).

¹⁶ it has been already mentioned that according to the general theory of relativity, a ray of light will experience a curvature of its path when passing through a gravitational field, this curvature being similar to that experienced by the path of a body which is projected through a gravitational field. As a result of this theory, we should expect that a ray of light which is passing close to a heavenly body would be deviated towards the latter. For a ray of light which passes the sun at a distance of Δ sun-radii from its centre, the angle of deflection (α) should amount to $\alpha = \frac{1.7 \text{ seconds of arc}}{\Delta}$. This result admits of an experimental test by means of the photographic registration of stars during a total eclipse of the sun. The only reason why we must wait for a total eclipse is because at every other time the atmosphere is so strongly illuminated by the light from the sun that the stars situated near the sun's disc are invisible. [...] In practice, the question is tested in the following way. The stars in the neighbourhood of the sun are photographed during a solar eclipse. In addition, a second photograph of the same stars is taken when the sun is situated at another position in the sky, i.e. a few months earlier or later. As compared with the standard photograph, the positions of the stars on the eclipse-photograph ought to appear displaced radially outwards (away from the centre of the sun) by an amount corresponding to the angle α (EINSTEIN, 1916, p.108-109).

Primeiramente, suponha um domínio de espaço-tempo em que não existe um campo gravitacional em relação a um corpo de referência K , o denotando como K_1 , ou seja, não tem uma referência de corpo galileana, sendo os resultados da Teoria da Relatividade Restrita mantidos em relação a K . Assim, há como informação que K_1 é um corpo de referência na forma de um disco circular plano que está girando uniformemente em seu próprio plano e também em torno do seu próprio eixo. E ainda, este corpo de referência K_1 também está girando de modo uniforme em relação a K . Logo, imagine que há uma pessoa sentada no disco K_1 (observador 1), este conseqüentemente sofre com uma força que atua para fora em direção radial, sendo isto interpretado como um efeito de inércia (força centrífuga) por outro observador 2, este presente no disco original de referência, sendo K . O curioso é que a pessoa no disco K_1 (observador 1) pode considerar o seu disco como estando em “repouso”, sendo tal observação coesa pelo princípio geral da relatividade. Além disso, a força age sobre si mesmo, e de fato, sobre todos os outros corpos que estão em repouso em relação ao disco considerado, usufruindo do efeito de um campo gravitacional (EINSTEIN, 1916).

Para compreender melhor esta ideia proposta por Einstein, suponha que o corpo K seja o planeta Terra como conhecemos, e K_1 seja um planeta Terra em formato plano, onde ambos os corpos não tem referência galileana, com isso temos que estes corpos não dependem um do outro para se movimentar, sendo independentes. Em síntese, temos que a Terra plana se movimenta uniformemente em seu próprio plano e conseqüentemente em seu próprio eixo. Com tais informações, considere que ambos os corpos estão no espaço, um do lado do outro, logo, como ambos não dependem do campo gravitacional do outro, ocorrem situações diferentes em cada planeta (campos gravitacionais distintos). Disto, considere um observador 1 morando na Terra plana, que sofre por uma força que atua para fora em direção radial, ou seja, sofre de uma aceleração centrípeta, o fazendo se movimentar circularmente, acompanhando o movimento uniforme deste planeta, mas, este observador não consegue perceber tais situações que ocorrem sobre ele, isso devido a Teoria da Relatividade Restrita. Já na Terra (como conhecemos), o observador 2 sofre as mesmas conseqüências que nós passamos. Em suma, ao observador 2 quando olha para a Terra plana, em específico para o observador 1, o vê girando em seu planeta, e o mesmo para o observador 1 em comparação com o observador 2, mas ambos não perceber que também estão girando em conjunto com seu planeta de origem. Ou seja, o campo gravitacional de cada planeta age sobre estes sem os mesmos o perceberem (EINSTEIN, 1916).

Além disso, considere que se a distribuição espacial deste campo gravitacional (em K_1) é de um tipo que não seria possível na Teoria da Gravitação de Newton, onde o campo

desaparece no centro do disco e aumenta proporcionalmente à distância do centro à medida que avançamos para fora. Mas como o observador 1 acredita na Teoria da Relatividade Geral, isso não o perturba. E ele tem toda a razão quando acredita que uma lei geral da gravitação pode ser formulada, não só explicando corretamente o movimento das estrelas, mas também o campo de força experimentado por ele mesmo¹⁷ (EINSTEIN, 1916).

Suponha um observador 3 que ficará responsável por realizar testes no disco circular K_1 , usando como ferramentas de medição os relógios (medir tempo) e as varetas (medir distância), sendo sua intenção chegar em definições exatas para a compreensão e coleta de dados sobre o tempo e espaço em referência ao disco circular ao qual se situa. Seu questionamento motivacional será: o que a experiência resultará neste empreendimento? Para isso ele coloca um dos dois relógios identicamente construídos no centro do disco circular e o outro na borda do disco, de modo que fiquem em repouso em relação a ele (estão presos ao solo). Nos perguntemos se ambos os relógios andam para quem o olha em K ? Como julgado a partir deste corpo K_1 , o relógio no centro do disco não tem velocidade, enquanto o relógio na borda do disco está em movimento em relação a K , em consequência da rotação. Segue-se que o último relógio vai a uma taxa permanentemente mais lenta do que a do relógio no centro do disco circular, ou seja, como analisado por quem o vê em K . É óbvio que o mesmo efeito seria notado por um observador sentado ao lado de seu relógio no centro do disco. Assim, em nosso disco circular, ou, para tornar o caso mais geral, em cada campo, um relógio vai mais rápido ou menos rápido, de acordo com a posição em que o relógio está situado (em repouso). Por esta razão, não é possível obter uma definição razoável de tempo com o auxílio de relógios dispostos em repouso em relação ao corpo de referência, isto sendo uma dificuldade semelhante a que se apresenta quando tentamos aplicar uma simultaneidade em tal caso¹⁸ (EINSTEIN, 1916).

¹⁷ The force acting on himself, and in fact on all other bodies which are at rest relative to the disc, he regards as the effect of a gravitational field. Nevertheless, the space-distribution of this gravitational field is of a kind that would not be possible on Newton's theory of gravitation. **1)** But since the observer believes in the general theory of relativity, this does not disturb him; he is quite in the right when he believes that a general law of gravitation can be formulated- a law which not only explains the motion of the stars correctly, but also the field of force experienced by himself. (EINSTEIN, 1916, p.69-70).

¹⁸ [...] he places one of two identically constructed clocks at the centre of the circular disc, and the other on the edge of the disc, so that they are at rest relative to it. We now ask ourselves whether both clocks go at the same rate from the standpoint of the nonrotating Galileian reference-body K . As judged from this body, the clock at the centre of the disc has no velocity, whereas the clock at the edge of the disc is in motion relative to K in consequence of the rotation. According to a result obtained in [...] it follows that the latter clock goes at a rate permanently slower than that of the clock at the centre of the circular disc, i.e. as observed from K . It is obvious that the same effect would be noted by an observer whom we will imagine sitting alongside his clock at the centre of the circular disc. Thus on our circular disc, or, to make the case more general, in every gravitational field, a clock will go more quickly or less quickly, according to the position in which the clock is situated (at rest). For this reason it is not possible to obtain a reasonable definition of time with the aid of clocks which are arranged at rest with respect to the body of reference. A similar difficulty presents itself

É interessante que nesta fase as definições de coordenadas espaciais também apresentam dificuldades, pois ao aplicar sua vareta de medição padrão (esta vareta deve ser curta em comparação com o raio do disco) tangencialmente a borda do disco, a partir do sistema galileano, o resultado obtido tendo o comprimento desta vareta, será menor do que o próprio observador, pois os corpos quando estão em movimento sofrem um encurtamento na direção deste movimento. Por outro lado, a haste de medição não sofrerá um encurtamento de comprimento, conforme julgado por K, mas isso se for aplicada ao disco na direção do raio (EINSTEIN, 1916).

Observe que usando a noção de circunferência, gozamos que se o observador medir o perímetro e o diâmetro do disco usando a haste de medição, ao dividir um pelo outro obtemos que o quociente não será o famoso valor π , mas um valor maior, pois, ao longo desta consideração, temos que usar o sistema galileano (não rotativo) K como corpo de referência, uma vez que só podemos assumir a validade dos resultados da Teoria Especial da Relatividade (sentido restrito) em relação a K (em relação a K_1 prevalece um campo gravitacional) ¹⁹. Enquanto se o disco estivesse em estado de repouso, forneceria π . Logo, isso prova que as proposições da geometria euclidiana não podem segurar exatamente no disco giratório, nem em geral em um campo gravitacional, pelo menos se atribua o comprimento I à haste em todas as posições e em todas as orientações. Daí a ideia de uma linha reta também perde seu significado. Não estamos, portanto, em condições de definir exatamente as coordenadas x, y, z em relação ao disco por meio do método usado na discussão da Teoria Especial, e enquanto as coordenadas e os tempos dos eventos não forem definidos, não podemos atribuir um significado exato às leis naturais em que elas ocorrem²⁰ (EINSTEIN, 1916).

Com base na Geometria Euclidiana, Einstein acrescenta que se nos é dada uma superfície (por exemplo, um elipsoide) no espaço tridimensional euclidiano, então existe para esta superfície uma geometria bidimensional, tanto quanto uma superfície plana. Gauss assumiu a tarefa de tratar essa geometria bidimensional desde os primeiros princípios, sem fazer uso do

when we attempt to apply our earlier definition of simultaneity in such a case, but I do not wish to go any farther into this question. (EINSTEIN, 1916, p.70).

¹⁹ Throughout this consideration we have to use the Galileian (non-rotating) system K as reference-body, since we may only assume the validity of the results of the special theory of relativity relative to K (relative to K_1 a gravitational field prevails). (EINSTEIN, 1916, p. 71).

²⁰ This proves that the propositions of Euclidean geometry cannot hold exactly on the rotating disc, nor in general in a gravitational field, at least if we attribute the length I to the rod in all positions and in every orientation. Hence the idea of a straight line also loses its meaning. We are therefore not in a position to define exactly the co-ordinates x, y, z relative to the disc by means of the method used in discussing the special theory, and as long as the co-ordinates and times of events have not been defined, we cannot assign an exact meaning to the natural laws in which these occur (EINSTEIN, 1916, p.70-71).

fato de que a superfície pertence a um continuum euclidiano de três dimensões (EINSTEIN, 1916).

Antes de continuarmos esta ideia, para esclarecer a ideia de continuum euclidiano, supomos uma mesa de mármore plana, sem buracos ou algo que faça atrito, como nossa superfície plana, na qual tomamos pontos dispersos presentes nesta mesa, tal que, podemos passar continuamente de um ponto para um “vizinho”, e repetindo esse processo um número grande de vezes, ou, em outras palavras, passando de um ponto para outro sem realizar “saltos”. Se imaginarmos construções feitas com hastes rígidas na superfície (semelhante para aquela com a mesa de mármore), devemos descobrir que diferentes leis valem para estes, resultantes da geometria plana euclidiana. Seja a superfície então não euclidiana continuum em relação às hastes, ou seja, considere por exemplo, que a mesa de mármore sofreu com uma variação local de temperatura, ocasionando buracos, assim não podemos definir coordenadas cartesianas na superfície. Em suma disto, Gauss indicou os princípios segundo os quais podemos tratar a geometria conforme as relações na superfície, e assim apontou o caminho para o método de Riemman se tratando de um continuum multidimensional não-euclidiano. Dessarte, temos que os matemáticos já há muito resolveram os problemas formais, aos quais somos levados ao postulado geral da relatividade²¹ (EINSTEIN, 1916).

Em suma, para o desenvolvimento da Teoria da Relatividade necessitamos compreender a geometria euclidiana e não-euclidiana. De acordo com Gauss, “esse modo analítico e geométrico combinado de lidar com o problema pode ser resolvido da seguinte maneira”²² (EINSTEIN, 1916, p.75), observe o seguinte sistema de curvas arbitrárias que foi desenhado em uma superfície de mesa (denotaremos como Figura 1):

²¹ If we are given a surface (e.g. an ellipsoid) in Euclidean three-dimensional space, then there exists for this surface a two-dimensional geometry, just as much as for a plane surface. Gauss undertook the task of treating this two-dimensional geometry from first principles, without making use of the fact that the surface belongs to a Euclidean continuum of three dimensions. If we imagine constructions to be made with rigid rods in the surface (similar to that above with the marble slab), we should find that different laws hold for these from those resulting on the basis of Euclidean plane geometry. The surface is not a Euclidean continuum with respect to the rods, and we cannot define Cartesian co-ordinates in the surface. Gauss indicated the principles according to which we can treat the geometrical relationships in the surface, and thus pointed out the way to the method of Riemman of treating multi-dimensional, non-Euclidean continuum. Thus, it is that mathematicians long ago solved the formal problems to which we are led by the general postulate of relativity. (EINSTEIN, 1916, p.74).

²² [...] this combined analytical and geometrical mode of handling the problem can be arrived at in the following way (EINSTEIN, 1916, p.75).

Figura 5: Sistemas de curvas arbitrárias.

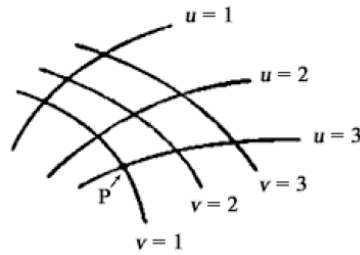


Fig. 4

Fonte: *Relativity: The Special and General Theory* (Einstein, 1916, p. 75).

Considere as curvas denotadas como $u = 1$, $u = 2$ e $u = 3$. Entre as curvas $u = 1$ e $u = 2$, imaginaremos um número infinitamente maior de todos os quais correspondem a números reais situados entre 1 e 2, desse modo, teremos que o sistema de curvas u será infinitamente denso, assim cobrindo toda a superfície da mesa. Porém, as curvas denotadas como u não podem se cruzar e assim no decorrer da mesa devem apenas para um lado tender, em que, conseqüentemente, obtemos um valor perfeitamente definido de u pertencente a todos os pontos da superfície. Usando esta mesma abordagem situaremos as curvas denotadas como v . Assim, os valores de u e de v estão presentes em todos os pontos da mesa, os quais chamaremos de coordenadas referentes a superfície da mesa. A exemplo, se o ponto O no diagrama tem coordenadas $u = 3$ e $v = 1$, os dois pontos vizinhos então correspondem às coordenadas P : u, v , tal que (EINSTEIN, 1916):

$$P_1 : u + du, v + dv,$$

em que du e dv significam números pequenos.

Agora, se queremos indicar a distância (intervalo linha) entre P e P_1 através de uma haste pequena, usando do próprio número pequeno denotado como ds , teremos de acordo com Gauss:

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

em que g_{11} , g_{12} , g_{22} , são denotações das magnitudes dependentes das curvas u e v , determinando o comportamento das hastes em relação as mesmas curvas (EINSTEIN, 1916).

No caso em que os pontos presentes na superfície formam um continuum euclidiano com referência às hastes de medição, é possível desenhar as curvas u e v e anexar os valores a eles de tal maneira que simplesmente temos (EINSTEIN, 1916):

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Logo, sob essas condições, as curvas u e as curvas v são linhas retas no sentido de geometria euclidiana, e são perpendiculares entre si. Aqui o Gaussiano coordenadas são

basicamente cartesianas. É claro que as coordenadas de Gauss nada mais são do que uma associação de dois conjuntos de números com os pontos da superfície considerada, de tal forma que a natureza dos valores numéricos difere muito ligeiramente uns dos outros, estando associados com pontos vizinhos "no espaço"²³ (EINSTEIN, 1916).

Esta situação toda foi desenvolvido a partir do continuum de duas dimensões, mas o mesmo método pode ser aplicado para o continuum de três, quatro ou mais dimensões. A amostra, se estivéssemos tratando do continuum de quatro dimensões, poderíamos representá-lo, sendo cada ponto do continuum associado arbitrariamente a quatro números denotados como x_1, x_2, x_3 e x_4 , que serão nossas coordenadas. A distância mensurável ds está interligada aos pontos adjacentes P e P_1 , sendo bem definida pelo lado físico, então esta será a fórmula válida para esta situação (EINSTEIN, 1916):

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_2dx_3 \dots g_{44}dx_4^2,$$

tal que as magnitudes g_{11} e com tal característica por diante, dispõem de valores que variam com a posição no continuum. Quando o continuum é euclidiano, é possível associar as coordenadas x_1 a x_4 como os pontos do continuum, onde (EINSTEIN, 1916):

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Observe que neste caso se mantém no continuum quadrimensional, e esta dedução é análoga nas ademais medidas dimensionais. No entanto, o tratamento de Gauss para ds^2 que demos acima nem sempre é possível, sendo somente possível quando as regiões superficialmente pequenas do continuum em consideração podem ser consideradas como contínuos euclidianos. A exemplo, isso obviamente se aplica no caso da mesa de mármore em comparação com a mesa que sofreu uma variação local de temperatura. A temperatura é praticamente constante para uma pequena parte da mesa, e assim o comportamento geométrico das hastes é quase como deveria ser de acordo com as regras da geometria euclidiana. Desse modo, as imperfeições da construção de quadrados não se mostram claramente até que esta construção se estenda por uma porção considerável da superfície da mesa²⁴ (EINSTEIN, 1916).

²³ Under these conditions, the u-curves and v-curves are straight lines in the sense of Euclidean geometry, and they are perpendicular to each other. Here the Gaussian co-ordinates are simply Cartesian ones. It is clear that Gauss co-ordinates are nothing more than an association of two sets of numbers with the points of the surface considered, of such a nature that numerical values differing very slightly from each other are associated with neighboring points "in space." (EINSTEIN, 1916, p. 76).

²⁴ [...] the Gauss treatment for ds^2 which we have given above is not always possible. It is only possible when sufficiently small regions of the continuum under consideration may be regarded as Euclidean continua. For example, this obviously holds in the case of the marble slab of the table and local variation of temperature. The temperature is practically constant for a small part of the slab, and thus the geometrical behavior of the rods is almost as it ought to be according to the rules of Euclidean geometry. Hence the imperfections of the construction of squares in the previous section do not show themselves clearly until this construction is extended over a considerable portion of the surface of the table. (EINSTEIN, 1916, p. 122).

Em síntese, Gauss inventou um método para o tratamento matemático de contínuos espaços em geral, em que "relações de tamanho" ("distâncias" entre pontos) são definidas. A cada ponto de um continuum são atribuídos tantos números (coordenadas gaussianas) como o continuum tem dimensões. Isso é feito de tal forma, que apenas um significado pode ser anexado à atribuição, onde os números (coordenadas gaussianas) que diferem por uma quantidade indefinidamente pequena são atribuídos a pontos adjacentes. O sistema Gaussiano de coordenadas é uma generalização lógica do sistema de coordenadas cartesianas, isso é também aplicável a contínuos não euclidianos, mas apenas quando, com respeito ao "tamanho" definido ou "distância", pequenas partes do continuum em consideração se comportam mais como um sistema euclidiano²⁵ (EINSTEIN, 1916).

Em síntese do continuum espaço-tempo, prosseguiremos agora relacionando a Teoria da Relatividade Restrita com o euclidiano continuum. Conforme a relatividade no sentido restrito, determinados sistemas de coordenadas têm-se preferência para sua descrição do quadridimensional continuum espaço-tempo, o que chamamos de "sistemas de coordenadas galileanos". Nos sistemas de coordenadas galileanos em descrição do quadridimensional continuum espaço-tempo, gozamos que as quatro coordenadas x , y , z , t , determinam o ponto do continuum quadridimensional (evento). Portanto, através das equações de Lorentz podemos realizar a transição de um sistema galileu para outro, estes que estão se movendo de forma uniforme em relação ao primeiro. Esta transição formam uma base para realizar derivação das deduções da Teoria da Relatividade Restrita, "e em si não são nada mais do que a expressão de a validade universal da lei de transmissão da luz para todos os sistemas galileanos de referência." (EINSTEIN, 1916, p. 78).

Para satisfazer a condição usando a transformação de Lorentz, consideramos dois eventos vizinhos, cuja posição relativa no continuum quadridimensional será representada pelo corpo de referência galileano K , pelas diferenças de coordenadas espaciais dx , dy , dz e a diferença de tempo dt . Já ao segundo sistema galileu, assumamos que as diferenças serão denotadas para os dois eventos como dx_1 , dy_1 , dz_1 , dt_1 . Logo, as magnitudes que cumprirão

²⁵ Gauss invented a method for the mathematical treatment of continua in general, in which "size-relations" ("distances" between neighboring points) are defined. To every point of a continuum are assigned as many numbers (Gaussian coordinates) as the continuum has dimensions. This is done in such a way, that only one meaning can be attached to the assignment, and that numbers (Gaussian coordinates) which differ by an indefinitely small amount are assigned to adjacent points. The Gaussian coordinate system is a logical generalization of the Cartesian co-ordinate system. It is also applicable to non-Euclidean continua, but only when, with respect to the defined "size" or "distance," small parts of the continuum under consideration behave more nearly like a Euclidean system, the smaller the part of the continuum under our notice. (EINSTEIN, 1916, p. 77).

essa condição serão as relações derivadas para as coordenadas que são válidas também para diferentes coordenadas, mas também para diferentes coordenadas diferenciais (diferenças indefinidamente pequenas), ou seja, teríamos (EINSTEIN, 1916):

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + c^2 dt^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 + c^2 dt_1^2.$$

Em suma, através da validade da transformação de Lorentz, expressar a magnitude que se refere a dois pontos adjacentes do continuum quadrimensional e fornecerá:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + c^2 dt^2$$

O qual será o mesmo valor para todos os corpos de referência (galileanos) que foram selecionados. Porém, ao substituirmos $x, y, z, \sqrt{-I \cdot ct}$, por x_1, x_2, x_3 e x_4 , obtemos como consequência a implicação de (EINSTEIN, 1916):

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

Isso independente da escolha de qual corpo de referência estamos tratando. Se designa tal situação como magnitude ds de “distância” dos dois eventos ou pontos quadrimensionais. Mas, diferente da Teoria da Relatividade (no sentido restrito), na Teoria da Relatividade Geral o continuo espaço-tempo não é continuum euclidiano. Em suma das informações já obtidas, é possível relacionar as coordenadas espaço-temporais com coordenadas cartesianas quadrimensionais conforme a lei da constância da velocidade de aperto. Todavia, a regra geral da Teoria da Relatividade não pode reter a esta lei, afinal, a velocidade da luz dependerá sempre das coordenadas quando um campo gravitacional está presente (EINSTEIN, 1916).

Dessa maneira, segundo o princípio Geral da Relatividade, o continuum espaço-tempo não pode ser considerado como uma euclidiana, mas temos aqui um caso geral, correspondente à mesa de mármore com variações locais de temperatura, e que conhecemos como exemplo, de um continuum bidimensional (EINSTEIN, 1916).

Disto, como na situação da mesa de mármore com variações locais de temperatura ser impossível construir uma relação cartesiana com sistema de coordenadas de hastes iguais, então aqui é impossível construir um sistema (referência corpo) de corpos rígidos e relógios, que devem ser de tal natureza que as hastes de medição e relógios, dispostos rigidamente um em relação ao outro, conseguirão indicar a posição e a hora diretamente²⁶ (EINSTEIN, 1916).

²⁶ [...] according to the general principle of relativity, the space-time continuum cannot be regarded as a Euclidean one, but that here we have the general case, corresponding to the marble slab with local variations of temperature, and with which we made acquaintance as an example of a two-dimensional continuum. Just as it was there impossible to construct a Cartesian coordinate system from equal rods, so here it is impossible to build up a system (reference body) from rigid bodies and clocks, which shall be of such a nature that measuring-rods and clocks, arranged rigidly with respect to one another, shall indicate position and time directly. (EINSTEIN, 1916, p. 80).

Referimo-nos em relação ao continuum espaço-tempo quadrimensional as coordenadas de Gauss, onde atribuímos a cada ponto do contínuo (evento), quatro valores denotados como x_1 , x_2 , x_3 e x_4 , (coordenadas), no qual se enumera os pontos do contínuo espaço com uma forma definida, mas arbitrária. Há exemplo, a possibilidade de atribuir a um evento estas coordenadas particulares, no qual, dispõem de um ponto material com qualquer tipo de movimento. Se este ponto tivesse apenas uma existência momentânea sem duração, então seria descrito no espaço-tempo através de um único sistema de valores x_1 , x_2 , x_3 e x_4 . Desta maneira, sua existência permanente deve ser caracterizada por um número infinitamente grande de tais sistemas de valores, cujos valores coordenados são tão próximos que dão continuidade correspondente ao ponto material, dispomos conseqüentemente de uma linha (unidimensional) nas quatro coordenadas pertencentes ao contínuo dimensional. Da mesma forma, quaisquer dessas linhas em nosso continuum correspondem a muitos pontos em movimento. As únicas declarações tendo em conta estes pontos que podem reivindicar uma existência física são, na realidade, as declarações sobre seus encontros. Em nosso tratamento matemático, este encontro se expressa no fato de que as duas linhas que representam os movimentos dos pontos em questão têm um sistema particular de valores de coordenadas, x_1 , x_2 , x_3 e x_4 , em comum. Depois de madura consideração, o leitor sem dúvida admitirá que, na realidade tais encontros constituem a única evidência real de uma natureza espaço-temporal que podemos encontrar em declarações físicas²⁷ (EINSTEIN, 1916).

Relacionar o movimento de um ponto material a um corpo de referência, é a mesma base para afirmarmos que há os encontros de ponto com pontos particulares do corpo de referência, podendo determinar os valores correspondentes do tempo pela observação de encontros do corpo com relógios, isso em conjunto com a observação obtida através de horários dados pelo encontro dos ponteiros dos relógios com pontos particulares em lugares determinados do espaço analisado, ou seja, “é exatamente o mesmo em no caso das medições do espaço por meio de varetas de medição, pois uma pequena consideração será exposição”

²⁷ [...] a material point with any kind of motion. If this point had only a momentary existence without duration, then it would be described in space-time by a single system of values x_1 , x_2 , x_3 , x_4 . Thus, its permanent existence must be characterized by an infinitely large number of such systems of values, the co-ordinate values of which are so close together as to give continuity; corresponding to the material point, we thus have a (uni-dimensional) line in the four-dimensional continuum. In the same way, any such lines in our continuum correspond to many points in motion. The only statements having regard to these points which can claim a physical existence are in reality the statements about their encounters. In our mathematical treatment, such an encounter is expressed in the fact that the two lines which represent the motions of the points in question have a particular system of co-ordinate values, x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , in common. After mature consideration the reader will doubtless admit that in reality such encounters constitute the only actual evidence of a time-space nature with which we meet in physical statements. (EINSTEIN, 1916, p. 81).

(EINSTEIN, 1916, p. 81). Conseguimos afirmar que toda descrição física se resolve em um número de afirmações, cada uma das quais se refere à coincidência espaço-temporal de dois eventos, que mediante conveniência, denotaremos como A e B. Em termos de coordenadas gaussianas, cada afirmação é expressa pela concordância de suas quatro coordenadas x_1 , x_2 , x_3 e x_4 . Na realidade, a descrição do continuum tempo-espaço mediante as coordenadas de Gauss substitui completamente a descrição com o auxílio de um corpo de referência, sem sofrer os defeitos deste último modo de descrição, detemos que não está ligada ao caráter euclidiano do continuum que deve ser representado²⁸ (EINSTEIN, 1916).

Em suma de toda a descrição relatada, conseguimos descrever que a forma usada na relatividade restrita, sendo “todos os corpos de referência K, K_1 , etc., são equivalentes para a descrição de fenômenos naturais (formulação das leis gerais da natureza), qualquer que seja o seu estado de movimento” (EINSTEIN, 1916, 2002, p.83), terá de ser modificada, pois na relatividade geral não é possível o uso dos corpos de referências rígidos no espaço-tempo. Com fim de caracterizar a relatividade geral, teremos de usar o sistema de coordenadas de Gauss no lugar do corpo de referência, afinal, a ideia fundamental do princípio geral da relatividade será tomar todos os sistemas de coordenadas gaussianas, e estes essencialmente equivalentes para a formulação das leis gerais da natureza (EINSTEIN, 1916).

Com objetivo de compreendermos a comparação da ideia da relatividade geral de acordo com a Teoria da Relatividade Especial, dispomos que as equações responsáveis a expressar as leis gerais da natureza são transformadas para as equações da mesma forma quando fazemos o uso da transformação de Lorentz, isto substituindo as variáveis espaço-temporais x, y, z, t , de um corpo de referência K (galileano) pelas variáveis de espaço-tempo x^1, y^1, z^1, t^1 de um novo corpo de referência K_1 . De acordo com a Teoria da Relatividade Geral, por outro lado, pela aplicação de substituições arbitrárias das variáveis de Gauss x_1, x_2, x_3, x_4 , as equações devem passar para equações da mesma forma, considerando isso para cada transformação (não apenas a transformação de Lorentz) correspondente à transição de um sistema de coordenadas de Gauss para outro²⁹ (EINSTEIN, 1916).

²⁸ Every physical description resolves itself into a number of statements, each of which refers to the space-time coincidence of two events A and B. In terms of Gaussian co-ordinates, every such statement is expressed by the agreement of their four co-ordinates x_1, x_2, x_3, x_4 . Thus, in reality, the description of the time-space continuum by means of Gauss co-ordinates completely replaces the description with the aid of a body of reference, without suffering from the defects of the latter mode of description; it is not tied down to the Euclidean character of the continuum which has to be represented. (EINSTEIN, 1916, p. 81-82).

²⁹ According to the special theory of relativity, the equations which express the general laws of nature pass over into equations of the same form when, by making use of the Lorentz transformation, we replace the space-time variables x, y, z, t , of a (Galileian) reference-body K by the space-time variables x^1, y^1, z^1, t^1 , of a new referencebody K_1 . According to the general theory of relativity, on the other hand, by application of

Além disso, com objetivo de correlacionarmos a visão “antiga” tridimensional a Teoria da Relatividade Especial, temos de se basear na referência dos domínios galileanos, ou seja, aqueles em que não existe campo gravitacional. A este respeito um corpo de referência galileu serve como um corpo de referência, isto basicamente fornece um corpo rígido em estado de movimento, escolhido de tal forma, que a lei galileana do movimento retilíneo uniforme de pontos materiais "isolados" tem relação válida a ele³⁰ (EINSTEIN, 1916).

É significativo ressaltar que em campos gravitacionais não existem corpos rígidos com propriedades euclidianas, em outras palavras, o fictício corpo rígido de referência não tem utilidade na Teoria da Relatividade Geral, onde a definição física do tempo é feita diretamente com o auxílio de relógios, não tendo o mesmo grau de plausibilidade presente na Teoria da Relatividade Restrita. Este uso de corpos não rígidos como referência surge dessa necessidade, onde são como um todo, não apenas movendo-se de qualquer maneira, mas sofrendo alterações durante o seu movimento. Os relógios (para lei do movimento são de qualquer tipo) servem para a definição de tempo neste caso (EINSTEIN, 1916).

Usando a perspectiva de Einstein, imagine que cada um desses relógios fixos em um ponto do corpo de referência (superfície não rígida), conseqüentemente devem satisfazer apenas a condição de que as "leituradas" que são observados simultaneamente em relógios adjacentes (no espaço), serão diferentes uns dos outros por uma quantidade indefinidamente pequena. Este corpo de referência não rígido, é chamado pelo autor do livro (Einstein) de "molusco-referência", no qual, basicamente este equivalente a um gaussiano de quatro dimensões exposto em um sistema de coordenadas escolhido arbitrariamente. O que concede ao "molusco" uma certa compreensibilidade em comparação com o sistema de coordenadas de Gauss seria a retenção formal da existência separada das coordenadas espaciais em oposição ao tempo coordenada, em que cada ponto do molusco é tratado como um ponto-espaço, e cada ponto material que está em repouso relativamente a ele como em repouso, desde que o molusco seja considerado como corpo referência. O princípio geral da relatividade exige que todos esses moluscos possam ser usados como organizações de referência, com igual direito e igual sucesso

arbitrary substitutions of the Gauss variables x_1, x_2, x_3, x_4 , the equations must pass over into equations of the same form; for every transformation (not only the Lorentz transformation) corresponds to the transition of one Gauss co-ordinate system into another. (EINSTEIN, 1916, p.83).

³⁰ The special theory of relativity has reference to Galileian domains, i.e. to those in which no gravitational field exists. In this connection a Galileian reference-body serves as body of reference, i.e. a rigid body the state of motion of which is so chosen that the Galileian law of the uniform rectilinear motion of "isolated" material points holds relatively to it. (EINSTEIN, 1916, p. 84).

na formulação das leis gerais da natureza, em que as próprias leis devem ser totalmente independentes da escolha do “molusco”³¹ (EINSTEIN, 1916).

A partir do embasamento teórico e com fins de solucionar o problema de gravitação com base no princípio geral da relatividade, tem-se a consideração em que o domínio não dispõe de um campo gravitacional em relação ao corpo de referência galileano K (denotado como domínio galileu). Usando o domínio como um sistema aleatório de coordenadas de Gauss, um “molusco” como corpo de referência (K_1), um campo gravitacional (G), uma vareta de medição e relógios, temos de acordo com Einstein, que somos capazes de formular a hipótese de que se a influência do campo gravitacional em varetas de medição, relógios e pontos materiais em movimento, continuaram a ocorrer de acordo com as mesmas leis, mesmo no caso em que o campo gravitacional predominante não é derivável do cuidado especial galileano, isso simplesmente por meio de uma transformação de coordenadas³² (EINSTEIN, 1916).

Com intuito de formular uma lei, em que o comportamento espaço-temporal do campo gravitacional G , que foi derivado do caso especial galileu simplesmente pela transformação de coordenadas, válido independentemente do tipo de corpo de referência escolhido ou do tipo de campo gravitacional especial, necessitamos das seguintes exigências: a generalização deverá da mesma forma satisfazer o postulado da relatividade restrita; mesmo havendo outras questões, apenas a massa inercial é a sua energia, sendo responsável a exercer efeito em um campo gravitacional; e o conjunto do campo gravitacional e a matéria devem satisfazer a lei da conservação da energia. Nesse sentido, o princípio da relatividade geral nos permite determinar a influência do campo gravitacional no curso de todos os processos que ocorrem de acordo com as leis, até mesmo quando um campo gravitacional está ausente (EINSTEIN, 1916).

Em síntese, a Teoria da Gravitação derivou do postulado geral da relatividade, o qual remove o defeito ligado a mecânica clássica trazido pela relatividade restrita, referindo-se a

³¹ We have to imagine each of these clocks fixed at a point on the non-rigid reference-body. These clocks satisfy only the one condition, that the "readings" which are observed simultaneously on adjacent clocks (in space) differ from each other by an indefinitely small amount. This non-rigid reference-body, which might appropriately be termed a "reference-mollusc", is in the main equivalent to a Gaussian four-dimensional coordinate system chosen arbitrarily. That which gives the "mollusc" a certain comprehensibility as compared with the Gauss co-ordinate system is the (really unjustified) formal retention of the separate existence of the space co-ordinates as opposed to the time co-ordinate. Every point on the mollusc is treated as a space-point, and every material point which is at rest relatively to it as at rest, so long as the mollusc is considered as reference body. The general principle of relativity requires that all these molluscs can be used as reference-bodies with equal right and equal success in the formulation of the general laws of nature; the laws themselves must be quite independent of the choice of mollusc. (EINSTEIN, 1916, p.84).

³² [...] that the influence of the gravitational field on measuring rods, clocks and freely-moving material points continues to take place according to the same laws, even in the case where the prevailing gravitational field is not derivable from the Galileian special case, simply by means of a transformation of co-ordinates. (EINSTEIN, 1916, p.86).

uma interpretação da lei empírica da igualdade de massa inercial e gravitacional, também explicando o resultado obtido da observação astronômica, contra a qual a mecânica clássica é importante. Se limitarmos a aplicação da teoria ao caso em que os campos gravitacionais podem ser considerados fracos, e em que todas as massas se movem em relação ao sistema de coordenadas com velocidades que são pequenas em comparação com a velocidade da luz, obtemos então como primeira aproximação a Teoria Newtoniana. Assim, a última teoria é obtida aqui sem nenhuma suposição particular, enquanto Newton teve que introduzir a hipótese de que a força de atração entre pontos materiais que se atraem mutuamente é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Portanto, se aumentarmos a precisão do cálculo, praticamente todos os desvios da teoria de Newton aparecem, no entanto, escapam ao teste da observação devido ao seu tamanho pequeno³³ (EINSTEIN, 1916).

Todavia, devemos chamar a atenção aqui para um desses desvios. De acordo com a teoria de Newton, um planeta gira em torno do Sol em uma elipse, que manteria permanentemente sua posição em relação às estrelas fixas. Se pudéssemos desconsiderar o movimento das próprias estrelas fixas e a ação dos outros planetas em consideração, corrigindo o observado movimento dos planetas para essas duas influências, e se a teoria de Newton estiver estritamente correta, nós devemos obter para a órbita do planeta uma elipse, que é fixada com referência às estrelas fixas. Esta dedução, que pode ser testada com grande precisão, foi confirmada para todos os planetas menos um, isso a partir da precisão de observação que se é atingível no momento (da publicação do livro, logo, 1916). Esta exceção seria Mercúrio, o planeta que fica mais próximo do Sol. Desde a época do estudioso matemático e físico Le Verrier, sabe-se que a elipse correspondente à órbita de Mercúrio, depois de corrigida para as influências mencionadas acima, não é estacionário em relação às estrelas fixas, mas gira extremamente lentamente no plano da órbita e no sentido do movimento orbital. O valor obtido para este movimento de rotação da elipse orbital foi de 43 segundos de arco por século, uma quantidade garantida para estar correta dentro de alguns segundos do arco. Esse efeito pode ser

³³ If we confine the application of the theory to the case where the gravitational fields can be regarded as being weak, and in which all masses move with respect to the coordinate system with velocities which are small compared with the velocity of light, we then obtain as a first approximation the Newtonian theory. Thus, the latter theory is obtained here without any particular assumption, whereas Newton had to introduce the hypothesis that the force of attraction between mutually attracting material points is inversely proportional to the square of the distance between them. If we increase the accuracy of the calculation, deviations from the theory of Newton make their appearance, practically all of which must nevertheless escape the test of observation owing to their smallness. (EINSTEIN, 1916, p.87-88).

explicado por meio da mecânica clássica, apenas na suposição de hipóteses que têm pouca probabilidade, e que foram concebidos exclusivamente para este fim³⁴ (EINSTEIN, 1916).

Basicamente a Teoria da Relatividade Geral implica que a elipse de cada planeta do sistema solar, deve girar necessariamente conforme a citação anterior, com exceção de Mercúrio, o qual tem ainda na publicação do livro elaborado por Einstein, não tinha sua rotação detectada nas observações, mas esta informação é facilmente encontrada hoje (século XXI) devido aos avanços conquistados tanto na Física quanto Astronomia, a qual um viaja pelo espaço a quase 47 quilômetros por segundo, completando um ano de rotação em 88 dias terrestres (NASA, 2021).

Além desta situação gerada pela ideia do princípio da relatividade geral, é possível saber tanto a curvatura dos raios de luz pelo campo gravitacional do Sol, quanto o deslocamento das linhas espectrais de luz que chegam até o planeta Terra através das grandes estrelas, em comparação com as linhas correspondentes para a luz produzida em uma maneira análoga terrestre (ou seja, do mesmo tipo de átomo). Einstein ainda reflete sobre a questão de como o Universo, considerado como um todo, nos sugere, no que diz respeito ao espaço e tempo, que este é infinito. Além disso, existem estrelas em todos os lugares, de modo que a densidade da matéria, embora muito variável em detalhes, a média em todos os lugares é o mesmo. Em outras palavras, por mais longe que possamos viajar no espaço, deveríamos encontrar em toda parte um enxame atenuado de estrelas fixas de mesmo tipo e densidade³⁵ (EINSTEIN, 1916).

Complementando (Einstein, 1916) em negação a última teoria de Newton, onde requer que o Universo deveria ter uma espécie de centro em que a densidade das estrelas é um máximo, e que à medida que avançamos para fora deste centro, a densidade de grupo das estrelas deve

³⁴ We must draw attention here to one of these deviations. According to Newton's theory, a planet moves round the sun in an ellipse, which would permanently maintain its position with respect to the fixed stars, if we could disregard the motion of the fixed stars themselves and the action of the other planets under consideration. Thus, if we correct the observed motion of the planets for these two influences, and if Newton's theory be strictly correct, we ought to obtain for the orbit of the planet an ellipse, which is fixed with reference to the fixed stars. This deduction, which can be tested with great accuracy, has been confirmed for all the planets save one, with the precision that is capable of being obtained by the delicacy of observation attainable at the present time. The sole exception is Mercury, the planet which lies nearest the sun. Since the time of Leverrier, it has been known that the ellipse corresponding to the orbit of Mercury, after it has been corrected for the influences mentioned above, is not stationary with respect to the fixed stars, but that it rotates exceedingly slowly in the plane of the orbit and in the sense of the orbital motion. The value obtained for this rotary movement of the orbital ellipse was 43 seconds of arc per century, an amount ensured to be correct to within a few seconds of arc. This effect can be explained by means of classical mechanics only on the assumption of hypotheses which have little probability, and which were devised solely for this purpose. (EINSTEIN, 1916, p. 88).

³⁵ [...] over the question as to how the universe, considered as a whole, is to be regarded, the first answer that suggests itself to us is surely this: As regards space (and time) the universe is infinite. There are stars everywhere, so that the density of matter, although very variable in detail, is nevertheless on the average everywhere the same. In other words: However far we might travel through space, we should find everywhere an attenuated swarm of fixed stars of approximately the same kind and density. (EINSTEIN, 1916, p.90).

diminuir, até que finalmente, a grandes distâncias, é sucedida por uma região infinita de vazio. Pensando nisso, o universo estelar deveria ser uma ilha finita no oceano infinito do espaço³⁶, em que, de acordo com a teoria de Newton, o número de "linhas de força" que vêm do infinito e terminam em uma massa m , é proporcional à massa m . Se, em média, a densidade de massa p_0 é constante em todo o Universo dízimo, então uma esfera de volume V pode incluir o homem médio $p_0 V$. Assim, o número de linhas de força que passam pela superfície F da esfera em seu interior é proporcional a $p_0 V$. Para a área unitária da superfície da esfera o número de linhas de força que entram na esfera é, portanto, proporcional a $p_0 V/F$ ou para $p_0 R$. Portanto, a intensidade do campo na superfície acabaria se tornando infinita conforme for aumentando o raio R da esfera, o que é impossível³⁷ (EINSTEIN, 1916).

Todavia, está concepção não é satisfatória, porque em seu resultado detemos que a luz emitida pelas estrelas e também pelas estrelas individuais do sistema estelar, estão perpetuamente passando para o espaço infinito, nunca mais retornando e entrando em interação com outros objetos da natureza, de sorte, “um universo material tão finito pode estar destinado a tornar-se gradual, mas sistematicamente empobrecido” (EINSTEIN, 1916, p.91).

Para escapar desse dilema, o físico alemão Seeliger, sugeriu uma modificação da lei de Newton, em que ele assume para grandes distâncias a força de atração entre duas massas, diminuindo rapidamente o que resultaria da lei do inverso do quadrado. Isto posto, é possível que a densidade média da matéria seja constante em todos os lugares, até o infinito, sem campos gravitacionais infinitamente grandes sendo produzidos. Por isso, libertamo-nos da concepção desagradável de que o Universo material deveria possuir algo da natureza de um centro. Claro que compramos nossa emancipação das dificuldades fundamentais mencionado, ao custo de uma modificação e complicação da lei de Newton que não tem associação empírica nem teórica. Podemos imaginar inúmeras leis que serviriam ao mesmo propósito, sem que pudéssemos expor uma razão pela qual um deles é preferível aos demais, porque qualquer uma dessas leis seria

³⁶ The latter theory rather requires that the universe should have a kind of centre in which the density of the stars is a maximum, and that as we proceed outwards from this centre the group-density of the stars should diminish, until finally, at great distances, it is succeeded by an infinite region of emptiness. The stellar universe ought to be a finite island in the infinite ocean of space. (EINSTEIN, 1916, p. 90).

³⁷ According to the theory of Newton, the number of "lines of force" which come from infinity and terminate in a mass m is proportional to the mass m . If, on the average, the Mass density p_0 is constant throughout the universe, then a sphere of volume V will enclose the average mass $p_0 V$. Thus, the number of lines of force passing through the surface F of the sphere into its interior is proportional to $p_0 V$. For unit area of the surface of the sphere the number of lines of force which enters the sphere is thus proportional to $p_0 V/F$ or to $p_0 R$. Hence the intensity of the field at the surface would ultimately become infinite with increasing radius R of the sphere, which is impossible. (EINSTEIN, 1916, p. 91).

fundada tão pouco sobre princípios teóricos mais gerais, como é a lei de Newton³⁸ (EINSTEIN, 1916).

Surgindo a possibilidade de um universo “finito” e ainda “ilimitado”, decorre a possibilidade de conceber espaços fechados sem limites, entre estes, o espaço esférico e o elíptico, afinal todos os pontos neles são equivalentes. Como resultado desta discussão, surge uma questão muito interessante para astrônomos e físicos, no qual, o Universo em que vivemos é infinito ou finito em comparação ao universo esférico, mas nossa experiência até a relatividade restrita, está longe de ser suficiente para nos permitir responder a esta questão. Contudo, a Teoria Geral da Relatividade permite respondê-la com um grau moderado de certeza³⁹ (EINSTEIN, 1916).

Por fim, conseguimos retratar a estrutura do espaço segundo a Teoria da Relatividade Geral, sendo as propriedades geométricas dependentes e determinadas pela matéria. Portanto, podemos tirar conclusões sobre a estrutura geométrica do Universo somente se baseando nas considerações do estado da matéria, a transformando em algo conhecido. Logo, “sabemos por experiência que, para um sistema de coordenadas escolhido, as velocidades das estrelas são pequenas em comparação com a velocidade de transmissão da luz”⁴⁰ (EINSTEIN, 1916, p.96). Com uma aproximação grosseira, concluímos a natureza do universo como um todo, tratando a matéria em estado de repouso (EINSTEIN, 1916).

Com o embasamento discutido até o momento, dispomos a partir do comportamento das hastes usadas para medição e os relógios, que os campos gravitacionais são influenciáveis com base nos resultados obtidos para a distribuição de matéria. Logo, isso é suficiente para excluir a possibilidade da validade extra da geometria euclidiana em nosso Universo, mas é

³⁸ In order to escape this dilemma, Seeliger suggested a modification of Newton's law, in which he assumes that for great distances the force of attraction between two masses diminishes more rapidly than would result from the inverse square law. In this way it is possible for the mean density of matter to be constant everywhere, even to infinity, without infinitely large gravitational fields being produced. We thus free ourselves from the distasteful conception that the material universe ought to possess something of the nature of a centre. Of course, we purchase our emancipation from the fundamental difficulties mentioned, at the cost of a modification and complication of Newton's law which has neither empirical nor theoretical foundation. We can imagine innumerable laws which would serve the same purpose, without our being able to state a reason why one of them is to be preferred to the others; for any one of these laws would be founded just as little on more general theoretical principles as is the law of Newton. (EINSTEIN, 1916, p.91).

³⁹ It follows from what has been said, that closed spaces without limits are conceivable. From amongst these, the spherical space (and the elliptical) excels in its simplicity, since all points on it are equivalent. As a result of this discussion, a most interesting question arises for astronomers and physicists, and that is whether the universe in which we live is infinite or whether it is finite in the manner of the spherical universe. Our experience is far from being sufficient to enable us to answer this question. But the general theory of relativity permits of our answering it with a modulate degree of certainty, and in this connection the difficulty mentioned in Section 30 finds its solution. (EINSTEIN, 1916, p.95).

⁴⁰ We know from experience that, for a suitably chosen co-ordinate system, the velocities of the stars are small as compared with the velocity of transmission of light (EINSTEIN, 1916, p.96).

concebível que nosso Universo difere apenas ligeiramente de um euclidiano, e essa noção parece mais provável através dos cálculos que mostram as métricas do espaço circundante, este influenciado apenas em uma extensão extremamente pequena, por massas da mesma magnitude do Sol. Imaginamos então, ao que diz respeito à Geometria, nosso Universo se comporta analogamente a uma superfície que é irregularmente curva em suas partes individuais, mas que nenhum lugar se afasta sensivelmente de um plano, algo como a superfície ondulada de um lago. Tal Universo pode ser apropriadamente chamado de Universo quase euclidiano, e seu espaço seria infinito. Mas o cálculo mostra que em um Universo quase euclidiano, a média da densidade da matéria, seria necessariamente nula, assim, tal Universo não poderia ser habitado por matéria em todos os lugares⁴¹ (EINSTEIN, 1916).

Dessarte, se quisermos ter no Universo uma densidade média de matéria diferente de zero, por menor que seja essa diferença, o Universo não pode ser quase euclidiano. No contrário, os resultados do cálculo indicam que se a matéria for distribuída uniformemente, o Universo seria necessariamente esférico (ou elíptico), uma vez que, na realidade, os detalhes da distribuição da matéria são não uniformes, e o Universo real se desviará em partes individuais do esférico, ou seja, o Universo será quase esférico, contudo, necessariamente finito. De fato, a teoria nos fornece uma conexão simples, no qual, sendo o raio R do Universo, obtemos a equação $R^2 = \frac{2}{kp}$, em que o uso do sistema CGS nesta equação fornece $2/k = 1.08 \cdot 10^{27}$. Se p é a densidade média da matéria e k é uma constante conectada com a constante newtoniana de gravitação, temos entre a extensão do espaço do Universo, a densidade média da matéria presente nele⁴² (EINSTEIN, 1916).

Acreditando ser significativo outra visão sobre o desbravamento da Teoria da Relatividade Geral, é disposto no livro “Relativity: The Special and General Theory”

⁴¹ We might imagine that, as regards geometry, our universe behaves analogously to a surface which is irregularly curved in its individual parts, but which nowhere departs appreciably from a plane: something like the rippled surface of a lake. Such a universe might fittingly be called a quasi-Euclidean universe. As regards its space it would be infinite. But calculation shows that in a quasi-Euclidean universe the average density of matter would necessarily be nil. Thus, such a universe could not be inhabited by matter everywhere; (EINSTEIN, 1916, p. 96).

⁴² If we are to have in the universe an average density of matter which differs from zero, small may be that difference, then the universe cannot be quasi-Euclidean. On the contrary, the results of calculation indicate that if matter be distributed uniformly, the universe would necessarily be spherical (or elliptical). Since in reality the detailed distribution of matter is not uniform, the real universe will deviate in individual parts from the spherical, i.e. the universe will be quasi-spherical. But it will be necessarily finite. In fact, the theory supplies us with a simple connection (For the radius R of the universe we obtain the equation $R^2 = \frac{2}{kp}$. The use of the C.G.S. system in this equation gives $2/k = 1.08 \cdot 10^{27}$; p is the average density of the matter and k is a constant connected with the Newtonian constant of gravitation), between the space-expanse of the universe and the average density of matter in it. (EINSTEIN, 1916, p.97).

(EINSTEIN, 1916), segue a opinião elaborada pelo tradutor Lawson (2004). Segundo Lawson (2004), nosso conhecimento sobre a estrutura do espaço no grande ("problema cosmológico") teve um importante desenvolvimento, que deve ser mencionado mesmo em uma apresentação popular do assunto, à vista disso, conseqüentemente tomou como as considerações originais sobre o assunto baseadas em duas hipóteses:

(1) Existe uma densidade média de matéria em todo o espaço que é sempre igual e diferente de zero; (2) A magnitude ("raio") do espaço é independente do tempo. Ambas as hipóteses se mostraram consistentes, de acordo com a Teoria Geral da Relatividade, mas somente depois que um termo hipotético foi adicionado às equações de campo, um termo que além de não ser exigido pela teoria, tal nem parecia natural do ponto de vista teórico. A hipótese (2) me pareceu inevitável na época, pois pensou que até mesmo quem entrar em especulações sem fundo de estudos, seria algo aceitável e compreensível de imaginar. No entanto, já nos anos 20, o matemático russo Friedman mostrou que uma hipótese diferente era natural de um ponto de vista puramente teórico. Ele percebeu que foi possível preservar a hipótese (1) sem introduzir a teoria cosmológica menos natural ao termo nas equações de campo da gravitação, caso alguém estivesse pronto para descartar a hipótese (2). Ou seja, as equações de campo originais admitem uma solução na qual o "raio do mundo" depende do tempo (expansão do espaço). Nesse sentido pode-se dizer, segundo Friedman, que a teoria exige uma ampliação do espaço. Alguns anos depois, o telescópio Hubble mostrou, por uma investigação especial das nebulosas extragalácticas ("vias lácteas"), que as linhas espectrais emitidas apresentavam um desvio para o vermelho que aumentava regularmente com a distância das nebulosas. Isso pode ser interpretado em relação ao nosso presente conhecimento apenas no sentido do princípio de Doppler (é um fenômeno físico ondulatório que ocorre quando existe aproximação ou afastamento relativo entre uma fonte de ondas e um observador. Esse fenômeno acontece pelo fato de que a velocidade de propagação de uma onda, seja ela qual for, depende exclusivamente do meio pelo qual essa onda propaga-se (HELERBROCK, s.d)), como um movimento expansivo do sistema de estrelas, como exigido, de acordo com Friedman, pelas equações de campo de gravitação. A descoberta de Hubble pode, portanto, ser considerada até certo ponto como uma confirmação da teoria. Surge, no entanto, uma estranha dificuldade, está associada a interpretação da linha galáctica obtida pela mudança descoberta por Hubble como uma expansão (que dificilmente pode ser posta em dúvida a partir de uma teoria ponto de vista), leva a uma origem desta expansão que se situa "apenas" há cerca de 109 anos, enquanto a astronomia física faz parecer provável que o desenvolvimento de estrelas individuais e sistemas de estrelas leva muito mais tempo. Não se sabe como essa incongruência pode ser superado. Quero (Lawson) ainda ressaltar que a teoria da expansão do espaço, juntamente com a teoria empírica com os dados da astronomia, não permite nenhuma decisão sobre o caráter finito ou infinito de espaço (tridimensional), enquanto a hipótese original "estática" do espaço rendeu a fechamento (finitude) do espaço⁴³ (EINSTEIN, 1916, p. 114 - 115).

⁴³ Since the publication of the first edition of this little book, our knowledge about the structure of space in the large ("cosmological problem") has had an important development, which ought to be mentioned even in a popular presentation of the subject. My original considerations on the subject were based on two hypotheses: (1) There exists an average density of matter in the whole of space which is everywhere the same and different from zero. (2) The magnitude ("radius") of space is independent of time. Both these hypotheses proved to be consistent, according to the general theory of relativity, but only after a hypothetical term was added to the field equations, a term which was not required by the theory as such nor did it seem natural from a theoretical point of view ("cosmological term of the field equations"). Hypothesis (2) appeared unavoidable to me at the time, since I thought that one would get into bottomless speculations if one departed from it. However, already in the 'twenties, the Russian mathematician Friedman showed that a different hypothesis was natural from a purely theoretical point of view. He realized that it was possible to preserve hypothesis (1) without introducing the less natural cosmological term into the field equations of gravitation, if one was

A fim de relacionarmos a Teoria da Relatividade aos buracos negros (nosso objetivo a este estudo), os próximos parágrafos são destinados a este relato, o mesmo baseado no livro “Black Holes: A Student Text” (RAINE e THOMAS, 2014).

Em relação aos buracos negros, estes surgem a partir da gravidade que os afeta na maneira em como as ondas de luz viajam pelo espaço. A dinâmica newtoniana não trata do efeito da gravidade sobre a luz, mas podemos usar nossa intuição newtoniana para adivinhar que tipo de interação pode haver, já que existe uma. A propagação da luz é governada por sua velocidade c , então é natural procurar uma velocidade característica na gravidade newtoniana. A óbvia é a velocidade de escape $v_{esc} = (2GM/R)^{1/2}$ de um corpo de massa M e raio R . Assim, esperamos que a luz emitida pelo corpo não consiga escapar para um observador distante quando $v_{esc} > c$, que é quando a massa de um corpo de densidade p excede o valor:

$$M \sim (c^2/G)^{3/2} p^{-1/2},$$

em que usamos a aproximação $p \sim M/R^3$ ⁴⁴ (RAINE e THOMAS, 2014).

Antes da descoberta no século XX das estrelas anãs brancas, as quais mais tarde ficaram conhecidas como estrelas de nêutrons, sendo a matéria mais densa conhecida, compostas com algo parecido ao chumbo, tínhamos que a massa M_* do menor objeto com densidade normal, de cerca de $p_* \sim 5000 \text{ kg m}^{-3}$, que poderia impedir que sua luz escapasse para um observador distante, pareceria ser

$$M_* \sim 10^8 (p_*/p)^{1/2} M_\odot, \quad (13)$$

ready to drop hypothesis (2). Namely, the original field equations admit a solution in which the " world radius" depends on time (expanding space). In that sense one can say, according to Friedman, that the theory demands an expansion of space. A few years later Hubble showed, by a special investigation of the extra-galactic nebulae (" milky ways "), that the spectral lines emitted showed a red shift which increased regularly with the distance of the nebulae. This can be interpreted in regard to our present knowledge only in the sense of Doppler's principle, as an expansive motion of the system of stars in the large — as required, according to Friedman, by the field equations of gravitation. Hubble's discovery can, therefore, be considered to some extent as a confirmation of the theory. There does arise, however, a strange difficulty. The interpretation of the galactic lineshift discovered by Hubble as an expansion (which can hardly be doubted from a theoretical point of view), leads to an origin of this expansion which lies " only " about 109 years ago, while physical astronomy makes it appear likely that the development of individual stars and systems of stars takes considerably longer. It is in no way known how this incongruity is to be overcome. I further want to remark that the theory of expanding space, together with the empirical data of astronomy, permit no decision to be reached about the finite or infinite character of (three-dimensional) space, while the original " static " hypothesis of space yielded the closure (finiteness) of space (EINSTEIN, 1916, p.114-115).

⁴⁴ [...] space. Newtonian dynamics does not treat the effect of gravity on light, but we can use our Newtonian intuition to guess what sort of interaction there might be, given that there is one. The propagation of light is governed by its speed c , so it is natural to look for a characteristic speed in Newtonian gravity. The obvious one is the escape velocity $v_{esc} = (2GM/R)^{1/2}$ from a body of mass M and radius R . So we expect that light emitted from the body will fail to escape to a distant observer when $v_{esc} > c$, that is when the mass of a body of density p exceeds the value $M \sim (c^2/G)^{3/2} p^{-1/2}$, where we have used the approximation $p \sim M/R^3$ (RAINE e THOMAS, 2014, p.1).

em que M_{\odot} é a massa solar. A massa M_* é muito maior do que a de qualquer estrela conhecida. Tal objeto seria invisível ou, como diríamos agora, seria um buraco negro⁴⁵ (RAINE e THOMAS, 2014).

Esses argumentos newtonianos eram conhecidos por Mitchell (o sucessor de Cavendish em Cambridge e a primeira pessoa a realizar o experimento de Cavendish para medir G) e por Laplace, que foi o primeiro a realizar estudos detalhados do problema de muitos corpos no Sistema Solar. Duas coisas mudaram esse quadro. A primeira foi a descoberta de uma Teoria Relativística da gravidade, em específico, a Teoria Geral da Relatividade de Einstein, em que o comportamento da luz sob a influência da gravidade é tratado inequivocamente. A segunda foi a descoberta da matéria com densidades a faixa de 10^9 a $10^{17} \text{ kg m}^{-3}$ na forma de anãs brancas e estrelas de nêutrons. A existência de corpos de densidades tão altas que sugerem que a massa estelar de buracos negros podem existir. Podemos adicionar a estes objetos uma outra classe de astronomia, o qual os núcleos galácticos ativos (ou AGNs), dos objetos centrais têm densidades normais, mas as massas são de ordem $10^8 M_{\odot}$. Esta combinação de massa e densidade tornam os AGNs candidatos a buracos negros⁴⁶ (RAINE e THOMAS, 2014).

Em uma Teoria Relativista da gravidade, por definição, a velocidade local da luz é sempre c , isso considerando a velocidade da luz no vácuo, portanto, sem a ausência de gravidade. Por isso, a imagem newtoniana da luz emitida será desacelerada e girada de volta por consequência da gravidade, portanto, não é apropriado para este caso. No entanto, podemos obter uma verdadeira imagem usando uma aplicação do princípio da equivalência, onde a presença de um campo gravitacional introduz uma aceleração relativa entre a queda livre e os quadros de referência. O princípio da equivalência leva então a um valor aproximado para a

⁴⁵ Before the discovery in the twentieth century of white dwarf stars, and later neutron stars, the densest matter known was something like lead. So the mass M_* of the smallest object having a normal density, of around say $\rho \sim 5000 \text{ kg m}^{-3}$ that could prevent its light from escaping to a distant observer would appear to be $M_* \sim 10^8 (\rho/\rho_{\odot})^{1/2} M_{\odot}$ where M_{\odot} is the solar mass. The mass M_* is very much greater than that of any known star. Such an object would be invisible or, as we would now say, would be a black hole (RAINE e THOMAS, 2014, p.1).

⁴⁶ These Newtonian arguments were known to Mitchell (the successor to Cavendish at Cambridge, and the first person to carry out Cavendish's experiment to measure G) and to Laplace, who was the first to carry out detailed studies of the many-body problem in the Solar System. Two things have changed this picture. The first was the discovery of a relativistic theory of gravity, Einstein's general theory of relativity, in which the behaviour of light under the influence of gravity is treated unambiguously. The second was the discovery of matter having densities in the range 10^9 to $10^{17} \text{ kg m}^{-3}$ in the form of white dwarfs and neutron stars. The existence of bodies of such high densities suggests that stellar mass black holes might exist. We can add to these another class of astronomical object, the active galactic nuclei (or AGNs), in which the central objects have normal densities but masses of the order of $10^8 M_{\odot}$. This combination of mass and density make AGNs candidates for black holes (RAINE e THOMAS, 2014, p.1-2).

relação entre o intervalo de tempo dr medido no raio R de um corpo de massa M e o intervalo de tempo correspondente dr' medido no infinito⁴⁷ (RAINE e THOMAS, 2014):

$$dr \approx \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{\frac{1}{2}} dr'. \quad (14)$$

A relação exata depende da teoria da gravidade completa. Isso diz que um relógio no raio r corre devagar em comparação com um relógio no infinito. Há um “redshift” (uma variação de luz com o efeito doppler) correspondente a z em comparação a luz emitida na frequência ω e recebida em ω' dado por $\omega/\omega' = 1 + z = dr'/dr$. Isso sugere que $z \rightarrow \infty$ como o potencial newtoniano $2GM/R \rightarrow c^2$ e, portanto, que a luz da superfície de um corpo neste potencial seria “redshifted” para a invisibilidade. Por isso o corpo seria um buraco negro. Logo, a condição relativista $2GM/R = c^2$ é naturalmente, analiticamente a mesma condição newtoniana $v_{esc} = c$. Mas a condição para que a aproximação newtoniana seja válida é que $GM/R \ll c^2$, então exigimos a teoria da gravidade completa para investigar esse comportamento consistente e para tratar os buracos negros corretamente. Além disso, o potencial gravitacional na superfície de uma estrela de nêutrons é de cerca de $0.1 c^2$, então precisamos de uma Teoria Relativista Geral da evolução estelar para ter certeza de compreensão da evolução além deste estágio⁴⁸ (RAINE e THOMAS, 2014).

A substituição da Teoria da Gravidade de Newton pela Teoria Geral de Einstein, não altera a associação entre massa e densidade, exceto que agora a densidade deve ser interpretada como a densidade média dentro do limite do buraco negro (não rotativo). Mas isso altera nossa imagem do espaço-tempo de um buraco negro e como ele gravita. Um buraco negro relativístico não tem superfície material, em que toda a sua matéria se desmoronou em uma singularidade

⁴⁷ In a relativistic theory of gravity, by definition, the local speed of light is always c , the speed of light in a vacuum in the absence of gravity. The Newtonian picture of the emitted light being slowed down and turned back by gravity is therefore not appropriate. However, we can get a truer picture from an application of the equivalence principle. The presence of a gravitational field introduces a relative acceleration between freely falling frames of reference. The equivalence principle then leads to an approximate relation between time interval dr measured at radius R from a body of mass M and the corresponding time interval dr' measured at infinity (Will, 1993) (The exact relation depends on the full theory of gravity.) This says that a clock at radius r runs slow compared to a clock at infinity. There is a corresponding redshift z of light emitted at frequency ω and received $dr \approx \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{\frac{1}{2}} dr'$ (RAINE e THOMAS, 2014, p.2).

⁴⁸ (The exact relation depends on the full theory of gravity.) This says that a clock at radius r runs slow compared to a clock at infinity. There is a corresponding redshift z of light emitted at frequency ω and received at ω' given by $\omega/\omega' = 1 + z = dr'/dr$. This suggests that $z \rightarrow \infty$ as the Newtonian potential $2GM/R \rightarrow c^2$ and hence that the light from the surface of a body at this potential would be redshifted to invisibility. Thus the body would be a black hole. The relativistic condition $2GM/R = c^2$ is, of course, analytically the same as the Newtonian condition $v_{esc} = c$. But the condition for the Newtonian approximation to be valid is that $GM/R \ll c^2$, so we require the full theory of gravity to investigate this behaviour consistently and to treat black holes correctly. Furthermore, the gravitational potential on the surface of a neutron star is about $0.1 c^2$ so we need a general relativistic theory of stellar evolution to be confident of understanding evolution beyond this stage (RAINE e THOMAS, 2014, p.2).

que é cercada por um limite esférico chamado de seu horizonte de eventos. O horizonte de eventos é uma superfície de mão única, onde as partículas e os raios de luz podem entrar no buraco negro de fora, mas nada pode escapar de dentro do horizonte do buraco para o Universo externo (RAINE e THOMAS, 2014).

Uma saída fóton que se origina fora do horizonte de eventos pode se propagar ao infinito mas ao fazê-lo sofrer um desvio gravitacional para o vermelho, em que na linguagem newtoniana, seria a mesma coisa que perder energia ao realizar o trabalho contra o potencial gravitacional. Este “redshift” é maior quanto mais próximo o ponto de emissão estiver do horizonte. Por outro lado, um fóton ou partícula emitida dentro do horizonte em qualquer direção deve inevitavelmente encontrar a singularidade e ser aniquilado. Isto é estritamente verdade apenas no tipo mais simples de buraco negro, em buracos negros mais gerais a destruição não é inevitável e o destino de uma partícula ou fóton dentro o buraco é mais complicado. Um fóton emitido no horizonte em direção a um observador distante permanece lá indefinidamente. Por podemos considerar que o horizonte seria composto de fótons direcionados para fora⁴⁹ (RAINE e THOMAS, 2014).

Desta maneira, temos que a importância dos buracos negros para a física gravitacional é clara, onde sua existência é um teste de nossa compreensão de campos gravitacionais fortes, além de ser o ponto de pequenas correções à física newtoniana, e um teste de nossa compreensão da astrofísica, particularmente da evolução estelar. A teoria da evolução estelar, juntamente com a relatividade geral, mostra que os buracos negros são uma consequência quase inevitável da forma como as estrelas massivas evoluem. Com isso, esperamos encontrar buracos negros entre as estrelas da Galáxia, e parece que tal afirmação está correta, pois existe uma forte evidência observacional de sua existência. As ondas gravitacionais emitidas nos estágios finais

⁴⁹ The replacement of Newton’s theory of gravity by Einstein’s general theory of relativity does not alter the relationship between mass and density in equation (1.1), except that now the density is to be interpreted as the average density within the boundary of the (non-rotating) black hole. But it does alter our picture of the spacetime of a black hole and how it gravitates. A relativistic black hole has no material surface; all of its matter has collapsed into a singularity that is surrounded by a spherical boundary called its event horizon. The event horizon is a one-way surface: particles and light rays can enter the black hole from outside but nothing can escape from within the horizon of the hole into the external universe. An outgoing photon that originates outside the event horizon can propagate to infinity but in so doing it suffers a gravitational redshift: in Newtonian language it loses energy in doing work against the gravitational potential. This redshift is larger the closer the point of emission is to the horizon. On the other hand, a photon or particle emitted inside the horizon in any direction must inevitably encounter the singularity and be annihilated. (This is strictly true only in the simplest type of black hole: in more general black holes destruction is not inevitable and the fate of a particle or photon inside the hole is more complicated.) A photon emitted at the horizon towards a distant observer stays there indefinitely. For this reason, one can think of the horizon as made up of outwardly directed photons (RAINE e THOMAS, 2014, p.2-3).

de um sistema binário, à medida que se aglutina, formará um único buraco negro , sendo um teste aplicado das previsões da Relatividade Geral⁵⁰ (RAINE e THOMAS, 2014).

Portanto, em 1916, o físico alemão Albert Einstein não detinha como apoio, nada além de teorias, cálculos e uma curiosidade sobre a natureza regida pela Física. Com isso, a partir da solução Schwarzschild obtida no ano de 1916 por Karl Schwarzschild, mostrando que em certos pontos a teoria da relatividade restrita não é válida (chamado de singularidade), ou seja, é possível a existência de objetos no espaço-tempo que não respeitam as leis da natureza, provando de certo modo, a existência de buracos negros a partir da teoria de Einstein.

⁵⁰ The importance of black holes for gravitational physics is clear: their existence is a test of our understanding of strong gravitational fields, beyond the point of small corrections to Newtonian physics, and a test of our understanding of astrophysics, particularly of stellar evolution. The theory of stellar evolution, together with general relativity, shows that black holes are an almost inevitable consequence of the way that massive stars evolve. We therefore expect to find black holes amongst the stars in the Galaxy, and it appears that we do. The observational evidence for their existence is now very strong indeed. The gravitational waves emitted in the final stages of a black hole binary as it coalesces to form a single black hole would form a test of the predictions of general relativity (RAINE e THOMAS, 2014, p.3).

CAPÍTULO 4 – CONCLUSÃO

Nesta seção responderei à questão realizada inicialmente sobre “Como a matemática contribui na comprovação da existência dos buracos negros?”, usando os estudos apresentados tanto no capítulo 2 quanto, principalmente, no capítulo 3, este que nos traz uma perspectiva introdutória sobre a Teoria da Relatividade Geral e uma conceituação sobre a Teoria da Relatividade Restrita.

A curiosidade humana é advinda desde os primórdios da existência humana. Em suma, nos estudos pertinentes aos buracos negros, em particular as Teorias discutidas nos capítulos anteriores, é possível observar o quão pertinente e necessário foi a Matemática em nossa sociedade. A exemplo nos cálculos realizados para a obtenção de como seria a modificação realiza por Einstein (equação 3), a qual tem por propósito que a ação e reação continuem iguais na modificação, e isso implique na existência da conservação do momento da mesma forma que antes (a advinda pela segunda lei de Newton, equação 1), porém, a quantidade que está sendo conservada não a antiga massa constante, se tornando uma quantidade transformada, com a massa modificada. Observe que a mudança é feita na fórmula do momento, e a conservação do momento ainda funciona (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008). Ou seja, conforme a abrangência do nosso conhecimento tanto físico quanto matemático, manipular fórmulas ou equações a fim de prever certas ocasiões por meio de uma simplificação matemática dos conceitos relacionados.

Portanto, é fato que a Matemática está presente em todos os cálculos apresentados no capítulo 3, mesmo que estes sejam mais direcionados a parte física da situação retratada. Afinal, necessitamos de uma base Matemática para compreender a Física, e isto em situação inversa. Isto posto, perceba que sem pelo menos a compreensão do Cálculo básico, não conseguiríamos chegar em tais resoluções. Sendo interessante o fato que tais cálculos apresentados estavam em sua fase inicial na história da Física, mas ao mesmo tempo já retratava o que chamamos atualmente como Física Moderna, prevendo situações futuras baseadas a partir de teorias bem sustentadas fisicamente e matematicamente. É significativo refletir nesta parte, que tais teorias foram elaboradas por vários estudiosos, que as demonstravam através de experiências (quando possível), mas principalmente por meio de fórmulas ou equações. E apesar da evolução que estamos hoje neste mundo Físico e Matemático, tais teorias, como a Teoria da Relatividade, são sustentadas e tão bem definidas, sendo ainda usadas nos dias atuais a fim de provar e buscar novos conhecimentos.

Concluimos então, que os cálculos matemáticos são extremamente significantes nos estudos realizados sobre os buracos negros, os quais até mesmo são usados pelos astrônomos

em busca de uma melhor compreensão sobre este objeto. Afinal, se até mesmo Einstein através de cálculos matemáticos conseguiu prever sua existência antes mesmo da comprovação visual feita em 10 de abril de 2019, do buraco negro Pōwehi, presente no centro da galáxia M87 (Messier 87), seria tolice duvidar de sua importância.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Carla Rodrigues. **Buracos negros: mais de 100 anos de história.** Cadernos de Astronomia, vol. 2, nº 1, 93-105 (2021).

CASTIÑEIRAS, Jorge; CRISPINO, Luís C. B. **Relatividade geral: Fundamentos e primeira comprovação experimental.** Ciência e Cultura, s.a. Disponível em: <<http://cienciaecultura.bvs.br/pdf/cic/v71n3/v71n3a07.pdf>>. Acesso em: 18 de maio de 2022.

DIAS, Fabiana. **Segunda lei de Newton (princípio fundamental da dinâmica).** Educa+Brasil. Disponível em: <<https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/fisica/segunda-lei-de-newton-principio-fundamental-da-dinamica>>. Acesso em: 25 de maio de 2022.

EINSTEIN, Albert; LAWSON, Robert W. **Relativity: The Special and General Theory.** New York: Henry Holt and Company, 1920.

FEYNMAN, Richard P.; LEIGHTON, Robert B; SANDS, Matthew. **Lições de Física: The Feynman Lectures on Physics.** 2 edição. Porto Alegre: Bookman, 2008.

FILHO, Kepler de Souza Oliveira; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. **Evolução Final das estrelas.** UFRGS, s.d. Disponível em: < <http://astro.if.ufrgs.br/estrelas/node14.htm>>. Acesso em: 02 agosto de 2021.

GARNER, Rob. **What Are Black Holes?** NASA, 8 de set. de 2020. Disponível em: <https://www.nasa.gov/vision/universe/starsgalaxies/black_hole_description.html>. Acesso em: 02 agosto de 2021.

HERDEIRO, Carlos A. R. **Um prêmio Nobel para os Buracos Negros.** Dept. Matemática e CIDMA, Universidade de Aveiro. Artigo geral, vol. 43, n. 3/4.

NEVES, Juliano. **Relatividade bem comportada: buracos negros regulares.** Revista Brasileira Ensino Física, n. 39, 17 jan. 2017.

RAINE, Derek; THOMAS, Edwin. **Black Holes: A Student Text.** 3rd edition. Imperial College Press, 2015.

SAA, Alberto. **Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild.** Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbef/a/q4zDXXHmZ7f6JMtk9hWWqZc/?format=pdf&lang=pt>>. Acesso em 12 jul. 2021.

SANTOS, Marcos dos. **Interpretações e controvérsias nas teorias do éter e do vácuo.** Orientador: professor doutor Ubiratan D'Ambrosio. 2015. 85 f. Dissertação (Mestrado)

– História da Ciência, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em:<[2015.https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/13313/1/Marcos%20dos%20Santos.pdf](https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/13313/1/Marcos%20dos%20Santos.pdf)> Acesso em: 13 de maio de 2022.

SILVA, Alanah Garcia et al. **Análise da história da Teoria da Relatividade Restrita em livros didáticos do terceiro ano do ensino médio indicados no PNLEM 2015/2017.** Latin-American Journal of Physics Education, Mato Grosso do Sul, 4 de ago. 2019. Vol. 13. p. 5 – 13.

Solar System Exploration. NASA, 2021. Disponível em:<<https://solarsystem.nasa.gov/planets/mercury/overview/>>. Acesso em: 10 de maio de 2022.

STEINER, João E. **Buracos negros: Sementes ou cemitérios de galáxias?** 2010. 723-742f. v.27. Periódico - Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/download/2175-7941.2010v27nespp723/17204/57463>>. Acesso em: 6 de abril de 2022.

TOTH, Viktor T.; TURYSHEV, Slava G. **Image recovery with the solar gravitational lens.** Canada and Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology. Canada, v.2,14 junho de 2021. Disponível em:< <https://arxiv.org/pdf/2012.05477.pdf>>. Acesso em: 10 de maio de 2022.

TURYSHEV, Slava. **Direct Multipixel Imaging and Spectroscopy of an Exoplanet with a Solar Gravitational Lens Mission.** NASA, 2020. Disponível em:<https://www.nasa.gov/directorates/spacetech/niac/2020_Phase_I_Phase_II/Direct_Multipixel_Imaging_and_Spectroscopy_of_an_Exoplanet/>. Acesso em: 9 de maio de 2022.